

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

CARLOS EDUARDO DE CAMPOS

**PROFESSORES, RECURSOS CURRICULARES E O ENSINO DE COMBINATÓRIA
NO CONTEXTO DAS REFORMAS CURRICULARES E DO ENSINO MÉDIO:
O CASO DA REDE ESTADUAL PAULISTA DE ENSINO**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2024

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Carlos Eduardo de Campos

**PROFESSORES, RECURSOS CURRICULARES E O ENSINO DE COMBINATÓRIA
NO CONTEXTO DAS REFORMAS CURRICULARES E DO ENSINO MÉDIO:
O CASO DA REDE ESTADUAL PAULISTA DE ENSINO**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia
Universidade de São Paulo, como exigência parcial
para a obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora
Doutora Sonia Barbosa Camargo Iglioni**.*

São Paulo

2024

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura_____

Local e Data

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

C198

Campos, Carlos Eduardo de
Professores, recursos curriculares e o ensino de
combinatória no contexto das reformas curriculares e do
ensino médio: o caso da rede estadual paulista de ensino. /
Carlos Eduardo de Campos. -- São Paulo: [s.n.], 2024.
317p. ; cm.

Orientador: Sonia Barbosa Camargo Iglioni.
Dissertação (Mestrado)-- Pontifícia Universidade Católica de
São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação
matemática.

1. Combinatória. 2. Recursos Curriculares. 3. Currículo do
Estado de São Paulo. 4. Abordagem Documental do Didático.
I. Iglioni, Sonia Barbosa Camargo. II. Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós
Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

CARLOS EDUARDO DE CAMPOS

**PROFESSORES, RECURSOS CURRICULARES E O ENSINO DE
COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DAS REFORMAS CURRICULARES E DO
ENSINO MÉDIO: O CASO DA REDE ESTADUAL PAULISTA DE ENSINO**

Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo, como exigência parcial para obtenção
do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA.

Aprovado em: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni (Orientadora) – PUC-SP

Profa. Dra. Katiane de Moraes Rocha – sem vínculo

Prof. Dr. Francisco Etevaldo da Silva Feitosa – UFAM

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP

Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar – PUC-SP

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 – processo 88887.370565/2019-00.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001 – processo 88887.370565/2019-00.

Agradecimentos

Ao meu marido Osmar, pelo apoio que me deu desde quando decidi começar a jornada do doutorado, estando ao meu lado por todo esse período, sobretudo nos momentos mais desafiadores.

Aos meus filhos Jader, Tamiris e Matheus, aos meus netos Arthur, Bernardo e Samuel, à Clícia, ao Bruno e à Vivian, que formam a família que me acolheu e que esteve também comigo durante toda essa jornada.

Aos meus pais Carlos e Santina, às minhas irmãs, Flávia e Regiane, às minhas sobrinhas Mariene, Marília e Maria Fernanda e ao meu sobrinho Felipe, pelo incentivo e carinho de sempre.

À minha orientadora, Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Iglori, por novamente aceitar o desafio de me acompanhar e orientar com toda paciência e dedicação.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, em especial os professores Saddo Ag Almouloud, Maria José Ferreira da Silva, Ana Lúcia Manrique, Fumikazu Saito, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, pelos encontros semanais fundamentais para o amadurecimento dessa investigação.

Aos meus colegas do doutorado, por partilharem conhecimentos, experiências, alegrias, frustrações e conquistas.

Aos gestores e coordenadores dos colégios Santa Mônica e Aruã, de Mogi das Cruzes, pela compreensão nos momentos em que as necessidades da pesquisa se sobrepuseram ao trabalho docente.

Aos meus alunos pelo carinho e admiração dispensados a mim, sentimentos esses retribuídos em igual intensidade.

Ao professor Douglas Felipe de Jesus Silva, pela amizade e companheirismo, cuja ajuda no desenvolvimento dessa pesquisa foi inestimável.

À Jeane Conceição Nunes do Santos, psicoterapeuta que me acompanhou e me escutou durante todo esse processo do doutorado, sobretudo nos mais difíceis.

Ao Lucas Arrivetti da Silva, educador físico e amigo por também se fazer ouvidos durante os nossos treinos.

“A crise da educação no Brasil não é crise: é projeto”

Darcy Ribeiro

CAMPOS, C.E. **Professores, recursos curriculares e o ensino de combinatória no contexto das reformas curriculares e do ensino médio**: o caso da rede estadual paulista de ensino. 2024. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC-SP. São Paulo. 2024. 315 páginas.

RESUMO

A investigação relatada neste documento tem por foco recursos curriculares produzidos para o ensino de combinatória, no âmbito da Rede Estadual de Ensino de São Paulo, com vistas a investigar a adequação a resultados de pesquisas. Desde a homologação do Currículo Paulista entre os anos de 2019 e 2020 a Secretaria de Educação de São Paulo (SEDUC-SP) produziu e disponibilizou a professores e estudantes uma série de recursos físicos e digitais que constituem o programa *Currículo em Ação*, visando à implementação desse documento curricular nas escolas públicas. É nesse contexto que a investigação, de cunho qualitativo, objetiva avaliar em que aspectos o material fornecido pela SEDUC-SP se aproxima ou se afasta dos elementos apontados em pesquisas, como primordiais, para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e, como esses recursos, juntamente com outros possíveis, são articulados pelos professores no ensino de combinatória. Como orientação foram propostas duas indagações: a) que situações, invariantes operatórios e representações simbólicas podem ser inferidos da proposta de abordagem para o ensino de combinatória nos recursos físico e digital do programa *Currículo em Ação*? b) que invariantes operatórios são mobilizados por professores na utilização desses recursos curriculares e como eles se articulam no contexto de outros recursos que, eventualmente, eles utilizem para o ensino de combinatória? Para responder a primeira, foram analisadas as situações combinatórias e as situações de ensino de combinatória, presentes nos materiais físico (caderno do professor) e digital (*slides* e tarefas *on-line*) do programa *Currículo em Ação*. Nessa etapa, as análises foram feitas com base na Análise de Conteúdo de Bardin e à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, para quem um conceito deve abranger três conjuntos fundamentais: situações, invariantes operatórios (objeto, relações, propriedades, teoremas) e representações simbólicas. Pelas análises dos materiais físico e digital foram observados: 1. situações combinatórias escassas e pouco diversas; 2. pouca exploração de representações como árvore de possibilidades, listagem e tabelas; 3. priorização do uso de fórmulas, sobretudo no material digital; 4. situações de ensino de combinatória pautadas na definição, apresentação de fórmulas, exemplos e exercícios de aplicação. No que concerne à segunda indagação, acompanhamos dois professores de matemática, ambos lecionando em turmas de 2º. ano do ensino médio de escolas da Rede Estadual Paulista de Educação, e um terceiro que leciona em escola privada para auxiliar as análises. Os dados foram coletados e analisados a partir dos pressupostos teóricos da Abordagem Documental do Didático de Trouche, Gueudet e Pepin que propuseram o que chamaram de documento, ou seja, aquilo que o professor prepara, cria ou recria a partir de recursos de que dispõe. Essa abordagem vai de par a constructos de Vergnaud, como esquema e campos conceituais. Esses autores concebem que a ação do professor na produção de documentos (gênese documental) é sempre mediada por esquemas de utilização de recursos constituindo, assim, seu trabalho documental. O acompanhamento do professor em

seu trabalho documental exigiu a construção de aporte metodológico próprio: a Investigação Reflexiva do trabalho documental do professor. Com base nos princípios desse aporte buscamos acompanhar os três participantes dessa pesquisa na preparação e execução de suas aulas sobre combinatória. A coleta de dados foi feita remotamente por meio de entrevistas semiestruturadas, pela participação e observação presencial das aulas dos dois primeiros professores participantes, e pelo acompanhamento da preparação das aulas pelo terceiro. A integração dos recursos do programa *Currículo em Ação* ao trabalho documental dos participantes deu-se de modos diferentes. No caso do primeiro professor, não observamos integrações desses recursos a outros voltado para o ensino de combinatória, tendo optado pelo uso integral das informações contidas em um *site* educacional. A segunda participante utilizou o material digital integrando-o ao livro didático, porém sem efetuar adequações ou críticas quanto à maneira como a combinatória é abordada nesse material. O terceiro, ao preparar suas aulas, estabeleceu recortes no caderno do professor a fim de adequá-lo ao modo como concebe o ensino de combinatória, modo esse pautado, sobretudo, no uso dos princípios multiplicativo e aditivo como principais estratégias na resolução de situações de contagem. Por essas observações consideramos importante estreitar a relação entre pesquisadores e docentes, com vistas à constituição colaborativa de esquemas de utilização de recursos, sejam eles curriculares ou de outra natureza, alicerçadas nos que dizem os estudos sobre a constituição e desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Palavras-chave: Combinatória. Recursos Curriculares. Currículo do Estado de São Paulo. Teoria dos Campos Conceituais. Abordagem Documental do Didático

ABSTRACT

The investigation reported in this document focuses on curricular resources produced for the teaching of combinatorics, within the scope of the São Paulo State Education Network, with a view to investigating their adequacy to research results. Since the approval of the São Paulo Curriculum between 2019 and 2020, the São Paulo Education Department (SEDUC-SP) has produced and made available to teachers and students a series of physical and digital resources that constitute the *Currículo em Ação* program, aiming at the implementation of this curricular document in public schools. It is in this context that the investigation, of a qualitative nature, aims to evaluate in which aspects the material provided by SEDUC-SP approaches or moves away from the elements identified in research, as essential, for the development of combinatorial reasoning, and, as these resources, along with other possibilities, are articulated by teachers in the teaching of combinatorics. As guidance, two questions were proposed: a) what situations, operational invariants and symbolic representations can be inferred from the proposed approach for teaching combinatorics in the physical and digital resources of the *Currículo em Ação* program? b) what operational invariants are mobilized by teachers when using these curricular resources and how are they articulated in the context of other resources that they eventually use to teach combinatorics? To answer the first, combinatorial situations and combinatorial teaching situations were analyzed, present in the physical materials (teacher's notebook) and digital materials (slides and online tasks) of the *Currículo em Ação* program. At this stage, analyzes were carried out based on Bardin's Content Analysis and considering Vergnaud's Conceptual Field Theory, for whom a concept must encompass three fundamental sets: situations, operational invariants (object, relations, properties, theorems) and symbolic representations. Through the analysis of physical and digital materials, the following were observed: 1. scarce and little diverse combinatorial situations; 2. little exploration of representations such as possibility trees, lists and tables; 3. prioritization of the use of formulas, especially in digital material; 4. combinatorics teaching situations based on definition, presentation of formulas, examples, and application exercises. Regarding the second question, we followed two mathematics teachers, both teaching in 2nd grade classes of high school from schools in the São Paulo State Education Network, and a third who teaches in a private school to assist with the analyses. The data was collected and analyzed based on the theoretical assumptions of the Documentational Approach to Didactics by Trouche, Gueudet and Pepin, who proposed what they called documents, that is, what the teacher prepares, creates, or recreates based on the resources available to them. This approach goes hand in hand with Vergnaud's constructs, such as schema and conceptual fields. These authors conceive that the teacher's action in the production of documents (documentary genesis) is always mediated by resource use schemes, thus constituting their documentary work. Monitoring the teacher in his documentary work required the construction of his own methodological contribution: the Reflective Investigation of the teacher's documentary work. Based on the principles of this contribution, we sought to accompany the three participants in this research in the preparation and execution of their classes on combinatorics. Data collection was carried out remotely through semi-structured interviews, through participation and in-person observation of

classes by the first two participating teachers, and by monitoring the preparation of classes by the third. The integration of resources from the *Currículo em Ação* program into the participants' documentary work took place in different ways. In the case of the first teacher, we did not observe integration of these resources with others aimed at teaching combinatorics, having opted for full use of the information contained on an educational website. The second participant used the digital material, integrating it into the textbook, but without adjusting or criticisms regarding the way in which combinatorics is approached in this material. The third, when preparing his classes, established clippings in the teacher's notebook to adapt it to the way he conceives the teaching of combinatorics, a way that is based, above all, on the use of multiplicative and additive principles as main strategies in resolving situations of score. Due to these observations, we consider it important to strengthen the relationship between researchers and teachers, with a view to the collaborative creation of schemes for the use of resources, whether curricular or of another nature, based on what studies on the constitution and development of combinatorial reasoning say.

Keywords: Combinatorics. Curricular Resources. Curriculum of the State of São Paulo. Conceptual Field Theory. Documentational Approach to Didactics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação Esquemática do Trabalho Documental do Professor.....	85
Figura 2 – Representação Esquemática do Campo Conceitual Multiplicativo	112
Figura 3 – Mapa conceitual de combinatória com foco nos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação.....	115
Figura 4 – Rubrica (em azul) com as orientações para a <i>Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório</i>	153
Figura 5 – <i>Slide</i> inicial da aula sobre o Princípio fundamental da contagem – Parte I	156
Figura 6 – Problemas 1.1 e 1.2 da <i>Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório</i>	160
Figura 7 - Estratégia sugerida para a resolução do problema 1.1	161
Figura 8 – Estratégia sugerida para a resolução do problema 1.2.....	161
Figura 9 – Exemplo 1 – Aplicação do princípio fundamental da contagem.....	162
Figura 10 – Enunciado do problema 1.3 com a proposta de resolução	162
Figura 11 – Exemplo 2 – Formação de números de quatros Algarismos distintos ..	163
Figura 12 – Problemas 1.4a, 1.4b e 1.5 com as respectivas propostas de resolução baseadas no princípio multiplicativo	163
Figura 13 – Problema 1.6 e proposta de resolução	164
Figura 14 – Exercício 1.7 sobre o cálculo de números fatoriais com a proposta de resolução	164
Figura 15 – Problema 2.1 e proposta de resolução presentes no caderno do professor.....	177
Figura 16 – Problema 2.2 e proposta de resolução presentes no Caderno do professor	178
Figura 17 – Problema 2.3 e proposta de resolução presentes no Caderno do professor	179
Figura 18 – Problema 2.4 e proposta de resolução presentes no Caderno do professor	179
Figura 19 – Problema 2.5 e proposta de resolução presentes no caderno do professor	192
Figura 20 – Problema 2.6 e proposta de resolução do item a presente no Caderno do professor	193

Figura 21 – Problema 2.7 e proposta de resolução presentes no caderno do professor	201
Figura 22 – Problema 2.8 e proposta de resolução presentes no caderno do professor	202
Figura 23 – Problema 2.9 e proposta de resolução para os itens a e b presentes no caderno do professor	203
Figura 24 – Problema 2.10 e proposta de resolução presentes no caderno do professor	204
Figura 25 – Fórmula para o cálculo do número de combinações simples	205
Figura 26 – Problema 3.1 e proposta de resolução presentes no caderno do professor	212
Figura 27 – Situação introdutória do problema 3.4 presente no Caderno do professor	213
Figura 28 – Exemplo de um <i>slide</i> com problema S10.3 sobre combinação simples acompanhada de uma situação de restrição (item b)	241
Figura 29 – Página referente à <i>Lição 5</i> sobre combinações simples	249
Figura 30 – Primeira página da plataforma <i>Khan Academy</i> em português	252
Figura 31 – Página referente ao primeiro problema proposto sobre combinação simples na plataforma <i>Khan Academy</i>	253
Figura 32 – Problemas S5.5 e T5.2 sobre arranjos simples	259
Figura 33 – Representação Esquemática do Trabalho Documental do professor Gabriel	263
Figura 34 – Sistemas de recursos do professor Gabriel	264
Figura 35 – <i>Slide 7</i> : Tipos de Combinatória	266
Figura 36 – <i>Slides</i> referente à combinação simples	269
Figura 37 – Representação esquemática da trajetória documental da professora Maria Clara	271
Figura 38 – Resolução do problema S4.1 feita, na lousa, por uma aluna.....	274
Figura 39 – Mapeamento Reflexivo da Trajetória Documental do Professor Marcos ..	280
Figura 40 – Primeira página do material elaborado pelo professor Marcos	285
Figura 41 – Situação envolvendo o princípio aditivo em que figura o conectivo lógico e.....	287
Figura 42 – Segunda página do material elaborado pelo professor Marcos – Princípio da Preferência.....	288

Figura 43 – Segunda página do material elaborado pelo professor Marcos – Princípio Aditivo	290
Figura 44 – Terceira página das anotações do professor Marcos – o fatorial.....	291
Figura 45 – Quarta página das anotações do professor Marcos – permutação simples.....	293
Figura 46 – Resolução do exemplo selecionado para a abordagem permutação simples.....	294
Figura 47 – Quinta página das anotações do professor Marcos – arranjo simples.	295

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades referentes à unidade temática Contagem que se encontra nos PCNs+ de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias	45
Quadro 2 – Habilidades referentes à combinatória a serem desenvolvidas no 8º. ano do ensino fundamental	46
Quadro 3 – Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio	47
Quadro 4 – Eixos temáticos e objetivos, para o ensino de combinatória, distribuídos ano a ano do ensino médio de acordo com texto provisório de BNCC de 2016	48
Quadro 5 – Competência e habilidade a serem desenvolvidas com o ensino de combinatória – BNCC – Ensino Médio	49
Quadro 6 – Distribuição dos trabalhos por grupos	53
Quadro 7 – Conceituação de esquemas por Piaget e Vergnaud	81
Quadro 8 – Problemas presentes em quatro livros analisados por Pinheiro (2015)	116
Quadro 9 – Organização dos problemas combinatórios segundo Pessoa e Borba (2010)	118
Quadro 10 – Algumas representações simbólicas atreladas às situações combinatórias.....	119
Quadro 11 – Diferentes possibilidades no modelo de seleção	121
Quadro 12 – Competência específica, habilidade, unidade temática e objeto de conhecimento relacionados ao saber <i>combinatória</i>	154
Quadro 13 – Pressupostos metodológicos para o ensino de combinatória	155
Quadro 14 – Momentos e atividades da <i>Situação de Aprendizagem 2 – O Princípio Fundamental da Contagem</i>	155
Quadro 15 – Categorização dos problemas combinatórios da <i>Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório</i>	167
Quadro 16 – Informações contidas no Guia do Professor referentes ao vídeo <i>De malas prontas</i>	171
Quadro 17 – Orientações para as ações do professor no uso do vídeo <i>De malas prontas</i>	172
Quadro 18 – Objetivos e Invariantes operatórios inferidos das ações sugeridas no <i>Atividade 1</i>	176

Quadro 19 – Categorização dos problemas combinatórios da <i>Atividade 2 – Os Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem</i> voltados para o ensino de permutação	182
Quadro 20 – Objetivos e Invariantes operatórios inferidos das ações sugeridas na <i>Atividade 2 para o ensino de permutação</i>	187
Quadro 21 – Informações contidas no Guia do Professor referentes ao vídeo <i>De malas prontas</i>	188
Quadro 22 – Orientações para as ações do professor no uso do vídeo <i>A cartomante</i>	190
Quadro 23 – Categorização dos problemas combinatórios da <i>Atividade 2 – Os desdobramentos do ensino fundamental da contagem</i> voltados para o ensino de arranjo (simples)	195
Quadro 24 – Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da <i>Atividade 2</i> para o ensino de arranjo simples	199
Quadro 25 – Categorização dos problemas combinatórios da <i>Atividade 2 – Os desdobramentos do princípio fundamental da contagem</i> voltados para o ensino de combinação	207
Quadro 26 – Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da <i>Atividade 2</i> para o ensino de combinação simples	210
Quadro 27 – Categorização dos problemas combinatórios da <i>Atividade 3 – Aprimorando a fluência na elaboração de problemas</i> voltados para o ensino de arranjo (simples)	215
Quadro 28 – Categorização dos problemas combinatórios da <i>Atividade 4 – #Mão na Massa</i>	218
Quadro 29 – Orientações para as ações do professor na abordagem da <i>Atividade 4 – #Mãos na massa</i>	220
Quadro 30 – categorização dos problemas do <i>Slide 1 – Princípio Fundamental da Contagem I</i>	225
Quadro 31 – Categorização dos problemas do <i>Slide 2 – Princípio Fundamental da Contagem II</i>	227
Quadro 32 – Categorização dos problemas do <i>Slide 3 – Permutação I</i>	230
Quadro 33 – Categorização dos problemas do <i>Slide 4 – Permutação II</i>	232
Quadro 34 – Categorização dos problemas do <i>Slide 5 – Arranjo I</i>	235
Quadro 35 – Categorização dos problemas do <i>Slide 6 – Arranjo II</i>	237

Quadro 36 – Categorização dos problemas do <i>Slide</i> 7 – Arranjo III	239
Quadro 37 – Categorização dos problemas do <i>Slide</i> 8 – Combinação I.....	243
Quadro 38 – Categorização dos problemas do <i>Slide</i> 9 – Combinação II.....	244
Quadro 39 – Categorização dos problemas do <i>Slide</i> 10 – Combinação III.....	246
Quadro 40 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos das aulas da professora Maria Clara	278
Quadro 41 – Objetivos inferidos e invariantes operatórios do subtema árvore de possibilidades e princípio multiplicativo	287
Quadro 42 – Objetivos inferidos e invariantes operatórios do subtema princípio da preferência.....	289
Quadro 43 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos do subtema princípio aditivo	290
Quadro 44 – Objetivos e invariantes inferidos do subtema fatorial	292
Quadro 45 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos do subtema permutação simples.....	295
Quadro 46 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos sobre o subtema arranjos simples.....	297

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição das teses e dissertações sobre ensino e aprendizagem de combinatória considerando as cinco perspectivas investigativas apontadas por Campos e Igliori (2021)	53
Tabela 2 – Recursos no preparo das aulas de matemática apontados por 29 professores que ensinam pesquisados em 2020	105
Tabela 3 – Comparação dos valores de n, n^2, n^3 e $n!$	172

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Distribuição, em porcentagem, dos problemas de acordo com os conceitos combinatórios em jogo	256
Gráfico 2 – Distribuição, em porcentagem, dos problemas combinatórios dos materiais físico e digital do programa <i>Currículo em Ação</i> , segundo o modelo combinatório implícito	257
Gráfico 3 – Distribuição, em porcentagem, das estratégias empregadas na resolução dos problemas de contagem que figuram nos materiais físico e digital do programa <i>Currículo em Ação</i>	258

SIGLAS

AC	-	Análise de Conteúdo
ADD	-	Abordagem Documental do Didático
BNCC	-	Base Nacional Comum Curricular
CMSP	-	Centro de Mídias da Educação de São Paulo
COPED	-	Coordenadoria Pedagógica
CPEM	-	Currículo Paulista para a etapa do Ensino Médio
ED	-	Experiência Documental
EFAPE	-	Escola de Formação e Aperfeiçoamento dos Profissionais da Educação do Estado de São Paulo
EJA	-	Educação de Jovens e Adultos
GP	-	Guia do Professor
LDB	-	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MRTD	-	Mapeamento Reflexivo do Trabalho Documental do professor
PCNs	-	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNs+	-	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PEP	-	Percurso de Estudo e de Pesquisa
PFC	-	Princípio Fundamental da Contagem
PNLD	-	Programa Nacional do Livro Didático
PROFMAT	-	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RESS	-	Representação esquemático do sistema de recursos
RMRS	-	Reflective Mapping of teacher Resource System
SEDUC-SP	-	Secretaria de Educação de São Paulo
SRRS	-	Schematic Representation of a teacher's Resource System
TAD	-	Teoria Antropológica do Didático
TCC	-	Teoria dos Campos Conceituais

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	24
2. CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA.....	29
2.1 Considerações iniciais sobre a combinatória e seu ensino	29
2.2 O raciocínio combinatório e seu desenvolvimento	30
2.2.1 Piaget e Inhelder e as primeiras discussões a respeito do desenvolvimento do raciocínio combinatório no indivíduo.	30
2.2.2 Fischbein e a importância da instrução e do diagrama de árvores no enfrentamento de situações combinatórias.....	31
2.2.3 Larivée e o papel da escola no desenvolvimento do raciocínio combinatório	33
2.3 Documentos curriculares, reforma do ensino médio e a combinatória	35
2.3.1 A BNCC	35
2.3.2 O Currículo Paulista etapa Ensino Médio (CPEM)	37
2.3.3 A reforma do ensino médio	39
2.3.4 Orientações para o ensino de combinatória em documentos curriculares	44
2.4 Algumas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de combinatória	52
2.5 Formação do professor frente à combinatória e ao seu ensino	56
2.6 O livro didático e documentos curriculares como recursos (curriculares) para o ensino de combinatória.....	63
2.6.1 Recursos curriculares: estudos sobre a combinatória nos livros didáticos	64
2.7 O conceito de esquemas nas perspectivas de Piaget, Fischbein, Vergnaud e Trouche	69
2.7.1 Piaget e o conceito de esquemas	69
2.7.2 A evolução do conceito de esquemas em Piaget.....	70
2.7.3 Fischbein e os esquemas virtuais e ativos	73
2.7.4 O conceito de esquemas na perspectiva de Vergnaud	74
2.7.5 Perrenoud (1999) e a relação entre competência e esquemas	80
2.7.6 Abordagem Documental do Didático (ADD): a prática docente observada na perspectiva de recursos e esquemas.....	83
2.7.6.1 Definições.....	84
2.7.6.2 Esquemas no âmbito da ADD e Sistemas de Recursos	86

2.7.6.3 Experiência e trajetória documental.....	89
2.7.6.4 Perspectivas da ADD.....	90
2.7.7 Considerações sobre os invariantes operatórios na ação docente	91
2.7.8 O contexto dessa investigação	92
3. REFERENCIAIS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	98
3.1 Análise de Conteúdo.....	98
3.1.1 Pré-análise	99
3.1.2 Exploração do material	100
3.1.3 O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação	102
3.2 Procedimentos metodológicos para análise dos materiais físico e digital do programa <i>Currículo em ação</i>	103
3.2.1 As investigações de Campos (2011) e Fujita et al. (2018) e suas contribuições para a presente investigação	103
3.3 Investigação Reflexiva do trabalho documental do professor.....	107
3.4 A investigação reflexiva no âmbito desta pesquisa – escolhas metodológicas	109
4. ESTUDOS PRELIMINARES	112
4.1 A combinatória no campo conceitual multiplicativo	112
4.2 Classe de situações combinatórias	113
4.2.1 Problemas de permutação, combinação e arranjo e a organização proposta por Pessoa e Borba (2010)	114
4.2.2 Dubois (1984), Navarro-Pelayo et al (1996) e os Modelos Combinatórios Implícitos	119
4.2.3 Considerações sobre a proposta de organização de problemas combinatórios.....	151
5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS REFERENTES AOS RECURSOS FÍSICO E DIGITAL DO PROGRAMA <i>CURRÍCULO EM AÇÃO</i>	152
5.1 Organização didática para o ensino de combinatória nos recursos físico e digital de apoio do programa <i>Currículo em Ação</i>	152
5.2 Introdução à <i>Situação de Aprendizagem 2</i>	158
5.3 Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório	159
5.3.1 Problemas	159
5.3.2 Vídeos	170
5.3.2.1 Vídeo 1 – A videoaula.....	170

5.3.2.2 Vídeo 2 – De malas prontas	170
5.3.3 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da <i>Atividade 1</i>	174
5.4 Atividade 2 – Os desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem	177
5.4.1 Permutação	177
5.4.1.1 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da <i>Atividade 1</i>	184
5.4.2 Arranjo	188
5.4.2.1 Vídeo 3 – A cartomante	188
5.4.2.2 Arranjos	190
5.4.2.3 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da <i>Atividade 2</i> para o ensino de arranjo simples	197
5.4.3 Combinação	201
5.4.3.1 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da <i>Atividade 2</i> para o ensino de combinações simples	209
5.5 Atividade 3 – Aprimorando a fluência de elaboração de problemas	211
5.6 Atividade 4 – #Mão na massa	217
5.6.1 Análise dos problemas da <i>Atividade 4 - #Mão na massa</i>	217
5.6.2 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da <i>Atividade 4</i>	220
5.7 Considerações sobre a avaliação e orientações para a recuperação	220
5.8 Material digital do programa <i>Currículo em ação: slides</i> e tarefas	221
5.8.1 Análise dos problemas das aulas I e II que tratam do princípio fundamental da contagem	223
5.8.2 Análise dos problemas das aulas I e II sobre permutação	229
5.8.3 Análise dos problemas das aulas I, II e III sobre arranjos	234
5.8.4 Análise dos problemas das aulas I, II e III sobre combinações	241
5.8.5 As <i>Aulas Khan</i>	249
5.8.5.1 A plataforma Khan Academy e sua inserção como recurso na rede estadual paulista de educação	249
5.8.5.2 Apresentação dos problemas de combinação simples da Lição 5. ...	253
5.9 Considerações sobre os recursos curriculares do programa <i>Currículo em Ação</i>	255
6. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS REFERENTES AOS RECURSOS E ESQUEMAS DOS PARTICIPANTES	261

6.1 Mapeamento Reflexivo do Trabalho Documental (MRTD) e recursos mobilizados para o ensino de combinatória	262
6.1.1 Professor Gabriel	262
6.1.1.1 Mapeamento reflexivo da trajetória documental do professor Gabriel	262
6.1.1.2 Preparação e execução das aulas sobre combinatória.....	266
6.1.1.3 Análise dos slides preparados pelos professor Gabriel para as aulas sobre combinatória.....	268
6.1.2 Professora Maria Clara	270
6.1.2.1 Planejamento e execução das aulas da professora Maria Clara.....	273
6.1.2.2 Análise dos dados coletados a partir das aulas da professora Maria Clara	277
6.1.3 Professor Marcos.....	279
6.1.3.1 Mapeamento reflexivo da trajetória documental do professor Marcos	279
6.1.3.2 Trabalho documental do professor Marcos na preparação de suas aulas sobre combinatória	284
6.1.3.3 Discussão sobre a produção do professor Marcos a partir do caderno do professor e outros recursos	297
6.2 Considerações sobre o trabalho documental dos professores participantes .	300
7. ANÁLISES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	302
7.1 Situações, invariantes operatórios e representações simbólicas dos materiais físico e digital do programa <i>Currículo em Ação</i>	304
7.2 Professores participantes e os recursos do programa <i>Currículo em Ação</i>	306
7.3 Limitações e expectativas	309
REFERÊNCIAS	311

1. INTRODUÇÃO

A presente investigação nasce do desejo de continuar investindo em um tema ainda pouco explorado no campo da educação matemática: a análise combinatória ou simplesmente combinatória. Em 2011, quando do meu mestrado também em educação matemática, procurei investigar como esse objeto matemático se fazia presente no então material curricular preparado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEESP, para a implementação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) na rede pública de ensino. Esse material, formado por duas apostilas (caderno do professor e do aluno), apresentava uma série de tarefas que deveriam ser desenvolvidas nas aulas de matemática, nas chamadas *situações de aprendizagem*. Era, então, a primeira vez que a secretaria de educação de São Paulo preparara um material didático voltado para apoiar o trabalho dos professores. Até 2019, esse material continuou a ser editado e distribuído nas escolas da rede estadual paulista de ensino.

Com a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a educação infantil e ensino fundamental em 2017, e ensino médio em 2018, estados e municípios precisaram conformar seus documentos curriculares locais à nova base curricular. É importante observar o caráter normativo que a BNCC tem em fixar as competências e habilidades, tidas como essenciais, para estudantes que cursam a educação básica em todo o país. Nesse contexto, o estado de São Paulo saiu na frente, ao homologar, em 2019, o Currículo Paulista etapa Educação Infantil e Ensino Fundamental e, em 2020, Currículo Paulista etapa Ensino Médio (CPEM). A partir dessa homologação e da reforma do ensino médio novos materiais curriculares (cadernos do professor e do estudante) baseados no novo currículo paulista começaram a ser produzidos pela Secretaria de Educação de São Paulo (SEDUC-SP) para uso na rede estadual paulista de ensino. Em julho de 2023, outros materiais curriculares, agora digitais, passaram a ser usados nas escolas dessa rede de ensino¹.

Ingressei, em 2019, no doutorado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, com a ideia de uma investigação que focasse novamente na maneira como era concebido o ensino de combinatória nos

¹ A rede estadual de ensino do estado de São Paulo abarca escolas de ensino fundamental anos iniciais (crianças com idades de 6 a 10 anos), anos finais (adolescentes de 11 a 14 anos), e de ensino médio (jovens de 15 a 17 anos), tanto no ensino regular quanto na EJA (Educação de Jovens e Adultos).

materiais produzidos pela secretaria de educação de São Paulo. Porém, ao entrar em contato com outras pesquisas e perspectivas teóricas, percebi a necessidade de incluir mais uma personagem: o professor.

Dentre as várias teorias com as quais nos deparamos, está a Abordagem Documental do Didático (ADD) que busca estudar o professor na sua relação com os recursos tomado, aqui em um sentido amplo, como tudo aquilo capaz de nutrir o trabalho docente. Assim, materiais de apoio como livros didáticos, apostilas, disponibilizados na internet em *sites* educativos, bem como encontros de formação coletivas, trabalhos realizados em parceria com outros professores, participação em formações e encontros, podem contribuir para o enriquecimento da atividade docente, na medida em que o professor os tem em conta na preparação, implementação e avaliação de suas aulas.

A combinatória tem se configurado um desafio para muitos docentes que reconhecem suas fragilidades diante desse conhecimento matemático, conforme algumas pesquisas (SABO, 2010; ROCHA, 2012; SANTOS-WAGNER et al., 2013). Outras (PINHEIRO e SÁ, 2007; CUNHA, 2015; GEA et al. 2019) apontam que as fragilidades relatadas pelos docentes se refletem no modo como esses profissionais abordam a combinatória como objeto a ser ensinado e quais materiais são selecionados por eles para esse fim. Nesse contexto, o livro didático e outros materiais curriculares como apostilas e, mais recentemente, materiais disponíveis *on-line* como *slides*, videoaulas, têm se tornado auxiliares aos docentes no ensino desse e de outros conteúdos matemáticos.

De acordo com a BNCC e o Currículo Paulista, a combinatória deve ser abordada já no ensino fundamental, em turmas de 4º., 5º. e 8º. anos, e, no ensino médio, no 2º. ano. É nesse ano escolar, segundo esses documentos, que o trabalho iniciado no ensino fundamental deve ser intensificado para desenvolver no estudante a capacidade de diferenciar agrupamentos em que a troca da ordem de seus elementos gera novos agrupamentos e outros em que isso não acontece. O desenvolvimento desses conceitos nos alunos tem, na ação do professor, um grande aliado na medida em que é por meio dela que são construídas as condições que favorecem a constituição do raciocínio combinatório. Tais condições são criadas com base nos recursos disponíveis ao professor para alcançar seus objetivos didáticos.

Nessa perspectiva, a presente investigação objetiva observar em que aspectos o material fornecido pela SEDUC-SP se aproxima ou se afasta de elementos considerados primordiais em pesquisas que tratam do desenvolvimento do raciocínio combinatório, bem como compreender como tais recursos, juntamente com outros possíveis, são articulados pelos professores para o ensino de combinatória.

Para atingir os objetivos estabelecidos, buscamos referenciais teóricos que me auxiliasse nas análises dos dados coletados durante a investigação. Encontramos no conceito de *esquemas* presente na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1990) e na ADD de Trouche et al. (2017) um ponto de apoio comum a essas duas teorias.

Vergnaud (1990) considera que a ação de um sujeito diante de uma situação – tido aqui como tarefa – sempre é guiada por *esquemas de ação* mobilizados e/ou desenvolvidos por ele no intuito de seu enfrentamento. Trouche et al (2017) usam esse mesmo conceito ao afirmar que professores, imersos em situações profissionais, desenvolvem *esquemas de utilização* de recursos ao longo de suas vidas como docentes. É por meio de tais esquemas que são escolhidos, modificados, criados e recriados recursos no intuito de atingir os objetivos didáticos planteados. Segundo Vergnaud (1990), um esquema comporta regras de ação e de antecipações, inferências, e *invariantes operatórios* sendo esses constituídos de conceitos e teoremas em ação. É sobre os invariantes operatórios que a operacionalidade dos esquemas se assenta. O mesmo autor sublinha que o conjunto de invariantes, juntamente com o de situações e de representações simbólicas constituem o tripé que dão a um *conceito* tal *status*. Em outras palavras, o estudo de um conceito no que diz respeito ao seu desenvolvimento e sua funcionalidade, quer seja durante a aprendizagem ou em momentos de sua utilização, demanda ter em conta esses três conjuntos simultaneamente (VERGNAUD, 1990, p. 166).

Na TCC, as classes de situações são fundamentais pois são elas que dão sentido a um conceito. Assim, de acordo com Vergnaud (1990), o campo conceitual aditivo é formado por situações que pressupõem o uso da adição, da subtração ou de um misto dessas operações. De modo semelhante, no campo conceitual multiplicativo as situações vão exigir o uso da multiplicação, da divisão ou de uma combinação dessas operações. É no campo conceitual das estruturas multiplicativas

que os problemas combinatórios (MARGINA et al., 2014), embora, em muitos casos, faz-se necessária também a mobilização de esquemas próprios do campo conceitual aditivo.

Desse modo, com base nos estudos de Vegnaud (1990) que apontam a importância da diversidade de situações na constituição de um conceito e de Trouche et al. (2017) acerca da relação de professores e recursos, e o desenvolvimento profissionais, procuramos respostas às seguintes questões:

- a) que situações, invariantes operatórios (objetos, propriedades, relações, teoremas) e representações simbólicas podem ser inferidos da proposta de abordagem para o ensino de combinatória nos recursos físico e digital do programa *Currículo em Ação*?
- b) que invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) são mobilizados por professores ao usarem os recursos didáticos físico e digital do programa *Currículo em Ação* e como eles se articulam com outros recursos que eventualmente utilizem para o ensino de combinatória?

A fim de responder a essas duas perguntas, organizamos esse Relatório da pesquisa, que resultou na Tese de Doutorado, em 7 capítulos sendo a Introdução o *Capítulo 1*.

Capítulo 2 —Construção da problemática e delimitação do problema. Com esse propósito são apresentadas referências teóricas sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório em crianças e adolescentes, e consequências para o ensino; à formação do professor frente a combinatória; à abordagem desse objeto matemático em livros e recursos curriculares; ao conceito de esquemas nos trabalhos de Piaget, de Fischbein e de Vergnaud. Além disso, são abordados elementos dos referenciais teóricos que balizaram a pesquisa: Abordagem Documental do Didático e Teoria dos Campos Conceituais.

Capítulo 3 – Procedimentos metodológicos. No capítulo são declaradas as metodologias de pesquisa e descritos os procedimentos metodológicos.

Capítulo 4 – Estudos preliminares. No capítulo descrevemos referências teóricas sobre a combinatória e o campo conceitual multiplicativo.

Capítulo 5 – Apresentação e análise de dados referentes aos materiais físico e digital do programa Currículo em Ação. Nesse capítulo são descritos e analisados dados referentes às situações combinatórias presentes nesses materiais, bem como às situações profissionais desenhadas para o ensino desse conteúdo.

Capítulo 6 – *Apresentação e análise de dados referentes aos recursos e esquemas dos participantes.* Nesse capítulo são apresentados os dados dos professores que participaram dessa investigação e as análises desses dados.

Capítulo 7 – Considerações Finais. No capítulo são retomadas as questões de pesquisa e analisada a confrontação com as soluções possíveis.

2. CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

No presente capítulo estão referências teóricas sobre a construção e o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos indivíduos, em particular em crianças e jovens em idade escolar; e sobre o aprofundamento da questão do ensino e aprendizagem da combinatória em ambiente escolar, com foco na formação docente, além da abordagem da relação do professor com recursos curriculares voltados para o ensino desse objeto matemático, e outras referências que propiciam a discussão da noção de esquemas, nas perspectivas de Piaget, Fischbein, Vergnaud e Trouche. No capítulo 2 ainda incluímos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) e da Abordagem Documental do Didático de Trouche et al. (2017), como aportes teóricos que embasaram as análises dos dados. Finalizam o capítulo a indicação das questões da pesquisa e o contexto em que essa foi efetivada. Objetivamos com essas informações evidenciar o caminho trilhado para o levantamento do problema a ser equacionado na investigação que resultou na tese de doutorado aqui defendida.

2.1 Considerações iniciais sobre a combinatória e seu ensino

A análise combinatória, como objeto presente no currículo de matemática da educação básica, constitui uma peça-chave na formação do raciocínio probabilístico e da ideia de acaso, como apontam os estudos de Piaget e Inhelder (1951), Fischbein (1970), Larivée (1981), Fischbein e Gazit (1988), Fischbein e Grossman (1997), English (1992, 1993, 2017). Para além, Kapur (1970, p.114, *tradução nossa*) considera ser a combinatória “um componente essencial da matemática discreta e, como tal, tem um importante papel a desempenhar na matemática escolar²”.

Dentre as vantagens e contribuições destacadas por esse autor estão: a) a possibilidade de se abordar problemas combinatórios em todos os anos escolares, inclusive nos iniciais, visto que não dependem necessariamente de cálculo; b) o estímulo aos alunos desenvolverem estratégias de contagem, a fazerem conjecturas ou generalizações; c) a possibilidade do desenvolvimento de conceitos de mapeamento, relações, funções, isomorfismos, além da discussão do que são provas plausíveis e provas rigorosas. Kapur (1970) sublinha as contribuições significativas para o desenvolvimento de competências ligadas a áreas como as

² *Combinatorial mathematics is an essential component of the mathematics of the discrete and as such it has an important role to play in school mathematics.*

ciências físicas e engenharia, a biologia ou as ciências sociais. Pessoa e Borba (2010, p. 2), por sua vez, ao citar Guirado e Cardoso, destacam a aplicação de conceitos combinatórios em “problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, de programação linear, de estatística, de teoria de informação, de biologia molecular, de economia, de lógica, etc.”

Contudo, ao considerarmos a combinatória ensinada nas aulas de matemática, essa costuma provocar desconforto para alunos (CONCEIÇÃO, et al. 2016; NAVARRO-PELAYO, et al., 1996; ROA, 2000) e para professores (FERNANDES et al., 2010; SABO, 2010; SANTOS-WAGNER et al., 2013). Isso porque, em muitos casos, de acordo com Batanero et al (1996), tal ensino é pautado na classificação dos problemas de contagem em situações de arranjo, permutação e combinação e, conseqüente, aplicação de fórmulas que pouco contribuem para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Para alunos, o desconforto aparece, muitas vezes, na dificuldade em compreender a situação proposta e adequar as variáveis em jogo a um conjunto de fórmulas pré-estabelecidas. Para professores, em muitos casos, segundo Santos-Wagner et al (2013), o desafio encontra-se justamente em tornar seu aluno capaz de distinguir um tipo de problema de outro e usar adequadamente essa ou aquela forma de resolução. Assim, é importante o papel reservado a eles na construção e na condução de situações de aprendizagem que levem seus alunos ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

No tópico seguinte, começamos a apresentar estudos que se preocuparam em compreender a essência do raciocínio combinatório e seu desenvolvimento nos indivíduos.

2.2 O raciocínio combinatório e seu desenvolvimento

Neste tópico são apresentadas pesquisas realizadas nos campos da psicologia cognitiva e educação matemática que se debruçaram sobre o processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório. A esse respeito destacamos os estudos de Piaget e Inhelder (1951), Fischbein et al. (1970), Fischbein e Gazit (1988) e Larivée (1981). Passamos a detalhar cada um dos autores.

2.2.1 Piaget e Inhelder e as primeiras discussões a respeito do desenvolvimento do raciocínio combinatório no indivíduo.

Uma das primeiras pesquisas a abordarem o desenvolvimento do raciocínio combinatório no indivíduo é devida a Piaget e Inhelder (1951). Ao buscarem

compreender a formação dos conceitos de acaso e probabilidade em crianças e adolescentes, esses autores concluíram que tal formação encontra-se em sintonia com a evolução dos chamados *esquemas*³ *combinatórios*. Segundo eles, o desenvolvimento do raciocínio probabilístico depende da capacidade de raciocínio combinatório. Assim, a ausência dessa capacidade pode acarretar falhas na aplicação de conceitos probabilísticos nas mais diversas situações.

A pesquisa de Piaget e Inhelder (1951) tinha por objetivo traçar um perfil do desenvolvimento psicogenético das operações combinatórias – combinação, permutação e arranjo – em crianças e adolescentes por meio de tarefas combinatórias com materiais concretos, assim como, por entrevistas. Pelos resultados, os pesquisadores concluíram que a aquisição de procedimentos sistemáticos para resolver situações combinatórias se dá ao longo do desenvolvimento cognitivo do sujeito cuja estruturação acontece no estágio das operações formais. De um modo mais preciso, por volta dos 11 ou 12 anos para as operações de arranjo e combinação e, por volta dos 15 anos, para a permutação.

Piaget e Inhelder (1951), contudo, não se ocuparam em discutir os efeitos que a instrução teria no desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico. Coube a Fischbein e seus colaboradores a tarefa de investigar, em particular, esse aspecto.

2.2.2 Fischbein e a importância da instrução e do diagrama de árvores no enfrentamento de situações combinatórias

Tal qual Piaget e Inhelder (1951), Fischbein (1975) também se propôs a investigar o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico em crianças e adolescentes. Para ele, o pensamento combinatório, em níveis de esquema mental, tem um grau de importância comparável ao proporcional e correlacional. Ao analisar os resultados, Fischbein (1975) concluiu que o desenvolvimento da capacidade combinatória no sujeito ocorre no nível das operações formais, mas não se completa nesse estágio de sorte que, mesmo após os 15 anos, o indivíduo continua desenvolvendo esquemas combinatórios.

Em suas investigações, o pesquisador buscou compreender os efeitos que uma instrução prévia, baseada no uso do diagrama de árvores, teria na aquisição de

³ A palavra *esquema* é assumida aqui no sentido dado pelo próprio Piaget segundo o qual um esquema seria uma organização invariante das habilidades intelectuais e das habilidades sensório-motoras do indivíduo.

esquemas combinatórios. Destacamos aqui duas delas: Fischbein et al. (1970) e Fischbein e Gazit (1988).

Na primeira, os autores de início propuseram a jovens entre 10 e 15 anos, problemas que envolviam permutações e cujas soluções deveriam ser estimadas sem que houvesse qualquer intervenção didática. Desse modo observaram que, entre aqueles com idade mais avançada, as estimativas se aproximavam das respostas corretas. Após, os jovens foram instruídos para o uso do diagrama de árvores na resolução de problemas de arranjo com repetição e de permutações. Embora tenham tido relativo êxito, poucos foram os que deduziram espontaneamente as fórmulas para os cálculos de arranjos e permutações. Fischbein et al (1970) destacaram que, ainda que muitos soubessem as operações aritméticas necessárias para resolver os problemas propostos, ainda não eram capazes de fazê-lo, uma vez que isso exigia um tipo de raciocínio que ainda não haviam construído.

Na segunda pesquisa, Fischbein e Gazit (1988) avaliaram os efeitos do emprego do diagrama de árvores na aquisição dos esquemas combinatórios por jovens de 11 a 14 anos. Além da faixa etária, outras variáveis foram consideradas nessa investigação tais como a operação combinatória (arranjo, permutação e combinação) e a natureza (concreta ou abstrata) dos elementos considerados nos problemas. Os pesquisadores propuseram, então, problemas de arranjo com repetição, bem como de permutação, arranjo e combinação simples e solicitaram aos alunos a construção do diagrama de árvores como estratégia de resolução, seguida da contagem dos agrupamentos obtidos e da dedução de uma fórmula para cada situação. No entendimento dos pesquisadores, o uso do diagrama de árvores facilitou a construção da fórmula e deu maior significado à solução obtida por ser, o próprio diagrama, algo desenvolvido intuitivamente. Sobre a intuição, Fischbein e Grossman (1997) pontuam que:

De um modo geral, intuições podem ser pensadas como resultantes do uso em algumas regras de estruturação que expressam tanto os níveis de maturação quanto os níveis de treinamento. Se o objetivo é influenciar favoravelmente intuições - e essa é uma tarefa importante do processo de aprendizagem - é preciso identificar os esquemas estruturantes e os específicos que fundamentam as respectivas intuições. (ibidem, p. 43, tradução nossa⁴)

⁴ *Generally speaking, intuitions may be thought of as being based on some structuring rules expressing both levels of maturation and levels of training. If the objective is to influence intuitions favorably – and this is an*

Algumas implicações didáticas, provenientes dessas pesquisas foram apontadas pelo próprio Fischbein, conforme destaca Roa (2000). A primeira delas é a importância que se deve dar à instrução prévia, uma vez que as técnicas combinatórias não são adquiridas espontaneamente pelos jovens, nem mesmo no estágio das operações formais. Outra, diz respeito à busca por desenvolver técnicas combinatórias no período das operações concretas, dado que elas ajudariam no surgimento das *intuições secundárias*⁵ nas crianças.

2.2.3 Larivée e o papel da escola no desenvolvimento do raciocínio combinatório

Em uma pesquisa semelhante às investigações de Piaget e Inhelder e de Fischbein, Larivée (1981) implementou um estudo exploratório sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório em 90 alunos, de ambos os sexos, de dez escolas de quatro regiões administrativas da C.E.C.M (Comission des Écoles Catholiques de Montréal), no Canadá. Essa amostra se subdividia em três grupos de trinta alunos, cada qual com estudantes de classes regulares, extras (nível médio de deficiência e adaptação acadêmicas) e de transição (com atrasos consideráveis na formação e adaptação acadêmicas em nível primário). Nos três grupos, os participantes tinham idade que variavam de 12 a 15 anos, ou seja, encontravam-se no período de concretização das operações formais, segundo Piaget.

O teste consistia em apresentar ao aluno conjuntos de fichas de cores diferentes e solicitar que ele inicialmente previsse, em seguida justificasse essa previsão e, finalmente, construísse todas as filas formadas por fichas de cores distintas, diferenciando-as somente pela ordem. Em outras palavras, uma situação de permutação. Inicialmente foram duas cores, depois três, de tal modo que esse procedimento se deu até a quarta cor. A partir da quinta, o aluno era convidado a prever e a justificar sua previsão sem, contudo, construir as permutações. Foi analisada quantitativamente o número de permutações realizadas e o de intervenções do experimentador e, qualitativamente, o número de permutações

important task of the learning process – one has to identify the structuring schemata and the specific ones which underlie the respective intuitions.

⁵ Fischbein (1975) classifica as intuições em primárias e secundárias. As primárias são aquisições cognitivas que derivam diretamente da experiência, sem que para isso seja necessária instrução sistemática. As intuições secundárias, por sua vez, são aquisições com todas as características das intuições, mas que se formam da educação científica, sobretudo a que provém da escola. Cf. Roa (2000, p. 12).

antecipadas com justificativa e os tipos de estratégias empregadas pelos participantes.

Com base nos resultados, o pesquisador concluiu que dos 90 estudantes examinados, 32% não se encontravam plenamente no estágio concreto, 43% se encontravam nesse estágio e somente 24% estavam no estágio formal. Com isso, o autor sublinha a desvantagem, em termos de aprendizagem, apresentada pelos alunos que ainda não se encontram no estágio formal e, com base em Krutetskie, afirmar que “[...] sujeitos operativos concretos tendem a reter informações não pertinentes aos problemas, enquanto sujeitos capazes de abstração usam mais facilmente as relações que reúnem os diferentes elementos de um problema” (LARIVÉE, 1981, p. 9, *tradução nossa*⁶).

Larivée (1981) complementa, ao destacar a importância da formação de conceitos ligados à combinatória, ao acaso e à probabilidade, conceitos que transcendem a questão do cálculo, mas que se constituem uma forma de pensamento distinta e complementar ao pensamento estritamente determinístico. Por isso, a escola desempenharia um papel importante ao romper paradigmas de um ensino pautado no determinismo. Na sua concepção, a inclusão de situações em que também o acaso seja contado como uma forma de explicar fenômenos observados se faz importante, na medida em que aproxima os alunos do modo de fazer científico. Além disso, o pesquisador considera que “[...] a criação de jogos combinatórios em que sejam solicitados esquemas combinatórios e esquemas de probabilidade contribuiria para suprir as falhas no desenvolvimento intelectual de muitos (ibidem, p. 10, *tradução nossa*⁷).

Os trabalhos de Fischbein e Larivée reforçam a ideia de que o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico ocorre gradativamente por depender, em grande parte, das estruturas cognitivas de crianças e adolescentes e por ser fortemente beneficiadas por situações combinatórias desenhadas para que eles possam enfrentá-las, mesmo antes do estágio do pensamento formal. Para Larivée (1981) em outros termos, ainda que as operações

⁶[...] les sujets opératoires concrets ont tendance à retenir dans les problèmes des informations non pertinentes tandis que les sujets capables d'abstraction utilisent plus facilement les relations réunissant les différents éléments d'un problème.

⁷ [...] la mise sur pied de jeux combinatoires où sont sollicités et des schèmes combinatoires et des schèmes probabilites contribuerait à conter les failles dans le développement intellectuel de bien des jeunes.

formais sejam uma condição para a solidificação dos esquemas combinatórios, não se deve esperar o indivíduo atingir esse nível para favorecer seu desenvolvimento.

Os estudos que apresentamos até aqui destacam a importância que o raciocínio combinatório tem para a constituição das ideias de acaso e de probabilidade no indivíduo e apontam o papel que a instrução – e por conseguinte, o ensino escolar – tem no favorecimento do seu desenvolvimento. Cabe considerar, então, em que contexto estrutural e curricular se dá esse ensino. Em outras palavras, quais diretrizes e recomendações são preconizadas nos documentos curriculares oficiais para o ensino de combinatória no ambiente escolar? É o que buscamos responder a seguir. Inicialmente, apresentamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Paulista etapa Ensino Médio (CPEM) e da reforma do ensino médio. Buscamos, no próximo tópico, localizar a combinatória nesses contextos, discutindo como esse objeto matemático é concebido nesses documentos.

2.3 Documento curriculares, reforma do ensino médio e a combinatória

2.3.1 A BNCC

Sob a premissa de assegurar o direito ao desenvolvimento e às aprendizagens tidas como *essenciais* a todos os estudantes da educação básica escolar em nível nacional a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) tornou-se o documento base para a organização curricular em níveis nacional, estadual e municipal. Em outras palavras, diferentemente de outros documentos como os PCNs produzidos nas décadas de 1990 e 2000, a BNCC estabelece, graças ao seu caráter normativo e de referência nacional, as bases para que os outros entes da federação – estados e municípios – elaborem currículos locais.

Em linhas gerais, na BNCC (BRASIL, 2018) os *direitos de aprendizagem e desenvolvimento* (no caso da educação infantil) e o desenvolvimento de *competências e habilidades* (para os ensinos fundamental e médio) têm papéis centrais. De acordo com o que se apregoa nesse documento, espera-se que, no decorrer da educação básica, dez *competências gerais* sejam desenvolvidas a fim de que se possa atingir o desenvolvimento e as aprendizagens mínimas almejadas. Nesse documento, *competência* é definida como

[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores

para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8)

Além das competências gerais, outras competências são elencadas na BNCC, nomeadamente as específicas de cada área de conhecimento e as específicas de cada componente curricular, essas últimas voltadas, principalmente, para o ensino fundamental. Cada componente curricular apresenta um conjunto de *habilidades* que “estão relacionadas a diferentes *objetos de conhecimentos* – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processo que, por sua vez, são organizados em *unidades temáticas*. É a partir dessas unidades que são definidos os *objetos de conhecimento* e, a eles, estão atreladas as habilidades. De acordo com a BNCC, “as *habilidades* expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares” (BRASIL, 2018, p. 29).

As áreas de conhecimento são estruturadas de acordo com as etapas da educação básica. No caso do ensino fundamental, essa etapa encontra-se dividida em quatro áreas básicas acrescida do ensino religioso, quais sejam:

- Linguagens, abrangendo os componentes curriculares Língua Portuguesa, Arte, Educação Física e Língua Inglesa (a partir do 6º ano);
- Matemática;
- Ciências da Natureza, tendo Ciências por componente curricular;
- Ciências Humanas, com os componentes História e Geografia.

O ensino médio, por sua vez, encontra-se estruturado somente em 4 áreas de conhecimentos que, em tese, aglutinariam os componentes curriculares, além da formação para o trabalho:

- Linguagens e suas Tecnologias;
- Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, abarcando os componentes História, Geografia;
- Formação Técnica e Profissional.

Tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, as competências e habilidades a serem desenvolvidas são identificadas por meio de um código alfanumérico. Para o ensino fundamental: as duas primeiras letras indicam a etapa da educação básica; os dois números seguintes indicam a série/ano ou o bloco de

anos; a segunda sequência de letras indica o componente curricular (2 letras); o último par de números indica a posição da habilidade na numeração. sequencial do ano ou do bloco de anos. (Cf. BRASIL, 2018, p. 30). Assim, o código EF04MA08 refere-se à 8ª habilidade (08) a ser desenvolvida em Matemática (MA) no 4º. ano (04) do Ensino Fundamental (EF). De modo semelhante, para o ensino médio, a habilidade descrita pelo código EM13MAT310 é a habilidade 10 que está ligada à competência específica 3 (por isso 310) da área de Matemática e suas Tecnologias (MAT) a ser desenvolvida em todos os anos (13) do ensino médio (EM).

2.3.2 O Currículo Paulista etapa Ensino Médio (CPEM)

Na organização de documentos curriculares por estados e municípios, o estado do São Paulo foi a primeira unidade da federação a fazê-la em consonância com a BNCC. O chamado *Currículo Paulista etapa Ensino Médio* (CPEM) cuja aprovação se deu pelo Conselho Estadual de Educação em julho de 2020, é fruto não somente da BNCC, mas também da Lei no. 13.415/2017 que instituiu a reforma do ensino médio e da Portaria MEC⁸ 1.432 de 28 de dezembro de 2018. Sua implantação foi feita de forma gradativa e teve início no ano letivo de 2021 com o primeiro ano do ensino médio.

Conforme as orientações presentes nesses documentos, a organização curricular prevista no CPEM contempla uma parte destinada à *formação geral básica* e outra, aos *itinerários formativos*, ambas no âmbito das chamadas áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais e suas Tecnologias. Além dessas áreas, acrescenta-se a Formação Técnica e Profissional para os itinerários formativos cuja organização é feita por meio de quatro eixos estruturantes: investigação científica, processos criativos, mediação e intervenção sociocultural, empreendedorismo. De acordo com o CPEM, a formação geral básica deve “garantir a todos os estudantes desta etapa de escolarização as aprendizagens essenciais definidas pela BNCC” (SÃO PAULO, 2020, p 46) e, no que concerne aos itinerários formativos, deve-se “garantir ainda mais a flexibilização do Ensino Médio, propiciando ao estudante desenvolver e fortalecer sua autonomia, considerando seu projeto de vida” (SÃO PAULO, 2020, p.196).

⁸ Essa portaria trata dos referenciais curriculares para a elaboração de itinerários formativos.

Especificamente na área de Matemática e suas Tecnologias, a resolução de problemas é defendida pelo CPEM como metodologia para o desenvolvimento do conhecimento matemático, sobretudo “no que tange às contextualizações, à busca de instrumentação crítica para o mundo do trabalho e à aproximação dos conteúdos escolares” (SÃO PAULO, 2020, p. 112). Mais que a aptidão em resolver situações matemáticas, o documento curricular sublinha a necessidade de que os estudantes sejam capazes de elaborar, outras situações matemáticas em contextos e áreas de conhecimento diversos.

Outro aspecto enfatizado no CPEM é a questão do desenvolvimento de competências e habilidades iniciadas no ensino fundamental, em especial, o letramento matemático⁹ e o raciocínio computacional que se constituem, para o estudante, itens importantes no desenvolvimento de competências específicas. Desse modo, tendo em vista “o aprofundamento dos conceitos já estabelecidos em etapas anteriores do processo de aprendizagem, visando a construção da integração da Matemática com a realidade” (SÃO PAULO, 2020, p. 116) e com base no currículo do ensino fundamental, o CPEM organiza as unidades temáticas em três agrupamentos: números e álgebra, geometria e medidas, probabilidade e estatística. De acordo com o CPEM, essas unidades temáticas devem ser articuladas para o desenvolvimento das competências específicas estabelecidas na BNCC para o ensino médio.

Embora a BNCC – e, por extensão o CPEM – tenha sido apresentada como um documento que visa assegurar o direito e a equidade de aprendizagem para todos os estudantes em nível nacional, alguns estudiosos contestam tal visão. Um dos objetivos seria, na prática, pavimentar o caminho para a reforma do ensino médio (BRANCO et al., 2019; CARVALHO, 2022; FERRETTI, 2018; PFEIFFER; GRIGOLETTO, 2017; SILVA, 2018; TARLAU; MOELLER, 2020).

⁹ O **letramento matemático** a que se refere o CPEM é definido pela BNCC como “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2017, p. 264) estando em consonância com o que apregoa OCDE/PISA (2012) sobre o mesmo tema.

2.3.3 A reforma¹⁰ do ensino médio

Além da homologação da BNCC, outro fato relevante para a educação no Brasil ocorreu em 2017: a conversão da Medida Provisória 746 de 22 de setembro de 2016 na Lei 13.415, sancionada em 16 de fevereiro, que instituiu o, assim chamado, *novo ensino médio*.

De acordo com Carvalho (2022) a essa época, conceitos como competências, saberes e flexibilização curricular já circundavam os debates a respeito do ensino médio e sua relação com formação profissional desde os idos dos anos 1990. Segundo Ferretti (2018), embora o PL 6840 tenha sido questionado por setores da sociedade civil, como o Movimento em Defesa do Ensino Médio, a lei que instituiu a reforma do ensino médio apresenta em seu bojo traços desse projeto, em especial aqueles referentes aos chamados percursos formativos, mesmo que com algumas alterações. Outros setores, porém, atuaram de maneira intensiva nos bastidores desse projeto, pois havia outros interesses em jogo.

[...] tal Projeto de Lei resultou, por sua vez, de intensa atuação de setores da sociedade civil identificados com os o empresariado nacional que, há tempos, inclusive nos governos do PT, vêm exercendo forte influência sobre o MEC, no sentido de adequar a educação brasileira a seus interesses, entre eles os de natureza financeira. (FERRETTI, 2018, p. 26)

A Lei 13.415/2017 altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (Lei 9394/1996) no que tange à estrutura e ao funcionamento do ensino médio brasileiro. Dentre essas alterações destacamos:

- aumento da carga horária anual mínima de 800 para 1000 horas, com estudantes permanecendo, no mínimo, 5 horas na escola durante 200 dias letivos;
- aumento progressivo da carga horária anual mínima para 1400 horas o que significa, na prática, uma permanência de 7 horas em ambiente escolar;
- a separação curricular em disciplinas/componentes curriculares dá lugar às áreas de conhecimento da BNCC (*linguagens e suas tecnologias, matemática e suas tecnologias, ciências da natureza e suas tecnologias, e, ciências humanas e suas tecnologias*) que, juntamente com a *formação técnica e profissional*, passam a constituir a *formação geral básica*.

¹⁰ Em outubro de 2023, foi apresentado no Senado Federal o Projeto de Lei 5230 de autoria do Poder Executivo Federal propondo alterações na reforma do ensino médio.

- a introdução dos *itinerários formativos* a serem ofertados pelos sistemas de ensino na forma de projetos, disciplinas, oficinas, grupos de estudo, com o intuito de, segundo o que se encontra no portal do MEC¹¹, aprofundar os conhecimentos de uma ou mais áreas de conhecimento ou, até mesmo, da formação técnica e profissional.

A respeito desses dois últimos itens, Ferretti (2018) salienta que, embora a ideia de currículo escolar possa ser concebida de forma abrangente considerando-o como um “conjunto de ações e atividades realizadas pela escola tendo em vista a formação de seus alunos” (ibidem, p.27), seu alcance, no âmbito da Lei 13.415/2017, parece se restringir à de matriz curricular.

Evidência disso é a crítica da Lei à organização curricular existente: multiplicidade de disciplinas e rigidez na sua estrutura. Por isso mesmo suas propostas centrais giram em torno de dois aspectos principais: a flexibilização curricular e a oferta de cursos em tempo integral (sete horas diárias). A legislação ora proposta parece ignorar que a divisão das atuais matrizes curriculares em um núcleo comum e uma parte diversificada, tendo em vista o atendimento a demandas locais por parte das escolas, devidas à extensão e diversidade cultural do país, já se constitui, em certo sentido, numa forma de flexibilização, aceita e praticada pelas escolas brasileiras desde a década de 1980, a qual não priva os estudantes do acesso ao conjunto de conhecimentos ofertados a partir de vários campos do conhecimento historicamente produzido. (FERRETTI, 2018, p. 27)

Essa, contudo, não é a única crítica tecida contra a reforma do ensino médio e à BNCC. Dentre muitas, algumas dessas críticas são direcionadas à flexibilização curricular e ao ensino baseado em competências e habilidades.

Como já mencionado, o ensino pautado no desenvolvimento de *competências* e *habilidades* é central na BNCC. Porém, essa concepção de ensino não é desconhecida do universo educacional brasileiro. Com a publicação dos PCNs na segunda metade da década de 1990 e, posteriormente nos anos 2000, dos PCNs+ e das DCNEM ela já se encontra presente, em consonância com a chamada pedagogia do *aprender a aprender* (DUARTE, 2011; RICARDO, 2010), bem como discussões e críticas a seu respeito (BRANCO et al., 2019; RICARDO, 2010). A publicação da BNCC, por sua vez, contribuiu para que elas se intensificassem, dado seu caráter normativo.

Um primeiro aspecto diz respeito à maneira como são tratados, os conteúdos historicamente constituídos, na BNCC. De acordo com esse documento, as competências agregam conhecimentos (conceituais e práticos), habilidades

¹¹ <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=40361>. Acesso em 12 de julho de 2023

(práticas, cognitivas e socioemocionais), bem como atitudes e valores. Contudo, parece não haver espaço para os conteúdos clássicos relegados a segundo plano, como meros coadjuvantes:

Constata-se, portanto, que partindo da ênfase do ensino nas competências e habilidades, ocorre uma secundarização de conteúdos considerados importantes, sobretudo, aqueles mais relacionados com a formação crítica e cultural dos alunos. Nesse interim, [...] observa-se na BNCC a ausência de referência, ou secundarização, em relação aos conteúdos científicos, artísticos e filosóficos, sendo que a ênfase recai em métodos, procedimentos, competências e habilidades, voltadas para a adaptação do indivíduo aos interesses do capital (BRANCO et al., 2019, p. 162)

Mesmo antes da BNCC, Ricardo (2010) alertava para a apropriação imprecisa do conceito de competência e seus impactos em um ensino baseado nesse modelo:

Dessa forma, a construção do conhecimento e a adaptação do indivíduo ao meio se confundem. Talvez, por essa razão, é comum associar a noção de competências com o princípio do “aprender a aprender” sem uma compreensão precisa. Isso poderia favorecer a implementação da lógica das competências e, ao mesmo tempo, levar a um esvaziamento dos conteúdos escolares” (RICARDO, 2010, p. 612)

De acordo com Duarte (2011), para além de ser apenas um lema, o *aprender a aprender* se traduz, em termos pedagógicos, para muitos intelectuais da educação no que há de mais inovador, progressista e em sintonia com as necessidades individuais e da sociedade contemporânea. Para Branco et al. (2019) busca-se, assim, tornar o sujeito competitivo, capaz de se adaptar às intempéries do mercado de trabalho, sempre com vistas ao aumento da sua produtividade e, consequentemente, do lucro dos empregadores.

Ricardo (2010) observa que, no contexto do *aprender a aprender*, frequentemente competência e qualificação se confundem, sendo essa última mais um saber-fazer em que se incluem as atitudes do sujeito no ambiente de trabalho, distante do seu conceito sociológico cujos significados se construíram historicamente. É nesse ambiente que as competências passam a ser validadas, e não mais na escola. O autor também sublinha que, embora se defenda um ensino por competências como meio de estreitar os laços entre escola e trabalho, entre teoria e prática, o que se tem na prática é uma crescente individualização do sujeito e conformismo social. Individualização, na medida em que se transfere a ele a responsabilidade de sua formação, visto que se encontra em um ambiente competitivo que exige dele capacidade de produção e adaptação. Conformismo, pois nessa lógica, o sujeito acaba por aceitar que a precariedade do trabalho, as

incertezas quanto ao seu futuro e a individualização da responsabilidade fazem parte das regras de sobrevivência no mercado de trabalho. De acordo com Ricardo (2010), uma das consequências é a celebração de contratos trabalhistas cada vez mais moldadas ao interesse do próprio mercado e longe das convenções coletivas de trabalho.

A emergência da noção de competências nessa perspectiva e a não percepção da qualificação como um processo histórico social enfraquecem as conquistas coletivas e põem em conflito os interesses pessoais e coletivos, liberando o Estado de regulamentações, uma vez que se fortalecem as relações entre empregado e empresa. (RICARDO, 2010, p. 608)

Por essa perspectiva, percebe-se um redimensionamento dos papéis da escola e do professor, uma vez que a formação do indivíduo sai do âmbito escolar e passa para as mãos das empresas. São elas que, em função das qualificações adquiridas por seu empregado (o indivíduo), deverá “classificá-lo e remunerá-lo” (RICARDO, 2010, p. 609). O ensino escolar, portanto, acaba por se transformar em uma espécie de treinamento em que os instrutores são os professores que passam a ser “formadores de competências sociais, compatíveis com o modelo produtivo vigente” (BRANCO et al., 2019, 167). A função de transmissão dos saberes e emancipatória da escola, bem como a formação específica dos docentes, nessa perspectiva, passam a ser ignorados.

É justamente esse o maior problema de se defender o ensino por competências e habilidades: a adaptação dos indivíduos ao meio em que estão inseridos, ao invés de serem dotados da capacidade de superação e transformação de suas realidades para melhor. (BRANCO et al., 2019, p. 165)

Por outro lado, Ricardo (2010) observa que o ensino por competências, da forma como é posto em documentos curriculares como os PCNs e, por extensão, a BNCC, não se aproxima das ideias defendidas por autores como Philippe Perrenoud que veem essa forma de ensino como uma “possível alternativa ao fracasso escolar” (ibidem, p. 612). Especialmente a respeito de Perrenoud, Ricardo (2010) afirma que, embora muitos de seus livros e artigos tenham sido traduzidos para o português, isso não significou ter havido uma boa compreensão de sua concepção de competências tampouco de sua implementação no ambiente escolar. Ricardo (2010) ressalta que, para Perrenoud, o conceito de competências tem mais proximidade com a perspectiva didática no contexto da formação geral do indivíduo. Em uma das conceituações de competências feitas por Perrenoud, evidencia-se a multiplicidade de entes necessários para sua construção.

Define-se uma competência como a aptidão para enfrentar uma família de situações análogas, mobilizando de uma forma correta, rápida, pertinente e criativa, múltiplos recursos cognitivos: saberes, capacidades, microcompetências, informações, valores, atitudes, esquemas de percepção, de avaliação e de raciocínio. (PERRENOUD et al. 2002, p. 19 apud RICARDO, 2010, p. 613)

Em outras, Perrenoud (1999, p.7) concebe competências como “uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles”, entende, assim, ser descabida a dissociação entre o desenvolvimento de competência e a transmissão/aquisição de conhecimentos. Isso porque, para esse autor, são os conhecimentos traduzidos nos conteúdos historicamente constituídos que permitirão o desenvolvimento de habilidades e competências. Ricardo (2010) acrescenta ainda:

O problema maior não está no acúmulo de conhecimentos em si, mas na falta de estratégias e situações que levem os alunos a se servirem desses conhecimentos em suas vidas. Ou seja, o que está em discussão não é propriamente a pertinência dos saberes escolares, mas a ignorância em gerenciá-los, mobilizá-los em situações cotidianas. As competências não se opõem aos saberes, mas ao mero acúmulo de informações e de pré-requisitos como fim. (ibidem, p. 618)

No caso específico de combinatória, os estudos sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório (PIAGET e INHELDER,1951; FISCHBEIN,1970; LARIVÉE, 1981; FISCHBEIN e GAZIT,1988; FISCHBEIN e GROSSMAN,1997) e sobre o papel da instrução escolar (ENGLISH, 1992, 1993; NAVARRO-PELAYO et al., 1996; ROA, 2000; GODINO, 2005, BORBA, 2010; PESSOA e BORBA, 2010), oferecem elementos importantes para a composição de descritores de competências e habilidades que devem ser trabalhadas nos ensinos básico e superior.

Assim, um ensino baseado no desenvolvimento de habilidades e competências só tem sentido se for capaz de fazer o estudante mobilizar recursos cognitivos, inclusive o saber escolar, para enfrentar uma classe de situações. Tais recursos cognitivos se manifestam durante a execução de uma tarefa, portanto, não se trata de uma simples aplicação de conhecimentos, mas incluem a ponderação em relação à pertinência ou não desse ou daquele recurso cognitivo e sua integração à tarefa (RICARDO, 2010). Também por essa razão, os documentos curriculares têm papel importante como guia do professor na organização de situações diversas que deem sentido ao conhecimento que se pretende construir (VERGNAUD, 1990; DUBOIS, 1984; NAVARRO-PELAYO et al., 1996).

Em síntese, o desenvolvimento de competências em ambiente escolar deve ir além da ideia de uma mera aplicação de alguns poucos saberes práticos nos moldes

da lógica de mercado. Um ensino pautado no desenvolvimento de competências e habilidades deve, sobretudo, considerar os conhecimentos socialmente constituídos aplicados em situações bem construídas que visam seu desenvolvimento em uma perspectiva de formação para o exercício profissional e para a constituição do indivíduo apto a agir de forma ética e consciente no meio social em que se insere (PERRENOUD, 1999; RICARDO, 2010; BRANCO et al., 2019). O professor, nessa perspectiva, tem papel importante no desenvolvimento de competências. É dele a incumbência de gerenciar esse desenvolvimento por meio de situações capazes de mobilizar conhecimentos e construir novos. Outrossim, isso se constitui uma competência docente.

O reconhecimento de uma competência não passa apenas pela identificação de situações a serem controladas, de problemas a serem resolvidos, de decisões a serem tomadas, mas também pela explicitação dos saberes, das capacidades, dos esquemas de pensamento e das orientações éticas necessárias. (PERRENOUD et al., 2002, p.19).

O reconhecimento de competências exige, então, dos professores a mobilização de recursos provenientes das mais variadas fontes: de experiências pessoais e/ou profissionais, do ambiente escolar, de meios digitais, da troca de experiências com outros professores. Inserimos nesse rol de documentos que apresentamos, visto que são neles que se encontram delineadas recomendações para o ensino e desenvolvimento de situações combinatórias em sala de aula. É o que apresentamos a seguir.

2.3.4 Orientações para o ensino de combinatória em documentos curriculares

A combinatória como objeto matemático a ser ensinado/aprendido costuma ser abordada no 2º ano do ensino médio, precedendo o ensino de probabilidade (BORBA, 2019) e durante muito tempo, tal abordagem limitou-se a esse ano e sua ampliação para os anos do ensino fundamental se deu a partir da publicação dos PCNs nos idos dos anos de 1990 (PINHEIRO, 2015). De acordo com esse documento curricular, o trabalho com os problemas de contagem deve se iniciar nos anos iniciais do ensino fundamental e se intensificar nos anos finais, bem como, no ensino médio, para que o aluno desenvolva progressivamente estratégias de contagem baseadas na enumeração sistemática, no princípio multiplicativo, no uso de tabelas e diagramas, entre outros. E acrescenta:

[...] o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados

em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL, 1998, p. 137)

Nos PCNs voltados para o ensino médio, publicados no ano 2000, é destacada a importância crescente dos conhecimentos estatístico, probabilístico e combinatório na compreensão de fenômenos ligados a outras áreas como as ciências naturais e sociais. Por essa razão, esse documento defende um cuidado na abordagem desses temas para ampliar a “interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas” (BRASIL, 2000, p. 45).

Tanto o ensino de combinatória quanto de outros temas próprios do ensino médio, nas várias disciplinas, receberam um tratamento mais detalhado com o advento das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, designadas pela sigla PCNs+. Como o próprio nome sugere, esses documentos apresentam orientações curriculares específicas para as áreas de organização do ensino médio que, àquela altura, eram três: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias. De acordo com os PCNs+ referentes à Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a combinatória – abordada na unidade temática *Contagem* – permanece como conteúdo a ser trabalhado no 2º. ano do ensino médio. Cabe observar que, nos PCNs+, a *Contagem*, juntamente com a *Estatística* e a *Probabilidade*, constitui uma unidade temática do eixo estruturador *Análise de Dados*¹².

No Quadro 2 são apresentadas as habilidades associadas à unidade temática *Contagem*, que figura nos PCNs+ de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Quadro 1 – Habilidades referentes à unidade temática *Contagem* que se encontra nos PCNs+ de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem. • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos. • Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. • Identificar dados e relações envolvidos numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

BRASIL, 2006, p.127

¹² Além desse, os PCNs+ apresentam outros dois eixos ou temas estruturantes: *Álgebra: números e funções* e *Geometria e medidas*.

Na perspectiva que se apresenta nos PCNs+, o trabalho com problemas de contagem no nível médio de ensino, mais que preparar o campo para o ensino de probabilidade, permite consolidar o desenvolvimento do raciocínio combinatório iniciado nos anos anteriores. Desse modo, a introdução do uso de fórmula na resolução de problemas de contagem deve ser fruto do desenvolvimento desse tipo de raciocínio para a simplificação de cálculos nas situações em que “a quantidade de dados é muito grande” (BRASIL, 2006, p. 127).

Com a homologação da BNCC (ensino fundamental em 2017 e ensino médio em 2018) a combinatória passa a ser considerada uma das “aprendizagens essenciais” (BRASIL, 2018, p. 7) a serem desenvolvidas na educação básica, dado o aspecto normativo desse documento curricular. Assim, são estabelecidas as competências e habilidades a que o ensino de combinatória está atrelado, quer seja para o ensino fundamental, quer seja para o ensino médio.

Quadro 2 – Habilidades referentes à combinatória a serem desenvolvidas no 8º. ano do ensino fundamental

Ano	Unidade Temática	Habilidade
8º.	Números	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	Probabilidade e Estatística	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Adaptado BRASIL, 2018, p. 313 e 315

Para o 8º ano (Quadro 2) há uma menção clara à priorização do uso do princípio multiplicativo tanto na resolução quanto na construção de problemas combinatórios. Outrossim, o ensino de combinatória nessa etapa é associado ao de probabilidade e estatística, na perspectiva da constituição do espaço amostral. O mesmo não acontece no ensino médio. As habilidades elencadas pela BNCC têm relação direta com uma das cinco competências específicas (Quadro 3) estabelecidas para ensino de matemática visto que “embora uma mesma habilidade possa estar a serviço de mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual ela tem maior afinidade” (BRASIL, 2018, p.523). Para o ensino

de combinatória, há uma única habilidade estabelecida na BNCC atrelada à competência específica 3:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p. 529)

No caso do estado de São Paulo, o CPEM, acompanhou a BNCC ao indicar essa como a única habilidade ligada ao ensino de combinatória nesse segmento.

Quadro 3 – Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

Competência Específica 1	<i>Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.</i>
Competência Específica 2	<i>Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática</i>
Competência Específica 3	<i>Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.</i>
Competência Específica 4	<i>Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.</i>
Competência Específica 5	<i>Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.</i>

Adaptado de BRASIL, 2018, p. 523

Dentre aqueles que buscaram analisar a combinatória, presente nesses documentos curriculares destacamos os de Lima e Rocha (2016) e Borba (2019). No estudo que implementaram, Lima e Rocha (2016) analisaram como a combinatória é apresentada em alguns documentos curriculares brasileiros, dentre eles os PCNs e o texto provisório da BNCC. As autoras observaram que esses dois documentos apresentam orientações similares para o seu ensino. Os PCNs propõem um ensino de combinatória pautado na aplicação de estratégias baseadas no princípio multiplicativo com vistas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório para o enfrentamento de problemas, cada vez mais complexos e que demandem uma contagem sistemática. Orientação semelhante encontra-se no texto provisório da BNCC no qual o estudo de combinatória deve visar à construção do espaço amostral

de experimentos aleatórios pelo princípio multiplicativo, bem como, a resolução e a elaboração de problemas de contagem que envolvam esse mesmo princípio e que utilizem tabelas, diagramas de árvores, desenhos, listagens, entre outros recursos.

Sobre a combinatória no ensino médio, Lima e Rocha (2016), apontam que tanto os PCNs quanto nos PCNs+ é reiterada a importância que o raciocínio combinatório tem para outras áreas do conhecimento e para a própria matemática. Por essa razão, segundo as mesmas autoras, mesmo sendo nítida a proximidade entre combinatória e probabilidade, o estudo da primeira não deve ser visto como uma mera preparação ao estudo da segunda. Ademais, observaram que esses dois documentos trazem orientações mais gerais para os anos do ensino médio a respeito da “importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório e seu uso na Matemática e algumas orientações quanto ao seu ensino” (LIMA E ROCHA, 2016, p. 8). O texto provisório da BNCC, por sua vez, apresenta o ensino de combinatória de modo mais detalhado, ano a ano, conforme descrito no Quadro 4.

Quadro 4 – Eixos temáticos e objetivos, para o ensino de combinatória, distribuídos ano a ano do ensino médio de acordo com texto provisório de BNCC de 2016

Ano	Eixo Temático	Objetivo
1º.	Estatística e Probabilidades	descrever o espaço amostral de experimentos aleatórios, com e sem reposição, usando diagramas de árvore para contagem de possibilidades e o princípio multiplicativo para determinar a probabilidade de eventos.
2º.	Números e Operações	resolver e elaborar problemas de combinatória, envolvendo estratégias básicas de contagem;
3º.	Números e Operações	resolver e elaborar problemas de combinatória.

Adaptado de BRASIL, 2016, p.146-147, apud LIMA E ROCHA, 2016, p.9

É importante salientar, contudo, que na versão final da BNCC para o ensino médio a estrutura apresentada no Quadro 4 não se manteve. Os eixos temáticos e objetivos foram substituídos por competências que perpassam todos os anos do ensino médio, e passou-se a classificar as habilidades de acordo com as competências com as quais elas têm maior afinidade. No caso de combinatória, seu ensino foi vinculado ao desenvolvimento da habilidade (EM13MAT310) da competência 3, conforme ilustra o Quadro 5.

Também Borba (2019) buscou fazer reflexões sobre as indicações constantes em documentos curriculares, em especial a BNCC, para o ensino de combinatória e de probabilidade nos diferentes níveis de ensino: educação infantil, ensino fundamental (anos iniciais e finais), ensino médio, educação de jovens e adultos

(EJA) e educação inclusiva. As reflexões concernentes à combinatória tiveram por base os estudos de Borba (2010) em que defende uma abordagem mais ampla de combinatória ao longo de toda educação básica.

Quadro 5 – Competência e habilidade a serem desenvolvidas com o ensino de combinatória – BNCC – Ensino Médio

Competência	Habilidade
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Adaptado de BRASIL, 2018, p.527, 529

Em relação à educação infantil, a autora considera importante a proposição de situações que possam explorar a intuição das crianças para a contagem e para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Essa posição encontra respaldo no que a BNCC recomenda ser trabalhado nessa etapa inicial da educação básica, com o uso de recursos materiais manipulativos, desenhos, entre outros.

No ensino fundamental, Borba (2019) sublinha que a BNCC faz uma ampla defesa do trabalho com probabilidade. Porém, é somente no 3º ano¹³ do ensino fundamental que os problemas de contagem aparecem com a sugestão do uso de materiais manipulativos e de imagens para auxiliar na resolução. Além disso, nessa etapa, o único conteúdo a ser utilizado em problemas é o de produto cartesiano. Essa recomendação é contestada pela autora, que considera ser importante o trabalho gradual com situações do universo combinatório já a partir do 1º ano do ensino fundamental, e acrescenta:

[...] há divergências entre o prescrito na BNCC (BRASIL, 2017) e o que indicam resultados de pesquisas realizadas com estudantes em início de escolarização. As prescrições curriculares, dessa forma, subestimam habilidades já possuídas ou em construção pelos estudantes e, em geral, tratam conceitos de modo isolado (e não articulado). (BORBA, 2019, p.4)

Na BNCC do ensino médio, nível em que tradicionalmente se abordam os problemas de combinatória como conteúdo do 2º ano, é proposto que se trabalhe esse tema nos três anos, em diferentes situações. Tal sugestão é avaliada

¹³ De acordo com a BNCC, é no 4º. ano (e não no 3º.) que se inicia o trabalho com os problemas de contagem. Mantivemos 3º. ano, pois assim se encontra no texto da autora.

positivamente pela autora. No entanto, Borba (2019) entende que, embora haja uma explícita recomendação para que se invista em estratégias básicas de contagem na resolução e elaboração de problemas combinatórios, é necessário elucidar que aspectos devem ser considerados na formalização dos conceitos combinatórios no ensino médio. Citando Rocha (2019), a pesquisadora pontua alguns desses aspectos:

a necessidade de maior valorização de diferentes formas de registro (dos menos aos mais formais), o incentivo à argumentação na definição de tipos de problemas e suas resoluções, o estímulo à autonomia dos estudantes e à formalização como etapa subsequente à exploração de variadas situações combinatórias. (BORBA, 2019, p. 7)

De acordo com Borba (2019), quando se trata da EJA na BNCC é proposto que sejam trabalhadas situações que envolvam produto cartesiano sem que, no entanto, haja uma preocupação com a formulação de conceitos. A autora observa, porém, que há outros documentos curriculares em níveis estadual e municipal que vão além e se aproximam mais das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de combinatória nessa modalidade de ensino. Tais pesquisas defendem a articulação entre os ensinos de combinatória e de probabilidade como meio de desenvolver competências e habilidades ligadas a esses dois objetos matemáticos.

Sobre a educação inclusiva, Borba (2019) abre margem à discussão do papel dos vários atores envolvidos no processo de inclusão e lembra que, na maioria das vezes, essa responsabilidade é atribuída somente ao professor. Outro ponto é que, embora se defenda na BNCC a inclusão como um meio de garantir a democratização da aprendizagem, a diferenciação curricular sugerida por esse documento conduz, na verdade, à segregação curricular. Isso porque em vez de efetuar adaptações e adequações ao currículo comum para atender os portadores de necessidades especiais, propõe um currículo com atividades pouco desafiadoras e que em nada contribuem para o desenvolvimento desse indivíduo. Nesse sentido, os estudos citados por Borba (2019) procuram discutir e mostrar a viabilidade de situações que utilizam recursos pensados para suprir as necessidades específicas de cada estudante e levá-los, assim, ao desenvolvimento cognitivo desejado.

Em suas considerações finais, Borba (2019) defende que, em face das reverberações que os documentos curriculares e as pesquisas podem ter na prática docente, é importante apontar convergências e divergências entre esses dois elementos que visam o aprimoramento do trabalho a ser desenvolvido em sala de

aula. A autora destaca, por exemplo, a pouca discussão que se faz na BNCC das representações simbólicas como estratégias de resolução de problemas combinatórios e probabilísticos. Outro ponto de divergência está relacionado com o trabalho com situações combinatórias. A autora considera ser relevante que se comece esse trabalho desde cedo, nos primeiros anos do ensino fundamental – e não tardiamente como prevê a BNCC – tendo em vista o desenvolvimento gradativo do raciocínio combinatório. Por fim, ela entende ser importante que se amplie os tipos de problemas combinatórios a serem explorados no sentido de buscar uma maior articulação entre a combinatória e a probabilidade nos diferentes níveis de ensino.

Pelo que foi apresentado até aqui, consideramos que a ampliação do estudo de combinatória para os anos do ensino fundamental, não se restringindo assim ao 2º ano do nível médio, representa um avanço em termos curriculares, conforme preconizam os PCNs e a BNCC. Dada sua natureza normativa, a BNCC prevê sua abordagem nos 4º, 5º e 8º anos do ensino fundamental. Todavia, assim como Borba (2019), entendemos que situações combinatórias poderiam ser abordadas já nos primeiros anos do ensino fundamental, bem como ao longo de toda educação básica, numa perspectiva de continuidade e aprofundamento, com vistas ao desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico.

No caso do ensino médio, Borba (2019) considera positiva a recomendação expressa na BNCC em se trabalhar situações combinatórias ao longo dos três anos desse nível de ensino. Porém, ao associar à combinatória uma única habilidade e competência, corre-se o risco de ter esse trabalho restrito a um único ano do ensino médio e ignorar sua importância para o desenvolvimento de outras competências.

Outro aspecto observado por Borba (2019) nesses documentos curriculares é o incentivo ao desenvolvimento de estratégias baseadas no princípio multiplicativo, em tabelas, diagramas e outros recursos. Todavia, na BNCC esse incentivo se dá de maneira tímida ao explicitá-lo apenas na habilidade EF05MA09 (5º. ano do ensino fundamental) e EM13MAT310 (ensino médio). Como Borba (2019) observou, há carência de uma discussão mais profunda, na BNCC, sobre o uso de estratégias baseadas em representações simbólicas no enfrentamento de situações combinatórias.

As observações de Borba (2019) vão ao encontro do que pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de combinatória em âmbito escolar. Elas reiteram o papel

importante que estratégias baseadas nos princípios multiplicativos e em representações simbólicas desempenham no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Na seção seguinte, apresentamos alguns estudos desses estudos com base na pesquisa feita por Campos e Iglori (2021).

2.4 Algumas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de combinatória

Ao considerar o ensino e a aprendizagem de combinatória dentro do universo escolar brasileiro, Campos e Iglori (2021) mapearam trabalhos acadêmicos brasileiros (teses e dissertações), sobre esse tema, publicados no período entre 2015 e 2019 no banco de teses e dissertações da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Esse mapeamento contou com 55 trabalhos sendo 2 teses de doutorado e 53 dissertações de mestrado. Dessas, 10 eram provenientes de mestrados acadêmicos e 43 de mestrados profissionais sendo 33 do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, um programa que se encontra no contexto da Universidade do Brasil/CAPES, apoiado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A respeito desses trabalhos os autores observaram dois pontos que os levaram a considerá-los separadamente. O primeiro foi que, de um modo geral, sua estrutura seguia um mesmo padrão, com a apresentação de combinatória por meio de definições, teoremas e dedução de fórmulas, seguidas de problemas de aplicação e sugestão de abordagem desse tema nas aulas. O segundo, foi a ausência de elementos como quadro teórico-metodológico, descrição e análise de dados. Assim, foram analisados, ao todo, 22 trabalhos, classificados em cinco grupos numerados de 1 a 5 conforme segue:

- Grupo 1: *propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre combinatória;*
- Grupo 2: *a combinatória, presente em documentos curriculares e livros didáticos;*
- Grupo 3: *os que discutem a combinatória e a formação do professor;*
- Grupo 4: *os que investigam recursos para o ensino de combinatória;*
- Grupo 5: *os que investigam as estratégias de resolução de problemas combinatórios.*

O Quadro 6 apresenta a distribuição dos trabalhos nos grupos.

Quadro 6 – Distribuição dos trabalhos por grupos

Grupo	Dissertações		Teses	Total por Grupo	PROFMAT
	Mestrado Acadêmico	Mestrado Profissional			
1	3	8		11	33
2	1	-	2	3	
3	4	-		4	
4	1	2		3	
5	1	-		1	
Total	10	10	2	22	

CAMPOS e IGLIORI, 2021, p. 6

Dos 55 trabalhos analisados, 31 foram classificados no Grupo 1- Nota-se, então, uma evidente prevalência de trabalhos com essa perspectiva investigativa os demais grupos. A Tabela 1 foi confeccionada com base nas investigações de Campos e Iglori (2021) e apresenta, em valores absolutos, a distribuição dos trabalhos nos 5 grupos, incluindo aqui as produções do programa PROFMAT.

Tabela 1 – Distribuição das teses e dissertações sobre ensino e aprendizagem de combinatória considerando as cinco perspectivas investigativas apontadas por Campos e Iglori (2021)

Grupo	Perspectiva Investigativa	Número de trabalhos
1	propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre análise combinatória	31
2	análise combinatória presente em documentos curriculares e livros didáticos	3
3	análise combinatória e formação de professores	5
4	recursos para o ensino da análise combinatória	12
5	estratégias de resolução de problemas combinatórios	4
TOTAL	-	55

Fonte: Elaborado pelo autor

Segundo os autores, em linhas gerais, as investigações do Grupo 1 analisam possíveis benefícios que intervenções com metodologias como a resolução de problemas têm na construção do raciocínio combinatório, principalmente, em alunos do 2º ano do ensino médio. E complementam:

Em todos esses trabalhos parece haver um sentimento comum de que o ensino da análise combinatória baseado em classificação de problemas e respectivo uso de fórmulas é pouco eficaz, e que é necessário buscar meios de se propiciar um ensino que garanta a construção do raciocínio combinatório. Esse sentimento justifica um número maior de produções que apresentam proposta de intervenções baseadas na resolução de problemas e no uso do princípio multiplicativo. (CAMPOS E IGLIORI, 2021, p. 8)

O Grupo 4, dos trabalhos que versavam sobre os recursos para o ensino de análise combinatória, foi o segundo em número de produções. Das 12 contabilizadas nesse Grupo, 11 advinham de mestrados profissionais dos quais 9 eram do PROFMAT. Uma justificativa para esse fato está na própria natureza dessa modalidade de mestrado que busca “oferecer aprimoramento profissional a professores de matemática que atuam na educação básica, sobretudo nas redes públicas de ensino, com atenção maior à formação e a contribuições para a prática docente” (CAMPOS e IGLIORI, 2021, p. 14). A motivação e a qualidade do conhecimento a ser construído foi uma questão que, segundo esses pesquisadores, permeou produções desse Grupo. De modo geral, essas produções estudaram a relação entre ensino de combinatória e recursos didáticos, associando-os a sequências ou atividades didáticas ao configurar-se, em certa medida, também como propostas de intervenção.

Dos 55 trabalhos analisados 43 eram dos Grupos 1 e 4. Em outras palavras, parece haver pouco investimento, em âmbito nacional, em pesquisas que discutam estratégias de resolução de problemas combinatórios, a formação do professor, o currículo e o livro didático no contexto do ensino de combinatória. Como sugerem Campos e Iglori (2021), há espaço para aprofundar questões já postas ou, ainda, postular novas questões nas temáticas dos 5 Grupos.

No caso das pesquisas que abordavam as estratégias para o enfrentamento de problemas combinatórios, Campos e Iglori (2021) reiteram a necessidade de aprofundar o estudo da constituição do raciocínio combinatório em crianças e adolescentes.

Considerando o conhecimento combinatório e a formação de professores, em face das dificuldades apontadas em relação aos conhecimentos específicos e sua relação com a prática, os autores entendem serem relevantes pesquisas que se detenham sobre a maneira como a combinatória encontra-se presente nos cursos de licenciatura em matemática e de pedagogia, ou seja “que se articulem em uma perspectiva colaborativa, visando à construção do conhecimento junto dos docentes” (CAMPOS e IGLIORI, 2021, p. 17).

Finalmente, sobre as produções pertencentes aos Grupos 2, tendo em vista a o fato de o livro didático ser o principal recurso usado por professores e a estreita relação que tem com documentos curriculares oficiais, esses autores sugerem questões que podem ser exploradas:

[...] de que modo o professor articula currículo prescrito, os livros didáticos e outros recursos no preparo e no desenvolvimento de suas aulas sobre combinatória? quais os impactos das orientações curriculares para o ensino de combinatória na formação do raciocínio combinatório? (CAMPOS e IGLIORI, 2021, p. 17)

Nesta tese aprofundamos as questões indicadas em Campos e Iglori (2021), quais sejam: a existência de relação entre recursos curriculares (currículo prescrito, livro didático, apostilas); o que é mobilizado por professores no preparo, implementação e avaliação das aulas de combinatória. Para esse fim utilizamos trabalhos que abordam a temática nas seguintes bases de dados:

- do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico – GERAÇÃO¹⁴ – da Universidade Federal de Pernambuco sob a liderança da pesquisadora Rute Borba. O principal objetivo do Grupo é desenvolver e divulgar estudos sobre o conhecimento de combinatória e probabilidade, considerando cinco linhas de pesquisa: análise e produção de recursos; avaliação do conhecimento; desenvolvimento cognitivo; educação inclusiva; formação de professores; intervenções pedagógicas.
- O Grupo de *Investigación sobre Educación Estadística* – GEEUG¹⁵, que é um grupo de estudos em educação estatística da Universidade de Granada, na Espanha, coordenado pela pesquisadora Carmén Batanero. Esse Grupo vem desenvolvendo pesquisas sobre combinatória, probabilidade e estatística desde o início dos anos de 1990. As pesquisas desenvolvidas por esse grupo têm contribuído significativamente para as discussões sobre o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico em âmbito escolar, desde a educação infantil até o ensino superior, bem como sobre o papel desempenhado pelos professores no contexto do ensino de combinatória, probabilidade e estatística.
- do portal de periódicos da CAPES¹⁶, pela digitação das expressões *análise combinatória* and *professores*. Essa operação nos levou a 26 artigos dos quais 4 tinham relação direta com a temática investigada.

¹⁴ <http://geracaoufpe.blogspot.com/>

¹⁵ <http://www.ugr.es/~batanero/index.html>

¹⁶ <https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/index.php/buscador-primo.html>

Na próxima seção apresentamos trazemos os dados desses bancos de dados para a continuação dos estudos.

2.5 Formação do professor frente à combinatória e ao seu ensino

A formação docente é um tema recorrente em pesquisas em Didática da Matemática, dada a relevância que tem na compreensão de fenômenos próprios dessa área. Trata-se de um tema complexo pela multiplicidade de fatores envolvidos no processo formativo de um professor. Tardif (2005), ao investigar os saberes¹⁷ que se fazem presentes na ação docente, afirma que

“[...] o saber profissional está, de certo modo, na confluência entre várias fontes de saberes provenientes da história de vida individual, da sociedade, da instituição escolar, dos outros atores educativos, dos lugares de formação etc. Ora, quando estes saberes são mobilizados nas interações diárias em sala de aula, é impossível identificar imediatamente duas origens: os gestos são fluidos e os pensamentos, pouco importam as fontes, convergem para a realização da intenção educativa do momento.” (TARDIF, 2005, p.64)

Quando se trata de investigar a formação do professor que ensina combinatória pretende-se, em última análise, buscar os saberes docentes que estão em jogo na ação de ensinar combinatória. Em outras palavras, que entendimento de combinatória espera-se que o professor tenha e qual sua influência nos momentos de preparação, execução e avaliação de suas aulas? Rocha (2011) nos fornece pistas para responder a primeira parte dessa pergunta.

Rocha (2011) buscou investigar os conhecimentos matemáticos necessários para o ensino dos conceitos relacionados à combinatória no ambiente escolar, com base nos domínios de conhecimentos proposto por Ball et al. (2008). Da pesquisa de Rocha participaram seis professores da educação básica (dois do ensino fundamental anos iniciais, dois dos anos finais e dois do ensino médio). Por meio de entrevistas semiestruturadas, os participantes responderam questões sobre tipos de problemas combinatórios, procedimentos que alunos empregam na resolução desses problemas e maneiras de implementar intervenções que auxiliem os alunos a superarem seus obstáculos. A autora buscou investigar os conhecimentos subjacentes a essas questões que foram compilados, posteriormente, pela mesma

¹⁷ Embora possa transparecer, ao longo do texto, que saber e conhecimento sejam sinônimos, eles não o são. De acordo com Brousseau (1996, p. 97) “a distinção entre um saber e um conhecimento assenta antes de mais no estatuto cultural de ambos: um saber é um conhecimento institucionalizado; contudo, a passagem de um estatuto para outro implica transformações que os diferenciam e que se explicam, em parte, pelas relações didáticas que se estabelecem a seu propósito”.

autora e colaboradores em um artigo científico (ROCHA et al., 2015), conforme o que segue:

- saber a resolução de problemas combinatórios;
- distinguir os diferentes tipos de problemas combinatórios identificando os invariantes;
- saber o que os professores de anos anteriores consideram no ensino de combinatória e como esse conhecimento será abordado em anos posteriores;
- compreender estratégias de resolução de problemas combinatórios de alunos;
- ser capaz de planejar aulas sobre combinatória para turmas diferenciadas (anos iniciais, anos finais do ensino fundamental, ensino médio, EJA);
- conhecimento de conteúdo e currículo.

De acordo com Rocha (2011), embora os participantes tivessem diferentes formações, de modo geral enfrentaram dificuldades na diferenciação de problemas combinatórios, em especial nos de permutação e de combinação. Essas dificuldades se concentraram na leitura do texto dos problemas e na correção das estratégias empregadas pelos alunos o que indica desconhecerem situações em que a relevância ou não da ordem deve ser considerada.

A seguir apresentamos duas investigações cujos sujeitos eram professores em formação inicial.

A pesquisa de Gea et al. (2019) contou com 62 estudantes do 2º ano do curso de formação em nível superior de professores para a educação primária espanhola (alunos com idades de 6 a 12 anos). Nessa pesquisa foram avaliadas as diferentes formas de linguagem e de estratégias empregadas na resolução de problemas combinatórios, por esses sujeitos. Ademais, essas duas variáveis foram analisadas em função do modelo combinatório implícito, um conceito trazido por Dubois (1984) e que será apresentado mais adiante. Primeiramente, os participantes foram convidados a resolverem três problemas combinatórios retirados de Navarro-Pelayo (1994) que foram respondidos por escrito e individualmente. Em um segundo momento, foi feita coletivamente a discussão e a correção de possíveis respostas inadequadas. Nesse momento foram observadas e analisadas as diferentes linguagens e estratégias utilizadas pelos participantes. Com base nesses dados, as autoras consideraram que:

- os participantes demonstraram alguma competência no uso da linguagem matemática, visto que em certas respostas a linguagem verbal foi a única empregada;
- poucos foram os que utilizaram o diagrama de árvores e, quando o fizeram, chegaram a respostas incorretas;
- a utilização da linguagem icônica se deu para simbolizar os elementos que figuravam nas situações propostas e, a simbólica, para associá-los a números ou letras;
- dentre as estratégias empregadas, as enumerações observadas, de modo geral, não foram completas tampouco sistemáticas;
- aqueles que optaram por estratégias baseadas no uso de fórmulas e no princípio multiplicativo também, de maneira geral, o fizeram incorretamente;
- foram observados conflitos semióticos na interpretação do enunciado e no desenvolvimento das soluções, ambos tidos pelas autoras como inadequações em processos interpretativos;
- os participantes enfrentaram dificuldades em admitir se os objetos a combinar eram distinguíveis ou não, se a ordem era relevante, se havia elementos repetidos ou não, além de confusões referentes a termos matemáticos.

Em razão das observações e reflexões proporcionadas pela pesquisa, Gea et al. (2019) consideram ser importante que a formação do futuro professor do ensino primário espanhol contemple os problemas combinatórios em razão da sua função nos processos de resolução de problemas, tema transversal do currículo de matemática para os anos iniciais da educação primária espanhola. Por conta disso, as autoras defendem, ainda, a implementação de pesquisas que discutam e avaliem o raciocínio combinatório de futuros professores.

Em uma investigação semelhante, Santos-Wagner et al. (2013) identificaram o nível de compreensão que 198 estudantes universitários tinham a respeito dos conceitos de arranjo e combinação ao observar a capacidade de distingui-los, as estratégias utilizadas as incompreensões reveladas quando do enfrentamento de problemas sobre esses dois temas. Todos os participantes eram estudantes de cursos de licenciatura em matemática de universidades baianas que frequentavam o 3º ou o 8º semestre. E foi proposto a eles que resolvessem dois problemas que envolviam a constituição de agrupamentos em que a ordem era ou não relevante.

No primeiro desses problemas, os participantes deveriam: listar subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com 3 elementos, listar todos os números de 2 algarismos distintos a partir de 3 dígitos dados; estabelecer a distinção conceitual entre arranjo e permutação. As tarefas dadas no 2º assemelhavam-se às do 1º problema, considerando-se um conjunto com um número maior de elementos.

Na comparação que fizeram entre o número de acertos, de erros e de questões não respondidas, Santos-Wagner et al. (2013) concluíram que a variável *semestre que frequenta* não foi relevante por ter havido pouca diferença entre os resultados obtidos pelos participantes de 3º e de 8º semestres, sobretudo no que tange às incompreensões apresentadas. Sobre os conhecimentos que esses estudantes mobilizaram para resolver as questões, os autores observaram que as estratégias empregadas variaram conforme o número de elementos que se encontravam em jogo. A listagem de possibilidades foi a empregada pela maioria dos participantes nas situações com menos elementos a se combinarem, dando lugar ao uso de fórmulas e ao princípio multiplicativo nas situações em que a listagem se tornava inviável em decorrência do aumento do número de elementos. Nesses casos, porém, essas estratégias foram empregadas indiscriminadamente o que levou, em muitos casos, ao insucesso.

Ao questionarem os participantes sobre como fazer a distinção entre situações de arranjo e combinação, os autores observaram: confusão entre os dois conceitos, chamando de arranjo o que era combinação e vice-versa; embora soubessem que o que os distingue é a relevância ou não da ordem dos elementos nos agrupamentos; o reconhecimento de apenas um dos dois conceitos; a diferenciação de um conceito do outro exclusivamente pela fórmula. E mesmo dentre os que apresentaram respostas satisfatórias, foi observada certa falta de precisão nas definições que propuseram o que, no entendimento dos autores, ressalta “que licenciandos em matemática estão se formando sem ter segurança sobre os entendimentos de arranjo e combinação” (SANTOS-WAGNER et al., 2013, p. 632).

Quanto às respostas inadequadas, os autores observaram algumas ligadas:

- à listagem com a inclusão de elementos desnecessários e/ou a exclusão de outros que deveriam figurar na lista;
- à confusão e/ou dificuldade em distinguir os conceitos de arranjo e combinação refletida no uso das respectivas fórmulas;

- ao uso equivocado dos princípios multiplicativo e aditivo ao aplicar um deles no lugar do outro.

Sobre essas confusões, Santos-Wagner et al. (2013) veem a necessidade de que sejam discutidas, de modo que os estudantes possam justificar os caminhos percorridos e identificar as fragilidades que os levaram a cometer imprecisões.

Os estudos de Gea et al. (2019) e Santos-Wagner et al. (2013) evidenciam as fragilidades de futuros professores – sejam eles de matemática ou que ensinarão matemática – frente ao tema combinatória. São dificuldades que guardam estreita semelhança com aquelas enfrentadas por alunos da educação básica, algumas delas descritas por Navarro et al. (1996), quais sejam: confundir o tipo de modelo matemático no enunciado do problema; erro em relação à relevância ou não da ordem; erro ao considerar ou não elementos repetidos; erro em considerar os elementos dos agrupamentos distinguíveis ou não; erro no processo de enumeração sistemática; erro na identificação das fórmulas adequadas a cada situação; interpretação errônea do diagrama de árvores; confusão com o tipo de subconjuntos. Aqui, é possível perceber que, embora haja uma distância temporal de cerca de 20 anos entre as pesquisas de Navarro et al. (1996) e as de Gea et al. (2019) e Santos-Wagner et al. (2013), as dificuldades com essa temática persistem.

Santos-Wagner et al. (2013) observaram, ainda, que muitos dos que haviam participado afirmaram não terem estudado combinatória no ensino médio. Quando isso ocorreu, tal ensino baseou-se na aplicação de técnicas e fórmulas sem que houvesse “apreensão ou construção dos conceitos envolvidos em análise combinatória com compreensão e significado” (ibidem, p. 626).

Outras investigações discutiram essa temática com professores como sujeitos em exercício da profissão. A pesquisa de Sabo (2010) trouxe à pauta os saberes docentes referentes à combinatória no ensino médio. Por meio de entrevistas semiestruturadas, o pesquisador buscou na fala dos participantes os significados que atribuem aos conceitos ligados à combinatória e à maneira como abordam esse tema em suas aulas. Foram entrevistados seis professores, com idades entre 27 e 54 anos e tempo de experiência, entre 0 e 35 anos. Dois deles ainda eram estudantes de licenciatura em matemática à época das entrevistas. Desses, um não tinha nenhuma experiência em sala de aula e outro era coordenador pedagógico de uma escola privada, os demais cursaram licenciatura em matemática e dois deles, além da licenciatura, possuíam o mestrado em educação matemática. Dentre as

características dos saberes identificados por Sabo (2010) nas falas dos participantes, destacamos:

1. alguns deles disseram espelhar suas ações para o ensino de combinatória na maneira como seus professores faziam, supervalorizando a memorização e o uso de fórmulas;
2. houve um professor que considerou importante o enfrentamento de problemas e a construção das operações combinatórias com o princípio fundamental da contagem (ou multiplicativo) como ponto de partida. Outros, porém, entenderam ser mais efetiva a apresentação da operação e da fórmula a ela associada, embora não soubessem justificá-las ou validá-las;
3. assim como muitos alunos, alguns dos participantes disseram ter dificuldades em considerar a relevância ou não da ordem quando leem o enunciado de um problema combinatório.

Em sua investigação, Rocha (2012) deteve-se na análise de conhecimentos que professores de matemática dos ensino fundamental e médio têm sobre combinatória e seu ensino. Participaram dois professores de cada segmento (ensino fundamental anos iniciais, ensino fundamental anos finais e ensino médio). Por meio de entrevistas semiestruturadas, a pesquisadora observou dificuldades em distinguir problemas de arranjo e de combinação. Na sua perspectiva, as dificuldades observadas “podem ser justificadas por lacunas de conhecimento específico na formação de professores, como também da experiência de ensino e dos recursos de apoio do professor” (ibidem. p. 10).

Com base em pesquisas como as apresentadas aqui, é possível afirmar que, em muitos casos, o ensino de combinatória encontra-se imerso em um ciclo vicioso. As fragilidades na formação dos professores acarretam, muitas vezes, uma abordagem inadequada e deficitária – ou até mesmo uma não abordagem – de combinatória na sala de aula que, por consequência, contribui para que se configurem lacunas na constituição dos raciocínios combinatório e probabilístico dos estudantes dentre eles, possivelmente, futuros professores.

Quando, inicialmente, questionamos que entendimento o professor deve ter de combinatória tendo em vista seu ensino, as reflexões apresentadas até aqui evidenciam que muito mais que entender, ele deve ser detentor de uma gama de saberes e conhecimentos tidos como necessários para criar um ambiente que propicie o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos estudantes. De acordo

com Tardif (2005) esses são saberes que consideram suas experiências pessoais e profissionais, que apresentam forte conexão com suas formações básica e para o exercício do magistério, além de outros conhecimentos. Dentre esses conhecimentos, Ball et al. (2008) destacam o do conteúdo que pretende trabalhar com seus alunos, quer sejam gerais, específicos ou de horizonte¹⁸, bem como conhecimentos pedagógicos apoiados nas perspectivas dos estudantes, do currículo prescrito e da didática. No entanto, fragilidades nos conhecimentos matemáticos para o ensino – inclusive dos conhecimentos combinatórios – podem tornar mais difíceis ou até mesmo inviabilizar a construção dos outros domínios de conhecimento atrelados a um conteúdo específico.

A pluralidade de saberes e conhecimentos que estão em jogo na ação docente, contudo, não é algo que se construa em um curto espaço de tempo, mas que se constitui em um processo que traz como consequência o desenvolvimento profissional do professor. (SHULMAN, 1987; TARDIF, 2005; TROUCHE et al., 2007; BALL et al., 2008). Assim, as ações rotineiras de planejar suas aulas (criar situações, selecionar exemplos e tarefas, prever possíveis reações dos estudantes), de executá-las (observar, por exemplo, como os alunos resolvem situações propostas ou redirecionar o que fora planejado frente a uma situação inusitada) e de avaliá-las (refletir a respeito dos objetivos didáticos a serem alcançados) exigem a mobilização desses saberes e conhecimentos e contribuem para que esses sejam sedimentados (TARDIF, 2005; TROUCHE et al., 2007).

Na perspectiva de Trouche et al. (2007), os saberes e conhecimentos docentes medeiam a relação que se estabelece entre o professor e o conjunto de recursos de que dispõe para o ensino que, por sua vez, torna-se fonte de novos saberes e conhecimentos docentes. Dentre esses recursos encontram-se os *recursos curriculares* que ganham cores ainda mais fortes quando produzidos em contextos peculiares, como os da homologação e implementação da BNCC (e dos currículos estaduais e municipais escritos com base nesse documento, como é o caso do Currículo Paulista) e da reforma do ensino médio. No rol de recursos curriculares, o livro didático merece destaque por se constituir, historicamente, a

¹⁸ Trata-se de um conceito cunhado por Ball et al. (2008) que se traduz na capacidade do professor saber que tópicos serão estudados pelos alunos mais adiante, nos anos subsequentes, e, dessa forma, prepará-los para esse momento. Assim, o professor pode fazer suas escolhas didáticas visando atender às necessidades que deverão surgir posteriormente.

principal fonte para a preparação e implementação das aulas de um modo geral e, mais particularmente, das de matemática.

Na próxima seção, são apresentados estudos que discutem a importância histórica dos livros didáticos como principal recurso para o ensino de combinatória, além de estudos que abordam a combinatória em documentos curriculares, em especial, no contexto da BNCC e da reforma do ensino médio.

2.6 O livro didático e documentos curriculares como recursos (curriculares) para o ensino de combinatória

Em uma investigação que dirigimos a 29 professores sobre recursos que utilizam, habitualmente, em suas aulas, o livro didático foi citado por todos os participantes, sendo que 11 respondentes o apontaram como o principal recurso utilizado para o preparo das aulas. Os demais, associaram o uso do livro didático a outros recursos disponíveis na *internet* como modelos de aulas, sequências didáticas ou jogos (6 indivíduos) a recursos que eles próprios produzem (4 indivíduos) e outros (8 indivíduos). Esses dados sugerem que os professores têm no livro didático um porto seguro no preparo de suas aulas, mas consideram outros recursos como aqueles que se encontram disponíveis em *websites* muitos voltados exatamente para o ensino escolar.

No entendimento de Piletti (2004, p. 68) “os recursos de ensino são os componentes do ambiente de aprendizagem que dão origem à estimulação para o aluno”. Trouche et al (2017), porém, ampliam essa ideia inserindo-a na perspectiva de uma outra personagem: o professor. Esses últimos entendem os recursos como tudo que, ao professor, possa “nutrir suas práticas de sala de aula, e o que é continuamente renovado por essas práticas”. Assim, os chamados *recursos curriculares*, tido como aqueles “desenvolvidos e usados por professores e alunos em suas interações com a matemática, dentro e fora da sala de aula (ibidem, p.2). integram a gama de recursos disponíveis ao professor. Livros didáticos e apostilas, sejam em formato tradicional (brochura, por exemplo) ou digital, são exemplos clássicos de *recursos curriculares*.

Com o avanço das tecnologias de informação e comunicação para o ensino, o rol de recursos disponíveis aos professores ganhou dimensões ainda maiores. Porém, somente esse aumento não implica, necessariamente, na melhoria da qualidade do que é ensinado, sobretudo em matemática. Segundo Trouche et al.

(2017), a escolha e o modo como recursos didáticos serão empregados na aula passa, necessariamente, pelo crivo do professor que deve fazê-lo pautado, sobretudo, nos objetivos didáticos a serem alcançados. Eles são tidos como ferramentas disponíveis ao professor na preparação de suas aulas e ao aluno na resolução das situações propostas.

No entendimento dos autores a maneira como professores selecionam, modificam ou criam recursos para fins didáticos estabelece entre eles – professor e recurso – uma relação dialética que é gerida pelos conhecimentos docentes. Segundo esses autores, a interação com os recursos interfere diretamente no desenvolvimento profissional dos professores.

Nessa perspectiva, ao considerarmos o objeto matemático combinatória cabe refletir sobre como é sua abordagem em diferentes recursos curriculares disponibilizados aos docentes, especialmente em livros didáticos e em documentos curriculares. Apresentamos, a seguir, essa reflexão com base em estudos sobre a combinatória em livros didáticos e em documentos curriculares.

2.6.1 Recursos curriculares: estudos sobre a combinatória nos livros didáticos

Dos recursos usados para o ensino de modo geral e, em particular, para o ensino de matemática, o livro didático ocupa posição de destaque no universo educacional brasileiro (ASSIS e BOTELHO, 2021; MARIM e SOUZA, 2015; SILVA JUNIOR E REGNIER, 2009; SILVA, 2012) e internacional (GONZÁLEZ; ROA, 2013). Isso porque regularmente é nele que os professores buscam apoio para planejar e prepararem suas atividades diárias, provas e tarefas de reforço e/ou recuperação, para embasarem matematicamente suas aulas, entre outros usos.

Embora não devesse ser encarado como currículo prescrito, mas como um recurso didático/pedagógico que se soma a vários outros de que os professores dispõem (MARIM; SOUZA, 2015), em muitos casos é exatamente esse o papel que o livro didático desempenha (MELO, 2018). Assim, Assis e Botelho (2021) observam que o livro didático se constitui a principal fonte dos conteúdos matemáticos para professores tanto da escola pública, quanto da escola privada. E vai além. De acordo com Silva Junior e Regnier, frequentemente o livro didático atua como a única fonte de estudos de que os professores dispõem diante das necessidades decorrentes de fragilidades na formação inicial (SILVA JUNIOR; REGNIER, 2009) assumindo, desse modo, o protagonismo na tarefa de informar/formar docentes,

bem como, de orientar e conduzir suas ações em sala de aula (CAMPOS; IGLIORI, 2022; SILVA, 2012).

Gonçalves (2013), no estudo que fez sobre a relação entre os professores e o livro didático, enfatiza outro papel desempenhado por esse recurso: o de ser veiculador “de um sistema de valores, de uma ideologia, de uma cultura” (ibidem, p. 25681) cabendo muitas vezes ao professor a tarefa de mediar esse arcabouço ideológico e cultural com seus alunos. Ao desempenhar esse papel, o professor torna-se um mero reproduzidor do que é apregoado nos livros didáticos sem perceber as peculiaridades do ambiente sociocultural em que os alunos – e por extensão em que a escola – estão inseridos. Sobre esse aspecto, o autor concorda com Giroux (1997) e Trouche et al. (2017) quando esses defendem a participação ativa dos docentes na produção de recursos curriculares, exatamente porque são eles que conhecem de modo mais profundo a realidade do ambiente escolar em que estão inseridos. Gonçalves (2013) ainda acrescenta que:

[...] a responsabilidade de fazer o levantamento das questões acerca do que se ensina, como deve ser ensinado e quais são as metas mais amplas em termos de educação, deve ser incumbência do professor, possibilitando que este assuma um papel responsável na formação dos propósitos e das condições de escolarização [...]. (ibidem, p. 25682)

De acordo com Valente (2008), Pinheiro (2015) e Melo (2018), não à toa, ao longo da história educacional brasileira, foi por meio do livro didático que foram introduzidas e difundidas ideias tidas como inovadoras, antes mesmo de figurarem como currículo prescrito de matemática, como foi o caso do Movimento da Matemática Moderna nos anos de 1960 e 1970.

Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos. (VALENTE, 2008, p. 141)

Pela importância que esse recurso tem no contexto educacional brasileiro, Pinheiro (2015) e Melo (2018), cada um a seu modo, buscaram investigar o saber combinatório presente em livros didáticos ao longo de pouco mais de um século. Particularmente, esse último autor incluiu também alguns documentos curriculares, principalmente os que vieram depois dos anos 1990.

Pinheiro (2015) observou que a maneira como a combinatória foi abordada pelos autores de livros didáticos no período de pouco mais de um século passou por uma transformação: de uma abordagem teoricista, focada na dedução de fórmulas,

para a técnica em que valores eram calculados a partir de fórmulas. Para esse autor, o Movimento da Matemática Moderna, entre as décadas de 1960 e 1980 contribuiu fortemente para essa transição.

Assim como em Pinheiro (2015), o estudo de Melo (2018) apontou para um protagonismo do Movimento da Matemática Moderna na maneira como a combinatória passou a ser, então, abordada nos livros didáticos, sobretudo no que diz respeito a tarefas e técnicas de resolução de problemas de contagem. No entanto, a combinatória continuava a ser um tema exclusivo do 2º ano do ensino médio. Melo (2008) atribuiu ao que chamou de Movimento da Educação Matemática e à ascensão dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e de outros documentos curriculares em níveis nacional, estadual e/ou municipal, uma maior preocupação por parte dos autores de livros didáticos em abordar o saber combinatório ao longo da educação básica. Segundo Melo (2018), o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) contribuiu para essa mudança de postura dos autores. Trata-se de um programa que tem por objetivo a distribuição gratuita de livros didáticos a alunos das escolas públicas do ensino básico.

Outras pesquisas brasileiras que se ocuparam de combinatória presente nos livros didáticos do ensino médio apontaram o uso de diferentes estratégias na resolução dos chamados problemas-resolvidos com consequente diminuição no uso de fórmulas como estratégia principal (ROCHA; BORBA, 2017; SILVA, 2016), o trabalho com diferentes significados em torno dos conceitos ligados à combinatória (SILVA, 2016) e à presença de atividades que exploram diversos aspectos do raciocínio combinatório, embora haja espaço para situações que ampliem os significados e as representações simbólicas (MARTINS, 2016). Martins (ibidem) defende, todavia, a maior diversidade de problemas combinatórios nos livros didáticos para favorecer a inclusão de situações que ampliem os significados e as formas de representação simbólica, bem como, que auxiliem o professor no trato com as propriedades invariantes de combinatória por meio de orientações metodológicas consistentes. No mesmo sentido, Silva (ibidem) considera importante a diversificação de situações combinatórias, em especial nos livros destinados aos anos iniciais do ensino fundamental, embora reconheça haver sintonia entre o que se prescreve nos documentos curriculares e nos livros didáticos por ela analisados.

Em certa medida, essas pesquisas reforçam a ideia de que também aí as avaliações do PNLD contribuíram para alterar a maneira como esse tema vinha

sendo abordado, tendendo a conformar-se às orientações presentes em documentos curriculares como os PCNs e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Outras que consideram que o tratamento dado à combinatória em livros didáticos do PNLD não refletem propriamente tais estudos e orientações, como foram as de Oliveira e Coutinho (2013) e Lima e Borba (2019).

Na análise que fizeram de livros aprovados pelo PNLD voltadas para os anos iniciais do ensino fundamental, com base em sumários e resenhas constantes no Guia do Livro Didático de 2013, Oliveira e Coutinho (2013) observaram não haver um sequenciamento na maneira como alguns autores abordam a combinatória em suas obras o que, na perspectiva delas, não contribui para o aprofundamento do conhecimento dos alunos. Com base nos PCNs, as autoras apontaram também haver pouco espaço dedicado à combinatória e à probabilidade, com situações ligadas ao eixo Números e Operações como uma aplicação da operação de multiplicação, ao invés do eixo Tratamento de Informações, conforme as avaliações constantes nas resenhas analisadas.

Lima e Borba (2019), por sua vez, procuraram investigar como livros de matemática dos anos finais do ensino fundamental articulavam conhecimentos combinatórios e probabilísticos em face ao seu ensino. Para tanto, foram analisados problemas combinatórios presentes em 4 livros de matemática dos 6º, 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental de uma mesma coleção aprovada no PNLD – 2017. À luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, as pesquisadoras buscaram por situações combinatórias e probabilísticas presentes nessas obras, assim como pelos invariantes operatórios explicitados e pelas representações simbólicas apresentadas e solicitadas nas tarefas. Pela análise que fizeram, observaram que problemas combinatórios figuraram em 2 deles – 6º e 8º anos –, com predominância de problemas do tipo *produto de medidas* (em detrimento dos problemas de *arranjo*, *permutação* e *combinação*), com maior concentração no 8º ano. Na perspectiva das autoras, a pouca diversidade de problemas oferecida na coleção analisada mostra, na mesma medida, a pouca “exploração de problemas intrínsecos aos diferentes problemas combinatórios” (ibidem., p. 7). Sobre as representações simbólicas, as autoras consideraram positiva a apresentação de várias delas em situações que introduziram capítulos, porém entenderam que essas representações deveriam ser também exploradas nas tarefas destinadas aos alunos, de forma a “favorecer o

entendimento de invariantes de cada tipo de situação combinatória e, consequentemente, o desenvolvimento do raciocínio combinatório”. (ibidem., p. 9)

A respeito dos livros do PNLD é importante pontuar que são obras avaliadas e aprovadas por pareceristas desse programa e, posteriormente, escolhidas pelo conjunto de professores das escolas. Assim, o uso do livro didático seria uma maneira de estabelecer sintonia entre o currículo prescrito e aquilo que se desenvolve nas aulas visto que, em muitos casos, é o próprio livro didático o condutor das ações do professor em sua aula (BEZERRA, 2006; SILVA, 2012). Entretanto, Silva (2012) pontua que, além do livro didático, há um cuidado dos pareceristas do PNLD em avaliar também os *manuals do professor*¹⁹. Segundo esse autor, nos Guias do Livro Didático de 2005, 2008 e 2011 considera importante que esses manuais não se restrinjam a fornecer as respostas das tarefas que integram o livro didático, mas que apresentem os aspectos teóricos e metodológicos em que a obra se assenta, bem como sirva para auxiliar os professores em suas práticas e reflexões. Dada as fragilidades de formação de muitos professores, em especial os de matemática, isso na prática pode corresponder a indicar não só *o que* se deve ensinar, mas *como* se deve ensinar.

Outro ponto a se considerar é que a maioria deles foi desenvolvida com base nos PCNs, na BNCC e em outros documentos curriculares. E, em um contexto educacional em que o livro didático tem lugar de destaque, seus impactos não podem ser ignorados. Isso porque esse recurso acabou por se tornar também o principal meio de veiculação das diretrizes contidas em documentos curriculares como os PCNs e a BNCC, por meio do PNLD. Sobre a relação entre o currículo prescrito e o PNLD, Oliveira e Caimi (2021) são incisivas:

O PNLD, por sua vez, parece assumir o papel de guardião do currículo prescrito na BNCC, zelando pela oferta de livros e materiais didáticos que tendem a impor aos professores e estudantes uma matriz de referência descontextualizada da realidade da escola, reduzindo possibilidades de construções coletivas frente às singularidades locais e regionais. (ibid., p.1)

As críticas que Oliveira e Caimi (2021) fazem à maneira descontextualizada e descoladas das diferentes realidades em que o livro didático é concebido se justificam, uma vez que esse é um recurso tido como o principal a subsidiar o docente no planejamento e na execução de suas aulas e “o grande responsável pela

¹⁹ Trata-se de encartes que, em geral, vêm separados do livro didático com orientações teórico-metodológicas a respeito dos conteúdos nele presentes e, em muitos casos, com as resoluções e/ou respostas dos exercícios e situações propostas.

informação e formação dos professores” (SILVA, 2012, p. 807). Isso nos levou a refletir sobre como esse recurso é usado e como é articulado pelos docentes a outros recursos em suas aulas sobre combinatória. De acordo com Trouche et al. (2017) a interação dos professores com recursos de que dispõem para suas aulas são mediadas por *esquemas* levando-os ao desenvolvimento profissional.

O conceito de *esquemas* foi explorado por estudiosos como Jean Piaget e Gérard Vergnaud. Também Perrenoud (1999) e Trouche et al. (2017) recorrem à mesma noção de *esquema*. Perrenoud (ibidem) a associou à noção de *competência*. Trouche et al. (2017) introduziram a noção de *esquemas de utilização* de recursos ao considerar o professor no seu exercício profissional. Na próxima seção, aprofundamos o estudo da evolução desse conceito, a fim de delimitarmos o universo de nossa investigação.

2.7 O conceito de esquemas nas perspectivas de Piaget, Fischbein, Vergnaud e Trouche

Nessa seção são apresentados o conceito de esquemas na perspectiva de Piaget, Fischbein, Vergnaud e Trouche, e como esse conceito se articulou nos quadros teóricos desenvolvidos por eles.

2.7.1 Piaget e o conceito de esquemas

A palavra *esquema* tem sua origem no latim *schema* que, por sua vez, origina-se do grego *skhema* cujo significado é *forma* ou *figura*. Segundo o dicionário Michaelis *on-line* de Língua Portuguesa²⁰, dentre os significados atribuídos a esse termo temos:

- qualquer estratégia traçada com normas, metas e cotas, para orientar a execução de um plano; forma de gerenciamento; método;
- plano traçado para alcançar certos objetivos;
- no kantismo, a síntese entre a intuição e o intelecto efetuada pela estruturação, que equaciona as formações sensórias e as traduz em conhecimento, o que permite a manifestação das faculdades cognitivas.

No contexto epistemológico, o termo *esquema* tem forte ligação com os estudos feitos por Piaget sobre a construção do conhecimento e o desenvolvimento

²⁰ <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/esquema/>. Acesso em 21 de março de 2021.

de estruturas cognitivas. Trata-se da epistemologia genética cujo foco principal é a busca por “distinguir as raízes das diversas variedades de conhecimento a partir de suas formas mais elementares, e acompanhar seu desenvolvimento nos níveis ulteriores até, inclusive, o pensamento científico”. (PIAGET, 2007, p.2)

Para Piaget, a construção do conhecimento se dá na interação entre o sujeito cognoscente e o objeto cognoscível que, a partir de agora, nos referiremos simplesmente a sujeito e objeto. Tal interação deve permitir que o sujeito ascenda de um conhecimento inicial X a um conhecimento Y por dois processos em jogo: o da assimilação e o da acomodação.

A assimilação diz respeito às ações do sujeito sobre o objeto tendo, assim, um caráter externo. É aqui que entram os esquemas de assimilação, pois são eles que nortearão as ações que visam à internalização do conhecimento, ou seja, a acomodação. O processo de assimilação/acomodação nos leva a considerar que os esquemas de ação são geradores de outros esquemas na medida em que permitem ao sujeito “a integração de dados a uma estrutura anterior, ou mesmo a constituição de uma nova estrutura [...]” (PIAGET, 2007, p. 12)

Embora o conceito de *esquemas* esteja solidificado na obra de Piaget, de acordo com Fischbein (1978) e Carvalho Júnior e Parrat-Dayana (2015), a maneira como ele se valeu desse termo em seus estudos variou tanto em contextos diversos como em significados que veio a assumir.

2.7.2 A evolução do conceito de esquemas em Piaget

Carvalho Júnior e Parrat-Dayana (2015) procuraram aprofundar a questão dos esquemas nos trabalhos de Piaget por meio de recortes temporais de sua obra. Assim, observaram as transições desse conceito ao longo de quatro fases da obra piagetiana segundo a estruturação feita por Parrat-Dayana: fase egocêntrica; fase funcionalista; fase estruturalista; fase de síntese.

Antes, porém, da análise fase a fase, os autores elegeram o conceito de *esquemas* presente em Piaget (1973) como parâmetro para tal análise no qual um esquema de ação é “o que, em uma ação é transportável, generalizável ou diferenciável de uma situação à seguinte, ou seja, o que há de comum às diversas repetições ou aplicações da mesma ação” (PIAGET, 1973, p. 16)

Dois foram os motivos que levaram Carvalho Júnior e Parrat-Dayana (2015) a essa escolha: primeiramente porque essa abordagem dá visibilidade ao sujeito em

situação na sua complexidade e operacionalidade; em segundo lugar porque Piaget, a essa altura, “procurou integrar os aspectos funcionais e estruturais em um todo organizado” (Carvalho Júnior e Parrat-Dayán, 2015, p. 525)

Os autores perceberam nessa conceituação três características importantes que foram usadas nas discussões e análises feitas em cada fase:

- **orientação:** para que uma ação possa ser generalizada é necessário que o esquema seja orientado a uma classe de situações. Esquemas mais globais se aplicam a ações mais amplas e, conseqüentemente, a um maior número de situações. Na medida em que um esquema se torna mais desenvolvido, mais restrito será o número de situações aos quais ele se presta.
- **repetição:** a assimilação do objeto pelo sujeito requer ações dotadas de certa regularidade cuja garantia é assegurada pelos esquemas. Segundo os autores, não se trata de considerar a repetição da ação ou um automatismo em si, mas da maneira como essa ação é organizada pelo sujeito.
- **processual:** por fim, os esquemas encerram a ideia de processo, pois cada um deles apresenta uma organização interna, ou seja, uma sequência de passos e um conteúdo que emolduram o desenvolvimento da ação.

A primeira das fases analisadas foi a dedicada ao egocentrismo infantil. Embora o conceito de *esquemas* não tenha sido propriamente discutido em nenhuma das obras dessa fase, Carvalho Júnior e Parrat-Dayán (2015) entendem haver indícios de sua gênese. Isso porque, em uma delas²¹, Piaget atribui a menor capacidade das crianças em fazer o julgamento completo de um determinado predicado²² ao grau de organização dos esquemas de atenção que guarda estreita relação com o egocentrismo infantil. Os autores, assim, entendem que Piaget precisou de “outro conceito que funcionasse conjuntamente ao de egocentrismo para explicar o funcionamento cognitivo do sujeito” (CARVALHO JÚNIOR E PARRAT-DAYAN, 2015, p. 528). Todavia, das três características apontadas inicialmente, a única que se encontra de modo explícito é a organização (processual).

De acordo com os autores, foi na fase chamada funcional que Piaget deu início ao uso do conceito de esquemas entendendo-o como elemento chave na ação

²¹ PIAGET, J. **Le jugement moral chez l'enfant**. Paris. Félix Alcan. 1932.

²² As crianças que participaram do estudo deveriam responder, num grupo de três crianças, qual era a mais morena. Cf. Júnior e Parrat-Dayán, 2015, p. 528

do sujeito. Nessa fase, os aspectos processual e orientacional dos esquemas se sobressaem, tendo em vista que: a) as interações já ocorridas ou que estão ocorrendo entre o sujeito e o objeto é que organizam esquemas presentes e futuros; b) cada classe de situações mobiliza esquemas próprios que, progressivamente, se especificam na medida em que se desenvolvem.

Na fase estruturalista houve uma aparente mudança do foco de Piaget, dos esquemas para as estruturas cognitivas. No entanto, os autores consideram que a noção de esquemas continuou sendo empregada em seus estudos, embora não ocupando a posição central. Eles verificaram, por exemplo, que nos estudos²³ de Piaget do desenvolvimento da noção de tempo nas crianças, os esquemas são protagonistas. O que acontece, porém, é que o tratamento dado ao conceito de esquemas temporais se aproxima do conceito de estrutura uma vez que, na perspectiva dos autores, existe aqui uma intenção de Piaget em considerar a noção de tempo num espectro mais amplo e mais próximo do desenvolvimento de estruturas operatórias. Contudo, essa tendência ao estruturalismo não implica em um abandono das características dos esquemas traçadas inicialmente, uma vez que nesta fase:

[...] permanece a ideia de que o tempo representa, como *schème*, uma organização da ação de diversos conceitos correlatos para dar conta de uma classe de situações ligada às noções de deslocamento, duração, frequência e velocidade. A novidade aqui apresentada se dá em razão de Piaget começar a utilizar a ação de *schèmes* em paralelo ao funcionamento das estruturas, sendo aqueles uma manifestação mais operacional destas. (CARVALHO JÚNIOR e PARRAT-DAYAN, 2015, p. 532)

Por fim, os autores apontam que os trabalhos, da chamada fase de síntese, trouxeram um resgate do conceito de esquemas como um elemento importante para a explicação do funcionamento cognitivo do sujeito. Nessa fase Piaget faz a distinção entre duas formas de esquemas:

- os esquemas *presentativos*, de caráter mais estável, são mobilizados quando se busca compreender o real, reconhecer o que está a volta por meio das características permanentes dos objetos.
- os esquemas *procedimentais*, que constituem um conjunto de ações mobilizado quando se busca atingir uma meta.

²³ PIAGET, J. **Le développement de la notion de temps chez l'enfant**. Paris: Presses Universitaires de France. 1973 (1946).

É importante sublinhar que essas duas formas não existem de maneira isolada. Ao contrário, ambas constituem faces do mesmo esquema operacional que emerge quando o sujeito se encontra em situação, sendo os representativos voltados para as estruturas e os procedimentais, para os objetos.

Na perspectiva de Carvalho Junior e Parrat-Dayana (2015), Piaget tem por concepção final que os esquemas ainda preservam uma característica tida como central: a de ser um processo em sintonia com a organização da ação do sujeito.

2.7.3 Fischbein e os esquemas virtuais e ativos

Fischbein (1978) apresenta a definição dada por Piaget em duas de suas obras, para o conceito de *esquemas*. Na primeira delas, de 1968 Piaget declara ser um “esquema de uma ação aquilo que na ação é repetível, transponível ou generalizável, ou seja, sua estrutura ou forma em oposição aos objetos que a servem como conteúdos variáveis”.

O autor, ao destacar a importância dos esquemas na conceituação e na ação do sujeito frente a uma situação, lembra do seu duplo papel assimilativo e sistematizador. Assimilativo na medida em que integra “um fato mais ou menos novo no sistema constituído de conhecimentos e processos mentais do sujeito” (FISCHBEIN, 1978, p. 119, *tradução nossa*²⁴). Tal integração não se dá por simples acumulação, mas por um processo de sistematização contínua guiado pelos esquemas.

Outro ponto destacado por Fischbein (1978) é o da acomodação dos esquemas frente às exigências impostas pelas situações. O autor lembra que os esquemas não são formados antes da interação com as situações e é por meio delas que se tem seu desenvolvimento.

Ao abordar mais precisamente os esquemas operacionais, ou seja, aqueles que derivam das ações e que, por isso mesmo, têm aspectos mais globais como a seriação, a classificação, a combinatória, entre outros, o autor observa que, para Piaget e Inhelder, sua ativação está em estreita sintonia com o desenvolvimento intelectual do sujeito. Em outras palavras, se o sujeito em uma certa idade não é capaz de resolver uma determinada classe de situações é porque ele ainda não tem formado os esquemas para resolvê-los. No entanto, com base em pesquisas realizadas por ele próprio e por outros (pesquisadores) com adolescentes que a

²⁴ [...] un fait plus ou moins nouveau dans le système constitué des connaissances et procédés mentaux du sujet.

princípio estariam no nível formal de pensamento, mas que revelaram estarem em níveis anteriores, Fischbein (1978) levantou outra hipótese:

Um esquema operacional é inicialmente apenas uma virtualidade – é isso o que Piaget e Inhelder também aceitam. Ao contrário deles, consideramos que **a ativação do esquema requer sempre um exercício adequado, adaptado a uma determinada classe de problemas**. Na ausência de tal exercício, o esquema apenas se expressa por uma intuição mais ou menos vaga [...]. Tal exercício leva à construção de um conjunto de técnicas mentais irreduzíveis aos processos de cálculo que possuem, elas mesmas, certas propriedades dos esquemas: generalidade conceitual e operatividade. (FISCHBEIN, 1978, p. 121, *grifo do autor, tradução nossa*²⁵)

Assim, Fischbein (1978) refuta a ideia da ausência do esquema operacional quando da incapacidade do sujeito em resolver certo tipo de situações. Na perspectiva desse autor, provavelmente o sujeito fracasse por não possuir o que ele chamou de *estruturas acomodativas*, ou seja, estruturas que permitem aos esquemas se adequarem às situações. Do seu ponto de vista, “a qualidade essencial de tal estrutura acomodativa é que ela deduz sua estratégia do próprio conteúdo da situação, conteúdo transformado em significação explícita” (FISCHBEIN, 1978, p. 124, *tradução nossa*²⁶)

Por fim, o autor afirma que o grande problema da didática das ciências – e provavelmente aquilo que levará ao sucesso – são mais as estruturas acomodativas e menos as questões ligadas aos esquemas operacionais e a procedimentos de cálculos. Diante disso, ele questiona o papel do professor e como ele pode agir a fim de garantir a formação de estruturas cognitivas que visam o ensino e a aprendizagem das ciências.

2.7.4 O conceito de esquemas na perspectiva de Vergnaud

O conceito de *esquemas* ocupa uma posição de centralidade na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1990). Trata-se de uma teoria que pressupõe a construção do conhecimento ao longo do tempo, na interação entre o sujeito e as situações que vivencia. De acordo com o autor, ao se deparar com dada situação, o sujeito mobiliza conhecimentos anteriormente formados para o seu

²⁵ *Un schème opératoire n'est initialement qu'une virtualité – c'est ce que Piaget et Inhelder acceptent eux aussi. A la différence de Piaget et Inhelder nous considérons que l'activation du schème demande toujours un exercice adéquat, adapté à une classe déterminée de problèmes. Faute d'un tel exercice, le schème se s'exprime que par une intuition plus ou moins vague [...]. Un tel exercice conduit à la construction d'un ensemble de techniques mentales irréductibles aux procédés de calcul, ayant eux-mêmes certaines propriétés des schèmes: généralité conceptuelle et opérativité.*

²⁶ *La qualité essentielle d'une telle structure accommodative est qu'elle déduit sa stratégie du contenu même de la situation, contenu transformé en signification explicite.*

enfrentamento. E na medida em que ocorre essa interação, novos conhecimentos vão sendo construídos e incorporados ao repertório do sujeito. Vergnaud (1990) considera, assim, haver duas classes de situações:

1. aquelas para as quais o sujeito, considerando seu nível de desenvolvimento cognitivo e determinados contextos, já dispõe de um repertório de competências para dar conta, quase que imediatamente, da situação;
2. aquelas para as quais as competências requeridas para seu enfrentamento não estão disponíveis ao sujeito o que provoca, momentos de reflexão, de exploração minuciosa da situação, de hesitações, de tentativas e erros que o levam enfim, ao êxito ou ao fracasso.

Quer seja para uma ou para outra classe de situações, o indivíduo acaba por mobilizar vários esquemas que, em muitos casos, entrarão em conflito, serão recombinações e acomodados para encontrar a solução procurada. É na ação do sujeito, frente a uma classe de situações, que os esquemas emergem.

Chamamos “esquema” à organização invariante da conduta para uma dada classe de situações. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória. (VERGNAUD, 1996, p. 157).

Moreira (2002) afirma, baseado em Vergnaud que esse autor reconhece, nas ideias de adaptação, desequilíbrio e assimilação e reequilíbrio, uma importante contribuição de Piaget para as investigações em didática das ciências e matemática, embora seus estudos não tivessem esse foco. Todavia, para Vergnaud o conceito de *esquemas* é “a grande pedra angular colocada por Piaget” (MOREIRA, 2002, p. 7). Na perspectiva de Franchi (2012), o mérito de Vergnaud está na ampliação desse conceito, ao deslocar a relação *sujeito-objeto* para a relação *sujeito-situação*. Assim, é possível afirmar que os esquemas permeiam toda e qualquer atividade humana, nas mais diferentes situações que se impõem a um indivíduo.

De acordo com Vergnaud (1996), embora ações automatizadas evidenciem a presença de esquemas, elas não podem ser tomadas como suas manifestações singulares. Em outras palavras, um sujeito pode tomar uma série de decisões conscientemente, frente a uma classe de situações, alicerçado em esquemas. E de um modo geral, na perspectiva do autor, “todas as nossas condutas comportam uma parte de automaticidade e uma parte de decisão consciente” (VERGNAUD, 1996a, p. 158). O autor toma, como exemplo, os algoritmos da adição para o sistema de numeração decimal. Ao final dos primeiros anos escolares, muitas crianças têm bem

introjetadas o algoritmo da adição. Isso não impede, porém, uma sequência de decisões que ela deva tomar frente a características particulares das situações.

Vergnaud (1996) observa que algoritmos e esquemas são objetos do mesmo tipo lógico. Contudo, diferentemente dos algoritmos em que se “chega ao fim com um número finito de passos” (ibidem, p.158), com os esquemas nem sempre isso é possível. Portanto, há momentos em que os esquemas não são efetivos, embora frequentemente sejam eficazes. Em uma situação em que um esquema se mostra ineficaz, por experiência o sujeito tende a modificá-lo ou, até mesmo, a mudar de esquema. A esse respeito, Moreira (2002) escreve:

Está aí a ideia piagetiana de que os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas, i. e., na assimilação e na acomodação. Contudo, Vergnaud dá ao conceito de esquema um alcance maior do que Piaget e insiste em que os esquemas devem relacionar-se com as características das situações às quais se aplicam. (MOREIRA, 2002, p. 13)

Outro ponto salientado por Vergnaud (1994) é que, ainda que os esquemas gerem ações e devam conter regras, eles não podem ser entendidos como estereótipos, visto que as ações que deles derivam dependem dos parâmetros que a situação fornece. Além de conter regras, um esquema comporta também os invariantes operatórios, as antecipações e inferências.

- invariantes operatórios (conceitos-em-acto e teoremas-em-acto) que pilotam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação, e a recolha de informação sobre a situação a tratar;
- antecipações dos objetivos a atingir, dos efeitos que são de esperar e das eventuais etapas intermediárias;
- regras de acção do tipo se... então..., que permitem gerar a sequência das acções do sujeito;
- inferências (ou raciocínios) que permitem “calcular” as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que o sujeito dispõe. (VERGNAUD, 1996, p. 180)

Desses quatro componentes, os invariantes operatórios – teoremas-em-ação e conceitos-em-ação – exercem papel fundamental nos esquemas, pois eles constituem a parcela de conhecimento neles contida e são os “determinantes das diferenças entre um esquema e outro” (FRANCHI, 2012, p.204). São três os tipos lógicos dos invariantes operatórios e neles se inserem os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação (VERGNAUD, 1990):

- invariantes do tipo *proposições*, que podem assumir os valores lógico verdadeiro ou falso em um certo contexto, como são os *teoremas-em-ação*;

- invariantes do tipo *funções proposicionais*, que não assumem os valores lógicos das proposições, mas são indispensáveis na sua construção, como são os *conceitos-em-ação*;
- invariantes do tipo *argumento*, consequência das proposições e funções proposicionais.

Vergnaud (1990) esclarece que, mesmo sendo construídos em estreita relação dialética, teoremas-em-ação e conceitos-em-ação pertencem a tipos lógicos distintos e isso deve ser considerado caso seja necessário analisá-los. Ademais, um teorema-em-ação não é propriamente um teorema, assim como um conceito-em-ação não é um conceito no seu sentido estrito. Diferentemente do que acontece nas ciências, em que teoremas e conceitos encontram-se de forma explícita (como a ponta de um *iceberg*), nos esquemas, os invariantes operatórios constituem a parte escondida (desse *iceberg*). Moreira (2002) ao citar Vergnaud afirma que:

[...] conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornarem-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos. O status do conhecimento é muito importante quando ele é explicitado ao invés de ficar totalmente imerso na ação. O conhecimento explícito pode ser comunicado a outros e discutido, o conhecimento implícito não. (MOREIRA, 2002, p. 16)

Como já mencionado, a TCC tem a noção de *esquemas* como elemento pivô para compreender “as filiações e rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes entre conhecimentos, entendendo por ‘conhecimentos’, tanto o saber fazer como os saberes expressos” (VERGNAUD, 1996, p. 155). Ora, a mobilização de esquemas por um sujeito pressupõe que ele seja confrontado com uma situação ou uma classe de situações. Em outras palavras, é no sujeito em ação que emergem os esquemas.

Por esse pressuposto, Vergnaud (1990) evidencia o papel fundamental das situações na constituição dos esquemas no sujeito em ação dado que “é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança” (VERGNAUD, 1996, p. 156). Na perspectiva do autor, não é possível a construção de um conceito pelo indivíduo à custa de uma única situação, bem como uma situação mobiliza no sujeito não somente um, mas uma gama de conceitos e conhecimentos, sejam explícitos ou implícitos, que serão traduzidos nas ações e nas representações simbólicas que usará.

Para Vergnaud (1990), as ações operatórias na conceitualização são importantes, mas não encerram em si toda a complexidade de um conceito. Em sua perspectiva, um conceito é composto por três conjuntos:

- S: o das situações que dão sentido ao conceito;
- I: o dos invariantes operatórios os quais a operacionalidade dos esquemas encontra-se assentada (o significado que abrange objetos, propriedades, relações, teoremas na matemática)
- s: o das representações simbólicas que tornam viável a representação dos invariantes, das situações e dos procedimentos de tratamento (significante).

Em outras palavras, os invariantes operatórios, juntamente com um conjunto de situações e com as representações simbólicas formam, na visão de Vergnaud, a tríade do que vem a ser um conceito. Assim, um conceito só terá esse *status* se for constituído de um conjunto de situações que a ele darão sentido, situações essas capazes de mobilizar invariantes operatórios (esquemas) nos sujeitos, e de representações simbólicas adequadas ao seu tratamento.

É importante ressaltar que para Vergnaud (1996) um campo conceitual é, antes de tudo, um conjunto de situações por “permitir gerar uma classificação que assenta na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser postos em jogo em cada uma delas” (ibidem. p. 167). Por esse motivo, a noção de situação empregada aqui difere da de Brousseau na Teoria das Situações Didáticas que a entende como “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” (BROUSSEAU, 2008, p. 21) em que se inserem o professor, o aluno e o saber em jogo. O sentido dado por Vergnaud (1996) é mais restrito na medida em que entende por situação uma tarefa capaz de desencadear, no sujeito, processos cognitivos que o levarão a alguma resposta.

Para Vergnaud (1996, p. 171) há duas ideias subjacentes às situações:

- 1 – a de *variedade*, pois um campo conceitual compreende uma diversidade de situações cuja organização em classes pode ser obtida por meio das variáveis que a compõem.
- 2 – a de *história*, visto que no sujeito o conhecimento se constitui na medida em que se depara com situações que o levam, progressivamente, a dominar conceitos e procedimentos.

Em síntese, na TCC a aquisição de um dado conceito pelo sujeito passa obrigatoriamente pela variedade de situações que ele experencia ao longo do tempo de modo que, quanto mais diversas forem as situações maiores serão as chances de que se constituam e amadureçam esquemas para seu enfrentamento. A partir das ideias de variedade e de história, a questão que se põe é: que situações devem ser consideradas no desenvolvimento de dado conceito? O próprio Vergnaud (2000) entende que a busca por essas situações não é uma tarefa fácil:

A combinação destas duas ideias não torna necessariamente fácil o trabalho do investigador em didática, porque a primeira ideia orienta-o para a análise, a decomposição em elementos simples e a combinatória dos possíveis, enquanto a segunda o orienta para a procura de situações funcionais, quase sempre compostas por várias relações, e cuja importância relativa está, em grande medida, ligada à frequência com que se encontram (VERGNAUD, 1996, p. 171)

Conforme apontam Silva e Lima (2014), ainda assim a TCC vem sendo usada em muitas pesquisas que buscaram compreender o desenvolvimento do raciocínio combinatório em diferentes níveis de escolarização. Algumas delas, tais como Pessoa e Silva (2012), Silva e Spinillo (2011) e Melo et al. (2016), discutiram quais e como invariantes operatórios entram em jogo quando sujeitos – no caso estudantes – se veem diante de situações combinatórias.

Há também investigações que envolveram professores como a de Oliveira e Coutinho (2015) que teve como foco o conhecimento de professores que ensinam matemática nos anos iniciais frente a situações combinatórias. Essa investigação objetivou responder à seguinte questão: quais invariantes operatórios professores dos anos iniciais do ensino fundamental mobilizam quando da análise de problemas combinatórios? Aos cinco professores participantes foi solicitado que resolvessem seis situações combinatórias em contextos diversificados. Além disso, eles participaram de entrevistas que tiveram por objetivo apontar os invariantes operatórios que foram mobilizados. Oliveira e Coutinho (2015) identificaram quatro invariantes mobilizados pelos participantes:

- I₁ – O número de possibilidades é dado pela soma das opções;
- I₂ – Faz enumeração para saber quantas são as possibilidades;
- I₃ – Estrutura multiplicativa: representação em árvore de possibilidades;
- I₄ – Estrutura multiplicativa: representação por enumeração.

As análises feitas sugeriram que a combinatória era um assunto pouco explorado e ainda não fora apreendido por esses professores. Para as

pesquisadoras, esse fato causou surpresa, pois as situações propostas poderiam ter sido resolvidas usando estratégias baseadas em enumeração, tabelas de dupla entrada ou diagrama de árvores. Sobre os invariantes operatórios, Oliveira e Coutinho (2015) observaram que na maior parte das situações, de maneira geral, os participantes mobilizaram o invariante I_2 . Observaram ainda que, à exceção de um dos participantes, os demais ainda não detinham esquemas que permitiriam a construção de estratégias para cada situação proposta.

Para Perrenoud (1999), a construção de estratégias com base na mobilização de conhecimentos pelo sujeito em ação diante de uma classe de situações, revela a presença de *esquemas* constituídos e que, por sua vez, apontam para a estabilidade de competências. Por essa razão, o autor estabelece um vínculo entre o desenvolvimento de *competências* e a *constituição de esquemas*, esse último entendido sob a (mesma) óptica de Piaget e Vergnaud.

Também Trouche et al. (2017) se valeram dos conceitos de *esquemas* e *invariantes operatórios* da TCC ao considerarem o professor e sua interação com os recursos que mobiliza para alcançar um determinado fim didático. Incluem-se a esses conceitos, as *classes de situações*, tidas no âmbito da Abordagem Documental do Didático como situações profissionais.

Nas seções seguintes apresentamos como o conceito de esquemas abordado nos estudos de Perrenoud (1999) sobre competências e de Trouche et al. (2017) sobre o uso de recursos na prática docente.

2.7.5 Perrenoud (1999) e a relação entre competência e esquemas

A proposta de um ensino que privilegie outros aspectos para além da transmissão de conteúdos, como possível resposta à crise pela qual a escola passou (e continua passando), alavancou os estudos de Perrenoud sobre a escola como espaço para o desenvolvimento de competências.

Segundo Ricardo (2010), as ideias de Perrenoud a respeito do desenvolvimento de competências no espaço escolar habitam o universo educacional brasileiro desde o final dos anos 1990, graças à tradução para o português de muitos de seus livros e artigos. No entanto, de acordo com o mesmo autor, isso não significou que tivesse havido uma boa compreensão e, menos ainda, uma implementação efetiva de suas ideias nas instituições de ensino básico. Para Ricardo (2010), isso está ligado ao fato que:

[...] Perrenoud se apropria de vários conceitos da didática das ciências da escola francesa e que são verdadeiras caixas pretas para a maioria dos seus leitores, a saber, a noção de “transposição didática”, de “contrato didático”, as “práticas sociais de referência”, os “objetivos-obstáculos”, os “campos-conceituais” e os “esquemas-em-ação” (RICARDO, 2010, p. 613).

Um exemplo dessa aproximação são as maneiras como Perrenoud conceitua *competência*. Em uma delas, competência é concebida pelo autor como “uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles” (PERRENOUD, 1997, p.7). Em outra, o autor faz emergir a multiplicidade de entes necessários à sua construção:

Define-se uma competência como a aptidão para enfrentar uma família de situações análogas, mobilizando de uma forma correta, rápida, pertinente, criativa, múltiplos recursos cognitivos: saberes, capacidades, microcompetências, informações, valores, atitudes, esquemas de percepção, de avaliação e de raciocínio (PERRENOUD et al. 2002, p.19)

É possível observar a presença de três elementos que se destacam nesses dois modos de definir competência por Perrenoud: a ação, a(s) situação(ões) e o conhecimento. Esses elementos também se encontram no conceito de **esquemas** presente na Epistemologia Genética de Piaget e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, conforme descrevemos no Quadro 7.

Quadro 7 – Conceituação de esquemas por Piaget e Vergnaud

<i>Epistemologia Genética</i>	<i>Teoria dos Campos Conceituais</i>
Chamaremos <i>esquemas</i> de ações o que, numa ação, é assim transponível, generalizável ou diferenciável de uma situação à seguinte, ou seja, o que há de comum nas diversas repetições ou aplicações da mesma ação.	Chamaremos “esquema” à <i>organização invariante da conduta para uma da classe de situações</i> (VERGNAUD, 1990, p. 157)

PIAGET, 1973, p. 16; VERGNAUD, 1990, p. 157

Perrenoud (1999) reitera essa relação ao afirmar que uma competência se encontra estabilizada quando o sujeito é capaz de mobilizar esquemas constituídos frente a uma família de situações. Além disso, assim como Piaget e Vergnaud, o autor reforça que a mobilização de esquemas não implica exclusivamente em ações automatizadas, mesmo que evidenciem presença de esquemas. Cada esquema guarda estreita relação com uma classe de situações. Portanto, haverá situações para as quais os esquemas constituídos serão suficientes; em outras, porém, a mobilização desses esquemas não será capaz de dar conta da situação, em muitos casos, eles entram em conflito e exigem, do sujeito, sua reorganização, recombinação e, até mesmo, a construção de novos esquemas de ação.

Embora, a princípio, *competência* e *esquemas* pareçam conceitos sinônimos, no entendimento de Perrenoud (1999) eles não são. Para esse autor, um *esquema* é expressão de um todo constituído que dá suporte a uma ação ou operação única. A *competência*, por sua vez, é mais ampla e congrega e orchestra, um conjunto de ações, conforme explicita o autor:

[...] uma competência, com uma certa complexidade, envolve diversos esquemas: percepção, pensamento, avaliação e ações, que suportam inferências, antecipações, transposições analógicas, generalizações, apreciação de probabilidades, estabelecimento de um diagnóstico a partir de um conjunto de índices, busca das informações pertinentes, formação de uma decisão etc. (PERRENOUD, 1999, p. 24).

Ao citar Bastien, Perrenoud (1999) considera que a competência de um especialista²⁷, por exemplo, é caracterizada por dois aspectos. Por um lado, por sua capacidade de mobilizar esquemas complexos em uma ação imediata e automática de forma rápida e segura e, por outro, por dispender esforços de reflexão a fim de que esquemas de ação e conhecimentos sejam coordenados e diferenciados diante do ineditismo de certas situações. Assim, “quanto mais especialista, menor o raciocínio e maior o apelo para conhecimentos pertinentes e funcionalmente estruturados” (BASTIEN, 1997, p.8 apud PERRENOUD, 1999, p. 27).

Pelas considerações de Perrenoud (1999) entendemos ser possível relacionar as competências que se pretende desenvolver no sujeito em processo de aprendizagem, como também, as do professor no seu exercício profissional no processo de ensino. O desenvolvimento de competências e habilidades, por sua importância explicitada na BNCC e no CPEM, tende a moldar a prática docente visto que, em tese, esses são dois importantes recursos para o professor exercer seu papel de formador. No entanto, a diversidade de recursos que se apresentam aos professores – incluindo os recursos curriculares – exigem deles a mobilização de competências e habilidades para sua utilização frente às situações profissionais que lhes são atribuídas diariamente. Trouche et al (2017) propuseram uma teoria que busca analisar o desenvolvimento profissional docente à luz dos recursos e esquemas de utilização. Trata-se da Abordagem Documental do Didático (ADD) que é apresentada na seção seguinte.

²⁷ ou seja, daquele que é perito em alguma área de atuação profissional e/ou intelectual ou que possui formação específica em certo ramo do conhecimento

2.7.6 Abordagem Documental do Didático (ADD): a prática docente observada na perspectiva de recursos e esquemas

Além da TCC essa pesquisa tem como aporte teórico a Abordagem Documental do Didático – ADD – desenvolvida por Luc Trouche, Ghislaine Gueudet e Birgit Pepin no seio da tradição francesa em didática da matemática. Para esses autores, tal abordagem implica em uma mudança de paradigma ao analisar o professor à luz dos recursos usados para o ensino. A questão subjacente a essa teoria interpela o que os professores preparam para apoiar suas práticas, e o que é continuamente renovado por/nessas práticas. Trata-se, então, de uma abordagem teórica que dá meios para compreender a ação do professor na sua interação com os recursos de que dispõe no preparo e na implementação de suas aulas.

Além dos estudos franceses em didática da matemática, contribuíram para a constituição dessa abordagem outras fontes teóricas que se inter-relacionam, pertencentes aos campos do uso de tecnologia, do *design* de recursos e currículo, de aprendizagem/desenvolvimento do professor, de arquitetura da informação e, por fim, de comunidades de prática.

Do uso de tecnologia a principal fonte é a *Abordagem Instrumental*, teoria desenvolvida por Rabardel no campo da ergonomia cognitiva e que, posteriormente, foi integrada à didática da matemática. Essa abordagem faz a distinção entre um *artefato*, disponível a um dado usuário, e um *instrumento* que é por ele desenvolvido por um processo que se deu o nome de *gênese instrumental*. A ADD aproveitou esses conceitos e os aliou a outros três: o de *gênese*, o de *instrumentação* e o de *instrumentalização* que constituem seus conceitos essenciais.

Da proposição de Adler surgiu a ideia de pensar um recurso que tem como parâmetro o verbo *re-source* que, em inglês seria ir à fonte novamente ou de modo diferente. Em outras palavras, recurso é tudo o que “reabastece a atividade dos professores” (GUEUDET; TROUCHE, 2015, p. 3). Por isso a ADD considera a variedade de recursos disponíveis e que podem subsidiar o trabalho do professor, quer sejam recursos curriculares materiais (livros didáticos, recursos digitais, calculadora, ábacos, compasso, régua, entre outros), recursos sociais (conversa com colegas de docência, participação em fóruns na *web*, por exemplo) e recursos cognitivos (quadros/ferramentas de cunho teórico para o trabalho com professores).

Outra premissa assumida pela abordagem é a de que a ampla visão dos recursos leva a uma ampla visão da aprendizagem/desenvolvimento *profissional* do

professor. Apoiando-se em Ball, Hill e Bass que, com base no estudo que fizeram do conhecimento matemático do professor, afirmam ser o trabalho dos docentes transcendente ao ambiente da sala de aula, Trouche et al. (2017) reconhecem que as interações com os recursos em ambiente extraclasse são capazes de mudar suas práticas e seus conhecimentos profissionais.

Do campo da arquitetura da informação adveio o termo *documento* que designa algo carregado de intenção e que se aplica a um determinado uso em um determinado contexto. Mais precisamente no contexto da ADD, o *documento* é o resultado do trabalho documental dos professores, isto é, da seleção, modificação e/ou criação de novos recursos quer dentro ou fora da sala de aula.

Por fim, a facilidade de comunicação nos nossos dias é também considerada pela ADD. Ela se apresenta de várias formas no trabalho coletivo dos professores: *networks*, associações *online*, comunidades mais ou menos formais, entre outros. Esse trabalho se traduz na teoria das *comunidades de prática* de Wenger e, juntamente com ela, os conceitos de *participação*, *negociação*, *reificação* que são aproveitados na análise do *design* de recursos para o ensino por um conjunto por professores com vistas a um processo de aperfeiçoamento profissional.

Na próxima secção são apresentados mais formalmente constructos como recursos, documentos, gênese, instrumentação, instrumentalização, no âmbito dos processos em que estão envolvidos.

2.7.6.1 Definições

De acordo com perspectiva de Adler, o termo recurso é tido como tudo o que (re)alimenta o trabalho do professor. Mesmo em português a palavra recurso atende à perspectiva semelhante: a de voltar a trilhar um caminho já trilhado. Desse ponto de vista, os recursos se constituem pontos de apoio ao professor quando se vê diante de situações próprias do exercício de sua atividade.

Trouche et al. (2017) entendem como *recursos curriculares* de matemática aqueles desenvolvidos e usados por professores e alunos nas suas interações com a matemática durante os processos de ensino e/ou de aprendizagem. Como exemplos temos as interações digitais, texto tradicional (não digital), a linguagem, inclusive recursos curriculares digitais (PEPIN et al., 2017). Além desses, os *recursos sociais* (conversas na web/fóruns, por exemplo) e *cognitivos* (quadros e

ferramentas teóricas usadas no trabalho com o professor) podem integrar o repertório recursivo dos professores.

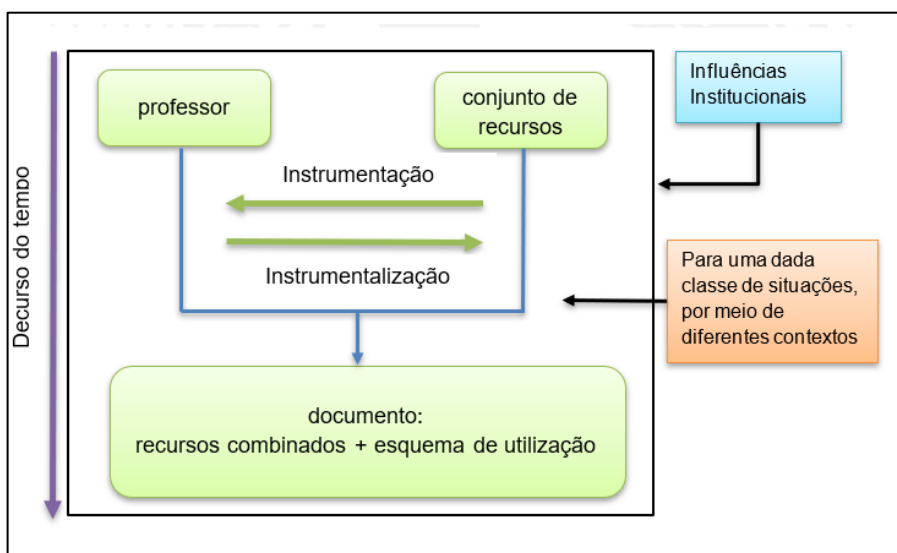
Durante a interação com um recurso em particular, ou com uma gama de recursos, os professores em suas práticas docentes desenvolvem seus próprios *esquemas de utilização*, conceito chave nessa investigação. É provável que esses esquemas sejam diferentes para diferentes professores mesmo que estejam usando os mesmos recursos. O resultado dessa interação entre recursos e os esquemas do professor é um *documento* e o processo de desenvolvimento de um documento (que inclui o conhecimento do professor envolvido) é o que se chama *gênese documental*. Resumidamente temos: os recursos agregados a esquemas de utilização resultam em um documento.

RECURSOS + ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO = DOCUMENTO

Trouche et al. (2017) sublinham que a ADD é particularmente pertinente na medida em que aborda o uso de recursos como um processo interativo e potencialmente transformativo que funciona em dois sentidos: a disponibilidade de recursos influencia a prática dos professores (*instrumentação*), assim como as disposições e o conhecimento dos professores orientam os processos de escolhas e a transformação entre diferentes recursos (*instrumentalização*).

Esses processos incluem práticas de *design*, *re-design* ou *design-in-use* (quando os professores mudam o documento no momento da aula de acordo com as necessidades do ensino).

Figura 1 – Representação Esquemática do Trabalho Documental do Professor



Fonte: GUEUDET; TROUCHE (2009, p. 206, tradução nossa)

A ADD, assim, propõe um modelo de interações entre professores e recursos que tem implicações no conhecimento profissional dos docentes. A Figura 1 apresenta, esquematicamente, o trabalho documental do professor. Nela encontram-se o professor e o conjunto de recursos de que dispõe. O documento – fruto do trabalho documental do professor – é construído por sua interação com os recursos, mediada pelos esquemas traduzidos nos processos de instrumentalização e instrumentação. A gênese documental se dará ao longo do tempo, baseada em uma classe de situações profissionais e as influências das instituições em que ela se desenvolve.

O desenvolvimento das tecnologias digitais de informação e comunicação, experimentado nas últimas décadas, fez da *internet* um espaço privilegiado de construção e compartilhamento de recursos. Segundo os autores, embora a *web* disponha de muitos materiais potencialmente adequados ao ensino, ela não atende ao professor no uso desses materiais em razão das singularidades das situações que vivencia em sala de aula. Em outras palavras, são disponibilizadas na *web* pilhas de tijolos aos professores sem que se forneça, contudo, um manual de uso na construção de uma trajetória coerente de aprendizado dos alunos. Ao buscarem por tarefas que visam à complementação de uma sequência de aprendizado ou mesmo ao planejamento, os professores exigirão um suporte para ajudá-los a desenvolver a chamada *capacidade de design do professor*. Tal capacidade consiste, segundo os autores, em uma atenção/sensibilidade voltada aos aspectos matemático e didático dos recursos de aprendizagem, e à flexibilidade de seu uso alinhada à ADD. Nesse sentido, Wang (2018) considera essa capacidade de *design* como parte da *expertise documental* do professor. Qualquer entendimento do professor como *designer* deve incluir um consciente/deliberado ato de projetar, de criar algo para alcançar um certo objetivo (didático).

2.7.6.2 Esquemas no âmbito da ADD e Sistemas de Recursos

Assim como na TCC, o conceito de **esquemas** é central na ADD. Ele é tomado aqui no sentido dado por Vergnaud ou seja, a de uma estrutura cognitiva que: a) contém regras de ação; b) é dirigida por invariantes operatórios e c) que está intimamente ligada ao conceito de *classe de situações*. Nesse caso trata-se de uma classe de situações profissionais atreladas a um mesmo objetivo didático. Para uma dada classe de situações, um sujeito (no caso, o professor) desenvolve uma

organização estável de sua atividade, ou seja, um *esquema*. Como já foi mencionado, um esquema é formado de quatro componentes:

- o objetivo da atividade (que caracteriza a classe de situações);
- regras de ação, de recuperação de informações e de controle;
- invariantes operatórios, que se apresentam de duas formas: *teoremas-em-ação*, (proposições consideradas verdadeiras ou falsas de acordo com o contexto) e os *conceitos-em-ação* (conceitos considerados relevantes).;
- possibilidades de inferências, de adaptação à variedade de situações.

No decorrer de sua atividade, o professor pode enriquecer seus esquemas, ao integrar novas regras de ações, ou pode desenvolver novos esquemas. Na perspectiva de Trouche et al. (2017), o esquema oferece um modelo para analisar, não somente o aprendizado dos alunos, como também o desenvolvimento profissional dos docentes. Mais especificamente para esses últimos são considerados os *esquemas de utilização* para um dado recurso ou para um conjunto deles.

A fim de ilustrar o conceito de esquemas, Gueudet e Trouche (2015) oferecem o exemplo da professora Carmen, presente em Gueudet e Trouche (2009). Carmen é uma professora que trabalha com turmas do ensino fundamental há 30 anos e tem nos *softwares* de geometria dinâmica um aliado em suas aulas. Ao lecionar para turmas de 9º. ano, durante o ano letivo 2006 – 2007, buscou adaptar uma atividade desenvolvida no ano anterior para a introdução do conceito de seno de um ângulo. Para tanto, a professora selecionou alguns recursos que julgou necessários para atingir seu objetivo: folhas com os problemas para o preenchimento dos alunos, o enunciado dos problemas, o projetor de vídeo e o *software* de geometria dinâmica Mathenproche (MEP). Cabe observar que a atividade do ano letivo anterior foi desenvolvida em outro ambiente virtual: o Geoplan.

Ao buscarem vestígios do trabalho documental de Carmen nas sessões em que utilizou o Geoplan e, posteriormente, o MEP para introduzir o conceito de seno de um ângulo, Gueudet e Trouche (2015) identificaram características comuns, com o surgimento de diferentes regras de ação:

— algumas estão relacionadas à organização didática escolhida: o enunciado de um exercício (para a introdução do novo conceito) é projetado para toda a classe com um projetor de vídeo. O professor controla o

computador: os alunos devem responder oralmente a uma série de perguntas e, simultaneamente, preencher os espaços deixados livres em uma folha de papel;

— outras estão relacionadas aos conteúdos matemáticos em jogo: a demonstração usa o teorema de Thales (visto no capítulo anterior de geometria). (GUEUDET E TROUCHE, 2015, p. 10)

Outro ponto que os autores ressaltam é que a professora Carmen optou por usar o recurso de manipulação de figuras – dois triângulos retângulos – no MEP após ter sido feita a demonstração de que a razão entre as medidas é constante, pois, no seu modo de ver, os alunos são levados a compreender a situação e se convencem desse fato. Assim, a escolha dos recursos passa pelo crivo de diferentes invariantes operatórios construídos pela professora ao longo de sua vida profissional.

O estabelecimento de um resultado na geometria deve ser, se possível, acompanhado por uma figura que represente a situação”; “a ferramenta deslocamento no software de geometria dinâmica permite que os alunos observem as propriedades que são verdadeiras para diferentes exemplos de figuras com determinadas características comuns”; “constatar que o resultado é verdadeiro para diferentes figuras traz aos estudantes um elemento de convicção que completa utilmente uma demonstração com base em um exemplo genérico. (GUEUDET E TROUCHE, 2015, p. 11)

Nota-se, pelo exemplo, que a experiência profissional da professora Carmen permitiu o acúmulo de uma gama de recursos e esquemas de utilização. Assim, ao se deparar com uma classe de situações ela foi capaz de mobilizar diferentes recursos e esquemas. O conjunto de todos os recursos usados por um professor é chamado *sistema de recursos*. Esses recursos, associados aos esquemas de utilização, podem se prestar à gênese de um único documento ou podem intervir em vários deles. Os documentos produzidos por um professor também constituem um sistema: o *sistema de documentos*. Essa estrutura segue a (estrutura) de classe de situações que compõe as atividades profissionais do professor estando em acordo com os diferentes objetivos da atividade.

Quando os professores partilham seus trabalhos documentais, por exemplo, em um grupo que prepara lições coletivamente, eles também podem desenvolver um *sistema de recursos compartilhados*. Ainda assim, os diferentes membros do grupo têm a possibilidade de desenvolver diferentes esquemas para um mesmo recurso o que resulta, resultando em diferentes documentos. Todo o sistema documental do professor comporta muitos outros subsistemas. Isso pode ser descrito em vários níveis que podem variar de uma visão mais geral da atividade até um foco mais específico de um dado objeto matemático. Para a ADD, a análise do

trabalho documental do professor requer metodologia específica: a *investigação reflexiva do trabalho documental do professor* que será apresentada no capítulo 5, destinado aos procedimentos metodológicos.

2.7.6.3 Experiência e trajetória documental

De acordo com Gueudet e Trouche (2015), as gêneses documentais constituem parte essencial do desenvolvimento profissional do docente. Desde o início de sua formação e em sua atuação ao longo dos anos, os professores se veem imbuídos na tarefa de pavimentar caminhos que viabilizem os processos de ensino e aprendizagem dos estudantes, baseados nos recursos disponíveis e/ou produzidos para esse fim. Desse modo, trabalho documental e desenvolvimento profissional andam lado a lado. Rocha (2019) se questionou sobre como o trabalho documental do professor nutre sua experiência no decorrer do tempo e vice-versa, ao buscar uma compreensão maior da relação entre história de vida dos professores e seus trabalhos mediados pelos recursos. Apoiada em estudos como os de Fleck, Wenger, Pastré, Rabardel, Gueudet e Trouche, Rocha (ibidem) introduziu, no seio da ADD, os conceitos de experiência e trajetória documentais.

Ao longo do tempo, o trabalho documental de um professor de matemática passa por transformações que decorrem das experiências profissionais que vivencia. Assim, eventos como a participação em cursos de formação, a mudança de um estabelecimento de ensino para outro, ou a simples interação cotidiana com seus pares, por exemplo, podem, potencialmente, impactar o trabalho documental de um professor, ao lhe atribuir características de continuidade e de ruptura promovidas justamente por esses eventos. Tais observações justificam a proposta de Rocha (2019) em conceituar a **trajetória documental** de um professor como:

[...] percurso (que expressa continuidades e mudanças) que liga ligando os acontecimentos profissionais (individuais e / ou coletivos) vividos pelo professor com as transformações em seu trabalho documental ao longo do tempo. (ibidem, p. 75, *tradução nossa*²⁸)

Rocha (2019) agrega, ainda, à trajetória documental do professor outros conceitos tidos como fundamentais para a sua compreensão. O primeiro deles é o de **experiência documental** (ED) visto que, ao longo do tempo, a interação dos

²⁸ [...] *parcours (qui exprime des continuités et des changements) liant les événements professionnels (individuels et/ou collectifs) vécus par l'enseignant et les transformations dans son travail documentaire au long du temps*

professores com os recursos propicia “o acúmulo e a apropriação de sua história de trabalho documental” (ibidem, p. 74, *tradução nossa*). De acordo com a autora, a ED imprime ao trabalho documental do professor características reconhecíveis por ele e que o nortearão no desenvolvimento de sua trajetória documental. Essas características constituem o que Rocha (ibidem) denominou **traço da experiência documental**.

A autora também distingue os vários eventos que se sucedem na trajetória documental ao tomar, como critério, a maneira como impactam o trabalho documental do docente. Alguns deles proporcionam um movimento de continuação desse trabalho. Outros, no entanto, são capazes de estabelecer rupturas com potencial de interrupção do trabalho documental em decurso. Esse último tipo de eventos constituem os chamados **eventos simbólicos de transição** cuja principal consequência é a mudança do **dominante documental** que se refere “a uma orientação do trabalho documental para uma determinada família de atividades em um determinado período” (ROCHA, 2019, p. 75, *tradução nossa*).

2.7.6.4 Perspectivas da ADD

A ADD é um quadro teórico recente na Educação Matemática, segundo Trouche et al. (2017). Enquanto conceitos como recursos, documentos, gênese documental estão já bem sedimentados, outros mais elaborados, como sistemas de recursos e sistemas de documentos, encontram-se ainda em desenvolvimento.

De acordo com Trouche et al. (2017), os campos de aplicação da ADD têm variado da educação infantil ao ensino superior e incluem o trabalho com recursos usados por formadores de professores. Em termos de disciplinas, a ADD vem sendo usada em ciências experimentais como a física e a química, bem como no ensino de línguas. Quais as especificidades do trabalho documental do professor e dos sistemas documentais nesses novos contextos?, indagam os autores. Eles consideram que o uso dessa abordagem em vários contextos sociais e culturais também levantam questões sobre diferentes sistemas usados pelos professores nos seus trabalhos de documentação. Tal diversidade é resultado de contextos histórico, social e cultural no qual o trabalho do professor se insere, indo ao encontro do que Tardif (2005) observa sobre as fontes do conhecimento docente. Pesquisas que investigam essas questões podem levar a uma melhor compreensão da natureza

das interações dos professores com os recursos e a um aprofundamento dos conceitos relacionados à ADD.

Trouche et al. (2017) apontam que estudos recentes têm investigado o trabalho de estudantes com os recursos, e possíveis ligações com outras teorias também têm sido sugeridas. A Teoria das Situações Didáticas (TSD), por exemplo, introduz o conceito de *milieu* que inclui tudo com o qual o estudante individualmente interage numa situação matemática. Assim, os componentes do *milieu* podem ser considerados recursos. Quais as consequências dessas ligações teóricas? Os autores salientam ainda, que o desenvolvimento de conceitos e métodos ligados à ADD se desenvolvem à medida em que se ampliam os estudos que usam essa abordagem teórica na investigação de fenômenos ligados ao ensino e à aprendizagem.

2.7.7 Considerações sobre os invariantes operatórios na ação docente

Do ponto de vista da ADD (TROUCHE et al., 2017), os conhecimentos listados por Rocha et al. (2015) entram em jogo a partir do momento em que o professor interage com recursos que mobiliza para sua ação docente de ensinar. Em outras palavras, a mobilização de recursos para um determinado fim didático será sempre gerida por *esquemas de utilização*, empregados no mesmo sentido dado por Vergnaud. Assim, frente a uma classe de situações (profissionais), “um sujeito (o professor) desenvolve uma organização estável de sua atividade, um esquema” (TROUCHE et al., 2017, p. 4, *tradução nossa*²⁹). Gueudet e Trouche (2015) afirmam que, embora a determinação de esquemas profissionais seja uma tarefa complexa, ela se revela ao pesquisador pelos pilares em que se assentam a prática do professor. Para eles “[...] a identificação dos invariantes operatórios que estruturam a atividade parece uma chave essencial para a compreensão do trabalho docente, em particular, para um estudo do trabalho documental”.(ibidem, p. 8)

Como mencionado, os invariantes operatórios constituem um dos componentes dos esquemas que comportam, além deles, os objetivos da atividade, as regras de ação e as inferências. Esses elementos serão aprofundados mais adiante. Por ora, é necessário frisar dois aspectos referentes aos esquemas.

²⁹ [...] a subject (here a teacher) develops a stable organization of his/her activity, a scheme.

Primeiramente, os esquemas e, mais precisamente, os de utilização de recursos pelo professor são estruturados ao longo do tempo, no decorrer de sua trajetória profissional.

[...] a seleção de uma sequência de como trabalhar os conteúdos no ano condiciona o trabalho de preparação do curso; mas os documentos, em particular, os invariantes operatórios desenvolvidos ao longo de anos neste trabalho e preparação, intervêm na escolha da sequência. (GUEUDET E TROUCHE, 2015, p. 12)

O segundo aspecto é que um esquema não se revela, muitas vezes, por completo. Ao contrário, “há sempre muito de implícito nos esquemas” (VERGNAUD, 1996, p. 159). Assim, uma pesquisa que se proponha a estudar, com profundidade, os esquemas de um sujeito para uma dada classe de situações exigirá do pesquisador um acompanhamento a longo prazo desse indivíduo, na tentativa de identificá-los. Todavia, estudos como os de Oliveira e Coutinho (2015), Garcia et al. (2016), Machado e Braga (2017), que utilizaram a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud apontam ser possível a inferência de invariantes operatórios por meio da análise de protocolos tais como respostas dos participantes a sequências didáticas, tarefas, entrevistas, questionários, entre outros. Nesse sentido, partimos da hipótese de que também os invariantes operatórios ligados aos esquemas de utilização de recursos podem ser inferidos por caminhos como os que acabamos de mencionar. Com base nessa hipótese é que investigamos os invariantes operatórios de sujeitos bem particulares: professores de matemática em situações de ensino de combinatória no 2º. ano do nível médio que têm como principais recursos aqueles elaborados e disponibilizados pela rede estadual paulista de ensino aos seus professores, nomeadamente os cadernos do professor e do estudante. A justificativa para a análise dos invariantes combinatórios nesse contexto é apresentada a seguir.

2.7.8 O contexto dessa investigação

Como já mencionado, dentre os recursos que tradicionalmente encontram-se atrelados ao universo educacional brasileiro, o livro didático tem destaque por seu papel de principal portador de diretrizes curriculares, e de veículo de informação/formação para professores, mesmo antes do surgimento de documentos como os PCNs, a BNCC, os currículos estaduais e municipais. Paralelamente ao livro didático, algumas redes públicas brasileiras de ensino têm confeccionado o seu próprio material didático para organizar o conteúdo a ser ensinado em cadernos

destinados a professores e alunos, com as atividades, tarefas e orientações didáticas. Esse é o caso do estado de São Paulo que, em 2008, introduziu os cadernos do programa *São Paulo Faz Escola* e que, de 2010 a 2020 tornou-se o principal meio de veiculação da matriz curricular a ser trabalhada nas escolas de sua rede pública estadual de ensino. De acordo com Barros e Azevedo (2016, p. 360), a justificativa para a criação de “um material comum, pré-elaborado, destinado a todas as escolas da rede” se deu em razão do baixo desempenho que os alunos demonstraram em avaliações externas, como o SARESP³⁰.

Além dessa medida, Barros e Azevedo (2016) elencam outras que foram adotadas pelo governo paulista a partir de 2008 no âmbito do programa *São Paulo Faz Escola*. Dentre elas estão a:

- Adoção de material de recuperação/reforço, comuns a todas as escolas da rede, para que os alunos se adaptassem à nova proposta;
- Unificação do currículo do Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio: **todas as escolas paulistas adotaram o Caderno do professor e Caderno do aluno, os quais já trazem os conteúdos e metodologias a serem utilizadas pelo professor para atingir os resultados pretendidos;**
- Integração do novo material com as avaliações externas, como o Saresp; (BARROS E AZEVEDO, 2016, p. 362, *grifo nosso*)

Os cadernos do professor e do aluno, oriundos desse programa, permaneceram como material oficial da rede de ensino do estado de São Paulo até 2020. Com a homologação em 2019 do Currículo Paulista referente às etapas da Educação Infantil e do Ensino Fundamental e, em 2020, do Ensino Médio, os materiais didáticos/pedagógicos do programa *São Paulo Faz Escola* passaram a ser gradualmente substituídos pelos do programa *Currículo em Ação*. Também esse programa trouxe um conjunto de materiais de apoio dentre os quais estão os cadernos do professor e do estudante. Cavalcanti e Carvalho (2021) observam ter havido mudanças consideráveis nesses cadernos tanto no formato quanto nos conteúdos trabalhados, sobretudo no ensino médio, por conta do agrupamento das disciplinas. Esses autores sublinham que “no formato atual do Currículo em Ação, os cadernos definem o que deve ser ensinado, com pequenos trechos de conhecimento interdisciplinar, fragmentado, inserido em grandes áreas do conhecimento” (ibidem., p.201).

³⁰ O SARESP é o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar de São Paulo aplicado anualmente nos 3º., 5º., 7º. e 9º. anos do ensino fundamental e na 3º. série do ensino médio da rede pública estadual paulista de ensino.

É importante pontuar que as *grandes áreas do conhecimento*, a que os autores se referem, estão relacionadas com a maneira como as disciplinas do ensino médio devem ser organizadas, de acordo com a lei nº 13.415/2017 que instituiu o chamado *novo ensino médio*. De acordo com essa lei, o ensino médio deverá ser organizado em termos curriculares em áreas de conhecimento, as mesmas que figuram na BNCC, quais sejam: Matemáticas e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além disso, também estão previstos a *formação técnica profissional* e os chamados *itinerários formativos* cujo objetivo, conforme o que se encontra escrito no portal do Ministério da Educação³¹, seria o de promover aprofundamento nessa formação e nas áreas de conhecimento cabendo, ao estudante, a responsabilidade pela escolha de itinerário(s) que mais se adequassem às suas perspectivas pessoais e/ou profissionais de formação

O estado de São Paulo foi o primeiro a elaborar e homologar um currículo próprio em acordo com as diretrizes da BNCC, o que permitiu que as mudanças estruturais e de flexibilização curricular do ensino médio comesçassem a ser implementadas, de forma gradativa, a partir do ano letivo de 2021, em turmas do 1º. ano. Para essas turmas, o material didático – caderno do aluno e do professor – veio separado não mais por disciplinas, mas por áreas do conhecimento. Assim, os conteúdos de disciplinas como, por exemplo, física, química e biologia foram distribuídos no caderno relativo às Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Pela própria organização proposta na BNCC, matemática é a única disciplina que constitui, ela própria, uma área de conhecimento. Segundo o Currículo Paulista:

[...] as áreas do conhecimento têm por finalidade integrar os componentes curriculares, com o objetivo de contribuir para a compreensão da complexa realidade e para que o estudante possa atuar sobre ela, com a garantia dos **conhecimentos básicos** desses mesmos componentes. (SÃO PAULO, 2020, p. 47, grifo nosso)

Para cada área do conhecimento, o Currículo Paulista apresenta as habilidades e competências, em conformidade com a BNCC, e que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do ensino médio. Segundo apregoa esse documento, essas competências e habilidades são tais que “procuram garantir as **aprendizagens essenciais** que constituem a formação geral básica” (SÃO PAULO, 2020, p. 47, *grifo nosso*). Na perspectiva de Cavalcanti e Carvalho (2021), porém, as

³¹ <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=40361> . Acesso em 22 de abril de 2023.

mudanças advindas com as reformas curricular e estrutural do ensino médio trarão como consequência o aumento da desigualdade entre os que podem frequentar escolas privadas de ensino e aqueles que dependem do ensino ofertado pela rede pública estadual paulista. Isso porque esses autores entendem que, em termos práticos, os conhecimentos básicos e as aprendizagens essenciais são, na verdade, aprendizagem mínimas.

A tese de uma educação instrumental e de preparação para o mundo do trabalho, fomentada no Brasil principalmente pelo Banco Mundial, e muitas vezes mencionada no Currículo Paulista para o novo ensino médio, promove a inversão das funções da escola no qual o direito ao conhecimento científico acumulado pela humanidade ao longo dos séculos é trocado pelas aprendizagens mínimas necessárias para uma sociedade multifacetada e hipercomplexa. (CAVALCANTI E CARVALHO, 2021, p. 204)

Embora haja críticas duras tanto à BNCC – e por extensão ao Currículo Paulista – quanto ao novo ensino médio, há pesquisadores que, mesmo reconhecendo suas fragilidades, entendem que as mudanças que esses elementos trouxeram carregam aspectos que consideram positivos na maneira como os conteúdos são abordados com vistas ao desenvolvimento de certas competências e habilidades. Um exemplo é a investigação feita por Giordano e Kian (2021) que discutiram, por meio de uma abordagem bibliográfica baseada na BNCC e no Currículo Paulista, as perspectivas do ensino de probabilidade no contexto educacional brasileiro. Para esses autores, apesar das contradições que esses documentos carregam no que tange às suas elaboração e implantação, a ampliação do ensino de probabilidade sob um viés frequentista para os níveis fundamental e médio, bem como o incentivo à participação dos estudantes em pesquisas e aprendizagens por projetos, são pontos a serem considerados. Embora saibam das limitações de sua investigação, ao não conseguirem observar na prática essas mudanças, os autores ponderam que:

Devemos dar algum crédito aos autores de livros didáticos, aos formadores e, sobretudo, aos professores em sala de aula, presencial ou virtual. Cabe a eles agora, a partir do que tem em mãos, buscar a melhor forma de abordar a Probabilidade com seus alunos (GIORDANO E KIAN, 2021, p.76)

Considerando prós e contras a respeito dos documentos curriculares e da reforma do ensino médio, procuramos compreender como professores de matemática integram recursos do programa *Currículo em Ação* – tradutor, por assim dizer, do Currículo Paulista – em suas práticas para o ensino de combinatória. Desse modo, objetivamos com essa investigação avaliar em que aspectos o material fornecido pela SEDUC-SP se aproxima ou se afasta dos elementos apontados em

pesquisas como primordiais para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, no que concerne ao seu ensino e aprendizagem, à luz da TCC e, a partir dessa análise, compreender como esses recursos, juntamente com outros possíveis, são articulados pelos professores no ensino de combinatória.

Assim, considerando as classes de situações próprias do ensino de combinatória no 2º. ano do ensino médio, indagamos:

a) que situações, invariantes operatórios e representações simbólicas podem ser inferidos da proposta de abordagem para o ensino de combinatória estão presentes nos recursos físico e digital do programa *Currículo em Ação*?

Para atender a essa primeira indagação, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as classes de situações, dos invariantes operatórios e das representações simbólicas ligadas à combinatória nos recursos didáticos físico e digital oferecidos pelo programa *Currículo em Ação*.
- Identificar as classes de situações profissionais ligadas ao ensino de combinatória nos recursos físico e digital do programa *Currículo em Ação*, e sobre quais possíveis invariantes operatórios essas classes de situações se assentam.

b) que invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) são mobilizados pelos professores ao usarem os recursos didáticos físico e digital do programa *Currículo em Ação* e como eles se articulam com outros recursos que eventualmente utilizem para o ensino de combinatória?

Para tanto, traçamos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar os recursos mobilizados e/ou criados que foram agregados ao trabalho documental de professores de matemática ao longo do tempo;
- Identificar os recursos que professores de matemática mobilizam e/ou constroem para o ensino de combinatória;
- Identificar os invariantes operatórios nas ações de preparação, execução e avaliação das aulas sobre combinatória.

Na busca por respostas às questões pontuadas, procuramos nos apoiar em dois referenciais metodológicos: a Análise de Conteúdo (BARBIN, 2016), para a primeira indagação, e a Investigação Reflexiva do trabalho documental do professor (TROUCHE et al., 2017), para a segunda. No próximo capítulo esses dois

referenciais são apresentados, bem como são descritos os procedimentos metodológicos dessa investigação.

3. REFERENCIAIS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são apresentados os referenciais metodológicos que nortearam essa investigação e os procedimentos metodológicos empregados.

Em face dos objetivos traçados para a presente investigação, encontramos na pesquisa qualitativa o meio adequado para esse fim. Bogdan e Biklen (1994, p. 47s) apontam cinco características inerentes a esse tipo de pesquisa:

- Os dados são coletados diretamente do cenário natural em que o principal instrumento de coleta o próprio investigador;
- Esse tipo de investigação é descritivo e, portanto, os dados coletados são expressos por palavras ou imagens e não por números;
- Para os investigadores qualitativos, o processo tem maior relevância que os resultados ou produtos da investigação;
- O método indutivo é preponderante na análise que os investigadores qualitativos fazem dos dados coletados em suas pesquisas;
- Na abordagem qualitativa o significado tem extrema importância.

Como já mencionado, a *Investigação Reflexiva do trabalho documental* é a metodologia que se destina ao estudo do trabalho documental do professor (TROUCHE et al., 2017) e, por isso, foi empregada nessa investigação para inferir os invariantes operatórios dos esquemas de utilização de recursos pelos professores participantes. Contudo, para os invariantes operatórios a serem inferidos dos materiais físicos e digital do programa *Currículo em Ação*, fez-se necessário outro aporte metodológico, capaz de desvelar “o véu que esconde o significado, a intenção do autor” (ROCHA; DEUDARÁ, 2005), sem ignorar o contexto em que foi produzido. Por essa razão optamos pela Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016) a qual passamos a apresentar na próxima seção.

3.1 Análise de Conteúdo

Em pesquisas qualitativas que demandam uma metodologia que atenda à investigação de elementos que, embora se façam presentes na comunicação, não se revelam total e explicitamente, a Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016) tem se constituído um caminho seguro. Entende-se por Análise de Conteúdo:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2016, p. 48)

A variedade de códigos e meios em que uma comunicação pode se estabelecer dá-nos a ideia do alcance que a Análise de Conteúdos (AC), como instrumento metodológico, tem. Assim, de acordo com Bardin (2016), os possíveis domínios da AC abrangem:

- os meios linguísticos, quer sejam escritos (transcrição de entrevistas, questionários, livros, textos literários, artigos de jornais, documentos oficiais, entre outros) ou orais (discursos, entrevistas, discussões, comerciais, conversas, entre outros);
- os meios icônicos, como no caso das imagens, filmes, fotografias, pinturas;
- e outros códigos semióticos, ou seja, aqueles que não são linguísticos, mas que podem carregar consigo diferentes significações como, por exemplo, danças, músicas, comportamentos, indumentárias, entre outros.

Em pesquisas direcionadas à área da educação, Oliveira et al. (2003, p. 6) atribuem à AC um papel importante na busca por “retirar do texto escrito seu conteúdo manifesto e latente”. Esses mesmos autores destacam que a AC tem como finalidade a explicação e sistematização do conteúdo de uma mensagem, bem como do seu significado, tendo como ponto de partida técnicas parciais e complementares entre si. Tem-se, então, como parâmetros sua origem, ou seja, quem emitiu a mensagem, e o contexto ou os efeitos dessa mensagem.

A AC se organiza em três fases que se distinguem entre si cronologicamente: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação dos resultados. Cada uma delas é explanada a seguir.

3.1.1 Pré-análise

Essa é a fase que compreende a seleção dos materiais e documentos que comporão o *corpus* a ser analisado. Outrossim, Bardin (2016) aponta que, de maneira geral, é nessa fase em que são formulados as hipóteses e os objetivos, bem como são elaborados os indicadores que sustentarão a interpretação final.

Antes, porém, Bardin (2016) propõe que o investigador faça uma leitura *flutuante* dos documentos a serem analisados para estabelecer, dessa maneira, um primeiro contato com esses materiais. Com a emergência de hipóteses, a idealização de teorias que se enquadram nos materiais e o uso de técnicas aplicadas a materiais semelhantes, essa leitura tende a se tornar mais precisa.

Após esse primeiro contato, procede-se a escolha e a organização dos documentos que constituirão o *corpus*, ou seja, o “conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 2016, p. 126). Essa constituição, muitas vezes, é feita à luz de algumas regras:

1. *Exaustividade*: todos os elementos que compõem esse *corpus* devem ser contemplados, sem que nenhum seja desconsiderado, com exceção dos casos justificáveis pelo rigor metodológico;
2. *Representatividade*: em situações em que a análise seja feita baseada em uma amostra, deve-se garantir sua representatividade com as características essenciais do universo a que se refere;
3. *Homogeneidade*: a escolha dos documentos deve obedecer a critérios precisos para evitar assim, escolhas feitas com base em critérios muito particulares.
4. *Pertinência*: os documentos selecionados devem estar em sintonia com os objetivos que foram traçados para as análises.

O próximo passo é a formulação das hipóteses e dos objetivos que se pretende com a análise. Hipótese e objetivo são assim definidos pela autora:

Uma *hipótese* é uma afirmação que nos propomos verificar (confirmar ou infirmar), recorrendo aos procedimentos de análise. Trata-se de uma suposição cuja origem é a intuição e que permanece em suspenso enquanto não for submetida à prova de dados seguros. O *objetivo* é a finalidade geral a que nos propomos (ou que é fornecida por uma instância exterior), o quadro teórico e/ou pragmático, no qual os resultados obtidos serão utilizados. (BARDIN, 2016, p. 128)

A respeito das hipóteses, a autora entende que nem sempre elas são necessárias, pois é possível que a análise seja feita sem ideias pré-concebidas. Contudo, será em função delas que o pesquisador fará a escolha dos índices inerentes ao texto que serão explicitados pela análise e, conseqüentemente, a construção de seus indicadores.

Finalmente, procede-se a preparação do material que será analisado ao início da próxima fase: a exploração do material.

3.1.2 Exploração do material

Das fases da AC, a exploração do material é a mais longa e, por conseguinte, a mais cansativa. Ela “consiste essencialmente em operações de codificação,

decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 2016, p. 131).

De acordo com Holsti citado por Bardin (2026, p. 133), a operação de codificação é definida como “o processo pelo qual os dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo”.

Em se tratando de uma análise quantitativa e categorial, a codificação abrange três escolhas:

a) *o recorte do texto tendo por base as unidades de registro e de contexto estabelecidas*. A unidade de registro corresponde ao segmento de conteúdo tido como unidade base para fins de categorização e de contagem. Pode-se tomar por unidade de registro uma palavra, um tema, uma frase, um objeto, uma personagem ou um acontecimento, por exemplo. A unidade de contexto compreende o segmento da mensagem em que se encontra a unidade de registro, oportunizando sua compreensão exata. A frase de onde se subtrai a palavra ou o parágrafo de onde se extrai um tema são exemplos de unidades de contexto.

b) *as regras de enumeração, ou seja, a seleção dos procedimentos de contagem*. De posse das unidades de registro, faz-se necessário estabelecer regras para efetuar sua contagem, que podem ser: a enumeração simples da presença (ou da ausência) de um elemento no texto; o uso da frequência ponderada, isto é, dar peso maior à presença (ou ausência) de determinado elemento no texto que se traduzem quantitativamente na intensidade ou qualitativamente, na direção; o uso da ordem em que as unidades de registro aparecem; a coocorrência, ou seja, quando unidades de registros distintas aparecem simultaneamente em uma unidade de contexto.

c) *a classificação e a agregação que envolvem a escolha das categorias*. Categorizar consiste em “uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos” (BARDIN, 2016, p. 147). Duas etapas estão envolvidas nesse processo: o inventário, ou seja, a discriminação dos elementos, e a classificação que consiste em separá-los de modo a impor certa organização às mensagens. A autora elenca as qualidades que as categorias devem ter: a exclusão mútua, a homogeneidade, a pertinência, a objetividade e fidelidade e, por fim, a produtividade.

Ao considerar as abordagens quantitativa e qualitativa da AC, Bardin (2016) pontua algumas peculiaridades. Para a abordagem quantitativa, a frequência com que determinados elementos da mensagem aparecem é tida como seu fundamento. Na qualitativa, é possível que inferências sejam feitas a partir de indicadores não frequenciais. Outro ponto observado se refere ao campo de ação dessas abordagens. A quantitativa tende a ser mais útil nas fases em que as hipóteses são verificadas. Isso porque a obtenção dos dados descritivos, nesse tipo de abordagem, se dá por métodos estatísticos, o que permite um controle maior na observação e, conseqüentemente, uma análise mais objetiva e fidedigna. A qualitativa, por sua vez, “corresponde a um procedimento intuitivo, mas também mais maleável e mais adaptável a índices não previstos, ou à evolução das hipóteses” (BARDIN, 2016, p. 145), o que torna esse tipo de abordagem mais adequado a fases de lançamento das hipóteses.

3.1.3 O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação

Ao longo dessa fase, os dados obtidos passam por procedimentos simples ou complexos de tratamento, compilados em quadros comparativos, diagramas, modelos, figuras a fim de que a informação trazida pela análise seja evidenciada. A respeito dessa fase, a autora observa que “o analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previsto – ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas” (BARDIN, 2016, p. 131).

Outrossim, o analista, em razão das inferências e interpretações evidenciadas, pode sugerir novos estudos que visam uma nova análise, baseada em novos pressupostos teóricos ou de técnicas diferentes. Com base nos pressupostos metodológicos da AC, descrevemos a seguir os procedimentos para análise dos materiais físico e digital do programa *Currículo em Ação* da SEDUC-SP.

3.2 Procedimentos metodológicos para análise dos materiais físico e digital do programa *Currículo em ação*

A primeira das análises que faremos será a dos recursos físico e digital oferecidos a professores e estudantes pela SEDUC-SP de São Paulo, tidos como materiais para o ensino de matemática e, mais especificamente, de combinatória. A trajetória percorrida para a escolha desses recursos contou com a contribuição dos estudos de Campos (2011) e de Fujita et al. (2018) sobre os materiais curriculares propostos pela mesma secretaria de educação em épocas distintas. É essa trajetória que passamos a apresentar.

3.2.1 As investigações de Campos (2011) e Fujita et al. (2018) e suas contribuições para a presente investigação

A presente investigação é, em certa medida, inspirada na pesquisa de Campos (2011) que teve como foco o material didático então recém-implantado na rede estadual paulista de educação. Essa implantação se seguiu à publicação, pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, da Proposta Curricular Paulista (SÃO PAULO, 2008). De acordo com Busquini (2013), a Proposta Curricular Paulista (PCP) se somou a outros documentos curriculares produzidos com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) promulgada em 1996.

Na sua investigação, Campos (2011) buscou na análise da PCP e, sobretudo, dos cadernos do professor e do aluno do 2º ano do ensino médio referentes ao terceiro bimestre letivo, respostas para duas indagações: a) que tipos de problemas de combinatória eram abordados na PCP? b) esses problemas contemplavam as variáveis de tarefa citadas por Batanero, Navarro-Pelayo e outros em suas pesquisas sobre o raciocínio combinatório?

Os cadernos do professor e do aluno faziam parte de uma série de materiais didático-pedagógicos do programa *São Paulo Faz Escola*, destinados à implementação da proposta curricular nas escolas da rede pública paulista. Esses cadernos eram apostilas com atividades e situações a serem desenvolvidas nas aulas dos vários componentes curriculares, bimestre a bimestre.

Ao ter como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais e metodológico a Análise de Conteúdo, Campos (2011) analisou os problemas de contagem que faziam parte do material para o ensino de combinatória. Para tanto, o

autor buscou inicialmente compreender como a combinatória era abordada na PCP e como se deu sua organização para fins de ensino no nível médio.

Ao final de sua investigação, o autor concluiu que os problemas de contagem voltados para o ensino de combinatória eram do tipo produto de medidas, de acordo com a classificação de Vergnaud (1996) para problemas de estrutura multiplicativas³². Além do uso do princípio multiplicativo, um número reduzido de problemas exigia também o emprego do princípio aditivo. Na perspectiva do autor, esse número deveria ser maior “dada sua importância na formação do raciocínio combinatório” (CAMPOS, 2011, p. 125). Sobre as variáveis de tarefa, o autor entendeu que elas foram contempladas parcialmente. Tais variáveis estão ligadas diretamente à diversificação de situações combinatórias o que, do ponto de vista de Vergnaud (1996), é essencial para a configuração de um campo conceitual.

Ainda assim, o autor observa que houve avanços na maneira como a combinatória foi abordada nos materiais didáticos do programa *São Paulo Faz Escola*:

Contudo, não deixamos de salientar o mérito da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo em abordar esse assunto de um modo que seja significativo para alunos e professor. Isso é reflexo, no nosso modo de ver, das pesquisas feitas a respeito desse tema e, antes de tudo, da preocupação numa aprendizagem efetiva. (CAMPOS, 2011, p. 126)

A tomar essa investigação como ponto de partida, inicialmente nos indagamos sobre como os professores de matemática da rede estadual paulista usavam esses recursos para o ensino de combinatória. Isso porque, em 2020, ao buscarmos os cadernos do professor e do aluno que eram usados por essa rede de ensino, detectamos que os problemas de combinatória, propostos àquela época, continuavam os mesmos, com raríssimas exceções. Todavia, não encontramos estudos que tenham se dedicado a responder essa questão. Em contrapartida, Fujita et al. (2018), por meio de investigação que fizeram com 80 professores de matemática de escolas estaduais de Presidente Prudente, SP, apontam que 31,3% consideravam que o uso dos materiais didáticos do programa *São Paulo Faz Escola* (cadernos do professor e do aluno) contribuía para o trabalho docente, enquanto

³² Segundo Vergnaud (2000) os problemas de estrutura multiplicativa envolvem situações que se resolve pelas operações de multiplicação e divisão. O mesmo autor os classifica em problemas de proporção simples, proporção múltipla, comparação multiplicativa e produto de medida.

53,7% consideraram essa contribuição parcial e, 11,2% a entendiam como inexistente³³.

Acrescenta-se, a esses dados, uma pesquisa que fizemos em 2020 voltada a professores que lecionavam matemática. Esse instrumento constava de 20 questões objetivas organizadas do seguinte modo: questões que visavam à caracterização da amostra; questões que exploravam os recursos didáticos e a preparação das aulas; questões que exploravam a relação dos professores e a análise combinatória. A aplicação deste questionário se deu entre 26 de 31 de outubro de 2020 por meio de *link* de acesso divulgados em redes sociais (*WhatsApp*, *Facebook*) e, em contrapartida, tivemos 29 respostas. A maioria dos respondentes eram professores com idades entre 30 e 50 anos (26 indivíduos), com formação inicial em licenciatura em matemática (18 indivíduos), com tempo de magistério entre 10 e 30 anos (30 indivíduos) e que atuavam no ensino médio (17 indivíduos). Uma das questões perguntava qual o nível de conhecimento dos respondentes a respeito do que é previsto na BNCC para o ensino de matemática na educação básica. Como resultado, 19 professores consideraram seu nível de conhecimento profundo ou satisfatório. Em outra questão, sobre recursos prioritários para o preparo das aulas de matemática, o livro didático e/ou apostilas estiveram presentes em todas as respostas, foram apontados como únicos recursos por 11 respondentes, como ilustra a Tabela 2. Para sua leitura, considere a seguinte legenda: LD – livros didáticos e/ou apostilas; MI – materiais disponíveis na internet como modelos de aula, sequências didáticas ou jogos; MAC – materiais próprios produzidos ao longo dos anos; OUTROS – outras fontes.

Tabela 2 – Recursos no preparo das aulas de matemática apontados por 29 professores que ensinam pesquisados em 2020

Recursos	Frequência absoluta
LD	11
LD+MI	6
LD+MI+MAC	4
LD+MI+MAC+OUTROS	8
	29

Elaborada pelo autor

³³ Os autores categorizaram como *em branco* o número dos que não assinalaram nenhuma das alternativas, o que correspondeu a 3,8%.

Os dados até aqui apresentados mostram a importância que recursos tidos como tradicionais – livros didáticos e/ou apostilas – ainda têm no trabalho documental dos professores, mas apontam para a inserção de outros provenientes, principalmente, dos meios digitais como é o caso da *internet*. Outrossim, a investigação de Fujita et al. (2018) revelou que 85,0% viam nos materiais didáticos do programa *São Paulo Faz Escola* alguma contribuição para suas aulas.

Ao entender esses materiais produzidos pela SEDUC-SP os principais meios de disseminação das diretrizes apontadas, quer seja pela Proposta Curricular Paulista (SÃO PAULO, 2008), quer seja pelo Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2020) e, ao pressupor que, em tese, o professor que leciona para o 2º ano do ensino médio da rede estadual de ensino de São Paulo, há pelo menos cinco anos, sabe da existência desses materiais, desenhamos quatro cenários possíveis:

1. O professor usa, ano a ano, esse material e o tem como seu único recurso para o ensino de combinatória.
2. O professor usa, ano a ano, esse material e agrega a ele outros recursos para o ensino de combinatória.
3. O professor não usa esse material e se apoia em outros recursos para o ensino de combinatória.
4. O professor não chega a abordar combinatória em suas aulas estando, pois, fora do alcance dessa investigação.

A homologação do Currículo Paulista para a etapa do Ensino Médio (CPEM), alicerçado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e sua implementação, a partir de 2021 nas escolas estaduais da rede pública de ensino paulista por meio dos recursos curriculares físicos e digitais do programa *Currículo em Ação* nos levaram à escolha desses materiais em nossa investigação.

Assim como no programa *São Paulo Faz Escola*, também o programa *Currículo em Ação* contava, inicialmente, com duas apostilas físicas – os cadernos do professor e do estudante – além de outros recursos oferecidos nas modalidades física e digital pela Escola de Formação e Aperfeiçoamento dos Profissionais da Educação do Estado de São Paulo (EFAPE) e pelo Centro de Mídias SP (CMSP). Porém, no 3º. bimestre de 2023 os cadernos foram substituídos por apresentações em *slides* e tarefas *on-line*, disponíveis a professores e estudantes tanto na plataforma da CMSP quanto na plataforma *Khan Academy*. Desse modo, foram

analisados os recursos físicos (caderno do professor) e digital (apresentação em *slides*) considerando o ensino de combinatória para o 2º. ano do ensino médio.

No que diz respeito ao uso desses recursos por professores de matemática, a *Investigação Reflexiva do trabalho documental do professor* serviu de base metodológica para a presente investigação. É esse referencial que apresentamos a seguir.

3.3 Investigação Reflexiva do trabalho documental do professor

Segundo Trouche et al. (2017), a análise das atividades do professor por meio de seu trabalho documental exige considerar:

- A variedade de recursos que alimentam e que são produzidos por esse trabalho.
- A variedade de interações (coletivas, institucionais e, também, sociais) que influenciam esse trabalho.
- O tempo para o desenvolvimento da gênese documental.

Essas considerações epistemológicas embasaram o desenvolvimento de uma metodologia específica chamada *Investigação Reflexiva do trabalho documental do professor*, doravante designada por *Investigação Reflexiva (IR)*, que confere um papel importante aos próprios professores e que é sustentada por cinco princípios:

- O da *ampla coleção de recursos* materiais usados e produzidos durante o trabalho documental.
- O do *acompanhamento a longo prazo*. As gêneses documentais são processos em andamento e os esquemas se desenvolvem por um longo período.
- O do *acompanhamento dentro e fora de sala de aula*. A sala de aula é um importante lugar onde o ensino elaborado é implementado e ocorrem adaptações, revisões e improvisações. No entanto, parte considerável do trabalho docente é feita fora da sala de aula: na escola, em casa, nos centros/programas de desenvolvimento de professores, entre outros.
- O do *acompanhamento reflexivo do trabalho documental*.
- O da *confrontação das visões dos professores sobre o trabalho documental e a materialidade deste trabalho* (a materialidade vem, por exemplo, da coleção de recursos materiais, da prática do professor na sala de aula).

O envolvimento ativo do professor é uma necessidade prática visto que ele é o único a ter acesso ao seu trabalho documental (além da observação direta do pesquisador). Também produz uma postura reflexiva que conduz o professor a uma atitude introspectiva que, às vezes, torna visível o que poderiam ser recursos ocultos ou *links* ocultos em seu sistema de recursos. Esse acompanhamento bem próximo e a longo prazo do trabalho documental dos professores precisa esclarecer, tanto quanto possível, o objetivo e a finalidade da pesquisa, o que o pesquisador solicita e para qual finalidade. Tal necessidade levou Sabra (2016) a propor a noção de *contrato metodológico* para vincular o professor e o pesquisador.

Com base nesses princípios, foram projetadas estratégias e ferramentas adaptadas aos vários contextos e questões de pesquisa. Uma dessas ferramentas – e aparentemente de bons resultados – é a *Representação Esquemática do Sistema de Recursos do professor (Schematic Representation of a teacher's Resource System – SRRS)*. Ao professor é solicitado que desenhe um mapa de seus recursos para evidenciar aqueles com os quais tenha se identificado e tenha se apropriado, de quais fontes eles emergiram e para quais propósitos. Desde o começo da ADD, essa ferramenta vem sendo desenvolvida em diferentes direções. Hammoud (2012), ao trabalhar com educação química, propôs uma abordagem para analisar a Representação Esquemática do Sistema de Recursos do Professor – SRRS – como um mapa mental; também a usou para pedir que professores descrevessem suas interações com seus colegas ou com outras coletividades. Rocha (2018) renomeou a SRRS como *Mapeamento Reflexivo do Sistema de Recursos do Professor (Reflective Mapping of teacher Resource System – RMRS)*, por duas razões: primeiramente para enfatizar o papel da reflexão nesse processo, e para denotar, com a palavra mapeamento, o processo de exploração progressiva de um território desconhecido, tanto para o pesquisador como, em certa medida, para o próprio professor. Rocha também procurou confrontar permanentemente a RMRS, feita pelo professor, com o que ela denominou “mapeamento inferido do sistema de recursos do professor” feito pelo próprio pesquisador.

Trouche et al. (2017) consideram que, além dessa ferramenta específica, fazem-se necessários novos desenvolvimentos metodológicos da investigação reflexiva a fim de acessar, o mais próximo possível, a verdadeira documentação do professor quando a produz. Isso significa procurar observar o professor em situações de interação com os recursos, não somente naquelas públicas, mas

também em outras de cunho mais reservado. Esse tipo de acompanhamento traz algumas dificuldades e indagações:

- Sob quais condições *naturais* o professor poderia trabalhar com os recursos, e, ao mesmo tempo, descrever a lógica de sua atividade? Neste sentido Wang (2018) introduz a noção de *colega de trabalho documental*, ou seja, um professor que partilha seu trabalho documental com um colega.
- Como é possível armazenar (para fins de análise) os mais diversos e numerosos dados produzidos no acompanhamento do trabalho documental do professor? Essa questão é tratada pelo desenvolvimento dos *web-documentos* que armazenam vídeos, bem como recursos que interveem ou que são produzidos pelo trabalho de documentação dos professores, para posterior análise e compartilhamento dos dados e de suas análises em uma comunidade de pesquisa.

Os autores observam que analisar o trabalho documental do professor é um processo complexo. Os cinco princípios da metodologia de investigação reflexiva proporcionam orientações para escolhas metodológicas, no entanto, os pesquisadores, ao usar esses princípios, precisam fazer certas escolhas para limitar a grande quantidade de dados que são colhidos:

- escolhas de momentos críticos para o trabalho documental do professor (incidentes documentais);
- ou recursos críticos para o sistema de recursos do professor (recursos essenciais).

Na seção que se segue, são apresentadas as escolhas metodológicas dessa investigação, pautadas na Investigação Reflexiva.

3.4 A investigação reflexiva no âmbito desta pesquisa – escolhas metodológicas

Tendo em vista os objetivos traçados para essa investigação e os princípios norteadores da metodologia da Investigação Reflexiva, procuramos convidar professores que trabalhassem na rede estadual paulista especificamente para as turmas de 2º. ano do ensino médio. No ano de 2021, com o retorno parcial das atividades presenciais nas escolas do estado de São Paulo, entramos em contato com alguns professores e dois deles aceitaram o convite para participar da

pesquisa. Contudo, esses docentes não puderam permanecer como participantes no ano de 2022, visto que nesse ano foram-lhes atribuídas aulas em outras turmas.

Em maio de 2022 entramos em contato com o professor Gabriel (nome fictício) que aceitou o convite para integrar essa pesquisa como participante. À época do convite, Gabriel contava com 26 anos e, em 2019, iniciou suas atividades como professor da rede estadual paulista de educação. Em 2022, ano da coleta dos dados, Gabriel residia e trabalhava na cidade de Mogi das Cruzes, SP, como professor de uma escola estadual localizada na região central do município. Era a primeira vez que trabalha em turmas de 2º. do ensino médio.

Em julho de 2023 contatamos outra professora – Maria Clara (nome fictício) – que se disponibilizou a participar. Trata-se de uma professora de matemática de 47 anos que ingressou na rede estadual paulista em 1995 para trabalhar em várias escolas estaduais do município de Biritiba-Mirim, SP. Quando do acompanhamento de seu trabalho documental, Maria Clara atuava como professora de matemática e física em uma escola da região central desse município.

O acompanhamento do trabalho do professor Gabriel ocorreu entre os meses de setembro, outubro, novembro e dezembro de 2022 e, no caso de Maria Clara, nos mesmos meses de 2023, ora virtualmente por meio de entrevistas gravadas na plataforma *Teams* e de mensagens no aplicativo *WhatsApp*, ora presencialmente em aulas com turmas de 2º. ano do ensino médio. Embora a combinatória seja um conteúdo previsto para ser trabalhado no 3º. bimestre do ano letivo, de acordo com o programa *Currículo em Ação*, as aulas de Gabriel sobre esse tema sofreram um certo atraso e foram acompanhadas presencialmente nos dias 9, 16, 23 e 30 de novembro de 2022. Maria Clara, porém, teve suas aulas de combinatória dentro do previsto e foram acompanhadas nos dias 11, 18 e 25 de setembro de 2023. Não foram permitidas, por parte da direção das instituições por razões de segurança, gravações em áudio ou em vídeo das aulas.

Procuramos, dentro do possível, acompanhá-los em quatro momentos: a) no mapeamento reflexivo de suas trajetórias documentais e da representação esquemática dos seus sistemas de recursos; b) na preparação de suas aulas sobre combinatória; c) na implementação de cada aula preparada; d) na avaliação da aula implementada. No caso da preparação das aulas, tal acompanhamento sofreu prejuízo pois esse trabalho se deu dentro do ambiente escolar, em horário adverso ao do pesquisador. Contudo, no caso do professor Gabriel, um dia antes da aula do

dia 9 de novembro, ele nos enviou o que havia preparado para ser trabalhado em sua aula.

Além dos professores Gabriel e Maria Clara, procuramos o professor Marcos (nome fictício) com quem já tínhamos tido contato para um estudo piloto de sua trajetória documental. Em 21 de julho de 2021 fizemos a primeira entrevista pela plataforma *Teams*. O professor, com formação superior completa em licenciatura em matemática por uma universidade de Mogi das Cruzes, SP e, na época, cursava o PROFMAT. À altura dessa entrevista, Marcos contava com 39 anos e atuava há 15 anos como professor de matemática das redes pública (estadual) e privada do mesmo município de Mogi das Cruzes. Após solicitarmos sua participação na pesquisa com a preparação de aulas para o ensino de combinatória com o caderno do professor como um de seus recursos, fizemos uma 2ª. entrevista em 3 de julho de 2023, pela mesma plataforma *Teams* a fim de discutirmos o que por ele fora produzido.

Na seção seguinte, apresentamos estudos preliminares sobre a combinatória à luz da TCC no intuito de delimitar a classe de situações que dão sentido aos conceitos próprios desse objeto matemático.

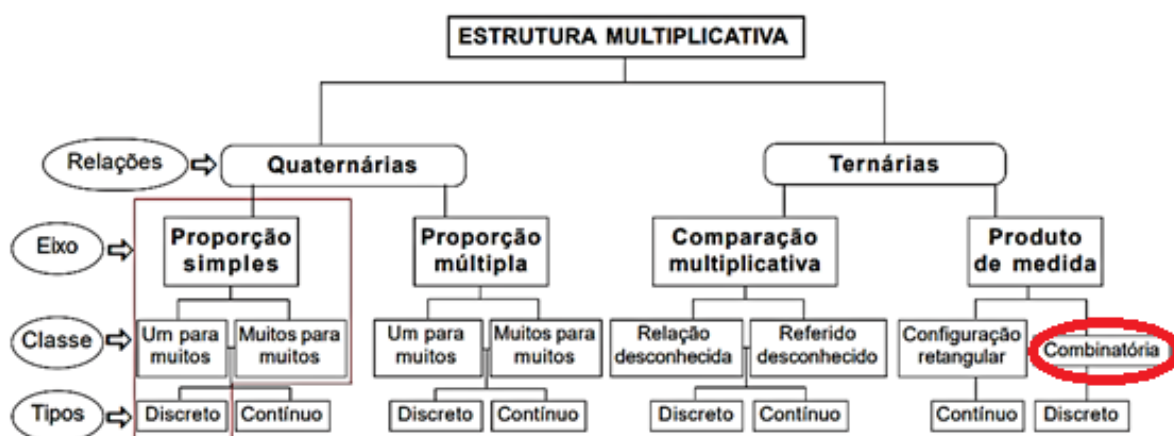
4. ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentadas reflexões sobre combinatória e a classe de situações que lhe dão sentido, considerando a noção *conceito* de Vergnaud, os estudos de Dubois (1984), Navarro-Pelayo et al. (1996) e Pessoa e Borba (2010) e as investigações de Pinheiro (2015) e Melo (2018). Com base nessas reflexões, propomos um modelo que compila classes de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas ligadas aos conceitos de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação, no âmbito da educação básica, em especial do ensino médio. Esse modelo é usado nas análises dessa investigação.

4.1 A combinatória no campo conceitual multiplicativo

Em seus estudos sobre os campos conceituais, Vergnaud (1996) dedicou maior atenção aos das estruturas aditiva e multiplicativa. De acordo com Magina et al. (2014), os problemas combinatórios, juntamente com os que envolvem área e volume, enquadram-se no grupo *produtos de medidas* imersos no campo conceitual multiplicativo. Na Figura 2 é apresentado esquematicamente o campo conceitual multiplicativo, com destaque à posição ocupada pela combinatória nesse campo.

Figura 2 – Representação Esquemática do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: MAGINA et al.(2014, p. 520, grifo nosso)

Contudo, deve ser considerado que o *produto de medidas* ou *produto cartesiano* é um dos possíveis significados das várias situações combinatórias (PESSOA; BORBA, 2010) e, que em alguns casos, o emprego exclusivo do princípio multiplicativo é insuficiente para seu enfrentamento.

Sob essa perspectiva entendemos que, apesar de até então a combinatória ser tratada como um ramo do campo conceitual multiplicativo, há espaço para considerá-la um campo conceitual em si, já que, segundo Vergnaud (1996)

[...] as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas ocupam hoje um lugar pouco privilegiado, porque a classificação das relações elementares e das classes de problemas elementares está aí relativamente avançada, sendo conhecida na comunidade de investigadores. O mesmo não acontece com a lógica das classes, a geometria ou a álgebra elementar. (VEGNAUD, 1996, p. 177)

Embora a discussão a esse respeito não seja alvo dessa investigação, é com base na ideia de um campo conceitual que nos questionamos: que situações, representações simbólicas e invariantes operatórios dão sentido à combinatória? As respostas a essa questão são apresentadas a seguir.

4.2 Classe de situações combinatórias

Nesta seção, buscamos situar a combinatória como parte da matemática discreta e focamos nos problemas de contagem, nomeadamente os de permutação, arranjo e combinação, quer sejam simples ou com elementos repetidos. Apresentamos, então, as investigações de Pinheiro (2015) e Melo (2018) que discutiram a presença desse objeto matemático no universo educacional brasileiro e em documentos curriculares. Foi com base em documentos como os PCNs que Pessoa e Borba (2010) propuseram uma organização de problemas combinatórios. Nessa organização foram considerados os invariantes operatórios e características de cada tipo de problema: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Além disso, as pesquisadoras pontuaram possíveis representações simbólicas usadas no enfrentamento de situações combinatórias. A esses estudos foram acrescidos os de Dubois (1984) e Navarro-Pelayo et al. (1996) que propuseram uma outra forma de classificação de problemas combinatório: o modelo combinatório implícito. Com base nas reflexões proporcionadas por esses estudos que propomos um modelo de organização de classes de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas ligadas à combinatória, modelo esse usado nas análises da presente investigação.

4.2.1 Problemas de permutação, combinação e arranjo e a organização proposta por Pessoa e Borba (2010)

Quando se trata de considerar problemas combinatórios é possível que, em um primeiro momento, sejamos impelidos a pensar em situações de combinação, arranjo e permutação. Isso porque é por meio dessa categorização que tradicionalmente são abordadas as situações combinatórias no ensino básico brasileiro (PINHEIRO, 2015; MELO, 2018; FERREIRA E ALMEIDA, 2019), em especial, nos livros didáticos. Morgado et al. (2020) apontam que essa categorização traz conceitos que auxiliam o indivíduo na resolução de problemas de contagem, embora haja situações combinatórias em que são exigidas outras técnicas para além da tripla classificação, como acontece com o Princípio da Inclusão-Exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet ou as funções geradoras. Na perspectiva desses autores a combinatória é entendida como “a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”. Eles destacam duas classes de problemas que frequentemente são abordados pela combinatória:

- aqueles que têm por objetivo demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições (problemas de existência);
- aqueles que têm por objetivo contar ou classificar subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições (problemas de contagem).

De acordo com Morgado et al. (2020), no que tange aos problemas de contagem, abordados na educação básica, dois princípios entram em jogo quando se pretende resolvê-los: o aditivo e o multiplicativo, esse último também chamado de princípio fundamental da contagem. Esses autores assim definem esses princípios:

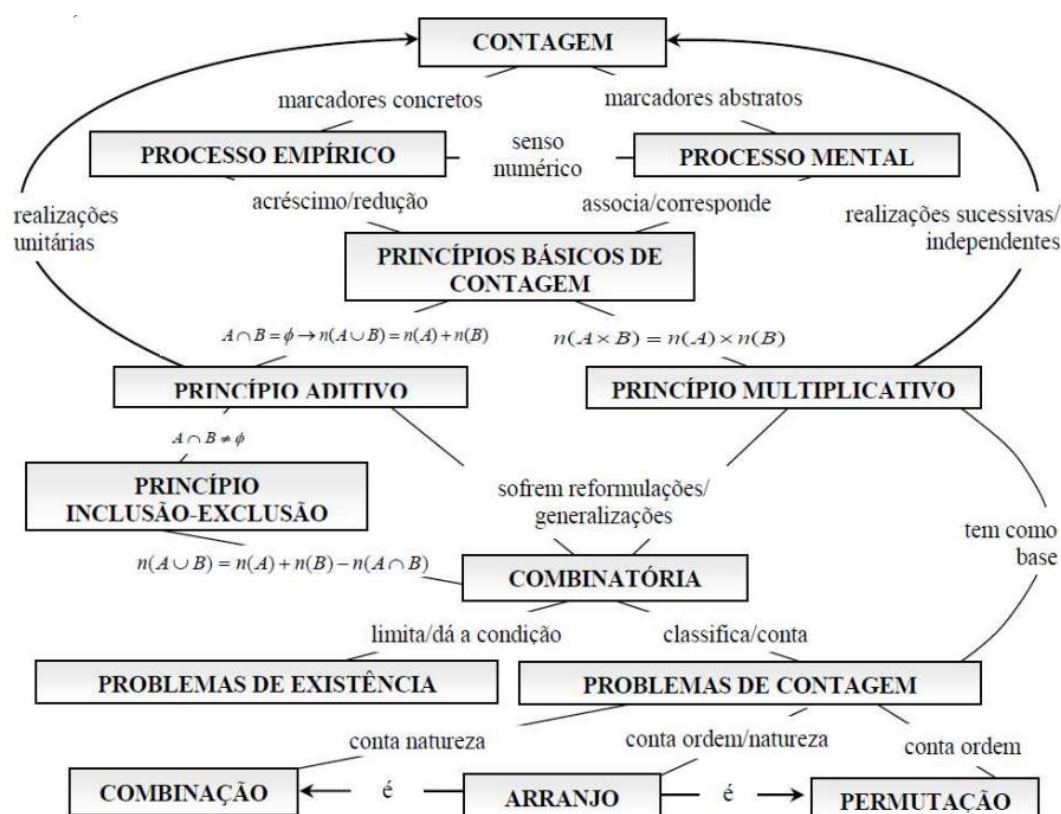
Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.
 Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy . (MORGADO et al., 2020, p. 14)

No caso da categorização em problemas de permutação, combinação e arranjo, Merayo (2001) sublinha que deve ser considerada a natureza e a ordem dos elementos como critérios para distinguir agrupamentos de p elementos a serem formados a partir de n elementos disponíveis, com p e n naturais e $1 \leq p \leq n$. Dessa forma tem-se que:

- agrupamentos distinguíveis somente pela ordem de seus elementos são chamados de *permutações*;
- agrupamentos distinguíveis somente pela natureza de seus elementos são chamados de *combinações*;
- agrupamento distinguíveis pela ordem e pela natureza de seus elementos são chamados *arranjos*.

A Figura 3 apresenta um mapa conceitual para a combinatória com foco nos arranjos, permutações e combinações apresentado por Ferreira et al.

Figura 3 – Mapa conceitual de combinatória com foco nos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação



Fonte: FERREIRA et al. (2016, p. 314)

De acordo com as investigações de Pinheiro (2015) e Melo (2018), a combinatória, durante um bom período, foi um tema quase que exclusivamente trabalhado na 2ª série do nível médio de ensino com problemas que exploravam o princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo), além de problemas de arranjo, de permutação e de combinação, sejam eles simples ou com repetições. Assim, as classes de situações combinatórias presentes em livros didáticos brasileiros passaram por alterações com o tempo que variaram de uma abordagem

teoricista, com foco na dedução de fórmulas, para outra tecnicista voltada para a aplicação de fórmulas, como aponta Pinheiro (2015). O Quadro 8 ilustra essa transição apresentando alguns livros usados nas aulas de matemática em épocas diferentes com exemplos de problemas abordados. A cada um deles é apontada a finalidade, ou seja, a intencionalidade didática do ensino de combinatória, bem como os saberes mobilizados.

Quadro 8 – Problemas presentes em quatro livros analisados por Pinheiro (2015)

Livro	Exemplo de problema	Finalidade	Saberes
SERRASQUEIRO, J. A. <i>Tratado de Álgebra Elementar</i> . 14 ed. Coimbra. Livraria Centra de J. Diogo Pires. 1925	<i>O número de arranjos de 8 objectos 4 a 4 é (p. 270)</i>	Combinatória como conhecimento prévio ao desenvolvimento do binômio de Newton.	• Listagem direta • Arranjos simples • Permutação simples • Combinação simples
THIRÉ, C. (et al.) <i>Curso de Matemática</i> . 5º. ano. 4ª. ed. Livraria Franciso Alves. 1940	<i>Com as 26 letras do alfabeto quantos arranjos ternários com repetição podemos obter? (p. 82)</i>	Estudo ainda compreendido como base para o ensino do binômio de Newton. Contudo, são explorados outros problemas combinatórios, mas com ênfase ao uso de fórmulas.	• Listagem direta • Arranjos simples • Arranjos com elementos repetidos • Permutação simples • Combinação simples • Combinação com elementos repetidos
ROCHA, L. M. BARBOSA, R. M. <i>Matemática para o Curso Colegial Moderno</i> . v. 3. 1970	<i>Um jovem possui pra trajes esportes 2 calças e 3 camisas, mas para social possui 2 ternos, 4 camisas e 3 gravatas. De quantas maneiras poderá se vestir ou de maneira esporte ou social? (p. 12)</i>	Estudo dissociado do binômio de Newton, mas fortemente influenciado pela teoria dos conjuntos e de funções no seu tratamento.	• Princípio multiplicativo • Princípio Aditivo • Árvore de Possibilidades • Arranjos simples • Arranjos com elementos repetidos • Permutação simples • Combinação simples • Combinação com elementos repetidos
DANTE, L. R. <i>Matemática: Contexto & Aplicações</i> . v.2 São Paulo. Ática. 2004.	<i>Quantas diagonais tem um hexágono convexo? (p. 365)</i>	Estudo também dissociado do binômio de Newton, em que se tem a resolução de problemas como uma meta a ser alcançada pelos alunos. Contudo, prevalecem situações cuja intenção é o desenvolvimento de técnicas algorítmicas.	• Princípio multiplicativo • Princípio Aditivo • Listagem direta • Árvore de Possibilidades • Arranjos simples • Permutação simples • Combinação simples

Adaptado de PINHEIRO (2015)

No Quadro 8, é possível observar que problemas de arranjo, permutação e combinação sempre estiveram presentes em livros didáticos brasileiros, inclusive

com situações próximas das que figuram em livros contemporâneos. No entanto, durante um período considerável, a finalidade desses problemas não guardava qualquer relação com o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico. Ao contrário, conforme aponta Pinheiro (2015), funcionavam como pré-requisito para o estudo do binômio de Newton, e mesmo quando seu ensino começou a se descolar desse objetivo, ainda assim sua abordagem ficou fortemente atrelada à teoria de conjuntos e ao estudo de funções.

Porém, de acordo com Melo (2018), a partir da publicação de documentos curriculares como os PCNs e a BNCC, os problemas de contagem passaram a ser abordados também em anos do ensino fundamental. Conforme orientação expressa na BNCC, nesse segmento, os problemas devem permitir que o aluno utilize estratégias baseadas na enumeração/listagem e nos princípios aditivo e multiplicativo.

Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles, cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. (BRASIL, 2018, p. 275)

Com base nos PCNs e nos estudos de Nunes e Bryant e de Vergnaud, Pessoa e Borba (2010) propuseram uma organização dos problemas de contagem – *produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação* – considerando seus significados no campo combinatório, seus invariantes operatórios e características. Segundo as autoras, esses quatro tipos de problemas são considerados como próprios do pensamento combinatório e necessários quando se tem por foco o ensino e a aprendizagem de combinatória nos ensinos fundamental e médio. O Quadro 9 resume a organização proposta pelas pesquisadoras.

Observamos na organização proposta por Borba e Pessoa (2010) que, embora não tenham considerado casos em que há elementos repetidos, as pesquisadoras evidenciam a formação de agrupamentos distinguíveis somente pela natureza de seus elementos, somente pela relevância da ordem, ou por ambos, como um invariante fundamental em problemas combinatórios. Outrossim, tem-se a formação de conjuntos derivados de dois ou mais conjuntos, ou ainda, a formação de subconjuntos.

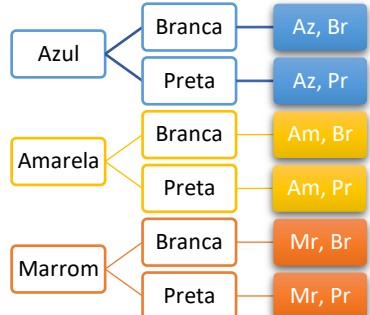
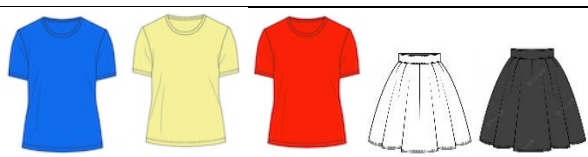
Quadro 9 – Organização dos problemas combinatórios segundo Pessoa e Borba (2010)

Tipo de problema	Exemplo	Invariante(s)	Característica(s)
Produto Cartesiano	Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?	- Dado dois (ou mais) conjuntos distintos, eles serão combinados para formar um novo conjunto - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado	Dois ou mais conjuntos disjuntos são combinados para formarem um terceiro conjunto
Permutação	Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.	- Todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição) - A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações
Arranjo	O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneira distintas podemos ter os três primeiros colocados?	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - A ordem dos elementos gera novas possibilidades	De um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades
Combinação	Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos nesse concurso?	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades	Tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém a ordem dos elementos não gera novas possibilidades

Adaptado de Pessoa e Borba (2010, p.3, 4 e 5)

No que diz respeito às representações simbólicas, Pessoa e Borba (2010) destacam o auxílio que oferecem, tanto para o estudante que se põe a resolver um problema de contagem, quanto para a compreensão do próprio enunciado da situação proposta. Essas autoras, bem como outros pesquisadores como Barreto e Borba, Schimdt e Montenegro (esses dois últimos pautados na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval) elencaram as principais representações simbólicas atreladas às situações combinatórias. O Quadro 10 apresenta essas representações acompanhadas de exemplos.

Quadro 10 – Algumas representações simbólicas atreladas às situações combinatórias

Representação Simbólica	Exemplo												
Língua natural	Uma moça possui 3 blusas nas cores azul, amarela e marrom, e 2 saias nas cores preta e branca. De quantas formas ela pode combinar uma blusa e uma saia?												
Listagem (não sistemática/sistemática)	(Azul, Branca); (Azul, Preta); (Amarela, Branca); (Amarela, Preta); (Marrom, Branca); (Marrom, Preta)												
Tabular	<table><tr><td></td><td>Branca</td><td>Preta</td></tr><tr><td>Azul</td><td>(Az, Br)</td><td>(Az, Pr)</td></tr><tr><td>Amarela</td><td>(Am, Br)</td><td>(Am, Pr)</td></tr><tr><td>Marrom</td><td>(Mr, Br)</td><td>(Mr, Pr)</td></tr></table>		Branca	Preta	Azul	(Az, Br)	(Az, Pr)	Amarela	(Am, Br)	(Am, Pr)	Marrom	(Mr, Br)	(Mr, Pr)
	Branca	Preta											
Azul	(Az, Br)	(Az, Pr)											
Amarela	(Am, Br)	(Am, Pr)											
Marrom	(Mr, Br)	(Mr, Pr)											
Diagrama de árvores (árvore de possibilidade)													
Simbólica (fórmula, princípio multiplicativo)	$3 \times 2 = 6$												
Figural													

Fonte: Elaborado pelo autor

A organização dos problemas combinatórios proposta por Pessoa e Borba (2010), embora seja próxima daquela que tradicionalmente aparece nos livros didáticos, não é a única. Dubois (1984) propôs, teoricamente, outra organização que, mais tarde, foi aperfeiçoada por Navarro-Pelayo et al. (1996). Tal proposta é apresentada na próxima seção.

4.2.2 Dubois (1984), Navarro-Pelayo et al (1996) e os Modelos Combinatórios Implícitos

Tendo por objetivo a criação de um modelo que permitisse um ensino de combinatória mais relacional e significativo, Dubois (1984) propôs que as configurações dos problemas simples de contagem fossem classificadas em tipos de modelos combinatórios, a que denominou *sistema de configurações combinatórias simples*. Por meio desse modelo, o autor procurou explicar:

[...] as ligações entre as classes obtidas, tanto entre aquelas especificadas segundo um mesmo modo classificatório quanto entre aquelas que são especificadas segundo modos diferentes. Pretendemos promover uma melhor compreensão das contagens elementares para organizar, em um sistema bem estruturado, as configurações combinatórias correspondentes. (DUBOIS, 1984, p. 38, *tradução nossa*³⁴)

Assim, para a classificação de problemas combinatórios simples, Dubois (1984) propôs quatro modelos de problemas:

- os de *seleção*, associados ao conceito de amostragem;
- os de *distribuição*, que podem ser formalizados, em termos matemáticos, como uma aplicação;
- os de *separações em grupo* e os de *partições de inteiros*, associados à noção matemática de partição, de divisão de um conjunto em subconjuntos.

Mais tarde, Navarro Pelayo et al. (1996) entenderam que as *separações em grupos* e as *partições em inteiros* constituíam casos particulares de um único modelo que denominaram *partições*. Além disso, a classificação proposta por Dubois (1984) recebeu, por parte desses pesquisadores, outro nome: *modelo combinatório implícito*. Essa denominação resume o fato de que esses modelos se encontram implícitos no contexto dos mais variados problemas combinatórios simples. Cada um deles é apresentado a seguir, a partir de Navarro-Pelayo et al. (1996) e Godino et al. (2005).

No modelo de *seleção*, retira-se de um conjunto de m elementos (quase sempre distintos) uma amostra de n objetos, conforme ilustra o problema a seguir:

Numa caixa há 4 bolas numeradas (com os dígitos 2, 4, 7, 9). Escolhemos uma das bolas e anotamos seu número. Então, colocamos a bola de volta na caixa. Repetimos o procedimento até formarmos um número de três dígitos. Quantos números diferentes de três dígitos são possíveis de se obter? Por exemplo, podemos obter o número 222. (GODINO et al., 2005, p.8, *tradução nossa*³⁵)

Navarro-Pelayo et al. (1996) destacam que o verbo *escolher* presente no texto do problema pode auxiliar na percepção desse tipo de configuração. A mesma ideia

³⁴ [...] les liens existant entre les classes obtenues, à la fois entre celles spécifiées selon un même mode classificatoire et entre celles qui le sont selon différents modes. Nous prétendons favoriser une meilleure compréhension des dénombrements élémentaires en organisant, en un système bien structuré, les configurations combinatoires correspondantes.

³⁵ In a box there are four numbered marbles (with the digits 2, 4, 7, 9). We choose one of the marbles and note down its number. Then we put the marble back into the box. We repeat the process until we form a three-digit number. How many different three-digit numbers is it possible to obtain? For example, we might obtain the number 222.

de amostra ou seleção encontra-se em verbos como *selecionar*, *extrair*, *pegar*, *coletar*, entre outros.

De acordo com Navarro-Pelayo et al. (1996), a seleção de elementos para uma amostra deve se considerar, também:

- a possibilidade de repetição de um ou mais elementos
- a relevância ou não da ordem em que a amostra é extraída

De acordo com estas características obtém-se quatro configurações possíveis para os problemas de seleção, como ilustra o Quadro 11. Nele são apresentados problemas de seleção considerando amostras ordenadas (situações de arranjo) e não ordenadas (situações de combinação), com ou sem elementos repetidos.

Quadro 11 – Diferentes possibilidades no modelo de seleção

	Amostra ordenada	Amostra não ordenada
Repetidos	<i>Arranjo com repetição $(AR)_{m,n}$</i>	<i>Combinação com repetição $(CR)_{m,n}$</i>
	Exemplo: <i>As placas dos automóveis são formadas por duas letras do alfabeto latino seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?</i> (MORGADO et al. 2020, p. 16, adaptado)	Exemplo: <i>De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores</i> (MORGADO et al. 2020, p. 41)
Não-repetidos	<i>Arranjo Simples $(A_{m,n})$</i>	<i>Combinações Simples $(C_{m,n})$</i>
	Exemplo: <i>De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?</i> (MORGADO et al. 2020, p. 17)	Exemplo: <i>De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em grupo de 7 homens e 4 mulheres?</i> (MORGADO et al. 2020, p. 27)

Adaptado de Navarro-Pelayo et al. (1996, p. 3)

Sobre o modelo de *distribuição*, Navarro-Pelayo et al. (1996) apontam que o que se pretende nesse modelo é a distribuição de m objetos de um conjunto em n casas, como está exemplificado no problema a seguir:

Supondo que temos três cartas idênticas e que queremos colocá-las em quatro diferentes envelopes coloridos: amarelo, azul, vermelho e verde. Só é possível introduzir uma carta em cada um dos envelopes diferentes. De quantas maneiras pode-se colocar as três cartas idênticas em quatro envelopes diferentes? Por exemplo, poderíamos introduzir uma carta dentro do envelope amarelo, outra dentro do envelope azul e a última dentro do envelope verde. (GODINO ET. AL, 2005, p.8, tradução nossa³⁶)

³⁶ *Supposing we have three identical letters, we want to place them into four different colored envelopes: yellow, blue, red and green. It is only possible to introduce one letter into each different envelope. In how many ways can the three identical letters be placed into the four different envelopes? For example, we could introduce one letter into the yellow envelope, another into the blue envelope and the last one into the green envelope.*

Godino et al. (2005) observam que, como há nesse problema dois grupos diferentes intervindo (cartas e envelope), a aplicação da regra do *ordenado* ou *não ordenado* não se torna uma tarefa fácil. Nesse caso, há de se considerar que, embora não seja possível ordenar as cartas, visto que são objetos indistinguíveis, o mesmo não acontece com os envelopes por serem de cores diferentes. Assim, os autores apontam que a solução da situação será obtida por meio de uma combinação de 4 elementos tomados 3 a 3 ($C_{4,3}$). No entanto, ponderam que existem outras possibilidades nesse modelo a partir dos seguintes condicionantes:

- se os objetos a serem distribuídos são idênticos ou não;
- se as casas são idênticas ou não;
- se as casas são ordenáveis ou não (no caso de casas distintas);
- se devemos considerar a ordem dos objetos dentro das casas.
- se as condições que se acrescentam à distribuição, como o número máximo de objetos em cada casa ou a possibilidade de ter casas vazias, e assim por diante.

Além disso, Godino et al. (2005) salientam que, como nos problemas de distribuição os m objetos de um conjunto são colocados em correspondência a outro formado por n casas, é possível formalizá-los matematicamente em termos de aplicação. Logo, as distribuições podem ser injetoras (quando há mais de um elemento por casa), sobrejetoras (quando há pelo menos um elemento por casa) e bijetoras (quando há um e somente um elemento por casa).

Outro ponto destacado por Godino et al. (2005) é a possibilidade de tradução de um modelo em outro. No caso do problema dos envelopes e cartas, o modelo de distribuição pode ser traduzido no de seleção. Para tanto, basta mudar o ponto de vista das cartas para os envelopes uma vez que distribuir três cartas idênticas em quatro envelopes de cores diferentes equivale a calcular o número de amostras possíveis de três envelopes a partir dos quatro envelopes distintos disponíveis.

Por fim, Navarro-Pelayo et al. (1996) afirmam que no modelo de *partição*, busca-se dividir um conjunto de m elementos em n subconjuntos para obter assim, partições desse conjunto, como no problema seguinte:

Um menino tem quatro carros de cores diferentes (preto, laranja, branco e verde) e decide dar os carros aos seus amigos Fernando, Luis e Teresa. De quantas maneiras diferentes ele pode distribuir os carros? Por exemplo, ele poderia dar todos os carros para Luis. (GODINO ET AL, 2005, p. 9)

Navarro-Pelayo et al (1996), bem como Godino et al (2005), salientam que é possível traduzir uma distribuição de m objetos em n casas em termos de partição de um conjunto de m elementos em n subconjuntos. Existe, portanto, uma correspondência biunívoca entre os modelos de partição e de distribuição, porém o estabelecimento dessa correspondência nem sempre é evidente para estudantes.

Também aqui alguns verbos podem ser associados à ideia de partição, o que pode tornar seu reconhecimento mais fácil. É o caso dos verbos *dividir*, *repartir*, *decompor* e *separar*.

A respeito de implicações psicopedagógicas dos modelos combinatórios implícitos, Dubois (1984) sugere possíveis usos desse modelo por professores e por psicólogos interessados na gênese dos esquemas cognitivos.

No campo do ensino, o autor enxerga nos modelos combinatórios implícitos ferramentas importantes na elaboração de situações combinatórias e de atividades que se pretendam bem estruturadas, do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio combinatório, visto que “os problemas continuam a ser a espinha dorsal do ensino dos elementos de combinatória em níveis pré-universitários” (DUBOIS, 1984, p. 54, *tradução nossa*³⁷). Por isso, o autor critica a utilização de *pseudos problemas realistas* para tornar o ensino de combinatória significativo aos estudantes. Para ele, esses problemas artificiais falham exatamente na intenção de construir caminhos sistemáticos que levem o estudante a reconhecer mais facilmente métodos eficazes na resolução de problemas combinatórios. Além disso, o autor considera ser insuficiente o repertório de problemas contextualizados fora da área das probabilidades como, por exemplo, nos campos das ciências, tecnologias e artes.

Outras possíveis vantagens dessa sistematização ao professor que ensina combinatória são assinaladas por Dubois (1984), quais sejam:

- construção de situações simples que levem os estudantes a mobilizarem procedimentos intuitivos, representacionais, abstratos, de generalização e de formalização, de modo que conceitos como aplicação, produto cartesiano, relação de ordem e equivalência, por exemplo, sejam instrumentalizados;

³⁷ *Le problèmes restant l'ossature de l'enseignement des éléments de la combinatoire aux niveaux pré-universitaires.*

- auxílio na busca por métodos que permitam reduzir problemas de contagem complexos em outros mais simples em que se pode empregar princípios mais elementares de contagem, como os aditivo e multiplicativo;
- ativação do processo de abstração construtiva nos estudantes por meio de situações comparativas simples e de representações semióticas (diagramas, diagramas de setas, tabelas, árvore de possibilidades, entre outros);
- favorecimento da exploração de caminhos para dedução, indução e demonstração das fórmulas que são usadas em combinatória;

No campo da psicologia cognitiva, Dubois (1984) entende que a sistematização que propôs pode embasar estudos daqueles que, assim como Piaget e Inhelder, interessam-se pela gênese de esquemas cognitivos próprios do raciocínio combinatório.

A classificação de problemas combinatórios em modelos feitas por Dubois (1984) em um nível teórico tornou-se uma das variáveis de tarefas consideradas por Navarro-Pelayo et al. (1996) no estudo que empreenderam sobre a resolução de problemas combinatórios por alunos do nível secundário do ensino básico espanhol. Os autores buscaram respostas às seguintes perguntas: a) que papel a combinatória desempenha na probabilidade e na matemática discreta? b) o raciocínio combinatório é somente um instrumento matemático ou se configura um componente fundamental do raciocínio lógico? c) existem variáveis de tarefas que influenciam nos procedimentos e erros dos alunos na resolução de problemas combinatórios? d) como deveriam ser consideradas essas variáveis no ensino e na avaliação desse objeto matemático?

Participaram da pesquisa 720 alunos, com idades entre 14 e 15 anos, provenientes de instituições de ensino de Granada e Córdoba, cidades espanholas, dentre os quais 352 apresentavam alguma instrução prévia sobre combinatória e os demais, nenhuma. A todos foi apresentado um questionário com treze problemas cuja seleção se deu a partir de pesquisas já realizadas sobre o ensino de combinatória, além de sugestões que alunos e professores deram sobre os enunciados e níveis de dificuldade. Na confecção dos problemas, as variáveis de tarefa consideradas foram:

- modelos combinatórios implícitos: problemas de seleção, de distribuição e de partição;

- tipo de operação combinatória: arranjos e permutações com e sem repetição e combinações sem repetição;
- tipo de elementos a se combinarem: letras, números, pessoas ou objetos;
- valor dos parâmetros m e n : aqui m indica o número total de elementos que podem ser agrupados e n , o número de elementos em cada agrupamento.

Segundo os autores, em relação aos alunos que não receberam instrução prévia, não foram notadas grandes diferenças de desempenho nos problemas de seleção, distribuição e partição. No entanto, entre aqueles com instrução prévia, houve redução de dificuldades de enfrentamento de problemas de seleção e daqueles que envolviam arranjos, permutações e permutações com repetição, além de uma melhora nos problemas de distribuição. A instrução prévia também pesou nos erros cometidos pelos alunos. Aqueles que não a tinham apresentaram a enumeração não sistemática como maior dificuldade e isso se deu, possivelmente, por não terem se apropriado ainda de ferramentas como o raciocínio recursivo³⁸. Entre os que detinham instrução prévia, os principais erros observados foram aqueles ligados à ordem (associados mais aos problemas de combinação), à repetição nos problemas de arranjo e permutação, à utilização incorreta de fórmulas e à interpretação errônea do diagrama de árvores. Similarmente, foram observadas dificuldades em resolver problemas de arranjos com repetição associados aos modelos de partição e distribuição em que o parâmetro m (total de elementos disponíveis) era menor que o parâmetro n (número de elementos em cada agrupamento).³⁹

Inspirados nos resultados obtidos por Navarro-Pelayo et al. (1996) outros pesquisadores procuraram estudar as possíveis influências das variáveis de tarefa no raciocínio combinatório em outros contextos. Roa (2000), por exemplo, centrou sua investigação na caracterização de estratégias e dificuldades apresentadas por

³⁸ De acordo com Oliveira (2015, p. 16), pode-se entender por raciocínio recursivo aquele que “parte de casos mais simples para a estruturação de um caso mais amplo e complexo” como, por exemplo, reduz-se uma situação de contagem a um problema com a mesma estrutura, porém, com um número menor de elementos por agrupamentos.

³⁹ Um exemplo disso é o décimo primeiro problema que consta da lista aplicada aos alunos. Esse problema trata do sorteio de bolas numeradas com os algarismos 2, 4, 7 e 9. São realizados três sorteios seguidos. A cada retirada, faz-se o registro do algarismo e a bola colocada novamente no tambor. A tarefa é descobrir quantos números de três algarismo é possível formar. Nesse caso, um arranjo com repetição cuja solução pode ser obtida calculando a potência 4^3 , ou seja, 64. Observa-se que o total de algarismos disponíveis, que é a base da potência, é maior do que o seu expoente que indica quantos algarismos terá o número. Contudo, se ao invés de três fossem cinco sorteios visando a encontrar números com cinco algarismos, teríamos como resposta 4^5 , o que configura a dificuldade descrita por Navarro-Pelayo (1996).

estudante com preparação matemática avançada ao usar variáveis de tarefas baseado, inicialmente, nos problemas de Navarro-Pelayo et al. (ibidem.) em sua investigação. Outro exemplo é o de Rudat (2007) que, em sua investigação, focou nos efeitos da semântica dos enunciados nos procedimentos e processos empregados por estudantes do 4^{ème} de uma escola francesa⁴⁰ na resolução de problemas de contagem. Ao considerar os modelos combinatórios implícitos na organização das situações propostas aos participantes, a pesquisadora observou, baseada em suas respostas, que dois elementos devem ser considerados em problemas combinatórios: a interpretação do estudante cuja base é o conjunto de significações que possui frente a um contexto material e social; as relações lógico-matemáticas que organizam a disposição desse contexto.

Em razão da grande influência que as variáveis de tarefa demonstraram ter, no nível de dificuldade dos problemas e, conseqüentemente, nos erros cometidos pelos alunos, Navarro-Pelayo et al. (1996) defendem que elas sejam consideradas nos documentos curriculares quando versarem o ensino de combinatória e enfatizam que:

Essas variáveis precisam ser consideradas para avaliar o raciocínio combinatório dos alunos se quisermos obter uma avaliação mais abrangente das habilidades e concepções dos alunos. Elas também devem ser consideradas para organizar o ensino que também deve enfatizar o raciocínio recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de focar apenas em aspectos algorítmicos e definições combinatórias.(NAVARRO-PELAYO et al., 1996, p. 36, tradução nossa)⁴¹

Com base nas investigações de Pinheiro (2015) e Melo (2018), na classificação proposta por Pessoa e Borba (2010), para o modelo proposto por Dubois (1984) e por Navarro-Pelayo et al. (1996), consideramos propor uma tipologia de problemas para a classe de situações combinatórias, para destacar seus invariantes operatórios e suas representações. Essa classe é constituída por situações de *produto cartesiano*, bem como de *permutações*, *arranjos* e *combinações* simples e com elementos que se repetem. Em cada situação são apresentados os invariantes operatórios e exemplos da presença desses invariantes em considerando os modelos de seleção, distribuição e partição. Também são

⁴⁰ Equivalente ao 9º ano do ensino fundamental brasileiro.

⁴¹ *Así, estas variables necesitan considerarse para evaluar el razonamiento combinatorio de los alumnos, si queremos conseguir una evaluación más comprensiva de las capacidades y concepciones de los alumnos. También deben ser tenidas en cuenta para organizar la enseñanza que debería también hacer hincapié en el razonamiento recursivo y en los procedimientos sistemáticos de enumeración, en lugar de meramente centrarse en aspectos algorítmicos y en definiciones combinatorias.*

acrescidas possíveis representações simbólicas associadas às situações. Antes, porém, cabe pontuar que:

- os invariantes operatórios são os mesmos considerados por Pessoa e Borba (2010) para os problemas de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação simples. Para os demais foram feitas as modificações necessárias para enfatizar a possibilidade de repetição de elementos;
- os exemplos aqui usados foram, em sua maioria, adaptações dos problemas usados por Navarro-Pelayo et al. (1996). Fazem parte desse rol os problemas
 - de seleção sobre permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo simples, arranjo com elementos repetidos, e combinação simples;
 - de distribuição sobre permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo simples, arranjo com elementos repetidos, e combinação simples;
 - de partição sobre arranjo com elementos repetidos e combinação simples.
- o exemplo usado no modelo de seleção para produto cartesiano é o mesmo que aparece em Pessoa e Borba (2010).
- os exemplos usados para ilustrar as combinações com repetição, em problemas de seleção e de distribuição foram adaptados do *site* Mundo Educação do portal Universo Online (UOL)⁴².
- os demais exemplos são de nossa autoria.

Produto Cartesiano (PC)

- ***Invariantes operatórios***
 - **PC.1.** – Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, eles serão combinados para formar um novo conjunto.
 - **PC.2.** – A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.
- ***Situações e representações simbólicas***
 - Problema de Seleção

⁴² Disponível em <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-combinacao-com-repeticao.htm>. Acesso em 18 de junho de 2023.

- Para a festa de São João da escola, há 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz). Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

PC.1.: grupo de meninos e meninas combinados entre si

PC2.: formação de pares

- Representações simbólicas

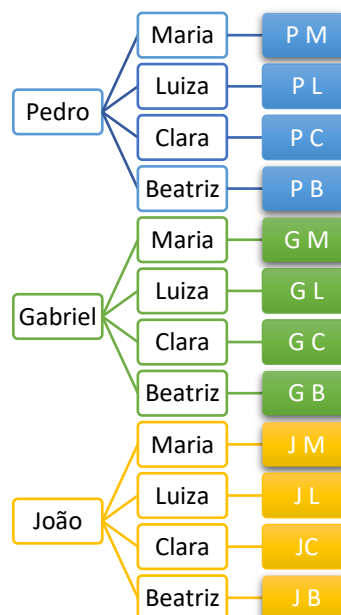
- Listagem (sistemática)

- *Pedro e Maria, Pedro e Luiza, Pedro e Clara, Pedro e Beatriz, Gabriel e Maria, Gabriel e Luiza, Gabriel e Clara, Gabriel e Beatriz, João e Maria, João e Luiza, João e Clara, João e Beatriz*

- Tabular

	Maria (M)	Luiza (L)	Clara (C)	Beatriz (B)
Pedro (P)	(P, M)	(P, L)	(P, C)	(P, B)
Gabriel (G)	(G, M)	(G, L)	(G, C)	(G, B)
João (J)	(J, M)	(J, L)	(J, C)	(J, B)

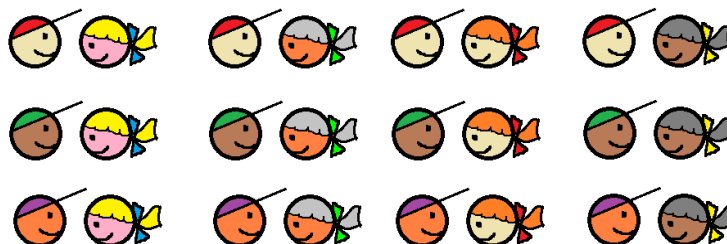
- Diagrama de árvores/ Árvore de Possibilidades



- Simbólico

$$3 \times 4 = 12 \text{ pares}$$

- Figural



Permutação Simples (PS)

- **Invariantes operatórios**

- **PS. 1** – Todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez.
- **PS. 2** – A ordem dos elementos gera novas possibilidades

- **Situações e representações simbólicas**

- Problema de seleção

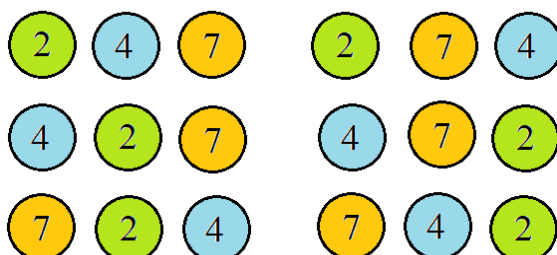
- *Em uma urna há três bolas numeradas com os dígitos 2, 4 e 7. Extraímos uma bola da urna e anotamos seu número. Sem devolver a bola sorteada, escolhe-se uma segunda bola e anota-se o seu número; e sem devolvê-la, uma terceira bola é sorteada e seu número é registrado. Quantos números diferentes de três dígitos podemos obter?*

PS. 1: extração das três bolas numeradas sem reposição

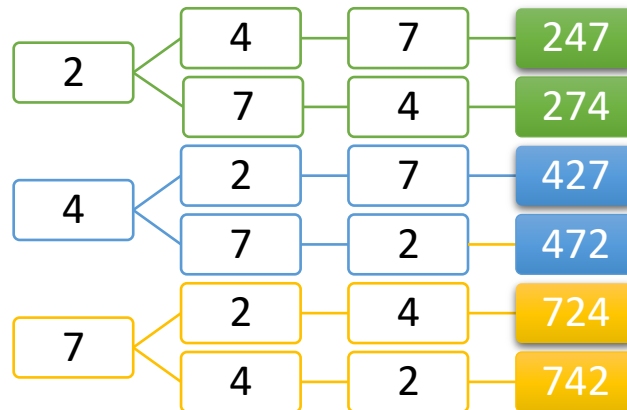
PS. 2: formação de números de 3 algarismos distintos.

- Representações simbólicas

- Listagem (sistemática)/ figural



- Diagrama de árvores/ Árvore de possibilidades



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ números}$$

Fórmula

$$P_3 = 3! = 6 \text{ números}$$

- Problema de distribuição

- Quatro meninos são enviados ao diretor da escola para ganharem um prêmio. Para aguardar a premiação, eles devem fazer fila em frente à porta da diretoria. Todos querem ser o primeiro, claro! Suponha que os meninos se chamem André, Benito, Carlos e Daniel (vamos chamá-los de A, B, C e D). Queremos escrever todas as ordens possíveis nas quais eles podem ser alinhados. Por exemplo: para a ordem A B C D, A será o primeiro, B o segundo, C o terceiro, e D o quarto e escreveremos ABCD. Quantas formas diferentes existem no total?

PS. 1: escrita de todas as ordens possíveis nas quais os alunos podem ser alinhados.

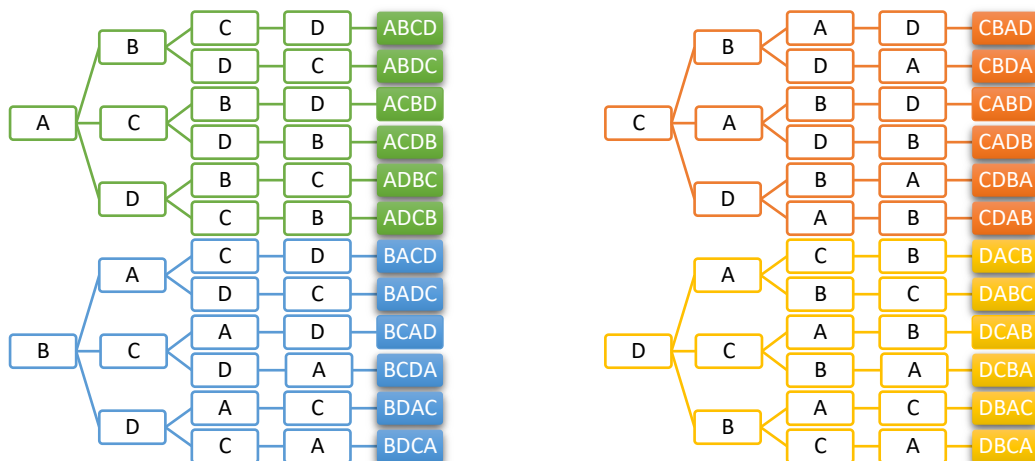
PS. 2: formação de filas de 4 elementos distintos.

- Representações simbólicas

- Listagem (sistemática)/ Figural



- Diagrama de árvores/ Árvore de possibilidades



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ formas}$$

Fórmula

$$P_4 = 4! = 24 \text{ formas}$$

- Problema de partição

- *Um grupo de quatro amigas atrizes, Andrea, Bernadete, Cláudia, Daniela e Ellen decidiram encenar uma peça e devem dividir entre si os papéis das 4 personagens. Cada uma delas ficará com um único papel. De quantos modos distintos a divisão desses papéis poderá ser feita?*

PS. 1: divisão de papéis das 4 personagens entre 4 atrizes.

PS. 2: formação do elenco de uma peça em que cada atriz desempenha um único papel.

- Representações simbólicas

- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$P_5 = 5! = 120 \text{ maneiras}$$

Permutação com elementos repetidos (PR)

- **Invariantes operatórios:**

- **PR.1** – Todos os elementos serão usados, porém ao menos um será usado mais de uma vez.
- **PR.2** – A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
- **PR.3** – A troca de posição de elementos repetidos não gera novas possibilidades.
-

- **Situações e representações simbólicas**

- Problema de seleção

- *Numa caixa há quatro fichas coloridas: duas azuis, uma branca e uma vermelha. Uma ficha é sorteada aleatoriamente e sua cor é anotada. Sem devolver a ficha à caixa, uma segunda é retirada e sua cor é anotada. Isso continua até que todas as quatro fichas tenham sido selecionadas uma após a outra. De quantas maneiras diferentes as fichas podem ser selecionadas?*

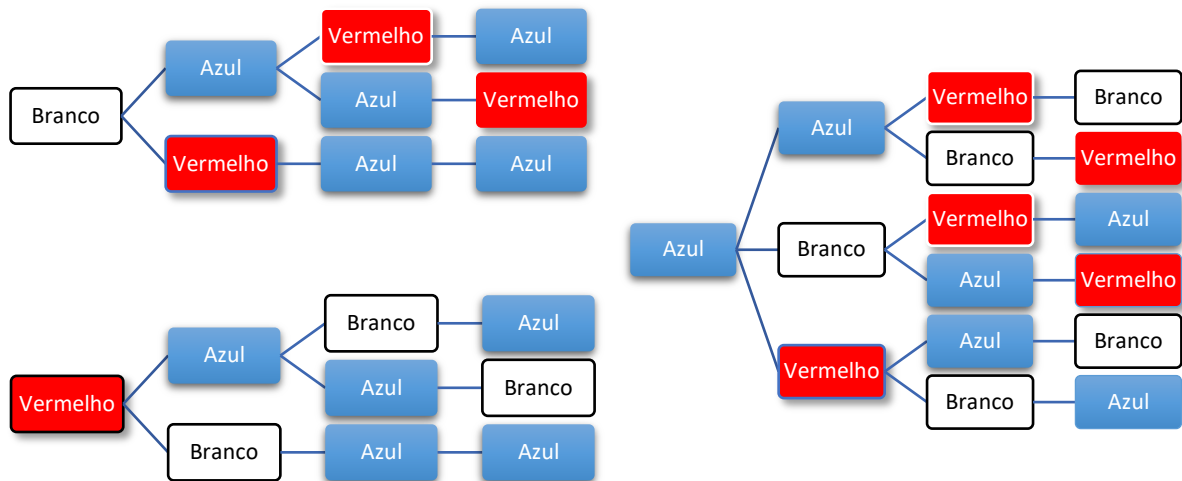
PR.1: são retiradas todas as fichas coloridas contidas em uma caixa.

PR.2: formação de sequências de cores

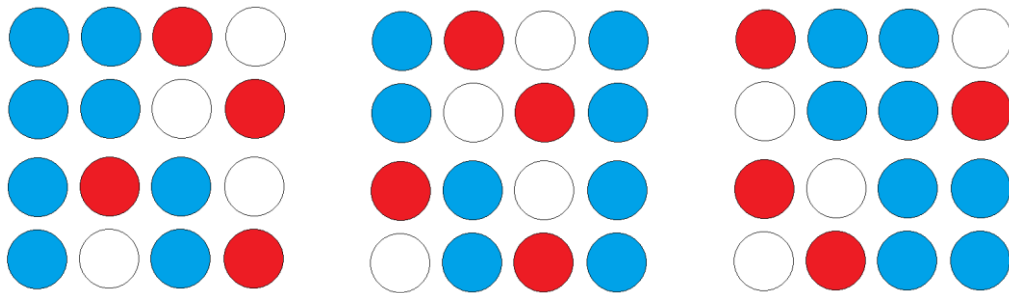
PR.3: repetição da cor azul

- Representações simbólicas

- Diagrama de árvores/ Árvore de possibilidades



- Listagem (sistemática)/ Figural



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12 \text{ maneiras}$$

- Problema de distribuição

- Temos cinco cartas, cada uma delas tem uma letra gravada: A, B, C, C e C. De quantas maneiras diferentes as cinco cartas podem ser colocadas na mesa, uma ao lado da outra para formar uma fileira?

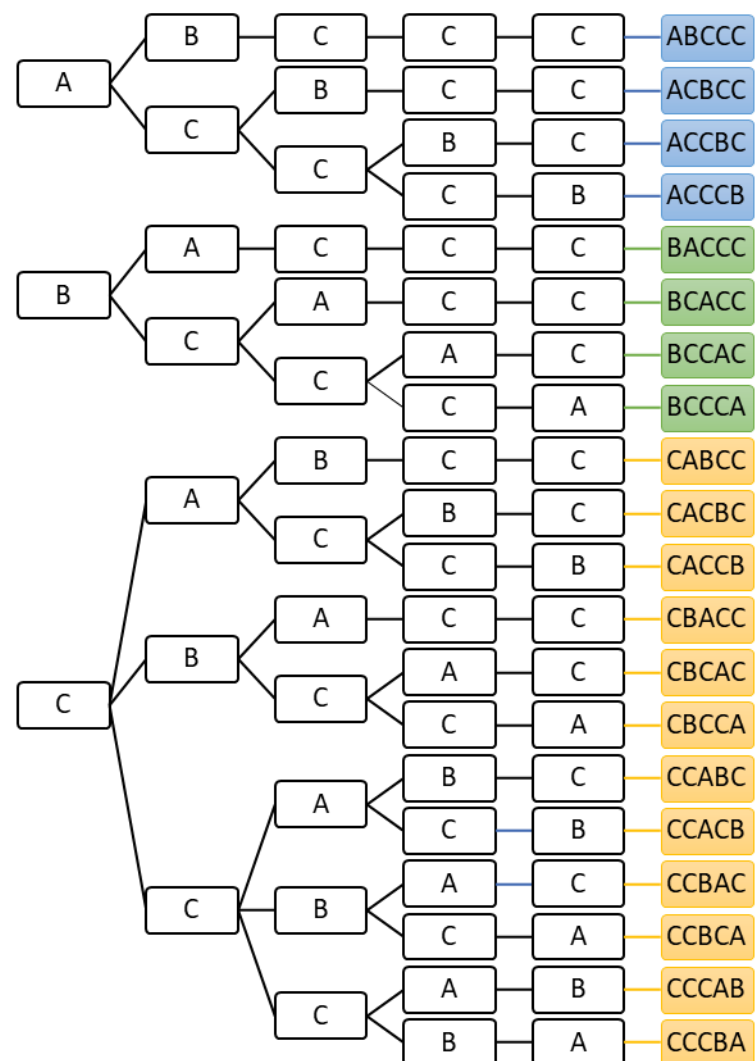
PR.1: distribuição de cartas contendo, cada uma, uma letra gravada.

PR.2: formação de filas de cartas

PR.3: repetição da letra C

- Representações simbólicas

- Diagrama de árvores/ Árvore de possibilidades



○ Listagem (sistemática)/ Figural

A	B	C	C	C	C	A	B	C	C	C	C	A	C	B
A	C	B	C	C	C	A	C	B	C	C	C	C	A	B
A	C	C	B	C	C	A	C	C	B					
A	C	C	C	B	C	C	A	B	C					
B	A	C	C	C	C	B	A	C	C	C	C	B	C	A
B	C	A	C	C	C	B	C	A	C	C	C	C	B	A
B	C	C	A	C	C	B	C	C	A					
B	C	C	C	A	C	C	B	A	C					

○ Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!} = 20 \text{ maneiras}$$

○ Problema de partição

- *Um grupo de quatro amigos, André, Beatriz, Clara e Daniel, tem que fazer dois trabalhos diferentes: um de Matemática e outro de Geografia. Para isso, decidem se dividir em dois grupos de dois estudantes cada. De quantas maneiras eles podem ser divididos para fazer os trabalhos?*

PR.2: formação de 2 grupos contendo 2 estudantes cada.

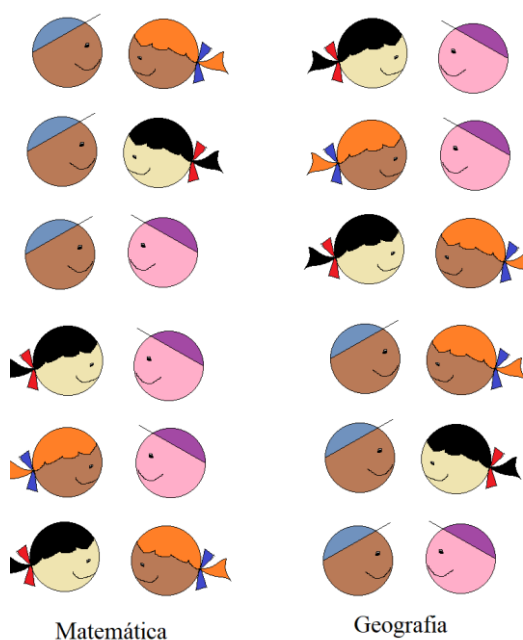
PR.3: a ordem dos estudantes nos grupos não tem relevância.

- Representações simbólicas

- Tabular/ Listagem

	Matemática		Geografia	
1	A	B	C	D
2	A	C	B	D
3	A	D	C	B
4	C	D	A	B
5	C	B	A	D
6	B	D	A	D

- Listagem (sistemática)/ Figural



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ maneiras}$$

Arranjo Simples (AS)

- **Invariantes Operatórios**

- **AS.1** – dados n elementos formar, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$ com p e n números naturais.
- **AS.2** – A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

- **Situações e representações simbólicas**

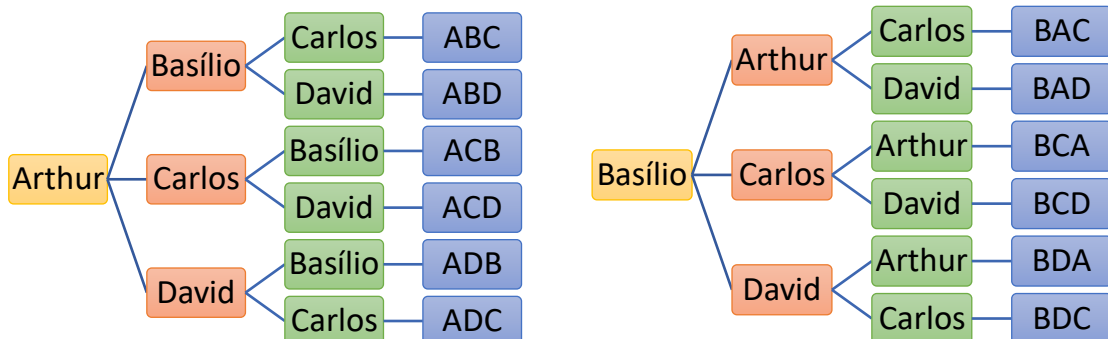
- Problema de seleção
 - *Deseja-se eleger uma comissão composta por três membros: presidente, tesoureiro e secretário. Temos quatro candidatos para essa eleição: Artur, Basílio, Carlos e David. Quantas comissões diferentes podem ser escolhidas entre os quatro candidatos?*

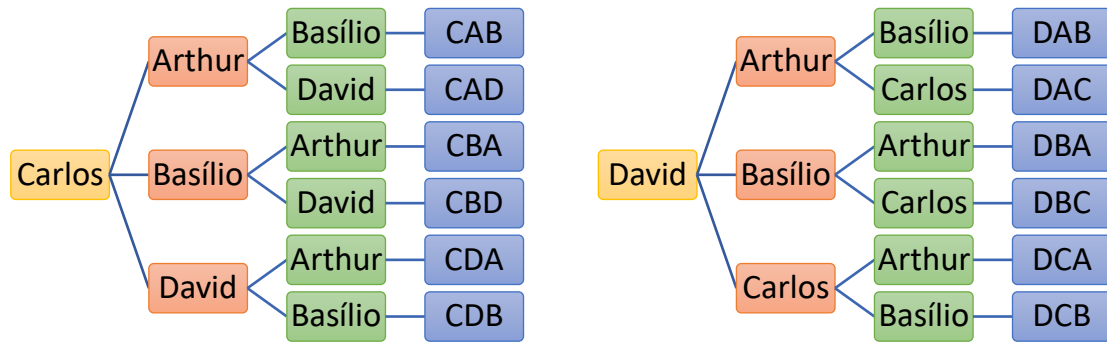
AS.1: escolha de 3 alunos dentre quatro para ocuparem cargos em uma comissão.

AS.2: a troca de cargos em uma mesma comissão gera comissões diferentes.

- Representações simbólicas

- Diagrama de árvores/ Árvore de possibilidades





- Simbólico

Princípio Multiplicativo

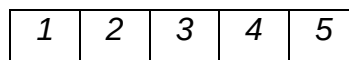
$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ comissões}$$

Fórmula

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24 \text{ comissões}$$

- Problema de distribuição

- *A garagem de Ângela tem cinco vagas. Como a casa é nova, até agora são apenas três carros; o de Ângela, Beatriz e Carmem que podem colocar o carro todos os dias no lugar que preferirem, se não estiver cheio. Este é o esquema da garagem:*



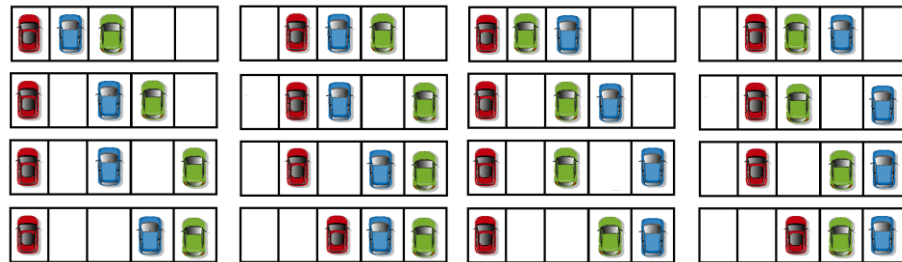
De quantas maneiras possíveis Ângela, Beatriz e Carmem podem estacionar seus carros na garagem?

AS.1: colocação de carros em vagas diferentes, tendo mais vagas do que carros.

AS.2: a troca de vagas configura modos diferentes de estacionar os carros.

- Representações simbólicas

- Listagem (sistemática)/ Figural (algumas configurações possíveis)



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \text{ maneiras}$$

- Problema de partição

- *Seu Joaquim decidiu repartir cinco frutas diferentes, morango, maçã, pera, uva e framboesa, entre seus três netos: Maria, Heitor e Guilherme. Cada um deverá ficar com um único sabor. De quantas maneiras diferentes seu Joaquim poderá fazer essa divisão?*

AS.1: decisão do avô em repartir 5 frutas diferentes entre os 3 netos

AS.2: a troca das frutas entre os netos gera configurações diferentes.

- Representações simbólicas

- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \text{ maneiras}$$

Arranjo com elementos repetidos (AR)

- **Invariantes operatórios**

- **AR.1** – Dados n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$ com p e n números naturais
- **AR.2** – É possível agrupamentos com elementos repetidos
- **AR.3** – A ordem dos elementos gera novas possibilidades

- **Situações e representações simbólicas**

- Problema de seleção
 - *Em uma urna há quatro bolas numeradas com os algarismos 2, 4, 7 e 9. Escolhemos uma bola da urna e anotamos o seu número. A bola extraída é reintroduzida na urna. Uma segunda bola é escolhida e seu número é anotado. A bola sacada é reintroduzida na urna. Finalmente, uma terceira bola é escolhida e seu número é anotado. Quantos números de três algarismos podemos obter?*

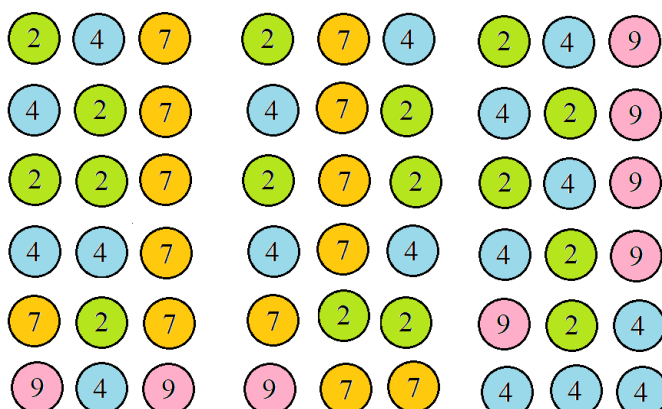
AR.1: sorteio de 3 bolas numeradas dentre 4 que se encontram em uma urna. A bola sorteada é recolocada na urna.

AR.2: formação de números de três algarismos, podendo haver repetição de algarismos.

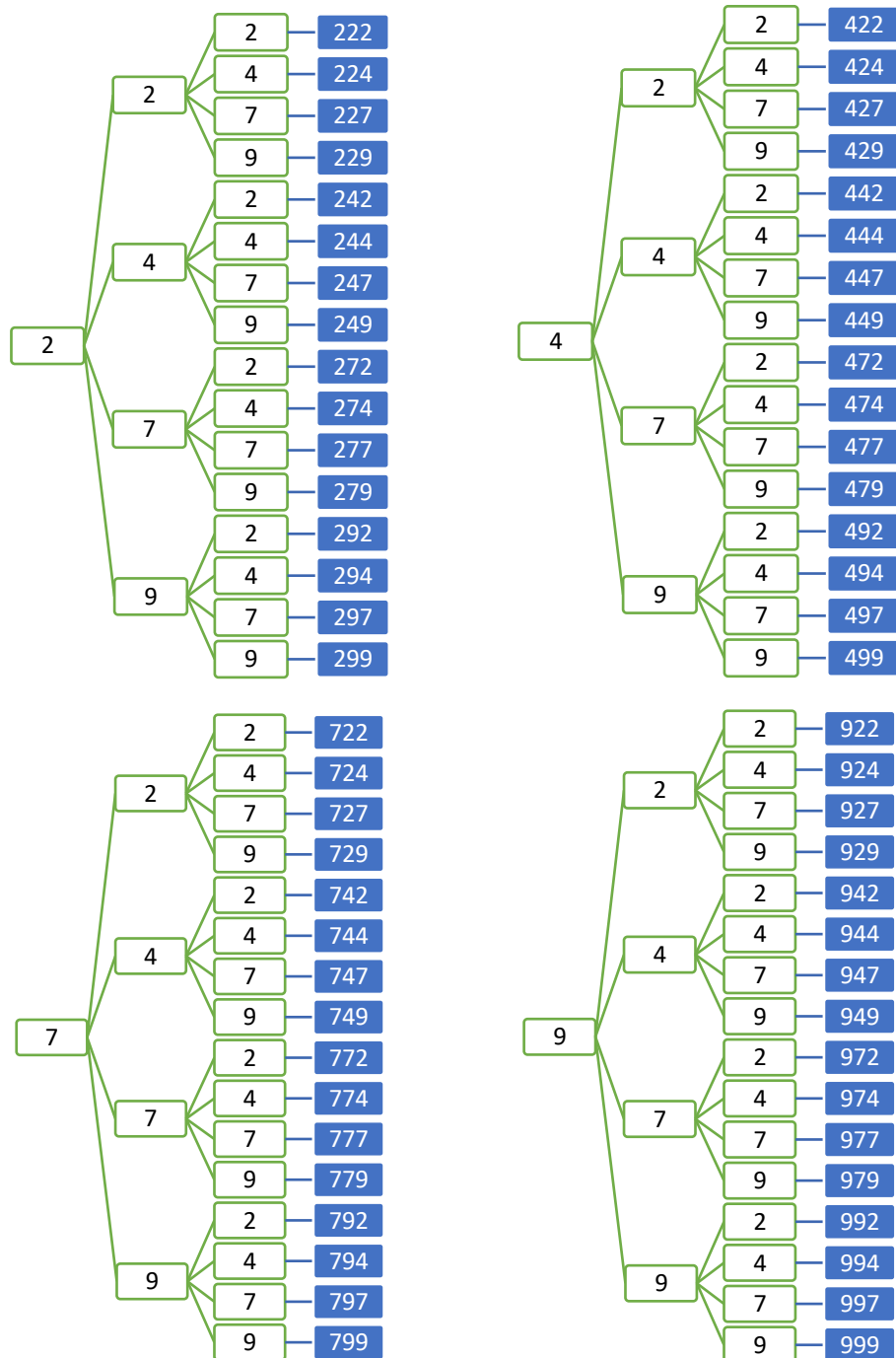
AR.3: a ordem dos algarismos no numeral é relevante.

- Representações simbólicas

- Listagem (não sistemática)/ Figural (algumas configurações possíveis)



- Diagrama de árvores/ Árvore de possibilidades



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ números}$$

Fórmula

$$(AR)_{4,3} = 4^3 = 64 \text{ números}$$

- Problema de distribuição

- *Quatro irmãos, Alícia, Berta, Carlos e Diana, vão passar a noite na casa da avó. Essa tem dois quartos distintos (sala e sótão) onde pode colocar as crianças a dormir. De quantas maneiras diferentes a vovó pode acomodar as quatro crianças nos dois quartos? (Pode haver algum quarto vazio).*

AR.1: acomodação de 4 crianças em 2 quartos distintos.

AR.2: a repetição acontece, pois, um mesmo quarto pode acomodar mais de uma criança ou, até mesmo, não acomodar nenhuma.

AR.3: acomodar Alícia na sala e dos demais no sótão não é o mesmo que acomodá-la no sótão e os demais na sala. Logo a ordem é relevante.

- Representações simbólicas

- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$(AR)_{4,3} = 4^3 = 64 \text{ maneiras}$$

- Problema de partição

- *Um menino tem quatro carrinhos de brinquedo de cores diferentes (azul, branco, verde e vermelho) e decide dá-los aos seus irmãos Fernando, Luís e Teresa. De quantas maneiras diferentes ele pode dar os carrinhos aos seus irmãos?*

AR.1: Partilha de 4 carrinhos de brinquedo com 3 irmãos.

AR.2: A repetição acontece, pois, um irmão pode receber mais de um carrinho ou, até mesmo, receber todos eles.

AR.3: Como os carrinhos são de cores diferentes, receber dois carrinhos sendo um deles azul e outro branco não é o

mesmo que receber um carrinho verde e outro vermelho.
Logo a ordem é relevante.

- Representações simbólicas
 - Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \text{ maneiras}$$

Fórmula

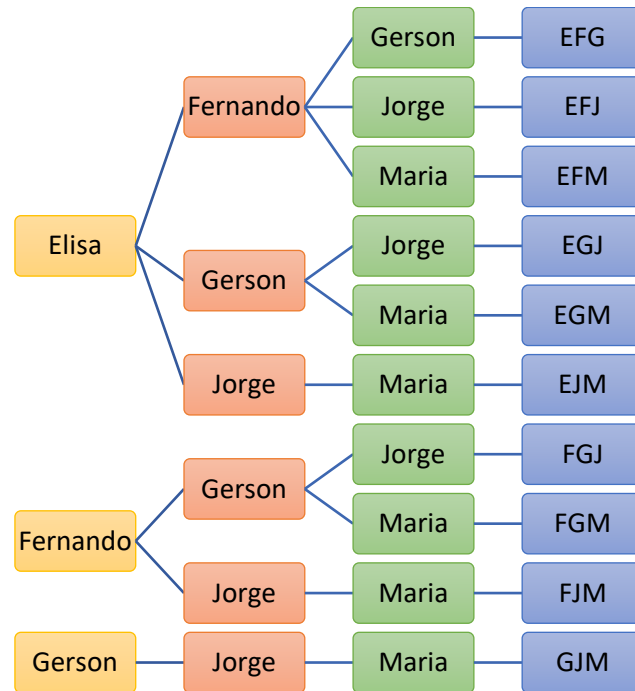
$$(AR)_{3,4} = 3^4 = 81 \text{ maneiras}$$

Combinação Simples (CS)

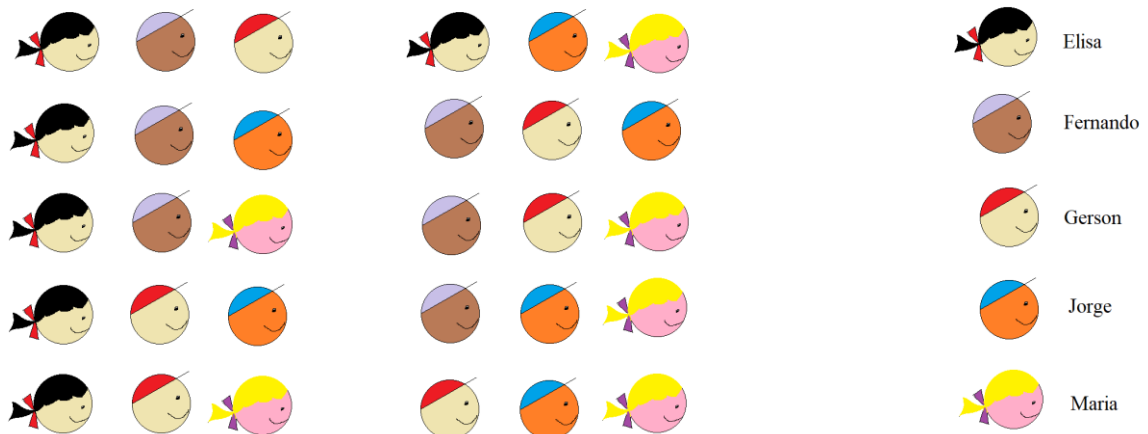
- **Invariantes Operatórios**
 - **CS.1** – Dados n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$ com p e n naturais
 - **CS.2** – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades
 - **Situações e representações simbólicas**
 - Problema de seleção
 - *Um professor deve escolher três alunos para apagar a lousa. Para isso conta com cinco voluntários: Elisa, Fernando, Gerson, Jorge e Maria. De quantas maneiras ele poderá escolher três desses alunos?*
- CS.1:** escolha de 3 alunos dentre 5 voluntários
CS.2: formação de grupos de alunos.

- Representações simbólicas

- Diagrama de árvore/ Árvore de possibilidades



- Listagem (sistemática)/ Figural



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10 \text{ maneiras}$$

- Problema de distribuição

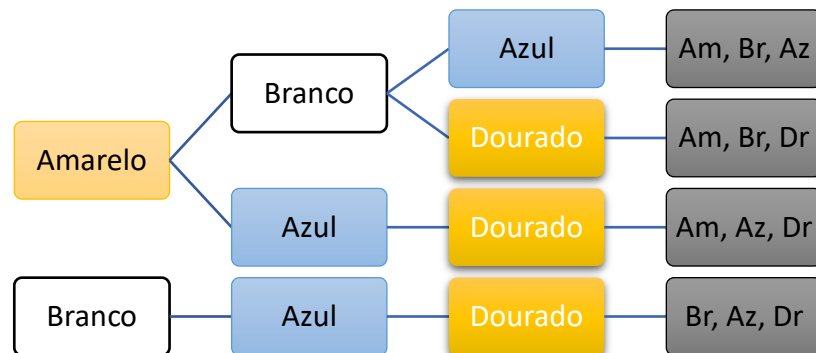
- *Dispõe-se de três cartas idênticas. Queremos colocá-las em quatro envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, azul e dourado. Se cada envelope só puder conter, no máximo, uma carta, de quantas maneiras podemos dispô-las nos quatro envelopes diferentes?*

CS.1: Colocação de cartas identificas em envelopes de cores diferentes, formando grupos de envelopes de cores diferentes.

CS.2: A distinção dos agrupamentos se dá somente por cores diferentes, ou seja, a ordem não tem relevância visto que são cartas idênticas.

- Representações simbólicas

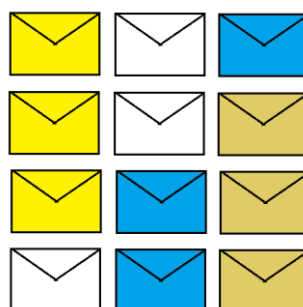
- Diagrama de árvores/ Árvore de possibilidades



- Listagem (sistemática)

(Am, Br, Az): (Am, Br, Dr); (Am, Az, Dr); (Br, Az, Dr)

- Figural



- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 4 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \text{ maneiras}$$

- Problema de partição

- *Ana e Janaína têm quatro adesivos numerados de 1 a 4. Elas decidem compartilhá-los entre as duas (dois adesivos para cada uma). De quantas maneiras os adesivos poderão ser repartidos entre elas?*

CS.1: partilha de adesivos numerados

CS.2: os grupos de dois adesivos serão distinguíveis somente pela numeração neles contidos e não pela ordem em que foram distribuídos.

- Representações simbólicas

- Listagem (sistemática)

(A1 A2, J3 J4), (A1 A3, J2 J4), (A1 A4, J2 J3),
(A2 A3, J1 J4), (A2 A4, J1 J3), (A3 A4, J1 J2)

- Figural

1	2	3	4
1	3	2	4
1	4	2	3
2	3	1	4
2	4	1	3
3	4	1	2

- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ maneiras}$$

Fórmula

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \text{ maneiras}$$

Combinação com elementos repetidos (CR)

- **Invariantes Operatórios**

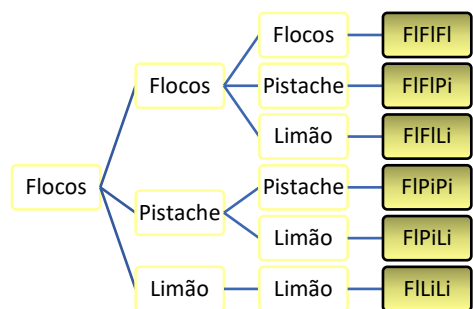
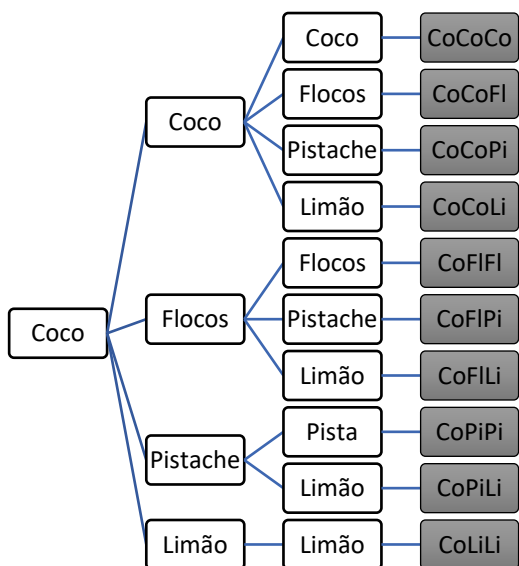
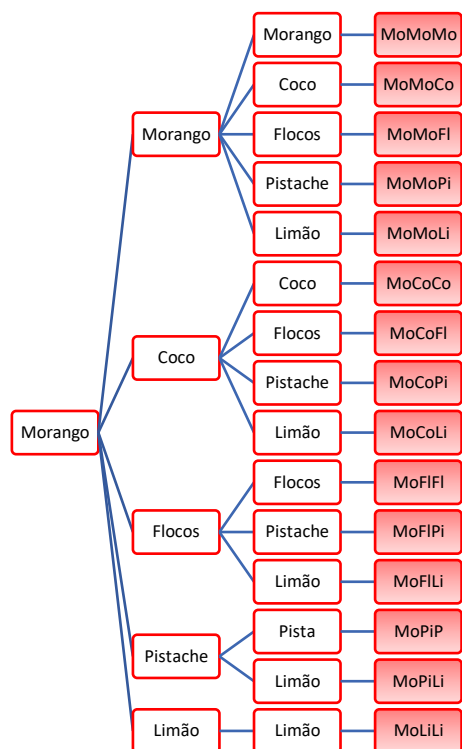
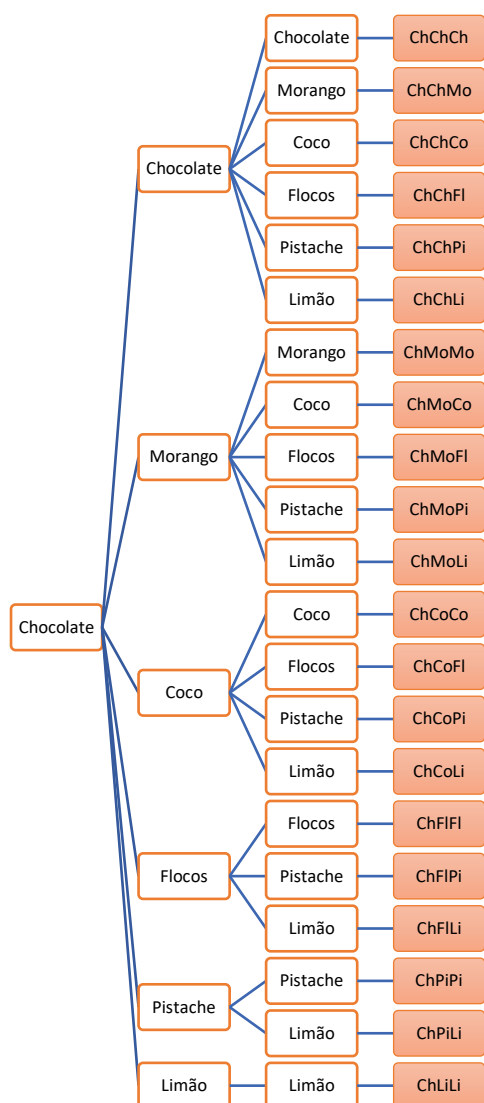
- **CR.1** – Dados n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$ com p e n naturais
- **CR.2** – É possível agrupamentos com elementos repetidos.
- **CR.3** – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

- **Situações e representações simbólicas**

- Problema de seleção
 - *João foi a uma sorveteria que oferece sorvetes em sete sabores diferentes: chocolate, morango, coco, flocos, pistache e limão. João deseja comprar 3 sorvetes de sabores diferentes ou não. De quantos modos possíveis João poderá fazer essa compra?*
 - CR.1:** compra de 3 sorvetes tendo 6 sabores disponíveis.
 - CR.2:** os sabores podem ser iguais ou diferentes
 - CR.3:** a ordem com que esses sorvetes são comprados não interfere no modo como João pode comprá-los.

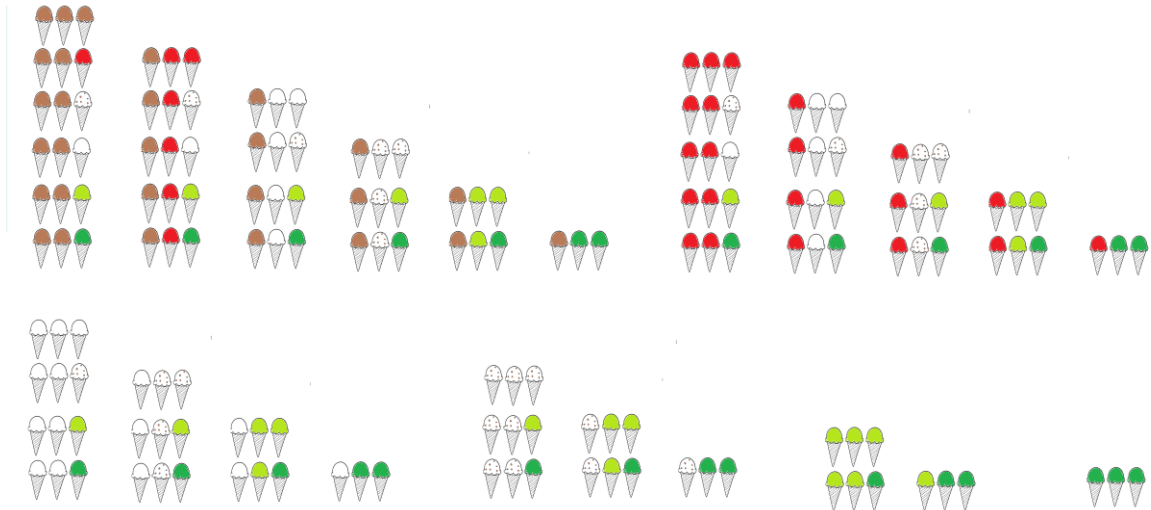
- Representações simbólicas

- Diagrama de árvore/ Árvore de possibilidades





○ Listagem (sistemática)/ Figural



○ Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ modos}$$

Fórmula

$$(CR)_{6,3} = \frac{(6 + 3 - 1)!}{3! (6 - 1)!} = 56 \text{ modos}$$

○ Problema de distribuição

- No Dia da Árvore, o professor Heitor resolveu incentivar a plantação de mudas nas casas de seus alunos. Havia 3 opções de mudas: ipê, cajá-manga e aroeira. O professor distribuiu 4 mudas para cada um de seus alunos. De quantas maneiras o professor Heitor poderia distribuir as mudas a cada um de seus alunos?

CR.1: distribuição de mudas de árvores a estudantes.

CR.2: formação de grupos com elementos repetidos.

CR.3: a ordem da distribuição não implica na formação de novos grupos.

- Representações simbólicas

- Simbólico

Princípio Multiplicativo

$$\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ modos}$$

Fórmula

$$(CR)_{4,3} = \frac{(4 + 3 - 1)!}{3! (4 - 1)!} = 20 \text{ modos}$$

- Problema de partição

- *Dispõe-se de 4 notas de 5 reais e 4 notas de 10 reais e se deseja dividir as 8 notas em dois grupos com três notas cada. De quantos modos essa divisão poderá ser feita?*

CR.1: divisão de cédulas em 2 grupos com três notas

CR.2: haverá cédulas repetidas nos grupos

CR.3: a ordem em que as cédulas estão dispostas não implica na formação de novos grupos.

- Representações simbólicas

- Listagem (sistemática)

(5, 5, 5)	(10,10, 10)
(5, 5, 5)	(5, 10, 10)
(5, 5, 10)	(5, 5, 10)
(5, 5, 10)	(5, 10, 10)
(5, 10, 10)	(5, 10, 10)
(5, 5, 10)	(10, 10, 10)

6 modos

4.2.3 Considerações sobre a proposta de organização de problemas combinatórios

Na organização de problemas combinatórios que propomos é importante observar a diversidade de representações de uma mesma situação. Embora, em alguns casos, o uso do diagrama de árvores, da listagem sistemática e da representação figural seja dispendioso, essas representações têm o potencial de levar o sujeito – no caso o estudante – a desenvolver estratégias de contagem, conforme apontam Fischbein (1970), English (1992, 1993, 2017), Navarro-Pelayo (1996) e Pessoa e Borba (2010). Por essa razão, em algumas das representações que apresentamos, optamos por enumerar todos os resultados possíveis na proposta de solução.

Também vale ressaltar que registramos algumas das possíveis representações sem, contudo, esgotá-las, visto que “a interação entre situações e esquemas é a fonte primária das representações simbólicas e estas constituem o significante de um conceito” (MOREIRA, 2002, p. 17). Em outras palavras, as representações simbólicas guardam estreita relação com os esquemas que conduzem o sujeito quando se encontra em ação.

Com base na proposta de organização de situações combinatórias procuramos analisar aquelas presentes nos recursos curriculares (materiais didáticos) do programa *Currículo em Ação*. Tal análise se segue no próximo capítulo.

5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS REFERENTES AOS RECURSOS FÍSICO E DIGITAL DO PROGRAMA *CURRÍCULO EM AÇÃO*

Neste capítulo serão apresentados os dados e as análises feitas nos recursos físico e digital disponibilizados pela SEDUC-SP aos professores, como recursos curriculares para o ensino de matemática, mas especificamente de combinatória.

Como já pontuado, o referencial para as análises é a noção de invariantes operatórios que, juntamente com as situações e representações simbólicas constituem o que por Vergnaud (1996) entende por conceito.

Buscamos, então:

- identificar as classes de situações, os invariantes operatórios e as representações simbólicas pertencentes à combinatória nos recursos didáticos físico e digital disponibilizados a professores e estudantes;
- identificar classes de situações profissionais ligadas ao ensino de combinatória e possíveis invariantes operatórios nos quais essas classes se assentam.

Inicialmente é feita uma breve introdução para apresentar a organização didática do ensino de combinatória nesses dois recursos: o físico e o digital. Em seguida, cada um deles é analisado separadamente com foco nos objetivos traçados.

5.1 Organização didática⁴³ para o ensino de combinatória nos recursos físico e digital de apoio do programa *Currículo em Ação*.

Assim como na proposta curricular anterior (SÃO PAULO, 2008), a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo – SEDUC-SP – elaborou por meio da Coordenadoria Pedagógica (COPED)⁴⁴ e disponibilizou para a rede estadual de ensino materiais didáticos⁴⁵ com atividades a serem desenvolvidas durante as aulas. Desse modo, a cada bimestre até o final do primeiro semestre de 2023, professores e alunos receberam os *cadernos* na forma de apostilas que continham tais atividades. Neles, o objeto de ensino foi dividido em unidades temáticas a serem trabalhadas, bimestre a bimestre, nas chamadas *Situações de Aprendizagem*. Essas

⁴³ Na Teoria Antropológica do Didático, Chevallard entende por organização didática como a maneira com que se pode construir uma realidade matemática em sala de aula. A essa construção, o autor denominou organização matemática (Cf. AIMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Ed. UFPR. 2007)

⁴⁴ <http://www.educacao.sp.gov.br/copeda-coordenadoria-pedagogica/>. Acesso em 20 de julho de 2022.

⁴⁵ Disponível em <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>. Acesso em 20 de julho de 2022.

situações são numeradas de acordo com a ordem dos temas a serem abordados naquele bimestre. Cada uma delas é desenvolvida em quatro momentos distintos:

- Momento 1 – Retomando Conceitos
- Momento 2 – Aprimorando Conhecimentos
- Momento 3 – Aprofundando Conhecimentos
- Momento 4 – Verificando o que você aprendeu

O caderno destinado ao professor (*caderno do professor*) se diferencia do voltado para o aluno (*caderno do estudante*) por trazer as mesmas situações acrescidas de instruções e sugestões de ordem didático-pedagógicas para que o professor possa organizar e desenvolver suas aulas. Essas orientações encontram-se nesse material na forma de rubricas, em azul. A Figura 4 ilustra as que apresentam os princípios que justificam sua organização, bem como as ações sugeridas ao professor no trabalho com a *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório*. Nessa rubrica são citadas as habilidades combinatórias do 5º e do 8º anos que constam no CPEM tomadas como ponto de partida na avaliação de conhecimentos prévios dos estudantes.

Figura 4 – Rubrica (em azul) com as orientações para a *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório*

MATEMÁTICA 35

MOMENTO 1 – RETOMANDO CONCEITOS

ATIVIDADE 1 – INTRODUÇÃO AO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Professor, iniciaremos o levantamento do conhecimento prévio dos estudantes nas habilidades:

- EF05MA09 – Resolver e elaborar situações-problema simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas;
- EF08MA03 – Resolver e elaborar situações-problema de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo;
- EF08MA22 – Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Observamos que os problemas de contagem, de maneira geral, analisam padrões, estruturas e relações discretas. É importante o papel do professor para que, de forma significativa, os estudantes compreendam as situações. Sendo assim, é importante o professor proporcionar um momento de retomada das aprendizagens anteriores. Para isso, questione os estudantes sobre o que se recordam dos princípios multiplicativo e aditivo. Caso os estudantes não estejam apropriados da nomenclatura, sugerimos que se apresente uma questão disparadora que instigue os estudantes quanto às diferentes maneiras em que um evento pode ocorrer. Vejamos alguns exemplos:

Orientações didáticas expressas em rubricas, como as que se encontram na Figura 4, são encontradas em muitos livros didáticos e materiais apostilados de sistemas de ensino, sejam eles público ou privado. O que se nota, nesse caso, é a maneira como são sugeridas as ações do professor no trabalho com esse material, que se assemelha a um *script* que pontua passo a passo, como é ilustrado a seguir.

[...] **questione** os estudantes sobre o que se recordam dos princípios multiplicativo e aditivo. Caso os estudantes não estejam apropriados da nomenclatura, sugerimos que se **apresente** uma *questão disparadora* que instigue os estudantes quanto às diferentes maneiras em que um evento pode ocorrer. (SÃO PAULO, 2022a, p. 35, *grifo nosso*)

Nesse contexto, a combinatória de modo geral, como objeto de ensino e de aprendizagem na etapa do ensino médio (tida no caderno do professor como *objetos de conhecimento*), encontra-se no eixo temático *probabilidade e estatística*, atrelada à *competência específica 3* e prevista para o 3º. bimestre do 2º. ano desse nível de ensino. O Quadro 12 apresenta um resumo dessas informações que destaca ainda, a *habilidade* associada ao saber combinatória.

Quadro 12 – Competência específica, habilidade, unidade temática e objeto de conhecimento relacionados ao saber *combinatória*

Competência Específica 3	Habilidade	Unidades Temática	Objetos de Conhecimento
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvores.	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	• Princípio multiplicativo e princípio aditivo. • Modelos para contagem de dados: diagrama de árvore, lista, esquemas, desenhos. • Noções de combinatória: agrupamentos ordenáveis (arranjos) e não ordenáveis (combinações).

Adaptado de SEDUC-SP, 2020, p. 120, 123, 125, 126

Esses elementos também se encontram no caderno do professor que, além desses, apresenta um quinto item: os *pressupostos metodológicos*. Embora se possa pensar, de início, nesses pressupostos em uma perspectiva de pesquisa por serem metodológicos, eles estão mais próximos dos objetivos específicos das aulas, ou seja, daquilo que se espera que os alunos atinjam, como ilustra o Quadro 13. Dentre esses objetivos está o uso dos princípios multiplicativo e aditivo para a contagem em situações em que a ordem é relevante ou não. Esse pressuposto nos

leva a supor que também em situações de arranjo e combinação esses dois princípios serão usados prioritariamente. Aliás, não há menção aqui quanto ao uso de fórmulas na resolução dos problemas combinatórios propostos.

Quadro 13 – Pressupostos metodológicos para o ensino de combinatória

Pressupostos metodológicos	
	• Usar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo para a contagem em situações em que a ordem dos elementos é relevante (arranjos) e, em outras, sem esta condição (combinações);
	• Diferenciar, entre diversas situações cotidianas, aquelas em que a ordem dos elementos de um agrupamento influencia seu contexto de outras em que isso não ocorre;
	• Criar situações-problema envolvendo agrupamentos de objetos nas quais a ordem de seus elementos influencia a contagem de outras em que isso não ocorre;
	• Resolver situações envolvendo contagem, como aquelas relacionadas a senhas ou jogos, apresentadas por textos verbais, tabelas ou gráficos;
	• Elaborar situações de investigação de contagem, como a quantidade das formas de organização de grupos de pessoas, objetos, números etc.

SÃO PAULO, 2022a, p. 34

Tanto no caderno do estudante quanto no do professor, a **combinatória** é abordada na *Situação de Aprendizagem 2 – O Princípio Fundamental da Contagem*, tendo como ponto de partida atividades propostas nos quatro momentos citados anteriormente, conforme é apresentado no Quadro 14.

Quadro 14 – Momentos e atividades da *Situação de Aprendizagem 2 – O Princípio Fundamental da Contagem*

Ordem	Momento	Atividade
1	Retomando Conceitos	Introdução ao Raciocínio Combinatório
2	Aprimorando Conhecimentos	Os Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem
3	Aprofundando Conhecimentos	Aprimorando a Fluência de Elaboração de Problemas
4	Verificando o que você aprendeu	#Mão na Massa

Adaptado de SÃO PAULO, 2022a

Para atender aos objetivos traçados para essa etapa da investigação, elegemos, como unidade de contexto, as rubricas que estão presentes no caderno do professor. Por meio delas são apresentados:

1. os princípios que justificam a organização do material da maneira como se encontra;
2. as orientações/sugestões sobre as ações do professor na condução das aulas de combinatória, à luz desse material;
3. as resoluções dos problemas de contagem mostrando como eles devem ser trabalhados nas aulas;
4. as expectativas de aprendizagem de combinatória no ensino médio.

As orientações presentes no caderno do professor por meio de rubricas não foram encontradas no material digital disponibilizado a professores e alunos a partir

do 2º. semestre de 2023. Esse material de acesso restrito a professores e estudantes, é constituído por uma série de apresentações em *slides*, cada um correspondente a uma aula para um determinado tema. A Figura 5 apresenta o *slide* de abertura da aula sobre o *Princípio fundamental da contagem*.

Figura 5 – *Slide* inicial da aula sobre o Princípio fundamental da contagem – Parte I



Fonte: Professora Maria Clara

Ao analisar os *slides* referentes à combinatória, observa-se que cada aula se encontra estruturada em seções do seguinte modo:

1. **Conteúdo e Objetivos:** apresenta o conteúdo a ser trabalhado e objetivos estabelecidos para a aula;
2. **Para Começar:** introduz, em geral, o tema da aula por meio de um problema cuja solução é apresentada e comentada;
3. **Foco no conteúdo:** apresenta as definições e fórmulas que estão sendo trabalhados;
4. **Na prática:** traz problemas e suas respectivas resoluções comentadas;
5. **Aplicando:** traz outros problemas e suas respectivas resoluções comentadas;
6. **O que aprendemos hoje?** fornece um resumo do que foi estudado na aula.
7. **Tarefa SP:** informa o código localizador das tarefas que os estudantes devem fazer *on-line*, com orientações ao professor sobre como acessá-las.
8. **Referências:** referências bibliográficas.

Em duas das apresentações de que tivemos acesso, logo após a seção *Referências*, havia *slides* adicionais para as chamadas *Aulas Khan*, contendo orientações de acesso e configuração da plataforma *Khan Academy*.

No contexto desse material digital, são dedicadas 11 apresentações – e por conseguinte 11 aulas – ao tema combinatória, divididas em: Princípio Fundamental da Contagem I e II (aulas 5 e 6); Permutação I e II (aulas 7 e 8); Arranjo I, II e III (aulas 9, 10 e 11); Combinação I, II e III (aulas 12, 13 e 14); Princípio Fundamental da Contagem e Probabilidade (aula 24).

Em uma análise preliminar, nota-se certa proximidade entre divisão proposta no material com a maneira como tradicionalmente a combinatória é tratada em livros do ensino médio. Também a estrutura de cada aula parece aproximar-se do modelo de aula expositiva em que se faz, inicialmente, a introdução do tema seguida de definições e fórmulas, exemplos e exercícios de aplicação.

Quanto ao material físico – cadernos do professor e do estudante –, essa primeira análise aponta para uma estrutura um pouco distinta da tradicional. O título empregado nas seções deixa transparecer certa preocupação em levar o aluno, por meio do princípio multiplicativo, a uma fluência, tanto na resolução quanto na elaboração de problemas combinatórios. A classificação usual em problemas de arranjo, permutação e combinação, pelo menos aqui, foi deixado de lado.

A partir dessa primeira leitura, estabelecemos os indicadores que guiam a análise que fizemos, quais sejam, unidades de registro e unidades de contexto. A fim de atender ao primeiro objetivo definido, a identificação das classes de situações, de invariantes operatórios e representações simbólicas ligados à combinatória no material didático, adotamos, como unidade de registro, a questão que se impõe em cada problema combinatório explorado, e como unidade de contexto, o próprio problema em si. Com base nesses dois elementos, buscamos inferir as tarefas combinatórias subjacentes a cada problema, relacionando-as com modelos combinatórios implícito (seleção, distribuição e partição) e com os conceitos combinatórios em jogo (permutação, arranjo e combinação), a fim de caracterizarmos classes de situações e invariantes operatórios. Ademais, foi baseado nessas mesmas unidades de registro e de contexto que foram observadas as estratégias empregadas na resolução e as representações simbólicas associadas.

Quanto ao segundo objetivo – a identificação das classes de situações profissionais e possíveis invariantes operatórios sobre os quais essas classes se assentam – tomamos como unidade de registro as ações sugeridas nas rubricas presentes no caderno do professor e, como unidade de contexto, os *Momentos* (1, 2, 3 e 4) e as *Atividades* (1, 2, 3 e 4) nos quais essas ações são sugeridas. A partir delas procuramos desvelar os objetivos das ações visando a caracterização das classes de situações profissionais em jogo, bem como buscamos inferir os invariantes operatórios sob os quais as situações de ensino se assentam.

Iniciamos, na próxima seção, a análise dos problemas dos recursos físico (caderno do professor) e digital do programa *Currículo em Ação*.

5.2 Introdução à Situação de Aprendizagem 2

As primeiras orientações para o trabalho com a *Situação de Aprendizagem 2* estão focadas no desenvolvimento da competência 3 e da habilidade EM13MAT310⁴⁶, ambas norteadoras do ensino de combinatória, de acordo com a CPED.

A respeito da competência 3, é orientado, para seu desenvolvimento, que o trabalho não esteja focado em prover ao estudante um conjunto de regras a serem aplicadas no enfrentamento das situações propostas, mas em torná-lo capaz de mobilizar conceitos e procedimentos matemáticos na resolução e (também) na elaboração de problemas. Por essa razão, de acordo com o que é orientado na rubrica, embora se reconheça a relevância da classificação das situações em problemas em arranjos, permutações e combinações com vistas a simplificar suas resoluções com a aplicação das fórmulas respectivas, essa não pode ser uma condição imprescindível para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. E acrescenta:

[...] um curso de Matemática que priorize a resolução de problemas como principal metodologia de aprendizado não pode se basear unicamente na classificação das situações em grupos determinados, sob pena de limitar

⁴⁶ Assim como ocorre na BNCC, o Currículo Paulista apresenta as competências e habilidades para a formação geral básica por meio de um código alfanumérico. Nesse código as duas primeiras letras indicam a que etapa da educação básica, os dois números seguintes indicam a série/ano, a segunda sequência de letras indica a área de conhecimento (3 letras) ou o componente curricular (2 letras) e, os três últimos números indicam a competência específica (primeiro dígito) a qual a habilidade específica (dois últimos dígitos) está associada. Assim, a habilidade descrita pelo código EM13MAT310 é a habilidade 10 que está ligada à competência específica 3 (310) da área de Matemática e suas Tecnologias (MAT) a ser desenvolvida em todos os anos (13) do ensino médio (EM).

demais as estratégias de raciocínio que o estudante pode e deve mobilizar ao confrontar-se com uma dificuldade real. (SÃO PAULO, 2022, p. 34)

Sobre a habilidade EM13MAT310 é reiterada a prioridade no desenvolvimento de estratégias de contagem que não se restrinjam ao uso de fórmulas, mas que sejam decorrentes da “construção de um modelo simplificado e explicativo de cada conjunto de dados de modo a ser possível contá-los” (SÃO PAULO, 2022a, p. 33). Para tanto, é tido como importante o aprimoramento das habilidades desenvolvidas ao longo do ensino fundamental, acrescentando o fato de que, a partir de agora, o estudante deve ser capaz de diferenciar situações em que a ordem dos elementos tem relevância no processo de contagem.

Tendo como norte o desenvolvimento das citadas habilidade e competência, entendemos que os recursos preparados para a *Situação de Aprendizagem 2 – Princípio Fundamental da Contagem* (problemas, exemplos, exercícios, definições, vídeos) foram pensados, inseridos e dispostos pelos seus idealizadores – os autores desse material didático – em uma certa organização didática intencional. Do ponto de vista da ADD, esses seriam *recursos-filho*, pois se constituem “o resultado finalizado, pronto para a implementação em aula” (HAMMOUD, 2012, p.46, *tradução nossa*⁴⁷).

Nossa análise começa, então, pela *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório* em que são analisados os problemas e os vídeos trabalhados nessa atividade.

5.3 Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório

5.3.1 Problemas

A atividade a ser desenvolvida no Momento 1 – Retomando Conceitos é denominada *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório*. De acordo com o que está expresso nas rubricas do caderno do professor, essa atividade tem por finalidade sondar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre combinatória nas seguintes habilidades⁴⁸ próprias do 5º. e 8º. anos do ensino fundamental

EF05MA09: Resolver e elaborar situações-problema simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possível ao se combinar cada elemento de uma coleção com

⁴⁷ *le résultat finalisé, à un moment donné, pour une mise en œuvre dans la classe.*

⁴⁸ Semelhante ao ensino médio, as habilidades do ensino fundamental são apresentadas de acordo com o código alfanumérico. Contudo, nesse caso os dois últimos dígitos indicam a posição ocupada pela habilidade na sequência de habilidades de um determinado ano ou de um bloco de anos.

todos os elementos de outra colação, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas;

EF08MA03: Resolver e elaborar situações-problema de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo;

EF08MA22: Calcular a probabilidade de envoltos, com base na construção do espaço amostral utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1. (SÃO PAULO, 2022a, p. 35)

Assim, o papel do professor é tido como importante, pois é ele quem deve proporcionar meios para que as situações propostas sejam compreendidas pelos alunos e para que as aprendizagens anteriores sejam retomadas (SÃO PAULO, 2022a, p. 35). Visando alcançar o objetivo traçado para a atividade, são sugeridas as seguintes ações:

[...] questione os estudantes sobre o que se recordam dos princípios multiplicativo e aditivo. Caso os estudantes não estejam apropriados da nomenclatura, sugerimos que se apresente uma *questão disparadora* que instigue os estudantes quanto às diferentes maneiras em que um evento pode ocorrer. (SÃO PAULO, 2022a, p. 35)

Ao que se percebe, há um pressuposto de que a questão disparadora teria a função de levá-los a retomarem conhecimentos anteriores – nomeadamente os princípios aditivo e multiplicativo – e diferentes maneiras de se resolver problemas de contagem com base em diagramas de árvores, tabelas, desenhos, dentre outros recursos.

Dois problemas são sugeridos como questões disparadoras. O primeiro deles (1.1) trata de diferentes maneiras de se combinar blusas e calças de cores distintas e, o segundo (1.2) da composição de um menu com prato principal, guarnição e sobremesa. Na Figura 6 são apresentados esses dois problemas.

No desenvolvimento da atividade em que os alunos resolvem a questão disparadora é solicitado ao professor que:

Caminhe entre os estudantes e observe as diferentes resoluções. Valorize e selecione algumas resoluções diferentes (esquemas, desenho, tabela, árvore), convide os estudantes para irem à lousa apresentar suas resoluções aos colegas. (SÃO PAULO, 2022a, p. 35)

Figura 6 – Problemas 1.1 e 1.2 da Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório

1.1 Ana foi a uma loja e comprou três blusas (azul, verde e amarela) e duas calças (preta e vermelha). Com as peças de roupas compradas, de quantas formas diferentes Ana pode se vestir com uma blusa e uma calça?

1.2 Com o cardápio ao lado, e com uma sobremesa, que pode ser salada de fruta, sorvete ou barra de chocolate, de quantos modos diferentes uma pessoa pode escolher o Menu e uma sobremesa? Registre em seu caderno seu pensamento e as respostas possíveis.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Fonte: SÃO PAULO (2022b, p. 35)

Dá-se a entender que os alunos (se não todos, pelo menos alguns) serão capazes de chegar à solução por representações simbólicas (diagramas, tabelas, desenhos, ou outros meios). Assumindo que isso se concretize, é aconselhado ao professor que utilize essa diversidade de soluções para discutir outros caminhos para o enfrentamento de problemas de contagem. O próprio material traz resoluções diferenciadas para as duas situações sugeridas como questões disparadores. O problema 1.1 é resolvido construindo todos os agrupamentos por meio de tabela de dupla entrada, com desenhos de blusas e calças nas cores descritas no enunciado, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 7 - Estratégia sugerida para a resolução do problema 1.1



Fonte: SÃO PAULO (2022a., p. 36)

Para o problema 1.2, a solução também é apresentada na forma de tabela em que se tem: na primeira coluna, o prato principal; na segunda coluna, a guarnição; na terceira coluna, a sobremesa; na quarta coluna, o pedido completo, ou seja, todos os agrupamentos possíveis. A Figura 8 apresenta essa tabela cuja organização se assemelha a de uma árvore de possibilidades.

Figura 8 – Estratégia sugerida para a resolução do problema 1.2

Prato principal	Guarnição	Sobremesa	Pedido completo
Risoto	Carne	Sorvete	Risoto com carne e sorvete
		Barra de chocolate	Risoto com carne e barra de chocolate.
		Salada de frutas	Risoto com carne e salada de frutas.
	Frango	Sorvete	Risoto com frango e sorvete.
		Barra de chocolate	Risoto com frango e barra de chocolate.
		Salada de frutas	Risoto com frango e salada de frutas.
	Peixe	Sorvete	Risoto com peixe e sorvete.
		Barra de chocolate	Risoto com peixe e barra de chocolate.
		Salada de frutas	Risoto com peixe e salada de frutas.
Prato principal	Guarnição	Sobremesa	Pedido completo
Lasanha	Carne	Salada de frutas	Lasanha com carne e salada de frutas.
		Sorvete	Lasanha com carne e sorvete.
		Barra de chocolate	Lasanha com carne e barra de chocolate.
	Frango	Salada de frutas	Lasanha com frango e salada de frutas.
		Sorvete	Lasanha com frango e sorvete.

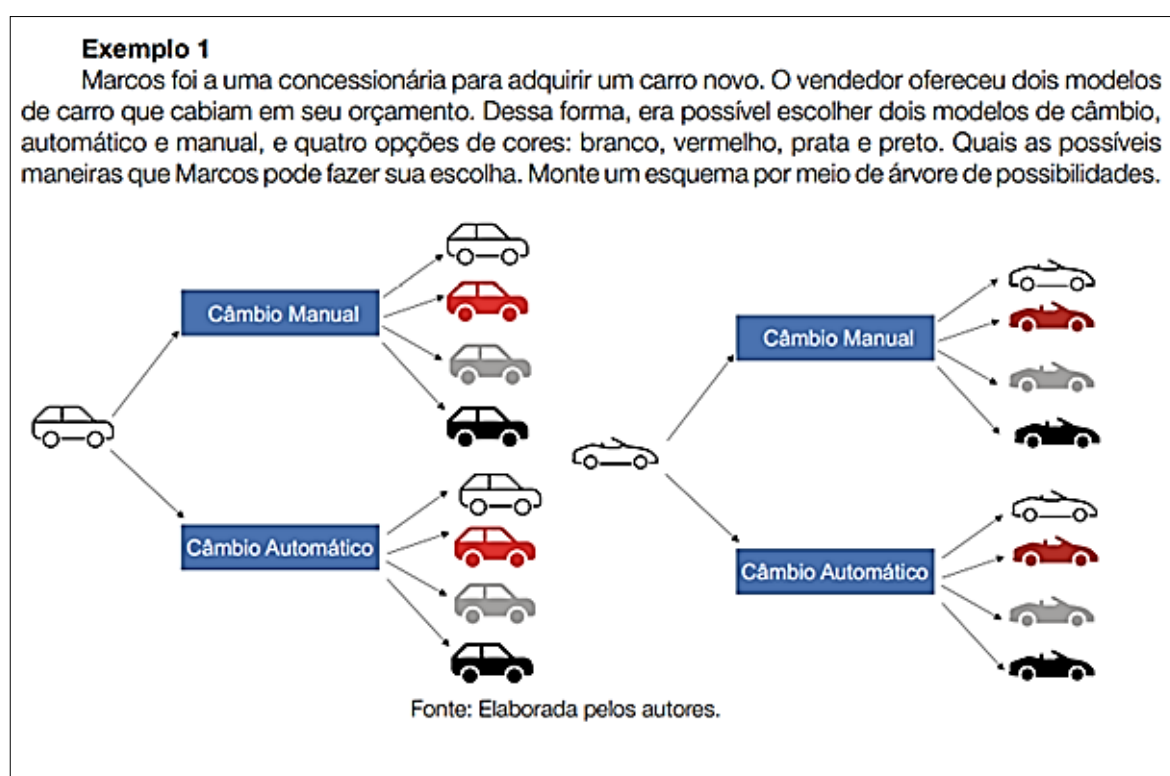
Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 36 e 37)

Ao término dessa etapa, é solicitado ao professor que:

[...] sistematize as resoluções, as palavras-chave e os conceitos que apareceram nas resoluções, frisando que há diferentes maneiras de descobrir as resoluções possíveis de se realizar um determinado *evento* (SÃO PAULO, 2022a, p. 37)

A partir desse ponto, é anunciado ao estudante que serão apresentados “*exemplos de situações que podem ser resolvidas utilizando o princípio fundamental da contagem, [...]*” (SÃO PAULO, 2022a, p. 37, *grifo nosso*). São dados, então, dois exemplos de problemas de contagem resolvidos, cada um deles seguido de dois problemas a serem resolvidos pelos estudantes. O primeiro exemplo traz a solução obtida por meio da árvore de possibilidades, conforme ilustra a Figura 9.

Figura 9 – Exemplo 1 – Aplicação do princípio fundamental da contagem



Fonte: SÃO PAULO (2022b, p. 57)

No problema que se segue (1.3), são apresentadas três letras e é pedido que o estudante escreva todas as permutações possíveis desses três elementos. A solução sugerida é obtida por meio de enumeração sistemática (Figura 10).

Figura 10 – Enunciado do problema 1.3 com a proposta de resolução

1.3 Dadas as letras A, B e C, liste todas as permutações possíveis.
Proposta de resolução:
(A, B, C), (A, C, B), (B, C, A), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A).
Note que existem 6 permutações possíveis para esses 3 elementos.

Fonte: SÃO PAULO (2022a., p. 37)

No segundo exemplo (Figura 11), são apresentados quatro algarismos e são listados todos os 24 números de quatro algarismos a serem formados por eles sem que haja repetição, ou seja, todas as permutações simples possíveis. Aqui, a listagem dos 24 números possíveis de serem obtidos sugere, também, o uso da listagem sistemática como caminho de resolução.

Figura 11 – Exemplo 2 – Formação de números de quatros algarismos distintos

Exemplo 2

Listaremos todos os números de quatro algarismos que se pode escrever com os algarismos 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los, são eles:

(1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321)

Note agora que existem **24 permutações possíveis** formadas com 4 elementos. Quanto maior a quantidade de elementos, maior será o número de permutações possíveis.

Fonte: SÃO PAULO (2022b., p. 58)

Nos problemas 1.4a, 1.4b, 1.5 que se seguem (Figura 12), as permutações são exploradas em situações que envolvem a formação de anagramas. As propostas de resolução são feitas usando exclusivamente o princípio multiplicativo.

Figura 12 – Problemas 1.4a, 1.4b e 1.5 com as respectivas propostas de resolução baseadas no princípio multiplicativo

1.4 Com a palavra NORTE:

a) Quantos anagramas podem ser formados?

Observe que para escolher a primeira letra temos 5 opções, para a escolha da segunda letra temos 4 opções, para a escolha da terceira letra temos 3 opções, para a escolha da quarta letra temos 2 opções e finalmente para última letra resta 1 opção.

Proposta de resolução:

$$P = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

b) quantos começam com vogal?

Como temos 2 vogais, e é fixada uma no início sobram 4 letras (1 vogal e 3 consoantes) para serem permutadas.

Proposta de resolução:

$$P = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

1.5 Calcular o número de anagramas da palavra VIDA, da palavra CLUBE e da palavra CADERNO.

Proposta de resolução:

$$\text{VIDA: } P = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$\text{CLUBE: } P = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$\text{CADERNO: } P = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,640$$

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 38)

Embora os exemplos e problemas que acabamos de citar tragam a ideia de permutação com base no princípio multiplicativo, ao que tudo indica, eles foram inseridos aqui sem o intuito de explorar tal conceito. O objetivo seria o de introduzir a notação fatorial, pois é “esperado que o estudante associe a representação da

multiplicação ao fatorial (!)” (SÃO PAULO, 2022a, p. 38), ao recomendar que se “explore com os estudantes essa representação” (*ibid.*, p.38), como mostra o problema 1.6 (Figura 13).

Figura 13 – Problema 1.6 e proposta de resolução

1.6 O que existe em comum na forma de resolver a atividade acima?

Proposta de resolução:

Professor é esperado que o estudante observe que o resultado é obtido por meio das multiplicações:
 $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (1)$.

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 38)

Logo depois, é solicitado que o estudante faça uma pesquisa “se existe algum símbolo ou forma de representar a multiplicação feita no exercício acima” (SÃO PAULO, 2022a, p. 38). Assim, aqui o fatorial é assumido como sendo uma maneira de denotar o produto de fatores naturais de 1 até n .

Essa primeira etapa se encerra com o exercício 1.7 (Figura 14) em que é solicitado ao aluno o desenvolvimento de alguns fatoriais.

Figura 14 – Exercício 1.7 sobre o cálculo de números fatoriais com a proposta de resolução

1.7 Desenvolva os fatoriais a seguir.

a) $6!$

b) $8!$

c) $2!$

d) $7!$

Proposta de resolução:

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

c) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

d) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 39)

Os problemas propostos na *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório* como situações para o ensino de combinatória foram usados com dois objetivos: retomar conhecimentos anteriores sobre combinatória e introduzir a notação fatorial.

Para o primeiro dos objetivos, os problemas utilizados foram os de produto cartesiano (1.1, 1.2 e Exemplo 1), com poucos elementos a se combinarem. Conforme já mencionamos, de acordo com Margina et al. (2017), problemas de produto cartesiano têm por característica a formação de um conjunto a partir dos elementos de um ou mais conjuntos distintos. As autoras destacam que, por terem baixa complexidade, além do princípio multiplicativo, é comum o emprego de outras estratégias como tabelas de dupla entrada, diagrama de árvores na resolução de

problemas dessa natureza. Contudo, há de se considerar que, em tese, os estudantes das turmas de 2º ano do ensino médio já se depararam com situações de produto cartesiano em anos do ensino fundamental (BRASIL, 2018; SÃO PAULO, 2022) e, por isso mesmo, seria oportuno avançar com problemas de maior complexidade, para aprofundar o que se deseja para esse nível de ensino (BORBA e PESSOA, 2010). Entendemos que problemas em que há restrições em relação à ordem dos elementos nos agrupamentos ou, ainda, a possibilidade de elementos repetidos potencialmente podem cumprir essa função.

Considerando o modelo combinatório implícito, foram abordados problemas de seleção (1.1, 1.2 e Exemplos 1) visto que, nas três tarefas, desejava-se escolher elementos distintos de dois ou mais conjuntos para a formação de um outro conjunto de natureza distinta dos primeiros.

Para a introdução da notação fatorial foram escolhidos problemas de permutação simples (1.3, 1.4a, 1.4b, 1.5 e Exemplo 2), com prevalência de situações que envolvem a formação de anagramas. Tais problemas podem ser entendidos como situações de distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas diferentes (problemas de distribuição) ou, ainda, de escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar anagramas diferentes (problemas de seleção). É com base nos problemas de permutação que se solicita aos alunos que busquem uma maneira de generalizar o cálculo do número de anagramas e do produto $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ na forma $n!$. (SÃO PAULO, 2022a, p. 38).

Quanto aos invariantes operatórios, segundo Borba e Pessoa (2010) em problemas de permutação simples deve se ter em conta que todos os elementos do conjunto são usados uma única vez, e a mudança da ordem dos elementos que gera é indicativo de novas possibilidades. Acrescentamos a esses, um outro ligado à notação fatorial: o produto de fatores naturais de 1 até n pode ser representado por $n!$

No que tange às estratégias empregadas na resolução, os primeiros problemas (1.1; 1.2; 1.3; exemplos 1 e 2) apresentam certa variedade delas com o emprego de representações figurais, tabulares, diagramais (árvore de possibilidades) e listagem. Aliás, a diversidade de representações é incentivada quando se solicita a valorização e a seleção, por parte do professor, de resoluções diferentes na forma de tabelas, esquemas, desenhos, árvore (SÃO PAULO, 2022a).

O que se observa, no entanto, é que tal valorização estaciona nesses problemas, sendo substituído gradativamente por representações simbólicas baseadas no princípio multiplicativo e em fórmulas.

O Quadro 15 apresenta um resumo dessas observações. Nesse quadro e nos de número 15, 19, 23, 25, 27 e de 29 a 39 que se seguem, a categorização dos problemas das Atividades 1, 2, 3 e 4, é feita considerando as seguintes abreviaturas:

- modelo combinatório implícito: M.C.I
 - seleção: S
 - distribuição: D
 - partição: P
- conceito combinatório explorado: C.C
 - produto cartesiano: PC
 - permutação simples: PS
 - permutação com elementos repetidos: PR
 - arranjo simples: AS
 - arranjo com elementos repetidos: AR
 - combinação simples: CS
 - combinação com elementos repetidos: CR

Observamos, no Quadro 15, o uso de situações combinatórias visando o trabalho com produto cartesiano e a notação fatorial.

Também nas representações simbólicas das propostas de resolução, gradualmente o uso de árvores de possibilidades, de figuras e de listagem vai dando lugar ao princípio multiplicativo e ao uso de fórmula. Porém, em nenhum momento há uma tentativa de se estabelecer relações entre as diversas representações possíveis para um mesmo problema.

Por fim, as últimas situações (1.6 e 1.7) buscam encaminhar o aluno a um processo de generalização de fórmulas sem um trabalho aprofundado de exploração da permutação como conceito tampouco há qualquer justificativa sobre o porquê da introdução de fórmulas se os problemas podem ser resolvidos sem necessariamente seu auxílio.

Quadro 15 – Categorização dos problemas combinatórios da *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório*

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa* Subjacente	M.C. I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
1. Levantamento de conhecimentos prévios sobre combinatória	1.1	<i>de quantas formas diferentes Ana pode se vestir?</i>	maneiras diferentes de combinar blusas e calças de cores distintas	escolha de objetos pertencentes a grupos distintos	S	PC	- Dado dois (ou mais) conjuntos distintos, eles serão combinados para formar um novo conjunto - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado	Figural (desenho)
	1.2	<i>de quantos modos diferentes uma pessoa pode escolher o Menu e a sobremesa?</i>	composição de um menu contendo prato principal, guarnição e sobre mesa	escolha de objetos pertencentes a grupos distintos	S	PC		Tabular (tabela de dupla entrada)
	Exemplo 1	<i>quais as possíveis maneiras que Marcos pode fazer a sua escolha?</i>	compra de carros de modelos de câmbio e de cores diferentes	escolha de objetos pertencentes a grupos distintos	S	PC		Árvore de possibilidades
1. Apresentação de situações que podem ser resolvidas usando o princípio multiplicativo. 2. Introdução à notação fatorial.	1.3	<i>liste todas as permutações possíveis</i>	permutação de três letras distintas	distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar anagramas	D/S	PS	Para os casos sem repetição: - todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez - a ordem dos elementos gera novas possibilidades - o produto de fatores naturais de 1 até n pode ser representado por $n!$, com n maior ou igual a 2	Listagem
	Exemplo 2	<i>listaremos todos os números de</i>	formação de números de quatro	distribuição de algarismos em posições	D/S	PS		Listagem

		<i>quatro algarismos</i>	algarismos distintos, tendo quatro algarismos disponíveis.	diferentes para formar números escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar números				
	1.4a	<i>quantos anagramas podem ser formados?</i>	formação de anagramas da palavra NORTE	distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar anagramas	D/S	PS		Simbólica (princípio multiplicativo)
	1.4b	<i>quantos começam com vogal?</i>	formação de anagramas da palavra NORTE que se iniciam com vogal	distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar	D/S	PS		Simbólica (princípio multiplicativo)

				anagramas				
	1.5	<i>calcular o número de anagramas</i>	formação de anagramas das palavras VIDA, CLUBE e CADERNO	distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar anagramas	D/S	PS		Simbólica (princípio multiplicativo)
	1.6	<i>o que existe em comum na forma de resolver a atividade acima?</i>	generalização do cálculo do número do número de anagramas de palavras com letras não repetidas e da notação fatorial	identificação de regularidades	-	PS	-	Simbólica (princípio multiplicativo)
	1.7	<i>desenvolva os fatoriais</i>	exercícios envolvendo a notação fatorial	aplicação de fórmula	-	-	-	Simbólica (fórmula)

Fonte: Elaborado pelo autor

5.3.2 Vídeos

Também é aconselhado ao professor que, se possível, utilize outro recurso: os vídeos sugeridos no caderno do professor, cujo acesso pode ser feito por *QRCODE* ou por *link* que constam no material. São três vídeos, que denominamos vídeos 1, 2 e 3, dos quais dois deles (vídeos 1 e 2) estão ligados à *Atividade 1* e serão descritos a seguir. O vídeo 3 é usado para a introdução do conceito de arranjo e será apresentado mais adiante.

5.3.2.1 Vídeo 1 – A videoaula

O vídeo 1 é uma videoaula⁴⁹ produzida pelo CMSP para turmas de oitavos anos sobre a aplicação do princípio multiplicativo na resolução de problemas de contagem. A recomendação é que o vídeo seja exibido logo no começo da *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório*, quando se pretende fazer uma revisão desse tema.

Os dois primeiros problemas abordados nessa videoaula são os mesmos sugeridos como questão disparadora no início da *Atividade 1*. Na resolução apresentada pelos professores da videoaula são usadas estratégias baseadas, além do princípio multiplicativo, na enumeração sistemática e no diagrama de árvores (ou árvore de possibilidades, como é referido no vídeo). Em seguida, são propostos outros problemas em que se discute a aplicação do princípio multiplicativo em situações em que há restrições como, por exemplo, a possibilidade ou não de repetições de elementos nos agrupamentos.

5.3.2.2 Vídeo 2 – De malas prontas

O vídeo 2, intitulado *De malas prontas*⁵⁰, faz parte da série *Matemática na Escola* que integra a plataforma *Matemática Multimídia* produzida pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Essa é uma plataforma que traz um conjunto de recursos educacionais multimídia (áudios, experimentos, *softwares*, vídeos) disponíveis de forma aberta e gratuita, direcionada aos professores que ensinam matemática no ensino médio. Acompanha o vídeo um Guia do Professor (GP) em que são apresentados os conteúdos matemáticos abordados, a duração, os objetivos, a sinopse da situação, e, os materiais multimídias presentes na plataforma

⁴⁹ Disponível em <https://bityli.com/zfuDm>. Acesso em 8 de agosto de 2022.

⁵⁰ Disponível em <https://bityli.com/tpYAE>. Acesso em 8 de agosto de 2022.

que têm relação com o tema. No Quadro 16 encontram-se as informações do Guia do Professor referentes ao vídeo *De malas prontas*.

Quadro 16 – Informações contidas no Guia do Professor referentes ao vídeo *De malas prontas*

Série Matemática na Escola Conteúdos Contagem e permutações. Duração Aprox. 10 minutos. Objetivos 1. Introduzir o Princípio Fundamental da Contagem; 2. Definir o conceito de fatorial; 3. Apresentar alguns problemas e aplicações de combinatória enumerativa.	Sinopse A Raquel está prestes a sair de viagem e não consegue colocar todas as roupas que precisa na sua mala. Com a ajuda de um funcionário da empresa aérea, através de conceitos combinatórios, ela tentará resolver o problema de sua mala. Material relacionado Áudios: <i>Fraude 171, O que é probabilidade</i>; Experimentos: <i>Apostas no relógio</i>; Softwares: <i>Explorando o jogo do máximo</i>; Vídeos: <i>Coisa de Passarinho</i>.

Fonte: CAMPELLO JUNIOR (s/d, p. 2)

Logo na introdução são apresentadas a série *Matemática na Escola*, bem como o programa específico abordado no vídeo que, nesse caso, é a análise combinatória, mais especificamente, o princípio multiplicativo (aqui nomeado princípio fundamental da contagem - PFC) e a notação fatorial.

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares. (CAMPELLO JUNIOR, s/d, p. 3)

Após a introdução, são sugeridas atividades para serem desenvolvidas antes, durante e depois da execução do vídeo, com as seguintes instruções:

Antes da execução é sugerido ao professor propor, sem resposta, alguns problemas de análise combinatória, com viés cotidiano.

Durante a execução, logo após a exposição do princípio fundamental da contagem, no momento em que o funcionário da empresa aérea apresenta aplicações do PFC, é possível parar a exibição do vídeo e pedir aos alunos que, com os conceitos abordados, resolvam algum dos problemas propostos antes da execução.

Depois da execução, pode-se abordar um pouco mais o princípio fundamental da contagem com problemas similares aos descritos acima. (CAMPELLO JUNIOR, s/d, p. 6, *grifo nosso*)

Assim, antes da execução do vídeo, são sugeridos os Problemas 1 e 2. O primeiro envolve o emplacamento de automóveis no Brasil e o segundo, o cálculo do número de pessoas que podem ser cadastradas no CPF (Cadastro de Pessoa Física).

Problema1: “Sabendo que as placas de carro no Brasil possuem 3 letras e 4 números, quantos possíveis carros podem ser cadastrados sem que haja placas iguais para carros distintos?”

Problema2: “Sabendo que o CPF é constituído por 9 números livres (e dois dígitos de verificação, que não são livres), quantas pessoas podem ser cadastradas pelo governo?” (CAMPELLO JUNIOR, s/d, p. 5 e 6)

Após a execução é proposto o Problema 3:

Problema 3: “Suponha que Raquel possui 2 pares de sandálias, 2 saias e 3 camisas, para ir em 12 lugares distintos. De quantas maneiras ela pode se apresentar em cada lugar? De quantas maneiras, ao todo (depois das 12 saídas), Raquel pode ter ido aos lugares, considerando que ela não gosta de repetir roupas?” (CAMPELLO JUNIOR, s/d, p. 7).

De acordo com os autores do Guia, o Problema 3 tem o viés de aprofundar o princípio multiplicativo e introduzir o fatorial que, aqui, é assumido como conceito. Sobre esse aprofundamento, o autor do Guia do Professor sugere “[...] explorar um pouco mais o conceito de fatorial, é possível também propor o cálculo do fatorial de vários números e visualizar como cresce um fatorial, em relação a outras funções”. (CAMPELLO JUNIOR, s/d, p. 7)

Por fim, a proposta de cálculo é exemplificada com a Tabela 3 em que são comparados os valores de n , n^2 , n^3 e $n!$.

Tabela 3 – Comparação dos valores de n , n^2 , n^3 e $n!$

n	n^2	n^3	$n!$
2	4	8	2
3	9	27	6
4	16	64	24
5	25	125	120
6	36	216	720

Fone: CAMPELLO JUNIOR (s/d, p. 7)

Procuramos compilar no Quadro 17, as orientações constantes do GP para as atividades a serem desenvolvidas na exibição do vídeo 2 – *De malas prontas*.

Quadro 17 – Orientações para as ações do professor no uso do vídeo *De malas prontas*

Antes da exibição do vídeo
1. propor, sem resposta, alguns problemas de análise combinatória, com viés cotidiano.
Durante a exibição do vídeo
2. <i>parar a exibição do vídeo e pedir aos alunos que, com os conceitos abordados, resolvam algum dos problemas propostos antes da execução.</i>
Após a exibição do vídeo
3. <i>abordar um pouco mais o princípio fundamental da contagem com problemas similares aos que já foram resolvidos</i>
Para explorar o conceito de fatorial
4. <i>propor o cálculo do fatorial de vários números e visualizar como cresce um fatorial, em relação a outras funções</i>

Fonte: Adaptado de CAMPELLO JUNIOR (s/d, p. 6-7)

Em relação aos vídeos 1 e 2, ambos trazem problemas semelhantes aos que aparecem no caderno do professor. No caso específico do vídeo 1, o que se tem realmente é a apresentação e a discussão desses problemas em uma aula expositiva sobre a aplicação do princípio multiplicativo para turmas de 8º anos. Isso nos leva a questionar que contribuições traria esse vídeo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório para os estudantes, dado a passividade dos estudantes frente a uma aula expositiva. O mesmo não acontece com o vídeo 2 que sugere uma dinâmica diferente, com a participação dos estudantes na resolução e discussão dos problemas propostos. Ademais, os problemas trabalhados no vídeo 2 têm um viés mais próximo de situações corriqueiras, como o emplacamento de veículos ou a emissão de CPF. Porém, assim como o caderno do professor, há uma preocupação com a questão do número fatorial entendendo-o como conceito, e não como notação. Segundo Vergnaud (1990), um conceito deve abranger um conjunto de situações que dão sentido a ele, assim como invariantes operatórios e representações simbólicas. Na combinatória, o fatorial tem seu uso restringido à simplificação da escrita do produto de fatores naturais de 1 até n desempenhando, assim, o papel de representação simbólica. Nesse sentido, no âmbito da combinatória, não atende às condições para ser considerado propriamente um conceito.

Na próxima seção apresentamos as classes de situações profissionais e os invariante operatórios atrelados à essas situações considerando a *Atividade 1*.

5.3.3 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da *Atividade 1*

O primeiro objetivo posto para essa atividade é o de retomar as aprendizagens anteriores sobre a aplicação do princípio multiplicativo na solução de situações de contagem. Duas ações são desencadeadas mirando esse objetivo: perguntar se os alunos se recordam dos princípios multiplicativo e aditivo, e, a apresentação de uma questão disparadora “caso os estudantes não estejam apropriados da nomenclatura” (SÃO PAULO, 2022a, p. 35). Em outras palavras, é possível que haja alunos que não se recordem dos princípios multiplicativo e aditivos e, se houver alunos que não se recordem, o professor deve abordar situações que propiciem um momento de recordação/reconhecimento. Aqui encontramos um primeiro invariante operatório: o uso de questões disparadoras seria pertinente por levar os alunos a perceberem diferentes maneiras de um evento acontecer.

As ações que se seguem sugerem um segundo objetivo: a de identificar formas distintas de resolução de problemas combinatórios apresentadas pelos alunos. Isso porque, ao resolverem as situações propostas, é esperado que alguns alunos o façam usando estratégias baseadas em desenhos, tabelas, diagrama de árvores, entre outros. Sendo assim, o professor deve caminhar entre os alunos, observar e, se houver resoluções diferentes, elas devem ser valorizadas e selecionadas e, seus autores, devem ser convidados a compartilhar seu modo de resolver na lousa, visando o aumento do repertório de estratégias. Alguns invariantes operatórios podem ser inferidos aqui:

- é importante que os estudantes saibam “que há diferentes maneiras de descobrir as resoluções possíveis de se realizar um determinado evento” (SÃO PAULO, 2022a, p. 37);
- propor questões com poucos elementos a se combinarem facilita estratégias como enumeração sistemática, uso de tabelas, de diagrama de árvores, entre outras.
- resolver problemas de contagem de diferentes maneiras amplia o rol de estratégias de um estudante frente a esse tipo de situação. (FISCHBEIN, 1975; ROA, 2000)

O terceiro objetivo seria levar o estudante a representar um número $n!$, sendo n um número natural diferente de zero, como a multiplicação de n pelos seus antecessores naturais até o 1. Esse objetivo, da maneira como se encontra no

material didático, deve ser cumprido em duas etapas. A primeira, seria a de levar o aluno a perceber que há situações combinatórias em que as soluções são obtidas pela multiplicação de um número natural pelos seus antecessores até o 1. A segunda, é estabelecer a correspondência entre esse produto e a notação fatorial. Para cada etapa identificamos uma possível inferência. Em relação à primeira, espera-se atingir esse objetivo a partir de situações que envolvam permutação, em cálculos de número de anagramas de palavras sem letras repetidas. Na segunda é esperado que o estudante consiga estabelecer a correspondência desejada. Assim, o professor deve explorar situações que envolvam cálculo de anagramas de palavras sem letras repetidas e propor que os alunos pesquisem “se existe algum símbolo ou forma de representar a multiplicação feita [...]” (SÃO PAULO, 2022a, p. 38), bem como, que resolvam exercícios que envolvam o cálculo do fatorial de um número natural.

O Quadro 18 traz uma compilação da classe de situações expressas nos objetivos planteados, assim como dos invariantes inferidos das ações sugeridas na *Atividade 1*. Sobre esses invariantes percebemos haver uma preocupação com a revisão de aprendizagens anteriores e de formas distintas de resolução de problemas combinatório, bem como com o uso de situações para explorar o *número fatorial*. Pede-se que o professor sistematize as resoluções – quando em geral apresentam uma única forma de resolver o problema – as palavras-chave, os conceitos sem, contudo, explicitar de quais palavras-chave ou conceitos estão se referindo.

5.4 Atividade 2 – Os desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem

Para o Momento 2 – Aprimorando Conhecimentos é reservada à *Atividade 2 – Os desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem*, composta por uma série de problemas que abordam permutação, arranjo e combinação nessa ordem. As fórmulas associadas a esses três conceitos são apresentadas e usadas nas propostas de resolução que se encontram no caderno do professor. A seguir, analisamos o modo como a permutação foi abordada nos cadernos do professor e do estudante do programa *Currículo em Ação*.

5.4.1 Permutação

No início da *Atividade 2* é feita a institucionalização da permutação simples, embora esse conceito e a terminologia *permutação* já tenham sido explorados na *Atividade 1*. Tanto no caderno do professor quanto do estudante, a permutação simples é assim apresentada:

A permutação simples é um tipo de agrupamento estudado na análise combinatória. Permutar os elementos de um conjunto (com n elementos) nada mais é que formar agrupamentos ordenados com todos os elementos desse conjunto. (SÃO PAULO, 2022a, p. 39)

Após essa apresentação, são propostas duas situações. Na primeira (problema 2.1 – Figura 15), espera-se que o aluno consiga chegar à fórmula para o cálculo das permutações simples com a ajuda dos colegas e do professor.

Figura 15 – Problema 2.1 e proposta de resolução presentes no caderno do professor

2.1 Com a ajuda dos colegas e do professor, elabore uma fórmula para calcular permutação.
Proposta de resolução:
 $P_n = n!$

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 39)

Ao professor é recomendado:

Durante esse processo, é interessante tirar as dúvidas e corrigir possíveis desvios de conceitos, e é pertinente destacar também o caso particular: $0! = 1$. Uma possibilidade de demonstração desse caso particular, seria: $1! = 1 \cdot (1 - 1)! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1$ (SÃO PAULO, 2022a, p. 39)

A esse respeito, cabe-nos fazer um adendo: uma demonstração de que $0! = 1$ não é pertinente visto que a admissão desse resultado é parte da definição do número fatorial, conforme é apresentado, por exemplo, por Lipschutz (1972):

O produto dos inteiros positivos de 1 a n , inclusive, é indicado por $n!$ (lê-se ‘ n fatorial’) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 2)(n - 1)n$.

Podemos também definir $n!$ por recorrência, como segue:

$$1! = 1 \text{ e } n! = n \cdot (n - 1)!$$

É também conveniente definir $0! = 1$ (LIPSCHUTZ, 1972, p. 162)

É importante observar que, conquanto se solicite ao professor “corrigir possíveis desvios de conceitos”, não há qualquer menção sobre quais seriam esses desvios tampouco a que conceitos se referem.

Em síntese, a primeira tarefa proposta na atividade é, por assim dizer, o fechamento esperado do processo de generalização iniciada na Atividade 1 com os problemas 1.4a, 1.4b, 1.5, 1.6 e o exercício 1.7: a generalização da fórmula que fornece o número de permutações simples de n elementos. Não se trata, portanto, de uma tarefa combinatória propriamente dita, mas de um exercício algébrico.

A segunda situação (problema 2.2 – Figura 16) tem por objetivo diferenciar as permutações simples daquelas com elementos repetidos. Para tanto, são apresentadas duas palavras de quatro letras (BOLA e BOLO) e é pedido que o estudante liste todos os anagramas que podem ser formados com as letras dessas duas palavras.

Figura 16 – Problema 2.2 e proposta de resolução presentes no Caderno do professor

2.2 Junte-se ao seu colega e:

- listem os anagramas possíveis e distintos da palavra BOLA e os da palavra BOLO;
- expliquem o motivo pelo qual as quantidades listadas foram diferentes, se as duas palavras possuem 4 letras?

Proposta de resolução:

Professor, após os estudantes listarem, é pertinente mostrar que, para encontrar a quantidade de anagramas da palavra BOLA, pode-se utilizar $P_n = n!$, ou seja, $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, mas isso não basta para a palavra BOLO, cuja quantidade de anagramas é 12, pois existe um elemento repetido, a letra O.

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 39)

Aqui, a recomendação ao professor é:

[...] após os estudantes listarem, é pertinente **mostrar** que, para encontrar a quantidade de anagrama da palavra BOLA, pode-se utilizar $P_n = n!$, ou seja, $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, mas isso não basta para a palavra BOLO, cuja quantidade de anagramas é 12, pois existe um elemento repetido, a letra O. (SÃO PAULO, 2022a, p. 39, *grifo nosso*)

Após isso, a permutação com repetição é institucionalizada:

Uma **permutação** com elementos repetidos acontece quando, em um conjunto de n elementos, alguns desses são iguais. Nesse caso, dividimos o fatorial do número total n de elementos pelo produto entre os fatoriais dos elementos $(n_1, n_2 \dots n_n)$ que se repetem. (SÃO PAULO, 2022a, p. 40)

E apresenta-se a fórmula para o cálculo das permutações com repetição:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_n!}$$

Em seguida são propostas mais duas situações de aplicação. Na primeira (problema 2.3) é solicitado ao estudante que calcule o número de anagramas da palavra BOLO como uma continuação do problema 2.2 (Figura 17).

Figura 17 – Problema 2.3 e proposta de resolução presentes no Caderno do professor

2.3 Na atividade anterior, percebe-se que existem anagramas repetidos, quando utilizamos as letras da palavra BOLO. Considerando esse fator, quantos anagramas podemos formar?

Proposta de resolução:

Como podemos observar na palavra BOLO, existe a repetição da letra O, portanto, a quantidade de anagramas dessa palavra será calculada da seguinte maneira:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{24}{2} = 12$$

Portanto, com a palavra bolo podemos montar 12 anagramas.

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 40)

Na segunda situação (problema 2.4 – Figura 18), o aluno deve pensar em uma palavra com no máximo 10 letras e verificar a quantidade de anagramas que se pode formar.

Figura 18 – Problema 2.4 e proposta de resolução presentes no Caderno do professor

2.4 Pense em uma palavra (máximo 10 letras) e verifique a quantidade de anagramas que podemos formar com essa palavra.

Professor, no desenvolvimento dessa atividade, em alguns casos, seria conveniente apresentar o processo de simplificação dos fatores que compõem o cálculo da permutação, apoie os estudantes no prosseguimento desse processo operatório. Aproveite a oportunidade para que os estudantes apresentem, na lousa, a palavra e o respectivo processo de cálculo da quantidade de anagramas.

Exemplo: BANANA.

Nessa palavra, temos: 3 vezes a letra A e 2 vezes letra N, então, a quantidade de anagramas dessa palavra será:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{(\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1) \cdot (\cancel{2} \cdot 1)} = \frac{120}{2} = 60$$

Portanto, com a palavra BANANA, conseguimos elaborar 60 anagramas.

Professor, cuidado para o seguinte raciocínio, que os estudantes poderão desenvolver:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{\cancel{6!}}{\cancel{3!} \cdot 1} = 1$$

Fonte: SÃO PAULO (2022, p. 40)

A respeito dessa última situação, há a seguinte instrução:

Professor, no desenvolvimento dessa atividade, em alguns casos, seria conveniente apresentar o processo de simplificação dos fatores que compõem o cálculo da permutação, apoie os estudantes no prosseguimento desse processo operatório. Aproveite a oportunidade para que os estudantes apresentem, na lousa, a palavra e o respectivo processo de cálculo da quantidade de anagramas. (SÃO PAULO, 2022, p. 40)

Na rubrica, essa instrução é exemplificada com a palavra BANANA, para destacar a repetição das letras A e N e o cálculo feito com a fórmula da permutação com elementos repetidos.

Finalmente, chama-se atenção do professor para um possível raciocínio errôneo que os estudantes venham a desenvolver:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6!}{6!} = 1$$

O possível erro seria o aluno admitir que o produto de (números) fatoriais seria o fatorial do produto (desses números). Isso reforça a preocupação e a supervalorização, nesse recurso didático, de erros ligados a aspectos algorítmicos em detrimento a outros ligados à constituição do raciocínio combinatório.

Em suma, os problemas que acabamos de apresentar (2.2a, 2.2b, 2.3 e 2.4) têm na formação de anagramas seu contexto. São problemas cujas tarefas se enquadram nos modelos de distribuição ou de seleção, pois podem ser consideradas, respectivamente, como a distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas diferentes ou a escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito da formação de anagramas distintos.

Nota-se que, até aqui, as situações que envolvem permutações têm pouca diversidade, sendo quase na sua totalidade, problemas no contexto da formação de anagramas cujo modelo combinatório implícito associado é o de seleção ou distribuição biunívoca. O diferencial encontra-se, somente, na possibilidade de repetição de letras. É o que acontece no problema 2.2 itens a e b, proposto exatamente para pontuar a diferença entre as permutações simples e as com elementos repetidos.

Os problemas 2.3, 2.4 e 2.5 dão a entender serem problemas para aplicação da fórmula para o cálculo do número de permutação com elementos repetidos apresentada sem qualquer vestígio de justificativa ou demonstração. Nota-se, mais uma vez, haver uma preocupação maior com aspectos de tratamento algébrico e algorítmico associados à fórmula e à notação fatorial do que com o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A pouca diversidade de situações também se reflete nas estratégias de resolução, exploradas basicamente por dois tipos de representação: a listagem e a simbólica, por conta do uso de fórmulas.

O Quadro 19 apresenta um resumo do conjunto de observações realizadas os problemas usados para o ensino de permutação.

Quadro 19 – Categorização dos problemas combinatórios da *Atividade 2 – Os Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem* voltados para o ensino de permutação

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação simbólica
1. Deduzir a fórmula para o cálculo do número de permutações simples	2.1	<i>elabore uma fórmula</i>	elaboração de uma fórmula para calcular o número de permutações	-	-	PS	-	Simbólica (fórmula)
	2.2a	<i>listem os anagramas possíveis e distintos</i>	listar os anagramas das palavras bola e bolo	distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas diferentes	D/S	PR	Para os casos sem repetição: • todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez • a ordem dos elementos gera novas possibilidades Para os casos com repetição: • há elementos que serão usados mais de uma vez, pois se repetem • a ordem dos elementos gera novas possibilidades • a troca de posição de elementos repetidos não gera novas possibilidades	Listagem
	2.2b	<i>explique o motivo</i>	explicar as quantidades diferentes de anagramas obtidos.	escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar anagramas diferentes				
2. Aplicação das fórmulas no cálculo do número *de anagramas	2.3	<i>quantos anagramas podemos formar?</i>	calcular o número de anagramas da palavra bolo	distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas diferentes escolha de letras para ocupar posições	D/S	PR		Simbólica (fórmula)

				diferentes com o propósito de formar anagramas diferentes				
	2.4	verifique a quantidade de anagramas.	Calcular o número de anagramas de uma palavra com no máximo 10 letras	distribuição de letras em posições diferentes para formar anagramas diferentes escolha de letras para ocupar posições diferentes com o propósito de formar anagramas diferentes	D/S	PR		Simbólica (fórmula)

Elaborado pelo autor

5.4.1.1 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da Atividade 1

Embora não esteja explícito nas rubricas, observamos que o objetivo pontuado aqui é, a princípio, o de conceituar permutação simples e estabelecer diferença entre as permutações simples e aquelas com repetição.

Primeiramente, é feita a institucionalização do conceito de permutação simples com base nos problemas usados para introduzir a notação fatorial na seção anterior, ou seja, problemas com anagramas. Baseado nesse tipo de problema que se espera que o aluno deduza a fórmula para o cálculo das permutações simples. Para tanto, o professor deve agir para “tirar dúvidas e corrigir possíveis desvios de conceitos” (SÃO PAULO, 2022a, p. 39) durante o processo de dedução da fórmula. Ainda que não esteja claro a quais conceitos a rubrica se refere, eles não parecem estar ligados à permutação simples em si, mas à escrita da fórmula a ela associada.

Em outras palavras, o foco parece estar, mais uma vez, na notação fatorial do que propriamente no conceito de permutação. Percebe-se isso quando é observado “ser pertinente destacar também o caso particular: $0! = 1$ ” (SÃO PAULO, 2022a, p.39) e é apresentada uma *possibilidade de demonstração* dessa peculiaridade. É necessário reforçar, porém, que admitir $0! = 1$ é parte da definição do número fatorial o que não comporta qualquer tentativa de demonstração.

Dessa primeira parte, que aborda a conceituação das permutações simples, temos dois invariantes operatórios: a) é importante o estudante saber deduzir a fórmula para o cálculo das permutações simples; b) a fórmula para o cálculo das permutações simples pode ser feita com base nas situações exploradas na introdução da notação fatorial. É esperado, assim, que o estudante consiga generalizar a fórmula (inferência) e, se houver alunos que apresentem dificuldades nesse processo, cabe ao professor ajudá-lo tirando suas dúvidas e corrigindo possíveis desvios de conceitos.

A situação que visa introduzir a diferença entre as permutações simples daquelas com elementos repetidos, encontra-se novamente no contexto da formação de anagramas. Para tanto, duas palavras de quatro letras (BOLA e BOLO) são apresentadas e pede-se aos estudantes que, junto com seus colegas, listem os anagramas possíveis. Espera-se, pois, que os alunos sejam capazes de, por meio da listagem, perceberem a diferença da quantidade de anagramas obtidos em razão da repetição de letras em uma das palavras. Elencamos como invariantes: a)

explorar situações com anagramas leva o estudante a diferenciar permutações simples daquelas com repetição; b) a listagem de anagramas de palavras com a mesma quantidade de letras, sendo uma delas com letras que se repetem, permite ao estudante estabelecer essa diferença por comparação; c) palavras com poucas letras facilitam a listagem como estratégia de resolução de problemas de contagem. E a ação do professor será somente após os estudantes listarem todos os anagramas possíveis, para mostrar que o cálculo do número de anagramas de palavras com letras distintas, usando a fórmula $P_n = n!$, não se aplica na formação de anagramas de palavras com letras repetidas.

A institucionalização das permutações com repetição e a apresentação da respectiva fórmula são feitas logo em seguida. Quanto à fórmula, ela é apresentada sem que se justifique o fato de que, nesse caso, “dividimos o fatorial no número total n de elementos pelo produto entre os fatoriais dos elementos $(n_1, n_2, \dots, n_n)$ que se repetem” (SÃO PAULO, 2022a, p. 40), dando a entender que a situação com os anagramas das palavras BOLA e BOLO tem a capacidade de levar os estudantes a compreenderem o seu porquê. Aliás, o problema proposto, que vem logo em seguida, retoma o cálculo do número de permutações da palavra BOLO, agora com o uso da fórmula.

Por fim, mais uma situação de anagrama é explorada a partir de palavras sugeridas pelos estudantes. A condição é que elas sejam formadas, no máximo, por 10 letras para aventar a possibilidade de que algumas delas se repitam. O motivo para esse número máximo de letras não está explicitado nas rubricas, porém as ações sugeridas ao professor podem dar indícios. O professor deve, no desenvolvimento da atividade, apresentar aos estudantes “o processo de simplificação de fatores que compõem o cálculo de permutação” (SÃO PAULO, 2022a, p. 40). Assim, o aumento do número de elementos a se permutarem inviabilizaria o uso da listagem como estratégia de resolução o que levaria os alunos a optarem pelo uso da fórmula. A sugestão de que os alunos apresentem a resolução da lousa e a resolução proposta com o uso de fórmula para o cálculo do número de anagramas da palavra BANANA, reforça essa ideia.

Em síntese, espera-se que o estudante seja capaz de usar a fórmula de modo correto, para o cálculo do número de anagramas de palavras com ou sem elementos repetidos. Para isso, inferimos três possíveis invariantes operatórios: a) quanto maior o número de letras de uma palavra, maior a chance de o aluno recorrer a fórmulas

para o cálculo do número de anagramas; b) a apresentação do processo de simplificação dos fatores que compõem o cálculo da permutação constitui-se um apoio aos estudantes no prosseguimento desse processo operatório; c) é importante que os estudantes apresentem (na lousa) a palavra escolhida e o respectivo processo de cálculo da quantidade de anagramas; d) é importante o estudante saber as fórmulas para empregá-las adequadamente situações de permutação (simples ou com elementos repetidos). A ação do professor fica concentrada no apoio ao estudante, quando for necessário efetuar simplificações com números fatoriais, para evitar que ele desenvolva raciocínios errôneos como afirmar que $2! \cdot 3! = 6!$.

O Quadro 20 apresenta um resumo dos objetivos e invariantes operatórios das ações sugeridas expressas nas rubricas desse material.

Quadro 20 – Objetivos e Invariantes operatórios inferidos das ações sugeridas na *Atividade 2 para o ensino de permutação*

Objetivos	Problemas	Unidade de Registro	Unidade de contexto	Invariantes Operatórios Inferidos Teoremas em ação
1. Deduzir a fórmula para o cálculo do número de permutações simples	2.1 2.2a 2.2b	- apresentar o processo de simplificação dos fatores que compõem o cálculo da permutação e apoiar os estudantes no prosseguimento desse processo operatório - solicitar aos alunos que apresentem, na lousa, a palavra e o respectivo processo de cálculo da quantidade de anagramas, por exemplo, da palavra BANANA - ter atenção para um possível raciocínio que os estudantes poderão desenvolver: $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6!}{6!} = 1$	<i>Momento 2</i> Aprimorando Conhecimentos <i>Atividade 2</i> Os Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem	- é importante o estudante saber deduzir a fórmula para o cálculo das permutações simples - a fórmula para o cálculo das permutações simples pode ser feita a partir das situações exploradas na introdução da notação fatorial. - explorar situações com anagramas leva o estudante a diferenciar permutações simples daquelas com repetição - a listagem de anagramas de palavras com a mesma quantidade de letras, sendo uma delas com letras que se repetem, permite ao estudante estabelecer a diferença entre permutações simples e com repetição - palavras com poucas letras facilitam a listagem como estratégia de resolução de problemas de contagem - é importante o estudante saber as fórmulas para empregá-las adequadamente situações de permutação (simples ou com repetição)
2. Aplicação das fórmulas no cálculo do número de anagramas, com repetição de letras ou não	2.3 2.4			

Fonte: Elaborado pelo autor

5.4.2 Arranjo

Para o ensino de arranjo, é sugerido no caderno do professor que use a atividade que fora adaptada do vídeo *A cartomante*, disponível na plataforma *Matemática Multimídia*, ao que passamos a descrever.

5.4.2.1 Vídeo 3 – A cartomante

Assim como o vídeo 2, o vídeo 3⁵¹ integra a série *Matemática na Escola*, produzida pela UNICAMP e disponível na plataforma *Matemática Multimídia*. Também esse vídeo é acompanhado por um Guia do Professor (GP) com as seguintes informações (Quadro 21)

Quadro 21 – Informações contidas no Guia do Professor referentes ao vídeo *De malas prontas*

Série Matemática na Escola	Sinopse Uma menina quer ser uma cartomante como sua tia e mas antes, deve aprender um pouco sobre combinatórios, arranjos, fatorial e permutações.
Conteúdos Probabilidade; Probabilidade Condicional.	
Duração Aprox. 10 minutos.	Material relacionado Áudios: <i>O que é probabilidade condicional?</i> ; Experimentos: <i>Apostas no relógio</i> ; Softwares: <i>Explorando o jogo do máximo</i> ; <i>Probabilidade com urnas</i> ; Vídeos: <i>Coisa de Passarinho</i> , <i>Coisas do Amor</i> .
Objetivos 1. Apresentar o conceito de Combinação; 2. Apresentar o conceito de Arranjo e Fatorial; 3. Apresentar o conceito de Permutação	

Fonte: DINIZ (s/d, p. 2)

Na introdução do GP do vídeo 2 são feitas as mesmas considerações para a série *Matemática na Escola* feita no GP do vídeo 1. Segue uma breve descrição do que é apresentado no vídeo:

O programa apresenta os conceitos de análise combinatória a partir de um jogo de cartas. Na ficção, uma menina deseja aprender a ler o destino das pessoas através das cartas como sua tia e para tanto deve aprender sobre combinação, arranjo, fatorial e permutação. (DINIZ, s/d, p. 3-4)

Na sequência, esses quatro conceitos são apresentados formalmente, a começar pela combinação.

O primeiro conceito a ser apresentado de análise combinatória é a combinação de n , p a p sendo que n e p são pertencentes ao conjunto dos números naturais por todo esse texto. O conceito de combinação consiste no número de formas possíveis de escolher p objetos entre n objetos possíveis sendo que a ordem não importa no resultado. No que $n \geq p$. A combinação n , p a p é denotada por C_p^n . (DINIZ, s/d, p. 4)

⁵¹ Disponível em <https://bityli.com/MjZrH>. Acesso em 8 de agosto de 2022.

Semelhantemente, segue a caracterização de arranjo:

O segundo conceito é o arranjo de n, p a p . O arranjo de n, p a p consiste no número de formas para escolher p objetos entre n possíveis que a ordem é importante no resultado, novamente, note que $n \geq p$. O arranjo n, p a p é denotado por A_p^n . (DINIZ, s/d, p. 4).

É importante observar aqui que, de acordo com Vergnaud (1990), um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pois esse abrange classes de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas.

O procedimento algorítmico para o cálculo do número de arranjos é apresentado com apelo ao raciocínio intuitivo:

O cálculo de um A_p^n , intuitivamente, é calculado da seguinte forma: Se há n objetos possíveis e é necessário escolher p , a escolha do primeiro objeto apresenta n possibilidades, a escolha do segundo objeto apresenta $(n - 1)$ possibilidades já que o primeiro objeto escolhido não pode ser escolhido novamente e tal raciocínio é repetido até que os p objetos tenham sido escolhidos. Desta forma, $A_p^n = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - (p - 1))$ (DINIZ, s/d, p. 4)

Após a apresentação do procedimento para o cálculo de arranjos são oferecidos dois exemplos (A_3^5 e A_4^5) de como utilizá-lo sem que estivessem, contudo, inseridos em um problema combinatório propriamente dito. Além disso é solicitado ao leitor que “observe que o número de fatores na multiplicação de um A_p^n é igual a p ”. (DINIZ, s/d, p. 4)

O número fatorial é apresentado como um conceito – e não como uma notação – que possibilita a escrita de uma fórmula geral para o cálculo de arranjos. Todavia, não é estabelecida nenhuma relação entre o procedimento algorítmico sugerido anteriormente, o número fatorial e a fórmula geral para arranjos (simples).

É possível construir uma fórmula geral para o cálculo de um A_p^n a partir do conceito de fatorial. O número n fatorial é denotado por $n!$ e consiste na multiplicação de todos os números inteiros de n até 1: $n \times (n - 1) \times \dots \times 1$. Então, $A_p^n = n! / (n - p)!$. (DINIZ, s/d, p.5)

O último conceito, o de permutação, é apresentado a partir do arranjo A_p^n ao considerar p igual a n , de modo que $A_n^n = n!$. Também aqui não são explorados os caminhos algébricos que levaram a esse resultado, pois logo após a permutação é definida: “...este cálculo recebe o nome especial de Permutação e é denotada por $P(n)$. Portanto uma permutação de n objetos consiste no número de possibilidades de ordenar n objetos”. (DINIZ, s/d, p. 5)

No Quadro 22, são apresentadas as orientações do GP para as atividades a serem desenvolvidas antes, durante e depois da exibição do vídeo 3 – *A cartomante*.

Quadro 22 – Orientações para as ações do professor no uso do vídeo *A cartomante*

Antes da exibição do vídeo	
1.	<i>escrever o nome dos alunos em papéis, colocar em um saco e retirar um nome</i>
2.	<i>ênfatisar que a escolha desse nome foi feita ao acaso, isto é, todos os nomes têm a mesma chance de serem escolhidos</i>
3.	<i>escolher 3 alunos para serem representantes de sala</i>
4.	<i>escolher 11 alunos para formarem o time de futebol da sala</i>
5.	<i>ênfatisar que a ordem, nesse caso em princípio, não importa</i>
6.	<i>escolher 3 alunos sendo que o primeiro será o presidente, o segundo será o vice-presidente e o terceiro será o tesoureiro.</i>
7.	<i>escolher 3 alunos para formarem o time de corrida da sala sendo que o primeiro correrá a prova de 100 m, o segundo correrá 100 m com barreiras e o terceiro correrá 1500 m.</i>
8.	<i>ênfatisar que, nesse caso, a ordem é importante, pois as funções são distintas</i>
Durante a exibição do vídeo	
9.	<i>parar a exibição do vídeo e ressaltar que a fórmula geral para $n=p$ será $A_p^n = \frac{n!}{0!}$, pois $0!$, por definição, é igual a um.</i>
Após a exibição do vídeo	
10.	<i>dizer que se calcula C_p^n a partir da definição de fatorial e a fórmula geral é dada por $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$</i>
11.	<i>desafiar os alunos para calcularem qual é o número de possibilidades das situações apresentadas antes do vídeo.</i>

Fonte: Adaptado de DINIZ (s/d, p. 6-7)

De acordo com o que é expresso no GP, as atividades propostas para serem desenvolvidas, antes da exibição do vídeo, têm por objetivo: criar a noção de que as escolhas são feitas ao acaso e que o espaço amostral é equiprovável (atividade 1); introduzir a relevância ou não da ordem nas escolhas (atividades 3, 4, 6 e 7). Essas atividades foram adaptadas a fim de introduzir o conceito de arranjo. É o que será apresentado a seguir.

5.4.2.2 Arranjos

Inicialmente, o professor é orientado a escolher algum aluno da lista de chamada percorrendo-a de olhos fechados, e parando repentinamente ou, como na atividade que precede a exibição do vídeo, que escreva o nome dos alunos em papeizinhos, coloque-os em um saco que não permita a visão da parte interna e faça, em seguida, o sorteio de um desses papéis. O intuito em se trabalhar essas atividades seria o de “desenvolver o conceito de acaso” (SÃO PAULO, 2022a, p. 41). Em complementação, é solicitado ao professor que “destaque que a escolha desse nome foi feita ao acaso, isto é, todos os nomes têm a mesma chance de serem escolhidos” (ibidem, p. 41) e que sublinhe a importância, ou não, da ordem no sorteio dos nomes.

Destaque [...] a importância, ou não, da seleção dos nomes sorteados. Por exemplo, sorteie 3 nomes para formar um grupo (nesse caso, a ordem da seleção não importa), mas, se o primeiro sorteado ficar responsável pela pesquisa, o segundo sorteado pelo desenho e o terceiro sorteado apenas pela capa (nesse caso, a ordem importa).

Permita que os estudantes expressem oralmente seus conhecimentos, exemplifique com outras possibilidades cotidianas com casos nos quais a ordem importa ou não (SÃO PAULO, 2022, p. 41)

Após esse primeiro momento é solicitado que o professor apresente o vídeo 3 aos alunos duas vezes, a fim de que, na primeira execução, eles possam compreender o desenrolar da situação e que na próxima, *tomem nota dos conceitos matemáticos considerados mais importantes*. O professor deve, então, pedir que os estudantes socializem verbalmente o que escreveram. Em seguida, deve fazer a sistematização desses conceitos na lousa para ressaltar alguns pontos do vídeo como o total de cartas disponíveis (espaço amostral) e a relevância ou não da ordem na seleção das cartas para observar que, nesse contexto, a ordem de sorteio é que define os destinos diferentes dos consulentes. Ademais, é proposto que o professor utilize dessa mesma situação variando o número de cartas sorteadas, com o objetivo de aprofundar o conceito de arranjo e, ainda, que retome o vídeo e enfatize que a quantidade de elementos em cada agrupamento deve ser menor ou igual ao número de elementos disponíveis ($p \leq n$).

Ao final das orientações dessa atividade introdutória, na própria rubrica, a fórmula para o cálculo de arranjos simples é apresentada do seguinte modo:

Para fazer o agrupamento de 3 em 3, temos para a escolha da primeira carta, 7 possibilidades⁵², para a escolha da segunda carta, 6 possibilidades, e para a escolha da terceira carta, 5 possibilidades que nos dará $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ possibilidades de escolhermos 3 cartas entre as 7. Esse desenvolvimento pode ser generalizado pela fórmula de Arranjo de n elementos p a p :

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lembre-se que o arranjo de quatro cartas para quatro posições é a permutação das quatro cartas, ou seja, $4!$ (permutação de $p(n)$). (SÃO PAULO, 2022, p. 41)

São reservados, em seguida, dois momentos de familiarização do conceito por meio de situações. No primeiro deles, a situação abordada (problema 2.5) envolve a mesma retratada no vídeo, ou seja, sorteio de cartas. Por essa razão, é pedido ao estudante que assista ao vídeo antes de responder aos itens da questão. Na proposta de resolução no caderno do professor são apresentadas soluções a partir do uso da fórmula para o cálculo de arranjos simples, sem qualquer conexão com outras possíveis formas de pensar e de resolver os itens do problema, como sugere a resolução proposta para problemas de arranjo simples na Figura 19.

⁵² As 7 possibilidades a que se refere tem a ver com o vídeo *A Cartomante*, em as personagens discutem a escolha, pelo consulente, de 3 das 7 cartas disponíveis.

Figura 19 – Problema 2.5 e proposta de resolução presentes no caderno do professor

2.5 Acesse o *link* ou realize a leitura do *QR CODE*, assista ao vídeo: “A cartomante”, e responda as questões a seguir:

Disponível em: <https://bitly.com/ifOck>. Acesso em: 16. mar. 2022.



No vídeo, houve a seleção de 4 cartas para, posteriormente, selecionar a carta para saber sobre o amor e, depois, sobre a fortuna. Sabendo que o baralho de tarô tem 78 cartas:

- na primeira seleção, foram escolhidas 4 cartas. De quantas maneiras diferentes essas cartas poderiam ter sido escolhidas?
- se não fosse necessário pré-selecionar essas 4 cartas, mas retirar duas cartas direto do baralho, quantos arranjos possíveis teríamos?

Proposta de resolução:

$$a) A_{78,4} = \frac{78!}{(78-4)!} = \frac{78!}{74!} = \frac{78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75 \cdot \cancel{74!}}{\cancel{74!}} = 34\,234\,200 \text{ arranjos}$$

$$b) A_{78,2} = \frac{78!}{(78-2)!} = \frac{78!}{76!} = \frac{78 \cdot 77 \cdot \cancel{76!}}{\cancel{76!}} = 6\,006 \text{ arranjos}$$

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 41-42)

Notamos que a resolução proposta para o problema 2.5 (Figura 19) ratifica a opção feita pela resolução por meio de fórmulas, mesmo tendo sido apregoado inicialmente o uso preferencial do princípio multiplicativo.

No segundo (Figura 20), são trabalhados três problemas: um que envolve o cálculo do número de maneiras que estados e regiões brasileiras em um mapa podem ser pintados com cores distintas (problema 2.6a); outro, em que se deseja saber o número máximo de tentativas necessárias para se abrir um cofre cuja senha é formada por quatro algarismos distintos (problema 2.6b) e, o último, que convida o estudante a criar um problema baseado em duas situações: pessoas de sua casa que irão a um *show* de música e escolha de sorvetes em uma sorveteria (problema 2.6 c).

Para os problemas de arranjo dessa seção, o uso da fórmula é a única proposta de resolução que consta na rubrica do caderno do professor. Quanto aos problemas a serem elaborados pelos alunos, a orientação é que o professor os acompanhe nessa tarefa e que peça a alguns deles que se encaminhem à lousa para apresentarem elaborações diferentes de problemas para uma mesma situação.

Figura 20 – Problema 2.6 e proposta de resolução do item a presente no Caderno do professor

2.6 Vamos exercitar

a) Um estudante tem 12 lápis de cores diferentes. Sem repetir cores, de quantas maneiras diferentes ele poderá pintar as 5 regiões do Brasil? Com as cores restantes, de quantas maneiras diferentes podem ser pintados os 4 estados da região Sudeste?

b) O cofre ao lado tem um teclado numérico com 9 números. A senha para abri-lo é formada por 4 algarismos distintos. Determine o máximo de tentativas que são necessárias para conseguir abrir o cofre.



Fonte: <https://bityli.com/fjhmT>.
Acesso em: 16. mar. 2022.

c) Elabore um problema com a seguinte situação:

- Imagine que na sua casa existem 4 pessoas, sendo que duas delas irão a um show de música. Com base nesses dados, elabore um problema, troque com um colega para que ele resolva o seu, e, em seguida, discuta os resultados.
- Em uma sorveteria, os clientes podem escolher entre 3 tipos de casquinha, 2 tipos de cobertura e 15 tipos de sorvete. Com base nesses dados, elabore um problema, troque com um colega, para que ele resolva o seu, e, em seguida, discuta os resultados.

Proposta de resolução:

a) *Brasil:*

$$A_{12,5} = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 94\,040 \text{ possibilidades}$$

São Paulo: já foram utilizadas cinco das 12 cores, restando apenas sete cores distintas, portanto,

$$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 42 \cdot 20 = 840 \text{ possibilidades.}$$

SÃO PAULO, 2022a, p. 42

As situações que figuram nesse segmento são, basicamente, problemas de aplicação do conceito de arranjo simples cuja apresentação se deu por meio das atividades propostas no vídeo *A cartomante*. Nessas atividades, os arranjos (e não somente eles, mas combinações e permutações) são abordados em situações que envolvem a seleção de cartas, mesmo contexto usado nos problemas 2.5a e 2.5b. No vídeo, as definições e fórmulas sobrevivem em meio à conversa das personagens, o que conduz a entender de que se trata de conceitos de fácil assimilação ao expectador – no caso o estudante.

O problema 2.6a e 2.6b abrangem dois contextos distintos (maneira distintas de colorir um mapa e número de tentativas para se abrir um cofre com senha numérica), mas com os mesmos modelos combinatórios implícitos, a seleção.

O problema 2.6c solicita a elaboração de situações combinatórias. Pelos dois contextos sugeridos (4 pessoas em uma casa, das quais 2 irão a um *show* e escolhas de sorvetes em uma sorveteria) é bem possível que o modelo escolhido

pelos estudantes será o de seleção, mesmo porque, até então, nenhum problema de partição fora trabalhado nesse material.

No que concerne às estratégias empregadas, a fórmula do arranjo simples foi a única empregada. Sobre fórmulas, observamos diferenças entre as notações usadas no vídeo e no material didático. Um arranjo de 7 elementos tomados 4 a 4, por exemplo, é expresso no vídeo na forma A_4^7 e nos cadernos do professor e do estudante na forma $A_{7,4}$. O mesmo ocorre com a permutação de n elementos, denotada no vídeo $P(n)$ e P_n nos cadernos. Não encontramos qualquer menção no material físico para essas diferenças de notação.

Em síntese, os problemas de arranjo (simples) propostos se prestaram a aplicar o conceito de arranjo com o emprego de fórmulas como principal estratégia de enfrentamento. Mesmo nas situações de elaboração de problemas pelos alunos, embora não explicitada, é de se supor que se privilegie o uso de fórmulas. Tal suposição se fortalece quando, à conclusão dessa etapa, é recomendado ao professor que **“após desenvolvida a fórmula com os estudantes**, selecione atividades no livro didático da sala para que os estudantes analisem outras situações e coloquem em prática seus conhecimentos” (SÃO PAULO, 2022, p. 42, *grifo nosso*).

O Quadro 23 traz um resumo das observações que reportamos nessa seção.

Quadro 23 – Categorização dos problemas combinatórios da *Atividade 2 – Os desdobramentos do ensino fundamental da contagem* voltados para o ensino de arranjo (simples)

Objetivo	Problema	Unidade de registro	Unidade de Contexto	Tarefa subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Aplicação do conceito de arranjo (simples)	2.5a	de quantas maneiras diferentes essas cartas poderiam ser escolhidas?	Escolha de cartas de um baralho	Escolha de elementos de um conjunto de objetos para formar subconjuntos	S	AS	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Simbólica (fórmula)
	2.5b	quantos arranjos possíveis teríamos?			S	AS		Simbólica (fórmula)
	2.6a	de quantas maneiras diferentes ele poderá pintar...?	Pintura de regiões de um mapa de cores diferentes	Escolha de cores diferentes para pintar regiões diferentes.	S	AS		Simbólica (fórmula)
	2.6b	determine o máximo de tentativas.	Determinação o número máximo de tentativas para se abrir um cofre a partir de uma senha numérica	Escolha de algarismos diferentes para formar senhas diferentes.	S	AS		Simbólica (fórmula)
Elaboração de problemas pelos alunos	2.6c		Seleção de pessoas que irão a um show	Escolha de elementos de um conjunto de pessoas para formar subconjuntos	S	AS		estratégia não especificada
			Escolha de tipos de sorvetes, de	Escolha de elementos de um conjunto de	S	AS		

			cobertura e de casquinha em sua sorveteria	<i>objetos</i> para formar subconjuntos				

Fonte: Elaborado pelo autor

5.4.2.3 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da Atividade 2 para o ensino de arranjo simples

Sobre as classes de situações profissionais para o ensino de arranjo simples, identificamos três delas com base nos objetivos que emergiram de nossa análise: 1. introduzir o conceito de acaso e discutir a relevância da ordem na formação de agrupamentos; 2. levar os estudantes a aplicarem a fórmula do arranjo simples para resolver problemas; 3. levar os estudantes a elaborarem problemas combinatórios.

Para o primeiro objetivo, foi desenhada uma atividade inspirada naquela proposta pelo GP do vídeo *A cartomante*, “visando a desenvolver o conceito de acaso” (SÃO PAULO, 2022a, p. 41). Assim, são simuladas situações de sorteio em que ora o professor deve percorrer a lista de chamada com os olhos vendados e escolher aleatoriamente um estudante, ora deve escrever o nome dos alunos em papeizinhos que devem ser dobrados e colocados em um recipiente opaco, a fim de que sejam selecionados ao acaso. Por meio da mesma simulação, é sugerido que sejam criadas situações que possibilite discutir a relevância ou não da ordem dos elementos selecionados. Pontuamos, desse modo, dois possíveis invariantes: a) simular situações que envolvem sorteios propicia o desenvolvimento da ideia de acaso; b) simular situações de sorteios permite discutir a relevância ou não da ordem dos elementos selecionados nos agrupamentos.

Ainda a respeito do vídeo, é aconselhado ao professor que o exiba duas vezes. Na primeira, os estudantes devem ambientar-se com a situação que lhes é apresentada, e, na segunda, que tomem nota de “conceitos matemáticos importantes” (SÃO PAULO, 2022a, p. 41), tal como ocorre em uma aula expositiva. No vídeo, em vários momentos são enfatizadas as diferenças entre arranjos e combinações, e introduzidas as fórmulas básicas para os cálculos de arranjos, permutações e combinações simples. Com as anotações dos estudantes, o professor deve retomar pontos como a relevância ou não da ordem para arranjos e combinações, a fórmula para o cálculo do número de arranjos simples e a permutação como um caso particular do arranjo. Também é solicitado que o professor retome o vídeo a partir do instante 5min20s “para padronizar o raciocínio” (SÃO PAULO, 2022a, p. 41), ou seja, calcular o arranjo pelo produto $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (p - 1))$ ou pela fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$, com $p \leq n$.

A centralidade que fórmulas tem nesse material didático é evidenciada na seguinte recomendação, já citada anteriormente: “professor, **após desenvolvida a fórmula com os estudantes**, selecione atividades do livro didático da sala para que os estudantes analisem outras situações e coloquem em prática seus conhecimentos” (SÃO PAULO, 2022a, p. 42, *grifo nosso*). Nota-se, portanto, que na perspectiva dos idealizadores desse material, dominar as fórmulas combinatórias passa a ser um pressuposto importante no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Com base nessas observações, inferimos os seguintes invariantes associados a) o uso do vídeo auxilia na compreensão dos conceitos de arranjo, permutação e combinação; b) as fórmulas tornam mais simples a resolução de problemas combinatórios; c) é importante o que o estudante saiba a fórmula para empregá-las adequadamente a situações de arranjos simples; d) dominar as fórmulas combinatórias é importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Por fim, o foco passa a ser a elaboração de problemas combinatórios pelos estudantes. Ao professor compete acompanhá-los na elaboração e convidá-los a partilharem suas produções com os colegas e na lousa para todos. Esse é um aspecto interessante por dar ao aluno oportunidade de elaborar problemas combinatórios e discutir caminhos diferentes de resolvê-los e, por isso mesmo, poderia ser mais explorado. Procuramos compilar essas análises no Quadro 24.

Quadro 24 – Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da *Atividade 2* para o ensino de arranjo simples

Objetivos	Problemas	Unidade de Registro	Unidade de contexto	Invariantes Operatórios Inferidos Teoremas em ação
1.Introduzir os conceitos de acaso e a discussão sobre a relevância da ordem nos agrupamentos	Vídeo A cartomante	- de olhos fechados, percorrer o dedo pela lista de chamada e parar de repente, ou colocar o nome dos estudantes em um saco em que não se pode ver dentro e sortear - destacar que a escolha desse nome foi feita ao acaso - destacar também a importância, ou não, da seleção dos nomes sorteados - permitir que os estudantes expressem oralmente seus conhecimentos, exemplifique com outras possibilidades cotidianas com casos nos quais a ordem importa ou não - apresentar o vídeo <i>A cartomante</i> duas vezes. A primeira para os estudantes entenderem o desenvolvimento da situação. A segunda, para que anotem os conceitos matemáticos importantes - pedir para que os estudantes digam o que anotaram - sistematizar em lousa, retomando os seguintes pontos do vídeo: o total de cartas (espaço amostral); a ideia da importância (ou não) da ordem das cartas (conceito de combinação e arranjo) - para padronizar o raciocínio, se necessário, retomar o vídeo a partir do tempo 5min e 20s.	<i>Momento 2</i> Aprimorando Conhecimentos <i>Atividade 2</i> Os Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem	- simular situações que envolvem sorteios propicia o desenvolvimento da ideia de acaso - simular situações de sorteio permite discutir a relevância ou não da ordem - o uso do vídeo auxilia na compreensão dos conceitos de arranjo, permutação e combinação - as fórmulas tornam mais simples a resolução de problemas de arranjo simples - é importante o estudante saber as fórmulas para empregá-las adequadamente situações de permutação (simples ou com repetição) - dominar as fórmulas combinatórias é importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório - fornecer um contexto auxilia o estudante a elaborar problemas de contagem - é importante que o estudante exponha o problema que elaborou para os colegas de

		- ressaltar que as posições devem ser em quantidade menor que as possibilidades, ou seja, $p \leq n$ - mostra que o cálculo do número de arranjos simples pode ser generalizado pela fórmula de Arranjo de n elementos p a p: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$		classe
2. Aplicar a fórmula do arranjo simples na resolução de problemas combinatórios 3. Levar os estudantes a elaborar problemas combinatórios	2.5a 2.5b 2.6a 2.6b 2.6c	- acompanhar as elaborações das questões - convidar alguns estudantes para ir à lousa apresentar a elaboração diferente, frente a uma mesma situação proposta - selecionar atividades no livro didático da sala		

Fonte: Elaborado pelo autor

5.4.3 Combinação

O estudo de combinação se inicia com um problema (2.7) em que se pretende discutir o princípio multiplicativo e as restrições que se impõem em razão da irrelevância da ordem dos elementos nos agrupamentos. O problema apresenta uma situação que envolve três alunos que elaboraram desafios em que cada um deve escolher dois desses desafios para serem publicados no *site* do grêmio estudantil. Com base nessa situação duas perguntas são feitas.

A primeira questiona que consequências traria do uso do princípio multiplicativo sem restrições. Não há, porém, qualquer menção sobre que restrições seriam essas, dando a entender que o aluno já saberia de que se trata da irrelevância da ordem. A segunda indaga o estudante sobre o que se deve fazer para corrigir o resultado encontrado anteriormente, antecipando o fato de que há erro em considerar o princípio multiplicativo sem restrição, como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Problema 2.7 e proposta de resolução presentes no caderno do professor

Combinação 2.7 Foi solicitado a um grupo de estudantes que elaborasse alguns desafios para o site do grêmio. Como Alice elaborou 3, Matheus elaborou 4 e Gabriel elaborou 5, o responsável pelo site pediu que cada um deles escolhesse dois dos seus desafios. Considere os desafios elaborados por Alice como A_1, A_2 e A_3; os elaborados por Matheus como M_1, M_2, M_3 e M_4 e os elaborados por Gabriel como G_1, G_2, G_3, G_4 e G_5. Descreva todos os agrupamentos possíveis para escolha de Alice, de Matheus e de Gabriel na escolha de seus desafios. • Se usarmos o Princípio Multiplicativo, sem restrições, o que acontece? • O que é necessário fazer ao resultado do Princípio Multiplicativo para obtermos o resultado correto?

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 42)

Para desenvolver esse problema, ao professor é solicitado que:

[...] dê liberdade ao estudante e verifique se algum irá utilizar o Princípio Multiplicativo (P.M.) sem restrições. Se isso acontecer, é importante que liste as possibilidades em que o estudante entenderá que escolher o desafio 1 e o desafio 2 ou o desafio 2 e o desafio 1, a escolha é a mesma, o que leva à necessidade dividir por 2 os resultados. (SÃO PAULO, 2022, p.43).

A proposta de solução do problema, então, é então apresentada com base no princípio multiplicativo e na correção do resultado dada a irrelevância da ordem.

Discussão semelhante (Figura 22) é feita no problema seguinte (2.8) em que se pretende formar um grupo com três jogadores de vôlei para representar a equipe, dispondo de 6 jogadores ao todo. Como proposta de resolução, orienta-se que seja usado o princípio multiplicativo para o cálculo dos arranjos possíveis e que se divida

o resultado pelo número de permutações de três elementos, dado que a mudança da ordem dos elementos não gera novos agrupamentos.

Figura 22 – Problema 2.8 e proposta de resolução presentes no caderno do professor

2.8 Dentre os 6 jogadores de vôlei de um time, três deles irão representar o time em um evento. Considerando os jogadores como A, B, C, D, E e F, junte-se ao seu colega e:

- liste todos os agrupamentos possíveis para representar o time no evento, que satisfaçam a condição dada.
- descubra, utilizando o Princípio Multiplicativo, de quantos modos pode-se escolher esses 3 representantes entre os jogadores?
- O que é preciso fazer para que o resultado do Princípio Multiplicativo se iguale com a quantidade de agrupamentos possíveis?

Proposta de resolução.

Os agrupamentos possíveis (A, B, C) ; (A, B, D) ; (A, B, E); (A, B, F); (A, C, D); (A, C, E); (A, C, F); (A, D, E); (A, D, F); (A, E, F); (B, C, D); (B, C, E); (B, C, F); (B, D, E); (B, D, F); (B, E, F); (C, D, E); (C, D, F); (C, E, F); (D, E, F). Temos 20 agrupamentos possíveis.

Para a primeira escolha do representante, temos seis atletas, para a segunda escolha, temos quatro atletas e para a terceira escolha temos três atletas, daí $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, porém, essa solução está incorreta, para chegar a 20 agrupamentos, há necessidade de dividir o resultado por seis.

Se o estudante imaginar o padrão de formação de todos os 120 agrupamentos, ele vai observar que o mesmo grupo se repetiu seis vezes. Vamos escolher três jogadores A, B e C. Com eles podem ser descritos os agrupamentos (A, B, C); (A, C, B); (B, A, C); (B, C, A); (C, A, B) e (C, B, A), com esses três jogadores temos seis grupos, mas todos com a mesma escolha, quaisquer três jogadores gerarão 6 grupos sempre com a mesma escolha, por esse motivo a divisão por 6, o mesmo ocorre com todos os possíveis agrupamentos.

Então, temos:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$$

SÃO PAULO, 2022a, p. 43-44

Logo em seguida é apresentada a fórmula para o cálculo das combinações, sem estabelecer qualquer relação entre ela e o que fora explorado nos problemas. “De um modo geral, quando temos que escolher p (objetos, pessoas) entre n (objetos, pessoas), podemos utilizar: $C_p^n = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ ” (SÃO PAULO, 2022, p. 44).

Após essa introdução, é proposto um problema (2.9) que envolve a formação de subconjuntos a partir dos números ímpares com um único algarismo. A Figura 23 apresenta essa questão com a solução proposta para os itens a e b. Os demais foram resolvidos do mesmo modo que o item b.

Outro problema (2.10) se segue e nesse pede-se aos estudantes que calculem o número de modos distintos que se pode escolher quatro números dentre doze, sendo seis deles positivos e seis negativos, de sorte que o produto seja um número positivo.

Figura 23 – Problema 2.9 e proposta de resolução para os itens a e b presentes no caderno do professor

- 2.9 Vamos recordar: do conjunto {a, b, c} podemos extrair 8 subconjuntos: { }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c} e {a, b, c}. Temos 3 subconjuntos com um elemento, três subconjuntos com dois elementos, um subconjunto com três elementos, também temos o conjunto vazio. Agora é com você!
- Com um conjunto formado pelos números ímpares de um algarismo, quantos:
- subconjuntos podemos formar?
 - subconjuntos de 2 elementos podemos formar?
 - subconjuntos de 3 elementos podemos formar?
 - subconjuntos de 4 elementos podemos formar?
 - subconjuntos de 5 elementos podemos formar?

Proposta de resolução:

Primeiramente, os estudantes precisam identificar os elementos que pertencem a esse conjunto: {1, 3, 5, 7, 9}.

- Como o conjunto é formado por 5 elementos, então, cada elemento pode pertencer, ou não pertencer, ao subconjunto (cada elemento tem 2 opções, de estar contido ou não estar contido): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ subconjuntos podem se formar.*
- Subconjunto com dois elementos: precisa-se escolher dois elementos entre os 5 elementos; para a primeira escolha, qualquer um dos cinco elementos, e para a segunda escolha, qualquer um dos 4 elementos restantes, e deve-se lembrar que o {1, 3} = {3, 1} daí, $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$*

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 2 = 10$$

SÃO PAULO, 2022a, p. 44

Nos dois casos, a proposta de resolução apresentada na rubrica traz a solução, ora calculada com base no princípio de multiplicativo com a adequação da resposta dada a irrelevância da ordem, ora calculada usando a fórmula. Para o segundo problema, alerta-se o professor para a “necessidade de levar os estudantes a analisarem quando o produto de 4 números será positivo” (SÃO PAULO, 2022, p. 45). Essa análise acarretará a aplicação do princípio aditivo, visto que o problema deverá ser dividido em subproblemas a partir de 3 possibilidades: 4 fatores positivos, 4 negativos, e, 2 positivos juntamente com 2 negativos, como ilustra a Figura 24.

Notamos, aqui, que os problemas combinatórios explorados cumprem duas funções: introduzir o conceito de combinação a partir de adequações que devem ser consideradas quando da aplicação do princípio multiplicativo; aplicar a fórmula para o cálculo de combinações simples. Para a primeira função, foram tomados problemas em contextos que simulam situações reais. Para a segunda, os problemas foram contextualizados no próprio campo da matemática, com a formação de subconjuntos e cálculo de produto de fatores inteiros. Em todos os casos, o modelo combinatório empregado foi o de seleção visto que a tarefa

implícita nas situações consistia na escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos.

Figura 24 – Problema 2.10 e proposta de resolução presentes no caderno do professor

2.10 Junte com seu colega, que vamos propor um desafio a vocês!

Dentre seis números positivos e seis números negativos, de quantos modos pode-se escolher quatro números cujo produto seja positivo?

Antes, respondam: quando o produto de dois números será positivo?

Proposta de resolução:

Professor, há necessidade de levar os estudantes a analisar quando o produto de 4 números será positivo.

Pode-se ter quatro números positivos. Dentre os seis números positivos, posso escolher quatro deles, não importando a ordem de escolha. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ (primeira escolha, qualquer um dos 6 números, segunda escolha, qualquer um dos outros cinco, terceira escolha, qualquer um dos quatro, e o quarto número, qualquer um dos outros três). Esses quatro números escolhidos podem ser escolhidos em qualquer ordem. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (o primeiro pode ser qualquer um dos quatro, o segundo pode ser qualquer um dos outros três, o terceiro qualquer um dos outros dois e, para o quarto número, só resta um).

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$$

Pode-se ter quatro números negativos, o procedimento é o mesmo do anterior. $\frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 3 \cdot 5 = 15$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$$

Pode-se ter dois números positivos e dois números negativos. Dentre os seis números positivos, posso escolher dois deles, não importando a ordem de escolha. $6 \cdot 5$ (primeira escolha, qualquer um dos seis números, segunda escolha, qualquer um dos outros cinco).

Esses dois números positivos escolhidos podem ser escolhidos em qualquer ordem, $2 \cdot 1$ (o primeiro pode ser qualquer um dos dois, e para a escolha do segundo número, só resta um).

$$\frac{\cancel{6} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 3 \cdot 5 = 15$$

Esses dois números negativos escolhidos podem ser escolhidos em qualquer ordem, $2 \cdot 1$ (o primeiro pode ser qualquer um dos dois, e para a escolha do segundo número, só resta um).

$$\frac{\cancel{6} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 3 \cdot 5 = 15$$

Então, os 15 números positivos escolhidos combinam com os 15 números negativos.

$$15 \cdot 15 = 225$$

Temos, então, $15 + 15 + 225 = 255$ maneiras de se obter um produto negativo, com seis números positivos e seis números negativos.

Nas propostas de resolução foram empregadas a listagem, o princípio multiplicativo e a fórmula para o cálculo das combinações simples, sendo as duas primeiras usadas conjuntamente. Dado que os agrupamentos construídos não tiveram mais que 10 elementos, optou-se pelo uso da listagem para evidenciar que a troca de ordem não formava novos agrupamentos. Em seguida o cálculo foi feito com base no princípio multiplicativo, dividindo o número de arranjos dos n elementos disponíveis tomados p a p pelo número de permutações dos p elementos, como uma espécie de correção em razão da irrelevância da ordem. Tal estratégia, porém, é abandonada a partir do momento em que a fórmula é apresentada. Não há, sequer, uma tentativa de conectar o procedimento pautado no princípio multiplicativo à fórmula de combinações simples. Tudo se passa como se fossem caminhos distintos para resolver o mesmo problema. Há de se pontuar, porém, que dada a natureza da tarefa requerida nos problemas 2.9a e 2.10 foi necessário o emprego dos princípios multiplicativo (na determinação do total de subconjuntos) e aditivo (na determinação do total de maneiras de se obter um produto positivo).

Também aqui observamos a mesma diferença entre as notações de arranjo simples usadas no vídeo e no material didático, ou seja, os arranjos de n elementos tomados p a p foram denotados na forma A_p^n no vídeo, enquanto nos cadernos do professor e do estudante, são apresentadas na forma $A_{n,p}$. No caso da combinação, observamos uma mudança de padrão na notação no próprio material físico que traz a combinação de n elementos tomados p a p expressa na forma C_n^p , conforme mostra a Figura 25. Os motivos para tal alteração não foram explicitados.

Figura 25 – Fórmula para o cálculo do número de combinações simples⁵³

De um modo geral, quando temos que escolher p (objetos, pessoas) entre n (objetos, pessoas), podemos utilizar:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 44)

Também na questão 2.8, o uso do princípio aditivo é apresentado na determinação do total de maneira de se obter um produto positivo⁵⁴. Essa foi a primeira situação em que foi necessário o emprego desse princípio, embora ele

⁵³ A ausência da exclamação (!) logo após os parênteses entendemos que tenha sido falha na impressão, uma vez que em outros lugares, na proposta de resolução, ela está presente. (N.A.)

⁵⁴ No caderno do professor, a rubrica apresenta o seguinte texto: “Temos, então, $15 + 15 + 225 = 255$ maneiras de se obter um produto **negativo**, com seis números positivo e seis números negativo” (SÃO PAULO, 2022a, p. 46, *grifo nosso*). Contudo, o enunciado solicitava que o produto fosse positivo.

esteja elencado nos objetos de conhecimento e nos pressupostos metodológicos que figuram no caderno do professor.

O resumo das observações feitas nessa seção encontra-se no Quadro 25.

Quadro 25 – Categorização dos problemas combinatórios da *Atividade 2 – Os desdobramentos do princípio fundamental da contagem* voltados para o ensino de combinação

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Introduzir o conceito de combinação	2.7	<i>descreva todos os agrupamentos possíveis.</i>	escolha de desafios elaborados por estudantes	escolha de elementos de um conjunto de objetos para formar subconjuntos	S	CS	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n naturais - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades	listagem
		<i>se usarmos o princípio multiplicativo sem restrições, o que acontece?</i>						simbólica (princípio multiplicativo)
		<i>o que é necessário fazer ao resultado do princípio multiplicativo para obtermos o resultado correto?</i>						simbólica (princípio multiplicativo)
	2.8	<i>liste todos os agrupamentos possíveis.</i>	escolha de representantes entre jogadores de um time de vôlei	escolha de elementos de um conjunto de objetos para formar subconjuntos	S	CS		listagem
		<i>resolva utilizando princípio multiplicativo.</i>						simbólica (princípio multiplicativo)
		<i>o que é preciso fazer para que o resultado do princípio multiplicativo se iguale com a quantidade de</i>						simbólica (princípio multiplicativo)

		<i>agrupamentos possíveis?</i>						
Aplicar a fórmula para o cálculo de combinações simples	2.9 ^a	<i>quantos subconjuntos podem ser formados?</i>	formação de subconjuntos do conjunto de números ímpares de um algarismo	escolha de elementos distintos para formar conjuntos distintos	S	CS		simbólica (princípio multiplicativo)
	2.9b	<i>quantos subconjuntos de 2 elementos podemos formar?</i>						simbólica (fórmula)
	2.9c	<i>...de 3 elementos podemos formar?</i>						
	2.9d	<i>...de 4 elementos podemos formar?</i>						
	2.9e	<i>...de 5 elementos podemos formar?</i>						
	2.10	<i>de quantos modos podemos escolher números cujo produto seja positivo?</i>	escolha de quatro números cujo produto é positivo	escolha de elementos de um conjunto de números para formar subconjuntos	S	CS		simbólica (fórmula e princípio aditivo)

Fonte: Elaborado pelo autor

5.4.3.1 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da Atividade 2 para o ensino de combinações simples

Como já mencionado, para esse segmento identificamos classes de situações atreladas a dois objetivos: a) introduzir os conceitos de combinação; b) aplicar a fórmula para o cálculo do número de combinações simples em problemas dessa natureza.

Para alcançar o primeiro objetivo, duas situações (2.7 e 2.8) são propostas para explorar a listagem e o princípio multiplicativo como estratégias de resolução. A ideia é fazer o aluno perceber, por comparação, que só a aplicação do princípio multiplicativo não resolve o problema. Espera-se que tal estratégia seja usada por algum dos estudantes e, por essa razão, é solicitado ao professor que “dê liberdade ao estudante e verifique se algum irá utilizar o Princípio Multiplicativo (P.M.) sem restrições” (SÃO PAULO, 2022a, p. 43). A solicitação dirigida ao professor para que dê liberdade aos estudantes revela, em certa medida, que a opção metodológica da resolução de problemas de fato não é empregada visto que os estudantes só têm liberdade para resolver os problemas à sua maneira quando essa lhe é concedida.

Essa permissão passa a ser revogada quando se inicia a busca pelo segundo objetivo. A fórmula para o cálculo do número de combinações, assim como as anteriores, é apresentada sem que fosse aproveitada a estratégia utilizada nos problemas 2.7 e 2.8, como se essa generalização fosse algo imediato. A aplicação da fórmula aparece em duas situações contextualizadas dentro da própria matemática: na determinação de subconjuntos de um conjunto com 5 elementos (2.9), e no cálculo de produtos positivos de quatro fatores quando estão disponíveis 6 fatores positivos e 6 negativos (2.10). Nessa última questão, há uma advertência expressa na rubrica: “professor, há necessidade de levar os estudantes a analisarem quando o produto de 4 números será positivo” (SÃO PAULO, 2022a, p. 45). Tal fato traz alguns questionamentos: essa recomendação é realmente necessária? estudantes do 2º. ano do ensino médio não são capazes de pensar nas diferentes maneiras de se obter um produto positivo a partir de 4 fatores inteiros, sem que o professor intervenha?

No Quadro 26 encontram-se compiladas as análises feitas nessa seção, destacando as situações profissionais e os invariantes operatórios inferidos.

Quadro 26 – Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da *Atividade 2* para o ensino de combinação simples

Objetivos	Problemas	Unidade de Registro	Unidade de contexto	Invariantes Operatórios Inferidos Teoremas em ação
1.Introduzir os conceitos de combinação 2. Aplicar a fórmula para o cálculo do número de combinações simples.	2.7 2.8 2.9a 2.9b 2.9c 2.9d 2.9e 2.10	- dar liberdade ao estudante e verificar se algum irá utilizar o Princípio Multiplicativo (P.M.) sem restrições. - listar as possibilidades em que o estudante entenderá que escolher o desafio 1 e o desafio 2 ou o desafio 2 e o desafio 1, a escolha é a mesma, o que leva à necessidade de dividir por 2 os resultados. - levar os estudantes a analisar quando o produto de 4 números será positivo	<i>Momento 2</i> Aprimorando Conhecimentos <i>Atividade 2</i> Os Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem	- comparar os resultados obtidos por listagem e pela aplicação do princípio multiplicativo favorece a compreensão do conceito de combinação - é importante deixar que o estudante resolva a situação usando as ferramentas cognitivas de que dispõe - as fórmulas tornam mais simples a resolução de problemas de arranjo simples - é importante o estudante saber as fórmulas para empregá-las adequadamente situações de permutação (simples ou com repetição) - dominar as fórmulas combinatórias é importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório

Fonte: Elaborado pelo autor

5.5 Atividade 3 – Aprimorando a fluência de elaboração de problemas

O Momento 3 – Aprofundando Conhecimentos – é proposto com base no desenvolvimento da *Atividade 3 – Aprimorando a fluência de elaboração de problemas* – que apresenta um conjunto de situações de contagem que envolvem os conceitos de permutação, arranjo e combinação. Esse título antecipa um dos objetivos dessa seção. Além desse, a capacidade de resolver problemas combinatórios é uma meta a ser alcançada:

espera-se que os estudantes, ao desenvolverem as atividades propostas, consigam atingir a habilidade de resolver e elaborar situações-problema que envolvam agrupamentos de objetivos na quais a ordem de seus elementos influencia a contagem de outras em que isso não ocorre, além de situações de investigação de contagem, como a quantidade das formas de organização de grupos de pessoas, objetos, números etc. (SÃO PAULO, 2022a, p. 46)

Nas orientações para o desenvolvimento dessa atividade, logo de início, é enfatizada a importância não somente da resolução, mas da elaboração de problemas e das investigações matemáticas por parte dos estudantes, com o levantamento de hipóteses e posterior validação. Quanto às ações do professor, salienta-se que:

É importante acompanhar as atividades, propondo questionamentos e reflexões, para que busquem as respostas, estimulando-os a acreditarem em suas capacidades, e a terem iniciativa. (SÃO PAULO, 2022, p. 46).

A expectativa expressa na rubrica é que, com essas atividades, os estudantes desenvolvam as habilidades de resolução e elaboração de problemas de contagem em que se discuta a importância da ordem dos elementos nos agrupamentos. Por esse motivo, os problemas apresentados buscam retomar “o **aspecto procedimental** da *Atividade 2*”. (SÃO PAULO, 2022a, p. 46, *grifo nosso*).

São propostos, assim, três problemas dos quais o primeiro (3.1) e o terceiro (3.3) abordam o conceito arranjo com repetição e, o segundo (3.2), o de permutação simples. Observamos, também, o uso de situações extraídas do ENEM⁵⁵ do ano de 2010 (segundo problema) e da primeira fase da OBMEP⁵⁶ realizada em 2006 (terceiro problema). Trata-se de problemas pautados, basicamente no modelo de seleção, com exceção do problema 3.3 que também pode ser abordado do ponto de vista de distribuição.

⁵⁵ Exame Nacional do Ensino Médio

⁵⁶ Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (no ano de 2006 essa era uma olimpíada ainda voltada exclusivamente para as instituições públicas de educação básica).

Esses 3 problemas apresentam propostas de solução pautadas no uso do princípio multiplicativo, listagem e língua natural, para se afastar da ideia de que basta saber os números do enunciado e substituí-los na fórmula. No entanto, problemas dessa natureza não figuram dentre aqueles da *Atividade 2 – Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem* – para os quais o uso de fórmulas foi o procedimento mais empregado nas propostas de resolução. Percebe-se, então, uma incoerência entre o que é apregoado nos *pressupostos metodológicos* (SÃO PAULO, 2022a, p. 34) e aquilo que de fato é realizado nas propostas de solução das questões da *Atividade 2* quando é privilegiado o uso de fórmulas como única maneira de resolvê-los. A fim de exemplificar esses problemas, a Figura 26 traz o problema 3.1 e sua proposta de resolução.

Figura 26 – Problema 3.1 e proposta de resolução presentes no caderno do professor

3.1 A senha do cadeado de uma mala de viagem é composta por números de 0 a 9. Sabendo que a senha possui 3 algarismos que podem se repetir, qual a quantidade de senhas que poderá ser formada?

Proposta de resolução:
Resolução: A senha do cadeado da mala é composta por 3 algarismos de 0 a 9, que podem se repetir. O primeiro algarismo que compõe a senha pode ser escolhido de 10 modos, o segundo algarismo de 10 modos e o terceiro algarismo também pode ser escolhido de 10 modos. A resposta é $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.



Fonte: <https://pixabay.com/pt/photos/castelo-zahlenschloss-1020234/>.
Acesso em: 17 mar. 2022.

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 47)

Por fim, são apresentadas as situações (3.4 e 3.5) que, conforme o que se encontra expresso nas rubricas, visam levar o estudante a criar problemas que envolvam os princípios aditivo e multiplicativo.

No problema 3.4 é solicitado ao aluno que “elabore um problema que envolva o princípio aditivo” (SÃO PAULO, 2022a, p. 48). Para tanto, é apresentada uma situação introdutória (Figura 27) que aborda uma competição entre estudantes em várias modalidades esportivas. Todavia, somente em um dos problemas propostos, até esse ponto, fora exigido o emprego desse princípio. Esse fato pode contribuir para que estudantes apresentem dificuldades na sua elaboração, pela pouca familiaridade com problemas combinatórios baseados no princípio aditivo.

Figura 27 – Situação introdutória do problema 3.4 presente no Caderno do professor

3.4 Na Escola Jardim das Flores, haverá uma competição entre vários tipos de esportes, da qual os estudantes participarão. A seguir, encontra-se um quadro com todos eles.	
Atletismo	Basquetebol
Ciclismo	Futebol
Handebol	Ginástica
Natação	Tênis de Mesa
Triatlo	Voleibol
Fonte: Elaborado pelos autores.	

Fonte: SÃO PAULO (2022a, p. 48)

No mesmo problema (3.4) é solicitado que, uma vez elaborada a questão, o aluno compartilhe com um colega a fim de que a resolva e, em seguida, a corrija. Para tanto, alguns passos devem ser seguidos: a) pensar no contexto do problema, ou seja, observar os dados que constam na introdução; b) destacar os tipos de esportes que aparecem na tabela com a sugestão que o estudante faça uma pesquisa, se necessário; c) pensar nos agrupamentos de equipes que podem ser feitos em função dos tipos de esportes; d) elaborar uma situação-problema que mobilize conceitos do princípio aditivo.

O enunciado da questão 3.5 tem a intenção de aguçar a curiosidade do estudante e levá-lo a investigar o que vem a ser um palíndromo. A seguir ele é convidado a elaborar “uma situação problema, utilizando o princípio fundamental da contagem” (SÃO PAULO, 2022a, p. 49) em um contexto de formação de palíndromos em que haverá repetição de letras ou números. A repetição de elementos também foi um ponto a ser considerado nos problemas 3.1 e 3.3. Assim como no problema 3.4, solicita-se ao estudante que compartilhe seu problema com um colega para que ele a resolva.

Nessa etapa, não identificamos invariantes operatórios associados ao ensino de combinatória inferidos a partir das ações sugeridas ao professor, visto que não observamos nenhuma que se preocupasse com a especificidade do saber combinatório como conhecimento matemático a ser apreendido. Elas estão mais ligadas à orientação e motivação dos estudantes no desenvolvimento da *Atividade 3*.

Professor, faz-se necessário que você realize a intervenção durante o desenvolvimento da atividade. Por isso, acompanhe todo o processo, e questione os estudantes sobre os resultados obtidos, analisando a participação no processo de investigação e experimentação. Verifique se eles se **apropriaram dos conhecimentos mínimos** sobre o tema proposto. Para isso, sugerimos que você oriente os estudantes a partir

das etapas de elaboração de uma situação problema, [...]. (SÃO PAULO, 2022, p. 48, *grifo nosso*).

Por outro lado, ao solicitar que o professor verifique se os estudantes se apropriaram de conhecimentos mínimos nos indagamos: que conhecimentos mínimos são esses? Observamos, assim, haver pouca precisão nas orientações dadas ao professor que usa esse como recurso para suas aulas de combinatória.

No Quadro 27 foram compiladas as análises feitas a partir das situações abordadas na *Atividade 3 – Aprimorando a fluência na elaboração de problemas*.

Quadro 27 – Categorização dos problemas combinatórios da *Atividade 3 – Aprimorando a fluência na elaboração de problemas* voltados para o ensino de arranjo (simples)

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação simbólica
Retomar o aspecto procedimental da <i>Atividade 2</i>	3.1	qual a quantidade de senhas que poderá ser formada?	determinação do número de senhas possíveis para um cadeado.	escolha de algarismos diferentes para formar senhas diferentes	S	AR	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - É possível a repetição de elementos - A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Listagem Simbólica (princípio multiplicativo)
	3.2	o tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de?	formação de trajetos possíveis para ligar cidades diferentes.	escolha de elementos de um conjunto de objetos para formar subconjuntos	S	PS	Para os casos sem repetição: - todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez - a ordem dos elementos gera novas possibilidades	Simbólica (princípio multiplicativo)
	3.3	em quantas ordens diferentes os seis podem sentar-se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?	maneiras distintas de pessoas se sentarem em um banco de praça.	distribuição de pessoas em posições diferentes com o propósito de formar configurações diferente. escolha de pessoas para ocupar posições diferentes com o propósito de	D/S	AR	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - É possível a repetição de elementos - A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Simbólica (princípio multiplicativo)

				formar configurações diferentes				
Elaboração de problemas pelos alunos	3.4	utilizando os conceitos do princípio aditivo, elabore uma situação-problema.	formação de equipes de acordo com as modalidades esportivas	escolha de pessoas para ocupar posições diferentes com o propósito de formar configurações diferentes	S	-	-	Simbólica (princípio aditivo)
	3.5	elabore uma situação-problema, utilizando o princípio fundamental da contagem.	formação de palíndromos	escolha de entes (letras ou algarismos) diferentes para ocupar posições diferentes com o propósito de formar configurações diferentes	S	-	-	Simbólica (princípio multiplicativo)

Elaborada pelo autor

5.6 Atividade 4 – #Mão na massa.

O Momento 4 – Verificando o que Você Aprendeu – é dedicado à *Atividade 4 – #Mão na Massa*. De acordo com o que está expresso na rubrica, a *Atividade 4* tem o propósito de oportunizar ao estudante momentos de elaboração de problemas para que se aproprie do fazer e da linguagem característicos da matemática, “refletindo acerca dos seus próprios procedimentos de resolução” (SÃO PAULO, 2022, P. 49). Ao professor é reservada a tarefa de incentivá-lo nesse processo.

5.6.1 Análise dos problemas da *Atividade 4 - #Mão na massa*

As situações propostas na *Atividade 4* exploram a elaboração e a resolução de problemas de contagem em quatro contextos fornecidos aos estudantes: na situação em que já é dado o diagrama de árvores (4.1); na escolha de comida, bebida e sobremesa em que a resposta deva ser 18 (4.2); na resposta dada com base em tabela ou árvore de possibilidade para um problema que contenha a pergunta: *de quantos modos diferentes ele podem posicionar-se para a foto?* (4.3); na conclusão da seguinte situação: *Rafaela tem 4 livros de Matemática, 3 de Língua Portuguesa e 2 de Física para serem colocados em uma prateleira...* (4.4).

Embora seja tarefa do estudante construir problemas a partir dos contextos fornecidos, observamos que tais contextos: a) remetem a modelos combinatórios de seleção (4.1, 4.2 e 4.3) e de distribuição (4.3 e 4.4); b) envolvem somente dois conceitos combinatórios, o produto cartesiano (4.1 e 4.2) e a permutação simples (4.3 e 4.4); c) sugerem, como estratégias de resolução, soluções pautadas na árvore de possibilidades, em tabelas e no princípio multiplicativo. O Quadro 28 resume essas observações.

Quadro 28 – Categorização dos problemas combinatórios da *Atividade 4 – #Mão na Massa*

Objetivo	Problema	Unidade de registro	Unidade de contexto	tarefa subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
oportunizar momentos de elaboração de problemas	4.1	elabore o enunciado e resolva	elaboração do enunciado de um problema em que é fornecido o diagrama de árvores	Escolha de elementos de um conjunto de objetos para formar subconjuntos	S	PC	- Dado dois (ou mais) conjuntos distintos, eles serão combinados para formar um novo conjunto - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado	Árvore de possibilidades
	4.2	elabore uma situação problema e resolva pelo princípio multiplicativo	elaboração de um problema sobre escolha de comida, bebida e sobremesa	Escolha de elementos de um conjunto de objetos para formar subconjuntos	S	PC		Simbólica (princípio multiplicativo)
	4.3	elabore uma situação problema com uma tabela ou árvore de possibilidades e que apresente a pergunta: de quantos modos diferentes eles podem posicionar-se para a foto?	elaboração de um problema que envolve o posicionamento em uma foto	Distribuição de pessoas para ocupar posições diferentes em uma fotografia Escolha de pessoas para ocupar posições diferentes com o propósito de tirar uma fotografia	D/S	PS	Para os casos sem repetição: - todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez - a ordem dos elementos gera novas possibilidades	Árvore de possibilidades Tabular
	4.4	conclua o problema	elaboração de problema que envolve a colocação de livros em	Distribuição de pessoas para ocupar posições diferentes em uma fotografia	D	PS		–

			uma prateleira					

Fonte: Elaborado pelo autor

5.6.2 Classes de situações profissionais e invariantes operatórios inferidos da Atividade 4

Para o desenvolvimento da Atividade 4 o professor é orientado a que:

[...] durante a elaboração das situações-problema, caminhe pela sala e observe como os estudantes estão trabalhando nas atividades, faça as intervenções necessárias de modo a estimulá-los na realização delas. Quanto aos problemas formulados, você poderá sortear alguns deles para que os estudantes socializem com a turma, em seguida, sugere-se que os oriente a resolver os problemas dos colegas. Para finalizar, eles poderão montar uma exposição com os problemas elaborados. (SÃO PAULO, 2022, p. 50)

As orientações que constam na Atividade 4 para as ações do professor durante seu desenvolvimento estão compiladas no Quadro 29.

Quadro 29 – Orientações para as ações do professor na abordagem da Atividade 4 – #Mãos na massa

Passos	Ações do Professor
1	Incentivar (o estudante na elaboração de situações-problema) durante a elaboração das situações-problema
2	Caminhar pela sala
3	Observar como os estudantes estão trabalhando nas atividades.
4	Fazer intervenções necessárias de modo a estimulá-los na realização delas.
5	Estimular na realização das atividades propostas.
5	Sortear alguns dos problemas formulados para que os estudantes socializem com a turma.
6	Orientar a resolver os problemas dos colegas.
7	Propor aos estudantes que montem uma exposição com os problemas que elaboraram

Fonte: Adaptado de SÃO PAULO (2022, p. 49-50)

A análise dessas ações não nos permitiu inferir invariantes operatórios ligados ao ensino de combinatória, pois, assim como na Atividade 3, as ações sugeridas são de cunho mais geral e poderiam ser consideradas, não somente para o ensino de combinatória, como também para outro objetivo matemático.

5.7 Considerações sobre a avaliação e orientações para a recuperação

Ao final das atividades, o caderno do professor traz orientações a respeito dos processos de avaliação e de recuperação. Para tanto, são apresentadas inicialmente as aprendizagens esperadas ao final do trabalho realizado para o ensino de combinatória. De acordo com o que está expresso na rubrica, é esperado que o estudante seja capaz de diferenciar situações em que deve considerar (ou não) a ordem dos elementos dos agrupamentos, tanto na resolução quanto na elaboração de problemas de contagem. O professor é orientado para que “estime os estudantes a criar situações-problema envolvendo contagem, senhas, formas de

organização de grupos de pessoas, objetos, números, entre outras situações cotidianas” (SÃO PAULO, 2022, p. 50).

Segundo as orientações, a avaliação das atividades do *Currículo em Ação* deve ser feita continuamente. Por isso, passa a ser de responsabilidade do professor atenção às dificuldades que os estudantes possam vir a enfrentar e propor atividades de recuperação quando se fizerem necessárias. Nesse sentido, o professor é orientado para que:

[...] dedique um tempo de sua aula para a discussão dos erros mais frequentes encontrados no processo, questionando os estudantes sobre suas respostas, causando conflitos cognitivos e avanço das aprendizagens. (SÃO PAULO, 2022, p. 50).

E ainda:

Destaca-se, também, a correta identificação da natureza da dificuldade apresentada pelos estudantes: se está relacionada a alguma defasagem anterior (erros em operações básicas), ou se está ligada à especificidade de um determinado conceito ou procedimento operatório. (SÃO PAULO, 2022, p. 50).

Finalmente, é recomendado o uso de situações contextualizadas que ressaltem o protagonismo dos estudantes, como forma de minorar as dificuldades de aprendizagem e de atingir os objetivos traçados para o ensino de combinatória.

As recomendações sobre o tratamento dos erros e dificuldades dos alunos ilustram a preocupação com possíveis fragilidades operacionais, sejam elas anteriores ou aquelas ligadas ao manuseio das fórmulas. Não são apresentadas discussões mais aprofundadas sobre o papel do erro na construção do conhecimento combinatório tampouco são consideradas as especificidades inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático.

5.8 Material digital do programa *Currículo em ação*: slides e tarefas

Conforme pontuamos, no segundo semestre de 2023, os recursos impressos (cadernos do professor e do aluno) disponibilizados bimestralmente às escolas da rede estadual paulista de ensino foram substituídos por outro no formato digital. Nesse, cada aula corresponde a apresentações em *slides* sobre o tema a ser abordado com objetivos, introdução, definições e fórmulas, exercícios resolvidos e propostos, bem como um *link* de acesso a tarefas *on-line* disponibilizadas na plataforma do CMSP.

As aulas de combinatória encontram-se em 11 apresentações assim distribuídas:

1. Princípio Fundamental da Contagem I – apresenta o princípio multiplicativo e suas aplicações;
2. Princípio Fundamental da Contagem II – busca dar continuidade à aula anterior para abordar outras situações de aplicação do princípio multiplicativo, em especial situações de arranjos simples e com elementos repetidos sem nomeá-los;
3. Permutação I – apresenta o conceito de permutação, a fórmula para o cálculo de permutações simples e suas aplicações;
4. Permutação II – apresenta situações de permutação com elementos repetidos, fórmula e aplicações;
5. Arranjo I – apresenta o conceito de arranjo simples, a fórmula associada e situações de aplicação;
6. Arranjo II – apresenta o conceito de arranjo com elementos repetidos, bem como fórmula e situações de aplicação;
7. Arranjo III – abarca uma miscelânea de situações de arranjos simples e com elementos repetidos;
8. Combinação I – apresenta o conceito de combinação simples, a fórmula associada e aplicações;
9. Combinação II – apresenta o conceito de combinação com elementos repetidos, bem como sua fórmula e situações de aplicação;
10. Combinação III – traz situações de combinação simples com algumas restrições;
11. Princípio Fundamental da Contagem e Probabilidade – apresenta o princípio multiplicativo como ferramenta de determinação do número de elementos do espaço amostral em situações probabilísticas.

Diferentemente do material impresso, em que a combinatória é abordada em quatro momentos distintos, com orientações e sugestões de ações para o uso desse recurso, as apresentações limitam-se a desenvolver a temática da aula obedecendo, quase sempre, a mesma estrutura: introdução, definições e fórmulas, problemas de aplicação trazendo a resolução (indução de solução), e um *link* de acesso às tarefas *on-line*. A tarefa consiste, basicamente, em resolver dois problemas de múltiplas escolhas sobre o assunto tema da aula, bem parecidos com os que se encontram resolvidos nos *slides*. Verifica-se, assim, semelhança com a maneira como alguns livros didáticos abordam os conteúdos matemáticos e com a chamada aula

expositiva, ou seja, aquela em que o docente expõe o conteúdo partindo de sua definição, seguido de exemplos e problemas semelhantes aos exemplos.

Além dos dois problemas propostos como tarefas aos estudantes ao final de cada aula, outros são trabalhados no decorrer dos *slides* em 3 seções: *Para começar*, *Na prática* e *Aplicando*. Optamos por analisar somente os problemas das seções, *Na prática* e *Aplicando*, assim como os dois problemas que figuram como tarefas das aulas, pois na seção *Para começar* eles eventualmente são propostos e discutidos.

Identificamos os problemas pelas letras S ou T para diferenciar se eram provenientes dos *slides* ou das tarefas, respectivamente, seguidas de dois números separados por um ponto entre eles. O primeiro deles indica a qual tema de aula aquele problema se refere de acordo com a seguinte numeração: 1. Princípio Fundamental da Contagem I; 2. Princípio Fundamental da Contagem II; 3. Permutação I; 4. Permutação II; 5. Arranjo I; 6. Arranjo II; 7. Arranjo III; 8. Combinação I; 9. Combinação II; 10. Combinação III; 11. Princípio Fundamental da Contagem e Probabilidade. O segundo indica a ordem desse problema no conjunto de *slides* ou das tarefas daquela aula. Assim, o problema S4.3 indica o 3º. problema dos *slides* sobre Permutação II. Se no problema houver itens, usamos a mesma notação seguida de uma letra minúscula do alfabeto latino para identificar de qual item se trata. Desse modo, o problema S2.3b se refere ao item b do 3º. problema dos *slides* relativos ao Princípio Fundamental da Contagem II.

Pelos objetivos expressos nas apresentações de cada tema, é possível desenhar a classe de situações profissionais a que se referem. No entanto, a ausência de orientações e sugestões de ações ao professor não nos permite inferir os invariantes operatórios ligadas a essas classes.

Nas seções seguintes, apresentamos as análises referentes aos problemas combinatórios dos *slides* e das tarefas propostas aos estudantes.

5.8.1 Análise dos problemas das aulas I e II que tratam do princípio fundamental da contagem

Foram pontuados como objetivos a serem alcançados com as aulas sobre o princípio fundamental da contagem, aulas I e II: a) a utilização do princípio multiplicativo; b) a utilização de modelos de contagem baseados em árvores de possibilidades, listas, esquemas, desenhos, entre outros; c) o emprego dos

raciocínios aditivo e multiplicativo em problemas de contagem indireta do número de possibilidades de um evento.

Os problemas trabalhados nas seções, *Na prática* e *Aplicando* da aula I, abrangem diferentes contextos tais como maneiras diferentes de se combinar roupas, de se montar um prato, de se escolher planos de celular, de se comprar um carro. Em todos, o modelo combinatório predominante é o de seleção. Sobre as representações usadas na resolução de cada problemas, à exceção dos problemas S1.1, que explora representações figurais e tabulares, e S1.1, que explora a árvore de possibilidade no problema S1.4, nos demais prevalece as simbólicas com o uso do princípio multiplicativo.

Os problemas das mesmas seções da aula II trazem os problemas em outros contextos: formação de senhas (S2.1, S2.2), formação de números a partir dos algarismos de 0 a 9 (S2.3). Não obstante tenham sido resolvidos pelo princípio multiplicativo, os problemas propostos encontram-se na esfera dos arranjos simples e com elementos repetidos. Também aqui a seleção é o único modelo combinatório observado no contexto dos problemas e a representação simbólica expressa pelo uso do princípio multiplicativo é o que vigora na resolução proposta.

Os Quadros 30 e 31 apresentam um panorama dessas observações.

Quadro 30 – Categorização dos problemas do *Slide 1* – Princípio Fundamental da Contagem I

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Utilizar o princípio multiplicativo Utilizar modelos para contagem de dados: diagrama de árvore, listas, esquemas, desenhos etc	S1.1	<i>de quantas formas diferentes Maria pode se vestir?</i>	maneiras diferentes de combinar blusas e calças de cores distintas	escolha de elementos pertencentes a grupos distintos	S	PC	- Dado dois (ou mais) conjuntos distintos, eles serão combinados para formar um novo conjunto - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado	Figural (desenho)
	S1.2	<i>quantas combinações diferentes de prato principal e acompanhamento podem ser escolhidas</i>	maneiras diferentes de se montar um prato					Simbólico (princípio multiplicativo)
	S1.3	<i>quantas combinações diferentes de planos de celular podem ser escolhidas por um cliente?</i>	escolha de planos de celular combinando pacotes de minutos, pacotes de dados e serviços adicionais					Simbólico (princípio multiplicativo)
	S1.4	<i>quais as possíveis maneiras que Marcos pode fazer a sua escolha?</i>	compra de carros de modelos de câmbio e de cores diferentes					Árvore de possibilidades
	T1.1	<i>quantas combinações diferentes de prato principal e sobremesa</i>	maneiras diferentes de se montar um prato					–

		<i>podem ser escolhidas</i>						
	T1.2	<i>de quantas maneiras diferentes é possível montar um conjunto com uma camisa, uma calça e um sapato</i>	maneiras diferentes de combinar roupas					–

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 31 – Categorização dos problemas do *Slide 2* – Princípio Fundamental da Contagem II

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento	S2.1	<i>quantas senhas com quatro caracteres podemos escrever usando apenas letras minúsculas?</i>	formação de senhas	seleção de letras para formar senhas	S	AR	- AR.1 – Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AR.2 – É possível agrupamentos com elementos repetidos - AR.3 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Simbólico (princípio multiplicativo)
	S2.2	<i>quantas senhas com quatro algarismos diferentes podemos escrever?</i>	formação de senhas	seleção de algarismos para formar senha		AS	- AS.1 – tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AS.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	
	S2.3a	<i>quantos números pares de três algarismos existem?</i>	formação de números de 3 algarismos tendo 10 disponíveis	escolha de algarismos para ocupar posições diferentes com o propósito de formar		AR	- AR.1 – Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AR.2 – É possível agrupamentos com elementos repetidos	
S2.3b	<i>quantos números ímpares de três algarismos existem?</i>	formação de números de 3 algarismos distintos tendo 10 disponíveis	números que atendam a determinadas					

				condições			• AR.3 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	
	S2.3c	<i>quantos números ímpares de três algarismos distintos existem?</i>	formação de números a partir dos algarismos de 0 a 9			AS	• AS.1 – tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais • AS.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	
	S2.3d	<i>quantos números pares de três algarismos distintos existem?</i>	formação de números a partir dos algarismos de 0 a 9					
	T2.1							–
	T2.2							–

Fonte: Elaborado pelo autor

5.8.2 Análise dos problemas das aulas I e II sobre permutação

De acordo com o que se encontra nos *slides*, as aulas I e II sobre permutação buscam alcançar os seguintes objetivos: a) fazer o estudante compreender o que são as permutações simples e como elas se aplicam em situações de organização de elementos; b) levar o estudante a contar o número de permutações em diferentes contextos e aplicar a fórmula $P_n = n!$; c) fazer compreender a influência de elementos repetidos no cálculo do número total de permutações; d) levar o estudante a resolver problemas práticos sobre permutações⁵⁷ com elementos repetidos.

Os problemas que envolvem permutações simples (aula I) trazem situações que têm como pano de fundo a formação de anagramas (problemas S3.1, S3.2, S3.5, T3.1), de filas (S3.3, S3.4) e a classificação dos participantes de uma corrida (T3.2). Os de permutações com elementos repetidos (aula II) são propostos nos contextos de formação de anagramas (S4.1, T4.1), de formação de filas de pessoas ou pilhas de objetos (S4.2, S4.4, T4.2) e de formas de responder a uma prova com questões do tipo verdadeiro ou falso (S4.5).

Nas duas aulas sobre permutação, os problemas propostos seguem os modelos combinatórios de seleção e/ou distribuição. Não encontramos nenhum que correspondesse ao modelo de partição. No que concerne às representações observadas no modo como foram resolvidos, somente no problema S3.1 é usada, como estratégia, a listagem sistemática. Nos demais, a opção é pelo uso de fórmulas, como registrado nos Quadros 32 e 33.

⁵⁷ No *slide* encontra-se “resolver problemas práticos que envolvam a organização e a contagem de **arranjos** com elementos repetidos” e não permutações.

	T3.1	<i>quantos anagramas podem ser formados a partir da palavra CADERNO?</i>	formação de anagramas					–
	T3.2	<i>quantas possibilidades diferentes de resultados podem ocorrer?</i>	classificação de 8 participantes em uma corrida de atletismo					–

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 33 – Categorização dos problemas do *Slide 4* – Permutação II

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Compreender como a presença de elementos repetidos influencia o número total de permutações possíveis Resolver problemas práticos que envolvam a organização e a contagem de arranjos com elementos repetidos	S4.1	<i>qual é o total de anagramas das palavras a seguir?</i>	formação de anagramas de palavras com letras que se repetem	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S/D	PR	- PR.1 – Todos os elementos serão usados, porém ao menos um será usado mais de uma vez - PR.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades - PR.3 – A troca de posição de elementos repetidos não gera novas possibilidades	Simbólica (fórmulas)
	S4.2 ^a	<i>quantas filas diferentes poderão ser formadas no caso de ser considerada a individualidade das pessoas?</i>	formação de filas de 4 pessoas, em que há 3 mulheres e 1 homem	distribuição de elementos de um conjunto em casas distintas		PS	- PS. 1 – Todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez. - PS. 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	
	S4.2B	<i>quantas filas diferentes poderão ser formadas no caso de ser considerado apenas o sexo das pessoas?</i>				PR	- PR.1 – Todos os elementos serão usados, porém ao menos um será usado mais de uma vez - PR.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades - PR.3 – A troca de posição de elementos repetidos não gera novas possibilidades	
	S4.3	<i>quantas maneiras distintas um estudante pode responder 12 questões como</i>	responder a uma prova com 20 questões de verdadeira ou falso	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S	PR	- PR.1 – Todos os elementos serão usados, porém ao menos um será usado mais de uma vez - PR.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades - PR.3 – A troca de posição de elementos repetidos não gera novas possibilidades	

		<i>verdadeiras e 8 questões como falsas?</i>						
	S4.4 ^a	<i>determine quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se não importar a matéria?</i>	formação de pilhas de livros	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S/D	PS	• PS. 1 – Todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez. • PS. 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	
	S4.4b	<i>determine quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se não importar o livro e sim a matéria?</i>				PR	• PR.1 – Todos os elementos serão usados, porém ao menos um será usado mais de uma vez • PR.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades • PR.3 – A troca de posição de elementos repetidos não gera novas possibilidades	
	T4.1	<i>quantos anagramas podem ser formados com a palavra BANANA?</i>	formação de anagramas com letras que se repetem	distribuição de elementos de um conjunto em casas distintas				–
	T4.2	<i>qual é o número total de filas diferentes que podem ser formadas, considerando a individualidade das pessoas?</i>	formação de filas com 5 pessoas das quais 2 são meninas e 3 são meninos			PS	• PS. 1 – Todos os elementos do conjunto são usados, cada um apenas uma vez. • PS. 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	–

Fonte: Elaborado pelo autor

5.8.3 Análise dos problemas das aulas I, II e III sobre arranjos

A temática arranjos é dividida em três aulas com os objetivos de: a) fazer o estudante compreender arranjo simples e aplicar a fórmula; b) fazer o estudante compreender arranjo com elementos repetidos e resolver problemas dessa natureza usando estratégias de contagem (princípio multiplicativo); c) capacitar o estudante a resolver problemas de arranjos simples e com elementos repetidos.

Dentre os problemas propostos na aula I, observamos como contextos: formação do pódio em competições (S5.1, S5.5, T5.1, T5.2); pintura de regiões em mapas com cores distintas (S5.2); eleição para cargos de uma empresa (S5.3). Na aula II, são propostos problemas em situações de: emplacamento de veículos (S6.1); formação de senhas (S6.2, S6.5, T6.2); escolha de sabores de sorvete (S6.4, T6.1); sorteio de bolas numeradas com reposição (S6.3). Na aula III, são observados problemas que tratam de: distribuição de pessoas em cadeiras dispostas em filas (S7.1, T7.1); escolha de sabores de bolos (S7.2, T5.2); formação de senhas (S7.3).

Sobre os modelos combinatórios implícitos, nas três aulas predominam os problemas de seleção. A exceção são os problemas S7.1 e T7.2, ambos de distribuição.

Por fim, no que diz respeito às representações simbólicas utilizadas nas resoluções propostas, as fórmulas são usadas em todos os casos, exceto no problema S7.3 em que se usa o princípio multiplicativo. Esse princípio faz-se presente também na resolução dos problemas da aula II sobre arranjos com elementos repetidos, juntamente com as fórmulas.

Essas observações encontram-se compiladas nos Quadros 34, 35 e 36.

Quadro 34 – Categorização dos problemas do Slide 5 – Arranjo I

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Compreender o conceito de arranjo simples Aplicar a fórmula do arranjo simples	S5.1	<i>quantos diferentes pódios podem ser formados?</i>	formação do pódio (1º, 2º e 3º lugares) em um concurso de dança	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S	AS	- AS.1 – tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AS.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Simbólica (fórmula)
	S5.2	<i>de quantas maneiras diferentes ele poderá pintar as 5 regiões do Brasil?</i> <i>de quantas maneiras diferentes podem ser pintados os 4 estados da região Sudeste?</i>	pintar regiões em um mapa com cores distintas					
	S5.3	<i>quantos são os possíveis resultados da eleição</i>	eleição para presidente e vice-presidente de uma empresa					
	S5.4	<i>quantos arranjos de combos podem ser montados?</i>	montagem de um combo com 3 sabores de pizza					
	S5.5	<i>quantos diferentes pódios podem ser formados?</i>	formação do pódio em uma competição de natação em que participam					

			8 atletas					
	T5.1	<i>quantos diferentes pódios podem ser formados?</i>	formação do pódio em uma competição de matemática em que participam 12 alunos					—
	T5.2	<i>quantos diferentes pódios podem ser formados?</i>	formação do pódio em uma competição de 100 metros rasos em que participam 10 atletas					—

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 35 – Categorização dos problemas do *Slide 6* – Arranjo II

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Compreender o conceito de arranjos com repetição e sua aplicação em situações práticas, como a formação de combinações de elementos repetidos Resolver problemas que envolvem arranjos com repetição, utilizando estratégias de contagem aplicando o princípio multiplicativo.	S6,1	<i>quantas placas é possível forma?</i>	formação de placas no padrão Mercosul (4 letras e 3 algarismos)	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S	AR	- AR.1 – Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AR.2 – É possível agrupamentos com elementos repetidos - AR.3 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Simbólica (princípio multiplicativo, fórmula)
	S6.2	<i>qual a quantidade de senhas possíveis</i>	formação de senhas numéricas de 5 dígitos com os algarismos de 0 a 9					
	S6.3	<i>quantas sequências de 3 bolas podem ser formadas?</i>	sorteio de bolas de uma urna numerada de 1 a 4, com reposição					
	S6.4	<i>quantos sundaes diferentes podem ser feitos se a repetição dos sabores é permitida?</i>	escolha de sorvetes de 3 sabores a partir de 5 sabores diferentes					
	S6.5	<i>o coeficiente de melhora da alteração recomendada é:</i>	formação de senhas a partir dos algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto					
	T6.1	<i>quantos sundaes diferentes podem ser</i>	escolha de sorvetes de 2 sabores a partir de 8					

		<i>feitos se a repetição dos sabores é permitida?</i>	sabores diferentes					
	T6.2	<i>quantas senhas diferentes podem ser formadas?</i>	formação de senhas com 6 dígitos escolhido entre os algarismos de 0 a 9, podendo repetir algarismo					

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 36 – Categorização dos problemas do Slide 7 – Arranjo III

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Resolver situações-problema de arranjo simples e com repetição	S7.1	<i>o número de maneiras que três pessoas, A, B e C, podem sentar-se nelas é:</i>	maneiras diferentes de pessoas se sentarem quando há 5 cadeiras consecutivas vazias na sala de cinema	distribuição de elementos de um conjunto em casas distintas	D	AS	- AS.1 – tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AS.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	Simbólica (fórmulas)
	S7.2	<i>qual é o número de maneiras que eles podem fazer o pedido, considerando que os sabores possam ser escolha de forma repetida?</i>	escolha de sabores de bolos quando se há 10 opções de sabores	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S	AR	- AR.1 – Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AR.2 – É possível agrupamentos com elementos repetidos - AR.3 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	
	S7.3	<i>a opção que mais se adequa às condições da empresa é:</i>	formação de senhas constituídas de algarismos e letras					Simbólica (princípio multiplicativo)
	T7.1	<i>qual o número de maneiras que três pessoas podem sentar-se em 10 cadeiras?</i>	distribuição de pessoas em posições específicas	distribuição de elementos de um conjunto em casas distintas	D	AS	- AS.1 – tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais - AS.2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	–

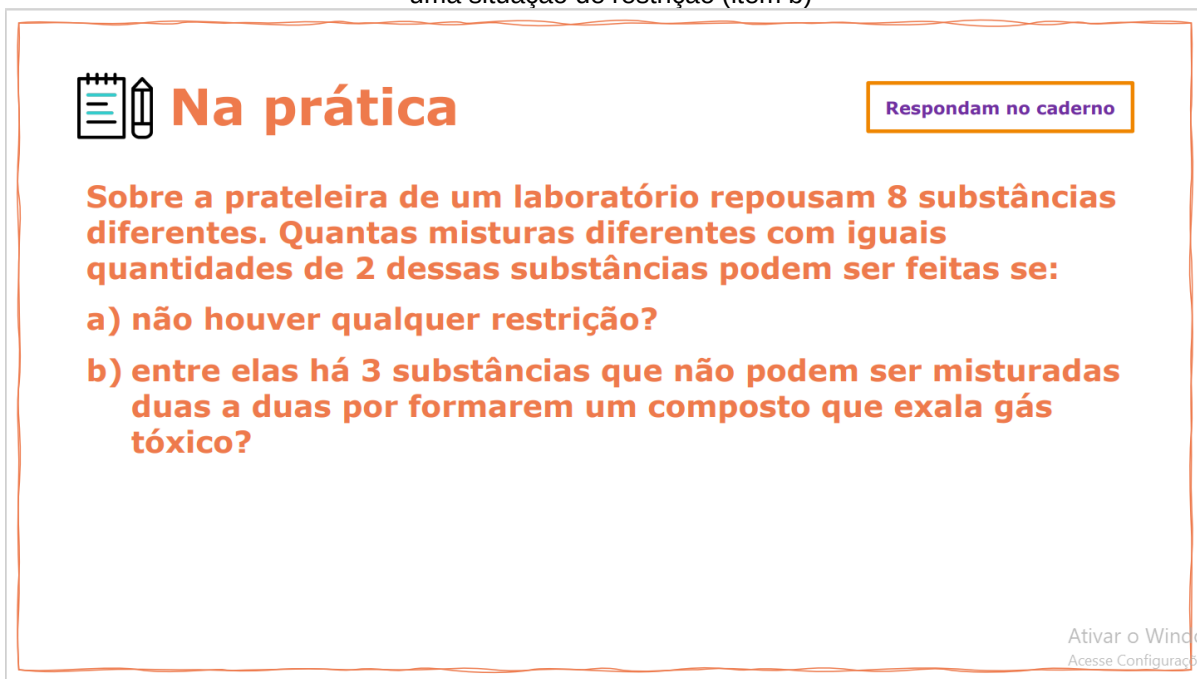
							possibilidades	
	T5.2	<i>quantas possibilidades de pedido existem, considerando que os sabores podem ser escolhidos de forma repetida?</i>	escolha de sabores de bolos quando se há 5 opções de sabores	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S	AR	• AR.1 – Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elementos, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais • AR.2 – É possível agrupamentos com elementos repetidos • AR.3 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades	–

Fonte: Elaborado pelo autor

5.8.4 Análise dos problemas das aulas I, II e III sobre combinações

Segundo o constam nos *slides*, trabalho com as combinações tem por objetivos levar o estudante a: a) compreender combinação simples e aplicar a fórmula a ela associada em diferentes situações; b) compreender o conceito de combinação com elementos repetidos e aplicar a fórmula a ela associada em diferentes situações. Assim como nos arranjos, são destinadas 3 aulas para que sejam abordadas as combinações simples (aula I), as combinações com elementos repetidos (aula II) e problemas que envolviam combinações simples acompanhadas de restrições (aula III). A fim de exemplificar de que restrições trata a aula III, a Figura 28 ilustra um desses problemas.

Figura 28 – Exemplo de um *slide* com problema S10.3 sobre combinação simples acompanhada de uma situação de restrição (item b)



Na prática

Respondam no caderno

Sobre a prateleira de um laboratório repousam 8 substâncias diferentes. Quantas misturas diferentes com iguais quantidades de 2 dessas substâncias podem ser feitas se:

a) não houver qualquer restrição?

b) entre elas há 3 substâncias que não podem ser misturadas duas a duas por formarem um composto que exala gás tóxico?

Ativar o Windows
Acesse Configurações

Fonte: Professora Maria Clara

Dentre os contextos em que são elaborados os problemas propostos na aula I tem-se: escolha de números para um jogo de loteria (S8.1), formação de times de modalidades esportivas (S8.2), separação de bolinhas de cores distintas em saquinhos com mesma quantidade de bolinhas (S8.3), escolha de cartas de um baralho (S8.4) e composição de buquê de flores (S8.5). Para a aula II, os contextos dos problemas abrangem a escolha de: sucos com base em um menu (S 9.1), doces para compor uma caixa de sabores variados (S9.2), itens para montar um menu personalizado (S9.3), *cupcakes* de sabores diversos (S9.4), pacotes de biscoitos de marcas distintas (T9.1) e bolas de sorvete para montar um *sundae* (T9.2). Para a

aula III, os problemas são propostos nos seguintes contextos: formação de grupos de trabalho (S10.1, S10.2, T10.1), escolha de substâncias para compor uma mistura (S10.3, T10.2) e montagem de um trem com vagões de cores diferentes (S10.4).

Não identificamos outro modelo combinatório implícito nos problemas de combinação que não seja o de seleção, tampouco o emprego de outra estratégia de resolução proposta nas soluções apresentadas que não seja o emprego de fórmulas, conforme ilustram os Quadros 37, 38 e 39.

Quadro 37 – Categorização dos problemas do *Slide 8* – Combinação I

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Compreender o conceito de combinação simples Aplicar a fórmula da combinação simples para calcular o número de combinações possíveis em diferentes situações	S8.1	<i>quantas combinações diferentes podem ser formadas?</i>	escolha de 6 números de 1 a 60 para jogo de loteria	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S	CS	- CS.1 – Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais - CS.2 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades	Simbólica (fórmulas)
	S8.2	<i>quantos times diferentes podem ser formados?</i>	formação de times com 10 jogadores tendo 15 disponíveis					
	S8.3	<i>de quantos modos diferentes posso separar bolinhas de cores distintas</i>	separação de 10 bolinhas de core distintas em saquinhos com 2 bolinhas cada					
	S8.4	<i>de quantas maneiras diferentes um jogador pode receber suas 3 cartas</i>	escolha de cartas de um baralho de 52 cartas					
	S8.5	<i>quantidade de trios possíveis é dada por:</i>	composição de trios de flores a partir de 5 variedades					
Aula Khan								

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 38 – Categorização dos problemas do *Slide 9* – Combinação II

Objetivo	Problema	Unidade de Registro	Unidade de Contexto	Tarefa Subjacente	M.C.I	C.C	Invariantes Operatórios	Representação Simbólica
Compreender o conceito de combinação com repetição Aplicar a fórmula da combinação com repetição para calcular o número de combinações possíveis em diferentes situações	S9.1	<i>de quantas maneiras distintas um cliente pode pedir dois sucos?</i>	escolher dois sucos a partir de 4 sabores disponíveis, permitindo a repetição	escolha de elementos de um conjunto para a formação de subconjuntos	S	CR	- CR.1 – Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais - CR.2 – É possível agrupamentos com elementos repetidos - CR. 3 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades	Simbólico (fórmula)
	S9.2	<i>quantas combinações diferentes de sabores essa pessoa pode escolher para a sua caixa?</i>	escolher 8 doces para compor um caixa a partir de 10 sabores variados, podendo repetir o mesmo sabor					
	S9.3	<i>quantas combinações diferentes de menus o cliente pode escolher</i>	montar um menu personalizado de 4 pratos a partir de 5 disponíveis, permitindo repetir o mesmo prato					
	S9.4	<i>de quantas maneiras é possível fazer um pedido na loja?</i>	escolher 2 opções de <i>cupcakes</i> dentre 5 disponíveis e 3 opções de chocolate entre 4 disponíveis					
	T9.1	<i>de quantas maneiras distintas um</i>	comprar 4 pacotes de biscoitos a					–

		<i>cliente pode escolher os pacotes de biscoito?</i>	partir 7 marcas disponíveis, sem preferência de marca					
	T9.2	<i>quantas combinações diferentes o cliente pode fazer?</i>	montar um <i>sundae</i> escolhendo 4 bolas de sorvetes dentre 3 sabores disponíveis					–

Fonte: Elaborado pelo autor

	S10.2	<i>de quantas maneiras diferentes podem ser formados grupos de trabalho?</i>	formação de grupos de trabalho de 4 alunos dentre 34 disponíveis, sendo que 2 delas são podem participar do mesmo grupo					
	S10.3a	<i>quantas misturas diferentes com iguais quantidades de substância podem ser feitas sem restrição?</i>	seleção de 2 substâncias dentre 8 disponíveis para forma um composto					
	S10.3b	<i>quantas misturas diferentes com iguais quantidades de substância podem ser feitas se duas delas não podem ser misturadas?</i>						
	S10.4a	<i>a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por:</i>	montagem de um trem usando 1 locomotiva e 12 vagões pintados dos quais 4 são vermelhos, 3 azuis, 3 verdes					

			e 2 amarelos.					
	T10.1	<i>quantos grupos de trabalho diferentes podem ser formados?</i>	formação de grupos de trabalho com 3 pessoas a partir de 10 pessoas disponíveis					—
	T10.2	<i>quantas misturas diferentes podem ser feitas?</i>	seleção de 2 substâncias dentre 8 disponíveis					—

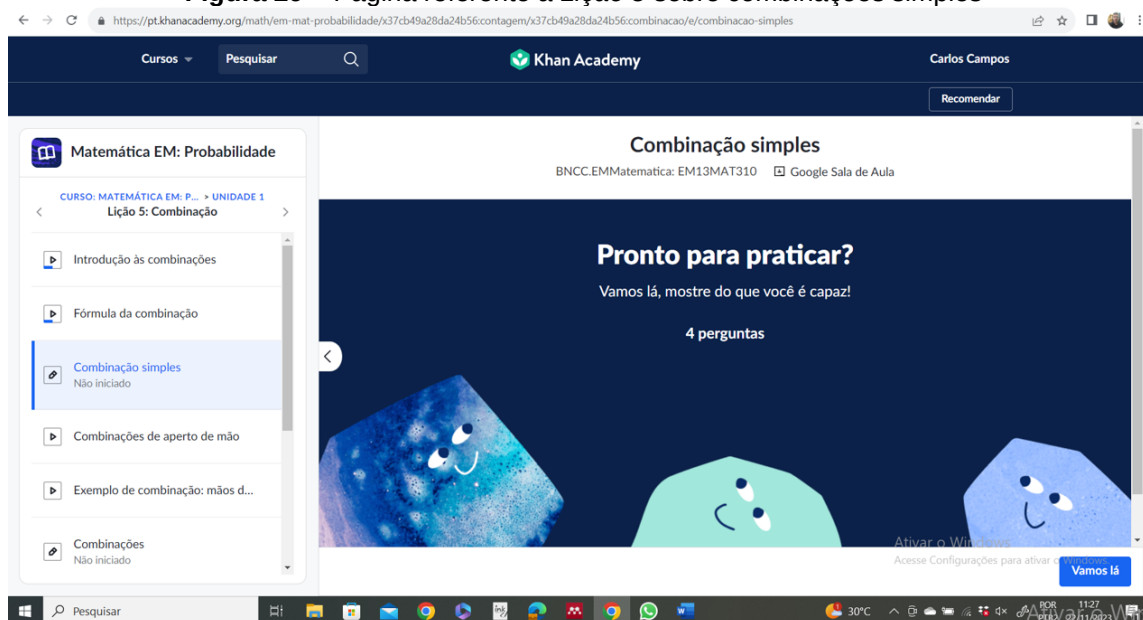
Fonte: Elaborado pelo autor

5.8.5 As Aulas Khan

A aula Combinação I, tarefa *on-line*, é substituída pela *Aula Khan* a ser realizada, como o próprio nome sugere, na plataforma *Khan Academy*. Ao final da apresentação dessa aula, em *slides*, encontram-se orientações ao professor de como configurar a plataforma e de como os estudantes devem acessá-la. Não tivemos acesso a essa plataforma pelo *link* fornecido a alunos ou professores. Contudo, para que pudéssemos compreender como seria uma *Aula Khan*, fizemos nosso próprio cadastro na plataforma e acessamos as aulas sobre combinatória. A Figura 29 apresenta a página referente à *Lição 5* sobre combinação simples, tema ao qual a *Aula Khan* se refere. As quatro perguntas que são enunciadas na Figura 29 são apresentadas e analisadas mais adiante.

Antes, porém, procuramos trazer algumas considerações sobre a plataforma *Khan Academy*, a fim de contextualizarmos sua inserção no universo educacional brasileiro como recurso a professores e estudantes, em especial aos das escolas públicas.

Figura 29 – Página referente à *Lição 5* sobre combinações simples



Fonte: KHAN ACADEMY

5.8.5.1 A plataforma Khan Academy e sua inserção como recurso na rede estadual paulista de educação

De acordo com o que se encontra em seu *site* oficial, a *Khan Academy* é uma organização sem fins lucrativos cuja missão é “oferecer uma educação gratuita e de qualidade para qualquer pessoa, em qualquer lugar” (KHAN ACADEMY).

Conforme Marques (2022), essa plataforma foi inicialmente planejada pelo seu fundador, o norte-americano bacharel em matemática Salman Khan, como ferramenta educacional para o ensino e a aprendizagem de matemática com oferta de exercícios e videoaulas gratuitamente. Atualmente, essa plataforma abrange várias áreas do conhecimento como física, química, biologia, ciências humanas e economia. Pela plataforma, de acordo com Menegais (2015), é possível o trabalho individual dos alunos ao interagir com o *software* para escolher e assistir vídeos com aulas temáticas, além de resolver tarefas “de acordo com suas dificuldades e facilidades” (ibidem, p. 48). Pela plataforma também é possível ao professor monitorar o trabalho individual de seus alunos, em tempo real.

A inserção da plataforma *Khan Academy* no cenário educacional brasileiro começou a ganhar forma em 2012 por intermédio da Fundação Lemman e de outras fundações e institutos do setor privado. Para tanto, foi realizada a tradução do conteúdo dessa plataforma para o Português com posterior adequação ao contexto nacional. Marques (2022) destaca que a Fundação Lemman, em 2012, criou o *Khan Academy nas escolas* a fim de inserir essa plataforma nas escolas públicas brasileiras. Segundo o mesmo autor, de 2013 a 2017, mais de 60 cidades do território nacional faziam parte desse projeto. De acordo com o *site* da *Khan Academy*, no início de 2024, mais de 50 secretarias de educação, entre municipais e estaduais, tinham firmado parceria com a plataforma, dentre elas as secretarias de educação dos estados do Paraná e de São Paulo. No caso paulista, a plataforma entrou mais fortemente no segundo semestre de 2023, juntamente com o material digital – *slides* e tarefas *online* – ainda que antes já estivesse disponível a professores e estudantes.

Marques (2022), em sua investigação, procurou discutir os caminhos percorridos para que essa plataforma fosse escolhida para ser implementada na rede pública de educação de Pelotas, município do Rio Grande do Sul. Para tanto, o autor buscou, em sua revisão de literatura, estudos que tivessem por foco a utilização da plataforma em aulas de matemática da educação básica. De maneira geral, esses estudos sugerem que a inserção da *Khan Academy* nas aulas trouxe contribuições para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, tanto do ponto de vista do professor quanto dos estudantes. Destacam-se os trabalhos de

Menegais (2015) e Mognhol (2015)⁵⁸ cujos resultados manifestam “que a plataforma melhora a visão do ensino tradicional, como o uso de listas de exercícios, aulas expositivas etc., ou seja, podemos dizer que é considerado um ensino tradicional” (MARQUES, 2022, P. 28). Segundo o autor, outros estudos foram dirigidos pela Fundação Lemann entre 2015 e 2016 com o objetivo de mensurar o impacto do uso da plataforma *Khan* no desempenho dos alunos em matemática. Seus resultados apontaram maior disposição dos alunos em estudar matemática e a possibilidade de maior nível de aprendizagem por se sentirem mais entusiasmados. Quanto aos professores, esses avaliaram positivamente o uso da plataforma no desempenho dos estudantes tanto em sala de aula, quanto em avaliações externas como o ENEM ou a Prova Brasil, embora ainda se reconheçam desafiados pelo uso de tecnologias de informação e comunicação para o ensino. Mesmo diante dos dados animadores apresentados pelas produções acadêmicas e pelas pesquisas da Fundação Lemann, Marques (2022) tece algumas ponderações:

[...] nenhuma dessas fontes explica como foi definido o uso da Plataforma nas aulas de matemática das escolas públicas. Percebo, nesse sentido, que os resultados são vagos e carregados de questões motivacionais e não diretamente cognitivas [...], e sem comprovação da relação do uso da Plataforma com melhor desempenho dos alunos em matemática ou com o aumento do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de escolas em que é utilizada. Entre os estudos sobre a Plataforma, tanto em relação às produções acadêmicas quanto aqueles que foram realizados pela própria Plataforma, destaca-se o tema do acompanhamento do professor aos alunos no andamento das atividades em sala de aula, ou seja, se tratando de uma questão de gestão e não do ensino propriamente. (MARQUES, 2022, p. 43)

Também Freitas (2014) questionou a concepção de ensino e o caráter inovador atribuído à metodologia por detrás da plataforma *Khan Academy*. Com base em uma série de reportagens publicadas na revista *Veja* no início dos anos 2010 que enalteciam a vertente empreendedora e bem-sucedida de Salman Khan e de sua plataforma de ensino, o autor buscou resposta a algumas questões: a) quais críticas são feitas, nas reportagens às formas tradicionais de ensino e de escola? b) o que há de inovador e revolucionário nos métodos de Khan?

Nas reportagens, segundo Freitas (2014), o aspecto inovador da *Khan Academy* é ressaltado pois, diferentemente de aulas morosas e tradicionais, essa plataforma oferece videoaulas dinâmicas, de curta duração (20 min), na velocidade

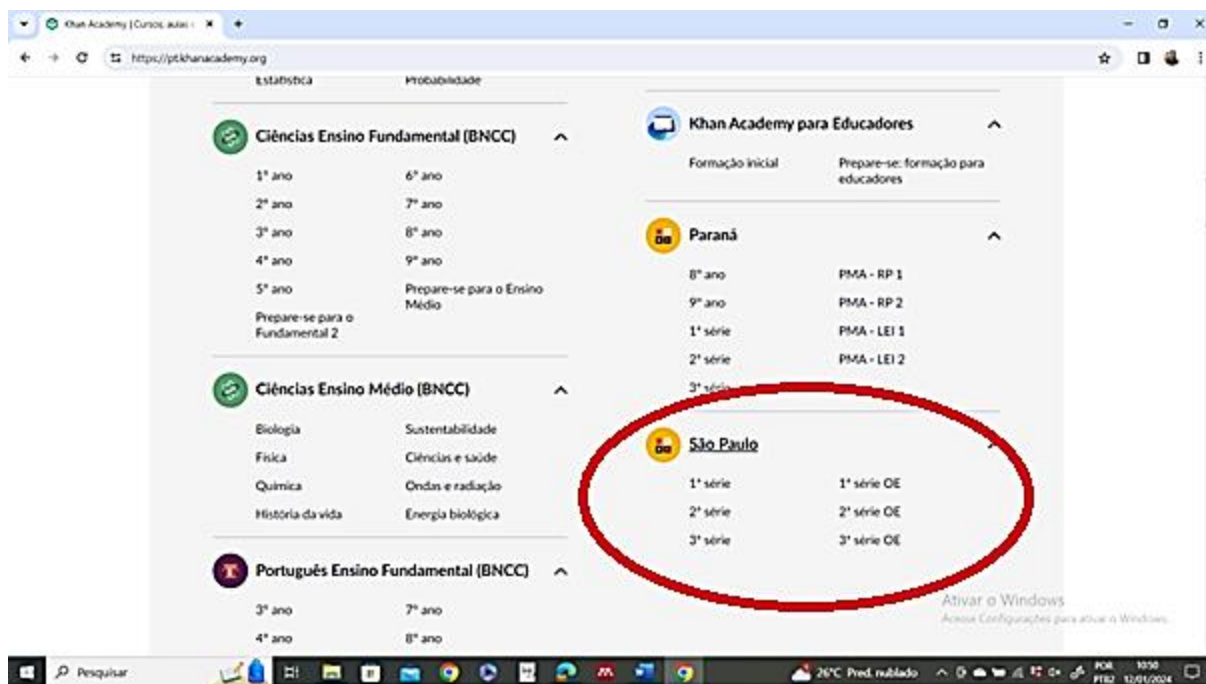
⁵⁸ MOGNHOL, T. D. **O uso da Plataforma Adaptativa Khan Academy no Ensino de Matemática e o Impacto nas Avaliações**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Espírito Santo. UFES. 2015

da *internet*, para apresentar que é essencial e necessário para que os estudantes possam executar as tarefas e, assim, passar para outro tema. Desse modo, os alunos podem aprender no seu ritmo, gradualmente, de acordo com seu interesse e suas dificuldades, e em qualquer lugar, caso tenham acesso à *internet*. Subjacente a essas premissas, o autor sublinha quais aspectos são valorizados:

[...]1) a aula expositiva unidirecional; 2) a repetição da explicação como tática de ensino-aprendizagem; 3) a possibilidade de aprender em casa; 4) o uso da tecnologia para individualizar o ritmo da aprendizagem: “a tecnologia serve para congelar a melhor aula possível”.
Disso tudo importa situar o valor literal do que, a partir das reportagens publicadas por *Veja* sobre Salman Khan, se poderia chamar de modo de aprender na contemporaneidade: “basta clicar para repetir, até entender”. Clicar-repetir-aprender. (FREITAS, 2014, p. 220)

Os estudos de Freitas (2014) e de Marques (2022) fornecem contrapontos às pesquisas que veem potencialidades no uso dessa plataforma para o ensino, sobretudo, para o ensino de matemática. Como já mencionado, a *Khan Academy* tornou-se um recurso disponibilizado pela SEDUC-SP a professores e estudantes, sobretudo a partir de julho de 2023, como ilustra a primeira página da plataforma (Figura 30).

Figura 30 – Primeira página da plataforma *Khan Academy* em português



Fonte: KHAN ACADEMY, grifo nosso

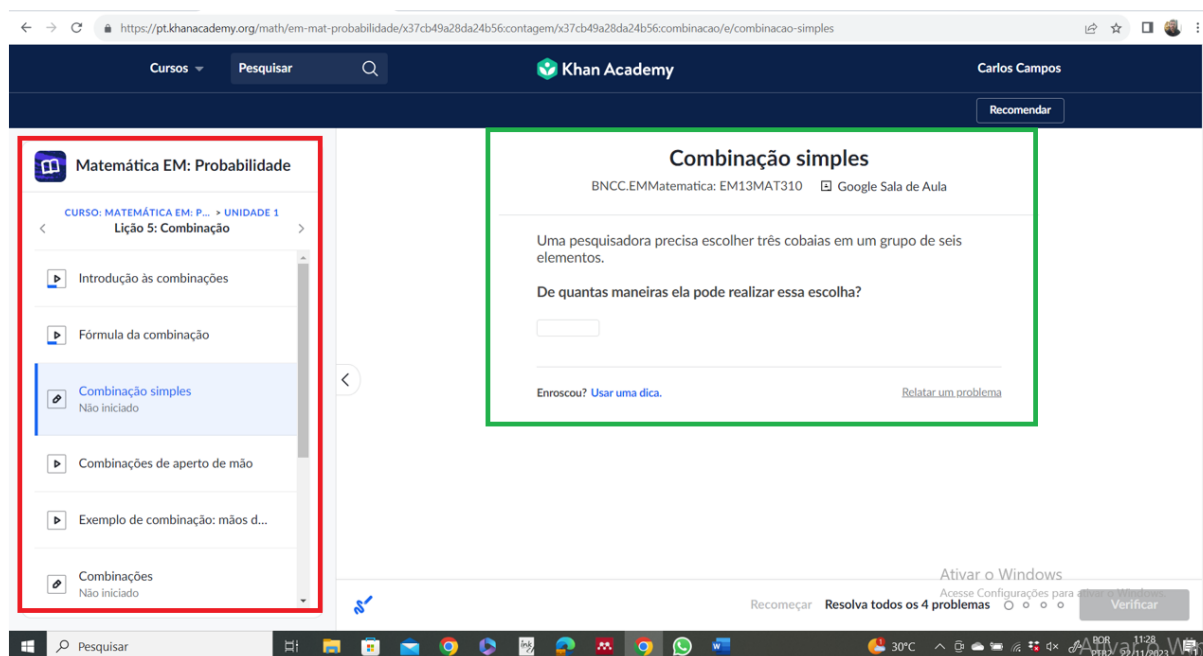
Destacamos, na Figura 31, o espaço destinado a São Paulo com os *links* de acesso para atividades voltadas para turmas de 1ª., 2ª. e 3ª. série do ensino médio

da rede estadual em duas colunas, sendo a segunda seguida da sigla OE cujo significado não conseguimos identificar.

5.8.5.2 Apresentação dos problemas de combinação simples da Lição 5.

Ao abrir a *Lição 5*, referente à combinação simples, vemos, à esquerda destacado em vermelho (Figura 31), a sequência de videoaulas dessa *Lição 5: Combinação*, com introdução, fórmula, exemplos e outras situações. À direita, destacada em verde, o tema (Combinação simples) com o código referente à habilidade expressa na BNCC e um *link* para o Google Sala de Aula, ferramenta usada por professores para o controle do acesso e execução de tarefas. Logo abaixo a essas informações encontra-se o enunciado de um problema seguido de uma caixa de diálogo para inserção da resposta e dois *links*: o da esquerda que leva o estudante a uma dica e o da direita que permite que ele relate algum problema. Eventualmente é oferecida uma calculadora como ferramenta de cálculo. Mais abaixo é solicitado ao estudante que resolva os 4 problemas.

Figura 31 – Página referente ao primeiro problema proposto sobre combinação simples na plataforma Khan Academy



Fonte: KHAN ACADEMY, grifo nosso

Além do problema da Figura 31, outros 3 são propostos, sendo que em um deles é solicitado apenas o cálculo de combinações simples de 10 elementos tomados 3 a 3, sem considerá-lo em um contexto específico. Todos os demais têm

por modelo combinatório implícito o de seleção, detectado pela presença do verbo escolher nos enunciados, conforme mostramos a seguir.

1. Uma pesquisadora precisa escolher três cobaias em um grupo de seis elementos. De quantas maneiras ela pode realizar essas escolhas?
2. Uma professora precisa escolher quatro alunos em um grupo de seis estudantes. De quantas maneiras ela pode realizar essa escolha?
3. Uma pesquisadora precisa escolher quatro cobaias em um grupo de seis elementos de quantas maneiras ela pode realizar essa escolha?

A estrutura dos enunciados evidencia a estreita proximidade que os problemas guardam entre si, tanto no que tange aos elementos que se combinam (estudantes aparece em 2 dos 3 problemas), quanto ao seu número (sempre formando agrupamentos de 3 ou 4 elementos a partir de 6 disponíveis). Essa uniformidade estrutural faz com o estudante, na prática, seja levado a resolver o mesmo tipo de problema três vezes, em um processo semelhante ao de um treinamento.

A discussão em torno de possíveis estratégias e representações simbólicas essa foi inviabilizada por não termos tido acesso às propostas de solução dos problemas.

Na próxima seção, tecemos algumas considerações sobre os materiais didáticos disponibilizados pelo programa *Currículo em Ação*.

5.9 Considerações sobre os recursos curriculares do programa *Currículo em Ação*

Até esse ponto nos ativemos aos recursos curriculares físico e digital produzidos pela COPED juntamente com CMSP, todos ligados à SEDUC-SP. Buscamos, assim, analisar as atividades e situações desenhadas para o ensino de combinatória no 2º. ano do ensino médio. Não se trata de uma análise de mais um conjunto de recursos disponibilizados a docentes e discentes de escolas públicas estaduais de São Paulo, mas de materiais didáticos pensados e produzidos para serem o principal meio de veiculação das diretrizes da BNCC e do Currículo Paulista para essa mesma rede de ensino.

Nosso objetivo foi identificar classes de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas ligadas à combinatória e seu ensino nesses materiais do programa *Currículo em Ação*. Outrossim, buscamos identificar classes de situações profissionais e possíveis invariantes operatórios sobre os quais tais classes de situações profissionais se assentam.

Com foco no primeiro objetivo e à luz da TCC de Vergnaud analisamos os problemas combinatórios do caderno do professor que, juntamente com o caderno do estudante, compõem o material físico. Além deles, foram analisados os problemas propostos nos *slides* e nas tarefas *on-line* do material digital voltados para docentes e discentes.

Procuramos identificar primeiro as classes de situações combinatórias presentes nesses materiais. Geralmente, as situações abrangiam as 4 classes de descritas com base Dubois (1984), Navarro-Pelayo (1996) e Pessoa e Borba (2010): produto cartesiano, permutações simples e com elementos repetidos, arranjos simples e com elementos repetidos, e combinações simples e com elementos repetidos. Contudo, a quantidade de cada uma delas variou de um material para outro. O caderno do professor apresenta uma distribuição mais irregular dos conceitos combinatórios em comparação com os *slides* do material digital.

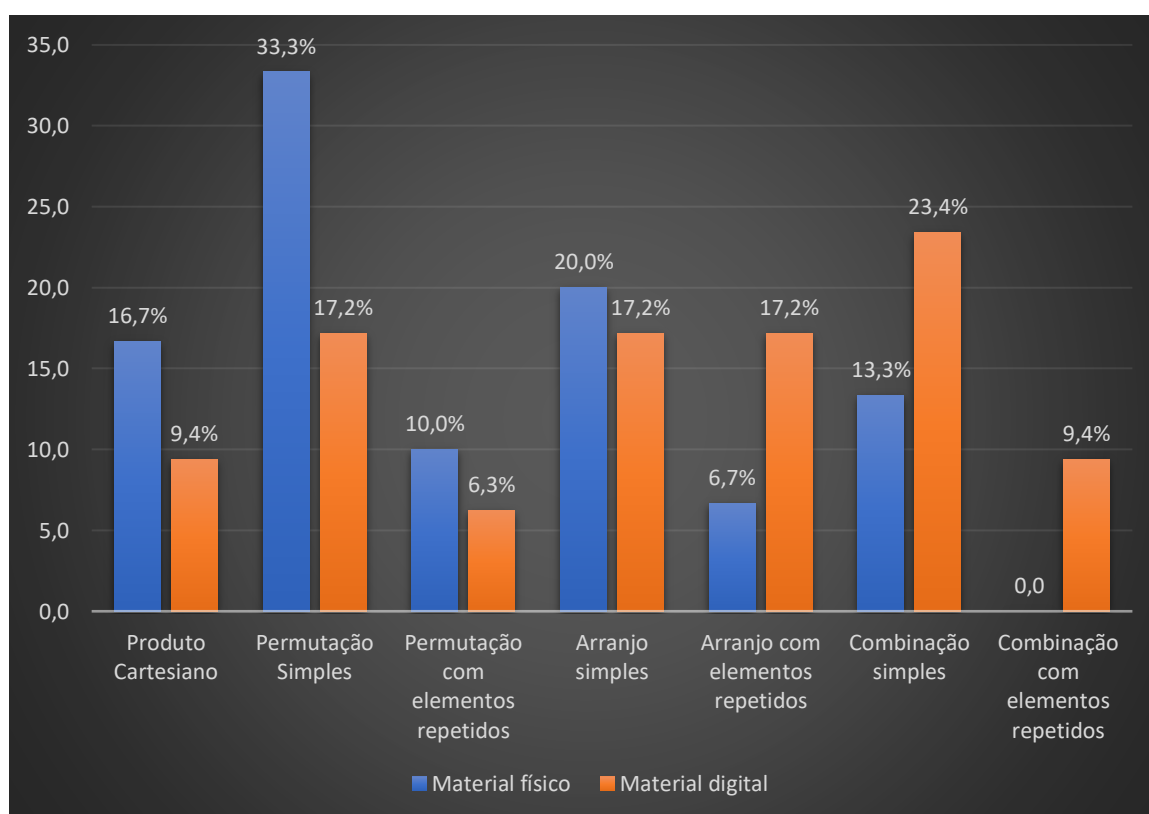
No caderno do professor, dos 30 problemas propostos, 10 eram de permutação simples e desses, 4 envolviam situações com a formação de anagramas. Os de combinações com elementos repetidos, por sua vez, sequer foram abordados.

Nos *slides*, todas os conceitos combinatórios foram contemplados, porém de maneira desigual. As situações que envolviam combinações simples, permutações

simples e arranjos simples e com elementos repetidos, juntas equivaliam a 75% dos problemas propostos. Os outros 25% foram divididos entre problemas de produto cartesiano, permutação com elementos repetidos e combinações com elementos repetidos.

É importante sublinhar que o trabalho com os diferentes conceitos combinatórios tem relação direta com os invariantes operatórios relativos à relevância ou não da ordem e repetições.

Gráfico 1 – Distribuição, em porcentagem, dos problemas de acordo com os conceitos combinatórios em jogo

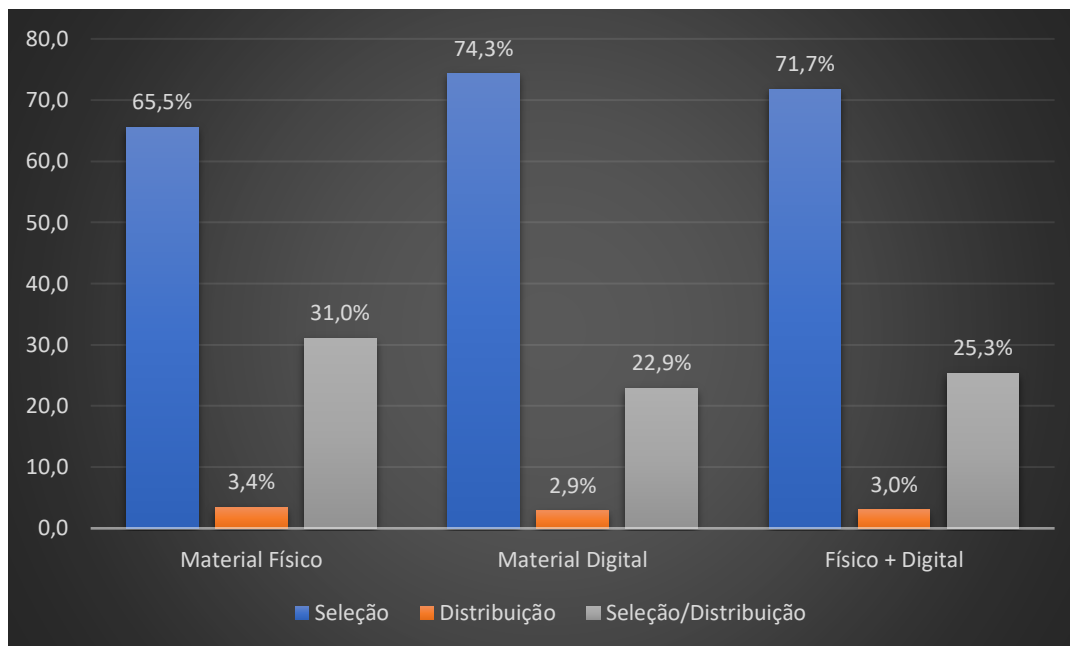


Fonte: Elaborado pelo autor

Ao considerarmos o modelo combinatório relacionado a cada problema, a prevalência se deu em problemas de seleção seguidos dos de seleção/distribuição (aqueles que podem ser lidos por esses dois modelos), e, de distribuição, conforme indica o Gráfico 2. Não foram encontrados problemas no modelo de partição. Esse fato já havia sido observado por Campos (2011), em sua análise do material didático proposto pelo programa *São Paulo Faz Escola* da mesma rede estadual paulista, assim como um predomínio de problemas de seleção e de distribuição em que o primeiro tem quantidade um pouco maior. Porém, nos materiais que analisamos, problemas de seleção correspondem a 71,7% do total de situações presentes nos

dois materiais. Esse porcentagem sobe para 74,3% se considerarmos somente aqueles do material digital, conforme indica o Gráfico 2.

Gráfico 2 – Distribuição, em porcentagem, dos problemas combinatórios dos materiais físico e digital do programa *Currículo em Ação*, segundo o modelo combinatório implícito



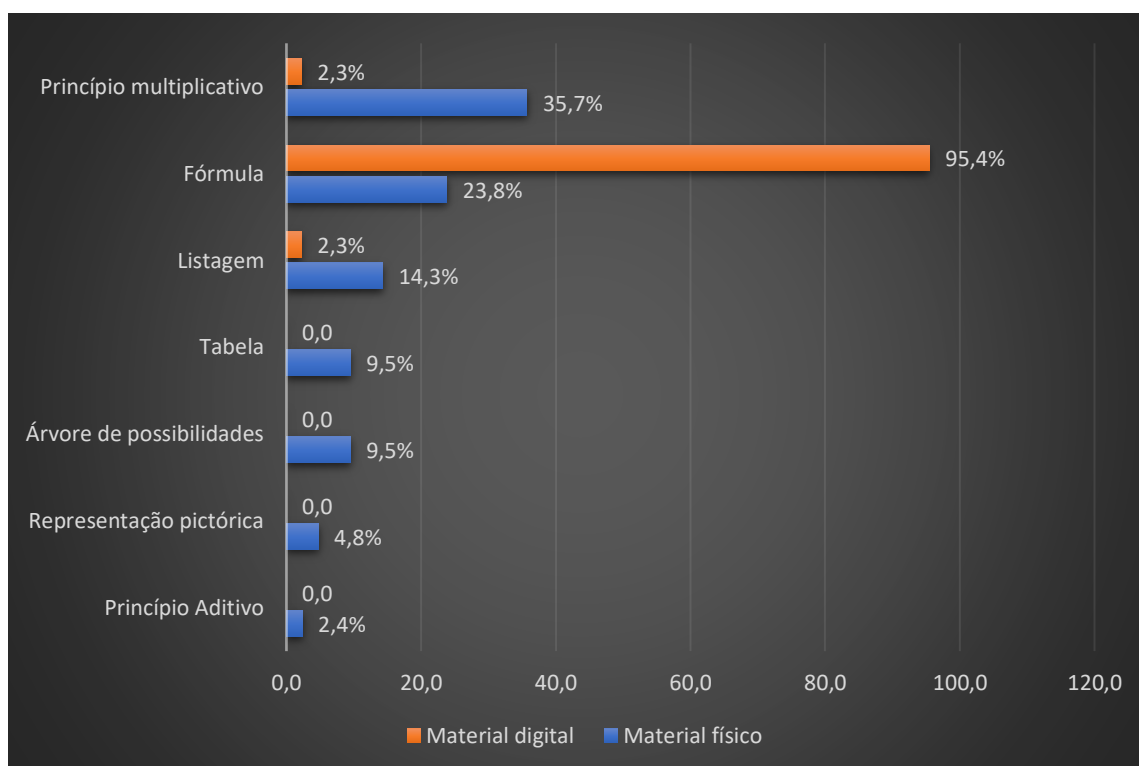
Fonte: Elaborado pelo autor

Embora nos materiais seja expressa certa preocupação com desenvolvimento do raciocínio combinatório nos estudantes, a predominância de problemas de um único modelo combinatório ou que privilegiem determinados conceitos combinatórios pode comprometer esse processo. Tal afirmação encontra respaldo em Vergnaud (1990) quando afirma que é na diversidade de situações que os conceitos são construídos. Esses dois aspectos compuseram as variáveis de tarefas descritas por Navarro-Pelayo et al. (1996) em sua investigação sobre seus efeitos nos erros cometidos por alunos em nível secundário. Os conceitos combinatórios e os modelos combinatórios implícitos, segundo esses pesquisadores, exercem forte influência no desenvolvimento do raciocínio combinatório em ambiente escolar e por isso não devem ser desconsiderados no planejamento do ensino de combinatória.

Um último aspecto analisado está relacionado às representações usadas nas propostas de solução que figuram tanto no caderno do professor, quanto nos *slides*. O Gráfico 3 apresenta as diferentes estratégias usadas nesses dois recursos na resolução dos problemas combinatórios. Nele revela-se a opção quase que exclusiva (95,4%) pelo emprego de fórmulas nas resoluções dos problemas propostos, principalmente os dos *slides*. Além dessas estratégias, somente outras

duas foram utilizadas: o princípio multiplicativo e a listagem. O mesmo não acontece no material físico – caderno do professor – no qual se percebe uma maior diversidade de estratégias. Nesse, a fórmula é preterida em favor do princípio multiplicativo, mas tem maior uso do que a árvore de possibilidades ou a listagem.

Gráfico 3 – Distribuição, em porcentagem, das estratégias empregadas na resolução dos problemas de contagem que figuram nos materiais físico e digital do programa *Currículo em Ação*



Fonte: Elaborado pelo autor

As representações simbólicas presentes nas estratégias de resolução merecem destaque dada a possibilidade de auxílio ao sujeito tanto na resolução, quanto na compreensão de situações combinatórias (FISCHBEIN et al., 1970; FISCHBEIN, 1975; PESSOA e BORBA, 2010; MARTINS, 2016; LIMA e BORBA, 2019). Assim, a pouca diversidade de estratégias ou, mais ainda, a opção por privilegiar um único tipo de estratégia – o uso de fórmula – não contribuem, em absoluto, com o nível de raciocínio combinatório que se pretende. Ao contrário, reforçam a ideia de que se intenciona que os estudantes sejam treinados a resolverem os mesmos tipos de problemas combinatórios o que limita a capacidade de enfrentamento e de raciocínio.

Essa tese ganha força quando observamos as tarefas *on-line* destinadas aos estudantes que tendem a terem o mesmo contexto – quando não o mesmo enunciado – de problemas já resolvidos nos *slides*, com a mudança apenas dos

valores das variáveis, como exemplificado na Figura 32. O modo como a fórmula é usada aqui remete a uma aplicação mecânica, por etapas, como em uma linha de produção. Primeiro é identificado o número no enunciado que corresponde à variável n . Em seguida, o procedimento é repetido para a variável p . Finalmente a fórmula é aplicada para encontrar o resultado. É provável que o estudante reproduza nas tarefas os mesmos passos usados no exemplo.

Figura 32 – Problemas S5.5 e T5.2 sobre arranjos simples

Aplicando Correção

Em uma competição de natação, participam 8 atletas. Dentre eles, serão premiados o primeiro, o segundo e o terceiro colocados. Quantos diferentes pódios podem ser formados? Escolha a alternativa correta, que indica a quantidade de diferentes pódios possíveis.

a) 56

b) 168

c) 336

d) 504

Nesse caso, temos $n = 8$ (número total de atletas) e $p = 3$ (primeiro, segundo e terceiro colocados).

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$$

Portanto, a resposta correta é a alternativa C) 336.

Ativar o Windows
 Acesse Configurações

Obrigatória
Nota: 1

Em uma competição de atletismo, 10 atletas participam de uma prova de 100 metros rasos. Dentre eles, serão premiados o primeiro, o segundo e o terceiro colocados. Quantos diferentes pódios podem ser formados?

☐ A) 120

☐ B) 720

☐ C) 1.080

☐ D) 2.160

☐ E) 3.600

Fonte: Professora Maria Clara

Diferentemente do material digital que traz o ensino de combinatória organizada por aulas, o caderno do professor divide o ensino em momentos e atividades. Além disso, ele traz orientações e sugestões de ações expressos em rubricas. A partir desses elementos procuramos identificar as classes de situações profissionais e inferir os possíveis invariantes operatórios em que se assentam.

Sendo esses materiais recursos destinados a professores e estudantes da rede estadual paulista de educação, fica a questão: como ele vem sendo aplicado

nas aulas de matemática ao considerar, mais especificamente, o ensino de combinatória? Esse questionamento nos remete à outra parte dessa tese: o acompanhamento de professores na utilização desses e de outros recursos para o ensino de combinatória.

6. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS REFERENTES AOS RECURSOS E ESQUEMAS DOS PARTICIPANTES

Apresentamos e analisamos, neste capítulo, os dados provenientes do estudo dos recursos e esquemas empregados pelos professores (nomes fictícios) Gabriel, Maria Clara e Marcos, sujeitos desta investigação, para o ensino de combinatória. Eles se referem à construção do mapeamento reflexivo da trajetória documental e à representação sistemática do conjunto de recursos dos participantes que são apresentados na seção seguinte.

No intuito de mapear o trabalho documental dos professores, procuramos estabelecer um primeiro levantamento de dados por meio de entrevistas semiestruturadas. De acordo com Boni e Quaresma (2005), nesse tipo de entrevista, o entrevistado é levado a desenvolver determinado assunto, em um clima muito próximo a de uma conversa informal. Contudo, o entrevistador procura seguir um roteiro pré-determinado de perguntas que conduzirá os trabalhos, intervindo sempre que entender ser necessário, tendo em vista os objetivos definidos. É importante ressaltar que, dadas as características de entrevistas do tipo semiestruturadas, algumas dessas perguntas foram mais exploradas que outras. O roteiro das entrevistas contou com as sete perguntas que se seguem:

1. Conte a respeito de sua formação. Como foi o curso superior? Em que ano se formou?
2. Como foi o início da vida como docente? Quando começou a lecionar? Para que turmas? Quais os desafios?
3. Para quais segmentos (níveis de ensino) você lecionou ao longo de sua vida profissional? Você poderia contar um pouco da experiência em cada um deles? Tem algum que você mais se identificou ou que trouxe maior impacto profissional?
4. Conte-nos um pouco sobre as atividades extraclasse de que tomou parte ao longo de sua vida profissional. Atividades extraclasse: cursos de formação continuada, participação em coletivos, em grupos de estudos, e assim por diante. Quais os de maior relevância? Que impactos tiveram na preparação e execução das aulas?
5. Em relação ao planejamento das aulas, conte-nos um pouco sobre como é esse processo. A que fontes você costuma recorrer nesse processo? De que maneira elas influenciam a construção de sua aula?

6. Você percebe diferença entre o modo como eram preparadas e conduzidas no início de sua carreira e atualmente? Que aspectos você destacaria nessa comparação?
7. No caso específico do ensino de combinatória, você poderia dizer como era e com é o processo de preparação das aulas?

Após as entrevistas, elas foram transcritas e enviadas aos professores para leitura e eventual modificação, caso julgassem oportuna. Após sua leitura e aprovação fizemos o levantamento dos eventos reflexivos e dos recursos citados nas entrevistas e os compilamos em uma representação esquemática do mapeamento reflexivo do trabalho documental (MRTD) que também foi enviada aos participantes para apreciação e aprovação.

Na seção seguinte apresentamos MRTD e os sistemas de recursos para o ensino de combinatória dos professores participantes, a começar do professor Gabriel.

6.1 Mapeamento Reflexivo do Trabalho Documental (MRTD) e recursos mobilizados para o ensino de combinatória

6.1.1 Professor Gabriel

6.1.1.1 Mapeamento reflexivo da trajetória documental do professor Gabriel

A entrevista feita com o professor Gabriel aconteceu virtualmente em 1º de setembro de 2022, por meio da plataforma *Teams*. Com suas respostas fizemos o levantamento dos eventos reflexivos e dos recursos citados na entrevista e os compilamos em um esquema para representar o MRTD. Essa representação esquemática foi enviada a Gabriel que a aprovou e está representada na Figura 33. Pelas respostas pudemos identificar 9 eventos reflexivos (ER, numerados de 1 a 9) e 10 recursos (R, numerados de 1 a 10) associados a eles.

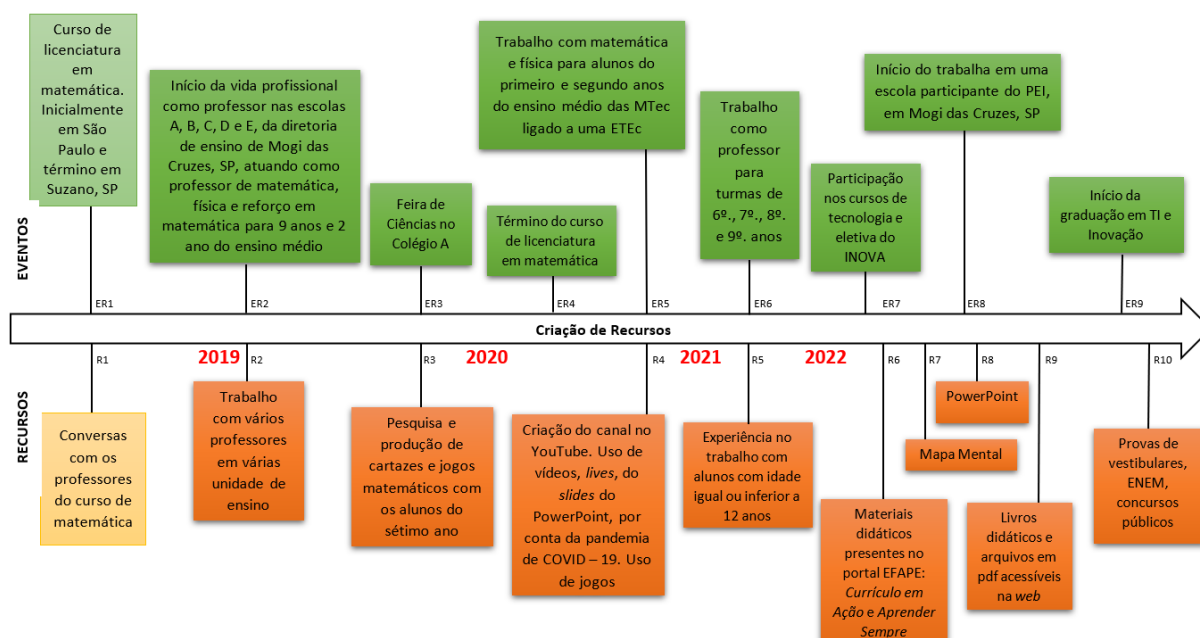
Nessa representação esquemática, alguns recursos estão ligados diretamente a alguns eventos reflexivos, como explicitou o professor Gabriel na entrevista:

Infelizmente 2020, né, já veio a pandemia, então também foi só no remoto, que eu criei um canal no YouTube que eu trabalhava aulas com eles. Em 2020 eu trabalhei com o pessoal da MTec, os alunos da MTec, da ETEC, né. Então trabalhei muito com o primeiro ano, segundo ano, a parte de matemática e física. Então fui trabalhando essas partes em forma de vídeo, fazendo live com eles, explicando (PROFESSOR GABRIEL)

O professor Gabriel cita, primeiramente, as conversas que teve com seus professores da graduação como uma primeira fonte de recursos, seguido do contato

que estabeleceu com os vários colegas de trabalho nas unidades de ensino estadual onde trabalhou. Desse ponto em diante, os recursos citados pelo professor estão mais atrelados aos materiais didáticos disponibilizados pela SEDUC-SP, livros didáticos, materiais provenientes da *internet* ou, ainda, os elaborados por ele, como os cartazes ou o canal na rede social *YouTube*. Todavia, não ficou claro o papel que eles desempenham, nem como são articulados no trabalho documental de Gabriel.

Figura 33 – Representação Esquemática do Trabalho Documental do professor Gabriel



Fonte: Elaborado pelo autor

Por ora, destacamos outros a partir da entrevista concedida pelo professor. O primeiro deles é a descontinuidade de seu trabalho docente ao longo desses 4 anos, por alguns fatores como: a necessidade de trabalhar em várias escolas, sobretudo nos primeiros anos de profissão; a variedade de anos/séries para os quais lecionou desde o início da carreira; as situações em que substituiu o professor titular que, em um dado momento, acabou retornando e reassumiu as aulas.

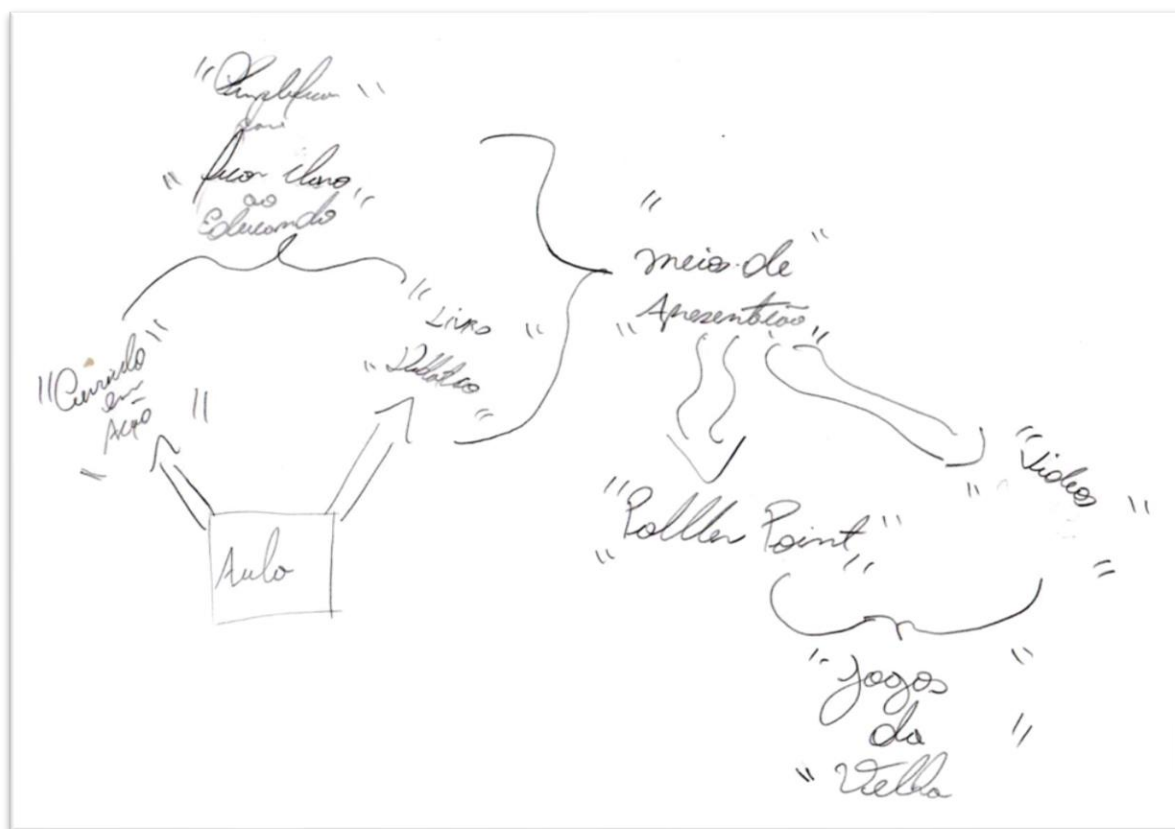
Então fui trabalhando essas partes em forma de vídeo, fazendo *live* com eles, explicando. Então a gente (incompreensível) nessa parte. Fizemos com jogos, mas quando chegou na época de julho o professor retornou, né, porque ele não estava conseguindo mais a licença, por ser algo remoto, ele podia trabalhar em casa e quebrou, eu perdi esse contato com eles (PROFESSOR GABRIEL)

Um segundo aspecto é a ausência de menção ao recurso livro didático quando Gabriel falou a respeito do início de sua vida profissional como professor. Contudo, ao ser questionado sobre seu uso na preparação das aulas, Gabriel afirmou usar bastante e acrescentou:

Eu evito usar durante as aulas. Eu deixo sempre no caderno. Eu normalmente deixo as contas, tudo bonitinho, toda explicação e o enunciado. Então eu normalmente eu sempre coloco o enunciado então já fica mais certinho pra mim. Então, evito de utilizar muito. [...] Mas, a gente sempre utiliza material didático. Todo ano chega material didático diferenciado, cada um com a metodologia diferente, com a explicação diferente, exercícios diferentes, que englobam o mesmo assunto. Então, isso é interessante. Então, sempre procuramos consultar diversos livros, né? Aqui em casa, quase toda semana a gente pega um livro diferente, leva da escola, traz pra cá, então a gente vai fazendo dessa dinâmica. Muitas vezes a gente pega daqui também, eu costumo pegar em pdf, porque fica mais fácil de eu... ctrl c, ctrl v... se houver necessidade de pegar o enunciado, e é dessas maneiras. Então, fica interessante. (PROFESSOR GABRIEL)

Na representação esquemática do sistema de recursos que mobiliza em seu trabalho documental, Gabriel destaca o livro didático que, juntamente com os recursos do programa *Currículo em Ação*, constituem as fontes para a preparação das aulas, conforme ilustra a Figura 34.

Figura 34 – Sistemas de recursos do professor Gabriel



Fonte: Elaborado pelo professor Gabriel

Nessa representação, o *Currículo em Ação* e o livro didático são usados na criação de *slides* ou vídeos que têm como regra de ação *simplificar para ficar claro ao educando*, conforme está escrito na parte superior esquerda da Figura 34. Essa regra tem como provável invariante subjacente: o estudante aprende se estiver tudo

bem explicado. Na entrevista, o professor Gabriel dá indícios da presença desse invariante operatório ao falar sobre o processo de preparação das suas aulas:

Eu vou começar a criar um *PowerPoint* [...]. Eu construo um *PowerPoint* todo, com toda estrutura bonitinha e, em sala de aula, eu faço um mapa mental [...]. Então eu coloco: a isto linka isto, isto linka isto e eu vou explicando pra eles [...]. Claro, coloco *lá mastigadinho com as minhas palavras para que eles possam entender melhor*, né. Depois disso a gente vai para as partes de fundamentos, exercícios e exemplos. Então, eu pego alguns que eu mesmo faço, transfiro para lá no powerpoint ou até mesmo para a lousa e depois pego alguns mais pesados, mais complicados e vou destrinchando com eles [...] (PROFESSOR GABRIEL, grifo nosso)

Na Figura 34, vê-se, também, o uso de *jogos da velha*. A representação esquemática sugere sua utilização em uma etapa posterior à explanação e à apresentação do tema a ser trabalhado. No decorrer da entrevista, o uso de jogos é mencionado pelo professor Gabriel em dois momentos: na feira de ciências em que, segundo ele, os alunos pesquisaram e construíram jogos e cartazes e nas aulas remotas durante a pandemia de COVID-19. No entanto, como esses jogos foram/são usados nas suas aulas e o porquê do uso específico do *jogo da velha* não foi esclarecido pelo professor ao longo da entrevista.

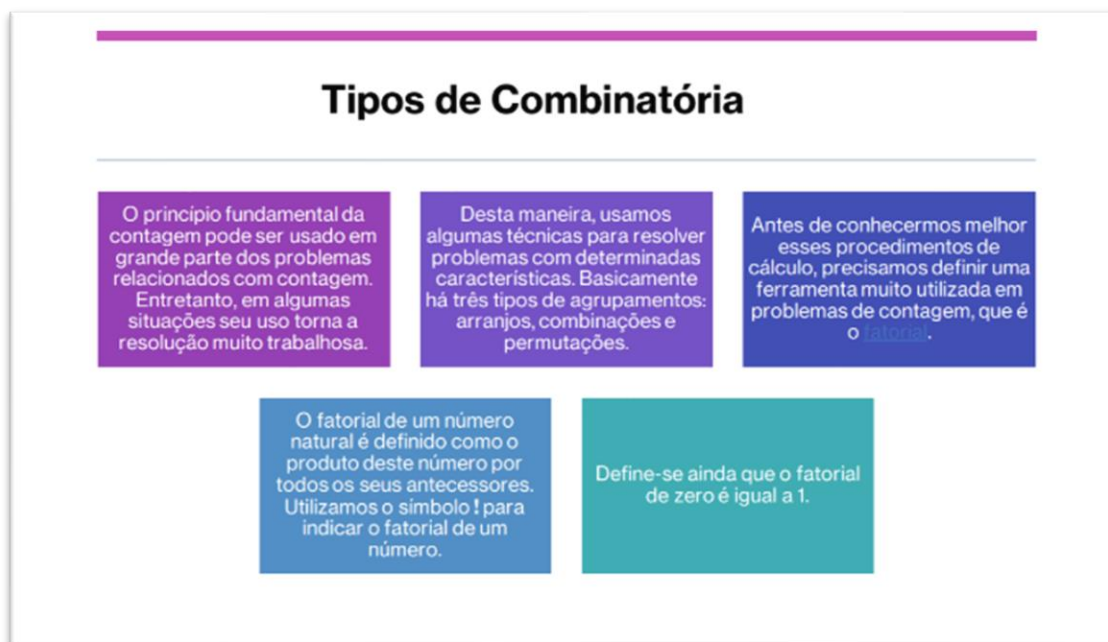
Na representação do sistema de recursos (Figura 34), Gabriel representa a *Aula* em um quadro fechado com duas setas saindo dela e apontando para o *Currículo em Ação* e *Livros Didáticos*. De acordo com o professor, esses seriam os pontos de apoio de suas aulas articulados com base na seguinte premissa: *Simplificar para ficar claro ao Educando*. Todo esse conjunto está ligado ao que ele chamou *Meios de Apresentação*: Vídeos e PowerPoint. Isso deu a entender que, em suas aulas, o trabalho documental consistia na seleção de vídeos e na preparação de *slides* sobre o tópicos a ser trabalhado. Por fim, aparece os *Jogos da Velha* como fruto dos meios de apresentação. Indagamos Gabriel sobre como o jogo da velha é usado em suas aulas. Sua resposta foi que seria usado para o trabalho com os conceitos de permutação e arranjo, bem como para os conceitos de probabilidade e de frações.

Durante o mês de novembro de 2022, participamos das aulas do professor Gabriel sobre combinatória. Apresentamos, a seguir, alguns dados referentes à preparação e à execução dessas aulas.

6.1.1.2 Preparação e execução das aulas sobre combinatória

Para as aulas de combinatória e probabilidade, o professor Gabriel preparou 26 *slides* no *PowerPoint*, numerados de 1 a 26, o primeiro de apresentação, os *slides* de número 2 a 19 dedicados exclusivamente à combinatória e, os de número 21 a 26, à probabilidade. O de número 20 era um *slide* de transição entre combinatória e probabilidade. Nesses, a combinatória é abordada nos seguintes subtemas, de acordo com a ordem em que aparecem: o princípio fundamental da contagem; tipos de combinatória; arranjos; permutações; combinações. De modo geral, cada subtema é apresentado com a mesma estrutura: definição com fórmula e exemplos de um problema com sua solução. A Figura 35 refere-se ao *slide* de número 7 denominado, pelo professor, *Tipos de Combinatória*, em que são apresentados o arranjo, a permutação e a combinação como formas de agrupamento, sem que se estabeleça a diferença entre elas, visto que antes fora definido fatorial de um número.

Figura 35 – *Slide 7: Tipos de Combinatória*



Elaborado pelo professor Gabriel

O material preparado pelo professor Gabriel nos foi enviado na noite anterior ao dia em que acompanhamos suas aulas, de modo que não houve tempo de discutir com o ele as razões que o levaram a organizar a abordagem de combinatória dessa forma, antes da sua execução.

Nas aulas de que tomamos parte percebemos a proximidade que o professor Gabriel tinha com seus alunos. Contudo, não nos foi possível identificar possíveis invariantes operatórios que dariam suporte a suas ações como docente no contexto do ensino de combinatória. Isso porque, nessas aulas, não presenciamos qualquer discussão sobre problemas combinatórios que partisse propriamente do professor

Assim, em 9 de novembro de 2022, participamos de duas aulas de Gabriel com turmas do 2º. ano do ensino médio que, em média, contavam com 20 alunos por turma. Cada aula durou aproximadamente 45 minutos. Nas duas turmas, o professor usou uma televisão ligada a um *notebook* e, por esse dispositivo, projetou os *slides* preparados. De um modo geral, os estudantes encontravam-se sentados em duplas. No decorrer das aulas, alguns copiaram o que estava escrito nos *slides* em seus cadernos. Nenhum problema combinatório foi discutido ou sequer proposto no decorrer das aulas, tanto por parte do professor quanto dos estudantes. Também não foi usado o material fornecido pelo programa *Currículo em Ação*, em nenhuma das duas turmas acompanhadas. O único diferencial entre as ações do professor se deu na segunda turma, pois os estudantes deveriam entregar um trabalho que envolvesse *operações com números fatoriais*, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão com números fatoriais sem o uso de calculadoras.

Após as aulas, não houve oportunidade de conversar com o professor Gabriel para entendermos o objetivo da aula e avaliarmos, em conjunto, como foi sua execução. Contudo, pareceu haver alguma dificuldade por parte dele em abordar problemas combinatórios com seus alunos por razões que, talvez, estejam ligadas a fragilidades na sua formação geral para o ensino de matemática e específica para o ensino de combinatória.

Em 16 de novembro de 2022 participamos de mais duas aulas, uma delas com a mesma que visitamos na semana anterior. A primeira aula que acompanhamos não era nessa turma e chegamos com a aula já iniciada. De modo geral, os alunos estavam sentados em duplas ou trios. O professor Gabriel já tinha colocado os *slides* na televisão e ia, de carteira em carteira, confirmar se os alunos já tinham copiado o que era projetado nos *slides*.

Nas aulas do dia 23 de novembro, os alunos em duplas buscavam resolver alguns problemas propostos como forma de avaliação. Eram problemas que envolviam arranjos e permutações simples. Procuramos aprofundar com o professor Gabriel o porquê de ele ter mencionado especificamente o *jogo da velha* e em que

momento ele seria usado nas aulas de combinatória. Novamente o professor argumentou que esse jogo tem a capacidade de explorar conceitos de combinatória, probabilidades e frações. No caso da combinatória, seria aplicado em situações de arranjo e de permutação, sem dar maiores detalhes de quando e como usaria.

No ano de 2023 voltamos a entrar em contato com o professor Gabriel para dar continuidade ao acompanhamento das aulas e esclarecer alguns pontos obscuros como, por exemplo, o papel de alguns recursos por ele mencionados no material que elaborou para o ensino de combinatória. Ele, porém, não retornou nosso contato.

Na próxima seção fazemos a análise do material elaborado em *PowerPoint* pelo professor que nos foi enviado no dia 8 de novembro de 2022.

6.1.1.3 Análise dos slides preparados pelos professor Gabriel para as aulas sobre combinatória

Como já pontuamos, Gabriel elaborou um conjunto de 26 *slides*, 19 deles voltados exclusivamente para o ensino de combinatória. Embora Gabriel não tenha citado a fonte usada na elaboração desse material, foi possível identificá-la na internet digitando a primeira frase que consta no *slide* de apresentação da análise combinatória: *A análise combinatória ou combinatória é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem*. Trata-se do site Toda Matéria⁵⁹ que, como sugere o nome, apresenta abas com as disciplinas do ensino médio regular e funciona como um grande livro didático.

A estrutura dos *slides* muito se aproxima daqueles disponibilizados pela SEDUC-SP aos professores e alunos da rede paulista estadual de educação a partir de julho de 2023, ou seja, é apresentada uma definição seguida da respectiva fórmula e um exemplo de problema de aplicação resolvido com essa fórmula. A diferença é que no material digital da SEDUC-SP há mais de um exercício resolvido por apresentação. É importante mencionar que o material elaborado por Gabriel é anterior ao proposto pela secretaria de educação paulista.

⁵⁹ Disponível em < <https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/#:~:text=A%20an%C3%A1lise%20combinat%C3%B3ria%20ou%20combinat%C3%B3ria,entre%20um%20conjunto%20de%20elementos>. Acesso em 10 de janeiro de 2024

Os *slides* sobre o princípio fundamental da contagem contêm um exemplo resolvido tanto pela árvore de possibilidades – que foi associada a uma representação pictórica – quanto pelo princípio multiplicativo.

No *slide* denominado *Tipos de Combinatória* (Figura 35), o professor afirma que o princípio multiplicativo, embora seja uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de contagem, em alguns deles seu uso torna a resolução trabalhosa e, por essa razão, há técnicas para resolver problemas que apresentam certas peculiaridades como a relevância ou não da ordem. É desse modo que são introduzidos arranjos, permutações e combinações. Outro ponto está relacionado ao número fatorial cuja definição passa a ser necessária graças à sua ampla aplicação em problemas de análise combinatória, de acordo com o que está expresso no *slide*. O número fatorial foi definido do seguinte modo: “o fatorial de um número natural é definido como o produto deste número por todos os seus antecessores”. Não é feita qualquer menção à exclusão do zero nessa definição, nem da definição de $0!$ e $1!$.

Nas outras apresentações são definidas arranjos simples, permutações simples e combinações simples, sem considerar a possibilidade de situações com elementos repetidos. Cada definição é seguida da respectiva fórmula e de um exemplo em cuja resolução a fórmula é empregada, conforme ilustra a Figura 36.

Figura 36 – *Slides* referente à combinação simples

Combinações

1
As **combinações** são subconjuntos em que a ordem dos elementos não é importante, entretanto, são caracterizadas pela natureza dos mesmos.

2
Assim, para calcular uma combinação simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$), utiliza-se a seguinte expressão:

EXPRESSÃO

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Exemplo

A fim de exemplificar, podemos pensar na escolha de 3 membros para formar uma comissão organizadora de um evento, dentre as 10 pessoas que se candidatarão.

De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

Note que, ao contrário dos arranjos, nas combinações a ordem dos elementos não é relevante. Isso quer dizer que escolher Maria, João e José é equivalente à escolher João, José e Maria.

CONTINUAÇÃO

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3! (10 - 3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3! \cdot \cancel{7!}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Observe que para simplificar os cálculos, transformamos o fatorial de 10 em produto, mas conservamos o fatorial de 7, pois, desta forma, foi possível simplificar com o fatorial de 7 do denominador.

Assim, existem **120** maneiras distintas formar a comissão.

Fonte: Professor Gabriel

Pelos *slides* preparados, bem como pelas aulas que acompanhamos e conversas que tivemos com o professor Gabriel observamos um descompasso entre o sistema de recursos esquematizado por ele e o que foi usado no preparo e nas aulas de combinatória. Não houve integração das atividades propostas no caderno do professor com os *slides* que foram copiados do *site* pesquisados. Ademais, da parte de Gabriel não houve qualquer adaptação das informações do *site* pesquisado às realidades de suas turmas. Dentre as hipóteses que aventamos para esse fato estão a inexperiência na atividade docente, possíveis fragilidades de conhecimento de conteúdo sobre combinatória ou, ainda, o desejo de causar uma boa impressão ao pesquisador.

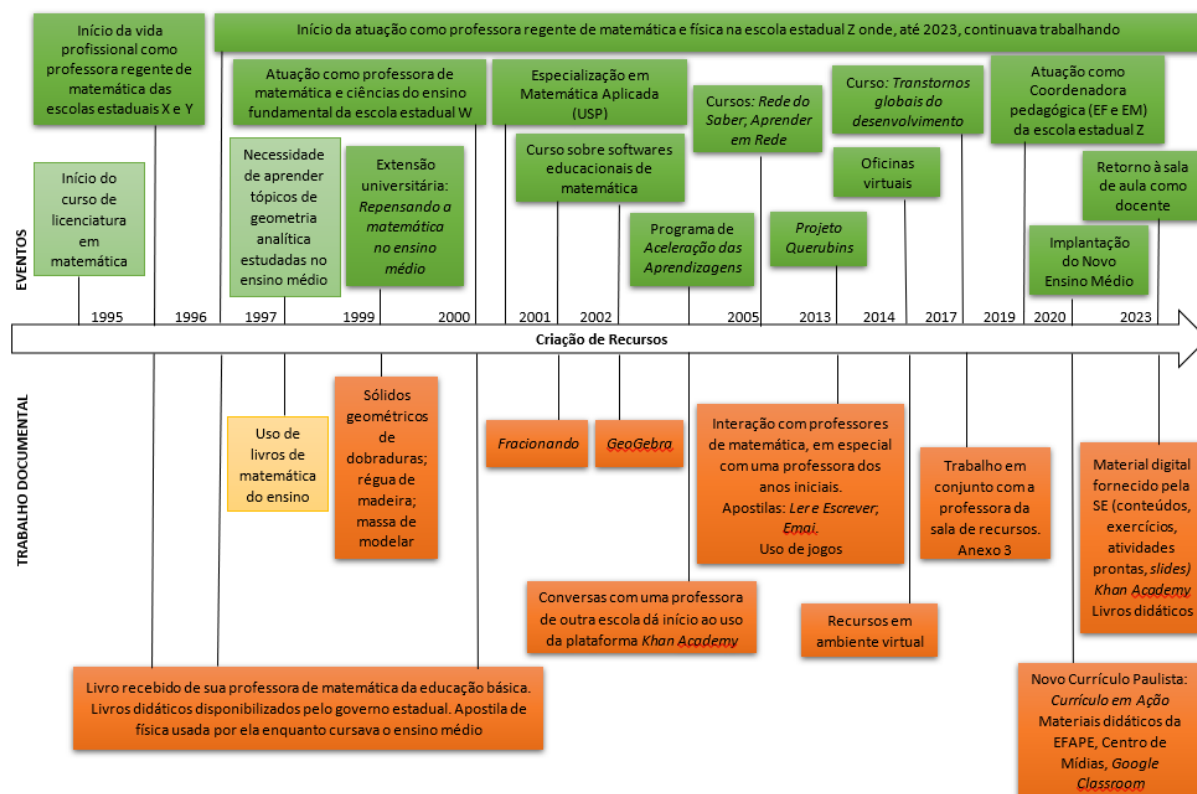
6.1.2 Professora Maria Clara

A entrevista com a professora Maria Clara foi realizada, como as demais, de forma virtual pela plataforma *Teams* nos dias 1º de novembro e 5 de dezembro de 2023. Pela entrevista, pudemos elencar a sequência de eventos e de recursos que compuseram a primeira versão da representação esquemática de sua trajetória documental que lhe foi enviada para aprovação. Desse modo chegamos à versão final aprovada por ela após aceitarmos suas sugestões de alteração. A Figura 37 traz essa representação que mostra os eventos elencados por Maria Clara e os recursos que a professora apontou como provenientes desses eventos.

À época da entrevista, a professora Maria Clara contava com 47 anos de idade e 28 anos de atuação na educação no município de Biritiba-Mirim, no estado de São Paulo. Durante esse tempo, Maria Clara trabalhou em 4 escolas estaduais desse município – escolas X, Y, Z e W. Sua formação inicial se deu entre 1995 e 1998 no curso de Licenciatura em Ciências com habilitação plena em Matemática em Mogi das Cruzes, SP. Também em 1995, Maria Clara começou a atuar como professora de matemática e ciências para turmas do ensino fundamental anos finais de duas escolas estaduais. Em 1996, foram-lhe atribuídas aulas na escola estadual Z onde, até a data dessa entrevista, continuava atuando. Desde então, tem lecionado matemática para os ensinos fundamental e médio, bem como física para turmas do ensino médio. Em 2019, a professora Maria Clara foi designada coordenadora pedagógica da mesma escola Z e exerceu essa função até 2022. Em 2023 voltou a atuar como professora de matemática e física.

Com base nas entrevistas foram identificados 16 eventos e 11 recursos ao longo da vida profissional de Maria Clara. Muitos ligados à participação em cursos, oficinas e programas de formação continuada. Dentre os cursos, a professora citou os que abordaram o uso de *softwares* educacionais nas aulas, mais especificamente o *Fracionando* (sobre o ensino de frações) e o *GeoGebra*⁶⁰.

Figura 37 – Representação esquemática da trajetória documental da professora Maria Clara



Fonte: Elaborado pelo autor

Outro curso pontuado por ela foi o de *Transtornos globais do desenvolvimento* que lhe trouxe subsídios para a elaboração de atividades direcionadas para estudantes da educação especial e para o preenchimento do chamado *Anexo III*⁶¹, além de propiciar um trabalho conjunto com a professora da chamada *sala de recursos*. Trata-se de uma sala provida de recursos voltadas para o ensino de estudantes com déficits cognitivos, deficiências múltiplas, autismo, síndrome de

⁶⁰ Conforme o que se encontra na plataforma do GeoGebra, esse é um “*software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um único motor”. Disponível em <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT>. Acesso em 16 de dezembro de 2023.

⁶¹ Esse documento, próprio da educação especial, encontra-se na Instrução da Coordenadoria Geral da Educação Básica de 14 de janeiro de 2015 e seu objetivo é estabelecer um roteiro de adaptação curricular para alunos da educação especial, sendo o professor titular o responsável pelo seu preenchimento.

Down e outras deficiências, cujo responsável é um professor ou uma professora, conforme Maria Clara esclarece:

Na verdade, quem me auxilia é a professora da sala de recursos. Eu monto as atividades, aí eu entrego pra ela, pra ele poder fazer junto com ela. [...] A sala de recurso tem uma professora especialista em autismo, em déficit, em deficiências múltiplas, síndrome de Down, tudo. Aí ela trabalha com esses alunos. Ela é específica. E ela que vai trabalhar com esses alunos para mim. Na verdade, não seria a função dela, mas ela auxilia. (PROFESSORA MARIA CLARA)

Sobre eventos atrelados a projetos desenvolvidos no ambiente escolar, a professora elencou o Projeto Querubins e o Programa de Aceleração de Aprendizagem. O primeiro surgiu de uma ideia da vice-diretora da escola Z ao sugerir aos professores que adotassem até 3 estudantes do ensino fundamental, anos finais, para que fossem trabalhados conceitos fundamentais de língua portuguesa e matemática, inclusive alfabetização e as quatro operações fundamentais. Ao tomar parte do projeto, Maria Clara teve oportunidade de interagir com colegas da mesma área de conhecimento, em especial uma que também atuava nos anos iniciais como professora polivalente e que lhe apresentou materiais didáticos tais como as apostilas do *Ler e Escrever* e *Emai (Educação Matemática nos Anos Iniciais do ensino fundamental)*.

A gente pegou o material que veio do governo do estado e aí a gente trabalhava as operações, raciocínio lógico. Em língua portuguesa tinha professora que estava junto com a gente, também trabalhava, porque na época, quando a gente começou, fez esse projeto que a gente trabalhou, era eu, a professora Roberta, que já é falecida, o Jonas. Então a gente trabalhava matemática com esses alunos, usando esse material e ela [a professora Roberta], por ser também do município, então ela também trabalhava lá. Então ela trazia e a gente trabalhava. (PROFESSORA MARIA CLARA)

Foi no âmbito do Programa de Aceleração de Aprendizagem⁶² que Maria Clara foi apresentada à plataforma *Khan Academy* por uma professora que lecionava matemática em outra escola estadual. Embora já tivera contato com a plataforma, em turmas de Aceleração de Aprendizagem em meados da primeira década dos anos 2000, foi no período da pandemia de COVID-19 e, principalmente, no seu retorno à função de professora de matemática e física, no início de 2023, que Maria Clara passou a incorporar o uso desse recurso em suas aulas. A esse respeito, fez a seguinte observação:

⁶² O Programa de Aceleração de Aprendizagem, como o próprio nome sugere, foi implementado na intenção de criar condições mínimas para que estudantes com desfasagem idade/ano escolar pudessem retomar o curso regular, isso em meados dos anos 2000

O ano passado, nós tínhamos também. Só que era opcional pelos professores. Agora é obrigatório o professor de matemática utilizar. A verdade é todas as áreas, mas, como o calcanhar de Aquiles das escolas é matemática, é em cima da gente que eles vão, entendeu? [...] Inclusive, tem tarefas no centro de mídias que a gente publica com um código localizador que tem aqui e aí, é pros alunos fazerem. Lá na sede, tem uma parte do centro de mídia que a gente acompanha se o aluno realizou não. (PROFESSORA MARIA CLARA)

As falas de Maria Clara sugerem que os recursos digitais (*slides*, tarefa *online* e *Khan Academy*) parecem assumir papel relevante em seu trabalho documental. Com base nessa hipótese, acompanhamos as aulas da professora Maria Clara nos dias 11, 18 e 25 de setembro de 2023, em duas turmas de 2º. ano do ensino médio, uma do curso regular e outra do Novotec que visa a qualificação profissional. O planejamento dessas aulas, porém não teve o mesmo acompanhamento, mas a questionamos como se deu esse processo. Na próxima seção descrevemos e pontuamos algumas observações sobre o planejamento e a execução das aulas sobre combinatória da professora Maria Clara.

6.1.2.1 Planejamento e execução das aulas da professora Maria Clara

Iniciamos nosso acompanhamento das aulas da professora Maria Clara em 11 de setembro de 2023 e tal como aconteceu com o professor Gabriel, não nos foi permitida a gravação em áudio ou em vídeo das aulas que participamos. Assim, fizemos anotações ao longo do período de acompanhamento, tanto dos conteúdos escritos na lousa quanto das falas da professora durante as aulas e conversas entre ela e o pesquisador.

Na primeira turma, a professora programou a correção de tarefas da aula sobre Princípio Fundamental da Contagem I do material digital. Inicialmente, houve uma breve retomada do assunto, com a resolução da situação S1.1 sobre maneiras diferentes de se vestir tendo disponíveis 3 blusas e 2 calças. Para tanto, Maria Clara optou por utilizar a árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo para mostrar a relação entre eles. Em seguida, fez a correção dos problemas S1.2 e S1.3 e solicitou aos alunos que fossem à lousa resolver os problemas por meio da listagem de todos os resultados possíveis e da aplicação do princípio multiplicativo.

Observamos que, ao longo da correção, os procedimentos de listagem usados pelos alunos não foram discutidos. O primeiro conseguiu elencar todas as possibilidades em um processo de enumeração não sistemática, mas o segundo apresentou dificuldades em razão do número de 60 resultados possíveis, embora

manifestasse indícios de enumeração sistemática⁶³. Ao perceber a inviabilidade da listagem das 60 combinações, o próprio aluno contestou argumentando que seriam muitos, ao que a professora interveio e resolveu o exercício pelo princípio multiplicativo. Ao fazê-lo, Maria Clara sublinhou que a presença da palavra *diferente* no enunciado dos problemas tinha um sentido: “diferentes quer dizer se eu usei no primeiro não vou usar no segundo”. O sentido aqui expresso é o das situações de permutações simples, ou seja, sem a possibilidade de repetição de elementos.

Na segunda turma, a professora também fez a correção de tarefas, porém aqui sobre permutações com elementos repetidos (aula Permutação II). A professora iniciou a aula retomando o problema S4.1 sobre o cálculo do número de anagramas da palavra CARRO e questionando: “como se calculam anagramas?”. Diante do silêncio da turma, Maria Clara pediu a uma aluna que colocasse na lousa o que fizera em seu caderno (Figura 38). No entanto não houve qualquer intervenção, discussão ou questionamento do que a aluna escreveu, nem mesmo sobre a notação fracionária usada na fórmula pela aluna.

Figura 38 – Resolução do problema S4.1 feita, na lousa, por uma aluna

$$P' = \frac{n!}{i!}$$

$$P^2_5 = ?$$

$$P^2_5 = \frac{5!}{2!} \quad P^2_5 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{2!}$$

$$P^2_5 = 5 \times 4 \times 3 \quad P^2_5 = 60$$

Fonte: Autor

Ao perceber as dificuldades dos estudantes, optou por retomar o assunto com a pergunta: “o que é permutação?”. Após algumas respostas, Maria Clara fez a institucionalização: “é agrupamento de elementos diferentes” e exemplificou com o cálculo do número de anagramas da palavra VIDA obtido por meio da fórmula. Ela ainda apresentou um segundo problema, com o cálculo do número de anagramas da

⁶³ O aluno chegou a usar a estratégia do hodômetro, mas sem fixar os dois primeiros elementos (pacotes e pacotes de dados) e variar o terceiro (serviços adicionais). No caso dele, foram fixos os primeiro e terceiros elementos (Nota do autor)

palavra PEDAÇO que se iniciam com vogal em que também usou a fórmula como estratégia de resolução. Na sequência, a professora voltou ao problema original (anagramas da palavra CARRO) e frisou “quando eu passo anagrama eu faço elementos distintos”, além de questionar “como eu montaria a permutação?”. Em sua resolução fez a permutação simples de 5 elementos e dividiu o resultado pela permutação simples de 2 elementos, sem discutir o porquê desse procedimento.

Em seguida, fez a correção do problema S4.3 sobre maneiras distintas de se responder uma prova no estilo verdadeiro/falso composta de 20 afirmações das quais 12 eram verdadeiras e 8, falsas. A própria professora resolveu elencando os valores das variáveis n , A e B que foram substituídas na fórmula $P_n^{A,B} = \frac{n!}{A! \cdot B!}$, tal qual a resolução proposta no material digital.

No dia 18 de setembro, a professora Maria Clara preparou a mesma aula para as duas turmas. Inicialmente escreveu na lousa um pequeno texto denominado *Conclusões Finais* com definições de arranjos, permutações e combinações simples, além de critérios de distinção desses agrupamentos. Em seguida, três problemas foram tomados como exemplo.

1. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
2. De quantas maneiras diferentes podem ser arrumadas numa prateleira 5 livros diferentes?
3. Com um grupo de 8 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas?

Tanto a parte das *Conclusões finais* quanto os exemplos foram extraídos de livros didáticos⁶⁴ cujas escolhas se deram tendo a linguagem como critério: “a linguagem não é ruim; é mais próxima do aluno”. Questionada do porquê de suas escolhas didáticas, a professora argumentou que, como nas próximas aulas os alunos fariam atividades com problemas misturados, seria importante que soubessem diferenciar os tipos de agrupamentos para aplicar a fórmula. Por isso optou em resolver os três problemas.

A fórmula é importante, sim. É muito importante. Porque facilita para alunos os cálculos. Só que primeiro o aluno tem que saber os elementos para ser aplicado na fórmula. Porque não adianta eu jogar a fórmula e ele não saber interpretar o que está pedindo, o que é um arranjo, se é

⁶⁴ SILVA, J. D. FERNANDES, V. S. **Matemática**. Volume único. Coleção Horizonte. IBEP. s/d.
GIOVANNI, J. R. et al. **Matemática Completa** (Ensino Médio). Volume único. FTD. 2002

uma permutação, se é uma combinação. Se ele não souber a definição de cada um, claro, ele não vai saber qual fórmula ele vai usar também. Mas é importantíssimo. (PROFESSORA MARIA CLARA)

Todavia, na resolução dos exemplos, além das fórmulas, outras estratégias foram empregadas. Em uma das turmas, o primeiro problema foi resolvido inicialmente pela árvore de possibilidades com o objetivo, segundo ela, de simular os agrupamentos. Ao término dessa resolução, questionou os estudantes se o problema era de arranjo, permutação ou combinação e aplicou em sequência, a fórmula. Na outra turma, os mesmos problemas foram resolvidos, de início, por meio da listagem de alguns agrupamentos possíveis a fim de discutir a relevância ou não da ordem. Em todos os casos a finalização se deu pela aplicação das respectivas fórmulas.

As aulas do dia 18 de setembro foram semelhantes às do dia 11, com discussão de problemas tomados como exemplos seguidos de problemas de aplicação, todos oriundos de livros didáticos. Os exemplos⁶⁵ foram os seguintes:

4. Em um hospital existem 3 portas e existem exatamente 4 elevadores. Um visitante deseja ir ao 6º. andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?
5. Quantos números pares com quatro algarismos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, sem repeti-los?
6. Quantos anagramas tem a palavra CAFÉ?

Esses três problemas foram resolvidos também com o auxílio de fórmulas e de outras estratégias como árvore de possibilidades (problema 4) ou a listagem de alguns elementos (problema 5), do mesmo modo que a resolução apresentada no livro didático.

A professora ainda propôs 4 problemas de aplicação:

7. Quantas palavras de 2 letras distintas podem ser formadas com as vogais de nosso alfabeto
8. Cinco homens e uma mulher pretendem utilizar um banco de cinco lugares. De quantas maneiras diferentes podem sentar-se, nunca ficando em pé a mulher?
9. Quantos anagramas da palavra PROBLEMA que começam por R?

⁶⁵ Optamos por continuar a numeração anterior a fim de tornar mais fácil a identificação dos problemas.

10. Numa sala temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos podemos formar de 2 rapazes e 3 moças?

Esses problemas não foram corrigidos nesse dia, mas enquanto os estudantes os resolviam a professora forneceu suas respostas, na intenção, segundo ela, de auxiliá-los na condução da resolução. Na próxima seção apresentamos a análise dos dados coletados das aulas da professora Maria Clara.

6.1.2.2 *Análise dos dados coletados a partir das aulas da professora Maria Clara*

Da participação nas aulas e das entrevistas que tivemos durante o período em que acompanhamos a professora Maria Clara, observamos que o livro didático continua sendo um recurso importante no seu trabalho documental, mas não mais o único. Os recursos digitais disponibilizados pela SEDUC-SP, bem como as atividades da plataforma *Khan Academy*, passaram a fazer parte das fontes que a professora recorre para a preparação e execução de suas aulas. Não identificamos, porém, a mobilização de qualquer outro recurso para esse objetivo matemático em específico. A facilidade proporcionada pelas aulas preparadas em *slides* foi um ponto relevante para Maria Clara:

Então, atualmente eu planejo meus exercícios, o conteúdo eu em cima do material digital que é do governo? Sim, por quê? Porque todas as habilidades e competências são cobrados em cima disso. Então, eu vejo material digital, e aí eu dou as atividades para os alunos em cima de lá, das habilidades e competências. Aí eu uso alguns livros para complementar as atividades que estão lá, que já vêm atividades prontas agora. Na verdade, de uns anos para cá, o governo já tem dado as aulas prontas. Ele já vem com a definição, foco é tudo pronto. E aí você só adapta. (PROFESSORA MARIA CLARA)

Em outro momento perguntamos à professora se ela considerava as atividades prontas como um auxiliar ou se não fazia muita diferença no seu trabalho como docente, ao que respondeu:

Na verdade, é um ganho. Porque, inclusive, as ATPC que nós temos do centro de mídia, é voltado em cima desse material digital. E aí é lá nas ATPC agora que está tendo da EFAPE, que é lá no centro de mídias, os formadores, eles vêm com, por exemplo, conteúdo de função logarítmica que é o terceiro bimestre, o quarto trimestre. Então ele vem lá, pega o material digital e aí estuda junto. Aí ele vai fazendo até perguntas no meio dos vídeos da EFAPE, que são gravados, e você tem que responder. Então, se você não estuda o material, você não lê o material, você não sabe fazer só o ATPC, hoje em dia, que é da EFAPE. (PROFESSORA MARIA CLARA)

As falas de Maria Clara revelam a necessidade de se adequar ao material digital fornecido pela SEDUC-SP e não o contrário visto que, a partir de julho de

2023, seu uso passou a ser obrigatório. De acordo com Rocha et al. (2015), a capacidade de planejamento das aulas para turmas diferenciadas ao considerar suas particularidades, bem como os saberes anteriores e os que serão necessários posteriormente, é parte do arcabouço do conhecimento do professor. Trouche et al. (2017) advogam que esses conhecimentos, porém, tendem a se desenvolver na medida da interação do professor com os recursos. Consideramos que, caso não haja uma visão crítica das aulas e atividades prontas, sejam em livros didáticos ou ambientes virtuais, a aparente facilidade proporcionada por elas pode prejudicar o professor na ampliação de suas habilidades docentes.

Quadro 40 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos das aulas da professora Maria Clara

Objetivos	Invariantes operatórios
• corrigir e discutir problemas de aplicação do princípio multiplicativo.	• resolver o mesmo problema pela árvore de possibilidades e pelo princípio multiplicativo permite ao aluno relacionar uma estratégia à outra • propor questões com poucos elementos a se combinarem facilita estratégias como listagem, uso de tabelas, de árvore de possibilidade, entre outros • listar parcialmente as possibilidades permite ao aluno compreender a importância do uso do princípio multiplicativo, sobretudo em situações em que essa estratégia se torna inviável • criar <i>atalhos linguísticos</i> torna mais fácil a resolução de problemas combinatórios
• corrigir e discutir problemas de aplicação da fórmula das permutações com elementos repetidos	• é importante o estudante saber as fórmulas para empregá-las adequadamente em situações de permutação (simples ou com elementos repetidos) • criar <i>atalhos linguísticos</i> torna mais fácil a resolução de problemas combinatórios
• reconhecer e distinguir arranjos, permutações e combinações simples.	• o estudante deve saber aplicar critérios para diferenciar arranjos, permutações e combinações simples entre si • é importante o estudante saber as fórmulas e empregá-las adequadamente nas situações combinatórias • resolver problemas como exemplos ajuda o aluno a entender a diferença entre arranjo, permutação e combinação simples

Fonte: Elaborado pelo autor

Destacamos, no Quadro 40, as classes de situações profissionais expressas nos objetivos e invariantes operatórios inferidos das observações feitas a partir das aulas da professora Maria Clara sobre combinatória.

Destacamos, nesse quadro, os invariantes operatórios de Maria Clara no uso de recursos para o ensino de combinatória que se encontram bem atrelados à

concepção de que é necessário que os estudantes saibam diferenciar os tipos de agrupamentos classificando-os como problemas de permutação, arranjo e combinação e aplicando as fórmulas respectivas. Eles guiaram suas ações na tentativa de tornar mais simples fazer essa distinção. Por exemplo, na aula do dia 18 de setembro, ela escreve na lousa, inicialmente, as diferenças entre arranjo, permutação e combinações simples e quais critérios devem ser empregados para diferenciá-los, pois é preciso para que possam resolver problemas diversificados. Assim, a professora optou por resolver, primeiramente, algumas situações no intuito de tornar evidente como fazer tal distinção. Cabe ponderar, contudo, que, como apontam Dubois (1984), Navarro-Pelayo et al. (1996), Roa (2000), a diversidade de problemas combinatórios está além da diferenciação entre problemas de permutação, arranjo e combinação. Ela abrange, também, uma série de variáveis que devem ser tidos em conta na preparação e execução das aulas sobre combinatória.

Outro exemplo, é a preocupação da professora com que a linguagem a ser empregada fosse acessível aos alunos. Esse aspecto surgiu, não somente como critério para escolha dos livros didáticos, mas na tentativa de criar atalhos linguísticos que facilitassem o reconhecimento e a resolução dos problemas combinatórios. Isso aconteceu, por exemplo, com a palavra *diferente* que, segundo Maria Clara, “quer dizer se eu usei no primeiro não vou usar no segundo”. Contudo, em alguns casos, a tentativa de estabelecer uma comunicação mais eficiente causou confusões e imprecisões conceituais, como quando questionou os alunos sobre como os anagramas são calculados (em vez de perguntar como se calcula o número de anagramas) ou, ainda, na definição que fez de permutação ao dizer ser “agrupamento de elementos diferentes”.

6.1.3 Professor Marcos

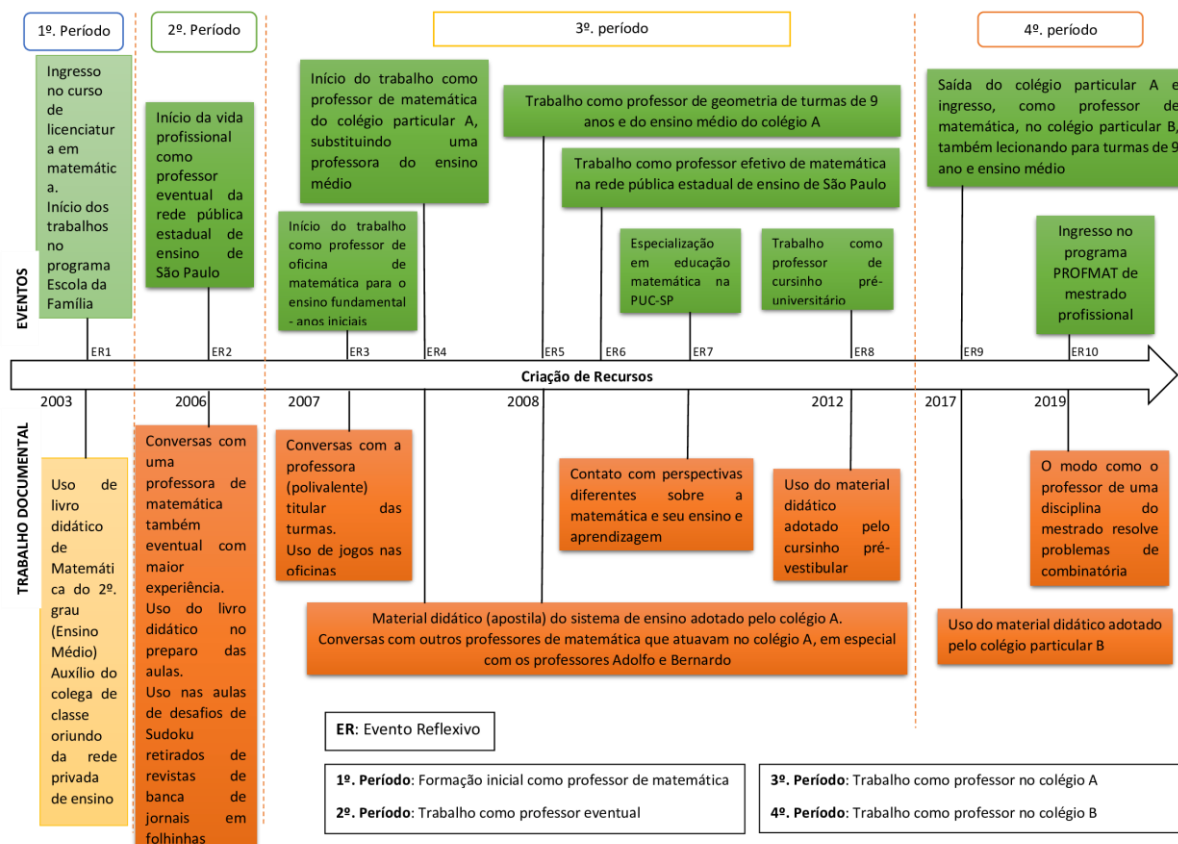
6.1.3.1 Mapeamento reflexivo da trajetória documental do professor Marcos

A entrevista feita com o professor Marcos se deu virtualmente em 27 de julho de 2021 por meio da plataforma *Teams* visto que, nesse dia, ele se encontrava fora do estado de São Paulo. A entrevista, que durou cerca de uma hora, foi gravada em áudio e em vídeo e posteriormente foi transcrita. A respeito do entrevistado, trata-se de um professor que, à época da entrevista, contava com 39 anos de idade, com formação superior completa em Licenciatura em Matemática por uma universidade

da cidade de Mogi das Cruzes, SP e lecionava há 15 anos.

Nas respostas dadas às perguntas identificamos 10 eventos reflexivos e 8 recursos associados a eles que estão apresentados esquematicamente na Figura 39 e são analisados em seguida.

Figura 39 – Mapeamento Reflexivo da Trajetória Documental do Professor Marcos



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo mapeamento feito da trajetória documental do professor Marcos, pudemos observar quatro períodos em seu trabalho documental: a) a formação inicial como professor de matemática (2003 – 2006); b) o trabalho como professor eventual⁶⁶ (2006 – 2007); c) o trabalho como professor do colégio A (2007 – 2017); d) o trabalho como professor do colégio B (a partir de 2017). Optamos por essa separação para facilitar a análise de eventos e recursos e seus impactos no trabalho documental de Marcos.

Embora durante seu período da formação inicial Marcos não tenha desenvolvido um trabalho efetivo em sala de aula, os eventos e recursos associados repercutiram em toda sua trajetória. As primeiras falas de Marcos relatam suas

⁶⁶ No âmbito da rede estadual paulista de educação, o professor eventual é aquele que substitui o professor regente quando de sua ausência.

dificuldades com disciplinas que exigiam conhecimento matemático advindo da educação básica: “[...] foi ali que, talvez, eu tenha (tido) o único momento, ou o primeiro momento em que eu disse ‘nossa, eu tenho que estudar, até porque senão eu posso perder a bolsa’” (PROFESSOR MARCOS).

A bolsa a que ele se refere era oferecida pelo governo do estado de São Paulo àqueles que gostariam de fazer um curso de licenciatura. Em contrapartida, os bolsistas deveriam participar do programa Escola da Família, implementado nas escolas da rede pública estadual de educação na década do ano 2000. Nessa época, as escolas eram abertas à comunidade aos fins de semana para oferecer diversas oficinas, além de reforço escolar e outros serviços para promover a aproximação entre comunidade e escola.

A respeito do conhecimento (de conteúdo) matemático, Marcos, ao perceber dificuldades com as disciplinas próprias do curso de matemática em razão de fragilidades em sua formação, buscou em livros didáticos e em colegas de classe meios para superá-las.

Aí sim, lembro sim de começar a estudar, madrugada, sábado... principalmente sábados e domingos eu ficava na escola, era um dos momentos realmente em que eu começava a estudar, mas por onde comecei a estudar? Tudo, bem do básico, ah livros de... pegava esse volume único e basicamente tentava fazer o volume único inteiro de matemática... [...] aí, no final, eu tinha contato com o Álvaro (nome fictício) ... Ele me ajudou muito porque era um aluno que vinha de escola privada, talvez lá na época não tivesse essa percepção o quanto esse abismo que há e que existe entre a privada e o público, então, mas ele já trazia uma bagagem muito melhor que a maioria dos alunos, ali, ele era muito bom. Então ele me ajudou muito. (PROFESSOR MARCOS)

Enquanto atuou como professor eventual, as inquietações a respeito de seus conhecimentos de conteúdos matemáticos se acalmam. No entanto, outras surgem, de natureza didática e pedagógica.

Oh, em conteúdo não, né? Assim, não lembro... assim, eu lembro de ter muita dificuldade de, de ensinar aquilo, né. Por exemplo, eu lembro de, de a professora não, na quarta série estar ensinando fração. Nossa, é muito difícil ensinar aquilo pra molecada, ou também me faltava competência mesmo, “como ensinar isso?”, né? .É, mas o que eu sempre falava, me trouxe muito uma questão de sala de aula. É, com isso, com os anos a gente vai melhorando isso, né, eu sei que você sabe do que eu tô falando. Mas, por exemplo, aí eu, eu não sei em que momento eu falo: “não, eu tenho essa reflexão, eu tenho que ser um professor mais duro, assim, sabe, aquela coisa tipo ninguém fala, né!”.

Ao assumir, em 2007, as aulas no colégio particular A, a percepção de que seu conhecimento matemático era insuficiente voltou a ganhar espaço, conforme

seu próprio relato: “[...] aí de novo eu começo a perceber que me falta ferramenta, falta um 9º. ano, aí o 9º. ano me começa me trazer isso” (PROFESSOR MARCOS).

Em face de dificuldades que uma deficiência em conteúdos matemáticos poderia trazer para sua vida profissional, Marcos incorporou a prática de sempre procurar resolver todos os exercícios do capítulo que abordará, mesmo aqueles que não pretendia trabalhar em suas aulas.

Porque falei e se o aluno pergunta esse eu não sei, enfim, fazia todos [...] quando eu comecei a dar aulas eu não fazia escolhas, eram todos. Não fazia escolhas de exercícios. Eu não tinha isso. Eu não conseguia ter esse olhar de falar ‘olha, esse é difícil, esse é fácil, esse é legal, esse vai explorar mais o conteúdo’. Basicamente eu resolvia todos os exercícios. (PROFESSOR MARCOS)

A experiência documental vivenciada pelo professor Marcos durante sua formação (fragilidades no conhecimento de conteúdos matemáticos) deixou nele um traço dessa experiência – a resolução de todos os exercícios do capítulo – que o acompanha na preparação de suas aulas em todos os períodos analisados. Ele reconhece a importância desse traço, embora se perceba mais seguro em relação às suas aulas.

[...] hoje olhando assim como é que eu preparo minhas aulas, como é que eram minhas aulas? Eu não acho de todo ruim, porque ainda faço muita coisa parecida, principalmente quando são conteúdos dos quais eu sei que são conteúdos difíceis ou às vezes que [...] você sabe que tem que mexer nos exercícios, não dá pra sair resolvendo em sala de aula sem olhar antes os exercícios, dependendo do conteúdo. É... então ainda me vejo, muitas vezes, preparando aula da mesma maneira que eu preparava lá. E hoje [...] eu consigo olhar e falar ‘não, acho que esse é interessante trabalhar, ou esse não é interessante, ah esse possivelmente ele vai conseguir fazer sozinho’, eu consigo fazer essa escolha com, com mais segurança. Não sei se da maneira correta, mas eu diria que com mais segurança. (PROFESSOR MARCOS)

A respeito desse ponto, Rocha (2019, p.74) observa que tais traços nutrem e são nutridos pela experiência documental dos docentes. Além disso, a autora pontua que o que os diferencia dos esquemas é que [eles] “são produzidos pela leitura de um ponto de vista maior do que o do momento da ação, da situação em particular, mas que mostra uma organização invariável do sujeito” (ibidem, *tradução nossa*).

Nota-se, também, a centralidade do material apostilado usado nas instituições de ensino onde trabalhou e do livro didático na trajetória documental de Marcos como recursos presentes em todos os períodos de sua trajetória. Ao longo dos anos, esses recursos tiveram sua utilização: de principal fonte usada para suprir suas fragilidades no que tange ao conhecimento matemático, a um referencial para preparação e execução de suas aulas, visto que esses materiais, sobretudo os

apostilados, são bem presentes em muitos colégios privados no Brasil. Marim e Souza (2015) afirmam que muitos professores, quer da rede pública ou da rede privada de ensino, têm nos livros didáticos e nas apostilas seu principal ponto de apoio para o preparo e execução de suas aulas. Todavia, a relação de proximidade entre os professores e esses recursos, em muitos casos, transcende o simples planejamento das aulas. O livro didático se torna a principal fonte dos conteúdos específicos a serem lecionados, de pesquisa e de busca para suprir eventuais lacunas na formação inicial de professores. (ASSIS; BOTELHO, 2021; SILVA JUNIOR; REGNIER, 2009; SILVA, 2012).

Por fim, observamos que o ingresso do professor Marcos no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), deu-lhe oportunidade de mudar o modo como encarava o ensino de combinatória.

Aí, talvez tenha sido [...] contribuição, principalmente do professor do mestrado, assim. Hoje eu vejo, assim, que eu abordava, não sei se é errada, né, mas a maneira como eu abordo hoje eu estou muito mais satisfeito. Vejo que o entendimento dos alunos hoje é muito melhor. (PROFESSOR MARCOS)

O contato com o professor do curso de mestrado fez com que Marcos passasse de uma abordagem pautada em fórmulas para outra baseada no princípio fundamental da contagem e em possíveis correções que devem ser feitas ao se considerar ou não as questões de ordem e repetição dos elementos nos agrupamentos formados.

Ele fala, fazia o exercício, ah... sabe aquela coisa, assim, ah, é arranjo ou combinação? Ele falava “sei lá! Sei lá se é arranjo ou combinação. Eu sei que é isso, isso, isso. Agora eu preciso perceber se a ordem importa ou não, se eu preciso fazer ou não a correção”. E quando eu começo a abordar isso em sala de aula, eu percebo que o entendimento é muito melhor. (PROFESSOR MARCOS)

O ingresso de Marcos no programa PROFMAT é um ponto que merece atenção. Primeiramente porque alterou sua perspectiva de ensino de combinatória, ao privilegiar o princípio fundamental da contagem em detrimento do uso de fórmulas. Em segundo lugar porque se constituiu um evento que propiciou mudanças no trabalho documental para o ensino de combinatória.

6.1.3.2 Trabalho documental do professor Marcos na preparação de suas aulas sobre combinatória

Solicitamos ao professor Marcos que, com base no material didático proposto pela rede estadual paulista e de outras fontes, preparasse aulas que envolviam o tema combinatória. Nosso objetivo era identificar como esse material se integra ao conjunto de recursos mobilizados por ele para o ensino de combinatória. Para tanto, buscamos inferir as classes de situações desenhadas com base nos objetivos didáticos, e os invariantes operatórios mobilizados por Marcos.

A ele, inicialmente, foi disponibilizado o caderno do professor em versão digital. Cerca de quinze dias depois, o professor Marcos enviou o material para as aulas de combinatória que foi desenvolvido com uma ferramenta digital denominada *Inkodo*. Trata-se de um aplicativo de bloco de notas usado por Marcos em suas aulas remotas ministradas durante o período da pandemia de covid-19 e que foi inserido no conjunto de recursos para suas aulas de matemática.

O que recebemos de Marcos mesclava partes das atividades propostas no caderno do professor com anotações de próprio punho sobre aspectos referentes ao ensino de combinatória. Para uma melhor compreensão de como ocorreu a elaboração desse material, marcamos uma entrevista com o professor pela plataforma *Teams*, no dia 3 de julho de 2023, que foi devidamente gravada e transcrita. A Figura 40 apresenta a primeira página do material elaborado por Marcos.

Esse material contempla duas das quatro atividades que constam no caderno do professor: *Atividade 1 – Introdução ao Raciocínio Combinatório* e *Atividade 2 – Os Desdobramentos do Princípio Fundamental da Contagem*. Porém, o professor trouxe alguns subtemas destacados em vermelho: árvore de possibilidades e princípio multiplicativo; princípio da preferência (restrições); princípio aditivo; fatorial; permutação simples; arranjo simples. Além de outras anotações escritas em preto e em verde que se assemelham às rubricas em azul do caderno do professor. Com base nesses elementos buscamos inferir os objetivos e os invariantes mobilizados no planejamento de suas aulas.

Figura 40 – Primeira página do material elaborado pelo professor Marcos

MOMENTO 1 – RETOMANDO CONCEITOS

ATIVIDADE 1 – INTRODUÇÃO AO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

- ÁRVORE DE POSSIBILIDADES E PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

1.1 Ana foi a uma loja e comprou três blusas (azul, verde e amarela) e duas calças (preta e vermelha). Com as peças de roupas compradas, de quantas formas diferentes Ana pode se vestir com uma blusa e uma calça?

1.2 Com o cardápio ao lado, e com uma sobremesa, que pode ser salada de fruta, sorvete ou barra de chocolate, de quantos modos diferentes uma pessoa pode escolher o Menu e uma sobremesa? Registre em seu caderno seu pensamento e as respostas possíveis.



Havendo possibilidade, professor, indicamos o vídeo:

Fonte: Elaborada pelos autores.

- PROPOR AOS ALUNOS QUE RESOLVAM OS PROBLEMAS.

- APRESENTAR A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES.

CHAMAR ATENÇÃO PARA A IMPORTÂNCIA DE UTILIZAR ESTRATÉGIAS PARA A CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE POSSIBILIDADES. COMO "TRAVAR" UM DOS ELEMENTOS POR EXEMPLO.

- PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

- RESOLVER OS MESMOS PROBLEMAS UTILIZANDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.
(POSSIVELMENTE ALGUNS ALUNOS JÁ TERÃO FEITO DESSA MANEIRA)

CHAMAR ATENÇÃO PARA O CONECTIVO "e".

ATIVIDADE 1.1. POR EXEMPLO

3	e	2	=	3 · 2 = 6
BLUSA		CALÇA		

Fonte: Elaborado pelo professor Marcos

Nas duas primeiras anotações é pedido que sejam propostos os problemas aos estudantes e que seja apresentado a árvore de possibilidades. Esses problemas são o 1.1 e o 1.2 do caderno do professor. Quanto à árvore de possibilidades há a seguinte recomendação: *chamar atenção para a importância de utilizar estratégias para a construção da árvore de possibilidades como 'travar' um dos elementos por exemplo.* Sobre esse ponto, o professor Marcos considera que o uso da árvore de possibilidades é bem-vindo, porém mesmo para esse recurso cognitivo é necessária a intervenção do professor no sentido de instruir os estudantes quanto ao seu uso.

Eu faço sempre essa árvore de possibilidades. Eu acho importante, até para ele [o aluno] perceber que ele pode fazer assim, não tem problema algum. [...] Só que mesmo para fazer essa árvore de

possibilidades seria interessante ele enxergar algumas estratégias. [...] mas assim, aquela (situação de) calça, tênis e blusa, alguma coisa do tipo. [...] Bom, alguns alunos, de maneira intuitiva, começam a montar [algo] bem aleatório. Então, se ele não tem uma estratégia, por exemplo, de travar, “ah, eu vou usar só a calça azul agora, pronto” ou “vou travar a camiseta”, e ele vai trocando os outros, ele já consegue enxergar “bom, com a camiseta azul eu tive 4, ah e com a camisa vermelha eu também vou ter 4”, enfim, já consegue enxergar algo que ele vai conseguir ganhar tempo. Quando o aluno não percebe isso, acho eu que fica muito aleatório. (PROFESSOR MARCOS)

Com o intuito de introduzir a estratégia de *travar* um elemento para uma enumeração sistemática, Marcos busca utilizar situações mais simples, com poucos elementos a se combinarem e aumentar gradativamente esse número. Isso justifica a escolha dos problemas 1.1 e 1.2 do caderno do professor, conforme ele mesmo esclarece:

Eu começo, talvez, com problemas infantis mesmo, assim, para depois aumentar. Eu começo com normalmente, sei lá, camisa, calça e sapato. É com exercícios bem tranquilos mesmo, para ele tentar enxergar algumas coisas, como essa ideia de travar alguém, bem tranquilo. Eu começo com um pouco mesmo. É por isso que eu pego essas 2 primeiras atividades [do caderno do professor] que eu acho que é mais ou menos o que ele faz. Ele pega, não lembro direito das atividades, mas ele pega poucos elementos e permite o aluno entender. (PROFESSOR MARCOS)

Sobre a árvore de possibilidades, o professor destaca sua importância em situações que exigem saber, não somente a quantidade de possibilidades de ocorrência de um evento, mas quais são essas possibilidades.

Quando se usa o princípio multiplicativo ele só vai para a ideia de mostrar a quantidade. Então ele vai enxergar isso, também, e falar ‘quanto eu precisar saber quais são’, ele vai ter que recorrer a essa árvore de possibilidades. Então, acho que isso também é interessante. (PROFESSOR MARCOS)

Sobre o princípio multiplicativo, o professor Marcos observa que há grande chance de que muitos já tenham tido contato com esse princípio nos anos do ensino fundamental usando, inclusive, essa estratégia sem qualquer intervenção prévia. Contudo, no seu entendimento, é importante associar o princípio multiplicativo ao conectivo lógico *e*.

Quando eu chamo atenção já para o conectivo *e*, porque depois mais para frente eu vou chamar a atenção para o conectivo *ou*, a ideia é que isso fique claro, quando que eu vou somar os elementos e quanto que eu vou multiplicar. Então, é a ideia da fala mesmo: ‘ah, eu vou usar a blusa ou calça, ou, eu vou usar blusa e calça?’ De maneira geral (a resposta é) ‘blusa e calça, professor’. Então, toda vez que eu falar esse *e*, eu vou multiplicar. Eu até coloco muitas vezes na lousa, lá *e*, *multe*plificar (sic) e quando eu coloco *ou*, eu coloco *sou*ma (sic). E muitas vezes eles conseguem fazer essa conexão que eu acho importante sim. (PROFESSOR MARCOS, *grifo nosso*)

Marcos destaca que os conectivos lógicos *e* e *ou* se constituem marcadores para que seus alunos possam distinguir os momentos em que se devem usar o princípio multiplicativo ou o aditivo. Porém, em uma situação, como a da Figura 41, esses marcadores podem conduzir o estudante a uma resposta equivocada.

Figura 41 – Situação envolvendo o princípio aditivo em que figura o conectivo lógico e

Um restaurante possui quatro tipos de chocolate e três tipos de sorvete.

De quantas maneiras uma pessoa pode adquirir apenas um tipo de sobremesa?

Escolha 1 resposta:

☐ (A) 12 possibilidades

☐ (B) 7 possibilidades

Fonte: KHAN ACADEMY⁶⁷, *grifo nosso*

No Quadro 41 encontra-se um resumo das observações feitas para a primeira página do material preparado pelo professor Marcos com destaque para os objetivos didáticos e teoremas-em-ação inferidos.

Quadro 41 – Objetivos inferidos e invariantes operatórios do subtema árvore de possibilidades e princípio multiplicativo

Objetivos	Invariantes operatórios
• apresentar e instruir os alunos quantos à construção da árvore de possibilidades e seu uso como ferramenta para a resolução de problemas combinatórios e construção do espaço amostral • retomar o princípio multiplicativo como outra estratégia de resolução de problemas combinatórios, associando-o à árvore de possibilidades • associar o conectivo lógico e ao princípio multiplicativo	• resolver o mesmo problema usando a árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo permite ao aluno relacionar uma estratégia à outra • o aumento gradativo do número de elementos a se combinarem facilita a compreensão da estratégia de <i>travar</i> um deles e fazer os outros variarem na construção da árvore de possibilidades • é importante propor situações que possibilitem aos estudantes relacionarem o conectivo lógico e ao princípio multiplicativo, como, por exemplo, maneiras diferentes de combinar calça e blusa.

Fonte: Elaborado pelo autor

A segunda página do material elaborado por Marcos trata de dois subtemas: o princípio da preferência e o princípio aditivo, como ilustra a Figura 42.

Pelo conteúdo dessa página, nota-se que o professor se apropriou de uma maneira de abordar as restrições, presentes em muitas situações combinatórias,

⁶⁷

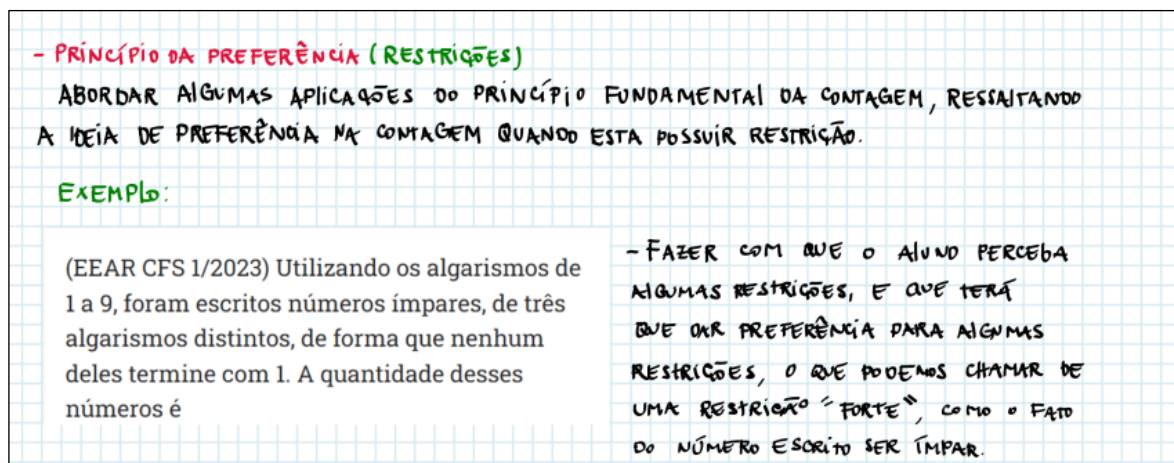
Disponível

em

<https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-probabilidade/x37cb49a28da24b56:contagem/x37cb49a28da24b56:nocoes-basicas-de-contagem/e/principio-aditivo> . Acesso em 27 de novembro de 2023.

pelo que chamou de *princípio da preferência*, segundo o qual as restrições que figuram nos enunciados dos problemas têm uma certa hierarquia. Assim, na resolução devem ser priorizadas algumas restrições em detrimento de outras. Marcos referiu-se a elas como *restrições fortes*.

Figura 42 – Segunda página do material elaborado pelo professor Marcos – Princípio da Preferência



Elaborado pelo professor Marcos

Na aula elaborada por Marcos, esse princípio se encontra associado a um problema cujo contexto é a formação de números ímpares, de três algarismos, não terminados em 1 tendo disponíveis os algarismos de 1 a 9. A esse exemplo encontra-se a seguinte recomendação: “fazer com que o aluno perceba algumas restrições e que terá que dar preferência para algumas restrições, o que podemos chamar de uma *restrição forte*, como o fato do número escrito ser ímpar”.

Marcos reconhece que a maneira como trata problemas combinatórios pelo chamado princípio da preferência teve influência direta das aulas de análise combinatória que teve no período do mestrado e do material apostilado que usa em suas aulas no colégio B. Esses dois constituem os principais recursos que mobiliza para o ensino de combinatória:

[...] eu acho isso muito influenciado pela maneira a qual foi abordada comigo no mestrado, na análise combinatória, e pelo material com o qual eu trabalho e que também cita isso. Então casou, assim, eu falei ‘putz, é interessante sim chamar atenção para esse detalhe, trabalhar com problemas só de restrições e fazer com que ele perceba que algumas restrições são mais fortes do que as outras, que eu preciso me preocupar aqui primeiro, que não dá para fazer de qualquer jeito’.

(PROFESSOR MARCOS)

O princípio da preferência assumiu uma dimensão tal no trabalho documental de Marcos que o leva, eventualmente, a separar um capítulo inteiro para discutir situações que envolvem seu emprego quando afirma que:

[...] muitos exercícios têm restrições e muitas vezes o aluno não consegue perceber. Ele não dá atenção para essa restrição. E quando eu separo um capítulo inteiro para falar de restrições, 'está vendo? qual a restrição? qual restrição? quais as restrições? por onde eu tenho que começar?', enfim. Na minha cabeça funciona melhor. (PROFESSOR MARCOS)

Para viabilizar a abordagem do princípio da preferência, Marcos propõe, como exemplo o problema da Figura 42. Embora considere fortuita a escolha desse exemplo, o professor argumenta ter havido o cuidado com a exclusão do zero e com a formação de números ímpares. Segundo o professor, “se tem o zero e é par, aí eu já tenho que separar em casos” e considera que, provavelmente haverá questionamentos quanto à paridade e à exclusão do zero e que isso o levará, em algum momento, à separação das restrições em casos. Nesse aspecto, a escolha desse exemplo deixa transparecer uma componente dos esquemas: as antecipações. A vivência docente do professor o faz prever que possivelmente haverá questionamentos que o levarão a abordar as restrições em casos particulares. Um resumo dessas observações encontra-se no Quadro 42.

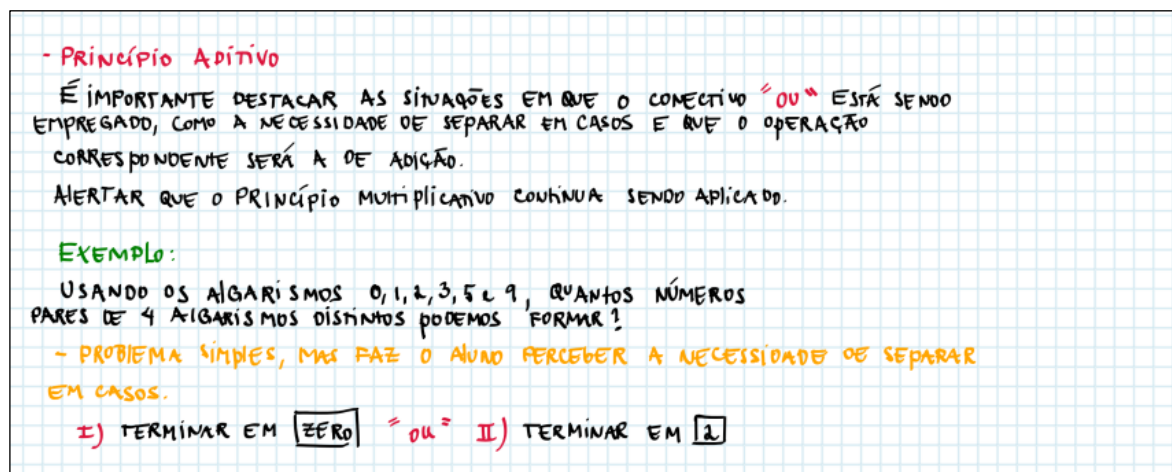
Quadro 42 – Objetivos inferidos e invariantes operatórios do subtema princípio da preferência

Objetivos	Invariantes operatórios (teoremas-em-ação)
abordar algumas aplicações do princípio fundamental da contagem, ressaltando a ideia de preferência na contagem quando esta possuir restrição	- propor e resolver problemas que envolvem a formação de números ímpares de 3 algarismos não terminados em 1 possibilita ao estudante compreender o princípio da preferência em situações em que há restrições. - separar um capítulo inteiro para discutir situações de restrição e o emprego do princípio da preferência

Fonte: Elaborado pelo autor

A necessidade de separação em casos aparece também no problema proposto como exemplo de aplicação do princípio aditivo. Para isso é dada a seguinte recomendação: *é importante destacar as situações em que o conectivo 'ou' está sendo empregado com a necessidade de separar em casos e que a operação correspondente será a de adição*. Além disso, o professor alerta que a aplicabilidade do princípio multiplicativo continua sendo válida. Como exemplo (Figura 43) apresenta o seguinte problema: *usando os algarismos 0, 1, 2, 3, 5 e 9, quantos números pares de 4 algarismos é possível formar?*. Para Marcos, mesmo considerado um problema simples, ele tem o potencial de levar o estudante a perceber a necessidade da separação em dois casos que são unidos pelo conectivo lógico *ou*: I. terminar em zero; II. terminar em 2.

Figura 43 – Segunda página do material elaborado pelo professor Marcos – Princípio Aditivo



Fonte: Elaborado pelo professor Marcos

Conforme ele pontua, trata-se de um tipo de situação que integra seu repertório de problemas desde a época em que trabalhava em cursinhos pré-vestibulares e que seu uso tem um fim específico: levar o aluno a perceber que, a depender do problema proposto, é necessário decompô-lo em casos a fim de que se possa resolvê-lo.

Esse problema eu sempre coloco. Eu utilizava no material do cursinho, aparecia sempre, se não era esse era muito parecido com esse. Eu sempre acho um problema simples, mas de maneira, quando você termina a aula com esse problema simples faz com que o aluno perceba que realmente ele precisa separar em casos. (PROFESSOR MARCOS)

Notamos, aqui, a presença de um outro recurso: o material didático do cursinho pré-vestibular. A recorrência desse tipo de situações nesse material levou o professor Marcos a incorporá-lo ao seu repertório com um determinado fim: fazer os alunos perceberem a necessidade da separação em casos ou subproblemas. No Quadro 43 estão compilados os objetivos e invariantes inferidos para essa classe de situações.

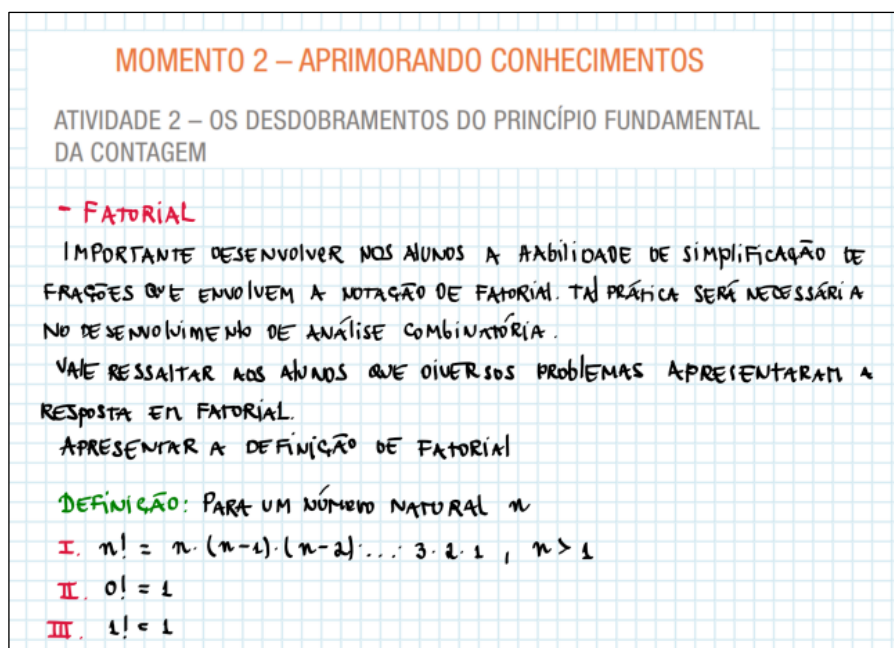
Quadro 43 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos do subtema princípio aditivo

Objetivos	Invariantes (teoremas-em-ação)
• associar o conectivo lógico <i>ou</i> ao princípio aditivo • discutir situações em que há a necessidade da separação de um problema em casos (subproblemas)	• destacar situações em que o conectivo <i>ou</i> está sendo empregado com a necessidade de separar em casos e que a operação correspondente seja a de adição • alertar que o princípio multiplicativo continua sendo usado • propor problemas simples, como a formação de números pares a partir de algarismos dados sendo um deles o 0, permite que o aluno perceba a necessidade da separação em casos (subproblemas)

Fonte: Elaborado pelo autor

Na terceira página, o professor Marcos aborda a notação fatorial com a definição do fatorial de um número natural n para três situações: para n maior do que 1, para n igual a 1 e para n igual a zero. A Figura 44 traz essas anotações.

Figura 44 – Terceira página das anotações do professor Marcos – o fatorial



Fonte: Elaborado pelo professor Marcos

Ele também expressa que considera importante o aluno ser capaz de simplificar frações em que numerador e/ou denominador tenham a notação fatorial visto que “tal prática será necessária para o desenvolvimento da análise combinatória”. É de igual importância, segundo ele, o destaque a questões que apresentem respostas expressas em notação fatorial, comuns em provas como vestibulares e concursos públicos. Os exemplos explorados pelo professor traduzem essas duas concepções de abordagem para o número fatorial.

Buscamos aprofundar com o professor Marcos o emprego do número fatorial em situações combinatórias. Para ele, essa é uma questão que o incomodava, pois toda vez que iria introduzir esse tema, percebia haver uma quebra no trabalho que vinha realizando com os problemas de contagem e o princípio multiplicativo.

Então, assim, eu acho, sim, importante abrir um capítulo para fatorial, porque é uma ferramenta a qual eu vou ter que utilizar. Eu sempre fico me questionando, né, porque parece que fica um buraco ali. Você vem fazendo um trabalho, aí você para, abre um capítulo para falar de fatorial. [...] Eram simplesmente aquelas contas enormes, aquelas equações fatoriais, enfim, eram só realmente o fatorial. E aí eu sempre ficava me questionando ‘não sei se é aqui o momento, sei lá pra quê isso?’. E aí, no próximo módulo, ele já vinha lá de novo com análise combinatória. (PROFESSOR MARCOS)

Embora houvesse dúvidas sobre o momento de se aprofundar (ou não) o estudo com o número fatorial, Marcos parece ter optado por manter, em suas aulas, a sequência proposta pelo material didático usado no colégio onde leciona. A reformulação desse material trouxe alívio a suas inquietações visto que foi ao encontro de suas expectativas, conforme ele mesmo relata:

Por exemplo, o material ao qual eu trabalho lá, até houve uma reformulação que, do meu ponto de vista, ficou melhor. Ele abria lá (um capítulo): fatorial. [...] Agora não. Agora ele *linka* (sic). [...] Essa maneira a qual o material [a apostila] faz agora me agrada mais. Nesse momento ele só aborda como uma outra representação, assim, que vai ser uma ferramenta importante para a análise combinatória. (PROFESSOR MARCOS)

Pelas suas palavras, o professor Marcos manifesta a importância que a notação fatorial tem em situações de simplificação de frações que envolvem fatorial, como o que acontece no uso de algumas fórmulas próprias de combinatória e nas soluções de problemas combinatórios. Nesses casos, “o [pode] aluno dominar bem o primeiro passo, mas se não conhece a notação fatorial ele vai se sentir confuso. [...] Então ele precisa se apropriar desses símbolos” (PROFESSOR MARCOS). Aqui, o professor Marcos revela considerar a notação fatorial como representação simbólica.

A respeito da maneira como o fatorial é abordado no caderno do professor do *Currículo em Ação*, em situações que envolvem anagramas, Marcos não o considera de todo ruim. Porém algumas deduções feitas nesse material como, por exemplo, para o $1!$, ele apresenta algumas ressalvas, pois entende que nesses casos não caberiam demonstrações uma vez que se trata de definições. Apresentamos no Quadro 44 um resumo das observações feitas sobre o subtema *Fatorial*.

Quadro 44 – Objetivos e invariantes inferidos do subtema fatorial

Objetivos	Invariantes operatórios
- definir o número fatorial - desenvolver a capacidade de simplificar frações que envolvem a notação fatorial - escrever respostas com o auxílio da notação fatorial	- é importante propor exercícios de simplificação de frações que envolvem a notação fatorial, pois isso será necessário no desenvolvimento da análise combinatória - apresentar problemas objetivos, como o de multiplicas escolhas de vestibulares faz o aluno perceber a importância das respostas dadas na notação fatorial

Fonte: Elaborado pelo autor

Na quarta página (Figura 45) o professor apresenta anotações referentes a permutação simples. Inicialmente é apresentado um recorte com a mesma definição presente no caderno do professor: “A permutação simples é um tipo de agrupamento estudado na análise combinatória. Permutar os elementos de um conjunto (com n

elementos) nada mais é que formar agrupamentos ordenados com todos os elementos desse conjunto”. (SÃO PAULO, 2022a, p. 39). Em seguida, é apresentada a fórmula para o cálculo da permutação (simples) de n elementos.

Figura 45 – Quarta página das anotações do professor Marcos – permutação simples

- PERMUTAÇÃO SIMPLES

Permutação simples
A permutação simples é um tipo de agrupamento estudado na análise combinatória. Permutar os elementos de um conjunto (com n elementos) nada mais é que formar agrupamentos ordenados com todos os elementos desse conjunto.

$P_n = n!$

 $n \in \mathbb{N}$

- A IDEIA É FAZER ENTENDER QUE O ALUNO JÁ RESOLVE PROBLEMAS QUE ENVOLVAM PERMUTAÇÃO SIMPLES, MAS SEM A UTILIZAÇÃO DA FÓRMULA.

- OS PRIMEIROS EXEMPLOS SEMPRE RESOLVIDOS COM A UTILIZAÇÃO DA FÓRMULA E SEM A UTILIZAÇÃO DA FÓRMULA.

- O CONCEITO DE ANAGRAMA E PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO, SERÃO EVITADOS INICIALMENTE.

EXEMPLOS:

(UNICAMP - 2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

a) 48.
X 72.
 c) 96.
 d) 120.

Elaborado pelo professor Marcos

Nas anotações feitas de próprio punho, Marcos exprime ser importante que os alunos percebam que problemas que envolvem permutações simples já são resolvidos por eles sem o auxílio da fórmula. Além disso, pontua que os primeiros exemplos a serem trabalhados devem ter soluções obtidas com e sem o uso da fórmula, e, que o trabalho com anagramas e permutações com repetição será evitado nesse momento.

A ideia, quando eu falar de permutação simples, é você falar ‘olha, você já saber resolver’. É mais do mesmo. Só que agora a gente vai se utilizar de fórmula. [...] Então, eu ainda não falo de repetição. [...] A ideia é resolver, porque todos os problemas até agora resolvidos, a gente não falou de repetição. [...] Então, eu coloco permutação com repetição depois de arranjo. Na minha cabeça funciona melhor. (PROFESSOR MARCOS)

No exemplo escolhido pelo professor há uma restrição: duas pessoas se recusam a permanecer uma ao lado da outra e é solicitado determinar a quantidade de posições distintas que as cinco pessoas podem ficar para uma fotografia.

Segundo Marcos, a escolha de um problema que aborda mais uma restrição além daquela própria da permutação (a questão da ordem) seria uma oportunidade de introduzir uma representação própria para situações cuja restrição exige que os elementos fiquem juntos ou separados, a qual denominou *bloquinhos*. “‘Olha, o Marcos e o Carlos têm que estar sempre juntos’. Bom, faço lá, bloquinho Carlos e Marcos. A ideia, então, é como se fossem um único elemento. Falo para eles: ‘olha esse aqui passa a ser um’”. (PROFESSOR MARCOS). A Figura 46 apresenta o uso dessa representação na resolução do problema tomado por exemplo.

Figura 46 – Resolução do exemplo selecionado para a abordagem permutação simples

Exemplos:

(UNICAMP - 2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

a) 48.
~~x~~ 72.
 c) 96.
 d) 120.

TOTAL: $5! = 120$

RESTRIÇÃO: A e B JUNTAS $\boxed{AB}$ ou $\boxed{BA}$

$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \cdot 2 = 48$

Logo, $120 - 48 = 72$

Fonte: Elaborado pelo professor Marcos

A solução é obtida com o cálculo do total de permutações de modo que, desse número, seja subtraída a quantidade em que AB estão juntas em qualquer ordem. Os *bloquinhos* surgem quando se quer enfatizar a junção de A e B tomados como um único elemento. O professor explica que essa maneira de representar elementos que devem permanecer unidos surgiu de dificuldades pelos quais seus alunos passavam em distinguir algarismos de possibilidades, em situações que envolviam a formação de números.

Isso eu comecei a perceber muito, muito em avaliações. Falava, ‘caramba, não, mas isso aqui, o que que tá querendo dizer com isso? Ah, ele tá falando do número’. Então ele começa a combinar alguns, fazer alguns, enfim, alguns encontrado. [Agora] eu falo, ‘olha, toda vez que eu colocar entre bloquinho, faço aqui, quer dizer que é esse número, é esse algarismo fixado, não são possibilidades’. (PROFESSOR MARCOS)

Quanto ao uso de anagramas em situações de permutação com repetição, Marcos reforça a estratégia de abordar problemas combinatórios a partir do princípio multiplicativo com algumas correções.

Num outro momento eu tento utilizar exatamente a mesma estratégia. Primeiro perceber a não utilização de fórmula, por que que eu preciso fazer. [...] Eu preciso fazer alguma correção aqui. Eu gosto mais de abordar dessa maneira, quando começo a falar de repetições. 'Ah, [a palavra] OVO. Aí [são] 3!. Tudo bem. Vamos listar quais são. Opa não, não são 6, né? É não são 6. E aí são só 3, por quê?' A gente começa a perceber que eu preciso fazer essas correções. Depois eu venho com a fórmula. (PROFESSOR MARCOS)

Com essas observações inferimos os objetivos e invariantes operatórios que compilamos no Quadro 45.

Quadro 45 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos do subtema permutação simples

Objetivos	Invariantes operatórios
• apresentar a definição de permutação simples e a fórmula • resolver problemas envolvendo o conceito de permutação	• fazer o aluno entender que já resolve problemas que envolvem permutação simples, mas sem a fórmula • propor exemplos de problemas de permutação resolvidos com a fórmula e sem a fórmula a fim de que o estudante estabeleça uma relação entre os dois procedimentos e percebendo que é "mais do mesmo" • evitar, inicialmente, situações que envolvam a construção de anagramas e aquelas de permutações com elementos repetidos

Fonte: Elaborado pelo autor

A mesma maneira de abordar problemas combinatórios prevalece nas situações de arranjo simples, conforme as anotações do professor Marcos sobre esse tópico na quinta página que elaborou (Figura 47).

Figura 47 – Quinta página das anotações do professor Marcos – arranjo simples

- ARRANJO SIMPLES - APRESENTAR ALGUMAS APLICAÇÕES DOS PRINCÍPIOS DE CONTAGEM PARA SITUAÇÕES EM QUE A ORDEM DOS ELEMENTOS INTERFERE NA CONTAGEM, POR EXEMPLO, QUANDO HÁ CARGOS DEFINIDOS, ORGANIZAÇÃO DE NÚMEROS COM ALGARISMOS DISTINTOS. - INICIALMENTE UTILIZAR SOMENTE OS PRINCÍPIOS DE CONTAGEM, SEM RECORRER ÀS FÓRMULAS. - COMEÇAR A TRABALHAR A IDEIA SE ORDEM DOS ELEMENTOS INTERFERE. - RESOLVER OS MESMOS PROBLEMAS INICIAIS E OUTROS, UTILIZANDO A FÓRMULA DE ARRANJO SIMPLES - FAZER COM QUE O ALUNO PERCEBA QUE $A_{n,n} = P_n$, OU SEJA, CONTINUAMOS FALANDO DAS MESMAS COISAS.

Fonte: Elaborada pelo professor Marcos

Na perspectiva de Marcos, a discussão em torno da relevância ou não da ordem em problemas combinatórios deve ser tal que leve os estudantes a perceberem que possuem as ferramentas cognitivas para resolvê-los. “Olha, continuamos fazendo mais do mesmo. A gente já sabe fazer’. [...] Se eu não falo de arranjo, não falo de fórmula, a ideia é que você consiga resolver exercícios. Depois eu amarro com a fórmula”. (PROFESSOR MARCOS).

Uma das consequências, segundo o professor, do modo como aborda problemas combinatórios com seus alunos é o questionamento que muitos deles fazem sobre a utilidade de se aprender fórmulas. Como justificativa, o professor se apoia novamente no uso que vestibulares e outros tipos de provas e exames fazem das fórmulas como representação simplificada da resposta.

E hoje eu uso muito esse argumento porque alguns ficam perguntando assim: “ah, mas para quê então que eu vou saber fórmula só pra ficar fundindo a cabeça?” Aí eu uso muito desse argumento: o Enem. O Enem, assim, eu falo “olha, olhando para os vestibulares é o que absurdamente... nas alternativas só tem fórmula, só tem uma outra representação do número. Tá lá. Muitas vezes você vai encontrar arranjo 3 com 2. O cara, se não souber, não faz ideia do que é aquilo. (PROFESSOR MARCOS)

Contudo, mesmo Marcos, na qualidade de aluno do mestrado, relata ter questionado a necessidade do uso de fórmulas.

[...] eu passei lá um semestre todo estudando sobre análise combinatória, o cara não colocou uma fórmula na lousa o curso inteiro. Por uma questão... ele era físico, mas, ele resolveu os problemas de maneira, no meu ponto de vista, tão brilhante, assim eu falava ‘caramba, para que que eu preciso usar fórmula? Olha, o cara fazendo. É tão mais simples?’ A diversidade de problemas que eu vou conseguir resolver, se eu entender isso vai ser muito melhor, muito mais fácil do que eu ficar... (PROFESSOR MARCOS)

Os exemplos selecionados por Marcos são os problemas das seções 2.5 e 2.6 do caderno do professor. Não nos aprofundamos nesse ponto de nossa conversa, por que da escolha desses problemas especificamente, visto que os da seção 2.6, item c solicita aos alunos que elaborem problemas baseados nas situações dadas.

O resumo dos pontos observados na preparação feita por Marcos da aula sobre arranjo simples encontra-se no Quadro 46.

Quadro 46 – Objetivos e invariantes operatórios inferidos sobre o subtema arranjos simples

Objetivos	Invariantes operatórios
• reconhecer agrupamentos em que a ordem dos elementos é relevante e outras em que isso não acontece • definir os arranjos simples, apresentar a fórmula e aplicá-la na resolução de problemas	• apresentar algumas aplicações dos princípios de contagem para situações em que a ordem dos elementos interfere na contagem, por exemplo, quando há cargos definidos, organização de números com algarismos distintos etc. • usar, inicialmente, o princípio multiplicativo, sem recorrer às fórmulas • começar a trabalhar a ideia de que a ordem dos elementos pode interferir na contagem • resolver os mesmos problemas propostos inicialmente, agora com a utilização da fórmula para o cálculo de arranjos simples • é importante que o estudante perceba de a permutação simples é um caso particular dos arranjos simples.

Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir, tecemos algumas considerações sobre o que foi produzido pelo professor Marcos, no âmbito do ensino de combinatória, com base no caderno do professor e de recursos que lhes estavam ao alcance.

6.1.3.3 *Discussão sobre a produção do professor Marcos a partir do caderno do professor e outros recursos*

A maneira como o professor Marcos desenvolveu o trabalho de planejamento das aulas, baseado no caderno do professor do programa *Currículo em Ação*, revela aspectos ligados ao modo como esse professor concebe o ensino de matemática, em particular, de combinatória no nível médio.

Um primeiro aspecto está relacionado à árvore de possibilidades. Do seu ponto de vista, essa se configura um importante recurso cognitivo e representacional ao alcance dos estudantes para a resolução de problemas combinatórios e construção do espaço amostral em situações de probabilidade. Para Marcos, porém, não basta simplesmente apresentá-la ao aluno, é necessário levar o estudante a construí-la com base em procedimentos de enumeração sistemática, o que implica na intervenção do professor no sentido de instruir seus estudantes para sua construção. Fischbein (1975), Fischbein et al. (1970), Fischbein e Gazit (1988) destacam a importância da instrução e do uso da árvore de possibilidades para o desenvolvimento de esquemas combinatórios por parte dos estudantes. Outrossim, a ideia de Marcos em instruir seus alunos a *travar* um elemento e fazer os demais variarem, na confecção da árvore de possibilidades, guarda uma relação com o que

English (2017) chamou de *estratégia do hodômetro*, pela semelhança que tal estratégia de enumeração sistemática tem funcionamento de hodômetros⁶⁸ analógicos presentes em veículos automotores, sobretudo nos mais antigos.

Outro aspecto está ligado ao uso prioritário de procedimentos pautados nos princípios aditivo e multiplicativo. Marcos entende que problemas em que figuram restrições ou que discutem a relevância ou não da ordem e repetições devem ter como ponto de partida o uso desses dois princípios, em especial o do multiplicativo. Para ele, é importante que o aluno perceba que o que está fazendo é “mais do mesmo” por já possuir, graças a situações vivenciadas anteriormente, as ferramentas cognitivas que o torna capaz de resolver os problemas propostos. Com base nessa premissa é que serão introduzidas as adequações pertinentes a cada situação com o uso do princípio da preferência, da separação em casos (subproblemas) e das correções, quase como em um processo contínuo e natural. Esses constituem um terceiro aspecto da forma como Marcos concebe o ensino de combinatória.

Nessa perspectiva, o uso da fórmula passa a ser, então, uma estratégia secundária, porém importante: “[...] que ele resolva o problema sem fórmulas, mas que ele consiga associar com uma delas” (PROFESSOR MARCOS). Tal associação está mais ligada a uma função representacional da fórmula para a solução de problemas combinatórios do que propriamente algorítmica. A mesma observação vale para a notação fatorial.

Em síntese, o trabalho de planejamento desenvolvido pelo professor Marcos, com base no caderno do professor do programa *Currículo em Ação*, revelou quatro pontos de sua concepção para o ensino de combinatória:

1. a enumeração sistemática como estratégia de contagem e de determinação dos componentes de um espaço amostral quando essa for necessária;
2. o uso preferencial dos princípios aditivo e multiplicativo (sobretudo desse último) como meios de resolver problemas combinatórios de um modo geral e nas correções que, a depender das situações, se fizerem necessárias;
3. a aplicação do princípio da preferência, da separação em casos (subproblemas) e de correções;

⁶⁸ Instrumento utilizado para medir as distâncias percorridas por automóveis ou pessoas: os automóveis têm, no painel, um hodômetro, que marca os quilômetros rodados. (Dicionário Online de Português. Disponível em <https://www.dicio.com.br/hodometro/>. Acesso em 27 de novembro de 2023)

4. o uso da notação fatorial e de fórmulas como estratégia secundária na resolução dos problemas, mais próximo do papel representacional de soluções.

Esse modo de abordar os problemas combinatórios, como reconhece o próprio professor Marcos, teve influência direta de um de seus professores do mestrado pelo PROFMAT, pois a maneira como resolvia os problemas clássicos de arranjo, permutação e combinação permitiu que refletisse sobre sua própria prática o que desencadeou um processo de mudança:

Eu fazia os alunos tomarem a seguinte decisão: é arranjo ou combinação? Eu ficava o tempo todo em cima disso: “é arranjo ou combinação? É arranjo ou combinação?” Eu queria que ele desenvolvesse isso e hoje eu percebo que não é tão necessário assim. [...] Ele [seu professor do mestrado] resolvia os problemas, sempre se atentando se precisava ou não fazer essa correção, se a ordem dos elementos importava ou não, enfim. E é uma ideia a qual eu consegui aumentar assim. Consigo resolver muito mais problemas usando isso do que ficar pensando. Eu tinha dificuldade, por exemplo, [...] que para o mesmo problema você pode utilizar fórmulas diferentes. Você pode usar a combinação completa ou permutação com repetição. Isso, inicialmente para mim, era confuso sim. Como explicar isso? Se é permutação... não sei o que é. Ó, é isso aí. Eu acho que isso, de maneira geral, faz com que o aluno resolva uma maior quantidade de exercícios, não sei!

As ações descritas por Marcos sugerem que, antes do mestrado, seu modo de abordar a combinatória em suas aulas aproximava-se de uma atuação tida por muitos como tradicional. Por essa abordagem espera-se que os alunos sejam capazes de reconhecer e classificar as situações em problemas de arranjo, permutação e combinação para, em seguida, empregar a fórmula mais adequada.

Ao se deparar com o jeito de resolver problemas combinatórios de seu professor, Marcos buscou orientar sua prática para essa nova perspectiva. Os recursos mobilizados por ele, após esse evento, buscaram refletir as mudanças proporcionadas pela experiência do mestrado. Do ponto de vista do trabalho documental de Marcos, há indícios de que houve mudança no que Rocha (2019) denominou *dominante documental*. “Este dominante documental é caracterizado por uma família de atividades predominante em um determinado período” (ROCHA, 2019, p. 75, *tradução nossa*⁶⁹). Por essa razão, o evento que o levou a tal mudança seria o que a mesma autora denominou *evento simbólico de transição* visto que

⁶⁹ Cette dominante documentaire est caractérisée par une famille d'activités predominante dans une période donné.

possibilitou “uma interrupção no trabalho documental antes e depois de sua chegada” (ibidem, *tradução nossa*⁷⁰).

6.2 Considerações sobre o trabalho documental dos professores participantes

Procuramos, nesta seção, compilar a série de observações feitas da preparação e da execução de aulas dos professores participantes, com vistas a identificar os recursos e invariantes operatórios mobilizados por eles no contexto do ensino de combinatória. É importante ressaltar que, na perspectiva de Trouche et al. (2017), o modo como professor seleciona, modifica ou cria recursos em situações de ensino é gerido pelos conhecimentos subjacentes expressos nos esquemas de utilização de recursos.

Inicialmente, sobre a trajetória documental dos professores, cabe ponderar que Gabriel e Maria Clara, além de serem professores da rede estadual paulista de ensino, ambos, desde o início de suas vidas profissionais até o final do acompanhamento de suas aulas, tinham atuado exclusivamente nessa rede de ensino. O professor Marcos, embora também tenha trabalhado por um período como professor dessa rede, teve uma atuação maior na rede privada.

No caso do professor Gabriel, o preparo de *slides* para suas aulas possivelmente tem raízes nas aulas remotas durante a pandemia de covid-19. Porém, a preparação feita com base em um único *site* educacional como fonte e na reprodução de seu conteúdo sem adequá-lo aos seus objetivos didáticos, além da ausência de discussão efetiva de problemas combinatórios em aula, mais que serem fruto da pouca experiência docente, sugerem fragilidades em conhecimento de conteúdo e de currículo (ROCHA, 2011; ROCHA et al., 2011; SANTOS-WAGNER et al., 2013; GEA et al., 2019). A esse respeito, Oliveira e Coutinho (2015) entendem que tais fragilidades comprometem o emprego, por parte do professor, de técnicas de ensino que estimulem os alunos a procedimentos diferenciados para a execução de tarefas combinatórias que visam a constituição desse tipo de raciocínio. Tal emprego passa, obrigatoriamente, pela seleção de recursos que coadunem com os objetivos que se pretende com o ensino desse tema.

A professora Maria Clara, por sua vez, constituiu seus recursos pautada no material digital e em livros didáticos. Todavia, não identificamos nenhum outro que tenha sido selecionado especificamente para o ensino de combinatória. O uso

⁷⁰ [...] *une rupture dans le travail documentaire avant et après son arrivée.*

obrigatório do material digital, relatado por ela, pode ser um dos motivos para a não seleção de outros recursos. Quanto aos invariantes que Maria Clara mobilizou nas 3 classes de situações profissionais que identificamos, foi possível perceber a força que o uso de fórmulas teve no enfrentamento de problemas de contagem. Para ela, é imprescindível que os estudantes saibam as definições para serem capazes de aplicar as fórmulas corretamente. Pela análise que fizemos do material digital, é plausível afirmar que as ações de Maria Clara ecoam a maneira de conceber o ensino de combinatória nesse material. Apesar disso, houve momentos em que a professora buscou investir em outras estratégias como árvores de possibilidades ou a listagem, sobretudo em problemas que envolviam poucos elementos a se combinarem e que demandavam aplicação exclusiva do princípio multiplicativo.

Por fim, o professor Marcos focou seu trabalho de preparo de aulas no princípio multiplicativo e no desejo de levar os estudantes a perceberem que ao resolverem problemas combinatórios, para além das restrições e correção necessárias, eles fariam *mais do mesmo*. Os dois recursos elencados por Marcos – o material apostilado do colégio B, onde passou a trabalhar em 2017, e o jeito do professor do mestrado resolver problemas de contagem – colaboraram significativamente para que ele mudasse sua concepção de ensino de combinatória. Com base nesses mesmos recursos, Marcos modificou outro – o caderno do professor – ao adaptá-lo às suas metas didáticas e ao agregar novos esquemas de utilização. Esse fato exemplifica os processos de instrumentação e instrumentalização, descritos por Trouche et al. (2017) na gênese documental, que são mediados por esquemas de utilização.

Na próxima seção tecemos as análises e considerações finais dessa investigação.

7. ANÁLISES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação se ocupou em discutir a relação entre professores e recursos curriculares para o ensino de combinatória, no contexto da BNCC (BRASIL, 2018) e da CPEM (SÃO PAULO, 2020). Tanto um quanto outro documento curricular estabelece o rol de aprendizagens ditas *essenciais* e que devem ser trabalhadas ao longo da educação com vistas ao desenvolvimento de habilidades nas várias áreas do conhecimento. A combinatória é parte desse rol.

Dada a importância que o conhecimento combinatório tem para a própria área da matemática e para outras áreas do conhecimento (KAPUR, 1970), muitos pesquisadores procuraram compreender o raciocínio combinatório no seu desenvolvimento e quais contribuições teria seu ensino formal. Os primeiros foram Piaget e Inhelder (1951) que, embora não tenham se atidos ao ensino, evidenciaram a importância do raciocínio combinatório para o desenvolvimento das ideias de acaso e probabilidade em crianças e jovens em idade escolar. Outras investigações apontaram a importância da instrução prévia no desenvolvimento da capacidade combinatória do indivíduo (FISCHBEIN, 1975; FISCHBEIN et al., 1970; FISCHBEIN e GAZIT, 1988), e o papel destinado à escola em promover esse desenvolvimento (LARIVÉE, 1981).

Ao considerar a combinatória como objeto matemático a ser ensinado, pesquisas se detiveram na relação de professores com esse conhecimento. Dentre elas estão as que discutiram os conhecimentos requeridos ao professor para seu ensino (ROCHA, 2011; ROCHA et al., 2015), avaliaram diferentes formas de linguagem e estratégias empregadas por professores na resolução de problemas combinatórios (GEA et al., 2011), discutiram o nível de compreensão de conceitos combinatórios de professores em formação inicial (SANTOS-WAGNER et al., 2013), analisaram os conhecimentos de professores de matemática da educação básica sobre combinatória (ROCHA, 2012), e trouxeram à pauta os saberes docentes referentes à combinatória do ensino médio (SABO, 2010).

Também na perspectiva de seu ensino, outras investigações se ativeram à combinatória, presente em recursos curriculares, em especial livros didáticos e documentos curriculares. São investigações que abordaram, por exemplo, as transformações ocorridas na forma de abordagem da combinatória em livros didáticos (PINHEIRO, 2015), a influência que movimentos como a da Matemática Moderna ou da Educação Matemática tiveram em livros didáticos e documentos

curriculares para os problemas de contagem (MELO, 2018), e as diferentes estratégias empregadas em exemplos e problemas resolvidos de livros didáticos (SILVA, 2016; ROCHA e BORBA, 2017). Sobre documentos curriculares, em especial os PCNs e a BNCC, estudos como os de BORBA (2019) apontaram os avanços que eles trouxeram e a falta de aprofundamentos em pontos importantes como as representações simbólicas como estratégias de resolução de problemas combinatórios. Outros estudos (RICARDO, 2010; DUARTE, 2011; BRANCO et al., 2019), porém, teceram críticas ao modelo de ensino baseado no desenvolvimento de competências e habilidades presente na BNCC, ao considerar que, nesse caso, o conhecimento passa a habitar um segundo plano.

Recursos curriculares, em especial o livro didático e as apostilas, desempenham um papel importante na relação entre o professor e o currículo prescrito por dois motivos: primeiro, por serem os principais recursos disponíveis ao professor no preparo e execução de suas aulas; segundo, porque é especialmente por meio deles que são veiculadas as diretrizes que constam em documentos curriculares, como a BNCC e o CPEM. No âmbito da rede pública paulista de educação, houve a produção de recursos curriculares para esse fim.

Pelas pesquisas que apresentamos refletimos a respeito de como é concebido o ensino de combinatória nesses recursos e como eles são integrados àqueles de que o professor já dispõe para o preparo e execução de suas aulas de combinatória. É importante mencionar que a SEDUC-SP produz materiais didáticos para professores e alunos da rede estadual paulista de educação desde 2007, ou seja, antes mesmo da homologação da BNCC. Em 2011, a combinatória, presente nos cadernos do professor e do aluno do programa *São Paulo Faz Escola*, foi foco de nossa investigação de mestrado (CAMPOS, 2011), desenvolvida tendo por quadro teórico a TCC (VERGNAUD, 1990). Sob a luz da mesma teoria, na presente investigação focamos nas situações que figuram no caderno do professor do material físico, e nos *slides* e tarefas *on-line* do material digital do programa *Currículo em Ação*. Incluímos, também, nessa análise as situações da plataforma *Khan Academy* que também é parte dos recursos digitais.

No que se refere à maneira como o professor integra esses recursos para fins de ensino de combinatória, apoiamo-nos em Trouche et al. (2017) para quem essa integração é mediada por esquemas de utilização. Esses são esquemas mobilizados pelo professor em sua interação com os recursos de que dispõe quando se encontra

diante de uma situação profissional. Os esquemas de utilização comportam os invariantes operatórios que constitui a sua *episteme*. Assim, pela presente pesquisa, buscamos responder às seguintes questões:

- a) que situações, invariantes operatórios e representações simbólicas podem ser inferidos da proposta de abordagem para o ensino de combinatória estão presentes nos recursos físico e digital do programa *Currículo em Ação*?
- b) que invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) são mobilizados pelos professores ao usarem os recursos didáticos físico e digital do programa *Currículo em Ação* e como eles se articulam com outros recursos que eventualmente utilizem para o ensino de combinatória?

Pontuamos como objetivo geral dessa investigação observar os pontos de proximidade e de afastamento entre os recursos disponibilizados pela SEDUC-SP e as pesquisas sobre desenvolvimento do raciocínio combinatório, no que concerne ao seu ensino e aprendizagem, à luz da TCC, e como esses recursos, em conjunto com outros possíveis, são articulados pelos professores no ensino de combinatória, considerando o quadro teórico da ADD.

Para responder à primeira questão, analisamos as situações desenhadas nos recursos físico e digital para o ensino desse tema que, até então, é abordado no 3º bimestre para turmas de 2º. ano do ensino médio, o que configura a pesquisa como documental. Para a segunda, acompanhamos o trabalho documental dos professores participantes no planejamento e execução de algumas de suas aulas sobre combinatória. Participaram 2 professores atuantes em turmas de 2º. ano do ensino médio da rede pública estadual de ensino de São Paulo. Solicitamos, outrossim, que a participação de um terceiro professor da rede privada de ensino para observamos seu trabalho documental ao utilizar o caderno do professor como um de seus recursos.

Com os dados coletados e analisados, procuramos responder às questões que norteiam essa investigação.

7.1 Situações, invariantes operatórios e representações simbólicas dos materiais físico e digital do programa *Currículo em Ação*

As análises que fizemos das situações combinatórias que constam nos materiais didáticos disponibilizados a professores e alunos revelaram a pouca preocupação em propor problemas em espectro amplo de contextos e

representações simbólicas, na perspectiva da construção de esquemas para seu enfrentamento. Esses materiais trazem situações em que prevalece um único modelo combinatório – o de seleção – e que privilegia uma única representação simbólica como estratégia de resolução – a fórmula. Ao considerarmos os conceitos combinatórios abordados nas situações, eles se distribuem de maneira desigual, com prevalência de situações de permutação simples no material físico e de combinações simples no material digital. Nesse sentido, pouco contribuem para a constituição do raciocínio combinatório no indivíduo, em razão da escassez de situações que permitem a sedimentação e aquisição de esquemas combinatórios pelos estudantes (VERGNAUD, 1990; LARIVÉE, 1981; FISCHBEIN et al., 1970; FISCHBEIN, 1975; FISCHBEIN e GAZIT, 1988; NAVARRO-PELAYO et al., 1996; LIMA E BORBA, 2019). Essa postura, em certa medida, contradiz o que é apregoado no próprio material quando é afirmado, em uma das rubricas do caderno do professor, que “a contagem [...] não significa aprender fórmulas, mas o processo cognitivo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo de cada conjunto de dados de modo a ser possível contá-los” (SÃO PAULO, 2022a., p.33). A mesma contradição é observada quando confrontamos as análises com a habilidade EM13MAT310, presentes na BNCC e na CPEM, em que o uso de estratégias diversas é incentivado para a resolução e elaboração de problemas por alunos.

No que compete às situações profissionais desenhadas para o ensino de combinatória, cabe pontuar a diferença entre os dois materiais. No caderno do professor foi possível identificá-las baseado nos objetivos didáticos inferidos e nas rubricas presentes nesse material. Assim, identificamos as seguintes situações profissionais: 1. retomada de conhecimentos anteriores; 2. introdução da notação fatorial; 3. definição e apresentação das fórmulas de permutação (simples e com elementos repetidos), arranjo simples e combinação simples; 4. elaboração de problemas. O mesmo reconhecimento não foi possível no material digital, mas percebemos nos *slides* e nas tarefas *on-line* uma mudança em relação ao caderno do professor. De um modo geral, as aulas do material digital, se configuraram na seguinte formatação: comentário inicial, definição, fórmula, exemplos e problemas de aplicação, e tarefa *on-line*. Esses três últimos itens, foram trabalhados em problemas que, geralmente, eram bem parecidos, diferenciados apenas pelos valores apresentados dos problemas e pelas personagens presentes em cada situação. Esse aspecto também foi observado nas situações da plataforma *Khan*

Academy quando propõe uma série de problemas combinatórios semelhantes, para que estudantes os resolvam um a um a fim de que possam avançar nas lições, tal qual em um *videogame*.

Essas ponderações nos levam a considerar que o uso desses materiais, da maneira como se encontram e sem a devida crítica, não favorece a construção e o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos estudantes. Ao contrário, treinam os estudantes a ficarem aptos a resolverem determinados problemas combinatórios, o que cerceia a possibilidade de aprendizagem. Tais considerações estão apoiadas em Vegnaud (1990), que ressalta a necessidade de que o sujeito se depare com situações diversas para que mobilize e desenvolva esquemas, bem como em Navarro-Pelayo (1996) que advogam a importância de se considerar as variáveis de tarefa (modelos combinatórios implícitos, operações combinatórias, tipos de elementos a combinar e número de elementos a combinar). Por essa razão, o papel do professor passa a ser fundamental na seleção, modificação ou, até mesmo, na criação de recursos (TROUCHE et al., 2017) que levem os estudantes a desenvolverem a capacidade de enfrentamento de problemas combinatórios.

7.2 Professores participantes e os recursos do programa *Currículo em Ação*

Ao acompanharmos os professores participantes e analisarmos os dados coletados com base nas relações entre eles e os recursos para o ensino de combinatória, sobretudo daqueles disponibilizados pela SEDUC-SP, 2 dos 4 cenários que desenhamos na seção 3.2.1 se confirmaram.

Um deles – o professor Gabriel – manifestou conhecer a existência do caderno do professor e afirmou, inclusive, ser esse um dos recursos na preparação de sua aula. Contudo, durante as aulas das quais tomamos parte, esse recurso não foi utilizado, nem mesmo na preparação de sua aula. A reprodução total do conteúdo de um *site* educacional, sem integrá-lo a outros recursos ou adaptá-lo ao contexto de suas turmas, pode ser indício de fragilidades referente à combinatória, como conteúdo matemático a ser aprendido na escola básica. Isso nos leva a refletir sobre como o tema combinatória vem sendo tratado nos cursos licenciatura, tanto como objeto matemático a ser aprendido quanto a ser ensinado. Muitos pesquisadores, diante das fragilidades manifestada por futuros professores frente ao conhecimento combinatório (GEA et al., 2019; SANTOS-WAGNER et al., 2013), defendem que as licenciaturas invistam mais na capacitação desses futuros profissionais, no que

tange a esse conhecimento. Estamos de acordo com os pesquisadores e acrescentamos que, em casos como o do professor Gabriel, um possível caminho poderia advir do estreitamento da relação pesquisas e práticas docentes na perspectiva de pesquisas colaborativas nessa área (DESGAGNÉ, 2007).

A outra professora – Maria Clara –, além de conhecer os recursos digitais buscou integrá-los ao livro didático, outro recurso bastante usado por ela. Observamos, no caso dela, uma maior fidelidade à utilização dos recursos digitais justificada pela obrigatoriedade de seu uso e a facilidade que lhe proporcionam para a preparação e execução de suas aulas. Sua utilização foi guiada pela premissa de que os alunos devem saber bem as definições para reconhecimento e aplicação satisfatória da respectiva fórmula na resolução de problemas, premissa essa que se encaixa com a abordagem feita nas apresentações das aulas em *slides*, do material digital. Essa forma de abordagem constitui um retrocesso frente às pesquisas como a de Sturm (1999) e de outros cujo sentimento comum, em face da ineficácia de um ensino de combinatória pautado na classificação e respectiva aplicação de fórmulas, era a de “buscar meios de se propiciar um ensino que garanta a construção e desenvolvimento do raciocínio combinatório” (CAMPOS e IGLIORI, 2022).

Assim como Maria Clara, o professor Marcos, embora não conhecesse o caderno do professor, também procurou adaptar as atividades desse material ao seu conjunto de recursos para o ensino de combinatória. Mas, diferentemente dos outros dois professores no que diz respeito ao tema combinatória, Marcos aparentou contar com uma maior experiência documental (ROCHA, 2019) adquirida ao longo dos anos que lecionou para turmas do 2º. ano do ensino médio na rede privada de ensino. Mesmo não sendo possível identificar em Marcos (e nos outros dois participantes) seus esquemas de utilização, uma vez que isso demanda do pesquisador um acompanhamento a longo prazo (TROUCHE et al, 2017), é possível afirmar que eles se manifestaram nas escolhas das situações durante o preparo das aulas e nas justificativas de suas ações. Para esse professor, é importante dotar os estudantes da capacidade de resolver problemas combinatórios apenas pelos princípios aditivo e multiplicativo e fazer as adequações e correções quando necessárias. Como não acompanhamos nenhuma de suas aulas presencialmente, não podemos afirmar que, na prática, seu trabalho se desenvolve dessa forma.

Em síntese, o alcance que os recursos curriculares tiveram no trabalho documental desses três professores na esfera do ensino de combinatória variou

consideravelmente. No caso de Gabriel, quando esquematizou um sistema de recursos em que figurava o caderno do professor, não conseguimos perceber integração efetiva desse recurso em suas aulas. No nosso entendimento, não é possível, nesse caso, falar propriamente em *sistema de recursos*, em razão do que pontua Trouche et al. a respeito de recursos e esquemas de utilização:

o conjunto formado por todos os recursos utilizados pelo professor é chamado de seu sistema de recursos. Esses recursos são associados aos esquemas de uso, formando assim documentos (um mesmo recurso pode intervir em vários documentos) (TROUCHE et al., 2017, p.6)

A professora Maria Clara, por sua vez, utilizou o material digital e o integrou ao livro didático sem, contudo, tecer críticas a ele. Ao contrário, por estar em sintonia com sua concepção de ensino de combinatória baseado no ensino de definições, fórmulas e aplicação, esse recurso foi usado sem reservas. No caso de Marcos, a utilização do caderno do professor para a preparação de sua aula foi feita criticamente, por meio de recortes com base na maneira como esse professor concebe o ensino de combinatória. Embora ele não tenha expressado ter tido contato com pesquisas a respeito do ensino e da aprendizagem desse objeto matemático, muitas das justificativas que deu à maneira como utilizou esse recurso curricular guardam proximidade com os resultados dessas investigações.

Pela presente investigação refletimos a respeito de quão preparados estão os professores de matemática para desenvolver um trabalho com combinatória em sala de aula com os recursos que lhes são oferecidos pelos sistemas de ensino, sejam eles público ou privados, e em que medida os materiais curriculares produzidos por esses sistemas os auxiliam nesse trabalho. Na perspectiva da constituição e desenvolvimento do raciocínio combinatório ao longo da educação básica e diante de reformas curriculares (como a da BNCC) e estruturais (como a do ensino médio), cada vez mais os professores são exigidos em seus conhecimentos de conteúdo, pedagógicos e didáticos, a fim de que as aprendizagens essenciais não sejam, de fato, aprendizagens mínimas. Tais conhecimentos se traduzem no que é o cerne da atividade docente: o trabalho documental do professor (TROUCHE et al., 2017). Ao tratar do ensino de combinatória, consideramos que o acesso ao que apontam as pesquisas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e suas implicações no ensino de combinatória na educação básica, pode converter em uma forma importante de constituição de esquemas de utilização de recursos o que contribui, desse modo, para o enriquecimento do trabalho documental docente. Por essa

razão, estreitar as relações entre pesquisas em educação e a sala de aula, na perspectiva de um trabalho colaborativo, torna-se cada vez mais imprescindível.

Ao longo dessa investigação outros questionamentos surgiram e que merecem ser aprofundadas e investigadas. Uma delas está relacionada à descontinuidade do trabalho relatada pelo professor Gabriel, quando teve que abandonar as aulas em razão do retorno do professor titular. Uma vez que “as gêneses são processos em desenvolvimento e os esquemas se desenvolvem em longos períodos” (TROUCHE et al., 2020, p.8), que consequências essas descontinuidades acarretam para o trabalho documental e, principalmente, para a constituição de esquemas de utilização ao considerarmos o ensino de um tema específico – a combinatória, por exemplo? Ou ainda, dada importância de se iniciar o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico nos anos iniciais da educação básica, qual a influência de recursos curriculares produzidos pelos sistemas de ensino no trabalho documental dos professores em outras séries da educação básica em que a combinatória é abordada?

7.3 Limitações e expectativas

Por se tratar de uma investigação que procurou acompanhar professores no seu trabalho documental voltado para um objeto matemático específico – a combinatória – algumas dificuldades foram enfrentadas, entre elas: a abordagem desse conteúdo em um período específico do ano letivo (3º. bimestre); a dificuldade em conseguir professores que se dispusessem a participar da pesquisa; a dificuldade em acompanhar um mesmo professor de um ano para outro por causa do processo de atribuição de aulas; as restrições que a pandemia de covid-19 impôs a todos, o que impossibilitou contatar professores da rede estadual paulista de ensino uma vez que não se encontravam em aulas remotas; a dificuldade em retomar o contato com professores participantes.

Esperamos que a presente investigação tenha contribuído para ampliar a visão crítica que se deve ter para recursos curriculares produzidos por redes e sistemas de ensino ao considerarem conhecimentos matemáticos, em especial a combinatória, e fomentar outras que se proponham a discutir a influência desses recursos no trabalho documental do professor. Por isso, reiteramos a importância de que outras pesquisas sejam realizadas no intuito de acompanhar e analisar o uso de recursos curriculares por professores que atuam em diferentes séries e sistemas de

ensino, sejam eles públicos ou privados. Isso possibilitaria entender como recursos curriculares desses sistemas são articulados pelos docentes em seu trabalho documental e dimensionar o impacto na construção de conceitos matemáticos, como o caso da combinatória.

.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, C.; BOTELHO, J. A. O livro didático na perspectiva de recurso do professor de matemática. In: IGLIORI, S. B. C. (ORG) (Ed.). **Compreender o Trabalho do Professores Brasileiros do Ensino Básico: uma abordagem pelos recursos**. São Paulo: Blücher, 2021. p. 127–147.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70 ed. São Paulo: [s.n.].
- BARRETO, F. L. S.; BORBA, R. E. S. R. **Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais**. X Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. **Anais...**2010
- BARROS, R. A.; AZEVEDO, M. A. R. DE. O Impacto do Programa São Paulo faz Escola em Professores Iniciantes. **Educação & Realidade**, v. 41, n. 2, p. 359–381, 2016.
- BORBA, R. E. S. R. **A BNCC e outros documentos curriculares: reflexões e propostas de ensino de combinatória e probabilidade na educação básica**. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula. **Anais...**Cuiabá: 2019
- BRANCO, E. P. et al. BNCC: a quem interessa o ensino de competências e habilidades? **Debates em Educação**, v. 11, n. 25, p. 155, 2019.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Ciências da Natureza , Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2000.
- BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.
- BRASIL. **Base Nacional Comum - BNCC**. [s.l: s.n.].
- BUSQUINI, J. A. **A proposta curricular do Estado de São Paulo de 2008: discurso, participação e prática dos professores de Matemática**. [s.l.] Universidade de São Paulo, 2013.
- CAMPOS, C. E.; IGLIORI, S. B. C. Teses e dissertações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória: perspectivas investigativas. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, v. 16, p. 1–20, 2021.
- CAMPOS, C. E.; IGLIORI, S. B. C. Trajetória documental de um professor que ensina combinatória. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 11, n. 1, p. 63–74, 2022.
- CARVALHO, C. P. F. Reformar do Ensino Médio e Base Nacional Comum Curricular: formas atuais de expressão do capital na educação. **Eccos - Revista**

Científica, n. n.62, p. 1–20, 2022.

CARVALHO JÚNIOR, G. D.; PARRAT-DAYAN, S. Recortes históricos sobre a noção de schème em Piaget : o processo de desenvolvimento de um conceito. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos (online)**, v. 96, n. 244, p. 522–540, 2015.

CAVALCANTE, F.; CARVALHO, C. P. F. O Novo Ensino Médio no Estado de São Paulo: a flexibilização como meio de instrumentalização e adequação do currículo. **Revista Estudos Aplicados em Educação**, v. 6, n. 12, p. 195–206, 2021.

CONCEIÇÃO, D. C.; PEREIRA, D. P.; SANTOS, M. L. S. **O Ensino-aprendizagem de análise combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. **Anais...**2016

DUARTE, N. **Vigotski e o “aprender a aprender”: crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana**. 5. ed. Campinas: [s.n.].

ENGLISH, L. D. **Children’s Use of Domain-Specific Knowledge and Domain-General Strategies in Novel Problem Solving**. Annual Meeting of the American Educational Research Association. **Anais...**1992

ENGLISH, L. D. Children’s Strategies for Solving Two- and Three-Dimensional Combinatorial Problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 24, n. 3, p. 255, 1993.

ENGLISH, L. D. Combinatorics And The Development Of Children ’ s Combinatorial Reasoning. In: JONES, G. A. (Ed.). . **Exploring Probability in School - Challenges for Teaching and Learning**. [s.l.] Springer, 2017. p. 121–140.

FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; GUZMÁN, R. R. Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. **Relime**, v. 13, n. 2, p. 215–242, 2010.

FERREIRA, A. G. et al. **Os obstáculos epistemológicos em combinatória: um estudo com licenciandos em Matemática**. 2º Congreso Intervacinal de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. 3º Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática. **Anais...** **Anais...**2016

FERRETTI, C. J. A reforma do Ensino Médio e sua questionável concepção de qualidade da educação. **Estudos Avancados**, v. 32, n. 93, p. 25–42, 2018.

FISCHBEIN, E. Schèmes virtuels et schèmes actifs dans l'apprentissage des sciences. **Revue française de pédagogie**, v. 45, n. 1, p. 119–125, 1978.

FISCHBEIN, E.; GROSSMAN, A. Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 7, p. 1–21, 1997.

FRANCHI, A. Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: **Educação matemática: uma (nova) introdução**. MACHADO, S. A. M. (org). Educ. 2012

FUJITA, O. M. et al. Professores de matemática e percepções acerca do uso de materiais institucionalizados pelo currículo do estado de São Paulo. **Educação no**

Século XXI - Volume 32 – Matemática, p. 198–221, 2018.

GEA, M. M.; BATANERO, C.; VENEGAS, A. Lenguaje y Estrategias Utilizados por Futuros Profesores de Educación Primaria en la Resolución de Problemas Combinatorios. **Revista Praxis Educacional**, v. 15, n. n. 33, p. 208–232, 2019.

GIORDANO, C. C.; KIAN, F. A. O Ensino de Probabilidade e o Novo Ensino Médio: reflexões a partir da BNCC e do Currículo Paulista. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 11, n. 1, p. 59–78, 2021.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; ROA, R. An Onto-Semiotic Analysis of Combinatorial Problems and the Solving Processes by University Students. **Educational Studies in Mathematics**, v. 60, n. January, p. 3–36, 2005.

GONÇALVES, A. O. G. **O Livro Didático De Matemática E O Professor : Produtores Ou Reprodutores De Conhecimento ?** XI Congresso Nacional de Educação - EDUCERE. **Anais...**Curitiba, PR: 2013

GONZÁLEZ, J. E.; ROA, R. G. Desarrollo teórico del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España. **Probabilidad Condicionada Revista de didáctica de la Estadística**, n. n.2, p. 181–188, 2013.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199–218, 2009.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Do Trabalho Documental dos Professores: gênese, coletivos, comunidades. O caso da Matemática. **EM TEIA | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - ISSN: 2177-9309**, v. 6, n. 3, p. 929–943, 2015.

HAMMOUD, R. **Le travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d ' investigation et le développement des connaissances professionnel: contribution ao développement de l'approche documentair du didactique**. [s.l.] Université Claude Bernard - Lyon I; Université Libanaise. Lyon, 2012.

KAPUR, J. N. Combinatorial Analysis and School Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, p. 111–127, 1970.

LARIVÉE, S. Le schème de la combinatoire un schème adaptatif.pdf. **Bulletin AMQ**, v. 21, n. 1, p. 3–11, 1981.

LIMA, E. T. DE; BORBA, R. E. DE S. R. **Combinatória, Probabilidade e suas articulações em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental**. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula. **Anais...**2019

MACHADO, J.; BRAGA, M. Modelização do equilíbrio no plano inclinado: um estudo cíclico. **X Congresso Internacional sobre Investigación en Didáctica de Las Ciencias**, p. 4433–4438, 2017.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. DOS; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, p. 517–533, 2014.

MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G.; MELO, L. M. DE S. A Resolução de Problemas de Produto Cartesiano por Alunos do Ensino Fundamental. **Educação & Realidade**, v. 43, n. 1, p. 293–311, 2017.

MARIM, V.; SOUZA, A. B. Os Livros Didáticos De Matemática : Concepção Do Professor Do Ensino Médio Nas Escolas Públicas Textbooks Math : Designing the High School Teacher. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. v.5, n. n.2, p. 111–124, 2015.

MARTINS, G. V. **Problemas de combinatória em livros didáticos do 5º ano aprovados no pnld 2016**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM - Educação Matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades. **Anais...**São Paulo: 2016

MELO, L. M. S.; SILVA, J. F. G.; SPINILLO, A. G. Os Princípios Invariantes E a Resolução De Problemas de Raciocínio Combinatório. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - ISSN: 2177-9309**, v. 7, n. 1, p. 1–20, 2016.

MELO, M. A. P. **Ecologia do Saber: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica**. [s.l.] Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, Conversão e Tratamento de Registros de Representações Semióticas Auxiliando a Aprendizagem de Situações Combinatórias**. [s.l.] Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais e o Ensino de Ciências: Uma Revisão. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, p. 7–29, 2002.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria. **Educación matemática**, v. 8, n. 1, p. 26–39, 1996.

OLIVEIRA, E. DE et al. Análise de Conteúdo e Pesquisa na Área da Educação. **Revista Diálogo Educacional**, v. 4, n. n. 9, p. 11–27, 2003.

OLIVEIRA, E. G. DE; COUTINHO, C. Q. S. Combinatória nos livros didáticos de matemáticos dos anos iniciais: uma análise do PNLD 2013. **XI ENEM Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas**, n. 2009, p. 1–15, 2013.

OLIVEIRA, E. G.; COUTINHO, C. Q. S. Invariantes operatórios mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental ao resolverem situações envolvendo combinatória. **Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria**, v. 2, n. 2005, p. 347–354, 2015.

OLIVEIRA, S. R. F.; CAIMI, F. E. Vitória da tradição ou resistência da inovação : o

Ensino de História entre a BNCC , o PNLD e a Escola. **Educar em Revista**, v. 3, n. e77041, p. 1–22, 2021.

PEPIN, B.; GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. **ZDM - Mathematics Education**, v. 49, n. 5, p. 799–812, 2017.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola**. 1. ed. [s.l.: s.n.].

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. E. S. R. O Desenvolvimento Do Raciocínio Combinatório Na Escolarização Básica. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - ISSN: 2177-9309**, v. 1, n. 1, p. 1–22, 2010.

PESSOA, C.; SILVA, M. **Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental**. III Simpósio Internacional de Educação Matemática. Anais... **Anais...**2012

PFEIFFER, C.; GRIGOLETTO, M. Reforma do Ensino Médio e BNCC – Divisões , Disputas e Interdições de Sentidos ¹. **Revista Investigações**, v. 31, n. n. 2, p. 1–25, 2017.

PILETTI, C. **Didática Geral**. 23a. ed. São Paulo: Ed. Ática, 2004.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains**. [s.l.: s.n.].

RICARDO, E. C. Discussão acerca do ensino por competências: problemas e alternativas. **Cadernos de Pesquisa**, v. 40, n. n. 140, p. 605–628, 2010.

ROA GUZMÁN, R. **Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada**. [s.l.] Universidad de Granada, 2000.

ROCHA, C. A.; BORBA, R. E. S. R. Combinatória no Ensino Médio : influências do guia do Programa Nacional do Livro Didático brasileiro. **Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.**, n. 2017, 2017.

ROCHA, C. D. A. **Conhecimentos sobre Combinatória de professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio**. XV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM. **Anais...**2012

ROCHA, C. D. A.; LIMA, A. P. B. DE; BORBA, R. E. DE S. R. Conhecimentos de Professores para Ensinar Combinatória : Contribuições de Pesquisas. **VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, p. 1–13, 2015.

ROCHA, D.; DEUDARÁ, B. Análise de Conteúdo e Análise do Discurso: aproximações e afastamentos na (re) construção de uma trajetória. **Alea. Estudos Neolatinos**, v. 7, n. n. 2, p. 305–322, 2005.

SABO, R. D. **Saberes Docentes: A análise combinatória no Ensino Médio**. [s.l.] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, 2010.

SABRA, H. L'étude des rapports entre documentations individuelle et collective: Incidents, connaissances et ressources mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 36, n. 1, p. 49–95, 2016.

SANTOS-WAGNER, V. M. P.; BORTOLOTTI, R. D. M.; FERREIRA, J. R. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 15, n. 3, p. 606–629, 2013.

SCHMIDT, W. **Raciocínio Combinatório: uma meta-análise a partir dos registros de representação semiótica**. [s.l.] Universidade Federal de Santa Maria, 2016.

SILVA, A. F. G.; PINHEIRO, M. G. C.; CAMPOS, T. M. M. Investigação Com Alunos Do 5º E 9º Ano Do Ensino Fundamental Acerca Da Resolução De Uma Situação Quociente: Um Olhar Para Os Esquemas E Representações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 1–29, 2016.

SILVA, J.; SPINILLO, A. **Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório : a explicitação dos princípios invariantes**. VIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Anais... **Anais...**2011

SILVA JUNIOR, C. G. DA; REGNIER, J.-C. Livros didaticos e sua funções para o professor de matematica no Brasil e na França. **2 SIPEMAT : Simposio Internacional de Pesquisa em Educa,ao Matematica**, n. October 2014, p. 1–11, 2009.

SILVA, M. A. A Fetichização do Livro Didático no Brasil. **Educação & Realidade**, v. 37, n. n.3, p. 803–821, 2012.

SILVA, M. C. **A Combinatória: abordagem em documentos oficiais, em resultados de epsquisas e em livros didáticos no Ensino Fundamental**. [s.l.] Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

SILVA, M. C.; LIMA, I. B. **As contribuições da Teoria de Vergnaud para as pesquisas sobre o raciocínio combinatório em anais de eventos científicos**. VIII EPBEM - Encontro Paraibano de Educação Matemática. Desenvolvendo o Pensamento Matemático em Diversos Espaços Educativos. **Anais...**2014

SILVA, M. R. A BNCC da reforma do ensino medio: o resgate de um empoeirado discurso. **EDUR. Educação em Revista.**, v. 34, n. e214130, p. 1–15, 2018.

TARLAU, R.; MOELLER, K. O Consenso por filantropia. Como uma fundação privada estabeleceu a BNCC no Brasil. **Currículo sem Fronteiras**, v. 20, n. n.2, p. 553–603, 2020.

TROUCHE, L. ET AL. The documentational approach to didactics Luc Trouche , Ghislaine Gueudet , & Birgit Pepin. 2017.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 16, n. 30, p. 139–162, 2008.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique**

des Mathématiques, v. 10, n. 23, p. 133–170, 1990.