

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, COMUNICAÇÃO LETRAS E ARTES
CURSO DE FILOSOFIA

Pedro Navarro Artoni

**O projeto logicista de fundamentação da aritmética, de Gottlob Frege,
e sua inconsistência interna**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

São Paulo

2023



PUC-SP

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Pedro Navarro Artoni

**O projeto logicista de fundamentação da aritmética, de Gottlob Frege,
e sua inconsistência interna**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Filosofia, Comunicação, Letras e Artes da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelo acadêmico Pedro Navarro Artoni como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Filosofia, sob a orientação do Prof. Dr. Anderson Luis Nakano.

São Paulo

2023

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo suporte material dado ao longo de toda a minha graduação; aos meus amigos, pelas conversas e conselhos; aos meus mestres – em especial ao professor Dr. Anderson Luis Nakano, que orientou este e outros trabalhos meus, e que sempre foi bastante paciente e generoso comigo.

Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pela bolsa de Iniciação Científica concedida, a qual financiou a pesquisa que tem esse trabalho como parte dos resultados.

RESUMO

ARTONI, Pedro. **O projeto logicista de fundamentação da aritmética, de Gottlob Frege, e sua inconsistência interna**

Em sua obra *Begriffsschrift*, Gottlob Frege faz erigir, pela primeira vez na história, um sistema formal (e a própria noção de sistema formal) que pretenderá, alguns anos mais tarde, dar conta de fundamentar a aritmética. Seu sistema pretendia ser capaz de formalizar todas as noções da aritmética de seu tempo, calcado única e exclusivamente em leis básicas da lógica – tentativa que ficou historicamente conhecida como *logicismo*. Como é sabido, no entanto, esse projeto – apresentado pela primeira vez em sua obra *Os Fundamentos da Aritmética* – fracassou, como mostra de modo paradigmático o Paradoxo de Russell apontado por Bertrand Russell em carta à Frege de junho de 1902. Nosso objetivo aqui é realizar uma reconstrução histórica do projeto fregeano, a fim de entendermos suas motivações e também razões de seu fracasso.

Palavras-chave: logicismo; filosofia da matemática; fundamentação da matemática; Gottlob Frege; Paradoxo de Russell.

ABSTRACT

ARTONI, Pedro. **The logicist project for the foundation of arithmetic, of Gottlob Frege, and its internal inconsistency**

In his work *Begriffsschrift*, Gottlob Frege builds, for the first time in history, a formal system (and the very notion of formal system) that will intend, some years later, to be able to give foundation to arithmetic. His system intended to be capable of formalizing all the arithmetic notions of his time, based solely and exclusively on basic laws of logic – an attempt that became historically known as *logicism*. As is known, however, this project – presented for the first time in his work *The Foundations of Arithmetic* – failed, as shown in a paradigmatic way by Russell's Paradox pointed out by Bertrand Russell in a letter to Frege in June 1902. Our aim here is to carry out a historical reconstruction of the Fregean project, in order to understand its motivations and also the reasons for its failure.

Keywords: logicism; philosophy of mathematics; foundations of mathematics; Gottlob Frege; Russell's Paradox.

SUMÁRIO

Agradecimentos	3
Resumo	4
1. O contexto da Matemática, nos séculos XIX e XX	6
1.1. A noção de demonstração	6
1.2. A busca pelo rigor	8
2. Formalização e fundamentação, em Frege	9
2.1. O surgimento dos sistemas formais	9
2.1.1. <i>Begriffsschrift</i>	12
2.2. A fundamentação lógico-filosófica da matemática	15
2.2.1. <i>Os Fundamentos da Aritmética</i>	18
2.2.1.1. O conceito de número	22
3. O fracasso do Logicismo	27
3.1. Paradoxo de Russell	28
4. Considerações finais	30
5. Referências Bibliográficas	30

1. O contexto da Matemática, nos séculos XIX e XX

Que a matemática tenha sofrido mudanças paradigmáticas a partir do século XIX, no que diz respeito à sua formalização e à busca por um rigor cada vez maior no exercer de suas atividades, não é novidade. Nomes como Richard Dedekind e Karl Weierstrass são exemplos conhecidos de matemáticos que empenharam grandes esforços nessa direção, contribuindo com resultados ainda hoje atuais e frutíferos. É necessário compreender, no entanto, que esse processo de transformação pelo qual passou a matemática, nos séculos XIX e XX, não surge no vácuo histórico, mas, em realidade, tem suas origens e explicações nas raízes da disciplina.

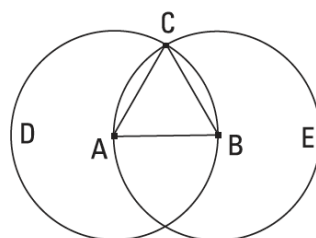
1.1. A noção de demonstração

Falar em matemática é falar, necessariamente, em demonstrações. A noção de demonstração, ou de prova é sem sombra de dúvida a mais importante dessa ciência em que, adotando-se uma postura, em muito, aristotélica, o modo pelo qual se chega a um resultado é por vezes de maior importância do que ele próprio – afinal, as verdades matemáticas são inesgotáveis e, por esse motivo, muitas vezes, triviais. De tal modo que chegar a um mesmo resultado já conhecido por uma nova demonstração, se equipara, em valor de conhecimento e fecundidade, a chegar a um novo resultado. No entanto, todas as possíveis demonstrações de um resultado matemático devem, sempre, apresentar-se sob uma forma comum, obedecendo a um mesmo método há muito já consagrado e cristalizado na matemática: o método axiomático de prova – por vezes, compreendido como sendo a matemática em si mesma¹.

Entendido como sinônimo de rigor – característica notável da matemática –, sua origem data da obra *Os Elementos* de Euclides e tem nela seu grande paradigma. É com Euclides que surge pela primeira vez na história uma sistematização do conhecimento matemático, e de um método para demonstrá-lo, partindo de verdades evidentes e noções comuns (axiomas e regras de inferência) a fim de se deduzir novas proposições. Euclides,

¹ De acordo com o lógico e matemático Kurt Gödel, em *The present situation in foundations of mathematics*, a matemática seria, em seu entendimento, “a totalidade dos métodos de prova realmente usados pelos matemáticos”. Cf. Kurt Gödel. *Collected Works. Ed. By Solomon Feferman et al. Vol. III.* Oxford University Press, 1986, p. 45.

todavia, legou aos matemáticos e à prática matemática mais do que um parâmetro de rigor ou um método de demonstração a ser seguido. Em sua obra, é comum a muitas de suas provas que alguns dos passos inferenciais dependam, para a sua validade, de que seja desenhado um diagrama espacial. Em outras palavras, há em muitas demonstrações resultados que não estariam garantidos se nos detivéssemos exclusivamente aos axiomas e regras de inferência postulados e que só podem ser obtidos mediante os desenhos efetuados. É possível notarmos essa exigência desde a primeira demonstração de Euclides em sua obra, que tem por objetivo “*Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada*”. Vejamos:



Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB. E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB. [Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer.²

Longe de desempenharem uma importância material, esses diagramas, na verdade, servem como representação de um elemento imprescindível para muitos dos resultados euclidianos: nossa intuição espacial. Nas provas de Euclides, o uso de informações extraídas da intuição geométrica é elemento essencial para o rigor da prova e para que se consiga, de fato, demonstrar aquilo que se pretende. Na demonstração em questão, por exemplo, o triângulo equilátero jamais estaria dado meramente a partir das definições e noções comuns – para obtê-lo, é necessário que construamos as figuras no espaço. Esse elemento, herdado e replicado pelos matemáticos ao longo de toda a história da matemática,

² Euclides. *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. Editora Unesp, 2009, p. 99.

tica, encontrar-se-á na base das transformações pelas quais passou a matemática a partir do século XIX.

1.2. A busca pelo rigor

Com o descobrimento e popularização das geometrias não-euclidianas, aliados ao surgimento das chamadas “funções patológicas”, como a função de Weierstrass, no campo da análise real, que impossibilitavam não apenas o recurso ao expediente geométrico para suas resoluções, mas também sua própria concepção em nossa intuição espacial, o uso do expediente geométrico na matemática passou a ser visto com desconfiança pelos matemáticos e como sinônimo de ausência de rigor – o que há de mais importante na atividade matemática.

Naquela época, como professor da Escola Politécnica em Zurique, me encontrei pela primeira vez na posição de ter que apresentar os elementos do cálculo diferencial e, ao fazê-lo, senti mais do que nunca a falta de uma fundamentação verdadeiramente científica da aritmética. Ao discutir o conceito de aproximação de uma grandeza variável a um valor limite fixo, e especialmente na prova da proposição de que toda grandeza que cresce continuamente, mas não além de todos os limites, certamente deve se aproximar de um valor limite, recorri à evidência geométrica. [...] Para mim, naquela época, este sentimento de insatisfação era tão esmagador que tomei a firme resolução de continuar pensando até encontrar uma justificação puramente aritmética e completamente rigorosa dos princípios de análise infinitesimal.³

Nesse momento, portanto, afastar-se da intuição geométrica nas demonstrações e buscar reduzi-las à aritmética passa a ser visto como sinônimo de rigor – ter uma prova rigorosa é poder reduzi-la à aritmética. Esse espírito, que levará à atitude de buscar novas demonstrações para resultados já conhecidos e a adotar uma postura, em certo sentido, revisionista, tornou-se uma espécie de programa para muitos matemáticos da época e resultou no processo que ficou conhecido como *arimetização da análise*. Grandes avanços no que se refere à formalização e rigor matemáticos, como a definição dos números reais por meio dos cortes de Dedekind ou a definição (ϵ, δ) dos limites, são alguns dos resultados frutíferos desta pretensão.

Assim, se até então o problema de fundamentar um resultado matemático era, des-

³ Richard Dedekind. *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Springer Fachmedien, 1960, Vorwort, tradução nossa.

de Euclides, o problema de encontrar uma prova axiomática desse resultado, dever-se-ia agora ir mais além e pensar na fundamentação de um resultado em termos de uma prova axiomática aritmética dele – o rigor de uma demonstração tinha agora como parâmetro a possibilidade de sua expressão em termos puramente aritméticos, não apenas podendo, mas devendo prescindir da recorrência ao expediente intuitivo-espacial.

2. Formalização e fundamentação, em Frege

O filósofo, lógico e matemático alemão, Gottlob Frege, dará um passo além no que se refere à exigência requerida não apenas para o rigor de uma prova, mas também para se dizer de seu resultado que este está bem fundamentado (em sentido mais profundo) – em outras palavras, Frege buscará tanto uma fundamentação formal e rigorosa dos resultados matemáticos, bem como uma fundamentação filosófica para a própria matemática. Para isso, no entanto, ele terá de criar a noção de sistema formal, tal qual a conhecemos.

2.1. O surgimento dos sistemas formais

Sob a perspectiva de fundamentação dos resultados matemáticos, para que uma prova pudesse ser, de fato, considerada rigorosa, no entender de Frege, ela deveria atender a algumas exigências que tinham por fim inseri-la em um sistema próprio de provas com uma linguagem própria, rigorosa o suficiente para eliminar a possibilidade de erros ou lacunas. Essas exigências podem ser colocadas da seguinte forma. Em primeiro lugar, dever-se-ia fazer uso do método axiomático, i.e. a prova deveria estar inscrita no sistema axiomático de prova, de tal maneira que todas as premissas (axiomas) utilizadas na derivação da prova estivessem explicitadas nesse sistema, reduzindo também ao máximo o número dessas premissas – demonstrando-se tudo aquilo que é demonstrável. Em segundo lugar, as regras de inferência, e não apenas os axiomas, também deveriam ser explicitadas em sua totalidade. Frege crê, nesta segunda exigência, superar Euclides, pois, como ele mesmo nota,

Mesmo um autor tão escrupuloso e rigoroso como Euclides frequentemente faz uso de premissas implícitas, que ele não menciona entre seus princípios nem

entre as premissas da proposição particular. Assim, na demonstração da proposição 19 do primeiro livro dos Elementos (em todo triângulo o maior ângulo opõe-se ao maior lado), utiliza implicitamente as proposições: 1) Se um segmento não é maior que um outro, então é igual ou menor que ele. 2) Se um ângulo é igual a um outro, então não é maior que ele. No entanto, o leitor apenas perceberá a omissão destas proposições prestando particular atenção, tanto mais que, por seu caráter primitivo, elas se assemelham de tal maneira às próprias leis do pensamento que são usadas como estas.⁴

E, em terceiro e último lugar, tanto a prova, quanto os axiomas e regras de inferências deveriam ser escritos não em linguagem natural, mas em uma linguagem precisa, livre de ambiguidades – a linguagem que Frege irá chamar de *conceitografia* (*Begriffsschrift*). É preciso, no entanto, entender as motivações de Frege por trás de tal exigência, que o levará à criação de sua *conceitografia*, tão peculiar à época e pioneira na história do pensamento.

Ao lermos o breve artigo *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*, de Frege, suas motivações para postular a terceira exigência se tornam claras. Nesse artigo, o autor fará um diagnóstico com respeito às investigações matemáticas em sua época e demonstrará enorme incômodo com o que nelas ocorre. Para além das questões já tratadas aqui com respeito aos problemas concernentes ao uso da intuição geométrica nas provas matemáticas, o diagnóstico feito por Frege vai além e identifica uma grande falta de rigor no proceder científico, originada pela linguagem que, por vezes, ao invés de trazer esclarecimento, gera apenas um grau maior de confusão conceitual. Nas palavras do próprio autor, no artigo em questão:

Nas partes abstratas da ciência faz-se sentir continuamente a falta de um meio de evitar mal-entendidos e, ao mesmo tempo, erros no próprio pensamento. Ambas as coisas têm origem na imperfeição da linguagem. Pois carecemos sempre dos sinais sensíveis para pensar. [...] a linguagem pode comparar-se à mão, que, apesar de sua capacidade de se acomodar às mais diferentes tarefas, não nos basta. Criamo-nos mãos artificiais, instrumentos para fins particulares que operam de maneira mais precisa do que a mão seria capaz. E o que torna possível esta precisão? Justamente a rigidez, a imutabilidade das partes, cuja falta torna a mão tão diversamente hábil. Assim, também, a linguagem verbal não basta. Carecemos de um conjunto de sinais do qual se expulse toda ambiguidade, e cuja forma rigorosamente lógica não deixe escapar o conteúdo.⁵

⁴ Gottlob Frege. *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia*. Em: Peirce/Frege. Trad. por Luiz Henrique Lopes dos Santos. Os Pensadores. Abril Cultural, 1983, p. 190.

⁵ Gottlob Frege. *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia*. Em: Os Fundamentos da Aritmética. Trad. por Luiz Henrique Lopes dos Santos Editora Livraria da Física, São Paulo: 2021, p. 131.

Assim, feito tal diagnóstico da situação da ‘ciência abstrata’ de sua época e dos problemas que acometem-na, tendo também encontrado precisamente a gênese deles e, ainda além, vislumbrado a direção em que se deve orientar no intento de escapar de tais querelas, a terceira exigência de Frege nos aparece quase como dada. Em outras palavras, o que estaria por trás dela seria o fato de que no uso de uma linguagem de tal natureza, a mera obediência à sua gramática nos impediria de incorrer em erros lógicos. Nessa nova linguagem, um “equívoco” ou um passo inferencial ilegítimo passaria agora a ser evidente aos olhos, por se tornar sinônimo de agramaticidade. O erro já não mais é possível nesse sistema, se obedecermos à sua gramática, e a correção de uma prova nele inserida pode ser estabelecida no plano puramente sintático, no plano dos sinais – e de modo inteiramente mecânico. Nasce aqui, portanto, a noção de sistema formal – um sistema tal que a correção de uma prova é resultado simplesmente da explicitação dos axiomas e regras de inferência (exigências I e II), e da inscrição desta prova em uma certa forma definida em termos estritamente sintáticos (exigência III).

Para poder atacar o problema dos fundamentos da matemática de maneira muito mais precisa – em termos de rigor e correção de um resultado matemático –, portanto, Frege crê ser necessário não apenas construir esse sistema formal e essa nova ‘linguagem conceitual’, puramente lógica, mas também uma lógica. Estão postas, dessa maneira, as ambições do autor em sua obra *Begriffsschrift*.

Isso pois, embora a Lógica, entendida enquanto disciplina e “ciência”, já contasse com pelo menos dois mil anos de história à sua época, remontando aos esforços e contribuições inaugurais de Aristóteles, o entendimento por parte de Frege da necessidade de uma ‘nova lógica’ se dá por sua compreensão da lógica aristotélica como sendo dotada de muitas limitações e até mesmo de pressupostos equivocados. Como resume bem, Luis Henrique Lopes dos Santos, no prefácio à tradução das *Grundlagen*:

[Para Frege] a lógica tradicional, de inspiração aristotélica, padece de limitações essenciais, atribuíveis a seu compromisso com o pressuposto de que a estrutura gramatical sujeito-predicado, característica de línguas ordinárias, reflete a estrutura lógica elementar do sentido das sentenças declarativas. Põe-se por isso a edificar um novo sistema de lógica, assentado sobre novos paradigmas estruturais, que encontra exemplificados na linguagem matemática – sentenças universais e existenciais com o auxílio de expressões quantificadoras e letras chamadas variáveis.⁶

⁶ Gottlob Frege. *Os Fundamentos da Aritmética*. Editora Livraria da Física, São Paulo: 2021, p. VII-IX. Trad: Luis Henrique Lopes dos Santos.

2.1.1. *Begriffsschrift*

É, portanto, com esse horizonte posto, pela busca de construir uma linguagem lógico-conceitual capaz de constituir um sistema formal que expresse adequadamente e de modo rigoroso as demonstrações matemática, que Frege irá escrever sua obra *Begriffsschrift*. Nessa obra, o autor reformulará e revolucionará a lógica, enquanto disciplina, cunhando operações e noções lógicas que se mantêm em voga até os dias de hoje. Com respeito à maneira pela qual o autor as formaliza, no entanto, não se pode dizer o mesmo. Isso porque, embora as operações e noções lógicas formalizadas pelo autor se mantenham, em grande parte, inalteradas no que tange à Lógica de Primeira Ordem (Cálculo de Predicados) que estudamos hoje, a maneira de formalizá-las mantém pouca, ou quase nenhuma relação com as notações que aprendemos e utilizamos nos dias atuais.

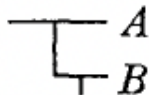
Uma proposição na linguagem natural, por exemplo, da forma “se N , então se M então Λ ”, expressa usualmente como $(N \rightarrow (M \rightarrow \Lambda))$, na notação fregeana é expressa da seguinte maneira:



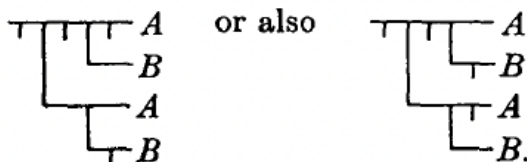
Ao nos habituarmos à notação fregeana, no entanto, é possível perceber tanto as continuidades mantidas entre sua lógica e a Lógica de Primeira Ordem que aprendemos hoje – em grande medida criação do próprio Frege –, quanto as rupturas e transformações ocorridas com o passar do tempo. Uma das maiores diferenças que se pode notar é o fato de que a Lógica Moderna que estudamos hoje em Cálculo de Predicados (LPO), surgiu, na verdade, como Lógica de Segunda Ordem, i.e. uma lógica que quantifica sobre predicados e não sobre objetos (o que se justifica plenamente quando entendemos o modo pelo qual o autor pretende fundamentar a aritmética na lógica).

Outra grande diferença, é a inexistência dos operadores simples de conjunção (\wedge) e disjunção (\vee) na notação fregeana – o que não o impedia de expressar essas noções. Para demonstrar essas noções, Frege utiliza como recurso apenas os operadores de negação e o condicional. Essa forma de expressar tais noções ainda é uma possibilidade hoje, no entanto, por questões de economia visual e simbólica, não se mostra mais tão comum.

De modo concreto, no caso da disjunção inclusiva, quando queremos formalizar uma sentença da forma “A ou B”, usualmente o fazemos da seguinte maneira: $(A \vee B)$. Já na notação fregeana, expressamo-la, dentre outras maneiras, assim:



que traduz-se em: $(\sim B \rightarrow A)$, na notação atual. Já no caso da disjunção exclusiva, se nos valem apenas dos operadores de negação (\sim), disjunção inclusiva (\vee) e conjunção (\wedge), expressamos uma sentença da forma “ou A ou B” da seguinte maneira: $((A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B))$. Se, no entanto, nos valem do conectivo simples “ \oplus ” para a disjunção exclusiva, a fórmula se simplifica ainda mais, deixando-se expressar por: $(A \oplus B)$. Já na notação fregeana, temos de expressar essa noção da seguinte maneira:



que se traduz, na notação atual, por: $\sim((\sim B \rightarrow A) \rightarrow \sim(B \rightarrow \sim A))$, na primeira formulação; $\sim((B \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim(\sim B \rightarrow A))$, na segunda formulação. Já no caso da conjunção, uma sentença da forma “A, B e Γ ” que expressamos usualmente como: $(A \wedge (B \wedge \Gamma))$, é expressa, na notação fregeana por:



que, na notação atual, traduziríamos por $\sim(\Gamma \rightarrow (B \rightarrow \sim A))$.

Independente da notação adotada na formalização, o importante é notar as constantes lógicas definidas pelo autor – e preservadas por nós até hoje – e em que medida elas constituem uma base sólida e ampla para a aplicabilidade do sistema fregeano. Mais especificamente, em que medida elas possibilitam uma aplicabilidade adequada à aritmética – afinal, não podemos perder de vista que é este o verdadeiro objetivo de Frege.

Para além da formalização dos conectivos básicos que serão utilizados em seu sistema formal – asserção, condicional, negação e identidade –, o autor irá explorar e definir algumas outras noções que exercerão um papel central e indispensável na

construção do seu sistema para que ele seja capaz de “capturar” decentemente a aritmética – a saber, as noções de função, argumento, e universalidade (ou *generalidade*).

No que concerne as noções de função e argumento, em linhas gerais, Frege irá defini-las da seguinte maneira. Dada uma expressão qualquer, tal como “Marte é um planeta do Sistema Solar”, na medida em que podemos fazer substituições de certos termos na proposição, substituindo “Marte” por “Terra”, “Júpiter” ou até mesmo por algo que não seja, de fato, um planeta do Sistema Solar, as partes em que se pode realizar tal substituição de um termo por outro, são chamadas de ‘lugares de argumento’ e, por sua vez, os termos que ocupam essas posições, ‘argumentos’. Por outro lado, sempre teremos na expressão uma parte que se mantém fixa e inalterável, a essas chamamos de ‘função’.

Em poucas palavras, funções são sempre entendidas como incompletas ou insaturadas, i.e. precisam ter sempre suas lacunas (lugares de argumento) preenchidas por um argumento – i.e., nomes de objetos –, que por sua vez é sempre completo e saturado. Por essa dependência da função com respeito a um argumento, os valores de uma função irão sempre variar de acordo com qual argumento em particular instanciamos nela. Essas elaborações são de grande importância na constituição do projeto fregeano; Frege tem interesse em espécies particulares de função, como conceitos e relações, já que elas desempenharão um papel central nas definições lógicas de noções matemáticas, que serão realizadas posteriormente pelo autor – a saber, a própria definição de *número* é absolutamente dependente da noção de conceito, como veremos.

O autor aponta também para o aspecto ‘flexível’ da proposição, em certo sentido. Isso porque, podemos sempre alterar as partes fixas e as partes variáveis da proposição, de modo a tornar o que era ‘função’ em ‘argumento’ e vice-versa. No caso do nosso modelo, por exemplo, podemos sem problemas fixar “Marte é um planeta...” ou “x contém Marte como planeta” e tornar “Sistema Solar” o termo passível de ser substituído; assim, teríamos agora aquele como ‘função’ e esse como ‘argumento’. Essas e outras sutilezas dessas noções e definições são exploradas por Frege em seu texto.

Um último, mas importantíssimo, movimento em sentido da conceitualização da linguagem de seu sistema formal é ainda apresentado por Frege na *Begriffsschrift*: a noção que chamaríamos de “quantificação universal”, ou *generalidade*. Esse movimento será responsável pela definição e introdução de um signo na nossa linguagem capaz de generalizar, ou quantificar o escopo dos argumentos possíveis para uma função, mas também de traçar relações entre conceitos e propriedades de conceitos. Sendo possível,

agora, com essa ferramenta, aliada ao operador de negação, expressar as noções de “qualquer”, “nenhum” e “algum”.

Definindo assim as noções e operações lógicas centrais de seu sistema, Frege segue ainda rumo à demonstração do funcionamento de sua linguagem na prática, de como é possível com ela operar e o que é possível nela derivar. Nesse momento, aparecem as primeiras definições de conceitos matemáticos e demonstrações de proposições aos moldes dessa *conceitografia*, mostrando, portanto, a virtude de seu sistema no que tange a formalização dos conceitos matemáticos e um maior rigor de suas provas. Frege irá mostrar, por exemplo, como definir a noção de propriedade hereditária e demonstrar a hereditariedade, usando única e exclusivamente o aparato lógico formal até aqui desenvolvido.

Contudo, ainda que a *Begriffsschrift* traga uma resposta ao problema do rigor – avanço que não deve em nenhuma hipótese ser subestimado, afinal, constitui uma contribuição imensa na história da lógica e da matemática –, Frege via nesse avanço apenas uma ferramenta, um passo intermediário necessário para que fosse possível investigar o problema que realmente o motivava – a saber, a busca por um fundamento mais profundo da matemática, uma fundamentação filosófica.

2.2. A fundamentação lógico-filosófica da matemática

Como já citado, em sua busca por fundamentar a matemática, Frege não detêm-se ao problema de tornar uma prova em uma prova rigorosa, mas crê ser necessária outra fundamentação à matemática de natureza ainda mais basilar, i.e. uma fundamentação filosófica. Se a questão posta sob a perspectiva matemática era “quando é que se tem uma prova axiomática de um resultado?” quanto ao fornecimento de um fundamento para o resultado, esse mesmo problema de fundamentação, sob a perspectiva filosófica, deixava-se expressar ainda em outras duas questões, que podem ser, grosso modo, postas nos seguintes termos. Primeiramente, diz-se que os axiomas não precisam de fundamentação devido a sua evidência, mas devemos nos perguntar qual a natureza dessa evidência, em que ela se funda. Em segundo lugar, diz-se também que em uma prova, os passos inferenciais devem ser incontroversos, mas devemos então nos perguntar o que é ser incontroverso.

Para essas questões, então, de “quando um axioma é evidente?” e “quando uma regra de inferência é incontroversa?”, Frege pensava ter uma resposta bastante precisa. Para o filósofo, a evidência dos axiomas utilizados na matemática e o caráter incontroverso das regras de inferências estariam justificados e fundados na natureza puramente lógica dessas entidades. Dito de outro modo, para Frege, os axiomas e regras de inferência de que a aritmética fazia uso poderiam ser todos derivados dos axiomas e regras de inferência da lógica – as fórmulas da aritmética seriam apenas consequências sofisticadas de leis lógicas básicas, essas sim, evidentes por si mesmas⁷. Partindo dessa tese e do ferramental lógico-formal desenvolvido na *Begriffsschrift*, Frege estabelece, portanto, seu programa matemático, lógico e filosófico de demonstração da redutibilidade da aritmética à lógica – expresso pela primeira vez em sua obra *Os Fundamentos da Aritmética*. Surge, assim, o *logicismo*.

Frege, é importante notar, não é o primeiro a perceber e traçar semelhanças entre lógica e matemática. Na medida em que as sentenças da aritmética possuem muitas características em comum com as da lógica – a saber, ambas tratam aparentemente de verdades necessárias, *a priori* e que, portanto, uma vez provadas, têm sua verdade absolutamente garantida –, seria uma grande coincidência que ambas as disciplinas, e somente elas, fossem compostas de tais juízos e, no entanto, não mantivessem nenhuma relação entre si. Somado ainda à primazia adquirida em sua época da aritmética sobre a geometria na matemática, a ideia de similaridade entre os dois campos se tornava ainda mais promissora e a tentativa de relacioná-las, aparentemente próspera.

Contudo, mesmo com tantas semelhanças, as duas ainda pareciam apresentar dois descompassos de natureza. A lógica, em sua acepção clássica, é considerada, em primeiro lugar, uma disciplina que trata meramente da forma dos enunciados e não de seus conteúdos, não se ocupando com objetos e sendo, por consequência, independente de uma ontologia – na verdade, se aplica a qualquer ontologia possível. Como decorrência parcial desse fato, uma segunda característica da lógica, entendida classicamente, seria sua esterilidade – por não tratar de objetos ou conteúdos, a lógica seria uma disciplina que não engendra conhecimento novo. Ora, essas duas características parecem se opor vi-

⁷ “[...] a verdade de uma lei lógica é imediatamente evidente por si mesma, isto é, pelo sentido de sua expressão”. Gottlob Frege. *Logische Untersuchungen*. 5th ed. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 2003, p. 105, tradução nossa.

sivelmente à matemática. Em primeiro lugar, a matemática parece claramente discorrer acerca de objetos, produzir asserções categóricas e não meramente hipotéticas sobre eles, descobrindo propriedades necessárias destes; em segundo lugar, a matemática não apenas engendra conhecimento, como é nosso paradigma de conhecimento seguro, rigoroso e indubitável.

É justamente nesse aparente descompasso de natureza entre as duas disciplinas que, parece-nos, encontra-se uma importante razão para não se ter antes na história realizado sua aproximação, a despeito das nítidas semelhanças entre essas disciplinas. Sendo assim, a grande virtude de Frege não está propriamente em perceber relações entre matemática e lógica, mas na passagem da ideia à prática, i.e. no estabelecimento de um programa filosófico que busca de fato demonstrar o parentesco entre ambas, justamente por crer ter achado a resposta a esses descompassos que, após investigação, se mostrariam como meramente aparentes.

Para tal, dois caminhos se apresentam enquanto possibilidades: ou afirmamos que a lógica pode, sim, tratar de [certos tipos] de objetos e, por consequência, engendrar conhecimento – posição a que poderíamos chamar de *logicismo platonista* –, ou, por outro lado, retiramos o peso ontológico da matemática e tornamos seu discurso vazio de conteúdo – posição a que poderíamos chamar de *logicismo nominalista*. Frege adotará uma postura *platonista* frente ao problema.

Assim, o desafio posto ao autor é o de demonstrar não apenas a possibilidade da lógica engendrar conhecimento novo, mas também a possibilidade da lógica tratar de objetos – mais especificamente, os objetos da matemática – e, portanto, mostrar como esses objetos em questão, suas características e princípios aos quais estão sujeitos – alguns de caráter aparentemente irreduzivelmente matemáticos –, podem todos eles ser definidos em termos puramente lógicos, i.e. reduzidos às leis básicas da lógica e ao ferramental por ela utilizado em seu expediente. De modo mais concreto, nesse itinerário Frege terá em seu horizonte, por exemplo, a noção central da matemática para ser enfrentada e definida logicamente, a saber, o conceito de número – conceito que, para Frege, sequer os matemáticos de seu tempo tinham real clareza⁸. Essa é, pois, a tarefa que o autor pretende realizar nos *Fundamentos da Aritmética (Die Grundlagen der Arithmetik)*.

⁸ Cf. FREGE, 2021, pp. 1-3 .

2.2.1. Os Fundamentos da Aritmética

É nessa obra em que Frege irá, pela primeira vez, apresentar tanto o pano de fundo – profundamente filosófico – que motiva a realização de seu projeto fundacionalista, bem como um primeiro esboço, em linhas gerais, de como esse programa será efetivado em termos formais, a partir do aparato desenvolvido na *Begriffsschrift* – o autor o faz, por exemplo, demonstrando como muitas definições e proposições aritméticas podem ser reescritas em linguagem natural, e suas demonstrações – no caso de teoremas – também o podem, de modo a se tornarem passíveis de formalização na linguagem de sua *conceitografia*.

Vale notar que ao contrário da *Begriffsschrift*, as *Grundlagen* apresentam um grau de formalização quase nulo, tendo um grau de acessibilidade muito maior ao leitor, a fim de atingir um público muito mais amplo do que o atingido com sua obra anterior. Isso se deve tanto ao caráter mais propriamente filosófico da reflexão, bem como ao fato da peculiaridade de sua notação, desenvolvida na *Begriffsschrift*, ter se tornado uma espécie de barreira de entrada para que sua obra pudesse ter mais fertilidade dentre os que se interessavam nos estudos do tema. Assim, Frege escreve as *Grundlagen* em linguagem natural, conciliando matemática e filosofia como poucas vezes visto na história do pensamento.

Ao iniciarmos a leitura da obra, nos deparamos prontamente, na Introdução, com uma crítica (bastante socrática, por sinal) de Frege direcionada ao estado atual da matemática de sua época no que concerne uma resposta à pergunta “o que é o número um?”. O autor irá dizer ser “vergonhoso para a ciência estar tão pouco esclarecida acerca de seu objeto mais próximo, e aparentemente tão simples”.

Quando um conceito que serve de base a uma importante ciência oferece dificuldades, torna-se tarefa irrecusável investigá-lo de modo mais preciso e superar estas dificuldades, em particular porque dificilmente conseguiríamos esclarecer totalmente os números negativos, fracionários e complexos enquanto nossa compreensão dos fundamentos do edifício global da aritmética fosse ainda defeituosa. (FREGE, 2021, p. 2)

É esse espírito, portanto, de investigação das noções mais básicas que servem de fundamento para o edifício da aritmética que irá ditar todo o percurso e reflexão presente na obra. Essa investigação, nota Frege de antemão, ater-se-á firmemente, ao longo de todo o seu caminho, aos seguintes três princípios: 1) separar precisamente o psicológico do

lógico, o subjetivo do objetivo; 2) perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição, e não isoladamente; 3) não perder de vista a distinção entre conceito e objeto. E, em muitos momentos da empreitada, será possível enxergar claramente de que modo esses princípios estão atuando e como eles estão contribuindo para a análise de querelas e na posterior superação delas.

A gama de tópicos e problemas tratados na obra é bastante ampla. No entanto, não se pode perder de vista que todos esses tópicos e problemas que aparecem e são tratados na obra, são abordados com o mesmo objetivo: demonstrar e convencer o leitor da redutibilidade da aritmética à lógica, i.e. da tese *logicista*. A fim de demonstrar a correção de sua tese e que, na verdade, ela é a única possível, Frege a coloca frente a outras posições, com respeito aos fundamentos da aritmética, defendidas por outros autores anteriores e contemporâneos a ele, apontando os impasses e aporias que essas posições nos levam.

No Capítulo I, por exemplo, Frege irá se ocupar da análise crítica das diferentes posições assumidas por alguns autores com respeito à natureza das proposições aritméticas. Separando as proposições aritméticas entre ‘fórmulas numéricas’ e ‘leis de aritmética’, com respeito às primeiras, Frege se colocará a perguntar sobre sua demonstrabilidade. Passando por grandes nomes da filosofia e suas opiniões a respeito do tema, Frege irá criticar as posições de Kant e, ainda mais duramente, de Mill, e fazer precisões à posição de Leibniz, que o autor julga ser a mais acertada.

Isso se deve pois a posição kantiana, para Frege, de que as fórmulas numéricas seriam indemonstráveis e sintéticas, não se sustenta quando tomamos como exemplo fórmulas que realizam operações entre números muito grandes. Ao tomarmos “ $135664 + 37863 = 173527$ ” como exemplo, nota-se prontamente que essa não pode ser uma fórmula imediatamente evidente – e se não o é e, ainda assim é verdadeira, deve ser possível demonstrá-la. Frege ainda observa:

Kant tinha em mente, é claro, apenas números pequenos. As fórmulas para grandes números seriam então demonstráveis, a fórmulas pequenos números imediatamente evidentes por meio da intuição. Mas é arriscado fazer uma distinção fundamental entre números pequenos e grandes, particularmente porque não seria possível traçar um limite preciso entre eles. Se fossem demonstráveis, digamos, as fórmulas numéricas a partir de 10, ter-se-ia o direito de indagar: por que não- a partir de 5, a partir de 2, a partir de 1? (FREGE, 2021, p. 18)

Passando aos autores que argumentaram em favor da demonstrabilidade das fórmulas aritméticas, Mill e Leibniz, Frege irá dirigir duras críticas a John Stuart Mill. Para

Mill, embora as fórmulas aritméticas fossem demonstráveis, não o seriam por razões lógicas ou analíticas, mas sim pela sua fundamentação nos fatos observáveis. Dada, por exemplo, a impressão sensível de três pedrinhas $\bullet\bullet\bullet$, e a possibilidade de separá-las em $\bullet\bullet$ e \bullet , assim estariam fundamentadas a asserção de que $2+1=3$, todas as que a esta se assemelham e o próprio 3. Frege irá apresentar as falhas e os problemas na defesa desta posição. Dentre elas, o autor aponta para o fato de que esta posição não se sustenta se nós tomarmos como exemplo uma proposição tal como *três maneiras de se resolver uma equação*, “pois nunca se tem delas uma impressão sensível como se tem de $\bullet\bullet\bullet$ ”, de tal modo que nos seria impossível explicar e atribuir sentido ao uso do *três* na proposição, se ele adviesse dos fatos físicos. Mas ainda, complementa Frege:

Supõe-se talvez que os fatos físicos seriam utilizados apenas para os números menores, digamos até 10, podendo os demais ser compostos a partir daqueles. Mas se é possível formar 11 a partir de 10 e 1 por simples definição, sem ter visto a coleção correspondente, não há razão pela qual não se possa também compor o 2 a partir de 1 e 1 da mesma maneira. Se os cálculos com o número 11 não se seguem de um fato que lhe seria característico, por que motivo devem os cálculos com o 2 apoiar-se sobre a observação de uma certa coleção e de seu tipo peculiar de separação? (FREGE, 2021, p. 23)

Nota ainda Frege, logo na sequência, de maneira precisa:

Se uma proposição é chamada de empírica porque tivemos que fazer observações para tomar consciência de seu conteúdo, a palavra "empírico" não está sendo empregada no sentido em que se opõe a *a priori*. É neste caso formulada uma asserção psicológica, que concerne apenas ao conteúdo da proposição; se este é verdadeiro, é algo que não entra em questão. (FREGE, 2021, p. 23)

E, por último dos aqui citados, no caso de Leibniz que, como Mill, sai em defesa da demonstrabilidade das fórmulas aritméticas, os apontamentos de Frege vão em outra direção. Isso porque, embora Leibniz e Mill compartilhem a posição da demonstrabilidade das fórmulas aritméticas, o entendimento leibniziano do que serviria de fundamentação e, portanto, de demonstração dessas fórmulas, se afasta completamente da visão defendida por Mill. Para Leibniz, a demonstração da verdade de fórmulas aritméticas como “ $2+2=4$ ” se daria por meios puramente analíticos. Partindo das seguintes definições:

- 1) 2 é 1 e 1;
- 2) 3 é 2 e 1;
- 3) 4 é 3 e 1;

e do axioma: “quando se substituem os iguais, a equação persiste”, Leibniz irá aplicar ambos, as definições e o axioma, na equação “ $2+2=4$ ”, para *demonstrar* sua verdade. Assim o faz da seguinte maneira:

$$2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Uma vez que Frege concorda com a posição do autor, a saber, de que as fórmulas aritméticas são demonstráveis e analíticas, i.e. são demonstráveis por razões puramente lógicas, não lhe resta muitas críticas a serem feitas senão pontuar uma precisão do ponto de vista formal à prova leibniziana: a ocultação dos parênteses e a célebre regra da associatividade dos parênteses. A questão está em trazer à luz uma proposição oculta na prova de Leibniz, que seria a seguinte:

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

que, como nota Frege, seria um caso particular de:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Encerrando, portanto, a análise das respostas oferecidas para a pergunta em questão, em concordância com a posição leibniziana e apontando as inconsistências que estariam presentes tanto na posição de Kant, quanto na posição de Mill.

Esse movimento de colocar sob escrutínio as posição de outros autores, seja concordando com elas ou as problematizando, se repete ao longo do texto e se estende até o Capítulo III. Ao longo desse percurso é possível adquirir um considerável aprofundamento nas posições propriamente filosóficas do autor, que são apresentadas direta ou indiretamente. Seja através do apontamento das aporias em que resultam as posições criticadas, seja através da posterior fertilidade que as posições endossadas terão nas reflexões positivas de Frege, todas as querelas nas quais o autor engaja – da discussão realizada ainda no Capítulo I, sobre o carácter analítico das leis de aritmética e o próprio conceito de analiticidade, passando pela discussão sobre o conceito de número (que será abordada ulteriormente), no Capítulo II, até chegar na discussão sobre a *unidade* e o *um*,

presente no Capítulo III –, todas elas, como já dito, têm por objetivo apresentar, explorar e reforçar a posição logicista do autor e a *filosofia* por trás de seu programa.

Tendo passado, portanto, por esse grande momento da obra, ao chegarmos ao final do Capítulo III e ao longo do Capítulo IV – em boa parte resultado de todo movimento anterior, presente nos Capítulos I ao III –, após o percurso mormente aporético realizado nas discussões que precederam, Frege irá, finalmente, apresentar ao leitor de modo expreso qual seria propriamente a sua concepção positiva com respeito aos problemas apresentados, com primazia ao tratamento da noção de número.

2.2.1.1. O conceito de número

No percurso realizado até este momento da obra, no que concerne à questão da natureza do número, as conclusões a que se chegou foram inteiramente negativas. A investigação presente no Capítulo II levou-nos à conclusão de que

O número não é, da mesma maneira que a cor, o peso e a dureza, abstraído das coisas, não é, no mesmo sentido, uma propriedade das coisas. Resta a questão de saber sobre o que algo é enunciado por meio de uma indicação numérica. O número não é algo físico, mas tampouco algo subjetivo, uma representação. O número não surge por anexação de uma coisa a outra. Nem a doação de um nome após cada anexação faz alguma diferença. (FREGE, 2021, p. 66)

A investigação com respeito à *unidade* e ao *um*, presente no Capítulo III, por sua vez, esclareceu-nos da distinção entre ambos, a saber, que *um* seria um nome próprio e *unidade*, um termo conceitual, e que “número não pode ser definido como unidades”. Para além dos resultados parcialmente positivos, no entanto,

Com respeito ao *um* e à *unidade*, resta a questão de como limitar o arbítrio da apreensão, que parece apagar toda distinção entre *um* e *muitos*. A delimitação, indivisão e indecomponibilidade não podem ser utilizadas para caracterizar o que exprimimos pela palavra “*um*”. Se as coisas a enumerar forem chamadas de *unidades*, a afirmação incondicionada de que as *unidades* são iguais será falsa. Que sejam iguais sob certos aspectos, é correto mas sem valor. A distinção entre as coisas a enumerar é mesmo necessária se o número deve ser maior que 1. Pareceu pois que deveríamos atribuir às *unidades* duas propriedades contraditórias: a igualdade e a distinguibilidade. Deve-se fazer distinção entre *um* e *unidade*. A palavra “*um*”, enquanto nome próprio de um objeto da investigação matemática, não admite plural. Não tem pois sentido fazer com que os números surjam da reunião de uns. O sinal de mais em $1 + 1 = 2$ não pode significar uma tal reunião. (FREGE, 2021, pp. 66-67)

Doravante, Frege dará início de modo mais claro à busca por saber de fato o que o número é e não meramente o que ele *não* é. Se apegando ao princípio 2), postulado pelo autor na Introdução da obra, Frege irá analisar o modo como o número aparece no contexto de um juízo em que se evidencia o ‘modo original’ de aplicação do número, nas palavras do autor. No proceder desse exame, Frege conclui que a indicação numérica (ou atribuição de número) contém um enunciado sobre um conceito. De modo concreto:

Se digo: "Vênus tem 0 luas", não há absolutamente nenhuma lua ou agregado de luas sobre o que algo se pudesse enunciar; mas ao conceito "lua de Vênus" atribui-se deste modo uma propriedade, a saber, a de não subsumir nada. Se digo "a carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos", atribuo o número quatro ao conceito "cavalo que puxa a carruagem do imperador". (FREGE, 2021, p. 67)

Deste modo, percebemos que os números presentes no contexto da proposição se referem a conceitos e não objetos – como exemplifica Frege também, esse fato se faz evidente na língua alemã em que se diz, por exemplo, *zehn Mann* (dez homem), em que o substantivo se mantém no singular.

À possíveis objeções, Frege se antecipa em respondê-las, como no caso de certos conceitos possuírem uma variável temporal, ou da aparente estranheza do fato de uma atribuição de número exprimir algo factual. À primeira, Frege diz que nesses casos, se se pretende convir ao conceito o mesmo número “por toda a eternidade”, basta reformular o enunciado de modo a torná-lo mais preciso, fixando a referência temporal internamente ao próprio enunciado. À segunda, o autor argumentará que essa estranheza se justificaria apenas para aqueles que tomam “o conceito por algo subjetivo, como a representação” – o que é falso.

Que nossa proposição somente possa ser legitimada mediante a observação [...] isto nada prova quanto a seu conteúdo. Para a questão do que ela trata é indiferente que seja verdadeira ou não, ou por que razões a tomamos por verdadeira. Se o conceito é pois algo objetivo, pode também um enunciado a seu respeito conter algo fatual. (FREGE, 2021, p. 68)

Tendo então avançado positivamente na investigação, a saber, concluindo que a atribuição de número contém um enunciado sobre um conceito, Frege parte agora, no Capítulo IV, para a definição propriamente dos números. De início, já nos deparamos com um trecho que expressa de modo paradigmático o espírito do projeto logicista:

podemos tentar completar as definições leibnizianas dos números singulares, definindo o 0 e o 1. Parece natural definir: a um conceito convém o número 0 se nenhum objeto cai sob ele. Mas aqui o "nenhum" parece ter entrado no lugar do 0, tendo ambos o mesmo significado; por isso é preferível a seguinte formulação: a um conceito convém o número 0 se vale universalmente, para qualquer a , a proposição de que a não cai sob este conceito. Poder-se-ia dizer analogamente: a um conceito F convém o número 1 se não vale universalmente, para qualquer a , a proposição de que a não cai sob F , e se das proposições " a cai sob F " e " b cai sob F " segue-se universalmente que a e b são o mesmo. (FREGE, 2021, p. 75)

Essa definição, no entanto, não será satisfatória para Frege. O autor irá argumentar que não podemos, a partir dessas definições, nem decidir quando algo é ou não é um número, nem demonstrar que " a deve ser igual a b se ao conceito F convém o número a e se ao mesmo conceito convém o número b ". Nas palavras de Frege, "não se poderia pois autorizar a expressão 'o número que convém ao conceito F '". Frege está apontando para a carência, até então, no real entendimento e definição do que seria uma igualdade numérica e, segundo o autor, no entanto, estabelecer o sentido de uma equação numérica é necessário caso queiramos obter o conceito de número.

Assim, o autor parte em busca de uma definição de uma relação de identidade que seja definida em termos de poder garantir que os relacionados sejam sempre números e de permitir que decidamos se a é o mesmo que b . A investigação consiste, portanto, em

definir o sentido da proposição "O número que convém ao conceito F é o mesmo que convém ao conceito G "; isto é, devemos reproduzir de outra maneira o conteúdo desta proposição, sem empregar a expressão "o número que convém ao conceito F ". Indicamos deste modo um critério geral de igualdade entre números. Após termos assim obtido um meio de apreender um número determinado e reconhecê-lo novamente como o mesmo, poderemos atribuir-lhe um numeral como nome próprio. (FREGE, 2021, pp. 81-82)

Nesse momento da reflexão fregeana é que surge o célebre Princípio de Hume. Frege irá notar que embora o princípio possa parecer fecundo para os nossos objetivos – por definir a igualdade a partir da coordenação unívoca –, ele apresenta algumas dificuldades lógicas. Como exemplo, a relação de igualdade não é exclusividade dos números e, por conseguinte, não pode ser definida para este caso em particular. Isso não seria um problema se já tivéssemos sob nosso domínio, tanto o conceito de igualdade, bem como o conceito de número. Contudo, Frege relembra ao leitor de que "o conceito de número ainda não está estabelecido para nós, devendo ser determinado por meio de nossa definição" – na busca por definir o número, não podemos pressupô-lo. De todo modo, o princípio ainda assim nós é útil, aponta Frege – deve-se agora, portanto, investigá-lo.

Assim, Frege dá início a essa última investigação que acabará nos levando, finalmente, ao conceito de número que se almeja. O raciocínio é extenso em passos e se dá da seguinte maneira. Alterando, por ora, da aritmética para a geometria, mas visando nada além de buscar relações no que tange os enunciados e suas significações, Frege elegerá um caso modelo de equação encontrada em um juízo da geometria, a saber, “a reta a é paralela à reta b ”, que desvela-se em “a direção da reta a é igual à direção da reta b ”. Contudo, Frege irá notar alguns problemas de início. Dentre os quais, a própria passagem do primeiro para o segundo juízo guarda certa estranheza, pois ela determina a relação de igualdade enquanto que o conceito de *direção*, que pressupunha ser o principal, assume um segundo plano; e, ainda além, há uma “trapaça” que consiste em pressupor, pelo uso da palavra ‘direção’, aquilo que se pretende demonstrar.

Frege irá reformular o juízo “a direção da reta a é igual à direção da reta b ” em “a direção das retas é igual” e, partindo da definição de Leibniz de igualdade – que diz que *são iguais as coisas que, salvo a verdade, podem ser substituídas uma pela outra* – apontará o caminho que deve trilhar caso se queira legitimar a tentativa de definir a direção de uma reta. Esse caminho é o de mostrar que se pode sempre substituir a “direção de a ” pela “direção de b ”, se a reta a é paralela à reta b . A questão é que, até agora, não temos conhecimento de nenhum outro enunciado a respeito da direção de uma reta, que não o de que ela coincide com a direção de outra reta – a tarefa seria, portanto, de demonstrar a validade da substituição apenas em igualdades como essas ou “em conteúdos que contivessem tais igualdades como elemento”. Para todos os outros enunciados sobre a direção, dever-se-ia de antemão defini-los, podendo para eles postular a preservação da substitutibilidade da direção de uma reta por outra.

Outra questão para a qual Frege aponta é o fato de nossa definição não dizer nada a respeito de como devemos proceder (negando ou afirmando), caso na proposição “a direção de b é igual a q ”, q não apareça da mesma forma como b aparece na proposição. Isso porque não temos o conceito de direção – caso o tivéssemos, bastaria dizer que nos casos em que q não fosse uma direção, negaríamos a proposição. Do contrário, no exemplo do próprio Frege, não somos capazes, a partir da nossa definição de decidir a respeito de se “a Inglaterra é o mesmo que a direção do eixo da Terra”. Seria então natural definirmos que “ q é uma direção se existe uma reta b cuja direção é q ”. Acontece que, para a aplicabilidade dessa definição devemos saber de antemão para caso, se “ q é igual à direção

de *b*” deve ser negada ou afirmada. O problema é circular e parece não restar nada a fazer, a não ser abandonar a busca por um conceito precisamente delimitado de direção.

No entanto, é justamente nesse abandono que se apresentará a real solução. Frege, irá supor bastar tratar do problema em termos unicamente de extensão de conceitos. Explicando, tendo que “a reta *a* é paralela à reta *b*”, a extensão do conceito de “reta paralela à *a*” mantém identidade com a extensão do conceito de “reta paralela à *b*” e, a inversa é válida (temos, portanto, um *bicondicional* – mas como sabemos, Frege, em sua formalização, irá utilizar o sinal de identidade), i.e. se as duas extensões de conceitos são iguais, “a reta *a* é paralela à reta *b*”. Está expressa aqui a arquitetura da futura *Lei Básica V* – que não apenas supera o Princípio de Hume, de onde partiu nossa última investigação, como é capaz de demonstrá-lo.

Retornando ao objeto próprio de nosso exame, transportando o problema de *retas* para *conceitos* e, de *paralelismo* para “a possibilidade de coordenar biunivocamente os objetos que caem sob um conceito aos que caem sob outro”, teremos agora, finalmente o conceito de número: *o número que convém ao conceito F é a extensão do conceito “equinúmero ao conceito F”*. Ao que Frege nota:

a proposição: “a extensão do conceito ‘equinúmero ao conceito F’ é igual à extensão do conceito ‘equinúmero ao conceito G’ é verdadeira sempre que, e apenas quando, é também verdadeira a proposição ‘ao conceito F convém o mesmo número que ao conceito G’. [...] Realmente não se diz que um número seja mais inclusivo que outro, no sentido em que a extensão de um conceito é mais inclusiva que outra; mas o caso de ser a extensão do conceito ‘equinúmero ao conceito F’ mais inclusiva que a extensão do conceito ‘equinúmero ao conceito G’ nunca pode ocorrer; pelo contrário, se todos os conceitos equinúmericos a G são também equinúmericos a F, inversamente também todos os conceitos equinúmericos a F são equinúmericos a G. (FREGE, 2021, pp. 88-89)

Aqui atinge-se, portanto, o objeto de grande interesse almejado desde o início da investigação, a saber, uma definição de número, ou do conceito de número dada por noções e em termos que podem ser descritos de maneira puramente lógico-formal, a partir do ferramental desenvolvido na *Begriffsschrift*. Frege ainda dá sequência à investigação e, agora em posse de uma definição satisfatória do número, começa a realizar algumas derivações mediante essa e outras definições até aqui apresentadas – nas palavras do próprio autor, “definições confirmam-se por sua fecundidade”. Nesse último momento da obra, Frege tem ainda o trabalho de precisar alguns dos conceitos já apresentados – como a coordenação biunívoca; essas precisões nas definições e derivações, no entanto, serão ainda sofisticadas e apresentadas em sua versão final, do

ponto de vista formal e conceitual apenas em sua posterior obra *Leis Fundamentais da Aritmética* (*Grundgesetze der Arithmetik*).

3. O fracasso do Logicismo

Como dito, o programa matemático, lógico e filosófico de Frege de fundamentação da aritmética na lógica adquirirá a sua plena forma e será levado a cabo do ponto de vista formal e conceitual apenas anos mais tarde, em sua monumental obra *Grundgesetze der Arithmetik*. Nessa obra, composta pelos volumes I e II, Frege irá expor e apresentar seu programa de modo efetivamente rigoroso, utilizando-se do aparato lógico-formal desenvolvido na *Begriffsschrift* e do aparato lógico-filosófico apresentado e desenvolvido nas *Grundlagen*, como é o caso da definição do conceito de número via *Lei Básica V*.

A *Lei Básica V* tinha por objetivo sistematizar as noções de *extensão de conceitos*, i.e. o conjunto de todos os objetos que recaem sob esse conceito, e de *curso-de-valores de uma função*, i.e. para uma função f , o conjunto de pares ordenados que assinala o valor $f(x)$ da função f para todo argumento x . A título de exemplo, o curso-de-valores da função *países que fazem fronteira com x*, assinala como valor *México* e *Canadá*, para o argumento *EUA*. Do mesmo modo, como conceitos seriam, para Frege, apenas funções de objetos para valores de verdade, a extensão de um conceito nada mais seria que o curso-de-valores que assinala quais objetos esse conceito *mapearia* para O Verdadeiro. E na medida em que, como sabemos, Frege concebe números como extensões de conceitos, a *Lei Básica V*, portanto, se tornaria alicerce fundamental de seu sistema. Sendo assim, nas *Grundgesetze*, Frege postula essa Lei como um dos axiomas lógicos de seu sistema, escrevendo-a, na linguagem da *Begriffsschrift* da seguinte maneira:

$$(\exists f(\varepsilon) = \alpha g(\alpha)) = (\exists \alpha f(\alpha) = g(\alpha))$$

Entendendo ∇ como “número de...”, na notação atual, esta fórmula seria escrita da seguinte maneira:

$$\nabla F = \nabla G \leftrightarrow \forall x(F(x) = G(x)).$$

Dentre todas as Leis estabelecidas por Frege e postuladas como axiomas de seus sistemas, a *Lei V*, no entanto, era a única sobre a qual o autor chegou a demonstrar dúvidas quanto ao seu caráter puramente lógico. Contudo, a importância e a dependência de tal Lei para o sucesso do projeto fundacionalista fregeano, parecem ter feito o autor deixar de lado sua intuição que, no entanto, acabou por demonstrar-se correta.

3.1. Paradoxo de Russell

Em 1902, após ler o Volume I da obra, é que o também filósofo, lógico e matemático Bertrand Russell envia uma carta a Frege, dando-lhe notícias sobre um grande problema em seu sistema – Russell identificara no sistema fregeano, mais especificamente, na *Lei Básica V* o que se tornaria a ruína do projeto logicista fregeano, a saber, a possibilidade de engendrar paradoxos e, portanto, demonstrar absurdos lógicos em seu sistema, tornando-o evidentemente inconsistente.

Em funções em particular (seção 9 de sua Conceitografia), eu fui levado independentemente às mesmas visões até mesmo no detalhe. Eu encontrei uma dificuldade apenas em um ponto. Você afirma (p. 17) que uma função poderia constituir também o elemento indefinido. Isso é o que eu costumava acreditar, mas essa visão me parece agora duvidosa, devido à seguinte contradição: Seja w o predicado de ser um predicado que não pode ser predicado de si mesmo. w pode ser predicado de si mesmo? De cada resposta segue-se sua contradição.⁹

O que aponta Russell, neste trecho, pode ser colocado, em termos formais, da seguinte maneira. Definindo o predicado w como

$$w = \{x \mid x \notin x\}$$

disso segue-se, então, que

$$w \in w \leftrightarrow w \notin w.$$

⁹ Philosophical and Mathematical Correspondence, G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, and A. Veraart (eds. of the German edition), abridged from the German edition by Brian McGuinness, translated by Hans Kaal, Chicago: University of Chicago Press, 1980, pp. 130-131, tradução nossa.

Esse paradoxo, posteriormente nomeado como *Paradoxo de Russell*, foi recebido por Frege com muita surpresa, deixando-o até mesmo atordoado pois, segundo o próprio autor em carta em resposta a Russell, abalou as estruturas sobre as quais ele pretendia construir a aritmética, minando não apenas os fundamentos da sua aritmética, mas o único fundamento possível da aritmética enquanto tal.

À época em que Frege têm notícias dos problemas que acometem seu sistema, no entanto, o Volume II de sua obra já se encontrava em impressão para ser publicado. O autor ordena que os exemplares parem de ser impressos e faz alterações na obra, adicionando um apêndice no qual tratará da inconsistência apontada por Russell. Nesse apêndice, Frege explorará em mais detalhes o problema, trazendo o paradoxo para o campo da formalização, a fim de tratar do problema nos termos devido.

O predicado descrito por Russell como “o predicado que não pode ser predicado de si mesmo” será tratado, no *Apêndice*, como “a classe Δ que não pertence a si mesma”, expressada formalmente como

$$\neg \text{g}(\Delta) \quad \text{g}(\Delta) = \Delta$$

que, em nossa notação, poderia ser expressa por

$$\sim \forall F (e(F) = \Delta \rightarrow F(\Delta)).$$

E será demonstrado por Frege, de que maneira podemos, a partir da *Lei Básica V* e desta nossa expressão de classe, engendrar o Paradoxo de Russell.

Frege tenta ainda, analisando a *Lei V* e separando-a em *Va* e *Vb*, localizar onde exatamente encontrar-se-ia a verdadeira origem do paradoxo. Em sua análise, Frege chega à conclusão de que o problema residiria em *Vb*, a saber, uma versão mais fraca da Lei Básica V que, ao invés de se valer de um bicondicional, vale-se apenas da implicação do lado esquerdo da expressão ($eF = eG$) para o lado direito ($\forall x(F(x) = G(x))$). Assim, ao identificar em *Vb* falsidade e a raiz da inconsistência de seu sistema, Frege a elimina e sai ainda em busca de solucionar o problema e escapar do Paradoxo de Russell no que se segue. Como se sabe, no entanto, essa tentativa também acaba por se demonstrar falha, levando Frege, anos mais tarde, ao abandono de seu projeto filosófico.

4. Considerações finais

O projeto logicista de fundamentação da aritmética, de Frege, fracassou. No entanto, isso não deve, em nenhuma hipótese, levar-nos a ver em Frege, ou em sua obra um valor meramente histórico. É preciso ter dimensão da virtude que guarda o projeto e o pensamento fregeano e de quantos avanços tanto matemáticos, quanto lógicos, devem à Frege sua existência. A criação dos sistemas formais, a inestimável contribuição para a lógica moderna, o próprio projeto logicista e o pioneirismo na busca por uma fundamentação da matemática, por parte de Frege, explicitam de modo paradigmático não apenas o seu enorme valor filosófico, bem como o espírito de um pensador rigoroso e sofisticado que, como poucos ou nenhum, conciliou com maestria matemática e filosofia, e que deve a nós servir de referência e inspiração.

5. Referências bibliográficas

Fontes primárias

1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S.: Louis Nebert; translation by S. Bauer Mengelberg as *Concept Notation: A formula language of pure thought, modelled upon that of arithmetic*, in J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

1884, *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: w. Koebner; translated by J. L. Austin as *The Foundations of Arithmetic: A Logic-Mathematical Enquiry into the Concept of Number*, Oxford: Blackwell, second revised edition, 1953.

1892, “Über Begriff und Gegenstand”, in *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16: 192–205; translated as ‘Concept and Object,’ by P. Geach in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, P. Geach and M. Black (eds. and trans.), Oxford: Blackwell, third edition, 1980.

1893/1903, *Grundgesetze der Arithmetik*, Band I/II, Jena: Verlag Herman Pohle; translation by P. Ebert and M. Rossberg (with C. Wright) as *Basic Laws of Arithmetic*:

Derived using concept-script, Oxford: Oxford University Press, 2013; partial translation of Volume I by M. Furth as *The Basic Laws of Arithmetic*, Berkeley: U. California Press, 1964.

1980, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, and A. Veraart (eds. of the German edition), abridged from the German edition by Brian McGuinness, translated by Hans Kaal, Chicago: University of Chicago Press.

Fontes secundárias

Beaney, M., 1997, "The Frege Reader", Oxford: Blackwell.

Boolos, G., 1985, "Reading the Begriffsschrift", *Mind*, 94: 331–344; reprinted in Boolos (1998): 155–170. [Page references are to the reprint.]

---, 1990, "The Standard of Equality of Numbers", in *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*, G. Boolos (ed.), Cambridge: Cambridge University Press, pp. 261–277; reprinted in Boolos (1998): 202–219. [Page references are to the original.]

---, 1997, "Is Hume's Principle Analytic?", in Heck (ed.) 1997, 245–262; reprinted in Boolos (1998): 301–314. [Page references are to the reprint.]

Demopoulos, W., 1998, "The Philosophical Basis of Our Knowledge of Number", *Noûs*, 32: 481–503.

Demopoulos, W., and Clark, P., 2005, "The Logicism of Frege, Dedekind and Russell", in *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, S. Shapiro (ed.), Oxford: Oxford University Press, 129–165.

Dummett, M., 1991, "Frege: Philosophy of Mathematics", Cambridge: Harvard University Press.

Euclides. *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. Editora Unesp, 2009.

Geach, P., 1955, "Class and Concept", *Philosophical Review*, 64: 561–570.

Hodes, H., 1984, "Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic," *Journal of Philosophy*, 81 (3): 123–149.

Kurt Gödel. "Collected Works Ed. By Solomon Feferman et al. Vol. III". Oxford University Press, 1986.

Linnebo, Ø., 2004, "Predicative Fragments of Frege Arithmetic", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 10 (2): 153–174.

Parsons, C., 1965, "Frege's Theory of Number", *Philosophy in America*, M. Black (ed.), Ithaca: Cornell University Press, pp. 180–203; reprinted with Postscript in Demopoulos (1995), pp. 182–210.

Richard Dedekind. *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Springer Fachmedien, 1960.

Wright, C., 1983, "Frege's Conception of Numbers as Objects", Aberdeen: Aberdeen University Press.

---, 1997b, "On the Philosophical Significance of Frege's Theorem", in Heck (ed.) 1997, 201–244.