PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

SIDNEY SILVA SANTOS

UMA FORMA SIGNIFICATIVA DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS A PARTIR DA CONCEPÇÃO PARTE-TODO

ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2010

SIDNEY SILVA SANTOS

UMA FORMA SIGNIFICATIVA DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS A PARTIR DA CONCEPÇÃO PARTE-TODO

Monografia apresentada a Pontifica Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Especialista em Educação Matemática**, sob a Orientação da Profª. Drª. Maria José Ferreira da Silva.

PUC/SP

2010

Dedicatória

A meus Pais Nestor e Sônia.

A minha filha Sabrina.

À Natália por tudo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que até aqui tem me abençoado e feito de mim mais do que vencedor.

À Profº Drª Maria José Ferreira da Silva pela orientação deste trabalho e pelo seu incentivo e dedicação para com seus orientandos.

Ao corpo docente do Curso de Especialização: Saddo Ag Almouloud, Ana Lúcia Manrique, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Maria José Ferreira da Silva, Bárbara Lutaif Bianchini e Renata Rossini pelas contribuições e belíssimo empenho em seu trabalho.

Aos meus amigos pelo apoio recebido enquanto me dediquei ao trabalho. Em especial, à Natália..., pelo companheirismo e dedicação sempre que precisei.

A minha família, em especial aos meus pais Nestor e Sônia por ter estado comigo durante todo o processo de formação e estudos pela minha carreira.

À Diretoria e coordenadora do Colégio Jean Piaget, Meilyng e Simoni, por permitir que os alunos da escola participassem da experiência sempre que foi necessário.

Aos meus amigos do curso pelo apoio recebido em especial: Anderson, Paulo Miachiro, Priscila, Arlete, Cecília e Luciana, que fizeram parte da minha formação e me apoiaram a buscar mais e mais.

Aos alunos e a ex-professora da turma que participaram da pesquisa com desempenho e responsabilidade e acreditaram mesmo desconhecendo a natureza do trabalho.

Agradeço a todas as pessoas ou instituições que contribuíram diretamente para o meu crescimento. Não é porque não as citei que são menos importantes para mim. Todas participaram efetivamente do meu desenvolvimento e formação fico feliz por cada um de vocês.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo diagnosticar se alunos do sexto anos do Ensino Fundamental adicionam, subtraem, multiplicam e dividem números fracionários de forma significativa por meio da equivalência desses números a partir de figuras e da reta numérica. O estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: Quais estratégias que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental mobilizam na resolução de atividades envolvendo operações com números fracionários por meio da concepção parte-todo? Para responder essa questão optamos por uma pesquisa aplicada a 22 alunos de um sexto anos do Ensino Fundamental de uma escola particular do Litoral de São Paulo. Leituras de pesquisas recentes que tem como tema números fracionário serviram de aponte teórico para fundamentar nossa pesquisa. Essa pesquisa foi desenvolvida a partir de um instrumento composto por 25 atividades envolvendo operações com números fracionários por meio da concepção parte-todo, embora outras concepções possam ser mobilizadas na resolução. Os resultados obtidos revelam que o baixo índice de acerto nesta pesquisa é reflexo da prática pedagógica e falta de compreensão do campo dos racionais por parte da ex-professora da turma. Pois só com uma mudança na concepção dessa professora e que compreenda e domine o conjunto dos números racionais ocorrerá aprendizagem significativa, caso contrário continuará a cometer os mesmos erros em relação a sua prática em sala de aula. Este estudo faz referências à prática pedagógica utilizada em sala de aula, com o objetivo de levantar hipóteses para possíveis mudanças.

Palavras-chave: Números Fracionários. Operações. Concepção Parte-todo. Reta Numérica. Equivalência de Números Fracionários.

ABSTRACT

This study aims to diagnose whether students from the sixth year of elementary school add, subtract, multiply and divide fractional numbers significantly by means of the equivalence of these numbers from figures and straight numerical. The study intented to answer the following research question: What are the strategies that students in the 6th grade of elementary school mobilize in solving activities involving operations with fractional numbers through the part-whole conception? For answer this question we chose a survey conducted with 22 students in a sixth-year class of elementary school of a private school in the São Paulo´s Coastal. Readings of recent research that has like theme the fractional numbers served like theoretical point for to substantiate our research. This research was developed from an instrument consisting of 25 activities involving operations with fractional numbers through the whole-part concept, although other conceptions can be mobilized in the resolution. The results show that the low rate of success in this research is reflected in teaching and in the lack of understanding about the rational field by the former teacher of the class. For only with a change in the teacher´s design who understands and dominates the set of rational numbers, the meaningful learning occurs, otherwise continue to make the same mistakes in her practice in the classroom. This study makes references to pedagogical practice used in the classroom, with the objective in select hypotheses for possible changes.

Keywords: Fractional Numbers. Operations. whole-part conception. Numerical straight. Equivalence of fractional numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo do nosso trabalho é diagnosticar quais estratégias alunos de um sexto ano do Ensino Fundamental mobilizam na resolução de atividades envolvendo operações com números fracionários[1] por meio da concepção parte-todo, pois acreditamos que este significado, geralmente, é utilizado nas primeiras tarefas envolvendo números fracionários, assim procuramos ”artifícios” já adquiridos pelos alunos na resolução dessas atividades.

O estudo de números fracionários é complexo e abrangente, pois escolhemos operações com números fracionários por acreditar que o ensino desse objeto sofre um desfalque em relação a seu ensino e aprendizagem em sala de aula, tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores, esperamos assim, deixar uma alternativa para um trabalho significativo em sala de aula.

Para alcançar o objetivo de nosso estudo, propomos um instrumento diagnóstico envolvendo operações com números fracionários para trabalhar com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental por meio de uma pesquisa que se enquadra num diagnóstico de natureza qualitativa, para saber quais estratégias esses alunos mobilizam ao adicionarem, subtraírem, multiplicarem e dividirem números fracionários de forma significativa por meio da equivalência desses números a partir de figuras e da reta numérica.

Leituras de pesquisas recentes que abordam como tema números fracionários serviram de aponte teórico para fundamentar nosso estudo, entre eles Rodrigues (2005), Camilo (2009), Canova (2006) e Silva (2005), utilizamos também as propriedades dos números fracionários proposta por Caraça (1997) e os cinco significados de frações apresentados por Silva (2005) em sua tese.

Estruturamos nosso estudo de acordo com alguns pressupostos da Engenharia Didática, proposta por Artigue (1996). Utilizamos as fases: análise a priori, análise a posteriori e validação, que nada mais é do que o confronto com a análise a priori e a posteriori.

Este trabalho foi dividido em três capítulos, onde no primeiro apresentamos nossa Problematização ancorada em nossa Justificativa, a Delimitação de nosso problema e os

[1] Trataremos por números fracionários, neste trabalho, qualquer número do conjunto dos números reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações, definição proposta por Silva (2005, p. 55).

Procedimentos Metodológicos utilizados em nossa pesquisa. No segundo capítulo apresentamos nossos Estudos Preliminares baseados em nossas Revisões Bibliográficas e Estudo do Objeto Matemático. No terceiro e último capítulo apresentamos uma entrevista com a ex-professora da turma que aplicamos está pesquisa, pois assim podemos analisar o perfil, crença e competência utilizada por ela na formação desses alunos e nosso Instrumento Diagnóstico munido das análises a priori e a posteriori, além das análises das respostas dos alunos. Nas Considerações Finais, fizemos uma síntese dos resultados e deixamos sugestões e perspectivas em relação à continuidade deste trabalho.

1. PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos a justificativa dessa pesquisa que busca estratégias para a escolha do tema proposto. Apresentamos também a delimitação de nosso problema, além dos procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

1.1. JUSTIFICATIVA

Analisando resultados de dissertações e com nossa prática em sala de aula, percebemos que o ensino dos números fracionários costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina tanto por parte de quem aprende. De um lado a constatação de que se trata de um conteúdo importante para melhor compreender o mundo, de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita freqüência em relação a sua aprendizagem.

Os resultados obtidos nas avaliações oficiais como, Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp, 1998) e o Sistema Nacional de Avaliação de Educação Básica (Saeb, 2001), apresentam baixos rendimentos dos alunos na resolução de problemas envolvendo números fracionários.

Acreditamos como Pavanello (1994, apud Silva, 1997, p. 2), que os alunos não atuam nas aulas de matemática, pois não trabalham com questões que admitam diferentes respostas, nem levantam contradições para serem analisadas e discutidas e, que os desafiem a obter diferentes soluções para um mesmo problema.

Isso acontece quando esses alunos são mal orientados e os resultados dessa orientação resultam em erros que serão repetidos sucessivamente nas séries sequentes. Portanto, quando o mesmo chegar ao sexto ano do ensino fundamental reproduzirá os mesmos erros dos anos anteriores, e assim até chegar à Universidade, conclui Rodrigues (2005) em sua pesquisa sobre números fracionários com alunos nos três níveis de ensino.

Aflito com esses resultados obtidos nas pesquisas em Educação Matemática e na procura de uma forma que facilita essa aprendizagem dos números fracionários, tema esse importante para o desenvolvimento do educando dentro e fora da escola, participamos de um curso de especialização em Educação Matemática na PUC/SP em 2008.

Curso esse que aborda vários conteúdos na área da Matemática, tais como: Geometria, Álgebra, Jogos Matemáticos, Tecnologia em Matemática, Estatística e Probabilidade, Fundamentos da Didática da Matemática, Teoria de Aprendizagem e Aplicação ao Ensino da Matemática, Iniciação à Pesquisa em Educação Matemática, História da Matemática, Números e Medidas entre outros, esses conteúdos nos respondeu nossas expectativas em relação ao ensino e aprendizagem sobre números racionais.

Elaboramos um instrumento diagnóstico para que os alunos possam: adicionar, subtrair, multiplicar e dividir de forma significativa números racionais, por meio de equivalência de frações e de reta numérica, pela concepção parte-todo. Esperamos que essas atividades fossem facilitadoras para que o aluno compreenda de forma significativa as operações com números fracionários.

1.2. DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), a abordagem dos números naturais, já conhecidos pelos alunos, é insuficiente para resolver determinados problemas. O ensino de números fracionários tem início no segundo ciclo do ensino fundamental, a cada ano, teoricamente, aprofundado para complementar o conjunto dos números naturais assim sucessivamente até chegar ao conjunto dos números complexos.

Segundo Behr (1983, apud SILVA 1997, p. 3) o conceito de número racional é uma das mais complexas e importantes ideias da matemática que as crianças encontram a partir das perspectivas prática, psicológica e matemática.

Tendo em vista que o estudo dos números fracionários constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas, propomos a seguinte questão de pesquisa:

Quais estratégias que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental mobilizam na resolução de atividades envolvendo operações com números fracionários por meio da concepção parte-todo?

Com o intuito de respondermos a questão direcionamos esse estudo, com um estudo diagnóstico, que busca por meio de um instrumento composto de 26 atividades, quais as estratégias utilizadas pelos alunos ao se depararem com problemas envolvendo as quatro operações com números fracionários.

Os resultados presentes em pesquisas, dissertações e teses, comprovam que o ensino de frações quando trabalhado não explora as diferentes concepções de frações. Neste trabalho citamos Rodrigues (2005), Camilo (2009), Silva (2005) e Canova (2006) sobre o baixo rendimento no ensino e aprendizagem sobre números racionais. Por um lado os alunos que não compreendem de forma significativa as frações e do outro, professores que mesmo após a formação não estão preparados para elaborarem atividades para o ensino de números fracionários, que coloquem os alunos em situações de ação, para a construção do próprio conhecimento, conclui Silva (2005) em sua dissertação.

1.3. PROCEDIMETOS METODOLÓGICOS

O desenvolvimento dessa pesquisa teve como elemento norteador diagnosticar quais as estratégias utilizadas por esses alunos ao se depararem com situação-problema envolvendo as operações com números fracionários, optamos por um estudo que enquadra num diagnóstico de natureza qualitativa.

Segundo Bodgan e Biklen (1986), na pesquisa qualitativa, “supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada (...) sem qualquer manipulação intencional do pesquisador” (p.11).

Cujo suas cinco características principais são:

- A fonte direta de dados do ambiente natural referente a pesquisa;
- Os dados recolhidos são descritivos;
- O interesse do investigador centra-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
- A análise dos dados tende a ser feita de uma forma indutiva;
- O investigador interessa-se fundamentalmente por compreender o significado que os participantes atribuem ás suas experiências,

Ainda em Bodgan e Biklen (1986) vimos que, na pesquisa qualitativa em educação, o pesquisador utiliza meios pelos quais possam criar dados descritivos, derivado de registros e anotações pessoais de comportamento observados. Deste modo o pesquisador terá material suficiente para análise.

Por acreditar que na sala de aula é onde se consegue a maior densidade de respostas por parte dos alunos, decidimos aplicar atividades que envolvessem operações com números fracionários. Buscamos ainda propor atividades que fossem acessíveis aos alunos, visando uma melhor compreensão do que está sendo proposto, visto que nossa preocupação não é apenas com o produto final em termos de acertos e erros das respostas dos alunos, mas com o interesse de diagnosticar como o aluno condiz às tarefas e qual o significado que eles atribuem a cerca das frações, o uso devido da equivalência de frações e da compreensão na qual utilizam.

Além de analisar as estratégias utilizadas pelos nossos alunos e fazermos um paralelo com outras análises atrelando experiências de outros pesquisadores que abordam este tema, também utilizaremos algumas fases da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa qualitativa descrita por Michele Artigue (1988) como:

> [...] um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, a observação e a analise de seqüências de ensino. (Perez 2006, p. 36; apud Artigue 1988, p. 38).

Segundo Almouloud (2007) a Engenharia Didática, tem suas bases caracterizadas na construção, realização, observação e análises que envolvem o educando com o saber. Acrescenta ainda:

> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daqueles que são transversais aos conteúdos, mesmo que o suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer) (ALMOULOUD, 2007, p. 171).

Utilizaremos as fases: a análise a priori, a análise a posteriore e a validação, que nada mais é do que a confrontação da análise a priori com a posteriori.

Interessa-nos saber que embora tenhamos utilizados algumas fases da Engenharia Didática, não optamos por ensinar um conteúdo especifico, mas sim diagnosticar as estratégias e artifícios usados pelos alunos, tudo isso por meio de coleta de dados e observações.

A partir do que foi exposto, em nossos Estudos Preliminares faremos um breve estudo de publicações recentes a respeito de números racionais em nossa fundamentação teórica.

2. ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresento as revisões bibliográficas dos trabalhos que, de alguma forma, servirão de contribuição teórica para está pesquisa que tem como tema operações com números fracionários.

2.1. LEITURAS E ESCOLHAS

Nos últimos anos diversos pesquisadores se preocupam em entender o porquê os alunos apresentam grandes dificuldades na resolução de situação problema que envolva números racionais.

Rodrigues (2005) em sua dissertação que tem por objetivo identificar aspectos do conceito de frações, referentes aos significados parte-todo e quociente, que permanecem não apropriados por alunos e, fase de escolarização porvindoura ao ensino formal desses números.

Para isso, o autor buscou resposta para as seguintes questões de pesquisa: *"Que aspectos do conceito de fração nos significados parte-todo e quociente permanecem sem ser apropriados por alunos de 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, 3ª série do Ensino Médio e Ensino Superior na área de exatas?",* e *"Que ligações existem entre essas dificuldades e as deficiências, já apontadas por outras pesquisas, da prática pedagógica?".* Embora a pesquisa não tenha como tema as quatro operações com números fracionários, nos ajudará ter uma visão dos resultados negativos obtidos por alunos dos três níveis de ensino.

Rodrigues (2005) fundamenta sua pesquisa em três conceitos, primeira: a gênese do número racional, focando-se as ideias de Caraça (1952). Segunda: os princípios da psicologia cognitiva segundo Vygostsky a respeito da construção do conceito e Vergnaud que segundo Camilo (2009): Entende como o conceito algo que se constrói ao longo do tempo, e se enriquece à medida que o sujeito, exposto as novas situações, manipula seu repertório de situações em um processo contínuo que se prolonga no tempo (CAMILO 2009, p. 11).

Terceira: as ideias de alguns educadores matemáticos, que propõem modelos específicos para o estudo dos números racionais, com destaque para Keirem (1981), Berh (1983), Nunes (1997), Mack (1990) e Escolano e Gairín (2005).

Para o desenvolvimento de tal pesquisa o autor elaborou um instrumento composto de 48 questões envolvendo o conceito de frações nos significados parte-todo e quociente, em três níveis de dificuldades, aplicado a 13 alunos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, 31 alunos da 3ª série do Ensino Médio e a 29 alunos do Ensino Superior na área de exatas.

Rodrigues (2005) relata que em relação ao significado parte-todo, os sujeitos, identificam corretamente a unidade a que se refere uma fração quando trabalhando com situações contextuais, porém tem dificuldades em identificar a unidade quando trabalham com situações simbólicas. Embora Silva (2005) salienta que para a criança a fração $\frac{2}{3}$ é compreendida que o inteiro foi dividido em três partes, das quais duas estão sendo consideradas. Como explicar a fração $\frac{5}{3}$? Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três partes? Acreditando que para compreensão de frações maiores que o inteiro (frações impróprias), as concepções de medida e quociente sejam boas alternativas.

Em relação ao significado quociente envolvendo quantidades discretas o pesquisador relata que a uma tendência da maioria dos sujeitos em usar no desenvolvimento das questões, o "número de elementos" do conjunto a ser repartido, mesmo quando esse "número de elementos" é desnecessário. Tendo assim uma obstinação em assumir um número natural como uma fração.

Rodrigues (2005) associou-se essas dificuldades a aspectos da prática pedagógica levados por outros pesquisadores, a fim de levantar hipóteses para suas possíveis causas.

Segundo Rodrigues (2005), esses resultados negativos obtidos em pesquisas realizadas em relação ao conjunto dos números racionais, será reduzido quando o processo de ensino e aprendizagem utilizar todas as concepções de números fracionários, inclusive, as concepções parte-todo, quociente e medida, concepções essas que acredita ser as mais apropriadas para a compreensão dos números racionais.

Outro pesquisador analisado foi Camilo (2009), que desenvolveu uma pesquisa com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de verificar se os alunos conseguem por meio de uma sequência didática aprender de forma significativa as operações de adição e subtração de números fracionários por meio da concepção parte-todo, visando à equivalência de números fracionários e de reta numérica.

Para alcançar seu objetivo o pesquisador desenvolveu seu estudo em três etapas: a primeira constitui sua justificativa com foco na complexidade dos números fracionários na vida do aluno, a revisão bibliográfica com resultados de dissertações de pesquisadores que tem por objetivo números fracionário, tais como: Rodrigues (2005), Merlini (2005) e Silva (2005), a delimitação do problema onde segue a seguinte questão de pesquisa: *Uma seqüência didática envolvendo a concepção parte-todo permite aos alunos construir de modo significativo as operações de adição e subtração de números fracionários?* Para responder esta questão o autor elaborou um instrumento envolvendo adição e subtração com números fracionários, onde aplicou a 4 alunos de um sexto ano do Ensino Fundamental.

Terminando a primeira parte da pesquisa com os procedimentos metodológicos, onde relata que se apoiará nas faces da Engenharia Didática, análise a priori e a posteriori da sequência didática, a coleta de dados e a produção dos alunos.

O autor destaca na segunda etapa de sua pesquisa o quadro teórico, que se baseia em Brousseau (1986) na Teoria das Situações Didáticas com ênfase nas dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização, que procura dar um novo sentido no trabalho para o desenvolvimento em sala de aula. Outra teoria que utilizou neste estudo foi a da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1968), onde seu principal foco é que o aluno aprenda o novo conhecimento apoiando-se em informações anteriores.

Camilo (2009) apresenta as características e situações que mobilizam as concepções dos números fracionários utilizadas por alguns pesquisadores, entre eles Silva (2005, p. 55) que define: *"números fracionários todo elemento do conjunto dos números reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações";* e que descreve cinco tipos de concepções para números fracionários: parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Em seu trabalho Camilo (2009) fundamenta sua pesquisa em uma sequência didática composta por 10 atividades proposta para quatro alunos divididos em duplas, do sexto ano de uma escola particular de Ensino Fundamental II da região Sul de São Paulo. O mesmo autor relata que nas primeiras atividades que tinha por objetivo representar números menores que a unidade, a adição e a subtração de números fracionários, conclui que teve um bom aproveitamento por parte dos alunos, destaca também a forma na qual os alunos dividem as figuras em partes iguais, que mesmo com o uso de régua graduada os educando fizeram divisões aproximadas (não exatas) e se contentam com tais divisões.

O autor relata que os alunos não encontraram dificuldades em relação à divisão das áreas dessas figuras, pois enfatiza que não houve nenhum questionamento a respeito.

Camilo (2009) no processo de institucionalização enfatiza com os alunos que dividir as figuras em partes iguais é de extrema precisão. Com relação as atividade de número 6, 7, e 8, onde os exercícios objetivam a reta numérica, conclui que os educando se deparam com vários obstáculos na hora de resolver tais atividades e tiveram dificuldade na transposição do registro figural para a reta numérica. O mesmo autor faz uma conferição com as atividades de 1 a 5 e conclui que o índice de acertos nessas atividades foi maior do que nas atividade de 6 a 8, mas acredita que isso ocorreu pelo fato do pouco uso da reta numérica em sala de aula.

Destaca também que os alunos não conseguiram observar a fração mista, que no processo de institucionalização comentou com os alunos. Em relação às teorias usadas pelo pesquisador afirma que: ... *Teoria é muito interessante na prática, que é possível perceber de forma natural nos trabalhos dos alunos*.... Camilo (2009, p. 69).

Concordando com Rodrigues (2005), Camilo (2009) conclui que é fundamental nas séries anteriores ao sexto ano do Ensino Fundamental os alunos iniciarem seu aprendizado dentro de um processo de questionamentos para que tenha desde cedo um olhar de criticidade em relação à matemática, pois, dessa forma os conhecimentos virão de forma natural.

Camilo (2009) acredita ter respondido grande parte da questão de pesquisa nas análises a posteriori de cada atividade, porém considera alguns aspectos: alunos que possuía domínio nas propriedades multiplicativas; uma boa leitura de conversão de registro figural para registro numérico e facilidade em cálculos elementares, tem uma ferramenta valiosa em mãos. Em relação à reta numérica acredita que esse tópico deve ser trabalhado em séries anteriores.

Diferente de Camilo (2009), que trabalha com alunos, temos Canova (2006) que desenvolve sua pesquisa com professores que atuam no 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, onde o objetivo é identificar e analisar as crenças, concepções e competências desses professores em relação ao conceito de fração. A autora procurou responder a seguinte questão de pesquisa: *"Qual é o entendimento que os professores dos 1º e 2º ciclos do Ensino*

Fundamental apresentam em relação ao conceito de fração?". Para responder essa questão de pesquisa a autora considerou mais duas perguntas com o objetivo de fornecer dados suficientes para responder a questão de pesquisa principal; tais como: *"Quais as crenças e concepções que esses professores têm a respeito da fração?"* e *"Quais as competências desses professores nas resoluções das questões envolvendo o conceito de fração?".*

Para responder tais questões a autora fundamenta sua pesquisa na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990, 2001) e a Classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003), a qual apresenta cinco diferentes significados para esse conceito. Ainda utiliza as teorias de Ponte (1992, 1995) e Nóvoa (2001) dando fundamento na sua pesquisa.

Canova (2006) elabora um instrumento investigativo composto por 29 questões subdivididas em quatro partes. Primeira: perfil, a autora acredita ser de suma importância, pois alguns fatores, tais como: formação, tempo de experiência, série que leciona ou lecionou influência nas crenças, competências que esses professores têm no que diz respeito números fracionários. Segunda: crenças, e terceira: concepções; que segundo Ponte (1994, apud, Canova 2006, p. 148) o sentido que damos ao conhecimento é necessariamente formado pelas crenças e concepções de cada individuo, sendo a crença uma verdade pessoal, na qual cada pessoa tem seu ponto de vista. Quarta: competências que segundo Vergnaud (1987, apud, Canova, 2006, p. 155), podem ser traçadas pelas expressões verbais ou simbólicas do aluno e segundo Rico et al. (2002) são estas estreitamente ligadas com a prática.

Este instrumento foi aplicado a 51 professores, sendo que 26 destes, lecionavam no 1º ciclo e 25 no 2º ciclo do Ensino Fundamental, distribuídos em três escolas da Rede Municipal da cidade de Osasco na grande São Paulo. No segundo momento, a autora realiza entrevista clínica em 10% da amostra, a análise dos dados também foi dividida nas mesmas quatro partes que compôs o instrumento. Utilizou a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003) e considerou as variáveis de quantidade (contínua e discreta) e representação (icônica ou não) além dos invariantes do conceito (ordem e equivalência).

Segundo Canova (2006) o resultado obtido mostrou que as crenças dos professores não são influenciadas pela sua prática docente, o que não é verdade para as concepções, que eram mais restritas entre os professores do 1º ciclo do que para os professores do 2º ciclo, que exploram mais variáveis bem próximas das encontradas nos livro didáticos. Quanto à competência a pesquisadora constatou que não houve um desempenho adequado entre os cinco significados da fração e os invariantes proposto por Nunes (2003).

Segundo Canova (2006) com tais resultados conclui que há necessidade de se expandir o campo conceitual desses professores com relação ao objeto fração.

Outra pesquisadora que desenvolveu sua tese com um grupo de professores de matemática, sobre números fracionários para alunos de quinta série, foi Silva (2005) que investigou se esses professores constroem uma organização didática para o ensino de números fracionários durante sua formação e se é possível levar esses professores de matemática a reflexão que permita mudanças nas concepções que tem de seus alunos e se em sua formação continuada é possível promover ações que permitem aos professores algumas mudanças em sua prática.

Para isso, a autora buscou resposta para as seguintes questões de pesquisa: *"Que Organização Didática os professores constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação?", "É possível encaminhar professores de matemática a reflexão que possibilitam mudanças nas concepções que têm de seus alunos proporcionando-lhes um novo lugar na instituição escolar?"* e *"É possível em uma formação continuada promover ações que permitem aos professores alguma mudança em sua prática d.e ensino de números fracionários?".*

Na busca por resposta a pesquisadora elaborou um instrumento composto por 29 sessões divididas em 6 etapas. Este instrumento foi aplicado a 8 professores e 1 aluna que participava das sessões. O objetivo da pesquisadora é averiguar se as estratégias para uma formação continuada fundamentada em resultados de pesquisas a respeito da aprendizagem de números fracionários permitiriam efetivamente uma nova visão dos professores para sua prática, provocado por mudanças em suas concepções, tanto sobre o objeto matemático em questão quanto à aprendizagem dos alunos.

Silva (2005) utiliza em sua fundamentação teórica os resultados de Behr (1983) que tratam a conceituação de números racionais nas interpretações parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Para entender essas interpretações como concepções a pesquisadora optou por Artigue (1990), outro referencial teórico foi a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) que acredita encontra elementos necessários para modelar como organização matemática e organização didática, tipos de tarefas que associam as concepções de números fracionários; parte-todo, medida, quociente, razão e operador, além das mobilizações usadas por estes professores.

Em suas análises Silva (2005) generaliza que os professores constroem para a quinta série (6° ano) organizações matemáticas para números fracionárias, muito severas com tipos de tarefas que associam a concepção parte-todo em contextos de superfícies, mobilizando a técnica da dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão mobilizando a mesma técnica.

A pesquisadora salienta que foi constada uma mudança nos sentimentos e emoções dos professores em relação aos números fracionários que propiciaram modificações em suas concepções desse conteúdo, a alguns indicativos de mudanças em suas práticas de ensino.

Segundo Silva (2005) conclui que os professores tiveram uma modificação em relação à aprendizagem dos seus alunos e da maneira de observá-los em ação, rompidas pela aplicação de uma organização didática elaborada na formação em uma sala de quinta série. A formação apontou a necessidade dos professores desenvolverem autonomia e reflexão a respeito do conteúdo e de suas práticas docentes.

Com base no exposto em nossos estudos preliminares, apresentaremos um estudo do objeto matemático que tem por objetivo principal mostrar algumas concepções sobre os números fracionários.

2.2 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

A necessidade de novos números remonta vários séculos, percebida desde muito cedo na História da Matemática, surgida por meio de problemas práticos do cotidiano. Tendo em vista o raciocínio que foi exposto, com o surgimento do conjunto dos números, isso não fora de maneira diferente em relação aos racionais.

Assim tomaremos as idéias apresentadas por CARAÇA (1984) e SILVA (2005) em nossa discussão em relação à construção dos números racionais, quando o primeiro salienta que nem sempre é possível comparar dois segmentos de tamanhos diferentes com um número inteiro a quantidade de vezes que um dado segmento cabe no outro.

Com base no exposto, surge a construção de um novo campo numérico que, segundo Caraça (1984) é construído levando em conta três aspectos:

(a) O principio de extensão leva-nos a criar novos números por meio dos quais se possam exprimir a medida dos segmentos;

(b) A análise da questão mostra que a dificuldade reside na impossibilidade da divisão exata em números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor.

(c) o principio da economia: com os novos números são abrangidas todas as hipóteses de medição; estes novos números sempre reduzem aos inteiros quando o dividendo for múltiplo do divisor**.**

Com base no contexto Caraça (1984) define esse novo conjunto da seguinte maneira: dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em que cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u : $\overline{AB}$ contém *m* vezes e $\overline{CD}$ contém *n* vezes o segmento u. Diz-se, por definição, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$, e escreve-se:

1) $\overline{AB} = \frac{m}{n}.\overline{CD}$ quaisquer que seja os números inteiros *m* e *n* (n não nulo); se m for divisível por *n*, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se *m* não for divisível por *n,* o número $\frac{m}{n}$ diz-se *fracionário.* O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, racional – ao número *m* chama-se *numerador* e ao número *n denominador.* Em particular, da igualdade $\overline{AB} = \frac{m}{n}.\overline{CD}$ resulta que,

2) $\frac{n}{1} = n$ visto que, se $\overline{AB} = n.\overline{CD}$, é também $\overline{AB} = \frac{n}{1}.\overline{CD}$, e que,

3) $\frac{n}{n} = 1$ porque as igualdades $\overline{AB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = \frac{n}{n}..\overline{AB}$ são equivalentes.

Segundo Caraça (1984) para a definição dos números fracionários ficar completa, torna-se necessário fazer um estudo das propriedades (igualdade, desigualdade e operações) só depois disso ficará completo a construção do campo racional.

1) Igualdade

Dado dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ dizem-se iguais quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial.

Como conseqüência, o número $s = \frac{p}{q}$ pode não ter o mesmo numerador e denominador que $r = \frac{m}{n}$, visto que cada uma das *n* partes iguais em que a unidade é dividida pode, por sua vez, ser subdividida em *k* partes, sendo *k* qualquer. Conclui-se daqui que – dado um número racional $r = \frac{m}{n}$, todo número racional $s = \frac{p}{q}$ onde $p = m.k$, $q = n.k$ (k inteiro qualquer não nulo), é igual a r.

Façamos os produtos $m.q$ e $p.n$; tem-se $m.q = mnk$ e $p.n = mnk$, onde mq = pn; a definição de igualdade pode ser representada da seguinte maneira: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \leftrightarrow m.q = p.n$

Nesse sentido, podemos escrever a igualdade apresentada anteriormente como: $m.q = p.n$ leva $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, e reciprocamente, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ leva $m.q = p.n$. Vale ressaltar o seguinte enunciado: não se altera um número racional quando se multiplica ou dividimos o seu numerador e seu denominador pelo mesmo número natural.

Tendo em vista o exposto, a propriedade de redução ao mesmo denominador, que permite efetuar sempre a redução de dois números racionais ao mesmo denominador. Dados $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, podemos escrever $r = \frac{m.q}{n.q}$ e $s = \frac{p.n}{q.n}$.

2) Desigualdade

Em relação à desigualdade de dois números racionais r e s, por definição, diz-se maior aquele que, com o mesmo segmento de unidade, mede um segmento maior.

Como conseqüência, se os dois números têm o mesmo denominador, é maior (menor) o que tiver maior (menor) numerador;

(a) se dois números têm o mesmo numerador, será maior (menor) o que tiver menor (maior) denominador;

(b) se dois números não têm o mesmo numerador, nem o mesmo denominador, reduzem-se ao mesmo denominador e comparam-se em seguida: dados $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$, tem-se $r = \frac{m.q}{n.q}$, $s = \frac{n.p}{n.q}$, onde $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \leftrightarrow m.q > n.p$, ou seja, dizemos que um número racional r é menor do que outro número racional s quando a diferença entre r – s for positiva. Quando esta diferença r – s for negativa, então dizemos que o número r é maior do que s.

3) Adição

Dados dois segmento racionais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; chama-se soma deles ao segmento $\overline{AD}$ que se obtém transportando $\overline{CD}$ para a reta sobre qual existe $\overline{AB}$, e fazendo lá coincidir a origem C de $\overline{CD}$ com a extremidade B de $\overline{AB}$.

Como conseqüência, (a) se os dois números dados têm o mesmo denominador, $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{n}$, então o segmento $\overline{AD}$ é medido pelo número $\frac{m+p}{n}$, logo $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$.

(b) se os dois números não têm o mesmo denominador, podemos reduzir-se previamente ao mesmo denominado; têm-se então, dados $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$, que $r = \frac{m.q}{n.q}$, $s = \frac{n.p}{n.q}$, onde $r + s = \frac{m.q + n.p}{n.q}$ logo $\frac{n}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m.q + n.p}{n.q}$.

(c) verifica-se que se mantêm todas as propriedades da adição com números inteiros.

4) Subtração

Dados dois números racionais $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$, chama-se diferença $r - s$ deles a um terceiro número racional d tal que $s + d = r$.

Como conseqüência, (a) satisfaz à definição o número $d = \frac{m.q - n.p}{n.p}$; efetivamente, em virtude dos exemplos mostrados acima e das propriedades já conhecidas, têm-se $d + s = \frac{m.q - n.p}{n.p} + \frac{p}{q} = \frac{m.q - n.p}{n.q} + \frac{n.p}{n.q} = \frac{m.q - n.p + n.p}{n.q} = \frac{m.q}{n.q} = r$. Pode, portanto, escrever-se $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m.q - n.p}{n.q}$.

(b) Verificam-se todas as propriedades da subtração de números inteiros.

(c) A operação, como em números naturais, tem um caso de impossibilidade – aquele em que o aditivo é menor que o subtrativo.

Caraça (1984) define multiplicação e divisão entre dois números fracionários de maneira análoga ao dos números inteiros.

5) Multiplicação

(a) Multiplicador inteiro: $\frac{p}{q}.n = \overbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + ... + \frac{p}{q}}^{n}$, onde, $\frac{p}{q}.n = \frac{n.p}{q}$.

Em suma, Caraça indica a multiplicação de um numero inteiro por um número fracionário, pode ser representada por uma soma de parcelas.

(b) Multiplicador fracionário: $n.\frac{p}{q} = \frac{p}{q}.n = \frac{p.n}{q}$, ou seja, manutenção da comutatividade do produto.

(c) Caso geral: $\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{p.\frac{r}{s}}{q} = \frac{\frac{p.r}{s}}{q}$.

Como conseqüência mantém-se todas as propriedades da operação em números inteiros.

6) Divisão

(a) Divisor inteiro: $\frac{p}{q} : n = x \leftarrow n.x = \frac{p}{q}$ (trata-se da operação inversa da multiplicação).

A igualdade de condição, $n.x = \frac{p}{q}$, satisfaz o número $x = \frac{p}{q.n}$ visto que $\frac{p}{q.n}.n = \frac{p.n}{q.n} = \frac{p}{q}$ e este número é único, pela unicidade do produto.

Tem-se, portanto: $\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q.n}$ logo para dividir um número racional por um inteiro (não nulo) multiplica-se o denominador por esse inteiro. Conclui-se, em particular, que, dados os inteiros a e b, se tem $a : b = \frac{a}{1} : b = \frac{a}{b}$, portanto tem valor, em toda a sua generalidade, a igualdade $a : b = \frac{a}{b}$ excluindo apenas b = 0, pois nesse caso a operação de divisão não tem significado. Considerando que, os sinais de divisão (:) e de fração (/) são equivalentes, podemos escrever: $\frac{\frac{p.r}{s}}{q} = \frac{p.r}{s} : q = \frac{p.r}{q.s}$ onde $\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{p.r}{q.s}$ igualdade que se traduz habitualmente dizendo que se efetua o produto de dois números racionais fazendo, termo a termo, o produto dos numeradores e denominadores.

(b) Divisor fracionário: $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = x \leftarrow x.\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$. A igualdade de condição satisfaz o número $x = \frac{p.s}{q.r}$, visto que $\frac{p.s}{q.r}.\frac{r}{s} = \frac{p.s.r}{q.r.s} = \frac{p}{q}$ e tal número é único, em virtude da unicidade do produto; tem-se, portanto $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p.s}{q.r} = \frac{p}{q}.\frac{s}{r}$.

Conseqüência, a operação da divisão é sempre possível excluindo, como sempre, o caso do divisor ser nulo. Mantêm-se todas as propriedades da divisão de números inteiros.

Limitar-nos-emos na divisão de números fracionários, proposta por Caraça, pois nosso estudo tem como foco as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números fracionários, não demos ênfase nas demais propriedades, pois entendemos como conseqüência da apresentada, os demais atributos, embora, sabemos que as demais propriedades, tais como:

potenciação de expoente inteiro, radiciação, potenciação de expoente fracionário e logaritmação com números racionais são de extrema importância no estudo dos números racionais.

Outra pesquisadora já citada nesse trabalho foi Silva (2005), a autora trata por "números fracionários todo elemento do conjunto dos números reais ou do conjunto dos polinômios que pode se representado por uma classe de frações".

Deixa como exemplo o número fracionário $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que pode ser representado por uma classe de frações: $\frac{2\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi}, ...$ e, citando como exemplo uma classe de frações para os polinômios: $\frac{2x+6}{10}, \frac{3x+9}{15}, ...$ que poderá ser associada por uma classe de números fracionários, dependendo do valor que a variável pode assumir.

O estudo dos números racionais é complexo e sua aprendizagem envolve diferentes significados/construtos em diferentes perspectivas. Dentre os autores que chamam a atenção para este fato estão Kieren (1976; 1988; 1994) e Silva (2005) que destacam que a compreensão de números racionais envolve a construção de sub-significados/sub-construtos, ou seja, pequenos conceitos que formam o conceito maior.

Segundo Kieren (1976; 1988 e 1994) apud Rodrigues (2005, p.32), que foi o primeiro a expor a idéia dos sub-construtos, existem sete interpretações para números racionais e estas estão assim definidas:

- Podem ser somados, subtraídos, comparados etc.;
- Extensão do sistema decimal de numeração (representação decimal);
- Existência de classes de equivalência de frações (representar a mesma quantidade de forma utilizando frações diferentes);
- São números escritos na forma p/q, com p e q inteiros e q $\neq$ 0;
- São operadores multiplicativos;
- São elementos de um conjunto de quociente infinito;
- São medidas ou pontos na reta numérica.

Posteriormente, Kieren propôs a existência de apenas cinco sub-construtos: parte-todo, razão, operador, quociente e medida. Assim como Kieren (1976; 1988 e 1994), Silva (2005) destaca cinco concepções para números fracionários: *parte-todo*, *medida*, *quociente*, *razão* e *operador*, dos quais abordaremos em nosso trabalho. Descreveremos as perspectivas de cada situação a seguir.

A concepção ***parte-todo:***

> Emerge da ação de dividir uma parte contínua (comprimento, área, volume,...) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objeto) em partes iguais em quantidades de objetos. Usualmente, são manipulados dois tipos ostensivos[2]: o registro da escrita simbólica $\frac{a}{b}$ associado ao registro figural em que regiões ou conjunto de figuras, representando elementos distintos, aparecem divididos em partes iguais. (SILVA, 2005, p. 106).

A autora salienta que as primeiras atividades utilizadas no ensino de números fracionários sugerem a mobilização desta concepção, e enfatiza que está presente em grande parte das discussões das outras concepções.

A concepção de ***medida*** a atividades que:

> Podem solicitar a manipulação de três objetos ostensivos: a figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário $\frac{1}{b}$ que representa uma subunidade, isto é, a unidade foi dividida em b partes para permitir medição e o número fracionário $\frac{a}{b}$ que representará o resultado medição realizada. (SILVA, 2005, p. 118).

A concepção de ***quociente*** está associada à tarefa que mobiliza ideias de distribuição de grandezas, ou seja, fração é o resultado de uma divisão, na qual o numerador define a quantidade a ser partilhada e o denominador define as partições da quantidade. A pesquisadora, Silva (2005) alerta que:

> O ostensivo $\frac{a}{b}$ que representa o resultado de uma distribuição significa que foi distribuído em b partes iguais. Diferentes dos tipos de tarefas que associem as concepções tratadas anteriormente, nestas o a pode ser menor, maior ou igual a b e podem representar objetos diferentes como, por exemplo, “crianças” e “chocolates”. (SILVA, 2005 p. 121).

A concepção ***razão*** não está associada à partição como foi vista nas concepções anteriores, mas sim uma idéia de comparação entre duas grandezas.

Silva (2005) define essa concepção da seguinte maneira:

---

[2] Bosch e Chevallard (1999) apud Silva (2005) definem como objetos ostensivos: como sendo aqueles perceptíveis aos sentidos humanos e que podem ser manipulados: sons, grafismos e gestos.

> A representação fracionária $\frac{2}{3}$, por exemplo, associada à concepção de razão, não permitiria a leitura "dois terços" e sim "dois para três". O entendimento da razão como "x para y" encaminha, naturalmente, para a equivalência de razões e para o raciocínio proporcional que, por sua vez, solicita uma representação: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (SILVA, 2005, p. 125).

Segundo Silva (2005) na concepção de operador, o número fracionário $\frac{a}{b}$ é manipulado como "algo que atua sobre uma quantidade" e que vai ser modificada ao produzir uma nova quantidade. E afirma:

> Essa ação pode ser estendida pela ação de operador fracionário que modifica um estado inicial e produz um estado final. Nessas tarefas, os fracionários $\frac{a}{b}$ que são manipulados efetivamente como números e facilitam a compreensão da operação de multiplicação entre fracionários. (SILVA, 2005, p. 135).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1988, p. 71) da ênfase no estudo de números fracionários, explora sua necessidade, sobre como avaliar, sua praticidade e enfatiza que o "reconhecimento de números racionais em diferentes contextos – cotidianos e históricos – e exploração de situação-problema em que indicam relação parte-todo, quociente, razão ou funcionam como operador".

Acrescenta ainda: (PCN, 1988, p.102) que "a interpretação da fração como relação parte-todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas".

Exposto o Estudo do Objeto Matemático, e com base nas idéias de Caraça (1984) e Silva (2005) apresentaremos nosso Instrumento Diagnóstico composto por uma série de 25 atividades usando as concepções proposta por Silva e as propriedades dos números racionais apresentadas por Caraça, referente às operações com números fracionários, apresentaremos também nossas análises a priori e a posteriori e os resultados apresentados pelos alunos.

3. INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

Neste capítulo apresentaremos nosso Instrumento Diagnóstico, os objetivos de cada atividade e as análises a priori e a posteriori das resoluções dos exercícios apresentados pelos alunos, e traremos também algumas respostas apresentadas pelos alunos.

3.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Aplicamos o questionário a 22 alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede particular de ensino, situada na litoral da grande São Paulo, onde dividimos esses alunos em onze grupos, pois acreditamos como Brousseau (1980) que em grupos (dupla) proporciona ao participante interagir, conversar e refletir sobre o assunto para resolver tais situações.

É importante destacar que esses alunos possuem um conhecimento prévio sobre operações com números fracionários envolvendo a concepção parte-todo, o que aparece freqüentemente em livros didáticos, conhecimento esses adquiridos no quinto ano do Ensino Fundamental. Isso ajudará na conversão do registro figural para o registro numérico.

Fizemos uma breve análise no material didático utilizado por esses alunos no quinto ano e observamos que esse material não aborda os cinco significados de frações proposto por Silva (2005), neste trabalho. Percebemos também que o livro não trabalha com frações impróprias pela a concepção parte-todo por meio da interpretação de medida (reta numérica), pois acreditamos como Silva (2005) que a criança conceitua a parte e o todo; a mesma entra em conflito quando a parte é maior que o todo.

Dessa forma, concordando com a autora, para situações que envolvam mais do que um inteiro, as concepções de medida e quociente se mostram boas alternativas. Conceito esses que os alunos precisarão para desenvolverem nossa pesquisa. Acreditamos ainda que os alunos pudessem ter mais facilidade na realização do instrumento proposto.

Para melhor justificar a questão de pesquisa que tem como objetivo analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do sexto ano do ensino fundamental ao se depararem com atividades envolvendo operações com frações elaboramos um entrevista com a ex-professora da turma.

Esta professora tem 46 anos, é casada tem três filhos e leciona há vinte e dois anos. Ministra aulas em dois períodos (manhã e tarde) no mesmo colégio, atua no quinto ano do Ensino Fundamental há vinte anos. Cursou magistério e atualmente está no segundo ano do curso de Pedagogia. Exposto os sujeitos da pesquisa, apresentaremos nossa descrição da aplicação do diagnóstico.

3.2 DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO

São 25 atividades propostas envolvendo a adição, subtração, multiplicação e divisão de números fracionários tendo como ponto de partida figuras e retas numéricas. Em três das vinte e cinco atividades consiste que os alunos elaborem uma regra para as operações com frações quaisquer e ainda exercícios para fundamentar nossa pesquisa.

Dividiremos essas atividades em dois momentos de aplicação com duração de 200 minutos (quatro aulas) cada.

I. Parte A: aplicaremos o instrumento diagnóstico envolvendo adição e subtração com frações.

II. Parte B: aplicaremos instrumento diagnóstico envolvendo multiplicação e divisão com frações.

Dez das vinte e cinco atividades, propostas no instrumento retiramos da monografia de Camilo (2009), as demais fazem parte de um artigo publicado na revista BOLEMA (2008) escrito por Silva (2008) e Almouloud (2008) com o tema: As Operações com Números Racionais e seus Significado a partir da Concepção Parte-Todo, que apresentam uma reflexão a respeito das operações com números fracionários por meio da concepção parte-todo.

Os números fracionários é objeto de estudo de diversos pesquisadores, entre eles Rodrigues (2005), Camilo (2009), Silva (2005) e Canova (2006) citados nesse trabalho e seu estudo é complexo, optamos por trabalhar com adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais, para deixar uma alternativa e abrir caminhos para um estudo mais significativo por parte dos alunos em relação das operações com números fracionários.

3.3ANÁLISES E RESULTADOS

Apresentaremos nossa entrevista feita com a ex-professora da turma e o instrumento diagnóstico com suas respectivas análises, elaborado para os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, cujo mesmo consta de 25 atividades, com as respectivas análises a priori, e a posteriori e os protocolos dos alunos que darão suporte as análises das atividades.

3.3.1. ENTREVISTA COM A PROFESSORA

Para melhor analisarmos as respostas apontadas pelos alunos, acreditamos ser necessária uma entrevista com a ex-professora da turma, pois assim podemos analisar o perfil, crença e competências utilizadas pela professora na formação desses estudantes ao passarem pelo quinto ano do Ensino Fundamental.

Professora Soraya

Esta professora tem 46 anos, é casada tem três filhos e leciona há vinte e dois anos. Ministra aulas em dois períodos (manhã e tarde) no mesmo colégio, atua no quinto ano do Ensino Fundamental há vinte anos. Cursou magistério e atualmente está no segundo ano do curso de Pedagogia.

Diz conhecer os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, mas acredita que sua aplicabilidade em sala de aula é outra “realidade”. Utiliza o livro didático adotado pela escola, e como profissional quando necessário, acrescenta atividades e trás para sala material manipulativo para complementar suas aulas.

Como recurso didático, utiliza: calculadora sempre que julga necessário, computador para jogos matemáticos, material manipulativo e o livro didático. Quanto a Aritmética, acredita que: *é importante para a formação do cidadão, pois sem aritmética não existe matemática.*

A professora muito simpática nos responde mais algumas perguntas, que destacamos, pois acreditamos que darão fundamento nas nossas análises.

Pesquisador: Ao iniciar o estudo de frações, quais estratégias são utilizadas?

Professora: *Explico frações como sendo parte de um inteiro, diferenciando o denominador do numerador, e sempre usando a nomenclatura devida (os nomes de cada fração).*

Pesquisador: No processo ensino-aprendizagem, aborda frações pelas concepções parte-todo, medida, quociente, razão e operador?

Professora: *Trabalho com a concepção parte-todo, medida e quociente, pois aparece no livro didático abordado pela escola, mas acredito ser desnecessário como conteúdo para o quinto ano do Ensino Fundamental.*

Pesquisador: Quanto às frações maiores que o inteiro, como é abordado?

Professora: *Com a representação de mais de duas figuras para que o aluno compreenda que a fração em questão é maior do que a unidade. Como exemplo:* $\frac{5}{4}$ *é o mesmo que a representação de um inteiro, mais* $\frac{1}{4}$ *de outra figura com a mesma forma.*

Pesquisador: A adição e subtração de frações com denominadores diferentes qual processo utilizado?

Professora: *Primeiro encontramos o mínimo múltiplo comum dos denominadores pelo processo de "fatoração" ou pela equivalência de frações, embora utilize mais o primeiro processo.*

Pesquisador: A multiplicação e divisão com frações, como é trabalhado?

Professora: *É trabalhado com a multiplicação dos numeradores e denominadores entre si.*

Já na divisão conserva a primeira fração e inverte a segunda, passando a ser o numerador o denominador e denominador o numerador.

Observamos, durante nossa entrevista que a professora se sentiu insegura em relação ao conteúdo, comenta muito sobre material manipulativo, mas não sabe realmente o que fazer com ele. Parece que o uso desses materiais resolve todos os problemas de ensino e aprendizagem.

Ela segue exatamente o ensino usual, até nos exemplos das respostas de nossa entrevista, percebemos a influência do livro didático, pois acreditamos como Freitag, Costa e Motta quando diz que: *O livro didático não é visto como um instrumento auxiliar na sala de aula, mas sim como a autoridade, a última instância, o critério absoluto de verdade, o padrão de excelência a ser adotado na aula*. (FREITAG, COSTA e MOTTA, 1997, p. 124).

Por isso apresenta também falhas, em alguns possui a linguagem, mas apresenta erros[3] conceituais, pois cabe ao professor organizar e separar os conteúdos para seus alunos, sempre que possível buscar em outros livros didáticos.

Por outro lado aparecem as concepções que a professora tem de sua prática, solicitando a atenção do aluno, o qual sempre erra por falta de atenção ou interesse. Comentamos com a professora sobre os resultados obtidos em nossa pesquisa, para uma futura reflexão de sua prática em sala de aula, a mesma em momento algum assumiu que os erros apresentados pelos alunos, como falha do seu ensino e não apresentou interesse em entender como o aluno está pensando para chegar à resposta apresentada. Com isso concluímos que o papel da professora é de ensinar e o dos alunos aprenderem da forma que lhes foi ensinado, sem questionar ou discutir. Com base no exposto apresentaremos nossas análises das atividades.

[3] Entendemos por erro não somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso (...), mas o efeito de um conhecimento anterior que, por um tempo, era interessante e conduzia ao sucesso, mas agora se mostra falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, mas se constituem em obstáculos. Tanto na ação do mestre como na do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido (BROUSSEAU, 1983, p. 171 apud ALMOULOUD, 2007, p. 132).

3.3.2. ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Atividade 1

a) Que parte do inteiro está pintada em cada figura?

Figura 1

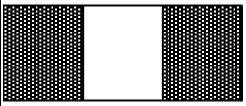


Figura 2

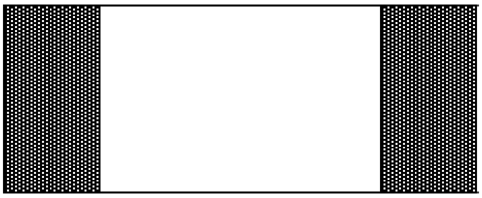
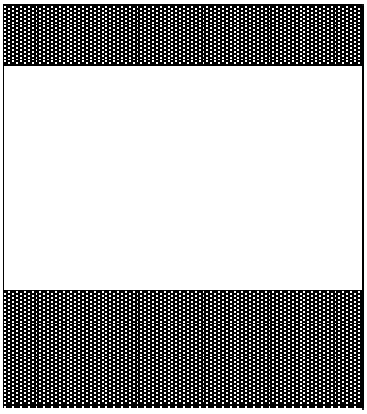


Figura 3



b) Represente a parte pintada de cada figura como soma de frações que representa cada parte pintada.

Nesta atividade, apresentaremos aos alunos figuras envolvendo a concepção parte-todo com números fracionários menores que um inteiro. Nosso objetivo no item 1 (a) é explorar dos alunos, que passem do registro figural para o registro numérico observando as figuras dadas e que também façam uso da régua para descobrirem que a quantidade de partes congruentes em que foram divididas as figuras 2 e 3.

Análise a Priori

A primeira figura da atividade 1 (a) retrata a concepção parte-todo na sua forma mais simples em que o todo está dividido em três partes congruentes com duas partes consideradas (pintadas) e o registro numérico a partir da observação da figura acontece com facilidade, pois os alunos já estão habituados com essa linguagem que acontece desde o terceiro ano do

Ensino Fundamental I. Assim esperamos que os alunos respondessem que o número fracionário solicitado na questão corresponde a $\frac{2}{3}$.

Na figura 2 apresenta uma dificuldade para o mesmo, pois a desenho não apresenta em quantas partes o todo foi dividido, mas com o auxilio da régua graduada a criança poderá perceber que a figura foi dividida em cinco partes congruente (mesma área) e responder corretamente a questão. Exercícios como estes não aparecem com freqüência em livros didáticos o que pode ser um obstáculo para o aluno. Nesta figura esperamos que os alunos percebessem com o uso da régua graduada que o número fracionário solicitado na questão corresponde a $\frac{2}{5}$.

Na figura 3 exigirá do aluno os mesmos conhecimentos da atividade anterior, eles precisaram observar que a maior parte considera corresponde ao dobro da parte menor considerada e que esta figura está dividida em partes congruentes (mesma área) e com o auxilio da régua graduada se convencerá disso. Nesta atividade é importante que os alunos tenham uma idéia de área de quadrados e retângulos e esperamos que o mesmo respondesse que o número fracionário solicitado na questão corresponde a $\frac{3}{7}$.

Análise a posteriori

Nesta atividade 20 dos alunos acertaram as três figuras, não apresentaram dificuldades na representação do registro figural para o registro numérico. Com o auxilio da régua graduada os alunos perceberam a fração que representava cada parte pintada da figura.

Na *figura 1* os alunos perceberam que foi dividida em três partes iguais e duas foi considera, como esse tipo de atividade é comum em livros didáticos os alunos responderam com facilidade.

Confirmando o que Camilo (2009) constatou, apesar de não se preocuparem com a divisão da figura em partes iguais, na *figura 2* com o auxilio da régua graduada, os alunos aos poucos perceberam que a mesma foi dividida em cinco partes e apenas duas foi considerada.

Uma dupla apresentou um erro na resolução dessa atividade, pois confunde o numerador com o denominador, segundo Silva (2005) isso acontece porque os alunos não entendem que uma fração é um número, e sim dois números separados por um travessão.

Uma vez respondida por alguns alunos à *figura 2*, não apresentará dificuldade em resolver a *figura 3*, com o auxilio da régua graduada e fazendo uso da dupla contagem das partes, como Silva (2005) destaca, facilitará na resolução desse item.

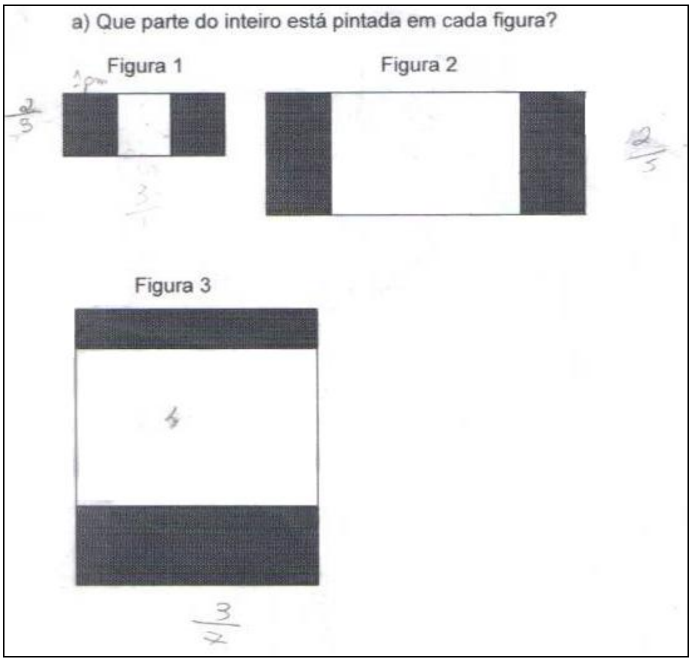


Figura 1 – Resolução da atividade 1(a).

Podemos observar na figura 1 que a dupla apresentou uma resposta correta para essa situação, percebemos também que mesmo com o auxilio da régua essa dupla não se preocupou em dividir o inteiro em partes congruentes.

Análise a priori

Nosso objetivo na atividade 1 (b) é fazer com que o aluno perceba a adição de números fracionários com denominadores iguais.

Análise a posteriori

Em relação ao item 1 (b), 16 dos alunos colocaram no papel as ideias utilizadas no item anterior, as de registrar numericamente a parte demarcada de cada figura e ainda mostra por meio da adição de frações um resultado numérico satisfazendo o enunciado da atividade.

É importante destacarmos que entre as respostas apresentadas pelos alunos nesta situação apenas 5 não responderam corretamente a questão. Apresentaremos uma resposta correta dada pelos 16 dos alunos participantes da pesquisa.

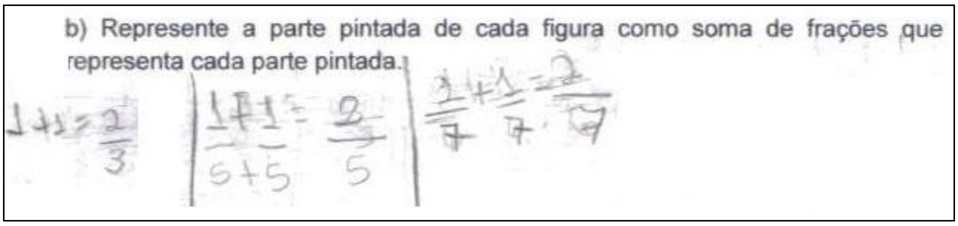


Figura 2 - Resolução da atividade 1 (b).

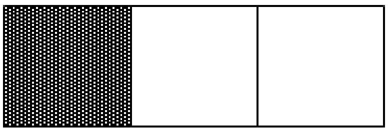
Percebemos durante a resolução desta situação os alunos apresentaram dificuldade em interpretar e representar por uma adição com frações essa situação.

Os alunos demoraram aproximadamente 20 minutos na resolução dessa atividade, e apresentaram alguns erros na realização da atividade. Segue a tabela com os números de alunos que alcançaram o que havíamos previsto em nossas análises a priori e seus respectivos erros.

Atividade 2

Atividade 2

a) Que fração representa a parte pintada da figura?



b) Apague $\frac{1}{4}$ da parte pintada do retângulo. Faça um novo desenho mostrando sua conclusão.

c) Observando a figura anterior que parte do retângulo permaneceu pintada?

d) Escreva uma sentença matemática que represente o que você fez por meio de uma subtração de frações.

Assim como na atividade 1, a atividade 2 aborda números fracionários menores do que a unidade, mas com finalidades diferentes em sua figura, como exemplo os enunciados dos problemas, provocando uma mudança na forma dos alunos procurarem soluções para essa atividade.

A atividade propõe a construção de uma figura e com o auxilio da régua os alunos possam interagir, conversar e debate sobre a nova figura, e assim discutir sobre novos conhecimentos.

Análise a Priori

No item 2 (a) consiste em que os alunos percebam que o inteiro foi dividido em três partes congruentes e uma parte foi demarcada. Assim esperamos que os alunos respondessem que a parte considerada corresponde a $\frac{1}{3}$ do retângulo.

Análise a Posteriori

Nessa atividade os alunos demoraram aproximadamente 20 minutos, e apresentaram alguns erros em suas resoluções.

Ancorado nos exemplos da atividade anterior os alunos utilizaram tais conhecimentos para responder a atividade dois, 18 dos 21 alunos acertaram o item a, e 4 alunos traçaram o numerador pelo denominador e vise-versa.

Figura 3 - Resolução da atividade 2 (a).

Percebemos na figura 3 que esses alunos confundem o numerador com o denominador, Silva (2005) salienta que isso ocorre pelo fato do aluno não ter associado que uma fração representa um número, e não dois um número natural.

Análise a Priori

No item 2 (b) esperamos que o aluno construa uma nova figura, e demarquem $\frac{1}{3}$ dessa figura, dividam $\frac{1}{3}$ em quatro partes congruentes e apaguem $\frac{1}{4}$ da parte demarcada

Análise a Posteriori

Apresentaremos uma solução proporcionada por uma das duplas.

b) Apague $\frac{1}{4}$ da parte pintada do retângulo. Faça um novo desenho mostrando sua conclusão.

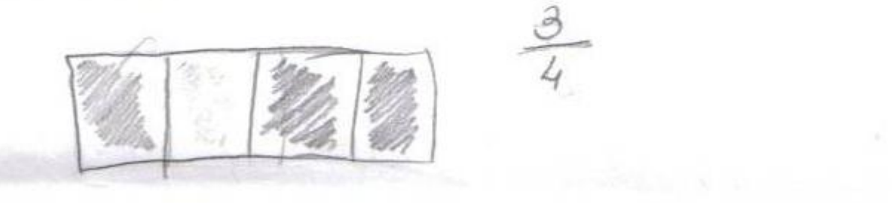


Figura 4 - Resolução da atividade 2 (b).

Esta dupla não relacionou o item b ao item a, pois construiu outra figura para representar suas respostas. Nessa atividade 8 dos alunos atingiram o objetivo da situação, acreditamos assim que a finalidade dessa questão não foi atingida. Os alunos não associaram a palavra “apague” com a operação de subtração, ainda na construção de outra figura, assim como solicita a situação, não utilizaram a régua graduada como um recurso.

Análise a Priori

No item 2 (c) consiste que os alunos percebam que a nova figura esta dividida em 12 partes congruentes. Esperamos que o mesmo observasse que a nova figura tem 12 partes congruentes onde 3 estão sendo consideradas, obtendo como resposta $\frac{3}{12}$ e que simplifique esse número obtendo assim $\frac{1}{4}$.

Análise a Posteriori

É importante notar, que os alunos que não responderam satisfatoriamente o item (b), não responderão ao item (c), assim apenas 8 dos alunos responderam corretamente a situação proposta.

Apresentaremos uma solução proporcionada por uma das duplas.

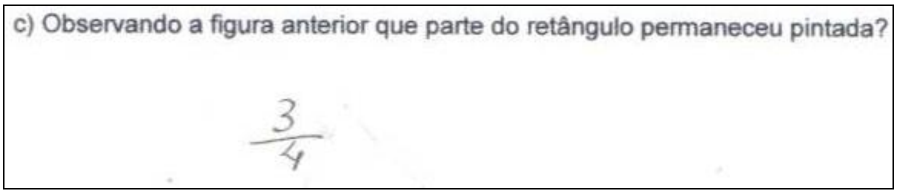


Figura 5 - Resolução da atividade 2 (c) .

Uma vez construída à nova figura no item b, a resposta foi imediatamente ancorada nesta situação para responder ao item c, como mostra a figura 5.

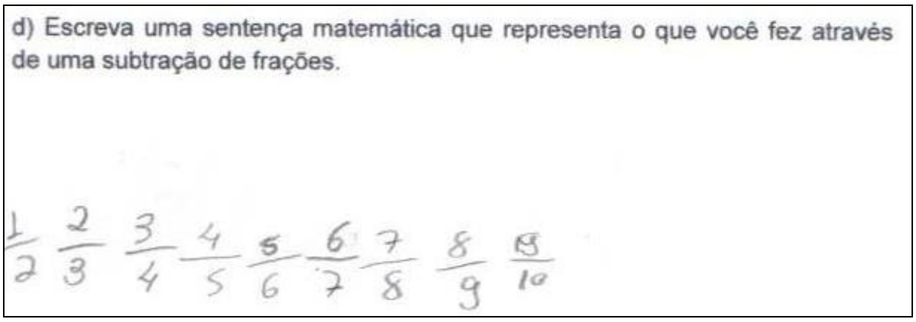
Análise a Priori

No item (d) esperamos que o aluno representasse a sentença matemática como $\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}$ ou ainda $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$ percebendo que esta situação é a mesma que resolver $\frac{4}{12}-\frac{1}{12}$ por meio da equivalência de números fracionários.

Análise a Posteriori

Em relação a esse item, podemos notar falta de interpretação da situação proposta por parte dos alunos, pois as palavras “sentença matemática” e “subtração” apresentada nesse item foram um obstáculo para a realização desta situação.

Apresentaremos uma solução proporcionada por uma das duplas.


d) Escreva uma sentença matemática que represente o que você fez através de uma subtração de frações.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{8}{10}$

Figura 6 - Resolução da atividade 2 (d).

Como podemos observar na figura 6 uma das respostas apresentas pelos alunos, apenas 4 dos alunos responderam corretamente a esta situação.

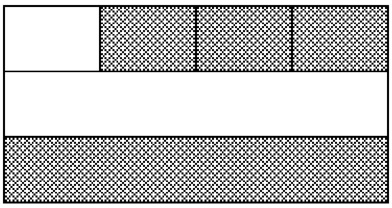
Acreditamos que os erros encontrados nessa atividade, em relação ao conteúdo frações, é uma cogitação dos maus procedimentos de professores e suas estratégias utilizadas no ensino de anos anteriores.

Confirmando o que Silva (2005) e Canova (2006) afirmam em suas pesquisas em relação aos professores, devido a baixos resultados, ao se depararem com atividade envolvendo números fracionários, conclui que há necessidade de se expandir o campo conceitual desses professores com relação ao objeto fração.

Atividade 3.

Atividade 3

a) Determine as frações que representam as duas partes pintadas do retângulo?



b) Determine por uma soma de frações a parte pintada do retângulo?

c) Qual a fração que representa a parte pintada desse retângulo?

Esta atividade pode ser desenvolvida com denominadores diferentes ou com denominadores iguais dependendo das ações mobilizadas pelos alunos.

Análise a Priori

No item 3 (a) esperamos que os alunos subdividam a figura ou percebam mentalmente que o retângulo pode ser dividido em 12 partes congruentes. Assim uma das partes pintadas pode ser representada por $\frac{3}{12}$ e a outra que corresponde a $\frac{1}{3}$ do retângulo maior, é equivalente a $\frac{4}{12}$.

Análise a Posteriori

Nessa atividade os alunos demoraram aproximadamente 10 minutos, e apresentaram alguns erros em suas resoluções.

A forma diferenciada da figura, fez com que os alunos buscassem estratégias de resolução apoiadas nas atividades anteriores e que esta situação provocou nos alunos questionamentos, perceberam que o raciocínio que utilizaram nessa atividade é o mesmo que os utilizados nas anteriores. Assim, maiorias dos alunos responderam satisfatoriamente essa situação. Três das duplas permaneceram trocando o numerador com o denominador não distinguindo a função de cada um.

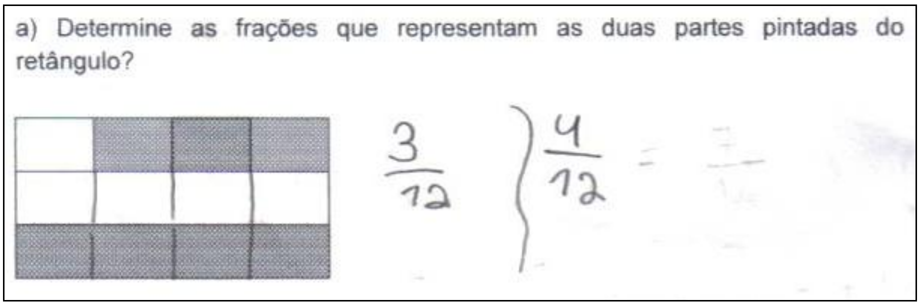


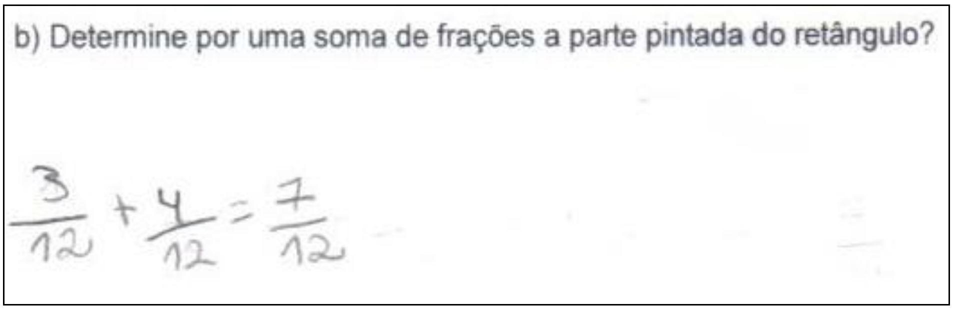
Figura 7 - Resolução da atividade 3 (a) .

Na figura 7 percebemos que esta dupla respondeu corretamente a questão.

Análise a Priori

No item 3 (b) esperamos dos alunos a partir dos resultados encontrados no item (a), além de expressar por meio da adição com frações percebam as frações equivalentes respondendo: $\frac{1}{3}+\frac{3}{12}$ e observe que a adição é o mesmo que $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}$ e representa a mesma sentença matemática.

Análise a Posteriori


b) Determine por uma soma de frações a parte pintada do retângulo?

$\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

Figura 8 - Resolução da atividade 3 (b).

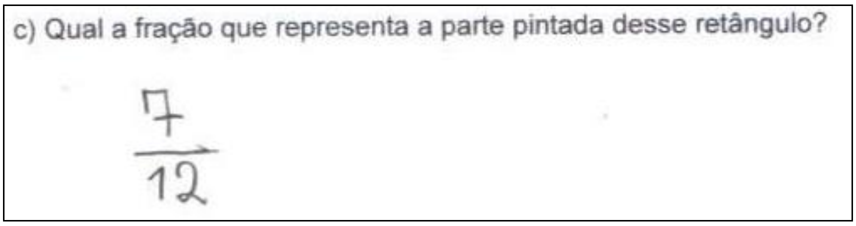
Observando a figura 8 podemos perceber que esta dupla respondeu corretamente a está situação, além de expressar a adição com dois números fracionários, concluiu com a solução para está expressão, sendo que a situação 3 (c), repetiu a resposta.

Os alunos não perceberam a equivalência de frações nesta situação, mas percebemos que a soma de frações com denominadores iguais foi parcialmente percebida por eles. Nesta atividade 16 dos alunos apresentaram resposta correta.

Análise a Priori

O objetivo no item 3 (c) é a confirmação do resultada obtido no item 3 (b). Esperamos que os alunos respondessem $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$. Com essa atividade proporciona adição de frações com denominadores iguais e denominadores diferentes uma vez que o aluno pode visualizar a figura como $\frac{1}{3} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$.

Análise a Posteriori


c) Qual a fração que representa a parte pintada desse retângulo?

$\frac{7}{12}$

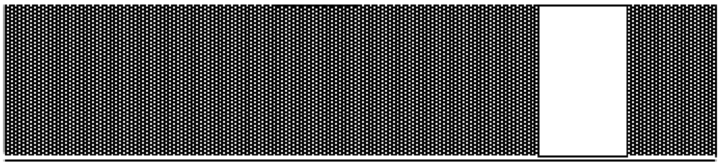
Figura 9 - Resolução da atividade 3 (c).

Observando a figura 10 e a forma como o aluno respondeu as situações 3 (b) e 3 (c), percebemos que é possível redirecionar a situação 3 (b) para excluir a situação 3 (c). Neste item 16 dos alunos responderam corretamente. Cogitamos uma possível troca desta atividade para ser colocada anteriormente as questões já respondidas pelos alunos.

Atividade 4

Atividade 4

a) Que fração representa a parte não pintada do retângulo?



b) Que fração representa a parte pintada do retângulo?

c) Monte uma sentença matemática que expressa à figura como um todo.

d) Calcule $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$.

Esta atividade pode ser desenvolvida com denominadores diferentes ou com denominadores iguais, dependendo das ações mobilizadas pelos alunos.

Esta atividade apresenta um diferente registro figural das atividades anteriores, aborda conhecimento “oposto” aos já adquiridos pelos alunos nas outras atividades, conhecimento esses não presente em livros didáticos, sendo o mais comum faz referência a parte pintada da figura.

Análise a Priori

O objetivo do item 4 (a) é levar ao aluno a subdividir a figura em oito partes congruentes, desenvolver equivalência e a adição de frações. Esperamos que os alunos fizessem uso da régua graduada para perceber que a parte pintada e a parte não pintada possuem áreas congruentes a assim associar a figura como sendo um retângulo que foi dividido em oito ou em quatro partes congruentes dependendo da mobilização dos alunos. Assim os alunos perderam perceber que a parte não pintada da figura representa $\frac{1}{8}$ do retângulo.

Em relação ao item 4 (b), esperamos que observe que a parte pintada corresponde a $\frac{7}{8}$, ou ainda, represente por uma adição de frações $\left(\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\right)$, sendo $\frac{6}{8}$ para a maior parte pintada e $\frac{1}{8}$ para menor parte pintada do retângulo.

Outra possível solução é que os alunos observem que a menor parte pintada, adicionada a parte não pintada do retângulo resulta em $\frac{1}{4}$ da figura toda, assim a parte pintada corresponde a $\frac{3}{4}$ do retângulo.

No item 4 (c) esperamos que represente os resultados obtido nos item anteriores como adição de números fracionários e corresponde a $\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$.

Em relação ao item 4 (d) acreditamos que observem que esta sentença corresponde a parte pintada na figura desta atividade, assim esperamos que responda $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ equivale a $\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Análise a Posteriori

Nesta atividade os alunos demoraram aproximadamente 15 minutos, e apresentaram alguns erros em suas resoluções.

Nesta atividade apenas 8 dos alunos responderam corretamente a está atividade e 14 dos alunos responderam incorretamente a situação conforme mostra a figura 10.

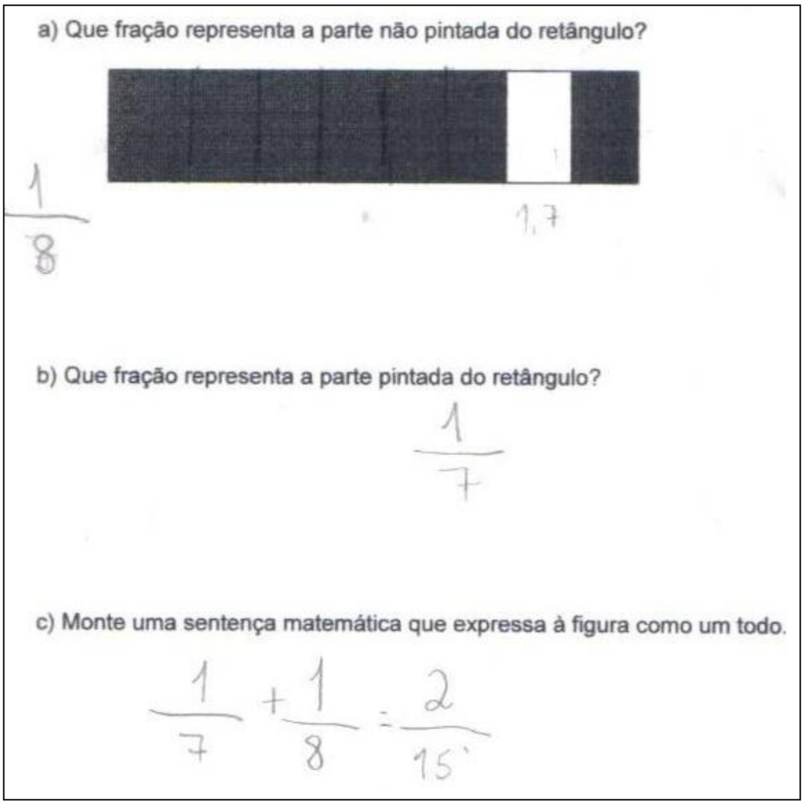


Figura 10 - Resolução da atividade 4 (a), (b) e (c).

Com as respostas apresentadas pelas duplas percebemos que os alunos não relacionaram a situação com as outras já respondidas por eles. A dupla que trocava a ordem do numerador com o denominador permaneceu no erro. Apenas 6 dos alunos representaram uma sentença matemática correta para o item 4 (c), não associaram as frações que apareciam na situação como frações que representava a figura como um todo.

O objetivo nessa atividade não foi atingido, algumas duplas na tentativa de resolução do item 4 (d), usou alguns processos mecânicos (m.m.c.) aprendido anos anteriores para resolver a está situação. Ou seja, a equivalência de frações não foi percebida pelos alunos.

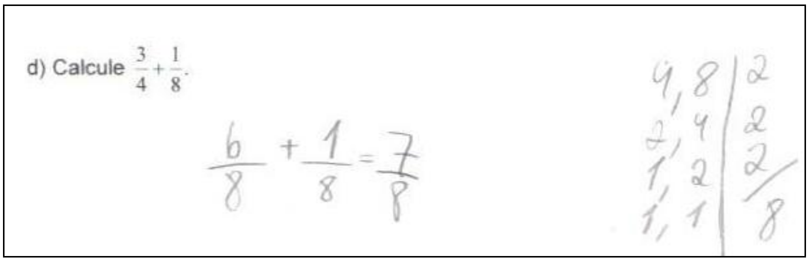


Figura 11 - Resolução da atividade 4 (d).

Nesta atividade percebemos que maiorias dos alunos adicionaram o numerador com o numerador e denominador com denominador.

Atividade 5

Atividade 5

a) Pinte a parte da figura que representa $\frac{1}{3}$ do retângulo?

b) No mesmo retângulo pinte a parte que representa $\frac{2}{5}$ do retângulo?

c) Calcule $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$.

d) Refaça essa situação para o retângulo abaixo.

Esta atividade propõe ao aluno de maneira imediata o trabalho com denominadores diferentes, mas dependendo das estratégias utilizadas por eles, poderão trabalhar com denominadores iguais fazendo uso da equivalência de frações. Assim esta atividade envolve a concepção parte-todo e permite aos alunos buscarem de maneira diferente as atividades anteriores estratégia de resolução.

Análise a Priori

No item 5 (a) proporciona ao aluno dividir a figura em partes congruentes e utilizando a régua graduada para verificação dessas áreas. A primeira figura foi desenhada propositalmente com comprimento de 15 cm para facilitar o aluno na subdivisão da mesma. Esperamos que os alunos dividissem a figura em três partes de mesma área e pinte uma das três partes, respondendo dessa forma a fração $\frac{1}{3}$ como resposta.

Análise a Posteriori

Nesta atividade os alunos demoraram aproximadamente 20 minutos para responder os itens.

Entre os alunos 8 responderam corretamente ao item, e em momento nenhum houve o preocupação em utilizar a régua graduada para facilitar a solução.

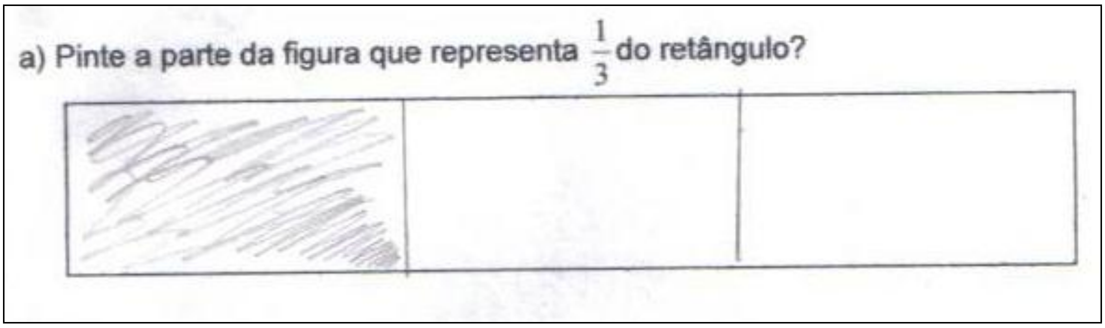


Figura 12 - Resolução da atividade 5 (a).

Acreditamos que situações como essas não são abordadas em livros didáticos, o que nos leva a pensar que estes alunos não tiveram contato com atividades envolvendo uma maior interação, na resolução da mesma.

Análise a Priori

Com relação à situação 5 (b), leva ao aluno a dividir a mesma figura em outras cinco partes e pinte duas das cinco partes e perceba a equivalência de frações observando que $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$, esta é a primeira atividade que permite ao aluno trabalhar a própria divisão da figura.

Como o aluno poderá sobrepor os números fracionários na figura, ou ainda, pintar esses números nos lados opostos da figura esperamos que ele renomeie essas partes e transforme esses números fracionários em denominadores iguais, fazendo assim uma nova divisão das partes pintadas.

Análise a Posteriori

Neste item os alunos não perceberam que a figura apresentava 15 cm de comprimento, um recurso que ajudaria o mesmo na resolução, apenas uma dupla dos alunos responderam corretamente a esta situação. Maioria dos alunos construiu outra figura, o que no item, destacou “no mesmo retângulo”, mesmo assim fizeram em outra figura.

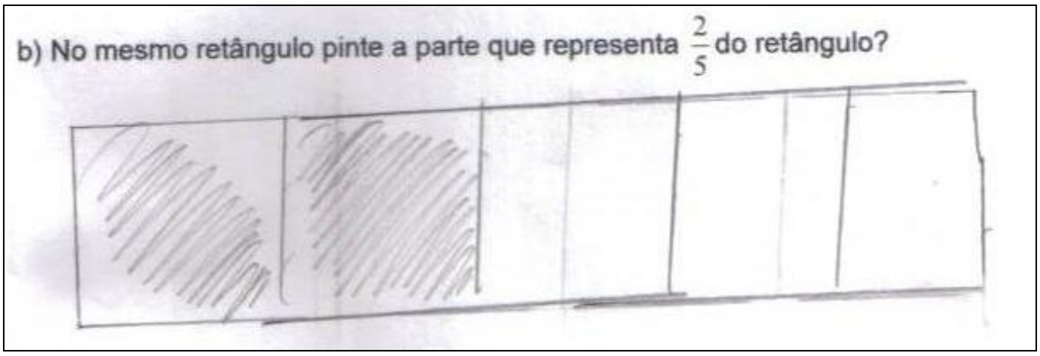


Figura 13 - Resolução da atividade 5 (b).

Análise a Priori

No item 5 (c) esperamos que os alunos com a conclusão da resolução do item (b) responda que $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ tem como resposta a fração $\frac{11}{15}$.

Análise a Posteriori

Este item proporciona aos alunos adicionarem frações com denominadores diferentes, mas na resolução dos itens 4 (a) e (b) os mesmo não perceberam a interação dos itens. Dos alunos 6, responderam corretamente a situação utilizaram o cálculo do m.m.c. e não a relação dos itens para responder de forma significativa a situação.

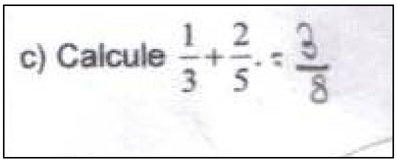


Figura 14 - Resolução da atividade 5 (c).

Análise a Priori

Nossa proposta no item 5 (d), é apresentar uma nova figura com medidas diferentes da figura anterior é dar condições para que os alunos busquem novas soluções.

Análise a Posteriori

Apenas 6 dos alunos responderam corretamente a está situação, ou seja, os mesmos que responderam o item 5 (c).

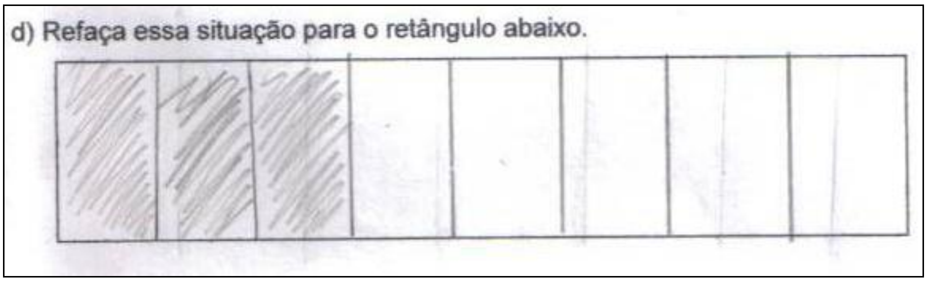
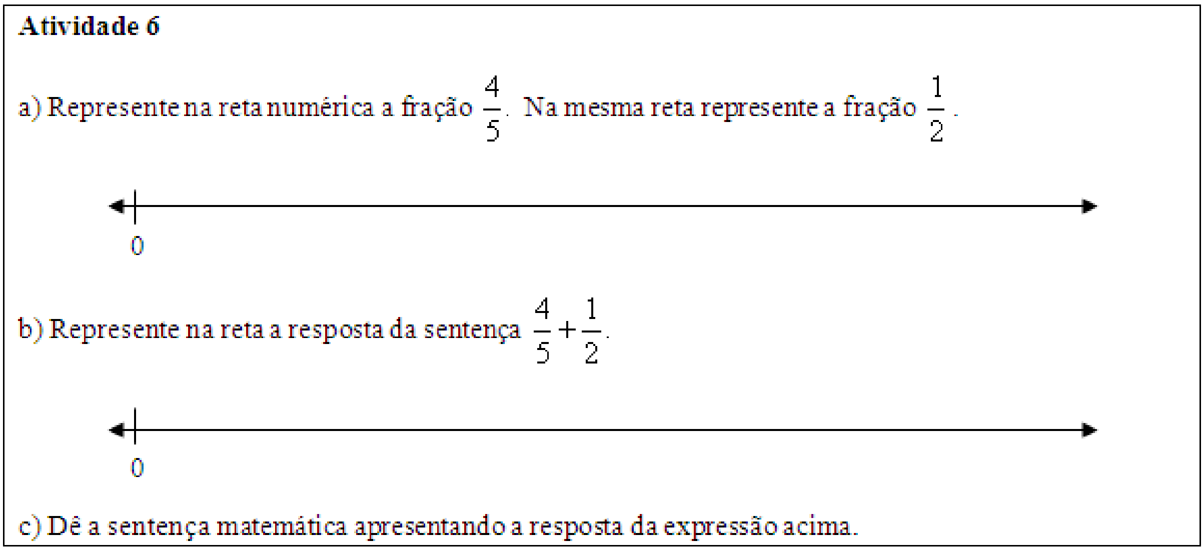


Figura 15 - Resolução da atividade 5 (d).

Atividade 6



Atividade 6

a) Represente na reta numérica a fração $\frac{4}{5}$. Na mesma reta represente a fração $\frac{1}{2}$.

0

b) Represente na reta a resposta da sentença $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$.

0

c) Dê a sentença matemática apresentando a resposta da expressão acima.

Esta atividade apresenta somas maiores que a unidade, assim aparece às frações impróprias e os números mistos que podem ser trabalhados pelos alunos, esta atividade é a primeira que aparece reta numérica por meio da concepção de medida. Está atividade propõe uma mudança significativa em relação às atividades anteriores.

É importante destacarmos que na resolução desta atividade uma dupla desistiu de participar deste trabalho, acreditamos que houve uma desmotivação ancorada na dificuldade destes alunos na hora da resolução.

Análise a Priori

O objetivo proporcionar ao aluno concluir que precisaram demarcar na reta numérica dois inteiros e subdividir-la em dez partes para fazer a representação fracionária pedida.

Assim esperamos que os alunos utilizassem a equivalência de números fracionários para transformar $\frac{4}{5}$ em $\frac{8}{10}$ e $\frac{1}{2}$ em $\frac{5}{10}$.

Análise a Posteriori

Esta atividade é a primeira que permite ao aluno trabalhar números fracionários na reta numérica, pois acreditamos que para haver resolução nesta atividade é preciso os alunos possuir conhecimentos sobre esse conteúdo. Apenas 2 dos alunos responderam corretamente esta situação.

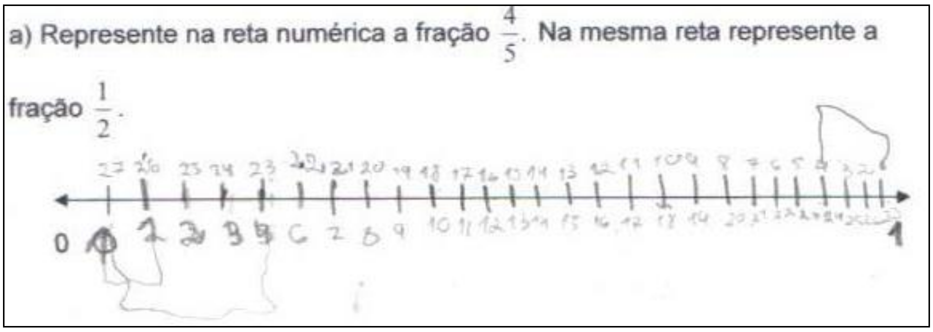


Figura 16 - Resolução da atividade 6 (a).

Análise a Priori

Neste item objetivamos ao aluno adicionar dois números fracionários e representá-los na reta, observando que nesta atividade a reta já esta traçada para os alunos. Assim esperamos que eles pudessem fazer usa das frações equivalentes e perceber que $\frac{4}{5}$ é igual a $\frac{8}{10}$ e que $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{5}{10}$, e representar a sentença matemática como solicita no item 6 (b) como $\frac{8}{10}+\frac{5}{10}=\frac{13}{10}$ ou ainda, usar a fração mista $1\frac{3}{10}$ como resposta.

Análise a Posteriori

Nenhum aluno respondeu esta atividade. Os alunos não possuíam uma boa leitura de conversão de registro figural para o registro numérico, uma vez que esse conhecimento é uma ferramenta indispensável na construção desta atividade.. Apresentaremos uma resposta proporcionada por maioria dos alunos.

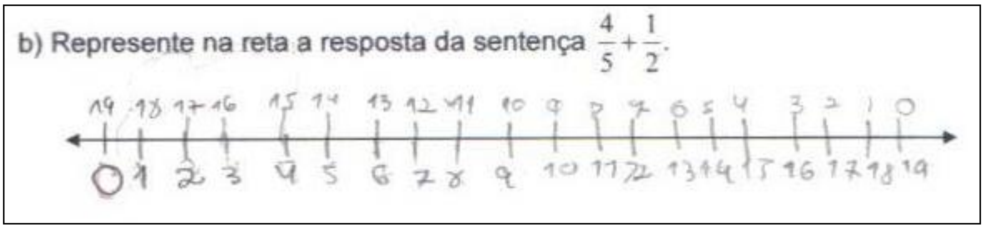


Figura 17 - Resolução da atividade 6 (b), apresentada pelos alunos.

Análise a Priori

O objetivo neste item é levar ao aluno representar de forma natural a operação de adição por meio do uso de equivalência de frações e representar a sentença matemática como $\frac{8}{10}+\frac{5}{10}=\frac{13}{10}$, ou ainda, usar a fração mista $1\frac{3}{10}$ como resposta.

Análise a Posteriori

Nesta situação nenhum aluno respondeu como prevíamos em nossas análises a priori, apresentaremos uma solução deixada pelos alunos desta atividade. É importante destacarmos que em momento algum os alunos perceberam a equivalência de frações e frações mistas.

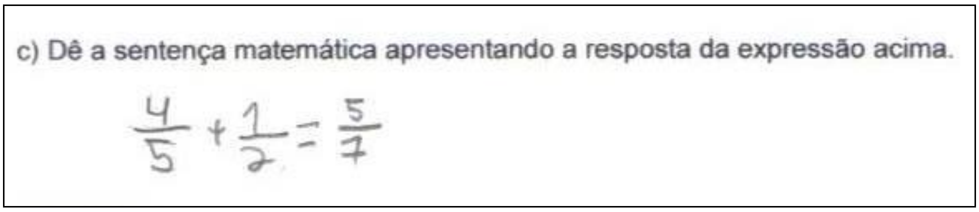
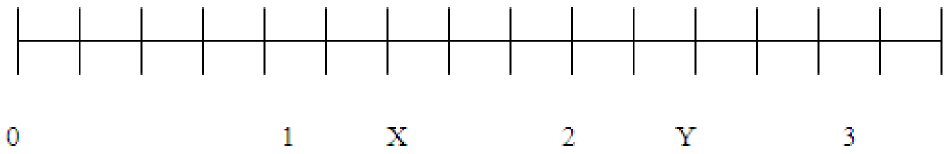


Figura 18 - Resolução da atividade 6 (c), apresentada pelos alunos.

Acreditamos com Silva (2005) e Camilo (2009) que para situações envolvendo o trabalho com frações mistas, isto é, número inteiro acompanhado de uma fração, em contexto de medida surge de forma natural quando o aluno manuseia tais atividades e por isso são facilitadoras para a compreensão dos alunos.

Análise da Atividade 7

Atividade 7



a) Qual é a distância do ponto 0 à X? Justifique sua resposta.

b) Qual é à distância do ponto X à Y? Justifique sua resposta.

c) Determine a distância de X à Y por meio de uma subtração.

Esta atividade também propõe soma de frações maiores que a unidade, assim aparece às frações impróprias e os números mistos por meio da concepção de medida.

Análise a Priori

Neste item o objetivo é fazer com que os alunos percebam que o inteiro foi dividido em cinco partes congruentes, e por conseqüência alguns números fracionários pedidos possuirão os numeradores maiores que os denominadores, permitindo também ao aluno perceber frações na sua forma mista.

A percepção de que o todo representa em quantas partes o inteiro foi dividido é fundamental para a realização desta atividade. Assim esperamos que os alunos respondessem que o inteiro foi dividido em partes congruentes e que a distância do 0 ao X corresponde a $\frac{8}{5}$. Considerando uma pequena probabilidade que no início da atividade algum aluno possa perceber a fração mista e elaborar resposta como $1\frac{3}{5}$

O objetivo neste item é proporcionar ao aluno a representar um número fracionário utilizando a concepção de medida. Assim esperamos que de maneira análoga que na situação anterior, os alunos registrem como resposta o número $\frac{12}{5}$.

Objetivo é proporcionar ao aluno por meio de uma subtração a distância entre dois pontos. Assim esperamos que os alunos respondessem a sentença $\frac{12}{5}-\frac{8}{5}=\frac{4}{5}$. Consideramos estas respostas importantes, pois os alunos perceberam a ordenação dos números fracionários e que esta ordem futuramente poderá auxiliá-los na conceituação dos números racionais.

Análise a Posteriori

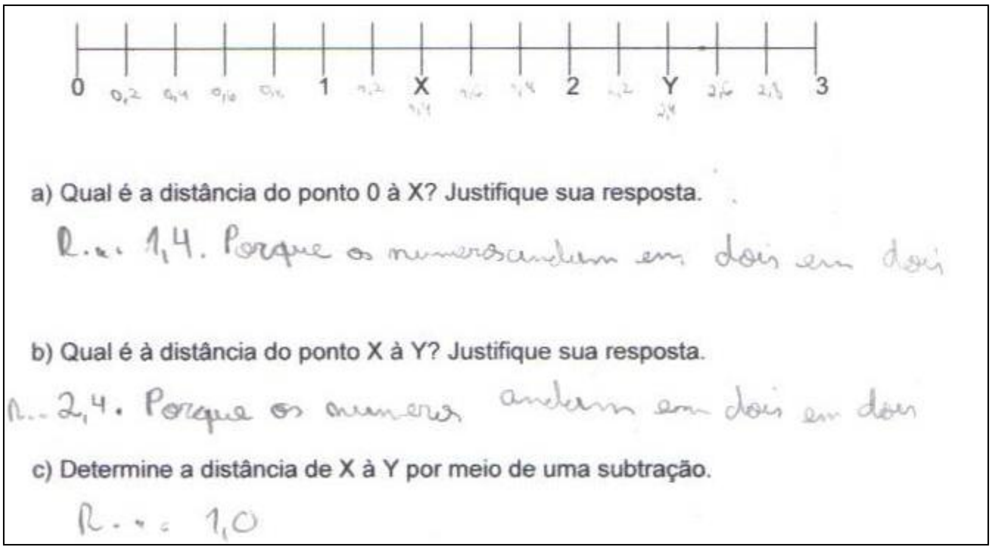


Figura 19 - Resolução da atividade 7 (a), (b) e (c).

Pela resposta apresentada pelos alunos, percebemos as relações que os alunos fazem dos números fracionários com os decimais (diferentes representações) que utilizaram na resolução.

Nesta situação, nenhum aluno apresentou resposta correta para esta situação, acreditamos como Camilo (2009) que atividades envolvendo a concepção medida devem ser trabalhadas nas séries anteriores ao sexto ano.

Atividade 8

Atividade 8

a) Construa uma reta numerada e represente a soma $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}$.

b) Dê a resposta por meio de uma sentença matemática.

Está atividade objetiva do aluno a elaboração da reta numérica bem como sua demarcação de maneira correta e suas representações nessa reta e em seguida a adição desses números fracionários. Nesta atividade os alunos demoraram aproximadamente 10 minutos para responder os itens.

Análise a Priori

Está atividade proporciona aos alunos a construir a reta numérica, demarcá-la em 3 inteiros utilizando a régua, e perceber que este inteiro pode ser dividido em 4 partes iguais, ou ainda em 8 partes iguais para mostrar sua sentença matemática. Descobrir que o produto dos denominadores é uma estratégia boa para a transformação em frações equivalentes, ou ainda, ter a compreensão de que os múltiplos de um número natural podem facilitar a resolução destes itens.

O objetivo nesta situação é que os alunos utilizem a equivalência de números fracionários e respondam que $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}$ é a mesma situação que $\frac{6}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$.

Análise a Posteriori

Apresentamos uma das respostas elaborada pelos alunos que participaram da pesquisa.

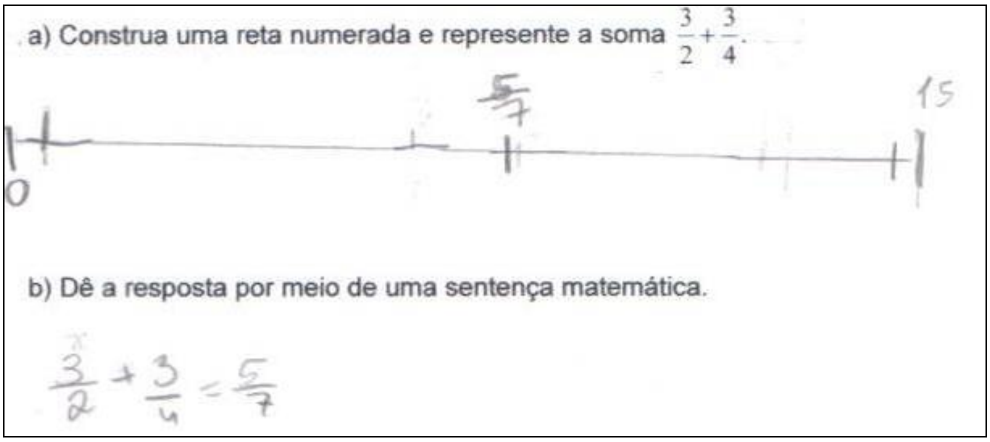


Figura 20 - Resolução da atividade 8 (a) e (b) apresentada pelos alunos.

Mesmo com a experiência das atividades anteriores os alunos não relacionaram com está atividade.

Atividade 9

Atividade 9

Escreva uma regra para a adição e a subtração de duas frações quaisquer.

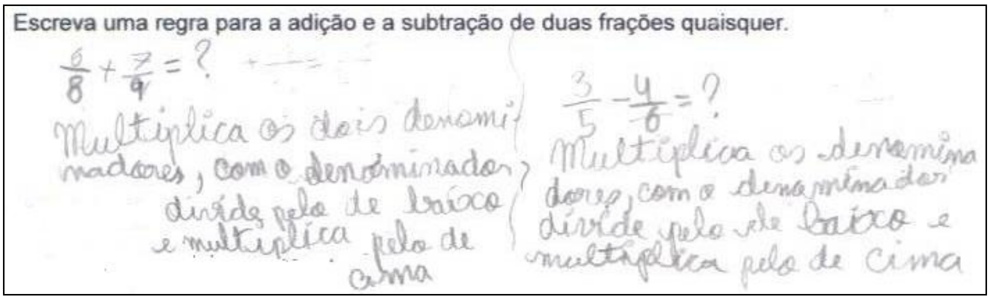
Nesta atividade proporcionamos aos alunos uma situação de expressar o que observaram nas atividades anteriores, pois acreditamos que quando a aluno escreve algo sobre determinada situação ele domina este conteúdo.

Análise a Priori

Esta atividade objetiva fazer com que o aluno consiga expressar uma regra em linguagem natural envolvendo a adição e subtração de dois ou mais números fracionários quaisquer, mostrando o domínio que possui sobre essas operações. Assim esperamos que uma possível resposta para esta situação fosse: Para somar ou subtrair frações com denominadores iguais precisamos somar ou subtrair os numeradores, e manter os denominadores sem alterá-los.

Para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes, precisamos deixar esses denominadores iguais, por meio da equivalência de frações, depois basta utilizarem a mesma regra para frações com denominadores iguais.

Análise a Posteriori


Escreva uma regra para a adição e a subtração de duas frações quaisquer.

$\frac{6}{8} + \frac{7}{9} = ?$

Multiplica os dois denominadores, com o denominador divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima

$\frac{3}{5} - \frac{4}{6} = ?$

Multiplica os denominadores, com o denominador divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima

Figura 21 - Resolução da atividade 9 apresentada pelos alunos.

Pela figura 21 observamos que o objetivo não foi alçando durante a resolução das atividades anteriores, percebemos o mecanismo desses alunos na solução apresentada. Fica notável a presença do livro didático nos exemplos dado por esses alunos.

Atividade 10

Resolva os exercícios a seguir:

$a)\ \frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$

$b)\ \frac{5}{6}-\frac{1}{4}=$

$c)\ \frac{2}{15}+\frac{3}{7}=$

$d)\ \frac{7}{8}-\frac{2}{13}=$

Para finalizar a primeira parte da aplicação do instrumento diagnóstico proporcionamos aos alunos alguns exercícios para a generalização do conhecimento adquirido. Esta atividade tem por objetivo fundamentar nosso trabalho, pois esperamos que o aluno demonstrasse se utilizam essas operações de forma significativa sem o emprego de mecanismos e, portanto pronto para buscar outros conhecimentos envolvendo números fracionários. Nesta atividade os alunos demoraram aproximadamente 10 minutos para responder os itens.

Análise a Priori

Esperamos que os alunos na situação 10 (a) desta atividade façam $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$ por meio da equivalência de frações.

Na situação 10 (b) esperamos que o aluno resolvesse esta operação de subtração procedendo da seguinte maneira: $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{20}{24}-\frac{6}{24}=\frac{14}{24}$ ou ainda $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{10}{12}-\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$ percebendo os múltiplos de um número natural.

Nesta situação 10 (c) esperamos dos alunos o valor de $\frac{2}{15}+\frac{3}{7}=\frac{14}{105}+\frac{45}{105}=\frac{59}{105}$.

Nesta situação 10 (d) esperamos que os alunos respondessem $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{91}{104}-\frac{16}{104}=\frac{75}{104}$ como resposta.

Análise a Posteriori

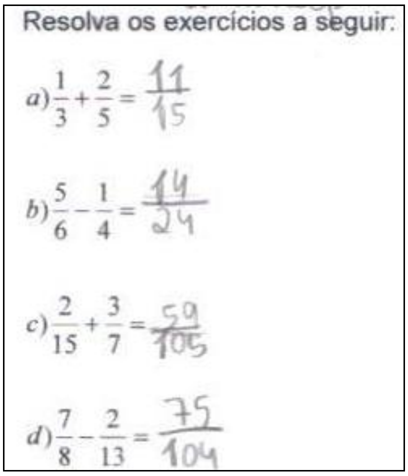


Figura 22 - Resolução da atividade 10 (a), (b), (c) e (d) apresentada pelos alunos.

Consideramos de imediato que os alunos não atingiram os objetivos propostos nesta atividade. Apenas 4 dos alunos responderam esta atividade corretamente, utilizando o procedimento prático para o cálculo das operações com frações e não a equivalência de frações como propormos nas nossas análises a priori. Os 18 restantes somaram ou subtraíram numerador com numerador e denominador com denominador.

Devido à desmotivação pela falta de compreensão das atividades apresentada pelos alunos desistimos de aplicar a segunda parte do nosso diagnóstico envolvendo as operações de multiplicação e divisão com números fracionários.

Nas dez primeiras atividades constam de exercícios envolvendo adição e subtração de números fracionários, e que utilizam equivalência de frações, figuras e retas numérica.

Nas atividades de 1 a 5, utilizamos figuras que teve por objetivo fazer o aluno representar números fracionários menores que a unidade, concluímos que os alunos não apresentaram um bom rendimento com relação as soluções numérica dos exercícios, as operações de adição e subtração realizadas por eles não correspondiam com as previstas para cada atividade em nossas análises a priori.

Observamos que estes alunos ao responderem essas atividades, 2 dos alunos trocaram o numerador pelo denominador das frações, mesmo com o auxílio da régua graduada todos os alunos *não consideraram a área de cada parte pintada da figura* e apenas 2 dos alunos *perceberam as operações (adição e subtração)* que envolviam cada atividade, embora, eles usaram mecanismos para chegarem à solução e 4 utilizam *cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre os denominadores das frações.*

Em relação às atividades 6, 7 e 8 onde os exercícios enfocavam a reta numérica concluímos que os alunos se depararam com vários obstáculos na resolução destas atividades e tiveram dificuldade na transposição do registro figural para o registro numérico e em momento alguns conseguiram observar a fração mista.

Se compararmos o índice de acerto dessa atividade com as primeiras atividades, os alunos tiveram baixos rendimentos, acreditamos que acorreu esse fato pelo pouco uso da reta numérica em sala de aula nas séries anteriores do Ensino Fundamental II.

Acreditamos assim que as estratégias utilizadas por esses alunos na resolução dessas atividades são conhecimentos adquirido nas séries anteriores, e se esses conteúdos não forem explorados de forma significativa esses alunos continuaram cometendo os mesmos erros.

Portanto, entrevistamos a ex-professora da turma que desenvolvemos nossa pesquisa, para melhor analisarmos as respostas apontadas pelos alunos, pois assim podemos analisar o perfil, crença e competências utilizadas pela professora na formação desses estudantes ao passarem pelo quinto ano do Ensino Fundamental.

Observamos durante nossa entrevista que a professora se sentiu insegura em relação ao conteúdo, comenta muito sobre material manipulativo, mas não sabe realmente o que fazer com eles, parece que o uso desses materiais resolve todos os problemas de ensino e aprendizagem.

Comenta sobre as diferentes concepções de números fracionários mais, acredita que tais significados não são importantes para o quinto ano do Ensino Fundamental. Ela segue exatamente o ensino usual, até nos exemplos das respostas de nossa entrevista (p. 32 e 33), percebemos a influência do livro didático. Com tal comportamento leva-nos a pensar que na sala de aula dessa professora ela fala e os alunos obedecem sem nenhuma atuação nas aulas, e sem levantar questões para serem analisadas e discutidas.

Acreditamos como Pavanello (1994, apud Silva, 1997, p. 2), que os alunos não atuam nas aulas de matemática, pois não trabalham com questões que admitam diferentes respostas, nem levantam contradições para serem analisadas e discutidas e, que os desafiem a obter diferentes soluções para um mesmo problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste estudo, objetiva diagnosticar quais estratégias alunos de um sexto ano do Ensino Fundamental mobiliza na resolução de atividades envolvendo as operações com números fracionários, visando à equivalência de frações, utilizando a concepção parte-todo, explorando figuras e reta numérica.

Para alcançar nosso objetivo, passamos por três etapas, a primeira constitui-se na problematização, questão de pesquisa e metodologia utilizada. Nossa justificativa enfoca a complexidade dos números fracionários na vida do aluno, nossa delimitação do problema busca responder a seguinte questão de pesquisa: Quais estratégias que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental mobilizam na resolução de atividades envolvendo operações com números fracionários por meio da concepção parte-todo? Encerramos a primeira etapa em nossos procedimentos metodológicos em que baseamos em Bodgan (1986) e Biklen (1986) e em algumas fases da Engenharia Didática (análise aprioari, análise aposteriori e validação) proposta por Artigue (1988).

A segunda etapa deste estudo constitui-se de nossos estudos preliminares e estudo do objeto matemático, onde no primeiro, apresentamos nossas revisões bibliográficas com trabalhos recentes de alguns pesquisadores que abordam o tema números fracionários, como Rodrigues (2005), Camilo (2009), Canova (2006) e Silva (2005) em suas dissertações e teses, que de alguma forma, serviram de contribuição teórica para está pesquisa.

No estudo do objeto matemático apresentamos as propriedades dos números racionais proposta por Caraça (1984) quando salienta que nem sempre é possível comparar dois segmentos de tamanhos diferentes com um número inteiro a quantidade de vezes que um dado segmento cabe no outro, e as, cincos concepções dos números fracionários utilizados por Silva (2005) que discute a fração contemplando cinco significados – Parte-todo, Medida, Quociente, Razão e Operador.

Na terceira e última etapa apresentamos nosso instrumento diagnóstico composto por vinte e cinco atividades com seus respectivos objetivos: análise a priori (respostas esperadas pelos alunos), análise a posteriori (respostas dos alunos) e a validação de cada atividade (que nada mais é do que a confrontação da análise a priori com a posteriori).

Baseamos nossa pesquisa em um instrumento que consiste em atividades diagnósticas composta por 25 atividades que foram respondidas por 22 alunos de um sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do Litoral de São Paulo, divididos em duplas em dois momentos de aplicação com duração de 1h 40 min. cada. É importante destacarmos que uma dupla desistiu de participar da resolução das atividades de nossa pesquisa, devido à desmotivação ancorada na falta de subsídios anteriores, assim prosseguimos nossa aplicação para as outras dez duplas.

Acreditamos como Pavanello (1994, apud Silva, 1997, p. 2), que os alunos não atuam nas aulas de matemática, pois não trabalham com questões que admitam diferentes respostas, nem levantam contradições para serem analisadas e discutidas e, que os desafiem a obter diferentes soluções para um mesmo problema.

Concordamos com Caraça (1984) quando salienta que para o conhecimento dos números racionais ficarem completo é preciso explorar suas propriedades e seus diferentes significados só depois disso o campo dos racionais será finalizado.

Em relação às atividades envolvendo multiplicação e divisão de números fracionários, que seguem em anexo neste trabalho, desistimos de aplicar devido à desmotivação ancorada na dificuldade apresentada por esses alunos.

Com base no exposto vamos responder nossa questão de pesquisa que tem por objetivo analisar as estratégias mobilizadas pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, a questão de pesquisa é:

Quais estratégias que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental mobilizam na resolução de atividades envolvendo operações com números fracionários por meio da concepção parte-todo?

Durante a resolução os alunos apresentam *troca do numerador pelo denominador* das frações, mesmo com o auxílio da régua graduada os alunos *não consideraram a área de cada parte demarcada da figura* e a minoria percebeu as operações (adição e subtração) que envolviam cada atividade.

Percebemos que por ser pouco explorada a utilização da reta numérica na sala de aula nas séries anteriores ao sexto ano os alunos proporcionaram um índice maior do que as atividades que não apresentavam esse tipo de tarefa.

Acreditamos assim que as estratégias utilizadas por esses alunos na resolução dessas atividades são conhecimentos adquirido nas séries anteriores, e se esses conteúdos não forem explorados de forma significativa esses alunos continuaram cometendo os mesmos erros nas series consecutivas.

Fizemos algumas observações importantes para que servissem de ferramentas na resolução destas atividades:

- Os alunos não possuíam bom domínio sobre as operações de multiplicação e divisão no sexto ano do Ensino Fundamental, pois sem essas ferramentas dificulta na resolução e interpretação de atividade envolvendo adição e subtração com frações já que aplicamos apenas atividades envolvendo adição e subtração com frações.

- Os alunos não possuíam uma boa leitura de conversão de registro figural para o registro numérico, que esse conhecimento é uma ferramenta indispensável na construção das atividades.

- Em relação à reta numérica eles também não possuíam conhecimento sobre esse conteúdo.

Concluímos que os resultados mostrados nesta pesquisa é fruto da prática pedagógica e falta de compreensão do campo dos racionais por parte da ex-professora da turma. Pois só com uma mudança na concepção dessa professora e que compreenda e domine o conjunto dos números racionais ocorrerá aprendizagem significativa, caso contrário continuará a cometer os mesmos erros em relação a sua prática.

Esses resultados são referentes a uma análise de dados de um instrumento diagnóstico aplicado a 20 alunos do sexto anos do Ensino Fundamental que estão desde as séries iniciais no mesmo colégio.

Durante o desenvolvimento e aplicação deste trabalho muitas ideias foram surgindo, e entre elas, citamos duas sugestões:

A primeira questão seria utilizar esta atividade como sequência de ensino para a introdução das operações com números fracionários por meio da concepção parte-todo, no quinto ano do Ensino Fundamental, pois acreditamos que estas sejam uma alternativa para o estudo significativo das operações com números fracionários.

A segunda sugestão incorporada a esta, seria complementar neste estudo os registros de representação semiótica de Duval (1999), o que permite ao professor e ao aluno uma visão estendida dos números racionais.

Este estudo faz referências à prática pedagógica utilizada em sala de aula, com o objetivo de levantar hipóteses para possíveis mudanças.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Editora UFPR. Curitiba, 2007

BOLEMA – *Boletim de Educação Matemática*. Ano 21. Número 31. Unesp. Rio Claro. 2008.

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*. Tradução: Camila Bogéa. São Paulo: Editora Ática, 2008, 128 p.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa. Ed. 1984, 318 p.

CAMILO, C. R. *Operações com Números Fracionários: Adição e Subtração por meio da Concepção parte-todo*. Monografia em Educação Matemática. PUC/SP. 2009.

MERLINI, V. L. *O Conceito de Frações em seus Diferentes Significados: Um Estudo Diagnóstico com Alunos de 5ª e 6ª Séries do Ensino Fundamental em Educação Matemática*. PUC/SP. 2006.

MOREIRA, M. A. & MASINI, E. F. S. *Aprendizagem Significativa*. Editora Centauro. 2006.

MOROZ, M. & GIANFALDONI, M. H. T. A. *O Processo de Pesquisa Iniciação*. Vol.2. Editora Líber. Livro. 2a edição. Brasília. 2006.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. 5ª a 8ª séries. 1988.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acessado em 13/10/2009.

PESCUNA, D. & CASTILHO, A. P. F. *Projeto de Pesquisa*. O que é? Como fazer? Editora Olho d’Água. São Paulo. 2005

RODRIGUES, W. R. *Números Racionais: Um Estudo das Concepções de Alunos após o Estudo Formal*. Mestrado em Educação Matemática. PUC/SP. 2005.

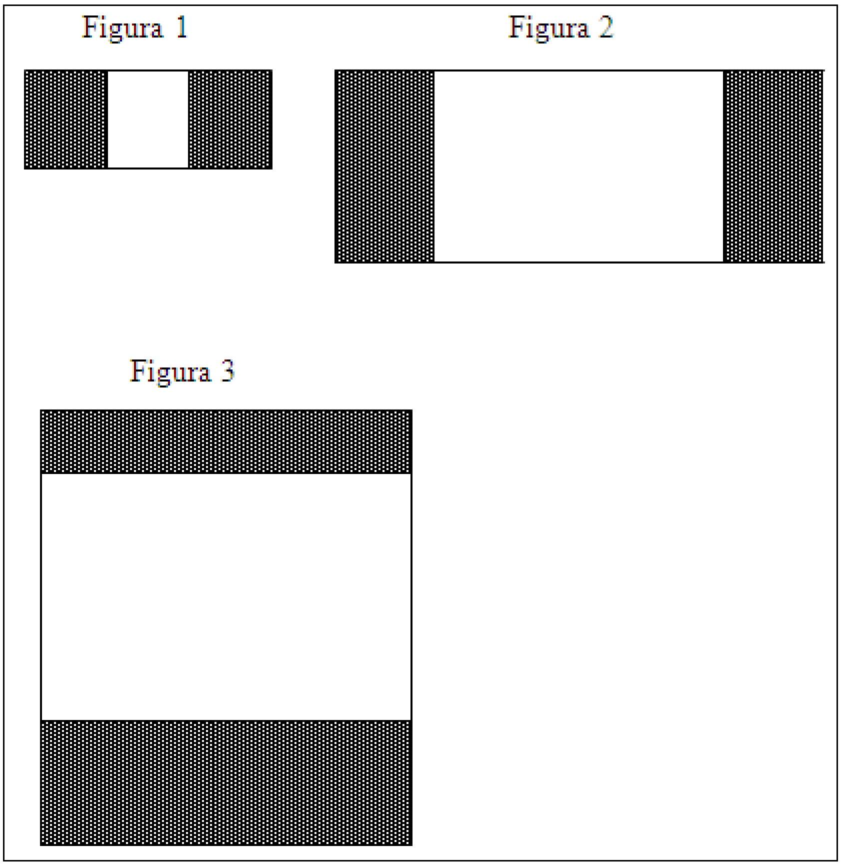
SILVA, M. J. F. *Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para a Quinta Série*. Editora Blucher. São Paulo, 2009

ANEXO A: O INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO – PARTE I

Adição e Subtração

Atividade 1

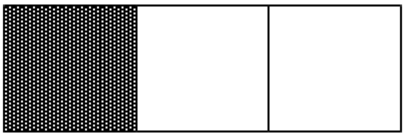
a) Que parte do inteiro está pintada em cada figura?



b) Represente a parte pintada de cada figura como soma de frações que representa cada parte pintada.

Atividade 2

a) Que fração representa a parte pintada da figura?



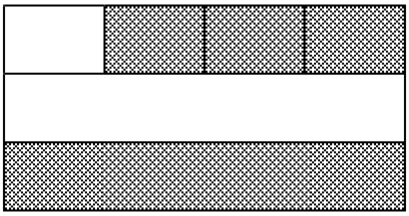
b) Apague $\frac{1}{4}$ da parte pintada do retângulo. Faça um novo desenho mostrando sua conclusão.

c) Observando a figura anterior que parte do retângulo permaneceu pintada?

d) Escreva uma sentença matemática que representa o que você fez através de uma subtração de frações.

Atividade 3

a) Determine as frações que representam as duas partes pintadas do retângulo?

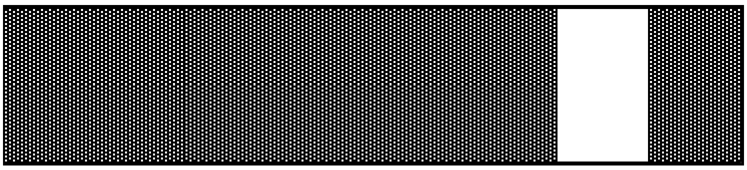


b) Determine por uma soma de frações a parte pintada do retângulo?

c) Qual a fração que representa a parte pintada desse retângulo?

Atividade 4

a) Que fração representa a parte não pintada do retângulo?



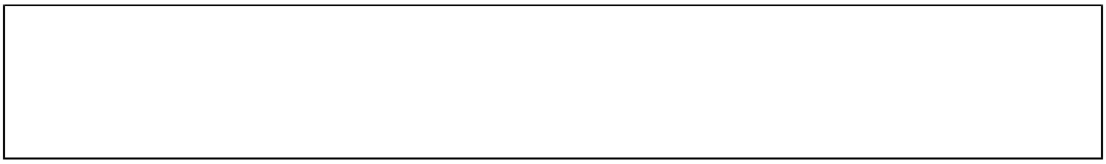
b) Que fração representa a parte pintada do retângulo?

c) Monte uma sentença matemática que expressa à figura como um todo.

d) Calcule $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$.

Atividade 5

a) Pinte a parte da figura que representa $\frac{1}{3}$ do retângulo?



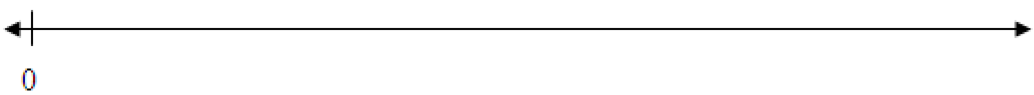
b) No mesmo retângulo pinte a parte que representa $\frac{2}{5}$ do retângulo?

c) Calcule $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$.

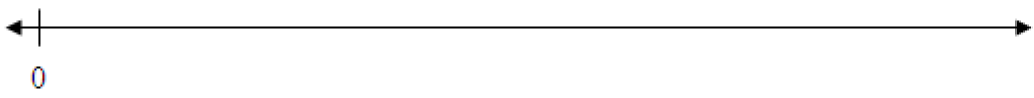
d) Refaça essa situação para o retângulo abaixo.

Atividade 6

a) Represente na reta numérica a fração $\frac{4}{5}$. Na mesma reta represente a fração $\frac{1}{2}$.

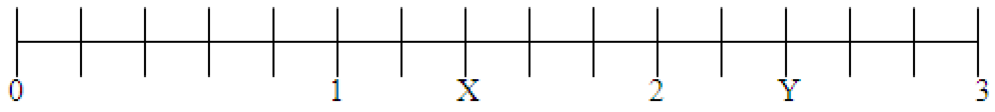


b) Represente na reta a resposta da sentença $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$.



c) Dê a sentença matemática apresentando a resposta da expressão acima.

Atividade 7



a) Qual é a distância do ponto 0 à X? Justifique sua resposta.

b) Qual é à distância do ponto X à Y? Justifique sua resposta.

c) Determine a distância de X à Y por meio de uma subtração.

Atividade 8

a) Construa uma reta numerada e represente a soma $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}$.

b) Dê a resposta por meio de uma sentença matemática.

Atividade 9

Escreva uma regra para a adição e a subtração de duas frações quaisquer.

Atividade 10

Resolva os exercícios a seguir:

$$a)\,\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$$

$$b)\,\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=$$

$$c)\,\frac{2}{15}+\frac{3}{7}=$$

$$d)\,\frac{7}{8}-\frac{2}{13}=$$

ANEXO B: O INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO – PARTE II

Multiplicação e Divisão

Atividade 1

a) Represente por uma figura o resultado da expressão $2 \times \frac{1}{5}$.

b) Que parte da figura foi considerada?

c) Dê a sentença matemática que representa a situação?

Atividade 2

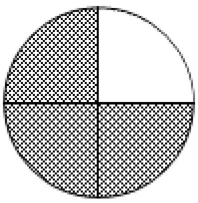
a) Represente em uma reta numérica o valor das expressões matemáticas abaixo:

1) o dobro de $\frac{2}{3}$.　　2) o triplo de $\frac{2}{5}$.

3) o quádruplo de $\frac{1}{5}$.　　4) o quíntuplo de $\frac{3}{7}$.

b) Dê a sentença matemática que representa cada situação?

Atividade 3



a) Que parte do disco está pintada?

b) Pinte a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ da parte colorida do disco.

c) Que fração do disco você pintou?

b) Dê a sentença matemática que representa a situação?

Atividade 4

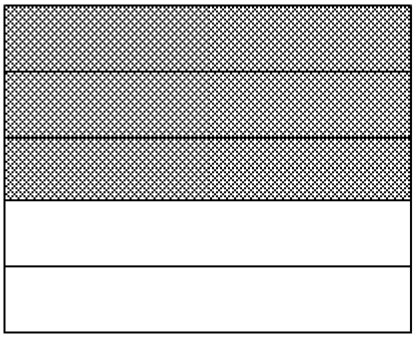
a) Pinte a metade de um quinto do segmento abaixo.

b) Determine a fração que representa a parte pintada do segmento.

c) Dê a sentença matemática que representa essa situação?

Atividade 5

a) Pinte três quartos da parte que está hachurada na figura a baixo.



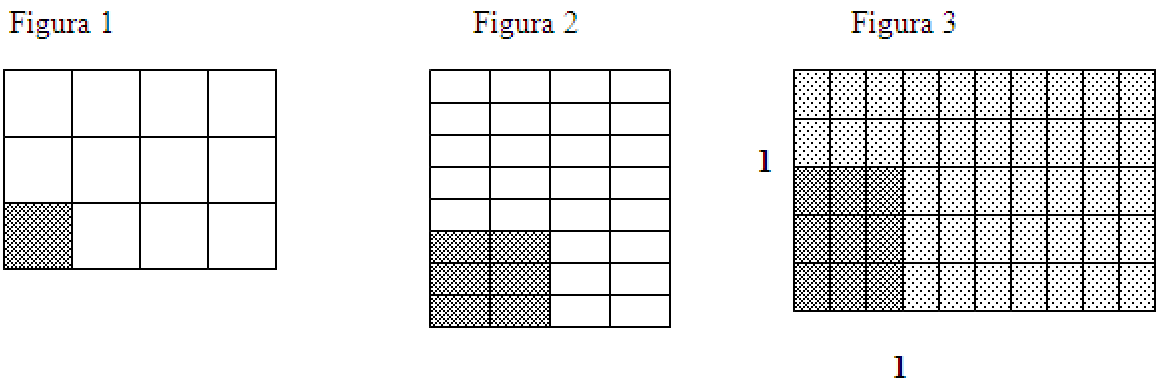
b) Que parte da figura você pintou?

c) Identifique a medida da largura e a medida da altura dos lados do retângulo que você pintou.

d) Qual a sentença matemática que representa essa situação?

Atividade 6

Sabendo que a área de um retângulo é dada pela multiplicação das medidas da altura e da largura do retângulo.



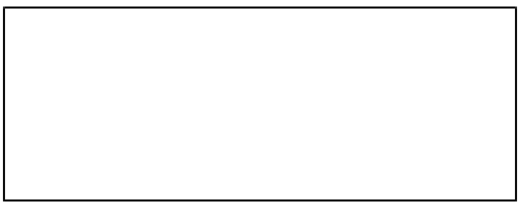
a) Qual a medida da largura e da altura de cada figura?

b) Calcule a área da parte pintada das figuras.

c) Em cada situação dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou.

Atividade 7

a) Pinte três quartos de quatro quintos do retângulo desenhado abaixo.



b) Que parte do retângulo você pintou?

c) Dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou.

Atividade 8

a) Quantas metades cabem em um inteiro? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.

b) Dê a sentença matemática que representa a situação?

c) Quantos terços cabem em um inteiro? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.

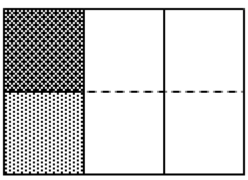
d) Dê a sentença matemática que representa a situação?

Atividade 9

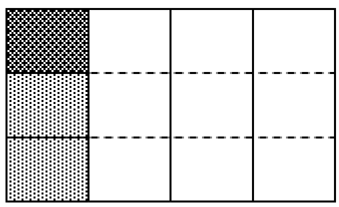
Escreva uma regra para a multiplicação de números fracionários.

Atividade 10

a) Observe os desenhos abaixo e complete:



$\frac{1}{3} \div 2 =$

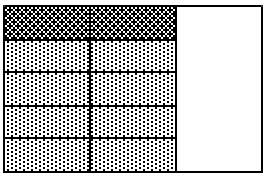


$\frac{1}{4} \div 3 =$

b) Represente esta situação por meio de uma multiplicação de frações.

Atividade 11

a) Observe os desenhos abaixo e responda:



b) Qual a medida da largura e da altura da parte pintada da figura?

c) Qual a medida da área “escura” da figura?

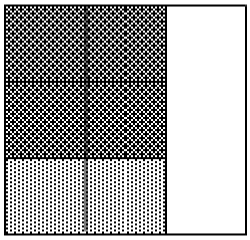
d) Se um quinto de dois terços é $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que:

$\frac{2}{15} \div \frac{1}{5} =$

e

$\frac{2}{15} \div \frac{2}{3} =$



b) Qual a medida da largura e da altura da parte pintada da figura?

c) Qual a medida da área “escura” da figura?

d) Se um terço da metade é $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que:

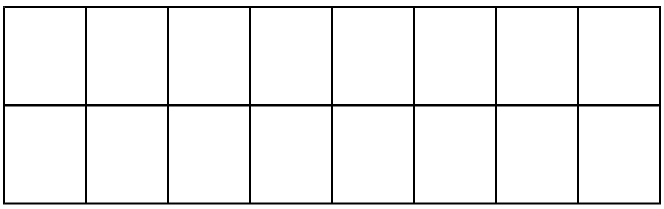
$\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} =$

e

$\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} =$

Atividade 12

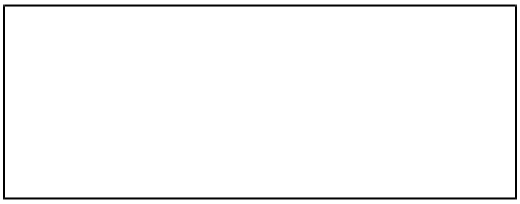
a) Quantos oitavos cabem em $\frac{1}{16}$? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.



b) Dê a expressão matemática que representa a situação.

Atividade 13

a) Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.



b) Dê a expressão matemática que representa a situação.

Atividade 14

Escreva uma regra que mostre como dividir duas frações quaisquer.

Atividade 15

Resolva os exercícios a seguir:

$a)\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=$

$b)\frac{5}{6}\div\frac{1}{4}=$

$c)\frac{2}{15}\times\frac{3}{7}=$

$d)\frac{7}{8}\div\frac{2}{13}=$