

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

RENNE GARCIA PAIVA

**ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO
DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2023

RENNE GARCIA PAIVA

**ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título
de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**,
sob a orientação da **Professora Doutora Ana
Lúcia Manrique**.*

PUC-SP

2023

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

Paiva, Renne Garcia
ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE
SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES / RenneGarcia Paiva. -
São Paulo: [s.n.], 2023.
p ; cm.

Orientador: Ana Lúcia Manrique.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica
de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em
Educação matemática.

1. Tese de Doutorado. I. Manrique, Ana Lúcia .
II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação
matemática. III. Título.

CDD

Aprovado em: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Dra. Ana Lúcia Manrique (Orientadora) – PUC-SP

Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar – PUC-SP

Dr. José Messildo Viana Nunes – UFPA

Dra. Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP

Dr. Saddo Ag Almouloud – UFPA

Dedico este trabalho à minha filha e esposa, maiores incentivadoras nessa jornada de qualificação profissional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora Dra. Ana Lúcia Manrique pelos serviços prestados com excelência, por sempre me atender com disposição e paciência.

Ao Dr. Saddo Ag Almouloud pelas contribuições incomensuráveis com seus ensinamentos para tornar este trabalho possível.

À Dra. Maria José Ferreira da Silva pelos ensinamentos acerca da Teoria Antropológica do Didático e contribuições prestadas para desenvolvimento desta tese.

À Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar pelas contribuições referentes aos ensinamentos pertinentes ao desenvolvimento desta Tese.

Ao Dr. José Messildo Viana Nunes pelas contribuições e apontamentos para melhoria desta tese.

Aos meus colegas do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática pela parceria nos estudos.

A todos colegas professores do Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente (IEAA) pelo apoio em minha qualificação.

À minha esposa Ana Verônica e filha Maria Elisa pelo incentivo permanente.

A meu pai, Rosenmager (in memoriam) e minha mãe Célia pelo incentivo que sempre me deram.

Aos meus irmãos Douglas, Diego e Raniere, minhas sobrinhas Maria Júlia, Maria Victória e Lua.

A todos meus parentes pela força e ajuda prestada para concluir esta tese.

A todos seres humanos que contribuíram de alguma forma para realização dessa empreitada em minha qualificação.

PAIVA, Renne Garcia. **ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2023.

RESUMO

Esta pesquisa trata do estudo das três dimensões do problema didático de sistemas de equações lineares para formação inicial de professores. Com o aporte da Teoria Antropológica do Didático (TAD), optamos por iniciar com a questão docente relacionada aos Sistemas de Equações Lineares: *como e o porquê de ensinar de sistemas de equações lineares para estudantes na formação inicial de professores?* Para respondê-la, consideramos nossa questão docente e realizamos nossa pesquisa apoiada no desenvolvimento do problema didático proposto por Gascón (2011) o que nos levou a elaborar nossa questão de pesquisa: *De que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo ao objeto matemático sistema de equações lineares podem contribuir com um desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores?* Em busca de repostas com significados inerentes a *razão de ser* desse objeto matemático, temos o objetivo *compreender de que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo aos sistemas de equações lineares podem contribuir com o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para a proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores*. Para atingir esse objetivo, realizamos um estudo apoiando-se nos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e sustentando-nos, inicialmente na análise da dimensão epistemológica relacionada às origens ao desenvolvimento do saber matemático associado aos sistemas de equações lineares, geramos um modelo epistemológico de referência (MER). Baseando-nos por esse modelo realizamos um estudo da dimensão econômico-institucional e ecológico das *praxeologias* pertinentes ao desenvolvimento do estudo dos sistemas de equações lineares no âmbito da formação de professores em busca das peculiaridades do modelo epistemológico dominante (MED), descrito e interpretado a partir dos documentos oficiais e materiais didáticos. O estudo econômico nos proporcionou localizar os sistemas de equações lineares em quatro disciplinas no currículo de licenciaturas (Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo Numérico e Equações Diferenciais Ordinárias). Por outro lado, a análise ecológica do objeto nos revelou condições e restrições que favorecem e dificultam pôr em prática as tarefas impostas identificadas pelo MED. Com a análise desses estudos, propomos um Modelo Didático de Referência Alternativo (MDRA) correlacionando o MER e o MED para análise de uma possível mudança da *razão de ser* dos sistemas de equações lineares. Por fim, ao considerarmos as contribuições reveladas da teoria pela pesquisa, propusemos um modelo didático de referência (MDRA) com mapa de questões para realizações de possíveis PEP.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares, Dimensão epistemológica, Dimensão Econômico-Institucional, Dimensão Ecológica, *praxeologia*.

RÉSUMÉ

Cette recherche porte sur l'étude des trois dimensions du problème didactique des systèmes d'équations linéaires pour la formation initiale des enseignants. Avec l'apport de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), nous avons choisi de commencer par la question pédagogique liée aux Systèmes d'équations linéaires : comment et pourquoi enseigner les systèmes d'équations linéaires aux élèves en formation initiale des enseignants? Pour y répondre, on considère notre question d'enseignement et nous avons mené notre recherche sur la base du développement du problème didactique proposé par Gascón (2011) ce qui nous a conduit à élaborer notre question de recherche : Comment différents aspects liés aux dimensions épistémologiques, économique-institutionnelles et écologiques du problème didactique lié au système objet mathématique d'équations linéaires peuvent contribuer à l'élaboration d'un Modèle Didactique de Référence (DRM) comme base pour proposer des filières d'études et de recherche en formation des enseignants ? A la recherche de réponses ayant des significations inhérentes à la *raison d'être* de cet objet mathématique, nous visons à comprendre comment différents aspects liés aux dimensions épistémologiques, économique-institutionnelles et écologiques du problème didactique lié aux systèmes d'équations linéaires peuvent contribuer à la développement d'un Modèle Didactique de Référence (MDR) comme base pour proposer des Parcours d'Études et de Recherche (PER) dans la formation des enseignants. A la recherche de réponses ayant des significations inhérentes à la raison d'être de cet objet mathématique, nous visons à comprendre comment différents aspects liés aux dimensions épistémologiques, économique-institutionnelles et écologiques du problème didactique lié aux systèmes d'équations linéaires peuvent contribuer à la développement d'un Modèle Didactique de Référence (MDR) comme base pour proposer des parcours d'études et de recherche dans la formation des enseignants. Pour atteindre cet objectif, nous avons réalisé une étude basée sur les hypothèses de la TAD et en nous appuyant, dans un premier temps sur l'analyse de la dimension épistémologique liée aux origines et au développement des connaissances mathématiques associées aux systèmes d'équations linéaires, nous avons généré un Modèle Épistémologique de Référence (MER), sur la base de ce modèle, nous avons réalisé une étude de la dimension économique-institutionnelle et écologique des praxéologies pertinentes pour le développement de l'étude des systèmes d'équations linéaires dans le cadre de la formation des enseignants à la recherche des particularités du Modèle Épistémologique Dominant (MED) décrites et interprétées dans les documents officiels et les supports pédagogiques. L'étude économique nous a permis de localiser des systèmes d'équations linéaires dans quatre matières du programme de premier cycle (géométrie analytique, algèbre linéaire, calcul numérique et équations différentielles ordinaires). D'autre part, l'analyse écologique de l'objet a révélé des conditions et des restrictions qui favorisent et entravent la mise en pratique des tâches imposées identifiées par le MED. Avec l'analyse de ces études, nous proposons un Modèle Didactique de Référence Alternatif (MDRA) corrélant le MER et le MED pour l'analyse d'un éventuel changement de la raison d'être des systèmes d'équations linéaires. Enfin, en considérant les apports révélés par la théorie à travers la recherche, nous avons proposé un modèle didactique de référence (MDRA) avec une carte de questions pour la réalisation d'éventuels PER.

Mots-clés :Systèmes d'Équations Linéaires, Dimension épistémologique, Dimension économique-institutionnelle, Dimension écologique, praxéologie.

RESUMEN

Esta investigación trata del estudio de las tres dimensiones del problema didáctico de los sistemas de ecuaciones lineales para la formación inicial del profesorado. Con el aporte de la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), optamos por partir de la pregunta didáctica relacionada con los Sistemas de Ecuaciones Lineales: ¿cómo y por qué enseñar sistemas de ecuaciones lineales a estudiantes en formación inicial de docentes? Para responderla, nos planteamos nuestra pregunta docente y realizamos nuestra investigación a partir del desarrollo del problema didáctico planteado por Gascón (2011), lo que nos llevó a elaborar nuestra pregunta de investigación: ¿cómo se relacionan diferentes aspectos referidos a la epistemología, económico-institucional y Ecología del problema didáctico relacionado con el sistema objeto matemático de ecuaciones lineales ¿pueden contribuir al desarrollo de un Modelo de Referencia Didáctico (GRD) como base para proponer caminos de estudio e investigación en la formación docente? En busca de respuestas con significados inherentes a la *razón de ser* de este objeto matemático, pretendemos comprender cómo diferentes aspectos relacionados con las dimensiones epistemológica, económico-institucional y ecológica del problema didáctico relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales pueden contribuir a la desarrollo de un Modelo Didáctico de Referencia (MDR) como base para proponer Recorridos de Estudio e Investigación (REI) en la formación de profesores. Para lograr este objetivo, realizamos un estudio basado inicialmente en los presupuestos de la TAD y con base inicialmente en el análisis de la dimensión epistemológica relacionada con los orígenes y desarrollo del conocimiento matemático asociado a los sistemas de ecuaciones lineales, generamos un modelo epistemológico de referencia (MER). Con base en este modelo, realizamos un estudio de la dimensión económico-institucional y ecológica de las praxeologías relevantes para el desarrollo del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en el contexto de la formación docente en busca de las peculiaridades del Modelo Epistemológico Dominante (MED) descrito e interpretado en documentos oficiales y materiales didácticos. El estudio económico nos proporcionó localizar sistemas de ecuaciones lineales en cuatro disciplinas del currículum de las licenciaturas (Geometría Analítica, Álgebra Lineal, Cálculo Numérico y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias). Por otro lado, el análisis ecológico del objeto reveló condiciones y restricciones que favorecen y dificultan la puesta en práctica de las tareas impuestas identificadas por el MED. Con el análisis de estos estudios, proponemos un Modelo Didáctico de Referencia Alternativo (MDRA) correlacionando el MER y el MED para el análisis de un posible cambio en la *razón de ser* de los sistemas de ecuaciones lineales. Finalmente, al considerar los aportes revelados por la teoría a través de la investigación, propusimos un modelo didáctico de referencia (MDRA) con un mapa de preguntas para la realización de posibles REI.

Palabras clave: Sistema de Ecuaciones Lineales, Dimensión Epistemológica, Dimensión Económico-Institucional, Dimensión Ecológica, praxeología.

ABSTRACT

This research deals with the study of the three dimensions of the didactic problem of systems of linear equations. This research deals with the study of the three dimensions of the didactic problem of systems of linear equations for initial teacher education. With the contribution of the Anthropological Theory of Didactics (ATD), we chose to start with the teaching question related to Systems of Linear Equations: how and why to teach systems of linear equations to students in initial teacher training? To answer it, we considered our teaching question and carried out our research based on the development of the didactic problem proposed by Gascón (2011), which led us to elaborate our research question: How different aspects referring to the Epistemological, Economic-institutional and Ecological dimensions of the didactic problem related to the mathematical object system of linear equations can they contribute to the development of a Didactic Reference Model (DRM) as a basis for proposing study and research pathways in teacher education? In search of answers with meanings inherent to the *raison d'être* of this mathematical object, we aim to understand how different aspects related to the Epistemological, Economic-institutional and Ecological dimensions of the didactic problem related to systems of linear equations can contribute to the development of a Reference Didactic Model (RDM) as a basis for proposing study and research pathways in teacher education. With the contribution of the ATD, we chose to start with the teaching question related to Systems of Linear Equations: how and why to teach systems of linear equations to students in initial teacher training? To answer it, we considered our teaching question and carried out our research based on the development of the didactic problem proposed by Gascón (2011), which led us to elaborate our research question: How different aspects referring to the epistemological, economic-institutional and Ecological dimensions of the didactic problem related to the mathematical object system of linear equations can they contribute to the development of a Didactic Reference Model (DRM) as a basis for proposing study and research pathways in teacher education? In search of answers with meanings inherent to the *raison d'être* of this mathematical object, we aim to understand how different aspects related to the epistemological, economic-institutional and ecological dimensions of the didactic problem related to systems of linear equations can contribute to the development of a Reference Didactic Model (RDM) as a basis for proposing study and research pathways in teacher education. To achieve this objective, we carried out a study based on the assumptions of the Anthropological Theory of Didactics (ATD) and sustaining ourselves, initially in the analysis of the epistemological dimension related to the origins and development of mathematical knowledge associated with systems of linear equations, we generate an Epistemological Reference Model (ERM). Based on this model, we carried out a study of the economic-institutional and ecological dimension of the *praxeologies* relevant to the development of the study of linear systems of thought in the scope of teacher training in search of the peculiarities of the Dominant Epistemological Model (DEM), described and interpreted in the documents official and teaching materials. The economic study allowed us to locate the systems of linear equations in four disciplines in the undergraduate curriculum (Analytical Geometry, Linear Algebra, Numerical Calculus and Ordinary Differential Equations). On the other hand, the ecological analysis of the object revealed conditions and restrictions that favor and hinder putting into practice the imposed tasks identified by the MED. With the analysis of these studies, we propose an Alternative Reference Didactic Model (ARDM) correlating the ERM and the MED for the analysis of a possible change in the *raison d'être* linear systems of equation. Finally, when considering the contributions revealed by the theory through the research, we proposed an Alternative Reference Didactic Model (ARDM) with a map of questions for the realization of possible study and research pathways.

Keywords: Linear systems of equations, Epistemological Dimension, Economic-Institutional Dimension, Ecological Dimension, *praxeology*.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ESQUEMA DOS BLOCOS TÉCNICO-PRÁTICO E TECNOLÓGICO-TEÓRICO DA OM.....	15
FIGURA 2 – CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR NA LINGUAGEM NATURAL.....	33
FIGURA 3 – REGISTROS NA LINGUAGEM NATURAL E ALGÉBRICA DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE DUAS EQUAÇÕES À DUAS INCÓGNITAS.	34
FIGURA 4 – LOCALIZAÇÃO DE RETAS E PONTOS NO PLANO CARTESIANO PELO SUJEITO DA PESQUISA.	40
FIGURA 5 – ETAPAS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA NA CONSTRUÇÃO DO MER.	54
FIGURA 6 – ESQUEMA DE NÍVEIS HIERÁRQUICOS DE CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA.	57
FIGURA 7 – DEFINIÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.	71
FIGURA 8 – MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA DE SEL NA ÁLGEBRA LINEAR.....	73
FIGURA 9 – MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.....	76
FIGURA 10 – MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA DOMINANTE NOS LIVROS ESCOLARES.....	90
FIGURA 11 – TÉCNICA QUE RELACIONA A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA COM O ESCALONAMENTO.....	95
FIGURA 12 – ESFORÇO COGNITIVO COMPREENDER COMO É DADA A ASSOCIAÇÃO DA MATRIZ.	97
FIGURA 13 – TÉCNICA DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES COM OPERAÇÕES ELEMENTARES EM MATRIZES.	100
FIGURA 14 – EXEMPLO SISTEMA UTILIZANDO A NOÇÃO DE POSTO E NULIDADE.....	100
FIGURA 15 – MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA NOS LIVROS DO ENSINO SUPERIOR.	101
FIGURA 16 – ESQUEMA RESUMIDO DA METODOLOGIA DA PESQUISA.	106
FIGURA 17 – ESQUEMA DE ESTRUTURAÇÃO DO PEP PARA ESTUDO DE Q_0	107
FIGURA 18 – MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA ALTERNATIVO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES PARA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES.....	117
FIGURA 19 – GRÁFICO DAS RETAS DAS EQUAÇÕES $Y = AX + B$ PARA $A \in [-5,5]$ E $B = 0.4$	111
FIGURA 20 – EXEMPLOS DE GRÁFICOS DE EQUAÇÕES $Y = AX + B$, PARA $A = -5$ E $B \in [-5,5]$	112

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA.	31
QUADRO 2 – FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA POR FREITAS (2013) EM SUA PESQUISA.	31
QUADRO 3 – SÍNTESE DA REVISÃO DE LITERATURA.	44
QUADRO 4 – PANORAMA DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE NOSSA REVISÃO.	45
QUADRO 5 – QUESTÃO ESPECÍFICA DO PROBLEMA DOCENTE.	50
QUADRO 6 – QUESTÕES REFERENTE À DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA.	53
QUADRO 7 – QUESTÕES REFERENTES À DIMENSÃO ECONÔMICA-INSTITUCIONAL.	56
QUADRO 8 – QUESTÃO REFERENTE À DIMENSÃO ECOLÓGICA	60
QUADRO 9 – PANORAMA HISTÓRICO NO PERÍODO DA ANTIGUIDADE PELOS POVOS BABILÔNIOS.	62
QUADRO 10 – PANORAMA HISTÓRICO NO PERÍODO DA ANTIGUIDADE PELOS POVOS CHINESES.	63
QUADRO 11 – PANORAMA HISTÓRICO NO PERÍODO DA ANTIGUIDADE PELOS POVOS GREGOS.	64
QUADRO 12 – PANORAMA HISTÓRICO NO PERÍODO DA ANTIGUIDADE PELOS POVOS EGÍPCIOS.	64
QUADRO 13 – PANORAMA HISTÓRICO NO PERÍODO DA ANTIGUIDADE PELOS POVOS INDIANOS.	65
QUADRO 14 – PANORAMA HISTÓRICO NO PERÍODO DA ANTIGUIDADE PELOS POVOS ÁRABES.	66
QUADRO 15 – CONJECTURAS SECUNDÁRIAS SOBRE A DEPENDÊNCIA DA NOMENCLATURA.	82
QUADRO 16 – CONJECTURAS SECUNDÁRIAS SOBRE TÉCNICA COM A INTERPRETAÇÃO DO RESULTADO	82
QUADRO 17 – CONJECTURAS SECUNDÁRIA SOBRE AS TÉCNICAS PARA RESOLVER A TAREFA INVERSA.	83
QUADRO 18 – CONJECTURA SECUNDÁRIA SOBRE RECURSOS COMPUTACIONAIS	83
QUADRO 19 – CONHECIMENTO E HABILIDADES DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.	87
QUADRO 20 – MAPA DE QUESTÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.	113

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – RESULTADOS DA CONJECTURA C1 PARA AUXILIAR NA ANÁLISE EXPLORATÓRIA (AE).....	92
TABELA 2 – RESULTADO DA CONJECTURA C2 PARA AUXILIAR NA ANÁLISE EXPLORATÓRIA (AE).....	93
TABELA 3 – RESULTADO DA CONJECTURA C3 PARA AUXILIAR NA ANÁLISE EXPLORATÓRIA (AE).....	93
TABELA 4 – RESULTADO DA CONJECTURA C4 PARA AUXILIAR NA ANÁLISE EXPLORATÓRIA (AE).....	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AE - ANÁLISE EXPLORATÓRIA

C1 - HÁ UMA DEPENDÊNCIA DA NOMENCLATURA ASSOCIADA A UMA TÉCNICA

C1A – Na resolução de sistema de equações lineares pela técnica de escalonamento predomina as letras latinas $\{x, y, z, t, \dots\}$ para representar as variáveis ou aparecem letras com índices $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$?

C1B – Como é representada a solução algébrica de um sistema de solução indeterminado? Predomina letras gregas $\{\alpha, \beta, \dots\}$ para representar os parâmetros das variáveis com grau de liberdade?

C1C – Nas tarefas de representação gráfica da solução de sistema de equações lineares predominam nos enunciados as letras $\{x, y, z\}$ ou aparecem com índices sugerindo a notação matricial?

C2 – Aplicar uma técnica não inclui a interpretação do resultado

C2A – Como é representada a solução algébrica de um sistema de solução indeterminado? Predomina letras gregas $\{\alpha, \beta, \dots\}$ para representar os parâmetros das variáveis com grau de liberdade?

C2B – Há baixa frequência de tarefas de resolução de sistemas de equações lineares focados na interpretação relacionados a outras áreas?

C2C – Na resolução de sistemas lineares com mais de três variáveis há baixa predominância em tarefas que incluem a interpretação do resultado em problemas reais, como por exemplo, restrição do domínio do conjunto solução?

C3 – Não se reverterem as técnicas para resolver a tarefa inversa

C3A – Na resolução de sistemas de equações lineares predomina tarefas com o método direto?

C4 – Estão ausentes recursos computacionais como auxílio nas tarefas de resolução de sistemas de equações lineares

C4A – Na resolução de sistema de equações lineares predomina tarefas com ou sem o uso de recurso computacional?

CAPES - COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

EA – EFETIVAÇÃO DA ANÁLISE

MDRA – MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA ALTERNATIVO

MDRD – MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA DOMINANTE

MEA – MODELO EPISTEMOLÓGICO ALTERNATIVO

MED – MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE

MER – MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

MQ – MAPA DE QUESTÕES

P_{11} : Como introduzir o sistema de equações lineares em um marco diferente do marco encontrado na OM dominante da instituição?

P_{12} : Como podemos organizar o estudo da resolução de sistema de equações lineares mediante um MER do modelo epistemológico geral que propõe a TAD?

P_{13} : Quais objetos matemáticos nutrem o sistema de equações lineares, isto é, qual a razão de ser de tal objeto matemático no âmbito das praxeologias?

P₁₄: As tarefas são de situações reais para o estudo de Sistemas de Equações Lineares?

P₁₅: A abordagem de ensino de Sistemas de Equações Lineares, permite articular a Geometria e Álgebra, a Álgebra Linear, a Geometria Analítica, Cálculo Numérico e Equações Diferenciais?

P₁₆: As tarefas de Sistemas de Equações Lineares são tratadas na forma algébrica?

P₂₁: Que âmbito institucional temos que considerar para abordar o problema didático da resolução de sistema de equações lineares: a sala de aula, a escola, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou mesmo a Civilização?

P₂₂: Qual o modelo epistemológico de sistema de equações lineares nas “instituições” estudadas?

P₂₃: Que dificuldades surgem quando pretendemos modificar OM de sistema de equações lineares e quais possibilidades de OD surgem?

P₂₄: É tratado tarefas de sistema de equações lineares em ambiente informatizado?

P₃₁: Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores?

P₃₂: Há alguma atividade com aplicação de Sistemas de Equações Lineares com mais de equações e três incógnitas?

PCN – PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

PCNEM – PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO

SEL – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

T1A – Resolver sistema de equações lineares pela técnica de escalonamento

T1B: Representar a solução algébrica da resolução de sistema de equações lineares de solução indeterminada

T1C – Representar a interpretação geométrica de sistemas de equações lineares, quando possível

T2A – Resolver sistemas de equações lineares de três e duas incógnitas que envolvem a interpretação gráfica

T2B – Resolução de sistemas de equações lineares que envolvem a interpretação do resultado relacionado a outras áreas

T2C – Resolução de sistemas de equações lineares com mais de três incógnitas que incluem a interpretação do resultado

T3A – Resolução de sistemas de equações lineares duas incógnitas

T3B – Resolução de sistemas de equações lineares três incógnitas

T3C: Resolução de sistema de equações lineares de n variáveis; $n > 3$

T4A: Resolução de sistema de equações lineares

TAD – TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

TRRS – TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

TSD – TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 MOTIVAÇÃO	13
1.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS: IDEIAS GERAIS	14
1.3 PROBLEMÁTICA: PROBLEMA DE PESQUISA, QUESTÃO, OBJETIVOS E METODOLOGIA	18
1.4 ESTRUTURA DA TESE	22
2 REVISÃO DA LITERATURA DE ESTUDOS CORRELATOS	24
2.1 PESQUISAS SOBRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	24
2.1.1 Organizações praxeológicas de sistema de equações lineares	25
2.2 PANORAMA DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NAS PESQUISAS	43
3 MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	47
3.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS PARA O ESTUDO	47
3.2 ESTUDO DA DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA DOS SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	61
3.3 MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	70
4 ANÁLISE INSTITUCIONAL DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES EM LIVROS DIDÁTICOS	78
4.1 ESTUDO DA DIMENSÃO ECONÔMICA-INSTITUCIONAL DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	78
4.2 MODELO DE REFERÊNCIA DOMINANTE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NOS LIVROS DIDÁTICOS ESCOLARES	87
4.3 MODELO DE REFERÊNCIA DOMINANTE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO SUPERIOR	91
5 PROPOSTA DE UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	103
5.1 ESTUDO DA DIMENSÃO ECOLÓGICA DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	103
5.2 MODELO DE REFERÊNCIA DIDÁTICO ALTERNATIVO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	105
5.3 REFLEXÕES, PERSPECTIVAS E LIMITAÇÕES DA PESQUISA	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
REFERÊNCIAS	119
ANEXO I - PRIMEIRA PARTE DAS ATIVIDADES DESSA PESQUISA	127
ANEXO II - SEGUNDA PARTE DAS ATIVIDADES DESSA PESQUISA.	131

1 INTRODUÇÃO

Nessa seção apresentamos a motivação, as ideias gerais da fundamentação teórica e metodológica que constituem a pesquisa, a problemática, questão e objetivos dessa pesquisa.

Este trabalho surgiu de inquietações do autor quando se deparou com uma situação vivenciada sobre a modificação curricular, sobretudo a possibilidade de excluir o objeto matemático sistema de equações lineares de algumas disciplinas da grade Licenciatura e a sua dispensabilidade em uma ou outra disciplina passou a ser questionada na reformulação do currículo.

O que motivou a mergulharmos nessa pesquisa, os elementos no contexto da pesquisa. Explanamos a na seção a seguir.

1.1 Motivação

A motivação dessa pesquisa começou em um *workshop* em que os docentes apresentaram as ementas das disciplinas e propostas das mesmas que haviam lecionado nos últimos três anos no curso de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física, no campus Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente (IEAA), da Universidade Federal do Amazonas (UFAM), na qual o autor exerce suas atividades laborais. Tais propostas curriculares faziam parte de um plano de ação para a reformulação do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) com vistas à Resolução CNE/CP nº 2 de 1º de julho de 2015, em que o Ministério da Educação “define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada” (BRASIL, 2015, p.8).

Para tal reformulação do PPC, ao analisarmos as ementas extraídas da Resolução 012 da Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão (CONSEPE) da UFAM, que regulamenta o PPC de Licenciatura em Ciências: Matemática e Física, constatamos que o objeto matemático Sistemas de Equações Lineares aparece implicitamente nas disciplinas: Álgebra Linear e Equações Diferenciais Ordinárias, explicitamente nas ementas das disciplinas Geometria Analítica e Cálculo Numérico.

Assim, a sua dispensabilidade em uma ou outra disciplina passou a ser questionada na reformulação do currículo.

Os sistemas de equações lineares estão presentes no ensino fundamental, médio, licenciaturas e vários cursos universitários da área de Ciências Exatas, com grande diversidade de enfoque, que vai desde ferramenta para resolução de problemas, até o seu estudo analítico definido como objeto na Álgebra Linear, entretanto não são apresentados como revelam sua construção histórica em que tal objeto teve um papel fundamental no desenvolvimento da Álgebra Linear (DORIER, 1990)

Gaita e Silva (2016, p.256-258) observam que não se questiona o porquê do ensino de sistema de equações lineares em pesquisas realizadas em língua portuguesa e espanhola. As autoras, ressaltam que existem poucos trabalhos de sistemas de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas, limitando a possibilidade de propor problemas para resolver em áreas tais como, a computação, engenharia, entre outras.

Diante desses questionamentos e as várias possibilidades de enfoques do estudo dos sistemas de equações lineares, debruçamos na investigação dos processos do ensino e da aprendizagem desse objeto matemático para formar professores com aporte da Teoria Antropológica do Didático (1999), que apresentamos brevemente, no que segue.

1.2 Fundamentos teóricos e metodológicos: ideias gerais

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1999) é uma extensão da teoria da transposição didática que pode auxiliar no estudo investigativo das dificuldades que surgem no processo de ensino por meio de condições que possibilitam a melhoria no desenvolvimento de atividades matemáticas propostas numa dada *Instituição*, além de determinar restrições que podem prejudicar e até mesmo impedir o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.

Esta não é apenas um conjunto de ferramentas teóricas e estudo de caso. É um programa de investigação emergente que desafia os limites dentro dos quais, tanto o passado e o presente de pesquisas sobre a educação matemática parecem estar confinados (WINSLOW, 2011).

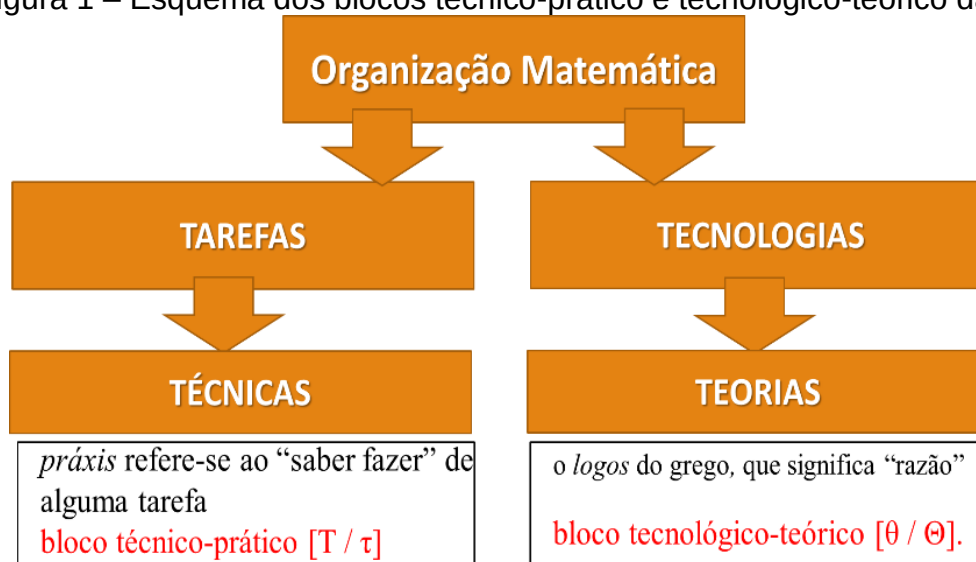
O conceito de *obra* surge na TAD como resposta à uma questão considerada problemática para estudo, constituído por um conjunto estruturado de *praxeologias* (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997).

Na TAD, qualquer atividade humana, tem duas partes indissociáveis. Por um lado, a *praxis* composta pelas tarefas e técnicas e, por outro lado o *logos*, formado pelos discursos tecnológicos com aporte de teorias, ou seja, os elementos que permitem justificar e entender o que se faz, o “saber fazer”, no sentido do discurso racional sobre a prática. E sendo assim não há *praxis* sem *logos*, e nem tampouco *logos* sem *praxis*. Na junção de *praxis* com *logos*, temos a *praxeologia* (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997).

Tal atividade humana demanda uma organização denotada por $[T, \tau, \theta, \Theta]$, estabelecendo a definição de organização ou (*praxeologia*) matemática (OM) que emerge visando responder à uma questão ou a um conjunto de questões composto por quatro componentes principais: tipos de tarefas (T), técnicas (τ), tecnologias (θ) e teorias (Θ) (GASCÓN, 2003).

A OM é qualquer atividade humana que realiza uma tarefa matemática t de algum tipo T , utilizando alguma técnica τ , justificada por um ‘modo de pensar’ - tecnologia θ , que por sua vez, é argumentada por uma teoria Θ .

Figura 1 – Esquema dos blocos técnico-prático e tecnológico-teórico da OM.



Fonte: Elaboração própria.

Tal *praxeologia* matemática apresentada, esquematicamente na Figura 1, é a junção de dois blocos: *práxis* refere-se ao “saber fazer” de alguma tarefa, bloco

técnico-prático [T / τ], e o *logos* do grego, “razão”, refere-se ao saber, bloco tecnológico-teórico [θ / Θ].

Compreendemos que a noção de *praxeologia* no campo da Didática da Matemática, no âmbito da TAD, é considerada uma atividade humana fundamental, nas práticas institucionais relativas a(os) objeto(s) que se pretende organizar para ensinar, do ponto de vista do saber matemático e didático, que permite a descrição e o estudo das condições e restrições de realização de práticas inerentes a tal objeto em processos do ensino e da aprendizagem em sala de aula.

Por outro lado, a fronteira entre o didático e o matemático parece não existir, uma vez que técnicas utilizadas para ensinar podem ser organizadas para produzir matemáticas e vice-versa. Segundo Gascón (2011), uma organização matemática (OM) é formada por *praxeologias* relacionadas ao próprio saber matemático, enquanto a organização didática (OD) surge paralelamente, com dois blocos, em que o primeiro, constituído pelas tarefas e técnicas didáticas, ou seja, a *práxis*, e o bloco *logos*, da razão sobre esta prática, formando pelas tecnologias e teorias didáticas. Uma OD refere-se à maneira que será estudada uma OM, a modelização didática da OM, isto é, como será organizado o conteúdo matemático para ser ensinado.

Em sua prática, além de modelizar a OM, o professor terá que conduzir a reconstrução da OM na sala de aula por meio de uma OD.

Para isso, inicialmente pode identificar tipos de questões e repostas a qual a obra foi construída ou poderia ser reconstruída.

Assim, nesse processo de formação de uma OM na obra a qual se insere: os campos de problemas que se traduzem em questões, surgem as técnicas que se podem resolver tais questões, os elementos tecnológicos e teóricos que permitem explicar e justificar suas técnicas (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997).

No contexto de sala de aula, toda atividade matemática pode ser interpretada como uma atividade de produção de *praxeologias* com o objetivo de responder à determinadas questões problemáticas.

Esta atividade requer que o estudante disponha de técnicas matemáticas adequadas para interpretar, desenvolver a técnicas matemática para dar sentido a *práxis*.

Desta forma, a atividade de resolver problemas está integrada no *logos* da OM, pois não há como separar as técnicas matemáticas que estão disponíveis numa determinada instituição da forma independente do discurso matemático disponível.

Esta integração indissolúvel das componentes de uma OM reflete-se no tipo de atividade didática, ou seja, no auxílio ao estudo da Matemática que propõe a TAD (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997).

Do ponto de vista que a Didática propõe o problema na elaboração do currículo, tem um componente matemático essencial, não se trata apenas de organizar as sequências dos conteúdos e tempo a tratar de cada assunto do currículo, mas sim em realizar um trabalho matemático de reorganização dos elementos constituintes das praxeologias: os tipos de tarefas, as técnicas, tecnologias e teorias que compõem cada obra e a base das questões que esta responde.

Para Chevallard, Bosch e Gascón (1997), os conteúdos conceituais são dispostos pelos nomes nas obras matemáticas que se pretendem estudar, tais como: “números racionais”, “transformações do plano” ou “equações e inequações de primeiro grau”, sistema de equações lineares, entre outros nomes.

Já os conteúdos procedimentais objetivam responder às questões selecionadas, por tipo de tarefas que os estudantes devem aprender para articular conteúdos conceituais.

Os conteúdos atitudinais indicam, de modo geral, como se deve considerar as matemáticas dentro de um conjunto de obras da sociedade, assim como aqueles aspectos da matemática que não se pode considerar como tarefas ou procedimentos.

Segundo Gascón (2010), as ferramentas que a TAD proporciona, têm provocado o desenvolvimento de articulação dos tipos de conteúdo propostos no currículo classificados por procedimentais, conceituais e atitudinais. Entretanto, ainda é uma questão para o professor, como organizar o ensino das matemáticas integrando os tipos de conteúdo propostos no currículo para que os conhecimentos matemáticos aprendidos não reduzam à um conjunto de técnicas algorítmicas e sem de sentido

Diante do exposto, consideramos os elementos constituintes das praxeologias dos Sistemas de Equações Lineares: os tipos de tarefas, as técnicas, tecnologias e teorias dos sistemas de equações lineares para compreendermos a sua *razão de ser* e como podemos articular os conteúdos procedimentais, conceituais e atitudinais para ensiná-lo no contexto para formar professores.

Assim, na perspectiva de compreender a *razão de ser* dos sistemas de equações na formação de professores, adotamos o processo metodológico qualitativo pautado no modelo proposto por Gascón (2011) para um problema didático

Com aporte da Teoria Antropológica do Didático, construímos um Modelo Epistemológico de Referência do objeto Sistemas de Equações Lineares na formação de professores, o que nos norteou na construção da problemática, a questão e objetivos dessa pesquisa, que são apresentas na seção a seguir.

1.3 Problemática: problema de pesquisa, questão, objetivos e metodologia

O fracasso escolar na educação matemática, de acordo com Chevallard (2012), é resultante da forma como é abordado o seu ensino, o que denominou de paradigma de “visita às obras”, *monumentalização* dos saberes, apresentados aos estudantes como único meio no processo de ensino e da aprendizagem, reduzindo o ensino à visita aos conteúdos curriculares, como se fossem monumentos, apenas aprender para realizar testes escolares.

Na TAD, segundo Chevallard (2012), a pedagogia de “questionar o mundo” é uma tentativa de ressignificar o paradigma escolar presente, o da *monumentalização* dos saberes, por meio de um percurso de estudo e pesquisa (PEP) para estudo de uma questão geradora Q_0 de outras questões derivadas Q_k com respostas provisórias $R_K^\diamond$ preestabelecidas a partir de objetos disponíveis O_i para tal estudo, que constituirão o *milieux* didático (mD) fabricados por um sistema didático $S(X, Y, Q)$. Em tal sistema, X são as pessoa(s) que deseja(m) estudar a questão com ajuda de orientadore(s) Y , podendo ser $Y = \emptyset$ em alguns momentos, para produzir uma reposta R esperada com objetos disponíveis para o estudo das questões não respondidas e problemas não resolvidos, que é, geralmente, o gesto do cientista em seu campo de pesquisa.

O paradigma de *questionar o mundo*, encontrar novos conhecimentos ou reencontrar os antigos, torna possível um caminho de pesquisa e estudo, que são os meios pelos quais aprendemos ou reaprendemos.

Nessa perspectiva, ao contrário do que é habitual no paradigma de “visita às obras”. O paradigma do “questionamento do mundo”, o conhecimento é construído por um processo estabelecido por uma pergunta Q_0 a ser ensinada, e em seguida é

realizada a pesquisa e percurso de estudo para responder à pergunta Q_0 e outras questões derivadas Q_k .

De acordo com Gascón (2011), as noções de motivação, aprendizagem significativa, individualização do ensino, aquisição de um conceito, abstração ou competência são exemplos de o que o autor denomina de noções disponíveis na cultura escolar e em grande maioria são importadas dos documentos curriculares.

Nesse contexto, a elaboração de um novo currículo, na perspectiva do paradigma “questionamento do mundo”, dependerá de objetos disponíveis para fazer perguntas sobre questões derivadas Q_k e não de qualquer hierarquia preestabelecida, dessa forma, qualquer questão pode ser significativamente suplementada por uma ou um conjunto de questões derivadas uma questão inicial que constituirão o critério para ajustar a qualidade e a profundidade na busca da resposta à Q_0 .

Atualmente podemos citar o “conhecimento profissional”; “a prática profissional”; e “engajamento profissional” que são as competências profissionais docentes pressupostas por parte dos professores, no desenvolvimento das Competências Gerais dispostas na Resolução No 2, de 1 de julho de 2015, que segundo o documento, são ditas essenciais para a promoção de situações favoráveis para a “*aprendizagem significativa* dos estudantes e o desenvolvimento de competências complexas, para a ressignificação de valores fundamentais na formação de profissionais autônomos, éticos e competentes”.

Segundo Gascón (2011, p. 207), o problema docente genérico: P_0 : O que tenho que ensinar aos estudantes de uma instituição I e como tenho que ensinar, por exemplo, na Geometria, na Estatística, no Cálculo Diferencial, origina formulações mais específicas de um problema docente. P'_0 : Como posso motivar meus alunos, aumentar seu interesse pelo estudo e melhorar sua atitude a um certo âmbito da matemática?

Com intuito de propor um modelo pautado na TAD do desenvolvimento de problemas didáticos, Gascón (2011) sugere um esquema de padrão heurístico estruturado em torno de três dimensões fundamentais a saber, a dimensão econômica, a dimensão epistemológica e a dimensão ecológica. Tal problema didático formará um problema de pesquisa no campo da Didática da Matemática.

O modelo proposto por Gascón (2011) de modo esquemático para um problema didático é representado por $\{ [(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3 \} \hookrightarrow P_\delta$, sendo P_0 a

formulação do problema inicial, denominado problema docente P_0 e P_δ o problema didático que contém as três dimensões: epistemológica – P_1 , econômica-institucional – P_2 e a ecológica – P_3 . O símbolo $\oplus$ refere-se à formulação do problema inicial P_0 , por ser incompleto, sendo necessário adicionar ao menos a dimensão epistemológica P_1 para ser considerado um problema didático. O símbolo $\hookrightarrow$ não deve ser interpretado como uma inclusão. Este indica que cada uma das dimensões P_i é logicamente anterior as dimensões P_{i+1} ou pelo menos P_i vem antes de P_{i+1} em um desenvolvimento hipotético do problema. Dizemos que uma formulação completa de P_{i+1} requer certa formulação prévia, mesmo que implicitamente, de P_i . Por fim, P_δ é denominado problema didático e considerado uma formulação “(podendo ser virtual) contendo as três dimensões fundamentais, as relações entre elas e algumas questões novas que não aparecem em nenhuma das dimensões anteriores.” (GASCÓN 2011, p. 206).

Sobre o problema didático P_δ , Gascón (2011) ressalta que o desenvolvimento histórico efetivo, ou seja, o desenvolvimento da história real da investigação didática, têm as seguintes características:

- a) Na prática científica normal - independente do enfoque teórico que se adote – geralmente não são explícitas todas as dimensões dos problemas didáticos; normalmente se estuda algum aspecto de alguma das dimensões do problema. O desenvolvimento posterior da investigação pode dar origem à formulação ao estudo de outros aspectos de alguma das dimensões restantes, assim como sua conexão com outros problemas didáticos.
- b) O desenvolvimento histórico da investigação didática nem sempre se atém e nem respeita de maneira estrita ao padrão heurístico, uma vez que na história real pode mudar a ordem em que se estudam algumas das dimensões básicas de um problema didático. Além disso, podem valorizar como *principais* ou *prioritárias* as dimensões que aqui consideramos *secundárias* – por exemplo, as dimensões, cognitiva, pessoal, ostensiva, instrumental etc. – e, desde já, pode ficar implícita e nem sequer ser levantada alguma dimensão que a TAD julgue como *básica* ou *fundamental*, como a epistemológica. (GASCÓN, 2011, p. 206-207, tradução nossa).

As três dimensões que integram uma formulação inicial de um problema didático, de acordo com Gascón (2011), devem ser consideradas como características constitutivas e definidoras da noção de um problema didático e não consideradas como propriedades de uma análise *posteriori* de problemas didáticos previamente definidos ou estabelecidos. Tal modelo heurístico, parte do seguinte princípio epistemológico: os problemas didáticos não são dados *a priori*, mas sim, surgem e se desenvolvem em conjunto com o a disciplina que os constituem, ao contrário das

pesquisas que partem da suposição que já sabemos os problemas didáticos, relacionados por exemplo com problemas do ensino e da aprendizagem.

Dessa forma, consideramos como ponto de partida um problema real enfrentado pelo pesquisador na proposta de reformulação do currículo, considerando para o estudo do problema didático, o aporte da TAD e abordagem do modelo proposto por Gascón (2011), que relaciona as três dimensões do padrão heurístico do desenvolvimento de um problema didático.

Para nossa pesquisa, optamos por iniciar com a questão docente relacionada aos Sistemas de Equações Lineares¹ : ***como e o porquê de ensinar de sistemas de equações lineares para estudantes na formação inicial de professores?***

Para busca em respondê-la, consideramos nossa questão docente e realizamos nossa pesquisa apoiada no desenvolvimento do problema didático proposto por Gascón (2011) o que nos levou a elaborar nossa questão de pesquisa: ***De que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo ao objeto matemático sistema de equações lineares podem contribuir com um desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores?***

Em busca de repostas com significados inerentes a *razão de ser* desse objeto matemático, temos o objetivo ***compreender de que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo aos sistemas de equações lineares podem contribuir com o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para a proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores.***

A metodologia de nossa pesquisa foi apoiada na abordagem proposta de Gascón (2011), que relaciona as três dimensões do padrão heurístico do desenvolvimento de um problema didático com os objetivos específicos:

No que tange aspectos sobre a **dimensão epistemológica**, realizamos um estudo histórico e epistemológico objeto matemático sistema de equações lineares

¹ Em nossa pesquisa incluímos os sistemas de equações para modelagem algébrica, conforme Gascón (1994).

com objetivo de ***construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER) dos sistemas de equações lineares.***

Referente a dimensão **econômica-institucional**, analisamos os sistemas de equações lineares à luz do nosso MER no currículo do curso, livros utilizados no curso, em documentos oficiais com objetivo de **identificar um Modelo Didático de Referência Dominante (MED) dos sistemas de equações lineares.**

No estudo relaciona à dimensão ecológica dos sistemas de equações lineares, à luz do nosso MER e MED, temos como objetivo ***propor um Modelo Didático de Referência (MDR) por meio de um Mapa de Questões (MQ) para possíveis Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP).***

No que se refere aos elementos textuais da tese, estão dispostos em cinco capítulos conforme estruturados na próxima seção.

1.4 Estrutura da tese

O primeiro capítulo apresentamos a motivação, as ideias gerais da fundamentação teórica e metodológica, a problemática, questão, objetivos e a metodologia dessa pesquisa.

No segundo capítulo, tratamos do estudo de nossa revisão da literatura de sobre o objeto sistema de equações lineares no ensino.

O terceiro capítulo discorremos sobre nosso estudo histórico e epistemológico dos sistemas de equações lineares que fundamentou nossa construção do Modelo Epistemológico de Referência (MER). Estudo referente à dimensão epistemológica.

O quarto capítulo explanamos sobre nossa análise institucional dos sistemas de equações lineares com o estudo econômico-institucional, o qual nos norteou na identificação do Modelo Didático de Referência Dominante (MED).

No quinto capítulo apresentamos a infraestrutura teórica e metodológica que utilizamos na pesquisa para a proposta de um Modelo Didático de Referência Alternativo (MEA) (apoiado no MER e no MED) para possíveis razão de ser de Sistemas de Equações Lineares por meio de nossa proposta de *mapa de questões* para percursos de estudo e pesquisa de formação de professores (PEP).

Por fim, apresentamos uma proposta de um modelo didático de referência alternativa (MEA) ao Modelo Didático de Referência Dominante (MED) de sistemas de equações lineares

No sexto capítulo, apresentamos nossas conclusões com as reflexões, limitações e perspectivas da pesquisa, discutindo qual a importância da metodologia e procedimentos metodológicos adotados, a relevância da revisão da literatura e do referencial adotado na discussão dos resultados da pesquisa, quanto ao objetivo, às hipóteses tecidas e à questão de pesquisa, aos aspectos metodológicos construídos pela pesquisa e seus resultados.

2 REVISÃO DA LITERATURA DE ESTUDOS CORRELATOS

Nesse capítulo, revisamos pesquisas que tratam de Sistemas de Equações Lineares (SEL), nosso foco concentrou-se nas questões presentes nos processos de ensino-aprendizagem de sistemas de equações lineares e ao consultar o Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em busca de trabalhos realizados no Brasil e que tivessem como palavras-chave os termos “sistemas de equações lineares”, encontramos 81 dissertações de mestrado, 18 teses de doutorado, realizados entre 1996 e 2021.

A princípio, buscamos trabalhos baseando-nos na leitura dos títulos e resumos das pesquisas com o filtro na área com a classificação feita pela CAPES, denominada como “Ensino”, o que nos retornou sete dissertações, entre mestrados acadêmicos e profissionalizantes e três teses de doutorado. Em segundo momento buscamos as referências nos trabalhos encontrados e uma pesquisa com os mesmos termos “sistemas de equações lineares” no Google Acadêmico e baseando-nos na leitura dos títulos e resumos por palavras-chave, nos retornou 26 trabalhos.

Para nosso estudo, fizemos as exclusões de trabalhos que não tratavam de sistemas equações lineares e ensino de matemática, o que resultaram em três teses e seis dissertações, os quais organizamos com destaque aos **aportes teóricos e metodológicos** e a **organização *praxeológica* sobre sistemas de equações lineares**.

Ao final do capítulo, apresentamos síntese dos **estudos correlatos sobre os sistemas de equações lineares** e com objetivo de identificar os elementos que alimentam os sistemas de equações lineares nas pesquisas, fizemos uma breve descrição de cada uma das pesquisas, destacando, quando possível, público-alvo, metodologia, objetivo das pesquisas, a proposta de organização didática para os sistemas de equações lineares, tipo de atividade aplicada e seus resultados apresentados no que segue.

2.1 Pesquisas sobre sistemas de equações lineares

Nessa seção, apresentamos as pesquisas de nosso estudo que tratam de organizações matemáticas para os processos de ensino e da aprendizagem dos

sistemas de equações lineares em materiais didáticos, as quais descrevemos, quando possível, o público-alvo, metodologia, objetivo das pesquisas, a proposta de organização *praxeológica* para ensinar os sistemas de equações lineares, tipo de atividade aplicada e seus resultados.

2.1.1 Organizações *praxeológicas* de sistema de equações lineares

Em seu trabalho, Coulange (2000) teve como aportes teóricos e metodológicos em dois campos teóricos da didática da matemática: a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e a Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Especificamente, no que tange as definições de sistemas de equações lineares, Coulange (2000) realizou um estudo histórico e epistemológico por meio de análise ecológica da evolução da transposição didática em livros didáticos de 1902 a 1999, para identificar restrições institucionais no estudo dos sistemas de equações lineares.

Nesse contexto, com base na análise da evolução da transposição didática em livros didáticos e análise ecológica feita em sua pesquisa, Coulange (2000, p.189) apresenta uma proposta do problema fundamental que engloba todos os tipos de problemas de sistemas de equações lineares de suas análises, descrito da seguinte maneira:

“Dados n objetos, para cada objeto i está associado a uma quantidade desconhecida. Há informações correspondentes a p -relações lineares entre essas quantidades desconhecidas. Você é solicitado a encontrar algumas das quantidades desconhecidas” (COULANGE 2000, p.189).

Em sua tese, Coulange (2000, p.189-192) definiu 8 variáveis que considera relevantes associadas a este problema fundamental.

A variável V_1 é o tipo de relação entre grandezas conhecidas ou assumidas como conhecidas e incógnitas, podendo ser realizada a modelagem algébrica. As variáveis V_2 e V_3 estão relacionadas ao estado do processo de modelagem, V_2 pode ser implícita ou explícita de quantidades desconhecidas ou não, enquanto V_3 trata da natureza da informação sobre as quantidades desconhecidas.

Os valores possíveis para V_2 são as incógnitas do sistema explicitamente designadas por letras em referência a magnitudes desconhecidas do enunciado, denominadas como explícitas e as incógnitas são implicitamente apresentadas na questão do problema.

A variável V_3 diz respeito às equações ou a equação a que o problema se resume e consta no enunciado ou em indicações associadas.

A variável V_4 diz respeito ao domínio da medida de grandezas desconhecidas com valores possíveis associados a outros domínios de medidas de quantidade desconhecida, e quando essa for o preço de um objeto, temos valores específicos para cada incógnita, como apresentado no enunciado:

Um vinicultor que acaba de comprar um pacote de vinhos disse: “Se eu vender meu vinho por 160 *francos* a unidade, terei o suficiente para pagar o pacote e ainda fico com 800 *francos*; e se eu o vender por 140 *francos*, como me oferecem, vou ter 800 sobrando”. Pede-se o número de peças de vinho e o preço do pacote? (COULANGE, 2000, p.195).

O domínio numérico da primeira incógnita desta afirmação corresponde ao número de peças de vinho, ou seja, é o subconjunto dos naturais. O domínio numérico da segunda incógnita é o subconjunto finito de decimais com duas casas, uma vez que trata do preço do pacote. Podemos encontrar problemas com domínios numéricos distintos de medição de acordo com quantidades desconhecidas (COULANGE, 2000, p.195).

As variáveis V_5 e V_6 se relacionam com a classificação e o tamanho do sistema obtido após sua configuração. A variável V_5 é o número n de valores desconhecidos e número p de relações lineares entre as quantidades desconhecidas. V_5 .

A variável V_6 é a natureza redundante ou contraditória de informações sobre quantidades desconhecidas, denominada por redundante ou não, contraditório ou não. Estes valores atribuídos a essas variáveis pelo par ordenado (n, p) determinam o tamanho, classificação e a solubilidade do sistema de equações lineares ao qual a afirmação é reduzida: por exemplo, se $n = p = k$ e a informação no enunciado é não redundante e não contraditória, o enunciado trata de um sistema de k equações à k incógnitas admitindo uma única solução.

A variável V_7 refere-se às formas de relações lineares entre as grandezas desconhecidas fornecidas no enunciado.

A variável V_8 são os valores possíveis para os coeficientes das equações à várias incógnitas descritas conforme enunciado do problema, ou seja, n -upla de quaisquer números correspondentes aos coeficientes dessas equações.

A partir dessas variáveis, Coulange (2000) analisou problemas modeláveis para o ensino de sistemas de equações lineares, não privilegiando as técnicas de manipulações algébricas em sua resolução.

A pesquisa de Coulange (2000) trouxe contribuição para o ensino modelizando os problemas relacionados aos sistemas de equações lineares com estudos prévios à sua resolução, para depois escolher a técnica e posteriormente sua solução.

No entanto, as questões apresentadas por Coulange (2000) foram extraídas de livros antigos franceses que consideram as técnicas e sua resolução como enfoque principal, o que se reflete na docência, conforme a pesquisadora constatou, também em *praxeologias* de professores franceses.

Por outro lado, Ramos (2016) em sua dissertação, intitulada “Objeto de aprendizagem para o ensino médio e Educação Profissional: Sistemas de Equações Algébricas Lineares aplicados em circuito”, objetivou produzir um material didático para o estudo de sistemas de equações lineares, com aplicações em circuitos de corrente elétrica para estudantes e professores dos níveis médio e técnico profissionalizante.

Os objetivos específicos, declarados por Ramos (2016) foram: identificar em livros didáticos quais são as abordagens utilizadas no conteúdo de sistema de equações algébricas lineares; identificar e utilizar *softwares* na implementação das atividades. Elaborar atividades que envolvam sistemas de equações algébricas lineares aplicadas a circuitos de correntes de malhas no curso técnico de nível médio; aplicar e avaliar o objeto de aprendizagem aos estudantes de cursos técnicos da área eletroeletrônica. Instrumentalizar os estudantes para desenvolver o pensamento algébrico aliado à aplicação de conceitos matemáticos.

Para atender tais objetivos, Ramos (2016) propôs atividades para aplicação aos estudantes de cursos técnicos em eletrotécnica. Os resultados foram analisados quantitativamente, por recursos da estatística descritiva e qualitativamente, utilizando parâmetros da análise de erros, apoiado em Cury (2013).

Segundo Ramos (2016), as sequências didáticas construídas em sua pesquisa foram compostas de teoria, prática e avaliação e os estudantes, antes de começarem suas atividades, realizaram leitura prévia do conteúdo em um *link* de teoria. Após a leitura, foram apresentadas telas para manipularem objetos com objetivo desenvolver

a conceituação, por formulações de conjecturas, consolidação com demonstrações e questionário aplicado.

As sequências didáticas propostas, segundo Ramos (2016) são constituídas por sete atividades, sendo as três primeiras sobre o estudo do sistema de equações lineares e as demais são atividades aplicadas, direcionadas ao ensino técnico com conexão no ensino de física conforme descritas por (Ramos, 2016, p.60).

A metodologia empregada, segundo Ramos (2016) buscou instrumentação da tecnologia informática, utilizando um objeto de aprendizagem desenvolvido nos *softwares* GeoGebra² e Notpad++³, para os processos de ensino e aprendizagem.

Ramos (2016) analisou os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), analisou também livros didáticos, baseando-se em Pinto (2015) e no PCNEM (BRASIL, 2000), com algumas conjecturas para análise do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, pautadas em dez questões:

Q1 – O Autor, no decorrer do conteúdo, apresenta algum texto histórico ou relata algum fato histórico que desperte no estudante um interesse sobre Sistemas Lineares?

Q2 - No decorrer do conteúdo, o autor apresenta algumas atividades relacionadas a textos ou fatos históricos referentes a Sistemas Lineares?

Q3 - Existem relações no ensino de Sistemas de Equações Lineares, Geometria e Álgebra?

Q4 - O autor propõe atividades explorando a forma geométrica nos Sistemas de Equações Lineares?

Q5 - O autor propõe atividades explorando a forma algébrica nos Sistemas de Equações Lineares?

Q6 - São apresentadas situações reais ou cotidianas para o estudo de Sistemas de Equações Lineares?

Q7 - Há atividades contextualizadas ao cotidiano do aluno?

Q8 - Há alguma atividade com aplicação do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares na área técnica?

Q9 - O autor propõe alguma atividade a ser trabalhada em ambiente informatizado?

Q10 - O autor faz referência a algum *software* ou aplicativo para auxiliar na aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares? (RAMOS, 2016, p.46).

De acordo com Ramos (2016), em Paiva (2013), é abordado o conteúdo de sistemas de equações lineares juntamente com determinantes. O contexto histórico dos sistemas de equações lineares é mencionado ao início com marco nos

² O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo, desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001.

³ Notpad++ é um *software* livre desenvolvido na linguagem C++ para edição de texto e código fonte que compatível com várias linguagens de programação para Windows.

determinantes, considerando o seu surgimento no Japão e na Europa, mas não são apresentadas tarefas relacionadas ao contexto histórico. As propostas sobre o estudo do sistema de equações lineares são reduzidas ao estudo das funções algébricas com gráfico de equações das retas associadas no caso particular, duas equações e duas incógnitas. As tarefas, em grande parte, são algébricas, reproduzidas por modelos nos exercícios resolvidos do livro. Apenas duas tarefas com técnicas justificadas no quadro geométrico, segundo Ramos (2016), foram encontradas.

De acordo com Ramos (2016), ao final do capítulo, no texto “Matemática sem fronteira”, Paiva (2013) apresenta aplicação sobre áreas de triângulos na topografia, constatando que as tarefas exploram o cotidiano do estudante, no entanto há uma insuficiência de recursos tecnológicos para o ensino de sistema de equações lineares.

Por outro lado, em Dante (2011), de acordo com Ramos (2016), um breve contexto histórico é apresentado relacionado à aplicação de sistemas de equações lineares ao cálculo de abastecimento de contêineres em um terminal portuário. O livro cita como atribuído ao surgimento dos sistemas de equações lineares, os povos do Egito, Babilônia, China e Índia, em diferentes épocas, justificando a necessidade de aplicação na engenharia, agricultura e economia.

Ainda Ramos (2016) apresenta um problema retirado de um documento matemático babilônico e no decorrer do livro, a resolução de sistemas de equações lineares é abordada com as técnicas justificadas nos quadros algébricos e geométricos, relacionando os sistemas de equações lineares de duas equações à duas incógnitas com retas, representado tanto no quadro algébrico quanto no geométrico. A resolução de sistemas de equações lineares de três equações à três incógnitas são relacionadas a planos, no quadro geométrico e destaca que as atividades justificadas no quadro algébrico são exploradas com maior frequência.

De acordo com Ramos (2016), em todas as tarefas são feitas análises de tarefas justificadas no quadro algébrico, no entanto, tarefas justificadas no quadro geométrico são menos exploradas e uma aplicação técnica em Dante (2011), “A Matemática e as Práticas Sociais”, é apresentada a importância do biocombustível como fonte de energia sobre a temática da preservação do ambiente. Ainda segundo Ramos (2016), no livro não são tratados nenhuma tarefa que envolva recurso tecnológico.

No livro, *Novo Olhar: Matemática* de Souza (2013), Ramos (2016) ressalta que apesar não apresentar abordagem histórica dos sistemas de equações lineares, é abordada uma proposta de tarefa de massa atômica relacionada aos sistemas de equações lineares trazendo uma breve história da teoria atômica de Dalton. Existe também a relação de tarefas com técnicas justificadas no quadro algébrico, de sistema de equações lineares de duas equações à duas incógnitas com o gráfico das equações de retas. S

obre o sistema de equações lineares de três equações à três incógnitas, é abordada, segundo Ramos (2016), brevemente a relação com planos no quadro geométrico, principalmente a interpretação de sua resolução.

No seu trabalho, Ramos (2016) desenvolveu uma sequência didática como método dinâmico e interativo para o estudo de sistemas de equações lineares com aplicação no estudo de circuitos, no entanto, nas tarefas apresentadas não são abordados os sistemas que possuem mais de três equações e os livros analisados também demonstraram insuficiência em tais tarefas, a aplicação carece de teoria que justifique com profundidade suas análises.

Em outra dissertação consultada, Freitas (2013), considerando aspectos em conformidade com o ensino fundamental II destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do terceiro (5^a e 6^a séries) e quarto ciclos (7^a e 8^a séries) do ensino fundamental (1998), currículo do Estado de São Paulo (2010) e orientações curriculares para o ensino médio (2006), objetivou desenvolver, aplicar e analisar uma sequência didática para investigar de que forma os alunos do ensino médio conseguem resolver sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas.

A pesquisa de Freitas (2013) teve como aporte a teoria de registros de representação semiótica (TRRS), Duval (2009). De acordo com a pesquisadora, a investigação desencadeou reflexões geradoras em torno da questão de pesquisa sobre dificuldades de estudantes de ensino médio para resolver sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas em que a abordagem proposta favorece a conversão e o tratamento de registros de representação semiótica.

Em busca de aprofundar em sua questão de pesquisa, Freitas (2013), utilizou a metodologia da Engenharia Didática apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Fases da Engenharia Didática.

Primeira fase: análises preliminares para a concepção da engenharia.	Feitas por meio de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto.
Segunda fase: concepção e análise a <i>priori</i> das situações didáticas.	Orientada pelas análises preliminares delimita certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar. Comporta uma parte de descrição e outra de previsão.
Terceira fase: experimentação.	Fase da realização da engenharia com uma população de alunos. Inicia-se quando se dá o contato pesquisador/observador com os alunos objeto da investigação.
Quarta fase: análise a posteriori e validação. É a confrontação das análises a <i>priori</i> e a <i>posteriori</i> .	Apoia-se sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas, durante cada sessão de ensino, nas produções dos alunos e na análise a <i>priori</i> . Nesta fase que se validam ou refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia.

Fonte: (FREITAS, 2013, p. 16).

Na metodologia, as fases da pesquisa fundamentadas por Freitas (2013) são desenvolvidas em duas partes conforme apresentadas no quadro 2.

Quadro 2 – Fases da Engenharia Didática por Freitas (2013) em sua pesquisa.

Estudos preliminares	- Fundamentação Teórica: Teoria de registro de representação semiótica (DUVAL, 2009). - Análise de documentos oficiais. - Revisão da Literatura. - Análise de livros didáticos.
Sequência Didática.	- Análise a <i>priori</i> da atividade proposta. - Experimentação: Registro dos dados observados na aplicação da sequência didática. - Análise a <i>posteriori</i> e validação: Análise da produção discente comparando a análise a <i>priori</i> e apresentação de suas conclusões.

Fonte: (FREITAS, 2013, p. 16).

Freitas (2013) analisou as orientações curriculares para o ensino médio (2002) e os Parâmetros Curriculares Nacionais 5^a a 8^a séries (1998) que pontuam a importância dos sistemas de equações lineares no desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da exploração de situações de aprendizagem que permitam ao discente:

“reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico” (BRASIL, 1998, p. 64).

Ao analisar as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - PCN+ (2002), Freitas (2013) fundamenta o aporte da teoria de registro de representação de semiótica (TRRS) proposta por Duval (2009), pois observa que se deve construir uma conexão entre as diferentes linguagens, associando situações e problemas geométricos às suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.

Por fim, Freitas (2013) destaca que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) (2000) observam que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que a memorização de resultados e a presença da tecnologia pode ajudar a propiciar isso:

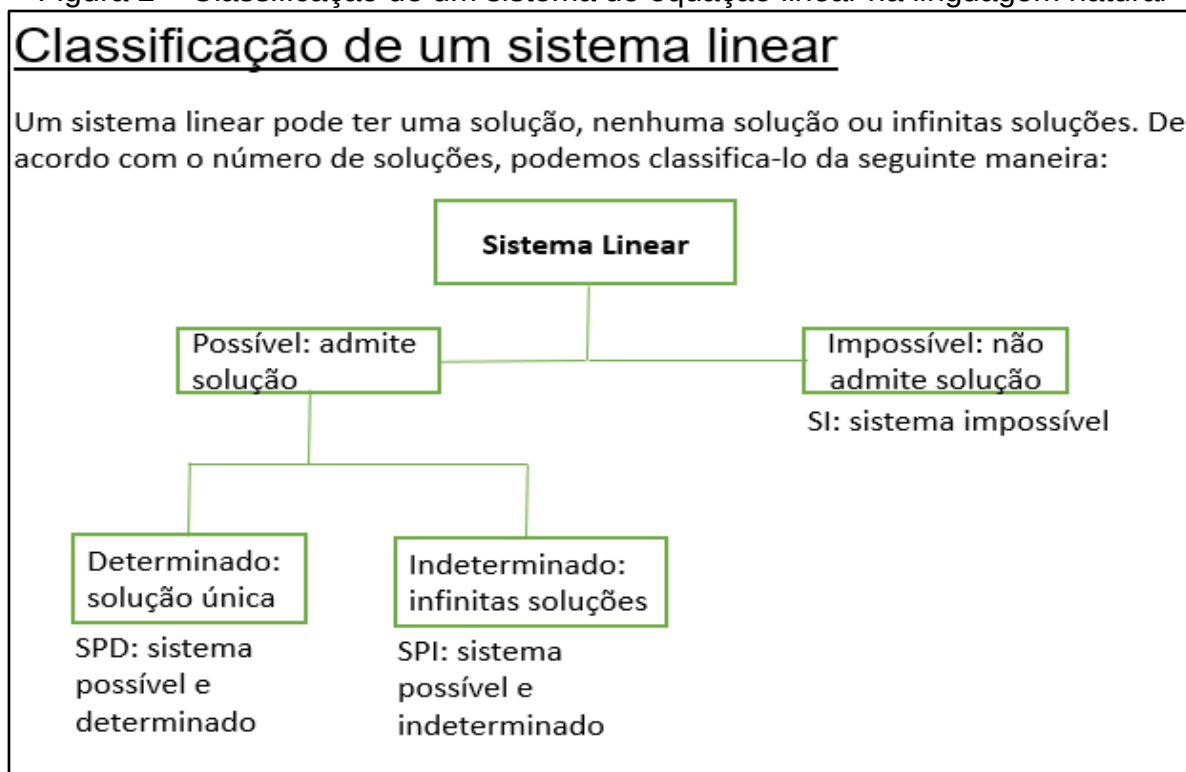
[...] a presença da tecnologia nos permite afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático (BRASIL, 2000, p. 252).

Dessa forma, Freitas (2013) desenvolveu uma sequência de atividades, fundamentada nos documentos oficiais estudados e na teoria proposta por Duval (2009). Para a experimentação, optou trabalhar conceitos matemáticos com o recurso do *software* GeoGebra, justificando o grande número de experimentações possíveis representados pelos coeficientes das equações de cada reta associados aos sistemas de duas equações à duas incógnitas.

Freitas (2013) analisou três livros didáticos consultados na pesquisa de Battaglioli (2008), o primeiro livro examinado foi Ribeiro (2010), cuja escolha foi justificada por ser adotado na escola em que foi aplicada a sequência de atividades.

Freitas (2013) salienta que embora as recomendações nas orientações curriculares para evitar a resolução de sistemas de equações lineares com a utilização de matrizes, pois o procedimento é apresentado sem demonstração ou justificativa e, portanto, de pouco significado para o estudante, Ribeiro (2010) inicia com registro no quadro algébrico de um sistema de equações de duas equações e duas incógnitas e conseqüentemente associa com os conceitos de sistemas de equações lineares à matrizes e segue com a classificação de sistemas de equações lineares na língua natural conforme Figura 2.

Figura 2 – Classificação de um sistema de equação linear na linguagem natural



Fonte: (RIBEIRO 2010, p.165).

De acordo com Freitas (2013), Ribeiro (2010) apresenta exemplos com solução do sistema de equações lineares no registro no quadro algébrico, com as possíveis soluções, tendo-se a conversão para o registro no quadro geométrico e nota-se, em um único exemplo, a proporcionalidade entre duas equações, sem explorar as consequências de seu registro no quadro geométrico para duas equações e duas incógnitas.

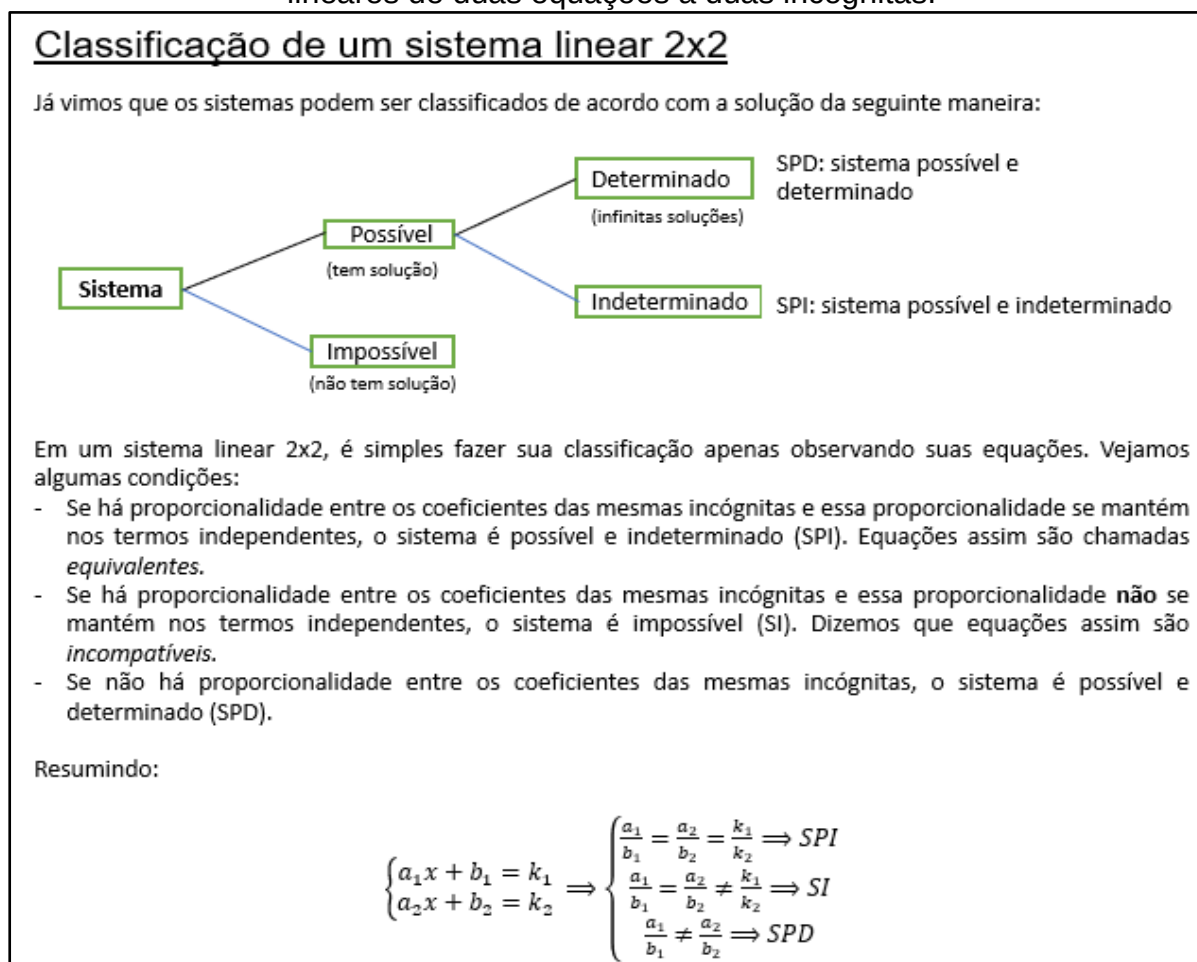
Após análise do livro de Ribeiro (2010), observou-se, na sequência de exercícios resolvidos e propostos, a abordagem do registro de partida na língua natural ou no registro algébrico. Em situação alguma é solicitada resolução gráfica e a relação dos coeficientes das equações com a sua representação gráfica é timidamente abordada.

No segundo livro analisado por Freitas (2013), em que Dante (2011) inicia o capítulo intitulado “Sistemas Lineares 2X2”, resolvendo com a técnica do método da adição, com tratamentos no registro no quadro algébrico para determinar a solução de um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas.

No livro de Dante (2011), Freitas (2013) destaca que a interpretação geométrica da solução dos sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas é

discutida de acordo com a posição relativa das retas que as representam. A seguir, o autor apresenta a classificação de sistema de equações lineares, com proporcionalidade ou sem, entre coeficientes de suas equações e de seus termos independentes, conforme apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Registros na linguagem natural e algébrica dos sistemas de equações lineares de duas equações à duas incógnitas.



Fonte: (DANTE 2011, p.148, 149).

Segundo Freitas (2013), Dante (2011) apresenta dois exemplos de sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas no registro algébrico, classificando pela existência, ou não, da proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes das equações, sendo um na forma matricial e com o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes, para sua análise da classificação.

Freitas (2013) observa que o problema está quando o determinante for nulo, pois não há como classificá-lo em sistema impossível ou possível e indeterminado,

somente observando a matriz dos coeficientes na abordagem por matrizes para resolução de sistemas de equações lineares.

Freitas (2013) verificou-se o fato de não ser colocada uma situação no registro na língua natural, como registro de partida ou registro de chegada. A estratégia de resolução dos sistemas de equações lineares que predomina sempre é a mesma e os tratamentos efetuados foram dentro do próprio registro algébrico.

Segundo Freitas (2013), houve uma grande exploração de exercícios abordando a relação de proporcionalidade entre os coeficientes das equações dos sistemas e sua classificação, mas não foram propostas atividades de conversão do registro na língua natural ou algébrico para o registro gráfico.

Freitas (2013) conclui que há ausência na abordagem dos sistemas equações lineares, com ao menos duas conversões de registros de representação, condição necessária para a apreensão do conhecimento pelo aluno, conforme salienta Duval (2009). Além disso, ressalta que não houve proposta de atividade com a representação das equações por meio das retas correspondentes no plano cartesiano.

No terceiro livro Dante, (2011), Freitas (2013) considera relevante para verificar como o tema é tratado nas séries finais do ensino fundamental, período de introdução dos sistemas de equações lineares, segundo recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais da 5ª a 8ª Séries (1998).

Foi constatado por Freitas (2013) que o registro algébrico é predominante nas apresentações dos sistemas de equações lineares e o tratamento algébrico escolhido com as técnicas da adição e substituição para sua resolução.

Da análise dos três livros didáticos, Freitas (2013) deduziu que as conclusões ditas como regras pelos autores, poderão dificultar ao discente notar as modificações resultantes das alterações feitas no registro gráfico no algébrico e vice-versa, prejudicando a discussão de sua resolução.

Segundo Freitas (2013), a Engenharia Didática embasou a análise das atividades desenvolvidas e as propostas com o *software* GeoGebra permitiram muitas experimentações na alteração dos valores dos coeficientes das incógnitas e o termo independente das equações, o que permite perceber mudanças nos quadros algébrico e geométrico.

A pesquisa de Freitas (2013) trouxe contribuições com atividades sobre o estudo de sistemas de equações lineares com e sem o *software* GeoGebra, no

entanto, não foram abordados os sistemas de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas e os livros didáticos são de mais de dez anos.

Por outro lado, Santos (2017) construiu um panorama histórico do conteúdo de sistemas de equações lineares com duas equações à duas incógnitas em livros didáticos publicados e adotados no Brasil no período compreendido entre 1930 e 1970. Para a análise, Santos (2017) teve como aporte teórico-metodológico a análise de conteúdo de acordo com Bardin (2011).

Santos (2017) analisou oito livros didáticos, nos quais buscou identificar, de acordo com o período das publicações, se havia alguma tendência pedagógica, considerando as normativas da legislação escolar e os preceitos do Movimento da Matemática Moderna.

Foi constatado por Santos (2017), em todos os livros, a ausência de abordagens históricas no tópico referente aos sistemas de equações lineares.

De acordo com Santos (2017), nos livros mais antigos, não se dava ênfase aos exercícios ou problemas de sistemas sem solução, havendo predominância nas resoluções no quadro algébrico e as técnicas de resolução com excesso de símbolos, com destaque na Teoria de Conjuntos, foram diminuindo nos autores que aderiram ao Movimento da Matemática Moderna⁴.

O Movimento da Matemática Moderna no Brasil que se intensificou entre as décadas de 60 e 70 com mudanças significativas nas práticas pedagógicas referente aos sistemas de equações lineares (SANTOS, 2017).

Santos (2017), elaborou um material para a formação professores de Matemática e áreas afins em sua pesquisa, realizou estudo histórico dos sistemas de equações lineares de duas equações lineares com duas incógnitas, que permaneceu nos livros didáticos, considerando que no período analisado, em nenhum momento, esse conteúdo desaparece, apesar de modificações das técnicas de resolução, inclusão ou não da resolução no quadro geométrico e a forma metodológica de apresentar este conteúdo tenham sido alteradas.

⁴ Movimento da Matemática Moderna (MMM), iniciado no Brasil, na década de 60 do século XX. Ainda de maneira tímida, suas discussões foram ganhando força nos congressos nacionais realizados em: Salvador (1955); Porto Alegre (1957); Rio de Janeiro (1959); Belém (1962) e São José dos Campos (1966). A principal discussão, que permeava no Brasil, nesses congressos, era uma análise crítica dos currículos vigentes e o aperfeiçoamento dos professores com relação às essas tendências modernas (SANTOS, p. 180, 2017).

Por outro lado, na pesquisa de Silva (2021), que objetivou investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de sistemas de equações lineares aplicada em estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Os referenciais teórico e metodológico que fundamentaram a pesquisa são a Teoria de Registros de Representações Semióticas (TRRS) proposta por Duval (2009) e Resolução de Problemas, conforme dispostas por Dante (2011), os quais deram embasamento para a construção da sequência didática proposta.

Dessa forma, Silva (2021) propôs uma experimentação aos sujeitos de pesquisa por meio de uma sequência com dez problemas sobre o conteúdo de sistemas de equações lineares com o intuito de que os estudantes resolvessem os problemas, transcorrendo entre os registros de língua natural, algébrica e gráfica.

Para coleta dos dados, Silva (2021) utilizou o diário de campo, os registros das resoluções dos participantes da pesquisa e um questionário para avaliar a sequência didática proposta.

Silva (2021) relata que a maior parte dos estudantes conseguiu transitar ao menos entre dois tipos diferentes de representações de um mesmo objeto matemático.

Segundo Silva (2021), não houve dificuldades relevantes nas conversões e tratamentos nas resoluções algébricas, no entanto, apresentaram dependência de *softwares* na representação gráfica, destaca ainda que existem dificuldades relacionadas à interpretação dos problemas em língua natural.

Silva (2021) trouxe contribuições com propostas de problemas sobre sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas e de três equações e duas incógnitas com sequência didática à luz da teoria de registros de representações semiótica, entretanto, não trabalhou a resolução de problemas com resolução de sistemas com mais de três equações e três incógnitas que, embora não possuem interpretação geométrica, podem ser resolvidos com agilidade e economia de tempo para análise de problemas reais com apoio de *softwares*.

Em contrapartida, o trabalho de Silva (2016), intitulado “sistemas lineares: uma proposta apoiada na exploração de registros semióticos e na utilização de um recurso computacional”, embasado na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), proposta por Duval (1995) sobre o estudo sobre Sistemas Lineares, com o qual defende e pretendeu-se investigar a articulação de registros semióticos com um

recurso computacional para construção do conceito de sistemas de equações lineares com três equações e três incógnitas.

A metodologia escolhida por Silva (2016) é a *Design Experiments*, dispostas em Cobb et al. (2003). Segundo Silva (2016), foi realizada uma revisão bibliográfica de pesquisas que abordam o tema sistemas de equações lineares com tecnologias informáticas como ferramenta dos processos de ensino e aprendizagem. Silva (2016) objetivou analisar o pensamento matemático do estudante frente à influência dos registros de representações semióticas e da tecnologia nos processos de ensino-aprendizagem.

Silva (2016) observa nas produções discentes avanços na construção do conceito de sistemas de equações lineares de três equações e três incógnitas, indicando ser possível uma abordagem para articular o registro algébrico com o registro gráfico, enfatizando as relações existentes entre a Geometria Analítica e a Álgebra Linear.

A dissertação de Silva (2016), apesar de trazer atividades possíveis para aplicar em sala de aula com *software* Winplot⁵ para sistemas de equações de três equações e três incógnitas, no entanto, em sua proposta, não existem sistemas de equações lineares com possibilidades das variações dos parâmetros em sistemas de três equações à três incógnitas e com mais de três incógnitas.

A investigação de Martins (2019) em pesquisa de doutorado realizado com um adolescente cego que cursava o 9º ano do ensino fundamental, objetivou identificar quais estilos de pensamento matemático são mobilizados por um sujeito cego ao resolver problemas envolvendo sistema de equações lineares.

O aporte teórico de Martins (2019) foi a teoria dos estilos de pensamento matemático, proposta por Ferri (2003), que, baseada na definição de estilos de pensamento de Sternberg (1997), indica a existência de três estilos de pensamento matemático: analítico, visual e integrado.

De acordo com Martins (2019) os estilos pensamento matemático visual é caracterizado por imagens internas e de representações externas pictóricas, tais como desenhos, esboços, gráficos, entre outras, para resolver situações matemáticas. Já o

⁵ *Software* educacional de geometria dinâmica desenvolvido por Richard Parris em 1985, com a finalidade de plotar gráficos de funções com uma ou duas variáveis, escrito em linguagem C, chamava-se PLOT e rodava no antigo DOS. O programa foi rebatizado quando foi lançado o Windows 3.1. A versão para Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++.

estilo de pensamento matemático analítico é caracterizado por representações internas formais e pela externalização de algoritmos formais. Por outro lado, o estilo de pensamento matemático integrado é a combinação dos estilos visual e analítico.

A análise das representações, utilizadas pelo sujeito da pesquisa de Martins (2016), foi baseada nos estudos sobre os estudos de registros de representação semiótica, visão e visualização de Duval (1993, 1995, 1999).

Para o trabalho com sistemas de equações lineares, Martins (2016) optou como referência a pesquisa de Coulange (2000), a qual foi possível identificar as oito variáveis para análise da resolução das atividades propostas.

A metodologia do desenvolvimento das atividades da tese de Martins (2016) foi o *Design Experiments* proposta por (Cobb et al., 2003), em que o meio do estudo: sujeitos, atividades, materiais, entre outros elementos que pertencem a uma ecologia e foram analisadas todas suas variações durante a realização da pesquisa.

Martins (2016) destaca que mesmo o sujeito desconhecendo a representação gráfica de sistemas de equações lineares, não o impediu de responder as questões e foi possível constatar que os estilos de pensamento matemático visual e integrado não foram mobilizados.

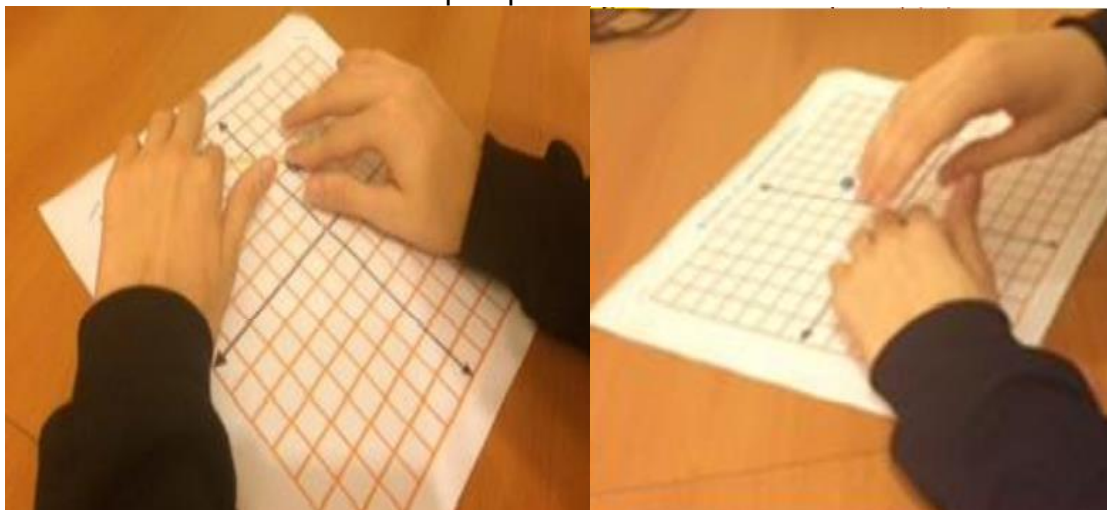
De acordo com Martins (2016), a análise dos dados indicou a predominância do estilo de pensamento matemático analítico e a utilização dos registros de representação semióticos algébricos e simbólicos, sendo que também houve tratamentos nesses registros.

Com relação às variáveis descritas por Coulange (2000), Martins (2016) identificou que o sujeito utilizou com maior frequência a variável relativa ao domínio numérico e aos conhecimentos culturais necessários para resolver as situações propostas.

Martins (2016) fez uma adaptação na definição do estilo de pensamento matemático visual dada por Ferri (2003), pois considerou a representação desse estilo de pensamento matemático não envolve todos os recursos sensoriais remanescentes.

Dessa forma, Martins (2016) definiu o estilo de pensamento matemático sensório-tátil, em que as representações mentais dos sujeitos cegos podem ser materializadas não só por recurso tátil, mas também por qualquer uma de suas vias sensoriais, podendo ser constatado na identificação de retas e localização de pontos no plano cartesiano conforme Figura 4

Figura 4 – Localização de retas e pontos no plano cartesiano pelo sujeito da pesquisa.



Fonte: (MARTINS 2019).

O trabalho de Martins (2019) enfocou nas diferentes representações do objeto matemático sistemas de equações lineares pelo sujeito de pesquisa e as reações e suas percepções durante a realização do estudo, no entanto não foram abordadas tarefas com sistemas de equações lineares diferentes de duas equações e duas incógnitas e possíveis caminhos de pesquisa para abordar sistemas de equações lineares de mais equações e incógnitas e sua a generalização.

Em contrapartida, Klaiber (2019) em sua tese, “Introdução à álgebra linear em um curso de licenciatura em química: o desenvolvimento do pensamento matemático avançado por meio de uma experiência de ensino” teve por objetivo investigar o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino.

Na metodologia, Klaiber (2019) construiu uma trajetória de aprendizagem, composta por cinco tarefas e dois instrumentos de avaliação, para os conteúdos de matrizes e sistemas de equações lineares em nove episódios de ensino, durante uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, nos quais as interações e discussões entre a professora-pesquisadora e os estudantes, bem como a escolha e a condução das tarefas, pautaram-se nas perspectivas do ensino-aprendizagem

exploratório de Ponte (2015) e do Pensamento Matemático Avançado (PMA) de Dreyfus (2002).

Em sua pesquisa, Klaiber (2019) analisou cada um dos episódios, examinando as resoluções em busca de indícios da mobilização de processos do PMA, de acordo com Dreyfus (2002).

Como resultado, Klaiber (2019) identificou que todos os participantes mobilizaram para resoluções das tarefas, os processos do PMA e em sua conclusão, Klaiber (2019) destaca que o ensino de conteúdos de matrizes e sistemas de equações lineares, por meio de tarefas investigativas fundamentada nas dificuldades dos estudantes, permitiu o desenvolvimento do pensamento avançado na abstração, o que é fundamental para o curso de Álgebra Linear.

Apesar de concordamos que a pesquisa de Klaiber (2019) trouxe contribuições com tarefas investigativas sobre os sistemas de equações lineares mostrando possível a abstração, entretanto, apresenta apenas atividades reduzidas aos sistemas de equações de duas equações e duas incógnitas e três equações e três incógnitas, restringindo a oportunidade de sua generalização.

Por fim, Lima (2019) em sua pesquisa intitulada “Sistemas de equações lineares na base nacional comum curricular: uma proposta de ensino”, objetivou compreender as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino médio no que se refere ao conteúdo de sistemas de equações lineares, análise de livros didáticos de tal conteúdo e uma proposta de sequência didática para o ensino médio.

Em seu trabalho, Lima (2019) apresenta o que é a Álgebra Linear, de acordo com Hefez e Fernandez (2016) que a resumem como um campo da matemática que estuda os espaços vetoriais e funções denominadas transformações lineares, as quais pertencem a esses espaços vetoriais.

De acordo com Lima (2019), a Álgebra Linear em diversos campos de aplicação da ciência e analisou os livros didáticos de Dante (2011), Sousa e Garcia (2016) que mostram que para resolução de problemas ligados a circuitos elétricos é necessário dominar a resolução de sistemas de equações lineares.

Ainda na pesquisa de Lima (2019), é destacado que no ramo da química para balancear equações químicas também podemos resolver com os sistemas de equações lineares.

De acordo com Dorier (1998, p. 193), a Álgebra linear constitui uma parte importante do conteúdo matemático que deve ser ensinado no início na universidade, considerada fundamental. A Álgebra Linear desenvolveu nas últimas décadas e os modelos matemáticos lineares tiveram um papel com o avanço da informática, inúmeras aplicações foram construídas e consolidadas ao longo dos séculos, desde os indícios do surgimento dos sistemas de equações lineares, determinantes e matrizes.

Segundo Lima (2019), em sua análise de livros didáticos de Anton e Rorres (2012) destacam algumas das possibilidades para recursos da Álgebra Linear para campos de aplicação na construção de curvas por pontos específicos, na programação linear geométrica, na interpolação *spline* cúbica, nas cadeias de Markov, teoria de grafos, jogos de estratégias, modelos econômicos Leontief, administração florestal, computação gráfica, distribuição de temperatura de equilíbrio, tomografia computadorizada, fractais, teoria do caos, criptografia, genética, deformações e morfismos.

Lima (2019) salienta que autores não esgotam todas as possibilidades para aplicações com a Álgebra Linear e destacam alguns dos documentos mais antigos conhecidos relacionado aos sistemas de equações lineares, considerado mais importante tratado chinês, dominado Chiu Chang Suan Shu, ou “Os Nove Capítulos da Arte Matemática”. Segundo os autores, tal tratado contém 178 problemas que são solucionados por sistemas de equações lineares.

Sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Lima (2019) relata que a BNCC foi idealizada, discutida e sancionada com uma base nacional comum curricular com o propósito de unificar todos os currículos diversificados existentes em todo o país.

Segundo Lima (2019), a BNCC (Brasil, 2018, p. 7) é um documento que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais para todos os estudantes das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (Brasil, 2014).

De acordo com Lima (2019), a BNCC é fruto do PNE com objetivo de atenuar as disparidades de conteúdos e das metodologias de ensino nas diferentes regiões

do Brasil por meio de um documento que determina os conhecimentos essenciais para todos os alunos da educação básica nas redes de ensino público e particular.

O Plano Nacional de Educação (PNE) tem a previsão para dez anos (BRASIL, 2014). Este documento estabelece as metas do governo federal para a educação básica e superior a serem cumpridas ao longo de sua vigência, promulgado pela lei nº 13500/2014.

Dessa forma, os currículos de todas as redes públicas e particulares devem ter a BNCC como referência. Vale ressaltar que esse direito está na constituição Federal de 1988, expressa no caput do artigo 210, onde traz a seguinte redação: “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais”.

Em resultados da pesquisa Lima (2019), declara que as atividades construídas com o *software* GeoGebra despertaram um maior interesse dos alunos frente às atividades com lápis e papel, visto que houve uma participação significativa, no entanto considera necessária a ampliação dos assuntos estudados com essa tecnologia informática, pois considera geradora de reflexões sobre paradigmas existentes entre estudantes e professores nos processos de ensino-aprendizagem. Salienta ainda que há uma escassez de sequências de atividades com tais tecnologias acessíveis à comunidade escolar.

Na próxima seção apresentamos a síntese do estudo da revisão da literatura e nossas escolhas teóricas e metodológicas para o desenvolvimento dessa pesquisa.

2.2 Panorama dos sistemas de equações lineares nas pesquisas

Encontramos teorias diversas para análise ou construção das sequências são apresentadas nos trabalhos estudados para o objeto sistemas de equações lineares.

Houve uma tendência na escolha da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Duval (2009), para análise de *praxeologias*.

Sobre o objeto matemático sistemas de equações lineares não apresentaram o seu estudo com mais de três equações à três incógnitas, pois constatamos que as *praxeologias* de sistemas de equações lineares com duas ou três equações e incógnitas predominaram nas *praxeologias* encontradas em nossa revisão.

Consideramos relevante a elaboração de tarefas propostas por Coulange (2000) com a modelagem algébrica de variáveis do Problema Fundamental com possibilidade de diversas significações conforme mostrou ao ser utilizado na pesquisa de Martins (2016) para os sistemas de equações lineares na formação de professores com sujeito cego.

O *software* educacional mais frequente na construção de propostas de atividades com tecnologias informáticas foi o GeoGebra, no entanto, a inexistência de tais atividades nas pesquisas consultadas com sistemas de equações lineares com mais de três equações e três incógnitas, mesmo existindo a possibilidade de resolver tais sistemas com essa ferramenta educacional.

No quadro 3 apresentamos os recursos para os aportes teóricos e metodológicos das pesquisas consultadas em nossa revisão e para a construção das organizações matemáticas sobre os sistemas de equações lineares.

Quadro 3 – Síntese da revisão de literatura.

	AUTOR	FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS E METODOLÓGICAS	PRAXEOLGIAS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES
1	COULANGE (2000)	- Teoria Antropológica do Didático (1999). - Teoria das Situações Didáticas (1996).	Modelagem algébrica de variáveis do Problema Fundamental com possibilidade de diversas significações para os sistemas de equações lineares na formação de professores.
2	RAMOS (2016)	- Análise de livros didáticos (PINTO, 2015). - Análise de erros (CURY, 2013).	Método dinâmico e interativo para o estudo de sistemas de equações lineares com aplicação no estudo de circuitos com <i>softwares</i> GeoGebra e Notpad++ para instrumentalização de professores.
3	FREITAS (2013)	- Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009). - Engenharia Didática. ARTIGUE, 1998)	Atividades com o <i>software</i> GeoGebra para experimentações na alteração dos valores dos coeficientes das incógnitas e o termo independente das equações para estudo nos quadros algébrico e geométrico.
4	SANTOS (2017)	- Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011).	Material com uma abordagem histórica dos sistemas de equações lineares para a formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins.
5	SILVA (2021)	- Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009). - Resolução de Problemas (DANTE, 2011).	Propostas de problemas sobre sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas e de três equações e três incógnitas com e sem o apoio do <i>software</i> GeoGebra aplicados em estudantes de ensino médio.
6	SILVA (2016)	- Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009). - <i>Design Experiments</i> (COBB et al., 2003)	Proposta de uma sequência de atividades de resolução de sistemas de equações de três equações e três incógnitas aplicados em estudantes de ensino médio para sala de aula com a utilização do <i>software</i> Winplot.
7	MARTINS (2019)	- Pensamento matemático (FERRI, 2004).	Sequência de atividades sobre sistemas de equações lineares elaborada de modo a

		- Estilos de pensamentos STERNBERG (1997); - Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009).	proporcionar a utilização dos sistemas auditivo, fonador e háptico do sujeito cego, com a intenção de promover seu desenvolvimento cognitivo a partir de suas potencialidades.
8	KLAIBER (2019)	- Pensamento Matemático Avançado, Dreyfus e Eisenberg (2002)	Trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares em um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.
9	LIMA (2019)	- Análise na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) das habilidades referentes ao ensino dos sistemas de equações lineares.	Propostas de problemas sobre sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas e de três equações e três incógnitas com e sem o apoio do software GeoGebra e lápis e papel aplicados em estudantes de ensino médio.

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados da revisão das pesquisas nos forneceram um panorama geral sobre o objeto matemático sistema de equações lineares, no entanto conforme Gascón (1994), destaca que não devemos fazer referência em pesquisas no campo da Didática Matemática a uma determinada área do conhecimento matemático, o que se enquadra na situação presente no sistema educacional escolar.

É apresentado em diferentes recursos de tecnologias didáticas para as técnicas da adição, método da substituição e escalonamento de sequências didáticas para resolver sistemas de equações lineares, nas pesquisas consultadas, conforme podemos observar no Quadro 4, o panorama geral dos sistemas de equações lineares construído de nossa revisão

Quadro 4 – Panorama dos sistemas de equações lineares de nossa revisão.

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	
Tipos de tarefa	Tipos de Técnica
- Resolver equação de duas equações e duas incógnitas - Resolver equação de três equações e três incógnitas	Método da adição, Método substituição. Escalação.
Recursos de Tecnologias	
-Material com uma abordagem histórica dos sistemas de equações lineares para a formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins. - Propostas de problemas sobre sistemas de equações lineares com e sem o apoio do software GeoGebra . - Proposta de uma sequência com utilização do <i>software Winplot</i>. - Sequência de atividades sobre sistemas de equações lineares elaborada de modo a proporcionar a utilização dos sistemas auditivo, fonador e háptico do sujeito cego, com a intenção de promover seu desenvolvimento cognitivo a partir de suas potencialidades - Trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. - Propostas de problemas sobre sistemas de equações lineares com lápis e papel.	
TEORIAS E BASES PARA JUSTIFICATIVAS UTILIZADAS NAS CONSTRUÇÕES DAS PRAXEOLÓGICAS	

- - Teoria Antropológica do Didático (1999).
- - Teoria das Situações Didáticas (1996).
- - Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009).
- - Engenharia Didática. (ARTIGUE, 1998)
- - Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011).
- - Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009).
- - Resolução de Problemas (DANTE, 2011).
- - Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009).
- *Design Experiments* (COBB et al., 2003)
- - Pensamento matemático (FERRI, 2004).
- - Estilos de pensamentos STERNBERG (1997);
- - Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009).
- - Pensamento Matemático Avançado, Dreyfus e Eisenberg (2002)
- - Análise na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) das habilidades referentes ao ensino dos sistemas de equações lineares.

Fonte: Elaboração própria.

Em nossa análise da revisão de literatura, constatamos que a referência para o estudo dos sistemas de equações lineares se constitui com a sua resolução com técnicas para no máximo três equações à três incógnitas, com exceção de algumas *praxeologias* isoladas.

As justificativas sobre aspectos teóricos e metodológicos para construção das *praxeologias* das pesquisas consultadas são diversas.

A teoria Antropológica do Didático e o modelo heurístico dos problemas didáticos foram nossos aportes teóricos e metodológicos para construção do nosso Modelo Didático de Referência de Sistema de Equações Lineares com objetivo de responder nossa questão de pesquisa. De que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo aos sistemas de equações lineares podem contribuir com o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para a proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores?

Dessa forma, referente **à dimensão epistemológica** de um problema didático de Gascón (2011), apresentamos, no próximo capítulo, o estudo que embasou a construção de nosso MER para o sistema de equações lineares

3 MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo discorreremos sobre os sistemas de equações lineares, com o intuito de ter uma visão epistemológica, cognitiva e didática acerca de nosso quadro teórico apresentados em três partes. Na primeira abordamos sobre os fundamentos teóricos para o estudo. Na segunda, o estudo histórico-epistemológico dos sistemas de equações lineares. Na terceira, apresentamos um Modelo Epistemológico de Referência (MER) dos sistemas de equações lineares, construído a partir de nosso estudo histórico e epistemológico.

3.1 Fundamentos teóricos e metodológicos para o estudo

Os modelos existem em qualquer *instituição* didática, apresentados implicitamente nas diferentes áreas de conhecimento matemático a ser ensinado, que segundo Gascón (1994) emergem do modelo implícito da própria natureza do conhecimento matemático, podendo ser modelos implícitos locais, bem como o suposto modelo global do conhecimento matemático, aceito como modelo natural sem questionamento.

Postulamos que existem diferentes modelos epistemológicos do objeto matemático sistemas de equações lineares, e por não ser questionado.

A teoria da transposição didática⁶ nos mostra, a distinção entre “saber sábio” e o “saber ensinado” diferentes modelos de tal objeto em cada âmbito de seu estudo frente aos obstáculos epistemológicos⁷.

Diante disso, Gascón (1994) argumenta que o pesquisador deve explicar o modelo epistemológico utilizado na pesquisa no campo da Didática da Matemática e apresenta um esboço de um novo modelo como uma alternativa ao modelo da interpretação da álgebra elementar como aritmética generalizada.

No caso dos sistemas de equações lineares, o modelo implícito dominante na educação escolar corresponde ao que Gascón (1994) denomina de senso comum da

⁶ Trabalho de transpor o saber científico ao saber a ser ensinado segundo Chevallard (1991)

⁷ Obstáculos epistemológicos são inerentes ao processo de conhecimento e segundo Bachelard (1996) o senso comum seria um obstáculo ao conhecimento científico.

identificação da álgebra elementar como uma aritmética generalizada, modelo que enfatiza o "simbolismo algébrico" e o transpõe a uma suposta "linguagem aritmética" que a princípio deveria expandir e generalizar.

Para Gascón (1994), o novo modelo alternativo proposto de atividades matemática da "álgebra elementar" consiste no estudo do campo de problemas que contém não apenas problemas aritméticos, mas também os problemas de construção geométricas.

Em sua proposta, Gascón (1994) apresenta um modelo em que os problemas de podem ser interpretados como "números desconhecidos", "números generalizados" ou "variáveis", fazendo uso sistemático de parâmetros.

Dessa maneira, surge a possibilidade de tratarmos em primeiro momento, os dados conhecidos como se fossem desconhecidos e assim, fórmulas podem ser interpretadas como funções com várias variáveis e que desempenham o papel de modelos algébricos aos mesmos tipos de problema.

A modelagem algébrica, segundo Gascón (1994), permite descobrir as condições de existência do objeto desconhecido e a forma de dependência de cada uma em relação às demais variáveis do sistema.

Com o aporte da Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard (1999) e o modelo do desenvolvimento heurístico do problema didático proposto por Gascón (2011), pretendemos propor um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para interpretar fenômenos que ali ocorrem e dependem das características do modelo do domínio da atividade matemática ensinada.

Nessa perspectiva, o pesquisador que pretende estudar fenômenos relativos a um campo da matemática de uma determinada *instituição* didática, não se deve assumir como é o modelo implícito que prevalece na mesma, mas sim considerá-lo como objeto de estudo, ou seja, parte da base "empírica" da pesquisa (GASCÓN, 1994).

Segundo Gascón (1994), o pesquisador precisa de um modelo alternativo do domínio da atividade matemática ensinada que sirva como um quadro de referência para interpretar o modelo dominante no campo, instituição que está estudando.

Nesse contexto, o objetivo de nosso MER é que sirva como um quadro de referência para interpretar o modelo dominante implícito para os sistemas de

equações lineares em livros didáticos, documentos oficiais, práticas de ensino, entre outras *instituições* didáticas.

Dessa forma, explanamos os pressupostos teóricos-metodológicos de nossa pesquisa para construção de nosso modelo didático de referência, no que segue.

Para qualquer modelo local usado para estudar um determinado campo da matemática ensinada terá seu lugar em um modelo global capaz de explicar por que um determinado modelo implícito existe em detrimento de outros modelos possíveis e como esse modelo implícito atua na estrutura e nas funções dos diferentes dispositivos didáticos os fenômenos que ali ocorrem dependem das características desse modelo. Deve também ser capaz de explicar como a percepção desses fenômenos pode variar de acordo com os diferentes modelos de conhecimento matemático adotados pelo pesquisador.

Para a construção de pelo menos um modelo específico de cada área matemática estudada, esse modelo constitui um instrumento indispensável para o estudo dos fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem desta área.

O modelo epistemológico utilizado condiciona decisivamente o que se entende por "ensinar e aprender por meio mais ou menos explícito de um modelo específico de um determinado domínio do conhecimento matemático em coerência com o modelo geral adotado.

De acordo com Gascón (1994), o modelo epistemológico considerado como referencial, determina fortemente: os fenômenos didáticos que serão visíveis; a descrição desses fenômenos; tentativas de explicar tais fenômenos; projetos de engenharia didática que podem ser propostos para modificar o processo de ensino e aprendizagem ou para gerar diversos fenômenos.

De acordo com Gascón (1994), a originalidade da didática fundamental consiste justamente no fato de abrir uma nova via de acesso ao estudo dos fenômenos didáticos do estudo do objeto matemático, tal como é ensinado e transformado nas instituições didáticas.

Para problematização objeto sistema de equações lineares ensinado a fim de compreender a razão de tal saber matemático, focamos no estudo nos fenômenos da desarticulação, desconexão ou atomização e isolamento do currículo que são objetos de estudo nos trabalhos de pesquisa de Matos (2017), Andrade (2012), Lucas (2010), Gascón (2010), García (2005), Fonseca (2004) e Chevallard (2001, 2009).

Para o estudo das três dimensões do problema didático de sistemas de equações lineares, podemos situar cada dimensão do estudo do problema didático com as seguintes indagações: dimensão econômica-institucional – P_2 (Como as organizações matemáticas estão atualmente?) referente à análise clínica da didática incluindo observação e a descrição detalhada das OM e das OD que existem efetivamente em uma dada instituição; a dimensão epistemológica – P_1 (Como podemos melhorar as organizações existentes?) que coloca a Matemática no cerne do problema didático, considerando o estudo da natureza epistemológica do conteúdo matemático em análise; dimensão Ecológica – P_3 (Como podemos programar para institucionalizar tal organização na instituição?), que enfatiza as condições necessárias para que seja possível o estudo institucionalizado da Matemática colocando em manifesto todas restrições que incidem sobre este estudo” (GASCÓN, 2011, p. 203).

Origina-se de problemas docentes às formulações mais específicas, referindo-se a algum aspecto característico de um problema didático, Gascón, (2011, p. 207) exemplifica:

“ P'_0 : Como posso ‘motivar’ meus alunos, aumentar seu interesse pelo estudo e melhorar sua ‘atitude’ a um certo âmbito da matemática? Como posso ‘utilizar’ as TIC com intuito de melhorar o processo de ensino deste âmbito? Como individualizar o ensino de tal (qual) conceito? (GASCÓN, 2011, p. 207, tradução nossa).

Escolhemos nosso problema em torno do objeto matemático Sistemas de Equações Lineares, após nosso estudo exploratório e experiencias positivas vivenciadas com utilização de *softwares* em sala de aula, postulamos a hipótese referente ao fenômeno didático da desarticulação do currículo: **A resolução de sistemas de equações lineares pode ser explorada com a utilização de softwares?**

Para formulação inicial do problema P_0 , elaboramos uma questão mais específica do problema docente apresentado no Quadro 5, conforme sugere Gascón (2011) para iniciar a constituição de um problema didático:

Quadro 5 – Questão específica do problema docente.

P_0 : Como posso utilizar <i>softwares</i> no ensino de sistema de equações lineares na formação inicial de professores?
--

Fonte: Elaboração própria.

Assim, na perspectiva que propõe a TAD é importante considerar na pesquisa a relatividade institucional do saber matemático conforme explanado por Gascón (2011).

Atualmente muitos dos problemas didáticos que aparecem na bibliografia continuam a serem formulados de um modo relativamente próximo aos problemas docentes. Estes são apresentados em algumas pesquisas didáticas não questionando no âmbito da matemática que está envolvido problema didático; em consequência nem ao menos consideram a 'relatividade institucional' do saber matemático. Por exemplo, se o problema se atém ao ensino da geometria, não é habitual que se tome como parte do problema a elucidação do que se entende por 'geometria' na instituição de referência – onde será proposto o problema – sem a necessidade de elaborar um modelo epistemológico da geometria para utilizá-lo no estudo do problema (GASCÓN, 2011, p. 208, tradução nossa).

Nessa perspectiva, o âmbito da matemática que está envolvido o problema docente P_0 , segundo o autor, deve ser questionado na constituição do problema didático, ou seja, o problema docente será completado e terá sentido se considerarmos ao menos a dimensão epistemológica P_1 formando $(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_\delta$.

A dimensão epistemológica P_1 envolve um modelo epistemológico que permite propor critérios no desenvolvimento do problema didático, mesmo implicitamente, como uma descrição e uma interpretação de *praxeologias*. Tal modelo é denominado por Modelo Epistemológico de Referência (MER) (GASCÓN, 2011).

As *praxeologias* didáticas dos professores são consideradas por Chevallard (2001) como um problema *praxeológico*, que ele identifica como decorrente da necessidade que esse professor tem de reconstruir uma OM ou *praxeologia* matemática para ser modelizada em OD ou *praxeologia* didática para que possam ser estudadas em certa instituição.

Segundo Andrade (2012), o problema *praxeológico* do professor não está subordinado ao próprio professor, mas sim à instituição e à formação profissional, e, como tal, exige mobilizações das práticas dos professores, elaboradas por sujeitos e atores de diferentes instituições que, mesmo atuando em conformidade com estas, ao longo do tempo, recriam *praxeologias* que podem ser inéditas e significativas para sujeitos em certa instituição.

De acordo com Gascón (2011), para considerar a dimensão epistemológica P_1 de um problema didático, o pesquisador deve construir efetivamente e, de preferência de maneira explícita, um MER relativo ao âmbito da matemática que está em jogo no

problema. É importante destacar a importância dessa dimensão, uma vez que é fundamental na integração do desenvolvimento do problema didático.

Dentre outras funções do MER, podemos destacar:

- [...] somente assim podemos perceber que não só a forma como é interpretado a proporcionalidade, a geometria ou a topologia dentro do sistema de ensino, mas o porquê é possível encontrar neste sistema alguns objetos matemáticos e outros não. Por exemplo, poderíamos verificar o porquê da insistência atual em ensinar a proporcionalidade e porque em um momento histórico recente desapareceu a geometria euclidiana do escopo da matemática ensinada (e porque reapareceu mesmo que timidamente, no Ensino Secundário Obrigatório da Espanha). De qualquer forma, o mais importante é que o MER que se utiliza em uma investigação didática seja explícito – ou possivelmente explicável – já que condicionará decisivamente:
- a) A ‘amplitude do âmbito matemático’ mais adequado para propor o problema didático em questão. Por exemplo, se um problema se refere ao ‘limite de funções’, o pesquisador deverá utilizar um MER mais ou menos amplo que contenha ou não as problemáticas da existência do limite, da continuidade ou da derivabilidade (BARBÉ, *et. al*, 2005).
 - b) Os ‘fenômenos didáticos que serão visíveis’ para o pesquisador se considerar, por exemplo, que o saber matemático é uma ‘construção axiomática’, será muito difícil detectar fenômenos didáticos ligados com a atividade de resolução de problemas (GASCÓN, 2011).
 - c) ‘Os tipos de problemas de investigação que se podem propor’ para os pesquisadores em didática, que toma o saber matemático como um ‘sistema conceitual’, são muito difíceis propor problemas didáticos fora de um marco – normalmente psicologista – em que aprender matemática se identifica com ‘adquirir conceitos’ (GASCÓN, 2011, p. 209-210).
 - d) ‘As tentativas de explicações que se podem propor’, isto é, o tipo de soluções que se consideram ‘admissíveis’ (BOSCH e GASCÓN, 2007). Por exemplo, se o modelo assumido considera o saber matemático como uma ‘linguagem’, então as explicações relativas às dificuldades na aprendizagem da álgebra elementar surgem inevitavelmente em aquisição e utilização da ‘linguagem algébrica’ (GASCÓN, 2011, p. 210, tradução nossa).

Com a constituição de um MER podemos descrever matemáticas e analisá-las, do ponto de vista do saber matemático antes que se transforme em saber a ser ensinado.

Para os sistemas de equações lineares, o MER nos auxiliará a estudar a *razão de ser* de tal objeto matemático, que no âmbito da dimensão epistemológica são de certa maneira transparentes e não as consideramos de maneira explícita, quando colocamos como prioridade do foco de pesquisa, então se faz um esforço em explicitar o MER com questões relativas à forma e modo de descrever e interpretar os conhecimentos matemáticos.

Neste caso, as perguntas que integram a dimensão epistemológica de um modo concreto são, por exemplo:

O que é o conhecimento matemático, ou seja, como é descrito e interpretado o conhecimento matemático? Quais são suas componentes e como se estruturam? Como podemos modelizar saber em jogo, desde a posição do pesquisador, os conhecimentos matemáticos (modelo epistemológico geral) e cada um dos âmbitos da atividade matemática (modelos epistemológicos específicos)? Qual a razão de ser, isto é, quais são as questões matemáticas ou não-matemáticas que respondem cada um dos âmbitos da atividade matemática? O que se entende por 'fazer matemática' e por 'adquirir', 'comunicar, aprender, ensinar ou aplicar' os conhecimentos matemáticos? Como são gerados e como se desenvolvem os conhecimentos matemáticos? Como são transformados aos migrarem em diferentes instituições? Qual a amplitude do âmbito matemático mais adequado para propor um problema didático determinado? (GASCÓN, 2011, p. 210, tradução nossa).

O MER é resultado de nosso estudo epistemológico para estudar a gênese do objeto matemático sistema de equações lineares com intuito de identificar as *praxeologias* que respeitem sua *razão de ser*.

Propomos as questões iniciais no percurso para estudar e construir o MER com objetivo de responder:

Quadro 6 – Questões referente à dimensão epistemológica.

P_{11} : Como introduzir o sistema de equações lineares em um marco diferente do marco encontrado na OM dominante da instituição?
P_{12} : Como podemos organizar o estudo da resolução de sistema de equações lineares mediante um MER do modelo epistemológico geral que propõe a TAD?
P_{13} : Quais objetos matemáticos nutrem o sistema de equações lineares, isto é, qual a <i>razão de ser</i> de tal objeto matemático no âmbito das <i>praxeologias</i> ?

Fonte: Elaboração Própria.

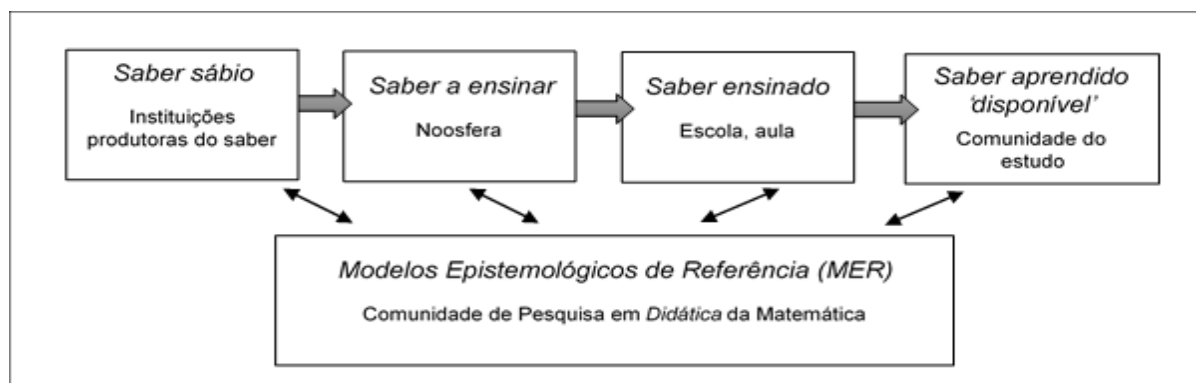
Quando pretendemos melhorar as organizações matemáticas, precisamos analisar como as organizações estão atualmente, ou seja, após considerar o MER de acordo com um sistema de referência relativo que se pode propor em termos da TAD considerando a dimensão epistemológica P_1 , constituímos um MER para análise de questões em torno de como as organizações estão atualmente.

Desta forma, as questões que constituem a dimensão epistemológica P_1 estão intrinsicamente ligadas às dimensões econômica-institucional P_2 e a dimensão ecológica P_3 , como veremos no que segue. Tais questões podem ser respondidas quando identificamos o Modelo Epistemológico Dominante (MED) analisadas na perspectiva da dimensão econômica-institucional, como veremos a seguir.

Na dimensão econômica-institucional, segundo Gascón (2011), inclui investigar questões que estão em torno da pergunta: “Como estão atualmente as OM e as OD na contingência institucional?”

Para efetivação da construção do MER, de acordo com Gascón (2011), necessita referência de modo mais ou menos explícita de todas as etapas da transposição didática conforme esquema apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Etapas da transposição didática na construção do MER.



Fonte: Adaptado de Gascón (2011, p. 214, tradução nossa).

Em tal referência das etapas da transposição didática na construção do MER, deve conter uma *praxeologia* matemática suficientemente ampla contendo a “unidade mínima de análise dos processos didáticos”. Tal unidade mínima é uma organização didática que não pode ser abordada associada apenas a OM pontual, isto é, gerada unicamente para um conceito, uma técnica ou um tipo de problema matemático. Esta unidade mínima é uma organização ‘didática’ de estudo institucional de uma OM local, isto é, conjunto que integra *praxeologias* pontuais que utilizam a mesma tecnologia. (GASCÓN, 2011).

Dessa forma, é importante ressaltar a caracterização da unidade mínima para iniciar a pesquisa de um problema didático, para Gascón (2011), é neste contexto de unidade mínima que faz sentido propor a dialética entre o pessoal e institucional, como considerado pela TAD:

[...] ao aceitar a unidade mínima de análise do processo de didático aponta preeminência do institucional sobre o pessoal, tanto na descrição dos fenômenos didáticos como a formulação dos problemas de investigação didática e até o tipo de respostas admissíveis (GASCÓN, 2011, p. 215, tradução nossa).

De acordo Gascón (2011), na TAD não existem fenômenos e nem problemas didáticos que se referem à relação pessoal com o âmbito do saber matemático. Então, consideramos que tal relação está em grande parte determinada podendo ser explicados a partir da relação institucional.

Podemos exemplificar com o caso da proporcionalidade:

[...] a relação pessoal de um aluno com a proporcionalidade, ou com uma certa *praxeologia* matemática de uma instituição que inclui a noção de proporcionalidade, depende em grande parte, e pode ser explicada a partir, da relação institucional desta *praxeologia*, isto é, a partir do tipo de atividades matemáticas que é possível executar em torno da proporcionalidade na instituição de referência, sem que isso negue as diferentes evidências entre as diversas relações pessoais e uma determinada *praxeologia* (GASCÓN, 2011, p. 215, tradução nossa).

De acordo com Gascón (2011), isso se deve ao fato que na TAD a relação institucional a uma OM, é de modo geral objeto principal de estudo, a gênese do desenvolvimento, a difusão *intrainstitucional*, a migração a outras instituições e o desaparecimento institucional das *praxeologias* matemáticas.

Nessa perspectiva, apesar da relação pessoal ser importante, na TAD é considerada como objeto secundário. A relação pessoal está relacionada com a dimensão individual e na TAD não é considerada como fundamental ou básica de um problema didático P_δ .

Por outro lado, de acordo com Gascón (2011), a dimensão econômico-institucional de um problema didático permite propor questões que em um determinado período histórico surgiram da transposição didática nas *praxeologias* matemáticas da época para adequar a (à) atualidade com certa intenção didática institucional. Tais questões que fazem parte desta dimensão:

- a) Qual o 'âmbito institucional' que temos que levar em consideração para estudar o problema didático em questão?
- b) Que características apresentam determinadas OM e as OD associadas, em uma 'instituição' e um 'período histórico' determinado?
- c) Como se considera em cada instituição em um âmbito concreto da atividade matemática? (Dizer como se descreve e como os sujeitos da mesma a interpretam)
- d) Que tipo de práticas matemáticas podem executar em uma determinada 'instituição' em relação ao âmbito particular da atividade matemática?
- e) Qual é, definitivamente, o modelo epistemológico da matemática (específica de um âmbito) e o modelo dominante associado em uma dada instituição?
- f) Que dificuldades aparecem quando se pretende modificar as OD em uma direção determinada dentro de uma certa instituição? (GASCÓN, 2011, p. 216, tradução nossa).

Segundo Gascón (2011), um problema didático está relacionado com a forma de organizar o estudo em certas OM em determinadas instituições e exige um OD institucional. Analogamente a ideia do MER, a OD proporcionará descrever e analisar as características das OD.

Para nortear a construção do MER, com objetivo de identificarmos o Modelo Didático de Referência no curso de licenciatura, propomos, referente ao estudo da dimensão econômica-institucional, as seguintes questões:

Quadro 7 – Questões referentes à dimensão econômica-institucional.

<i>P₂₁</i> : Que âmbito institucional temos que considerar para abordar o problema didático da resolução de sistema de equações lineares: a sala de aula, a escola, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou mesmo a Civilização?
<i>P₂₂</i> : Qual o modelo epistemológico de sistema de equações lineares nas “instituições” estudadas?
<i>P₂₃</i> : Que dificuldades surgem quando pretendemos modificar OM de sistema de equações lineares e quais possibilidades de OD surgem?

Fonte: Elaboração Própria.

No estudo da dimensão ecológica estabelecemos as condições necessárias para que seja possível o estudo institucionalizado da OM colocando em manifesto todas as restrições que incidem sobre este estudo” (GASCÓN, 2011).

Segundo Almouloud (2015), tal estudo inclui questões tais como: o objeto matemático estudado faz parte das recomendações para educação básica? Como é apresentado e com que finalidade? Este objeto é efetivamente apresentado na escola e em que condições é trabalhado? Caso não, é abordado, qual o motivo de ser ignorado?

Para Almouloud (2007), a ecologia refere-se às condições de sobrevivência de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico, de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produzem, utilizam ou transpõem, considerando qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel do saber ou saber-fazer? Possíveis restrições globais e permanentes em tais questionamentos, impõe o estatuto do ofício do professor, traduzidos na TAD no estudo ecológico de uma *praxeologia*.

Segundo Chevallard (2009), as condições não criadas pelo professor são consideradas no estudo ecológico e tais condições em níveis mais amplo, apresentadas na TAD em níveis sucessivos que surgem interdependente entre as OM e OD, denominado por níveis hierárquicos de codeterminação didática, esquematicamente representados na (Figura 6).

Figura 6 – Esquema de níveis hierárquicos de codeterminação didática.



Fonte: adaptado de Gascón (2011, p. 217, tradução nossa).

Nesse contexto dos níveis hierárquicos de codeterminação didáticos:

Toda questão – neste caso, matemática – que gera um processo de estudo em uma instituição faz parte de um ‘tema’ que pertence a um ‘setor’ o qual está incluído em uma ‘área’ de uma certa disciplina. Se esta é a matemática, denominaremos de ‘níveis matemáticos’, em contraposição aos níveis que vão além da disciplina. Estes denominados níveis ‘genéricos’, são considerados culturalmente como ‘níveis pedagógicos’ no sentido de ‘não matemáticos’; entretanto incluem restrições que possuem forte incidência na

matemática escolar e, portanto, devem formar parte do objeto de estudo da Didática da Matemática (GASCÓN, 2011, p.218, tradução nossa).

Chevallard (2001) exemplifica tais níveis para o estudo de simetria:

Quais são as simetrias de um retângulo no quadrado? É considerada na maioria dos sistemas escolares da seguinte maneira: pertence ao 'tema' simetria de polígonos, que estão incluídos no 'setor' de transformações do plano; este por sua vez concerne a 'área' de geometria que faz parte da 'disciplina' de matemática (CHEVALLARD, 2001, tradução nossa).

Segundo o autor cada nível contribui para determinar a “ecologia institucional das OM e das OD”, tanto em nível de apoio quanto entre as restrições entre as OM e OD que tem caráter recíproco:

[...] a interpretação e estruturação das OM em cada nível de hierarquia condicionam as formas possíveis de organizar seu estudo, enquanto, reciprocamente, a natureza, as funções dos dispositivos didáticos existentes em cada nível determinam, geralmente, o tipo de OM que será possível reconstruir (GASCÓN, 2011, p.218, tradução nossa).

De forma sucinta, a dimensão ecológica engloba questões relacionadas a indagar tipos de 'restrições' e em que níveis se encontram, são cruciais para a ecologia das OM e OD (GASCÓN, 2011, p. 219, tradução nossa).

No que se refere à dimensão ecológica, Gascón, (2001) cita as seguintes questões:

- a) Quais são as 'condições' que permitem dar conta do estado atual – ou em um período histórico determinado – das OM e das OD associadas a uma determinada instituição?
- b) Que 'restrições' dificultam ou impedem determinadas características das OM e das OD que se desenvolvem em uma instituição? Em que níveis de hierarquia surgem as restrições?
- c) Que 'condições' deveriam se instaurar, e em que níveis de hierarquia, para que fosse possível a vida de certas OM e OD com algumas características determinadas?
- d) O modelo epistemológico específico no âmbito da atividade matemática dominante em uma instituição /? Como 'condiciona' a forma de organizar o ensino? (e, mais geral, o estudo) deste âmbito em / ? (GASCÓN, 2001, p. 219, tradução nossa).

Se a restrição for modificável por uma posição institucional tais como, professor ou aluno. Diremos que tal restrição é uma condição observada (ou relativa) à esta posição (GASCÓN, 2011, p. 219, tradução nossa).

Ao localizarmos nosso objeto em estudo no tema: Ensino de Sistemas Lineares do Setor: Resolução de Sistemas Lineares, dentro da área: Geometria Analítica e

Álgebra Linear da disciplina Matemática, considerando a pedagogia: tradicional monumentalista, que de acordo com Chevallard (2012), também é conhecida como paradigma da “visita às obras”, concepção que faz referência a *monumentalização do conhecimento* curricular, em que os conteúdos matemáticos são fragmentados e apresentados ao alunos como “visita às obras”, que basicamente resume-se que o conhecimento é aprendido por meio de um relatório do professor apresentado ao aluno, como se fosse um guia para “visita aos monumentos”, com o seu valor e importância tomados como certo.

Como por exemplo, o Fórmula de Heron⁸, que segundo Chevallard (2012), em tal paradigma de “visita às obras”, os alunos são expectadores e o conhecimento pode ser esquecido, ou ignorado após os exames.

Nesse contexto, surge na TAD, “questionamento do mundo”, é um contraponto à *monumentalização* na construção do conhecimento, apresentado aos alunos como respostas verdadeiras a perguntas reais no processo de estudo, como por exemplo, referentes a dimensão epistemológica: O que é e para que serve os Sistemas Lineares? Qual sua utilidade no mundo real?

Na TAD, segundo Chevallard (2012), a pedagogia de “questionar o mundo” é constituída por um *milieux* didático (mD) fabricados por um sistema didático $S(X, Y, Q_0)$. Em tal sistema, X são a(s) pessoa(s) que deseja(m) estudar a questão Q_0 com ajuda de orientadore(s) Y para produzir uma resposta de R esperada com objetos disponíveis para o estudo. Tal sistema é denominado por sistema *herbartiano* e faz referência ao filósofo alemão e fundador da pedagogia Johann Friedrich Herbart (1776-1841), relativo receptividade às questões não respondidas e problemas não resolvidos, que é, geralmente, gesto do cientista em seu campo de pesquisa. O paradigma de questionar o mundo, encontrar novos conhecimentos ou reencontrar os velhos torna possível percurso de pesquisa e estudo

Nessa perspectiva, os conteúdos aprendidos não são planejados com antecedência, ao contrário do que é habitual no paradigma de “visita às obras”, no paradigma do “questionamento do mundo” o conhecimento é construído por um processo estabelecido por uma pergunta a ser estudada, e em seguida é realizada a

⁸ Fórmula atribuída a Heron de Alexandria para o cálculo da área de um triângulo, a partir da medida de seus lados (CHEVALLARD 2012).

pesquisa e percurso de estudo para responder à pergunta e outras questões derivadas outras questões que surgem.

Nesse contexto, a elaboração de um novo currículo, na perspectiva do paradigma “questionamento do mundo”, dependerá de objetos disponíveis para fazer perguntas sobre questões derivadas e não mais dependerá de qualquer hierarquia preestabelecida e qualquer questão pode ser significativamente suplementada por uma ou um conjunto de questões derivadas das dimensões do problema didático que constituirão o critério para ajustar a qualidade e a profundidade na busca da resposta.

Nessa perspectiva, partindo do paradigma do questionamento do mundo e da hierarquia dos níveis preestabelecidos de codeterminação didática, elaboramos a questão referente a dimensão ecológica, apresentada no Quadro 8, sobre a vida das práticas do estudo de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas associadas à posição relativa de retas:

Quadro 8 – Questão referente à dimensão ecológica

P₃₁: Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores?

Fonte: Elaboração Própria.

É importante salientar que em um problema didático temos outras dimensões envolvidas em seu desenvolvimento que nem sempre aparecem como o padrão heurístico. Além disso, a ordem em que se estudam algumas das dimensões básicas de um problema didático pode ser diferente, sendo considerada em outro momento histórico como prioritárias outras dimensões tais como: cognitiva, pessoal, ostensiva, instrumental, dentre outras. Conforme salienta Gascón (2011), estas dimensões podem ser implícitas e nem sequer ser levantadas.

Dessa forma, partimos do problema docente com as questões relativas às dimensões epistemológicas, econômica-institucional e ecológica em busca de respostas que apresentamos no decorrer dos próximos capítulos.

Na próxima seção, apresentamos nosso estudo histórico e epistemológico de Sistema de Equações Lineares, considerando aspectos referentes à **dimensão epistemológica**.

3.2 Estudo da dimensão epistemológica dos Sistema de Equações Lineares

Ao revisitarmos vários momentos na história, observarmos que houve diversas mudanças no que tange as organizações matemáticas. Tais mudanças podem ser explicadas devido a condições externas, políticas, sociais e culturais, além de fatores internos.

Por volta de 1800 a.C, de acordo com registros em tábuas encontradas, os povos babilônicos resolviam problemas ligados ao cotidiano, que eram associados a resolver equações lineares ou quadráticas à uma incógnita ou resolver sistemas contendo uma equação linear e uma quadrática à duas incógnitas (DORIER,1990, p. 37).

Segundo Dorier (1990, p.37), os problemas foram evidentemente apresentados com valores numéricos explícitos e vieram de realidades cotidianas, tais como, troca de moedas e mercadorias, cálculo de juros simples ou compostos, cálculo de impostos, entre outros tipos de problemas.

O sistema numérico babilônico, de acordo com Dorier (1990, p.37), era considerado por uma base 60 e uma base 10, com um princípio posicional. As multiplicações eram realizadas com referência às tabuas de referência. Dorier (1990, p.37) explica que eram estabelecidas por adições sucessivas

Os babilônios usaram todos os racionais expressáveis de maneira finita na base 60. As divisões eram reduzidas a multiplicações e as extrações de raízes quadradas eram feitas em correspondência com tabelas pré-estabelecidas.

De acordo com Dorier (1990, p.37), o método utilizado pelos babilônios para resolver sistemas consistia em resolver uma das equações relativas a uma incógnita e depois substituir a solução na outra equação, o que consiste, na linguagem atual, em completar quadrados. Além disso, no caso de considerarmos equações, na linguagem atual, para a equação $x + y = a$, também utilizavam uma mudança de variáveis por $x = \frac{a}{(2+s)}$ e $y = \frac{a}{(2-s)}$, analogamente a mesma técnica para $x - y = a$, resultando na segunda equação em uma única variável.

Juntamente com os babilônios, os egípcios resolviam problemas que não iam além de equações com uma incógnita e suas soluções não exigiam grandes métodos e raciocínios, sendo a técnica mais empregada a que posteriormente ficou conhecida na Europa como método da posição falsa.

Os gregos, segundo Dorier (1990, p.37), utilizavam a técnica por testes sucessivos, e de certa forma é o ancestral ao método da posição falsa, que já era conhecido dos chineses e indianos, foi introduzida na Europa pelos árabes.

Segundo Dorier (1990, p.37), a técnica por testes sucessivos foi a mais utilizada até o século XVIII, sendo a única forma conhecida de resolver equações lineares em uma variável. O nome da técnica e o modo como é aplicado, segundo Dorier (1990, p.37), sofreram variações ao longo das eras e civilizações. No entanto, ainda mantém uma estrutura de fundo quase idêntica.

No registro da linguagem atual, podemos exemplificar a técnica mencionada para resolver a tarefa de encontrar a solução da equação $ax + b = 0$ que consiste, inicialmente em realizar dois testes x_1 e x_2 que dão valores v_1 e v_2 que, geralmente, não são nulos e então por subtração $v_1 - v_2$, obtemos que $a(x_1 - x_2) = (v_1 - v_2)$. Por outro lado, temos $x_2 v_1 = ax_2 x_1 + bx_2$ e $x_1 v_2 = ax_1 x_2 + bx_1$, então por subtração: $b(x_2 - x_1) = x_2 v_1 - x_1 v_2$. Finalmente, dividindo as duas equações assim obtidas, obtemos $x = -\frac{b}{a} = \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{x_1 - x_2}$. As duas divisões do final não eram, em geral, explícitas apoiadas, em algo que conhecemos hoje, por regra de três ou proporcionalidade, para suas conclusões (DORIER 1990, p.39).

No Quadro 9 apresentamos um panorama histórico dos tipos de problemas, as técnicas e recursos utilizados de resolução no período da antiguidade pelos povos babilônios.

Os problemas eram resolvidos numericamente com os sistemas, composto por uma equação linear e uma equação quadrática. As técnicas de resolução eram próximas a substituição e eliminação que conhecemos, no entanto sem uma linguagem simbólica. A utilização de números racionais expressáveis na base 60 era conhecida e o sistema numérico era o posicional de base 10 e 60.

Quadro 9 – Panorama histórico no período da antiguidade pelos povos babilônios.

	Tipos de Problemas	Técnicas de resolução	Recursos
BABILONIOS 1800 a.C a 300 d. C	Problemas numéricos: Resolver equações lineares à uma incógnita; resolver equações quadráticas; Resolver sistemas contendo uma equação linear e uma quadrática à duas incógnitas (DORIER,1990)	Substituição; Eliminação (mudança de variável); Resolução inteiramente baseada no discurso com série de regras preestabelecidas sem justificativa (DORIER, 1990).	Sistema numérico posicional base 10 e 60; Tabelas de quadros; Números Racionais expressáveis de maneira finita na base 60 Ausência de linguagem simbólica.

Fonte: Elaboração Própria.

Ao recuperarmos outro momento histórico, segundo Fajardo (2014) o desenvolvimento socioeconômico na China possibilitou avanços na resolução de sistema de equações lineares. Segundo o autor, a resolução de sistema de equações lineares era conhecida pelos Egípcios e Mesopotâmicos antes dos chineses. Posteriormente, descobriram um método de resolução de sistema de equações lineares muito próximo ao conhecido atualmente como método de Gauss.

A partir do exemplo dos chineses temos um método originando na descoberta de números negativos que não eram conhecidos na época e não se utilizavam sinais como é atualmente para descrever uma equação.

Ainda sobre os povos chineses, um dos maiores clássicos da antiga matemática chinesa é o documento intitulado por Nove *capítulos sobre a arte da matemática* (K'iu-ch'ang Suan-Shu), cujo autor e a data de origem deste tratado, segundo Dorier (1990, p.39) são desconhecidos, no entanto, é geralmente reconhecido que data de antes de 1000 a.C.

Dois capítulos referem-se a equações lineares. O primeiro declara a regra da falsa posição com exemplos concretos.

O segundo fornece muitos problemas que levam a sistemas de duas equações lineares em duas incógnitas, um dos quais sempre aparece com o coeficiente igual a 1 tal que $y = ax + b$ e $y = a'x - b'$. Uma regra de resolução é dada, essencialmente retorna a técnica de adição e eliminação clássica e na prática, a técnica dependia do uso de bambus, que eram utilizados na época pelos chineses para contar.

No quadro 10, temos um panorama geral, na linguagem atual dos tipos de problemas, as técnicas de resolução e os recursos disponíveis tratados pelos povos chineses.

Algumas técnicas utilizadas pelos chineses na antiguidade são ensinadas nos livros didáticos atuais.

Quadro 10 – Panorama histórico no período da antiguidade pelos povos chineses.

	Tipos de Problemas	Técnicas de resolução	Recursos
CHINESES 1000 a.C	- Sistemas de duas equações lineares à duas incógnitas, geralmente da forma: $y = ax + b$ e $y = a'x - b'$.	- Adição e Eliminação;	o raciocínio dependia do uso de bambus, que os chineses usavam na época para contar.

Fonte: Elaboração Própria.

No Quadro 11, temos um panorama geral de como os povos gregos abordavam o problema geometricamente e resolviam equações simultâneas de uma linear e uma quadrática e as técnicas eram próximas ao método da adição, no entanto todas geométricas. Um bem conhecido, na linguagem atual, é o sistema $x + y = a$ (ou $x - y = a$) e $xy = b^2$, que reduz para $x(x - a) = b^2$ e para resolver utilizavam recursos geométrico da construção do retângulo do lado a e da área b , o segundo lado é então a solução procurada. Euclides fornece outras aplicações mais complexas para resolver geometricamente equações ou sistemas de equações (DORIER, 1990).

Quadro 11 – Panorama histórico no período da antiguidade pelos povos gregos.

	Tipos de Problemas	Técnicas de resolução	Recursos
GREGOS 380 d.C	As equações são apenas abordadas geometricamente Resolver sistemas contendo uma equação linear e uma quadrática à duas incógnitas (DORIER, 1990) Um dos mais conhecidos é o sistema $x + y = a$ (ou $x - y = a$) e $xy = b^2$, que reduz para $x(x - a) = b^2$.	Técnicas geométricas; Método adição	É suficiente construir o retângulo do lado a e da área b, o segundo lado é então a solução procurada. Euclides fornece outras aplicações mais complexas para resolver geometricamente equações ou sistemas de equações (DORIER, 1990).

Fonte: Elaboração Própria.

No quadro 12 temos panorama os tipos de problemas egípcios. Problemas raros, simples e isolados de sistemas de duas equações à duas incógnitas e vários problemas concretos que levam a sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, da forma: $y = ax + b$ e $y = a'x - b'$. As técnicas de resolução eram por testes sucessivos e o Método da Posição Falsa com um sistema decimal posicional e os únicos racionais utilizados foram os inversos de inteiros e a fração $2/3$. Os sinais de adição, subtração e da raiz quadrada já eram utilizados.

Quadro 12 – Panorama histórico no período da antiguidade pelos povos egípcios.

	Tipos de Problemas	Técnicas de resolução	Recursos
EGÍPCIOS 1650 a.C	- Raros, simples e isolados problemas de sistemas de duas equações e duas incógnitas. - Muitos problemas concretos que levam a sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, da forma: $y = ax + b$ e $y = a'x - b'$.	- Testes sucessivos de eliminação de incógnitas; - Método da posição falsa	- Sistema decimal posicional - Sistema hierático não posicional Os únicos racionais utilizados foram os inversos de inteiros e a fração $2/3$. - Sinal de adição, subtração e raiz quadrada).

Fonte: Elaboração Própria.

O papiro de Rhind teve uma influência muito importante em todo o leste da Ásia por muitos séculos. Segundo Dorier (1990, p. 40), as fontes da inteligência anti-africana são muito menos confiáveis e é quase certo que os indianos conheciam uma forma da regra da posição falsa e que era deles que os árabes aprenderam. Além disso, *Mahavira* escreve, provavelmente por volta de 850, o *Ganita-Sara-sangraha*, tratado com muitos problemas, cuja resolução é equivalente à de sistemas de várias equações lineares à várias incógnitas, e que são resolvidos por uma técnica de sucessivas eliminações de incógnitas.

De acordo com Dorier (1990, p.40), os indianos utilizavam um sistema numérico de posição decimal, conheciam o zero e números negativos e que tinham a possibilidade de distinguir diferentes incógnitas, dando-lhes nomes de cores, podendo intervir ao mesmo tempo sem risco de erro, em equações. Um exemplo dos problemas concretos é o proposto por Mahavira: "o preço de 9 limões e 7 maçãs é 107, o preço de 7 limões e 9 maçãs é 101. Ó você aritmética, diga-me rapidamente o preço de um limão e uma maçã, depois de ter distinguido claramente esses dois preços".

De acordo com Dorier (1990, p.40), apesar do caráter realista do problema, tal afirmação pode ter sido criada para a educação dos escribas. Para Dorier (1990, p.40), esta observação reflete em outras civilizações estudadas e problemas "vestidos" parecem ser uma invenção didática universal e muito antiga.

No Quadro 13 temos um panorama histórico dos tipos de Problemas, as técnicas e recursos utilizados de resolução no período da antiguidade pelos povos indianos.

Quadro 13 – Panorama histórico no período da antiguidade pelos povos indianos.

	Tipos de Problemas	Técnicas de resolução	Recursos
INDIANOS 850 d.C	sistemas de várias equações lineares a várias incógnitas.	Sucessivas eliminações	- Sistema decimal posicional - O número zero e negativos várias incógnitas, dando-lhes nomes de cores

Fonte: Elaboração própria.

A Matemática árabe desenvolveu-se fortemente desde o século XVII. Bagdá se tornou um grande centro científico com muitas bibliotecas. Os árabes aproveitaram a herança grega e Oriental dos séculos VII e VIII e fizeram traduções de várias obras

antigas. O livro de Abu Jafar Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (c.780 - c.850), *Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala* trouxe precisas atividades sobre o “cálculo da *al-jabr*” (de onde derivou o termo álgebra). Este livro é essencialmente dedicado à resolução de problemas de heranças e outros problemas práticos da vida cotidiana da época. Em seu contexto, trazia uma linguagem totalmente retórica.

No Quadro 14 temos um panorama histórico dos tipos de problemas, as técnicas e recursos utilizados de resolução no período da antiguidade pelos povos árabes.

Quadro 14 – Panorama histórico no período da antiguidade pelos povos árabes.

	Tipos de Problemas	Técnicas de resolução	Recursos
ÁRABES Sec. XVII	Problemas de heranças e outros problemas práticos da vida cotidiana da época. Problemas poderiam ser resolvidos utilizando equações de primeiro e segundo grau com coeficientes positivos.	Métodos de resolução de problemas por sistemas de equações relacionadas com várias incógnitas, alguns de caráter indeterminado.	Linguagem totalmente retórica

Fonte: Elaboração própria.

De acordo Dorier (1990), a história de resolução das equações lineares mostra o desequilíbrio que existe na evolução entre os dois períodos antes e depois do século XVIII, evidenciado após a mudança gradual iniciada por Leibniz e Cramer na resolução de problemas. Os resultados tornaram-se cada vez mais abstratos e, em última instância, de pouco interesse para as calculadoras.

No renascimento, segundo Dorier (1990), as técnicas de resolução de sistemas de equações lineares evoluíram pouco durante este período; se os cálculos explícitos são feitos aos poucos, com sucesso suficiente, o problema permanece sempre para poder prever o número ou a existência de soluções. Os sistemas indeterminados também não são, ainda, objeto de estudo instituído.

Finalmente, se uma resolução prática é satisfeita com o conhecimento empírico existente, falta um estudo sistemático dos sistemas de equações lineares, de modo que a questão seja vista como um todo e este fato, ocorreu, segundo Dorier (1990) em uma carta escrita por Leibniz ao Marquês de L'Hospital em 1693, sobre uma discussão de um método para a eliminação da condição fenda espacial num sistema equações lineares com n incógnitas

De acordo com Dorier (1990) se delineamos a evolução da aritmética para a álgebra e uma breve gênese das notações algébricas, parece-nos que essas duas evoluções representam passagens obrigatórias para um estudo teórico de sistemas de equações lineares, que serão, no final do século XVII e no século seguinte, o ponto de partida dos primeiros conceitos da álgebra linear devido a capacidade de escrever equações formalmente com várias incógnitas e coeficientes indeterminados.

Representa um primeiro passo que, pelo menos implicitamente, segundo Dorier (1990), uma equação linear como objeto da algébrico, uma forma linear, palavra aparece no século XV e já se conseguia descrever todas as soluções de um sistema de equação linear de acordo com os coeficientes indeterminados e estabelecer relações da noção de dependência linear entre equações ainda desconhecida na época.

Segundo Dorier (1990), Leibniz havia exposto claramente o primeiro uso de um determinante em sua carta a L'Hospital, ele começa elogiando os méritos de utilizar uma nova notação, que ele havia desenvolvido para auxiliar no método de eliminação no caso de três equações à duas incógnitas.

Para o estudo da generalização de sistemas, o matemático inglês CL Dodgson com sua publicação em Londres em 1864, é um dos primeiros a dar um estudo abrangente da resolução dos sistemas $n \times m$, em seu livro Um Tratado Elementar sobre Determinantes. Aqui está o resultado na ordem em que ele lhes dá uma tradução dos principais resultados que ele demonstra:

- a) Em um sistema de n equações com $n + r$ desconhecidos, se um menor primário (ou seja, de ordem n) não for zero, o sistema é compatível (isto é, tem soluções); além disso, quaisquer valores arbitrariamente dados às variáveis não conectadas a este menor dão um valor único para os outros desconhecidos. (cita como corolário, que para um sistema homogêneo de equações $dn + l$ desconhecido, em a $(n + l)$ -solução de upleto, o quociente x_i / x_j é sempre igual ao quociente dos menores primários obtidos pela eliminação da i ésima (respectivamente j) coluna na tabela de coeficientes.) (Prop. II).
- b) Em um sistema de n equações com $n-r$ incógnitas, se a matriz aumentada (ou seja, a tabela de coeficientes limitada pela coluna de termos constantes) não é evanescente (ou seja, um desses menores primários não é zero), o sistema é incompatível. (Prop. III)

- c) Em um sistema de n equações com $n + r$ incógnitas (r maior que 0), se a matriz não elevada for evanescente, enquanto a matriz aumentada não for, o sistema é incompatível. (Prop. V)
- d) Em um sistema de n equações lineares com $n - r$ incógnitas, se houver duas equações cuja matriz não aumentada não seja evanescente, e se essas equações $n-r$ forem sucessivamente limitadas por cada uma das equações restantes, cada conjunto de equações $n-r + 1$ tem uma matriz aumentada evanescente, então (1) o sistema é compatível, (2) existe apenas uma solução e (3) as equações restantes são dependentes das n equações mencionadas acima. (Prop. VIII)

Segundo Dorier (1990), com este trabalho podemos dizer que a teoria de resolução de sistemas de equações lineares está quase completa, permanecendo nessa área apenas para surgimento das noções de classificação e dimensão do sistema do conjunto de soluções, que serão as fundações do conceito de espaço vetorial de dimensão finita.

Este papel foi cumprido, em grande parte, pelas obras de F. G. Frobenius. Em seu artigo "problema *Ueber das Pfaffsche*", publicado em 1875, ele introduziu o conceito de independência linear das soluções designadas indistintamente, apesar da ambiguidade, as duas palavras *unabhângig* (independente) e *verschieden* (distinto). O primeiro termo já foi utilizado para a independência linear das equações.

Em sua definição, escrita por Dorier (1990), podemos traduzir, na linguagem atual por: As soluções $A_i(x)$, $A_n(x)$ ($x = 1, \dots, k$) são chamados independente ou distinta, se a somatória $c_1A(1) + \dots + c_kA(k)$ não se anula para $a = 1, \dots, n$, sem c_1, c_k são todos zero, em outras palavras, quando k formas lineares $A_1(X)u_1 + \dots + A_k(X)u_k$ são independentes.

Esta definição é uma inovação, combina a ideia de dependência linear longa usada para formas lineares (ou equações que equivale à mesma) ao uso de "vetores de dimensão n " identificados por suas coordenadas, como tinha introduziu Cayley, 30 anos atrás.

Frobenius, que parece estar muito consciente de todos os resultados sobre a teoria de determinantes utilizados no restante de suas manifestações, resultados mais recentes desenvolvidos por Kroenecker ou Weierstrass.

Por outro lado, sobre uma possível resolução do paradoxo de Cramer, segundo Dorier (1990) o estudo começou com construção de uma linha, que, segundo ele, só

pode ser definida por dois pontos se eles não forem confundidos, o que equivale a dizer que duas equações lineares em duas incógnitas que não tenha uma única solução somente se essas duas equações forem diferentes umas das outras, ou se uma delas ainda não estiver incluída na outra. É uma maneira retórica de expressar que as duas equações são múltiplas.

Segundo Dorier (1990), Euler embaralha as cartas dando como exemplo, na linguagem atual, as equações: $3x-2y = 5$ e $4y = 6x-10$, como se quisesse tornar a proporcionalidade menos aparente.

Dorier (1990), exemplifica o que Euler disse: *Quando duas curvas se cruzam a quarta ordem em 16 pontos, com 14 pontos durante a condução de equações diferentes, todos juntos, são suficientes para determinar um curso desta natureza, estes 16 pontos vão ser sempre assim, três ou mais das equações resultantes já estão incluídas nas outras, de modo que esses 16 pontos determinam mais do que se houvesse apenas 13 ou 12 ou até menos, e, portanto, para determinar a curva totalmente podemos ainda nestes 16 pontos, adicionar um ou dois pontos .*

Este argumento empírico, no caso em que um ou dois pontos adicionados para determinar a curva apenas forneceriam equações dependentes das outras e não parece ter sido considerado.

Os Sistemas de equações Lineares desencadearam a criação de um campo fértil para o desenvolvimento de alguns conceitos da álgebra linear – (espaços vetoriais, subespaços vetoriais, matrizes, posto).

Rouché 1880 *Notes sur les equations lineares* surge a ideia de Posto que mais tarde reaparece nos trabalhos de Frobenius 1887 juntamente com a ideia de dependência linear.

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0 \Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_n = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$ são LI.

D´Lambert (1717-1783) considerou a solução geral das equações não-homogêneas como sendo a soma de uma solução particular com a soma da solução geral da equação homogênea correspondente. Constituindo a ideia de núcleo e base de soluções de um sistema linear o depois ficou conhecido como espaços vetoriais.

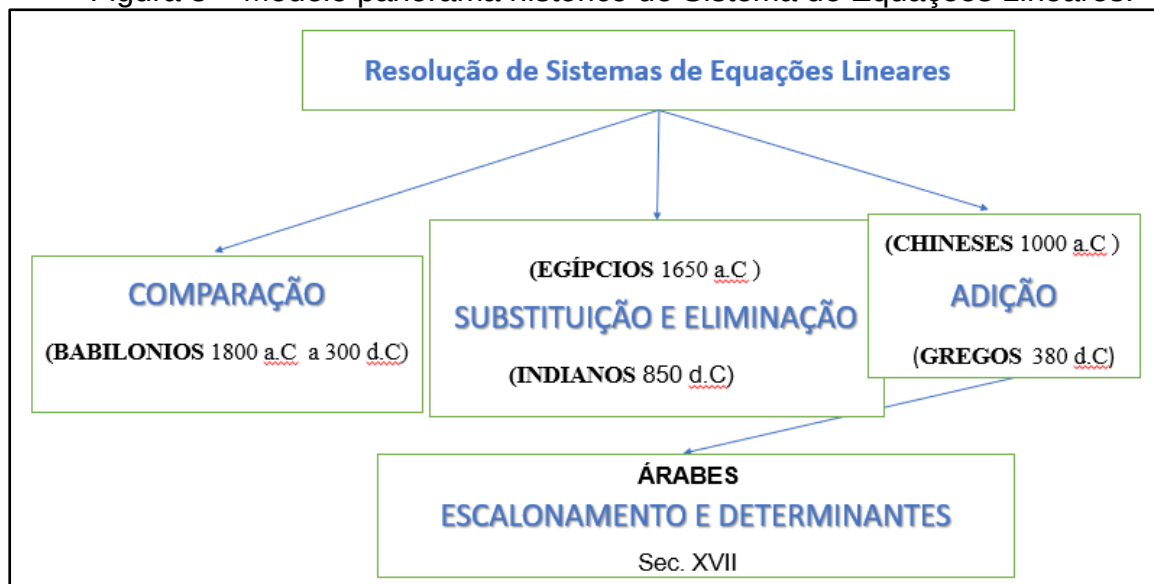
A Seiki 1863, escreve o *Method of solving the dissimulated problems* que contém método de matriz escritos como tabelas.

A ideia de determinante surge quase que simultaneamente (Japão e Europa) mais tarde surge a ideia de matrizes associadas à resolução de sistemas de equações lineares e a teoria das equações lineares.

A matemática escolar apresentava-se dividida e se estudava cronologicamente começando com a Aritmética, depois a Álgebra e, posteriormente a Geometria, sendo que a Álgebra apresentava um caráter útil apenas para resolver equações e problemas, dando início a fase conhecida como o processo de “algebrização da Matemática Clássica”, alterando a visão fundamentalista e consequentemente o equilíbrio enciclopédico entre a Aritmética, Álgebra e a Geometria no currículo escolar.

A partir de nosso estudo histórico e epistemológico, construímos o nosso modelo com panorama histórico com a *razão de ser* da resolução do objeto sistema de equações lineares (FIGURA 8).

Figura 8 – Modelo panorama histórico de Sistema de Equações Lineares.



Fonte: Elaboração própria.

Apresentamos na próxima seção, a proposta de nosso MER de sistema de equações lineares no âmbito da formação de professores construído e justificado pelo nosso estudo histórico e epistemológico realizado à luz da TAD.

3.3 Modelo Epistemológico de Referência de Sistema de Equações Lineares

Atualmente identificamos, com nosso dispositivo Modelo Epistemológico de Referência MER, modelos didáticos de referências sobre o estudo de sistema de

equações lineares tanto no âmbito da Aritmética, Álgebra e a Geometria Analítica, Equações Diferenciais e Cálculo Numérico no currículo da Licenciatura analisada.

Para atender nosso objetivo de entender a gênese do sistema de equações lineares, buscamos responder o que é o porquê de ensinar sistema de equação linear para as instituições produtoras do saber?

Dessa forma, recorreremos inicialmente, a definição de sistema de equações lineares no livro didático apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Definição de Sistema de Equações Lineares.

Suponhamos que F seja um corpo, isto é, um conjunto munido de 2 operações, adição e multiplicação, tal que: (1) A adição é comutativa, $x + y = y + x$ para todos x, y em F. (2) A adição é associativa, $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todos x, y e z em F. (3) Existe um único elemento 0 (zero) em F tal que $x + 0 = x$, para todo x em F. (4) A cada x em F corresponde a um único elemento $(-x)$ em F tal que $x + (-x) = 0$. (5) A multiplicação é comutativa, $xy = yx$ para todos x y e z em F. (6) A multiplicação é associativa, $x(yz) = (xy)z$ para todos x y e z em F.	(7) Existe um único elemento não-nulo 1 (um) em F tal que $x1 = x$, para todo x em F. (8) A cada x não-nulo em F corresponde um único x^{-1} (ou $\frac{1}{x}$) em F tal que $xx^{-1} = 1$. (9) A multiplicação é distributiva em relação à adição; isto é, $x(y + z) = xy + xz$, para todos x, y e z em F. Nessas condições de 1 a 9, consideremos o problema da determinação n escalares (elementos de F) que satisfaçam as condições: ☆ $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = Y_1$ $A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = Y_2$ $\begin{matrix} \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \end{matrix}$ $A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n = Y_m,$ tal que $Y_1, \dots, Y_m$ e A_{ij} são dados de F. Denominamos ☆ um sistema de m equações lineares a n incógnitas. Toda n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ de elementos de F que satisfaça cada uma das equações de ☆ é dita uma solução do sistema.
---	--

Fonte: (HOFFMAN e KUNZE, 1971).

Esta definição formal generalizada de sistema de equações lineares com escalares em um conjunto F , os quais satisfazem as nove condições apresentadas na Figura 7 revela alguns objetos em sua construção. Observamos que as operações de fechamento para soma de duas equações é multiplicação por escalar em cada equação é satisfeita por ser um espaço vetorial.

Para construção de nosso Modelo Epistemológico de Referência (MER), nós apoiamos em nosso estudo histórico e epistemológico e na tese de Matos (2017),

intitulada *Praxeologias e Modelos Praxeológicos Institucionais: O Caso da Álgebra Linear*.

Matos (2017) construiu um MER, o qual evoca os objetos matemáticos, técnicas, tipos de tarefas ao estudar o sistema de equações lineares para o estudo da Álgebra Linear na formação de professores.

Na Figura 8, apresentamos recorte do MER proposto por Matos (2017) com a identificação das técnicas de referência para OM de resolução de sistemas equações lineares. Estas constituídas de um estudo histórico e epistemológico dos Sistemas de equações Lineares ao estudar qual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados por estudante de licenciatura.

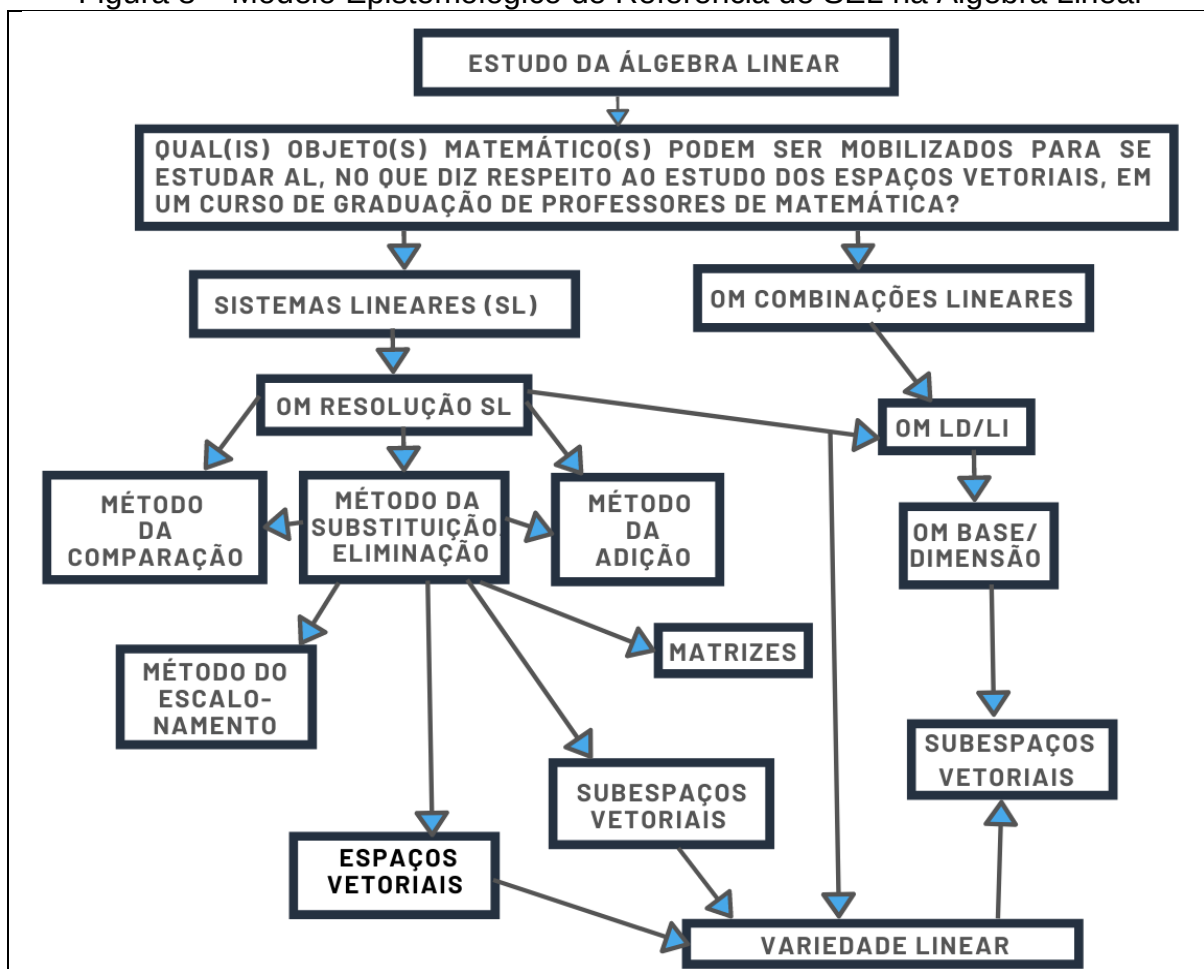
O MER de Matos (2017) é justificado com resultados construídos historicamente, as setas indicam a ordem, não necessariamente cronológica, dos objetos matemáticos evocados a partir das técnicas de resolução de sistemas de equações lineares, que especificamente são: as técnicas do Método da Comparação, Método da Substituição e Eliminação, Método da Adição e o Método do Escalonamento.

Nessa direção, temos uma visão geral dos objetos, técnicas tecnologias e teorias que nutrem o sistema de equações lineares no MER de Matos (2017).

Com base em nosso estudo, propomos nosso Modelo Epistemológico de Referência para analisarmos as ementas do curso, práticas docentes e materiais e livros didáticos, entre outros meios que permeiam as *praxeologias* de sistema de equações lineares.

Em nosso MER, referente à **dimensão epistemológica** objetivamos responder as questões P_{11} : Como introduzir os sistemas de equações lineares em um marco diferente do marco encontrado na OM dominante da instituição? P_{12} : Como podemos organizar o estudo da resolução de Sistemas Lineares mediante um MER do modelo epistemológico geral que propõe a TAD? P_{13} : Quais objetos nutrem o sistema de equações lineares, isto é, qual a *razão de ser* dos Sistemas Lineares no âmbito das *praxeologias*?

Figura 8 – Modelo Epistemológico de Referência de SEL na Álgebra Linear



Fonte: (MATOS, 2017).

Referente à **dimensão econômica-institucional**, responder às questões: P_{21} : Que âmbito institucional temos que considerar para abordar o problema didático da resolução de sistema de equações lineares: a sala de aula, a escola, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou mesmo a Civilização? : P_{22} : Qual o modelo epistemológico de sistema de equações lineares nas “instituições” estudadas? P_{23} : Que dificuldades surgem quando pretendemos modificar OM de sistema de equações lineares e quais possibilidades de OD surgem?

No que tange à **dimensão ecológica**, objetivamos responder à questão P_{31} : Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores?

Nosso estudo histórico e epistemológico permitiu responder essas questões que nutrem ensino o objeto matemático sistema de equações lineares e os objetos

matemáticos que o alimentam, as técnicas, tecnologias e teorias no contexto da formação de professores.

Constatamos em nosso estudo que objeto sistema de equações lineares são alimentados por outros objetos matemáticos, no entanto, com avanço das matemáticas e sua tentativa de unificação fez com que a *razão de ser* de tal objeto mudou o destaque, como conhecemos atualmente nas disciplinas Álgebra Linear, na Geometria Analítica, Equações Diferenciais, Cálculo Numérico, Geometria e Álgebra.

Retas, matrizes, combinações lineares alimentam o sistema de equações lineares em diferentes contextos.

As combinações lineares definidos em um espaço vetorial surgem da multiplicação um escalar por uma equação e ao somarmos equações pelo método da adição, por exemplo.

O estudo do sistema de equações lineares, como revelou nosso MER, não se resume a estudar sua resolução. De acordo com Chevallard, Bosch e Gascón, (1997), inicialmente um professor pode identificar tipos de questões e repostas as quais uma *obra* foi proposta ou poderia ser (re)criada a partir da mesma, ou seja, podemos reconstruir uma OM na *obra* a qual está inserida.

Dessa maneira, buscamos encontrar os problemas que se traduzem em questões apresentadas por conjecturas, as técnicas que se podem resolver tais questões, os elementos tecnológicos e teórico que permitem explicar e justificar suas técnicas.

A elaboração do currículo, do ponto de vista da Didática da Matemática considera essencial o componente saber matemático, não tratando apenas de organizar as sequências dos conteúdos e tempo a tratar de cada assunto do currículo, mas em realizar um trabalho matemático de reorganização dos elementos constituintes das *praxeologias* matemáticas: os tipos de tarefas, as técnicas, tecnologias e teorias que compõe cada *obra* e a base das questões que esta responde.

No contexto de sala de aula, toda atividade matemática pode ser interpretada como uma atividade de produção de *praxeologias* com o objetivo de responder à determinadas questões problemáticas.

A atividade de resolver problemas, segundo Chevallard, Bosch e Gascón, (1997) está integrada no *logos* da OM, compondo as técnicas matemáticas que estão

disponíveis numa determinada *instituição* de modo independente do discurso matemático disponível. Esta integração indissolúvel das componentes de uma OM reflete-se no tipo de atividade didática proposta.

A partir de nosso estudo histórico e epistemológico, chegamos em respostas que podemos resumir em nosso Modelo Epistemológico de Referência (MER), apresentado no esquema na Figura 9.

O nosso MER, além de responder o que alimenta o objeto sistema de equações lineares, permitiu compreender quem tal objeto nutre.

As direções das flechas com chegada no sistema de equações lineares, indica o que o alimenta. Nas direções das flechas que saem dos sistemas de equações lineares, indica quem ele nutre.

O estudo do objeto sistema de equações lineares contribuiu para o desenvolvimento da Álgebra Linear.

Desta forma, o sistema de equações lineares alimenta a Álgebra Linear. Este definido em sua primeira versão como algo próximo ao que conhecemos por Espaço Vetorial, construído historicamente, iniciado com a busca de resolver problemas lineares. No seu desenvolvimento, o objeto foi ferramenta no estudo de resolução de problemas na Geometria, Álgebra, Geometria Analítica, Cálculo Numérico e Equações Diferenciais.

As Combinações Lineares alimentam a constituição dos sistemas de equações lineares. Tais combinações podem ser geradas pela soma da multiplicação de um escalar por um vetor com outro vetor, o que equivale nos sistemas de equações lineares, multiplicar uma equação por um escalar e somar com outra equação, ou seja, resulta em uma terceira equação como combinação linear das outras duas.

As Retas alimentam o objeto sistema de equações lineares, pois o estudo dos sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas é nutrido do estudo da posição relativa entre duas retas. Nessa condição, cada equação pode ser escrita por uma equação de reta e o estudo das posições relativas entre as duas retas é uma ferramenta para a análise da resolução.

Os planos nutrem os sistemas de equações lineares. Estes são considerados no estudo de sistemas de equações lineares de três equações e três incógnitas relacionados com as posições relativas entre três planos descritos por cada equação.

As matrizes alimentam o sistema de equações lineares como ferramentas de resolução de sistemas de mais de três equações e três incógnitas. Neste caso, permite pelo método do escalonamento, realizar o seu estudo qualitativo.

Figura 9 – Modelo Epistemológico de Referência de Sistema de Equações Lineares



Fonte: Elaboração própria.

Na resolução de sistemas de equações lineares, por um lado, temos métodos analíticos de resolução pelo método da comparação, por substituição e eliminação, pelo método da adição e o escalonamento.

A técnica com maior alcance no método analítico é a do escalonamento que permite o estudo qualitativo de sistemas de equações lineares.

Por outro lado, temos o estudo por técnicas numéricas, por meio de algoritmo dois tipos de métodos, diretos e os iterativos.

Nos métodos diretos, as técnicas são oriundas dos métodos analíticos por um algoritmo com as entradas das equações.

Nos métodos diretos a solução é encontrada por um algoritmo, definido por um número finito de passos que geram uma sequência que se aproximam da solução aproximada do sistema de equações lineares.

Em contrapartida, nos métodos indiretos ou iterativos, a solução é encontrada por um algoritmo sem um número de passos estabelecidos, pois é encontrada a partir de sequência de soluções aproximadas que convergem para a solução exata em seu limite, necessitando um critério de parada previamente definido.

Apesar das técnicas numéricas permitirem encontrar soluções com rapidez, o seu alcance é equivalente ou menor ao alcance das técnicas analíticas, uma vez que os métodos numéricos são originados dos métodos analíticos.

No entanto, os métodos iterativos são eficazes pois resolvem uma classe estabelecida de problemas, com recurso computacional.

Com nosso referencial metodológico construído e nosso MER, identificamos um Modelo Didático de Referência Dominante (MDRD) nos currículos, livros didáticos e documentos oficiais relativos ao curso em estudo.

No próximo capítulo, apresentamos a infraestrutura teórica e metodológica para identificação de Modelos Didáticos de Referências Dominantes e resultados de nossa análise *institucional* em livros didáticos à luz do MER.

4 ANÁLISE INSTITUCIONAL DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES EM LIVROS DIDÁTICOS

Em busca de uma metodologia qualitativa pautada nos pressupostos da TAD e com nosso MER, construímos conjecturas para analisar o currículo e os materiais didáticos utilizados no curso de licenciatura na Instituição em estudo.

Para descrevermos e analisarmos os modelos epistemológicos dominantes nas em livros didáticos, currículos e recomendações. Cabe salientar que *modelo dominante* refere ao modelo que aparece com maior frequência ou adotado como referência na instituição analisada.

Nesse capítulo apresentamos a metodologia utilizadas para colher dados relativos ao número de frequência de tarefas, resultados de nossa análise institucional do objeto matemático sistema de equações lineares.

Apresentamos estas conjecturas e nossa infraestrutura metodológica, no que segue.

4.1 Estudo da dimensão econômica-institucional dos sistemas de equações lineares

De acordo com Almouloud (2015), a TAD auxilia na análise de livros didáticos. Tal procedimento frequentemente é dividido em duas partes: a primeira de identificação e a segunda, a avaliação.

Nessa pesquisa, denominamos a primeira parte de análise exploratória (AE) e a segunda parte de efetivação da análise (EA).

A primeira parte da análise é organizada em três fases como segue:

Primeira fase: “Identificação do tipo de tarefas” – Nessa fase são analisadas as atividades propostas em todas as diferentes partes do capítulo. Atividades, exemplos, desafios, exercícios resolvidos e propostos, entre outras tarefas, permitem identificar qual o tipo de tarefa que é importante para instituição.

Consideramos essa identificação como uma análise exploratória e de extrema utilidade para a identificação do Modelo Didático de Referência dominante. Além disso, nessa fase a identificação contribui para analisar a “razão de ser” do objeto matemático em estudo para a instituição.

Segunda fase: “Identificação de técnicas” – Após a fase de identificação das tarefas, inicia-se a fase identificação de técnicas que proporcionam a resolução das tarefas propostas na instituição.

Em nossa pesquisa analisamos os livros didáticos do ensino superior pertencentes a ementa do curso, os materiais didáticos de nossa revisão da literatura.

Terceira Fase: “Identificação de tecnologias” – Nessa fase a tecnologia é caracterizada de forma construtiva a partir da análise dos comentários dos autores, eventualmente da análise do livro do professor ou de análise de atividades propostas para verificação da institucionalização do saber.

Em nosso estudo analisamos com base em nosso MER como os autores dos livros didáticos e as pesquisas de nossa revisão argumentam sobre a justificativa das técnicas.

Após a identificação, um dos aspectos importantes da TAD, segundo Almouloud (2015), é a possibilidade de avaliar as tarefas/técnicas e tecnologias nos processos de ensino e da aprendizagem de conceitos matemáticos.

Na segunda parte, a avaliação é a parte de efetivação da análise (EA). Chevallard (1999 apud ALMOULOU, 2015, p 16-17) propõe alguns critérios que podem ser considerados para avaliar tipos de tarefas, técnicas ou o bloco tecnológico-teórico.

De acordo com Almouloud (2015) e Chevallard (1999), os critérios listados a seguir devem ser atendidos:

- I) Avaliação de tipos de tarefas: “Critério de identificação” – CI: Verificar se os tipos de tarefas estão postos de forma bem clara e bem identificados;
- II) “Critério da razão de ser” – CRS: Verifica se as razões de ser dos tipos de tarefas estão explicitadas ou ao contrário, esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;
- III) Critério de pertinência” – CP: Verifica se os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas mais frequentemente encontradas e se são pertinentes, tendo em vista as necessidades dos alunos.

Avaliação das técnicas considera-se os mesmos critérios analisados nos tipos de tarefas. Além disso, temos as seguintes questões a serem respondidas: As

técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas? São fáceis de utilizar? Sua importância é satisfatória? Sua confiabilidade é aceitável, sendo dado suas condições de emprego? São suficientemente inteligíveis?

Sobre questões referentes ao bloco tecnológico-teórico: fizemos observações em tarefas, a justificção das técnicas do problema quanto aos aspectos: As formas de justificção utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas? São adaptadas ao problema colocado? Os argumentos são cientificamente comprovados?

De acordo com Almouloud (2015), o resultado tecnológico de uma dada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas.

Atualmente, os recursos computacionais permitem resolver sistema de equações lineares de com várias maneiras, que por sua vez, consideramos importante para nossa análise em materiais didáticos postular a sua utilização para o seu ensino.

Nesse contexto, para auxiliar na especificidade de como analisamos inicialmente o livro na parte exploratória, construímos a conjectura geral apresentada a seguir sob ponto de vista da TAD no que refere às condições e restrições que possibilitam a difusão do conhecimento matemático.

Inicialmente, elaboramos uma conjectura supondo que atualmente nos livros didáticos há insuficiência de tarefas que utilizam recursos computacionais

Conjectura Geral: Há ausência de atividades matemáticas que envolvem recursos computacionais na resolução de sistemas lineares com interpretação da resolução de sistemas lineares nas *praxeologias* matemáticas atuais nos livros didáticos do ensino superior.

De acordo com referencial metodológico exposto e com nosso MER, propomos para análise das tarefas dos livros didáticos, a partir da conjectura geral, cinco conjecturas adaptadas de Fonseca (2004).

A conjectura **C1: Há uma dependência da nomenclatura associada a uma técnica**. foi proposta para auxiliar na exploração das tarefas considerando a seguinte hipótese: a nomenclatura deve ser irrelevante quando modificações simples nos símbolos que são utilizados na técnica. Tais modificações podem tornar relevante a atividade matemática, possibilitando a identificação de técnica, ou objetos matemáticos. Por exemplo, a técnica de resolução de equações do segundo grau no

ensino médio, que geralmente é apresentado como uma única técnica predominando apenas a letra latina x na fórmula de sua resolução.

A partir da conjectura C1 investigamos nas OM de sistema de equações lineares se a nomenclatura é irrelevante em relação à uma técnica. Tal confusão pode surgir quando por exemplo ao apresentarmos a notação com índices nas incógnitas ($x_1, x_2, x_3, \dots$) são interpretadas associadas com técnica, por exemplo de escalonamento. Pode ocorrer o caso em que o aluno não conceba o objeto matemático sistema de equações lineares, isto pode ser devido a ser conhecido para o aluno apenas a notação com letras latinas ($x, y, z, \dots$).

Elaboramos outra Conjectura **C2: Aplicar uma técnica não inclui a interpretação do resultado**. Nesta conjectura analisamos se as tarefas exigem aplicação de determinada técnica incluindo a interpretação do resultado. Quando houver insuficiência de tarefas que exigem apenas o treino da técnica, por exemplo, no caso de resolução de sistemas de equações lineares, o aluno aprende a técnica do escalonamento e a desenvolve completamente em uma tarefa, mas não consegue explicar qual a solução encontrada e interpretá-la.

Nesse caso, se o livro didático utilizado não possuir ou tiver insuficiência de tarefas que incluem a interpretação, acreditamos que o professor terá dificuldade em propor tarefas e avaliar esse aspecto. A conjectura **C3: Não se revertem as técnicas para resolver a tarefa inversa** A conjectura está relacionada com análise exploratória de tarefas que possuem técnicas inversas tratadas de modo isolado, ou seja, a inversão de técnicas, por exemplo, encontrar equações lineares que formam um sistema de equação lineares com a solução, dada a *priori*

Nesse contexto, tal conjectura auxiliará na detecção de escassez de tarefas, que novamente ficará a cargo do professor tal objetivo caso haja ou ausência de tais tarefas nesse aspecto referido.

A conjectura **C4: Estão ausentes recursos computacionais como auxílio nas tarefas de resolução de sistemas de equações lineares** é para constatar se há tarefas que utilizam recursos computacionais, considerando a possibilidade como instrumento mediador semiótico importante no auxílio a aprendizagem, por exemplo no que se refere a conversão de registros.

Na resolução de sistemas de equações lineares, tais recursos podem contribuir na visualização das representações dos sistemas de equações lineares.

Após propormos cada conjectura, especificamos cada uma criando conjecturas secundárias que apresentaremos em quadros para organizar a análise em categorias como veremos no que segue.

Para análise exploratória da conjectura C1, propomos conjecturas secundárias C1A, C1B e C1C para analisar se as técnicas matemáticas dependem fortemente da nomenclatura? Propomos especificação para 3 temas na resolução: a técnica do escalonamento, técnica da substituição, utilizando registros algébricos e técnicas geométricas com notação matricial ou algébrica com letras latinas.

Quadro 15 – Conjecturas secundárias sobre a dependência da nomenclatura.

Conjectura C1	
C1 - Há uma dependência da nomenclatura associada a uma técnica.	
Conjecturas secundárias	CÓDIGO
Na resolução de sistema de equações lineares pela técnica de escalonamento predomina as letras latinas $\{x, y, z, t, \dots\}$ para representar as variáveis ou aparecem letras com índices $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$?	C1A
Como é representada a solução algébrica de um sistema de solução indeterminado? Predomina letras gregas $\{\alpha, \beta, \dots\}$ para representar os parâmetros das variáveis com grau de liberdade?	C1B
Nas tarefas de representação gráfica da solução de sistema de equações lineares predominam nos enunciados as letras $\{x, y, z\}$ ou aparecem com índices sugerindo a notação matricial?	C1C

Fonte: Elaboração própria.

Para análise da conjectura C2 propomos conjecturas secundárias C2A, C2B e C2C, conforme Quadro 16, para auxiliar na especificação da interpretação do resultado de um sistema de equação linear

Quadro 16 – Conjecturas secundárias sobre técnica com a interpretação do resultado

Conjectura – C2	
C2 - : Aplicar uma técnica não inclui a interpretação do resultado	
Conjecturas secundárias	CÓDIGO
Na resolução de sistemas lineares de duas e três variáveis há baixa predominância de tarefas que envolvem a interpretação gráfica?	C2A
Há baixa frequência de tarefas de resolução de sistemas de equações lineares focados na interpretação relacionados a outras áreas?	C2B
Na resolução de sistemas lineares com mais de três variáveis há baixa predominância em tarefas que incluem a interpretação do resultado em problemas reais, como por exemplo, restrição do domínio do conjunto solução?	C2C

Fonte: Elaboração própria.

Para análise da conjectura C3 propomos a Conjectura secundária C3A para auxiliar na especificação da interpretação do resultado de um sistema linear.

Quadro 17 – Conjecturas secundária sobre as técnicas para resolver a tarefa inversa.

Conjectura – C3	
• C3 - Não se revertem as técnicas para resolver a tarefa inversa.	
Conjectura secundária	CÓDIGO
Na resolução de sistemas de equações lineares predomina tarefas com o método direto?	C3A

Fonte: Elaboração própria.

Na análise da conjectura C4 propomos a Conjectura secundária C4A, quadro 15, para auxiliar na verificação de utilização de recursos computacionais.

Quadro 18 – Conjectura secundária sobre recursos computacionais

Conjectura – C4	
• C4 - Estão ausentes recursos computacionais como auxílio nas tarefas de resolução de sistemas de equações lineares.	
Conjectura secundária	CÓDIGO
Na resolução de sistema de equações lineares predomina tarefas com ou sem o uso de recurso computacional?	C4A

Fonte: Elaboração própria.

Propomos conjecturas, com objetivo de responder as questões propostas para nossa no que se refere ao objeto matemático sistema de equações lineares, visando identificar os tipos de tarefas (T), técnicas (τ), tecnologias (θ) e teorias (Θ).

Nesta seção, buscou-se identificar conjecturas para análise das tarefas apresentadas sobre sistemas de equações lineares.

No âmbito desse objetivo do autor e com intuito de responder a conjectura: C1 - Há uma dependência da nomenclatura associada a uma técnica, elencamos os seguintes tipos de tarefas **T1A – Resolver sistema de equações lineares pela técnica de escalonamento** de resolução de sistema de equações lineares para analisar a Conjectura secundária C1A. Neste tipo de tarefa T1A, consideramos a técnica escalonamento como qualquer técnica que faz uso de procedimentos ou

mecanismos que envolvem matrizes e operações elementares para transformar o sistema inicial em sistemas equivalentes associados com objetivo de resolvê-lo.

Por exemplo, a tarefa: dado um sistema de equações lineares, escrever a matriz ampliada, associada ao sistema e reduzi-la na forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema é uma tarefa que se encontra nessa categorização de tipo de tarefas T1A.

Identificamos tarefas T1A dessa natureza para auxiliar na busca de resposta da conjectura: C1A: Na resolução de sistemas de equações lineares pela técnica de escalonamento predominam as letras latinas $\{x, y, z, t, \dots\}$ para representar as variáveis ou aparecem letras com índices $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$?

Analizamos se nas tarefas T1A predominavam letras latinas para representar as variáveis ou se aparecem letras com índices.

Após a identificação no que se refere a C1A, identificamos tipos de tarefas **T1B: Representar a solução algébrica da resolução de sistema de equações lineares de solução indeterminada.**

Os tipos de tarefas T1B nos auxiliará na busca de resposta da conjectura: C1B: Como é representada a solução algébrica de um sistema de equações lineares com solução indeterminada? Predominam letras gregas $\{\alpha, \beta, \dots\}$ para representar os parâmetros das variáveis com grau de liberdade?

Nos tipos de tarefas T1B, analisamos se as soluções do sistemas lineares existem predominância de letras gregas $\{\alpha, \beta, \dots\}$ para representar os parâmetros das variáveis com grau de liberdade ou aparecem letras com índices $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ sugerindo analogia a notação de matrizes.

Em busca da identificação de outro tipo de tarefas relacionadas a conjectura C1C: Nas tarefas de representação gráfica da solução de sistemas de equações lineares predominam nos enunciados as letras $\{x, y, z\}$ ou aparecem com índices sugerindo a notação matricial?

Propomos **T1C: Representar a interpretação geométrica de sistemas de equações lineares, quando possível** na busca em responder C1C.

O objetivo da conjectura C1C é analisar se as tarefas T1C que incluem a interpretação geométrica, quando possível, estão associadas a uma nomenclatura associada a técnica do escalonamento mencionada anteriormente.

No que se refere a interpretação do resultado dos sistemas lineares temos a conjectura: C2 - Aplicar uma técnica não inclui a interpretação do resultado. Elencamos os tipos de tarefas de resolução de sistemas de equações lineares relacionados a interpretação gráfica de acordo com o tipo de tarefas

A identificação dos tipos de tarefas T2A: ***Resolver sistemas de equações lineares de três e duas incógnitas que envolvem a interpretação gráfica*** nos auxiliará a responder a conjectura C2A – Na resolução de sistemas de equações lineares de duas e três incógnitas, há baixa predominância de tarefas que envolvem a interpretação gráfica?

Sobre a conjectura C2B – Há baixa frequência de tarefas de resolução de sistemas de equações lineares focados na interpretação relacionados a outras áreas? Identificamos no livro analisado os tipos de tarefas da categoria ***T2B: Resolução de sistemas de equações lineares que envolvem a interpretação do resultado relacionado a outras áreas.***

Referente a Conjectura secundária C2C – Na resolução de sistemas de equações lineares com mais de três variáveis há baixa predominância em tarefas que incluem a interpretação do resultado em problemas reais, como por exemplo, restrição do domínio do conjunto solução? Identificamos por tarefas ***T2C: Resolução de sistemas de equações lineares com mais de três incógnitas que incluem a interpretação do resultado.***

Na análise quanto a predominância de técnicas conforme conjectura C3 - Não se revertem as técnicas para resolver a tarefa inversa, criamos as Conjecturas secundárias C3A.

No que se refere a técnica do escalonamento, a conjectura C3A – A técnica de escalonamento na resolução de sistemas de equações lineares de duas variáveis é mais frequente que a técnica de substituição?

Com objetivo de caracterizar os tipos de técnicas, definimos como método direto como sendo o procedimento de encontrar a solução de sistemas lineares quando é dado o sistema. Tarefas reversas, nesse caso, tem o sentido contrário, isto é, dado a solução de um sistema de equações lineares (x_0, y_0) , por exemplo a tarefa é para encontrar equações de retas que determinam um sistema de equações lineares de duas equações cuja solução é a fornecida. Inicialmente verificamos a identificação de técnicas em todas as tarefas ***T3A Resolução de sistemas de equações lineares***

duas incógnitas. Consequentemente, verificamos a identificação de técnicas relativos à resolução de sistema de equações lineares de três incógnitas conforme conjectura C3B – A técnica de escalonamento na resolução de sistemas de equações lineares de três incógnitas é mais frequente que outra técnica?

Para auxiliar na identificação de tais técnicas criamos as tarefas **T3B: Resolução de sistemas de equações lineares três incógnitas.**

Para identificação de técnicas em sistemas de equações lineares com mais de três incógnitas, conjectura C3C – Na resolução de sistemas de equações lineares com mais de três incógnitas predomina a técnica do escalonamento?

Elencamos para a identificação os seguintes tipos de tarefas **T3C: Resolução de sistema de equações lineares de n variáveis; $n > 3$.**

A conjectura C4 - Estão ausentes recursos computacionais como auxílio nas tarefas de resolução de sistema de equações lineares, foi desenvolvida com intuito de explorar técnicas dos tipos de tarefas que utilizam recursos computacionais com auxílio na resolução de sistema de equações lineares:

Para tal exploração, criamos a conjectura C4A – Na resolução de sistema de equações lineares predomina tarefas com ou sem o uso de recurso computacional?

Para responder a conjectura C4A, analisamos todas as tarefas **T4A: Resolução de sistema de equações lineares**, de resolução de sistema de equações lineares:

Nossa pesquisa revelou dois Modelos Didáticos de Referência Dominantes de Sistema de Equações Lineares.

O primeiro presente nos livros didáticos do ensino escolar. Identificamos o Modelo de Referência Dominante de Sistemas de Equações Lineares nos livros didáticos consultados a partir dos resultados das análises de nossa revisão.

O segundo modelo foi revelado nos livros didáticos da formação inicial de professores. Em nossa pesquisa, com conjecturas e nosso MER, identificamos um Modelo Didático de Referência Dominante ao analisarmos os livros didáticos no ensino superior sugeridos nas ementas das disciplinas do curso de Licenciatura.

Apresentamos, estes dois modelos didáticos de referências dominantes nos livros didáticos do ensino médio e superior, no que segue.

4.2 Modelo Didático de Referência Dominante Sistemas de Equações Lineares nos livros didáticos escolares.

Em busca da identificação de um possível modelo didático de referência dominantes na educação escolar sobre o objeto matemático sistema de equações lineares, consultamos os livros didáticos a partir de nossa revisão da literatura e as recomendações de documentos oficiais.

De acordo com a na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apresentamos no Quadro 19, o sistema de equações Lineares é objeto de conhecimentos na área de Álgebra, somente no 8º ano, e no 7º ano, as equações lineares

No 7º ano é introduzida a equação polinomial do 1º grau redutíveis a redutíveis à forma $ax + b = c$, a partir de propriedades da equação em que seja possível encontrar a solução.

Depois no 8º ano temos a competência, estabelecida pela BNCC, de associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano com a habilidade de resolução algébrica e representação no plano cartesiano relacionados à problemas ao contexto próximo do aluno.

Quadro 19 – Conhecimento e habilidades de sistema de equações lineares.

PERÍODO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
7º Ano	Equações polinomiais do 1º grau	Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau , redutíveis à forma $ax + b = c$, pelas das propriedades da igualdade.
8º Ano	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.	Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Fonte: Elaboração própria.

De acordo com a BNCC, a unidade temática Álgebra tem por objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo essencial a utilização de modelos matemáticos com equações.

Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2018, pág. 270).

De acordo com a BNCC, devem ser aprendidos nos anos finais do ensino fundamental, conexões de variável e função; e de incógnita e equação, evidenciando as técnicas de resolução de equações e inequações e o plano cartesiano sejam desenvolvidas para representar e resolver tipos de problemas, e não como objetos de estudo em si mesmos.

Sobre a Geometria, a BNCC recomenda um estudo amplo de conceitos e procedimentos para resolver problemas reais das diferentes áreas do conhecimento. Indicando que nessa unidade temática seja estudado a posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, permitindo desenvolver o pensamento geométrico.

A BNCC ressalta que tal pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e desenvolver argumentos geométricos válidos destacando a importância do aspecto funcional da aproximação da Álgebra e a Geometria, do início do estudo do plano cartesiano com as ferramentas da geometria analítica e com a noção de coordenadas, sendo iniciadas no Ensino Fundamental (BRASIL, 2018).

A organização do ensino de sistemas de equações lineares nos anos iniciais, é determinada, segundo a BNCC, o primeiro contato com a ideia de coordenadas que:

podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de **sistemas de equações do 1º grau**, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por

uma equação do 2º grau. As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. (BRASIL, 2020, p. 7823)

Foram incluídas habilidades relacionadas com a interpretação gráfica a ser desenvolvidas pelo pelos estudantes sobre o objeto sistema de equações lineares na Educação Básica. Associar as equações do sistema linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano, bem como sua resolução algébrica em problemas relacionados ao seu contexto próximo (BRASIL, 2018).

Aprendizagens essenciais são garantidas para o alcance do seu desenvolvimento na formação de professores, nos termos do art. 205 da Constituição Federal, reiterado pelo art. 2º da LDB, O § 8º do art. 62 da LDB que estabelece normas dos currículos dos cursos destinados à formação de docentes para a Educação Básica terão por referência a BNCC.

A Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, em seu art. 11, estabelece o prazo de 2 (dois) anos, contados da data de homologação da BNCC, para que seja implementada a referida adequação curricular da formação docente.

Para tanto instituiu na Formação Continuada de Professores, a Base Nacional Comum para a Formação Continuada de Professores da Educação Básica (BNC-Formação Continuada) como norma vigente a todas as modalidades dos cursos e programas destinados à formação continuada de Professores da Educação Básica.

No Art. 3º é definido as competências profissionais indicadas na BNCC-Formação Continuada. O professor deve ter sólido conhecimento dos saberes constituídos, das metodologias de ensino, dos processos de aprendizagem e da produção cultural local e global.

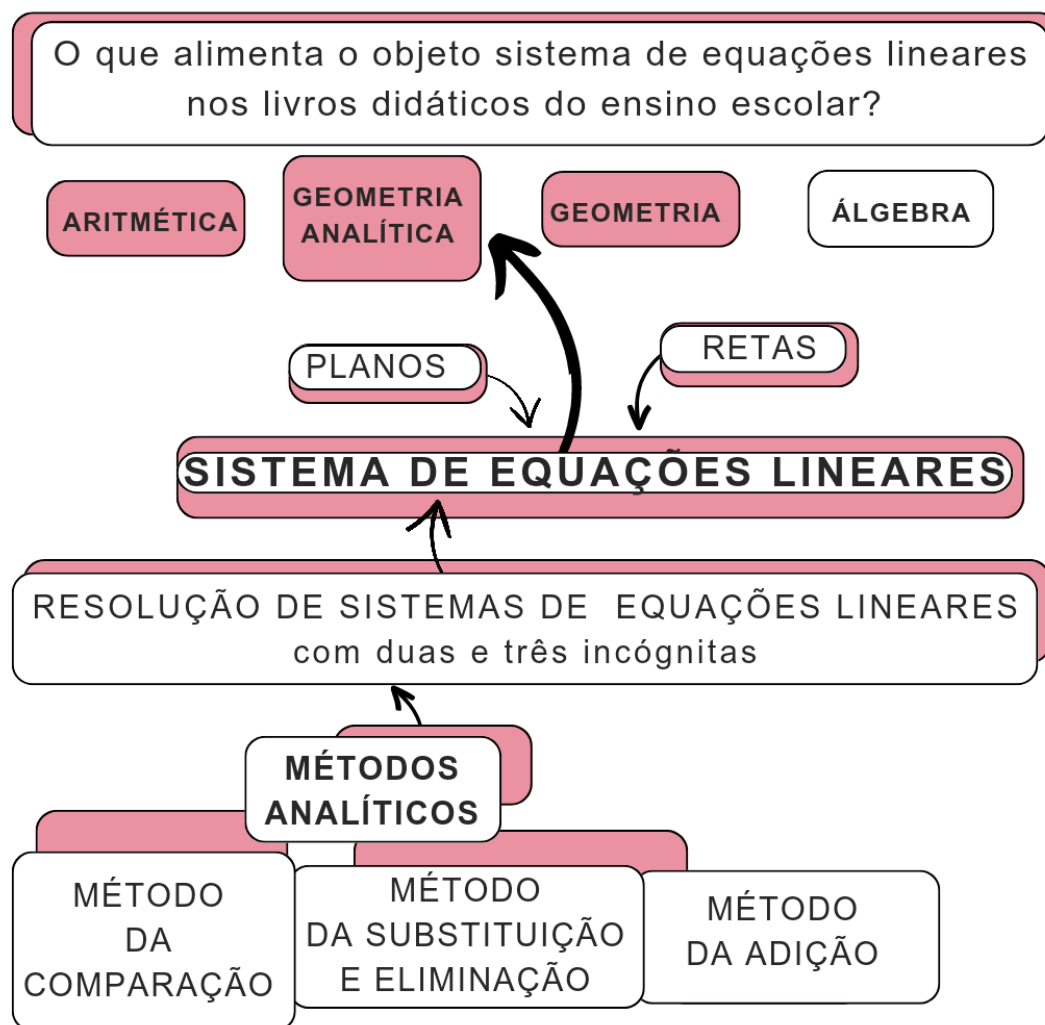
Para nossa identificação dos tipos de tarefas das *praxeologias* matemáticas na educação escolar, analisamos livros didáticos encontrados em nossa revisão

Constatamos que modelo didático de referência, do objeto de sistema de equações lineares com maior frequência, é abordado na Geometria Euclidiana, focado nas tarefas em resolver de sistema de equações lineares com duas e três incógnitas, suas técnicas de resolução manifestadas explicitamente justificada na Geometria Analítica e implicitamente na Aritmética, Geometria e na Álgebra.

Os objetos matemáticos na Álgebra Linear, tais como, espaço vetorial, combinações lineares, entre outros pertencentes ao nosso MER, não aparecem ou com baixa frequência na educação escolar.

O que alimenta os sistemas de equações lineares nos livros da educação escolar, é resultado de nossa análise, a partir das conjecturas criadas e nosso MER, exploramos os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias nas *praxeologias* encontradas e identificamos o Modelo didático de Referência Dominante de Sistema de Equações Lineares na educação escolar, exposto na Figura 11

Figura 10 – Modelo Didático de Referência Dominante nos livros escolares.



Fonte: Elaboração própria.

O estudo de sistema de equações lineares, nos livros didáticos da educação escolar, é abordado nas áreas da Aritmética, Geometria Analítica, Geometria e Álgebra.

No entanto, são tratados predominante na Geometria Analítica e alimentados por planos e retas, uma vez que é restrito à resolução de sistema de equações de duas e três incógnitas.

As técnicas mais frequentes para resolver sistema de equações lineares diagnosticadas são: o Método da Comparação, Método da Substituição e Método da Adição

O estudo do objeto matemático sistemas de equações lineares, que em nossa visão e de nosso referencial, que deveria ser objeto modelizador da álgebra, se reduz ao estudo de técnicas para sua resolução que nem sempre requer sua utilidade. Além disso, a *razão de ser* do objeto é transformada de objeto para uma ferramenta para solucionar problemas hipotéticos.

Nesse contexto, vale ressaltar que nossa revisão corrobora com a pesquisa realizada sobre os sistemas de equações lineares de Gaita e Silva (2018), pois destacam que existem poucos trabalhos que envolvem mais que três equações à três incógnitas, limitando a possibilidade de propor problemas para resolver na área da computação e engenharia, entre outras.

No entanto, o MDRD nos livros didáticos no ensino superior no contexto da formação de professores é diferente do MDRD dos livros didáticos escolares, como apresentamos na próxima seção.

4.3 Modelo de Referência Dominante Sistemas de Equações Lineares nos livros didáticos do ensino superior

Sobre o ensino de Álgebra Linear e Geometria Analítica no Brasil, encontramos recomendações curriculares publicadas no documento, “A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM” pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em conjunto com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). O documento traz reflexões sobre o direcionamento curricular nos cursos de licenciaturas de matemática no Brasil (SBEM, 2013).

No que tange à disciplina Álgebra Linear, o documento destaca a importância do domínio dessa área por permear em aplicações dentro da matemática e em áreas distintas, como das ciências exatas, biológicas, sociais ou da economia. É destacado

que vários dos tópicos da Álgebra Linear estão presentes no currículo do ensino médio, tais como: funções, matrizes, determinantes e sistemas lineares e são trabalhados por muitos professores que desconhecem o significado das operações com as linhas de uma matriz, ressaltando que, durante um escalonamento ou do cálculo de um determinante se limitam apenas ao cálculo mecanizado (SBEM, 2013).

Em relação à Geometria Analítica, o documento ressalta que ela constitui um campo importante no currículo do ensino médio, conectando a Álgebra e Geometria, mas na realidade existe uma fragmentação e enfoque limitado não preparando o aluno devidamente para o Ensino Superior nas áreas de Matemática. Além disso, não esclarece o papel da Geometria Analítica na formação de nível médio de alunos que se dirijam à profissionalização em outras áreas de conhecimento (SBEM, 2013).

Para coletar os dados escolhemos os livros didáticos das disciplinas em que aparece o sistema de equações lineares descritos na ementa do curso: Albrecht (1973), Boldrini et al. (1986), Ruggiero e Lopes (1996), Cláudio e Marins (2000), Steinbruch e Winterle (1987), Santos (2007), Anton (2012), Shiffrin e Adams (2013), Strang (2013), Lay (2013), Borceux (2014) e Araújo (2017).

A seguir, expomos o resultado Boldrini et al. (1986), o qual contabilizamos o total de 38 tarefas de resolução de sistema de equações lineares encontradas no decorrer do capítulo dois intitulado por sistemas de equações lineares no livro predominante utilizado na instituição. As tarefas foram encontradas em toda parte do capítulo, explorando explicações em exemplos, teoremas, proposições, corolários ou explicitamente como exercícios sugeridos no final.

Após a identificação dos tipos de tarefas, cruzamos em tabelas as conjecturas com intuito de auxiliar e compreendermos como se manifesta a organização analisada.

Na tabela 1, apresentamos o número total de tarefas encontradas relativos à conjectura C1: *Há uma dependência da nomenclatura associada a uma técnica.*

Tabela 1 – Resultados da conjectura C1 para auxiliar na análise exploratória (AE).

Conjecturas secundárias	Tipos de tarefa T	Número de tarefas	
		Variáveis {x, y, z,...}	Variáveis distintas
C1A	Resolver de sistema de equações lineares pela técnica de escalonamento.	2	9

C1B	Representar da solução algébrica de sistemas de solução indeterminada.	4	3
C1C	Representar o gráfico de sistema de equações lineares para sua solução.	0	3

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 2 a seguir é apresentado o número total de tarefas de cada tipo incluindo exemplos, exercícios resolvidos e propostos levando em conta a conjectura C2. A nomenclatura com letras latinas minúsculas {x, y, z, ...} predominaram em sistemas de equações com mais de duas incógnitas, enquanto em sistemas de duas incógnitas letras distintas.

Note na Tabela 2, as tarefas de resolver sistema de equações lineares, de duas incógnitas que envolvem a interpretação gráfica, as variáveis latinas {x,y,z,...} não aparecem, enquanto nas tarefas de resolver sistema de equações lineares com mais de três incógnitas que incluem a interpretação do resultado, predominam as variáveis latinas.

Tabela 2 – Resultado da conjectura C2 para auxiliar na análise exploratória (AE).

Conjecturas secundárias	Tipos de tarefa T	Número de tarefas	
		Variáveis {x, y, z,...}	Variáveis distintas
C2A	Resolver de sistema de equações lineares de duas incógnitas que envolvem a interpretação gráfica.	0	3
C2B	Resolver sistema de equações lineares que envolvem a interpretação do resultado relacionado a outras áreas.	4	3
C2C	Resolver sistema de equações lineares com mais de três incógnitas que incluem a interpretação do resultado.	3	0

Fonte: Elaboração própria.

A técnica predominante em foi a do escalonamento nos livros analisados.

Tabela 3 – Resultado da conjectura C3 para auxiliar na análise exploratória (AE).

Conjecturas secundárias	Tipos de tarefa T	Número de tarefas	
		Técnica Escalonamento	Técnicas distintas
C3A	Resolver de sistema de equações lineares duas incógnitas	8	2

C3B	Resolver de sistema de equações lineares de três incógnitas.	3	2
C3C	Resolver de sistema de equações lineares de n incógnitas; $n > 3$	5	1

Fonte: Elaboração própria.

Na Tabela 3, constam os resultados relativos à conjectura C3, em Boldrini et al. (1986).

Constatamos que existe uma insuficiência de tarefas inversas sobre sistemas de equações lineares, uma característica do fenômeno da desarticulação de tarefas que contribui para atomização curricular.

Na Tabela 4 temos os resultados do livro didático Boldrini et al. (1986), referente à conjectura C4 para detectar as tarefas com auxílio de recursos computacionais.

Tabela 4 – Resultado da conjectura C4 para auxiliar na análise exploratória (AE).

Conjecturas secundárias	Tipos de tarefa T	Número de tarefas	
		Recurso Computacional	Ausência de recurso
C4A	Resolução de sistema de equações lineares.	0	38

Fonte: Elaboração própria.

Conforme podemos constatar, não há utilização de auxílio computacional no ensino de sistema de equações lineares no livro didático Boldrini et al. (1986). Este fato é predominante nos livros didáticos analisados.

Verificamos que o método de escalonamento é uma técnica predominante nos livros didáticos do ensino superior e existem poucas tarefas relacionado com a interpretação geométrica do resultado da resolução de sistemas de equações lineares e aplicações em outras áreas.

Além disso, aparece de modo não muito explícito, a noção de dependência linear, sugerindo a leitura do capítulo que trata desse tema, ou seja, propondo uma possível conexão desses assuntos.

O método da eliminação de Gauss, procedimento que nesta pesquisa está incluído no conjunto de técnicas e denominamos de escalonamento.

Esta, considerada como uma técnica para resolver sistema de equações lineares de qualquer ordem, sendo a técnica com maior alcance e considerada a mais eficaz na resolução e demonstração de resultados na Álgebra Linear.

No que se refere às técnicas propostas não são todas efetivamente elaboradas e explicadas, conforme apresentada na Figura 11.

De acordo com nossa análise, existem poucas tarefas de interpretação geométrica do resultado da resolução de sistema de equações lineares, assim como, tarefas com aplicação a outras áreas que envolvem técnicas reversas.

Inicialmente é mencionado a interpretação geométrica do sistema supondo que o leitor já saiba que cada equação do sistema é representada por uma reta no plano.

Em seguida, os autores afirmam que o sistema terá uma única solução sem explicar como foi o procedimento, ou seja, não há argumentos e justificativas válidas no que se refere ao método utilizado.

O método que utiliza o gráfico para encontrar a solução é válido somente no caso em que os sistemas de equações lineares são de duas equações e duas incógnitas.

Constatamos que tal procedimento da interpretação geométrica é considerado nos livros didáticos, argumentos de justificativas das técnicas que predomina de resolver sistema de equações de duas equações e duas incógnitas.

Na próxima fase identificamos aspectos da tecnologia utilizada pelos autores dos livros didáticos a partir das justificativas dos exemplos apresentados ou em tarefas propostas no final do capítulo.

Nessa segunda fase de nossa análise, identificamos as tecnologias conforme sugerido por Almouloud (2015). Caracterizamos a construção pelos comentários dos autores do livro didático na resolução de exemplos e atividades propostas no capítulo do livro analisado.

O capítulo analisado é o segundo e vem após o capítulo intitulado por Matrizes, em que é abordado os tipos de matrizes e operações de matrizes.

Os autores enfatizam desde o início a associação dos sistemas lineares com as matrizes conforme podemos observar na Figura 12.

Figura 11 – Técnica que relaciona a interpretação geométrica com o escalonamento.

obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, que é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

equivalente ao sistema inicial. O sistema tem uma única solução $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$, como foi analisado graficamente. Observamos que o posto da matriz

dos coeficientes do sistema reduzido $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e o da matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ é } 2.$$

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Lembramos que o conjunto de pontos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que satisfaz cada equação deste sistema, representa uma reta no plano. Para resolver este sistema devemos então encontrar os pontos comuns a estas duas retas.

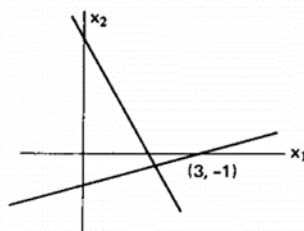


Figura 2.5.1

Deste modo, $(3, -1)$ é a única solução. A matriz ampliada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}. \text{ Transformando-a em matriz-linha reduzida à forma escada,}$$

Fonte: (BOLDRINI et al. 1986).

A explicação da técnica de resolução de sistema de equações lineares é inicialmente exposta de maneira intuitiva, sem justificação dos procedimentos. Conforme os autores sugerem: para efeito de visualização, colocamos ao lado de cada sistema uma matriz a ele associada.

Notamos que é exigido um esforço cognitivo do leitor, constatado quando deixado a cargo do aluno conforme constatamos em nossas práticas, exigindo assim que o professor faça uma transposição didática nessa tarefa de como é dada a associação da matriz, uma vez que não é explicado como é o procedimento de associação. Entretanto, na próxima seção do livro analisado, intitulada por Sistemas e Matrizes é definido o sistema de equações lineares associado com uma matriz.

Figura 12 – Esforço cognitivo compreender como é dada a associação da matriz.

Exemplo 2: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de B , onde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações matriciais:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: (BOLDRINI et al. 1986, p.37).

A sustentação teórica das tecnologias utilizadas para justificar as técnicas no livro está apoiada no estudo de matrizes, exceto em raros momentos como na Figura 12, quando os autores apresentam argumentos geométricos relacionados a Geometria Analítica.

Na tarefa para encontrar posto e nulidade são utilizadas transformações que os autores denominam de operações elementares. No entanto, não é indicado o procedimento que foi realizado de uma transformação de uma matriz para outra matriz, exigindo um esforço cognitivo do leitor no entendimento de tais operações, visto que existe uma infinidade de maneiras de proceder no que denominamos de escalonamento.

Usamos dizer também que, neste caso, as duas primeiras equações são “independentes” e que as demais são “dependentes” destas. Você vai se familiarizar com estas denominações no capítulo 4. Ainda segundo esta terminologia, denominamos posto de uma matriz o número de linhas “independentes” desta. Você pode observar que uma linha será “dependente” de outras (isto é, será igual a zero no final do processo de redução) se ela puder ser escrita como soma de produtos destas outras linhas por constantes. Costumamos dizer também que esta linha é uma combinação linear das outras. Fonte: (BOLDRINI et al. 1986, p.1).

Ao terminar o procedimento, aparece de modo não muito explícito a noção de dependência inclusiva, apresentada no capítulo 3, sugerindo a leitura do capítulo que trata desse tema, ou seja, propondo uma possível conexão desses assuntos.

Diante dessa análise exploratória, e com intuito de refletir como modificar as organizações matemáticas. Seguimos a segunda fase da análise, a efetivação da análise (EA), como veremos no que segue.

No critério de identificação, verificamos se os tipos de tarefas estão postos de forma bem clara e bem identificados; no critério da razão de ser, verificamos se as *razões de ser* dos tipos de tarefas estão explicitadas ou ao contrário, esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos. Por fim, no critério de pertinência, examinar os tipos de tarefas considerados são das situações matemáticas encontradas e se são pertinentes.

Dessa maneira, em nossa análise, procuramos repostas às questões orientadoras adaptadas da construção do MER:

- a) Como se considera, como se descreve e como se interpreta o sistema de equações lineares no livro analisado?
- b) Quais tipos de tarefas são sobre sistema de equações lineares são consideradas no livro analisado?

Do ponto de vista da OM, podemos caracterizar no livro didático analisado: os sistemas lineares estão associados ao estudo das matrizes, predominando tarefas com a utilização da técnica de “eliminação de variáveis”

Por outro lado, na OD observamos que faltam tarefas com a utilização da técnica do método gráfico na resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas. Além disso, há baixa predominância de qualquer outra técnica, mesmo para sistema de duas equações e duas incógnitas conforme constatamos na AE do livro.

Segundo Boldrini et al. (1986, p 2), o público-alvo do livro é de uma diversidade de cursos, considerando assuntos indispensáveis para o estudo da Álgebra.

A discussão apresentada na seção de identificação de técnicas anteriormente, supomos que a abstração do curso de Álgebra Linear considerada pelos alunos se manifesta principalmente por: predomínio de tarefas com utilização da técnica do escalonamento; e alguns argumentos não são relacionados com os conceitos

estruturados que sustentam o capítulo. Além disso, as demonstrações são deixadas a cargo do leitor, tornando a esforço cognitivo ainda maior.

De acordo com o prefácio de Boldrini et al. (1986, p. 2), recomendam uma maior atenção ao capítulo de sistemas de equações lineares porque fornecerão a base técnica indispensável para a boa compreensão dos demais capítulos

Recomendamos especial atenção aos capítulos introdutórios, principalmente ao que trata de **Sistemas Lineares**, e que **fornecerão base técnica indispensável para a boa compreensão dos demais capítulos, além de conterem em si métodos fundamentais aplicáveis a muitas situações**. Acreditamos que as seções e capítulos alternativos permitam opções para trabalhar com os conceitos da Álgebra Linear em diferentes áreas (BOLDRINI et al. 1986, p 2).

De acordo com os autores, o sistema de equações lineares é uma importante ferramenta como base técnica que auxiliará no desenvolvimento das atividades que versam todos os capítulos

Após a avaliação das tarefas apresentamos a efetivação da análise das técnicas no que segue.

Para avaliação das técnicas consideramos os critérios analisados nos tipos de tarefas e utilizamos as seguintes questões orientadoras na efetivação da análise (EA): As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas? São fáceis de utilizar? Sua importância é satisfatória? Sua confiabilidade é aceitável, sendo dado suas condições de emprego? São suficientemente inteligíveis?

Vale ressaltar outro tipo de tarefa que encontramos com frequência são relacionadas a objetos definidos no escopo da teoria da Álgebra Linear, tais como as noções de posto e nulidade, ou seja, o procedimento de encontrar o número de linhas não nulas de um sistema de equações lineares após realizar todas as transformações de uma matriz por outra matriz, com as operações de soma ou multiplicação de escalar apor uma linha associada.

Nessa tarefa é possível realizar um estudo qualitativo evocando uma razão desse tipo de tarefa para encontrar posto e nulidade, transformações que os autores denominam de operações elementares. No entanto, não é indicado o procedimento que foi realizado de uma transformação de uma matriz para outra matriz, conforme verificado na Figura 13.

Figura 13 – Técnica de resolução de sistemas de equações lineares com operações elementares em matrizes.

Começemos com o seguinte exemplo. (Para efeito de visualização, colocaremos ao lado de cada sistema uma matriz a ele associada.)

$$(I) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

1º Passo: Eliminamos x_1 das equações (2) e (3). Para isto, multiplicamos a equação (1) por -2 e somamos a equação obtida com a equação (2), obtendo uma nova equação (2'). Da mesma maneira produziremos a equação (3'), obtida ao multiplicarmos a equação (1) por -1 , somando esta nova equação à equação (3). Isto resulta no seguinte sistema:

$$(II) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1') \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 & (2') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3') \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Fonte: (BOLDRINI et al. 1986, p. 44)

Algumas tarefas são apresentadas como exemplos, como no caso do teorema que envolve a noção de “grau de liberdade” que não é bem explicado e ilustrado conforme observamos na Figura 14.

Figura 14 – Exemplo sistema utilizando a noção de Posto e Nulidade.

Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad p_c = p_a = 2$$

$m = 3$, $n = 4$ e $p = 2$. Temos dois graus de liberdade: $x_1 = -10 + 10x_3 + 2x_4$ e $x_2 = 4 - 7x_3 - x_4$.

Fonte: (BOLDRINI et al. 1986, p. 47)

Notamos que no exemplo acima não há justificativa da técnica de modo claro, ficando a cargo do professor a transposição do saber matemático, conectá-las aos outros capítulos e outras áreas a depender do curso a ministrar.

O bloco tecnológico-teórico é somente posto ou é considerado tacitamente como pertinente? Os argumentos usados são cientificamente válidos?

O Boldrini et al. (1986) introduz sistema de equações lineares com exemplo aplicado em outras áreas e depois associa ao sistema de equações lineares e, em seguida associa a matrizes, somente depois retorna ao exemplo. Logo após declara que o objetivo do capítulo é resolver sistemas lineares quaisquer.

Os Modelos Didáticos de Referência Dominantes (MDRD) de Sistemas de Equações Lineares, identificados em livros didáticos é o resultado de nossa análise, exploramos os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias nas *praxeologias* encontradas e identificamos o Modelo didático de Referência Dominante de Sistema de Equações Lineares no ensino superior.

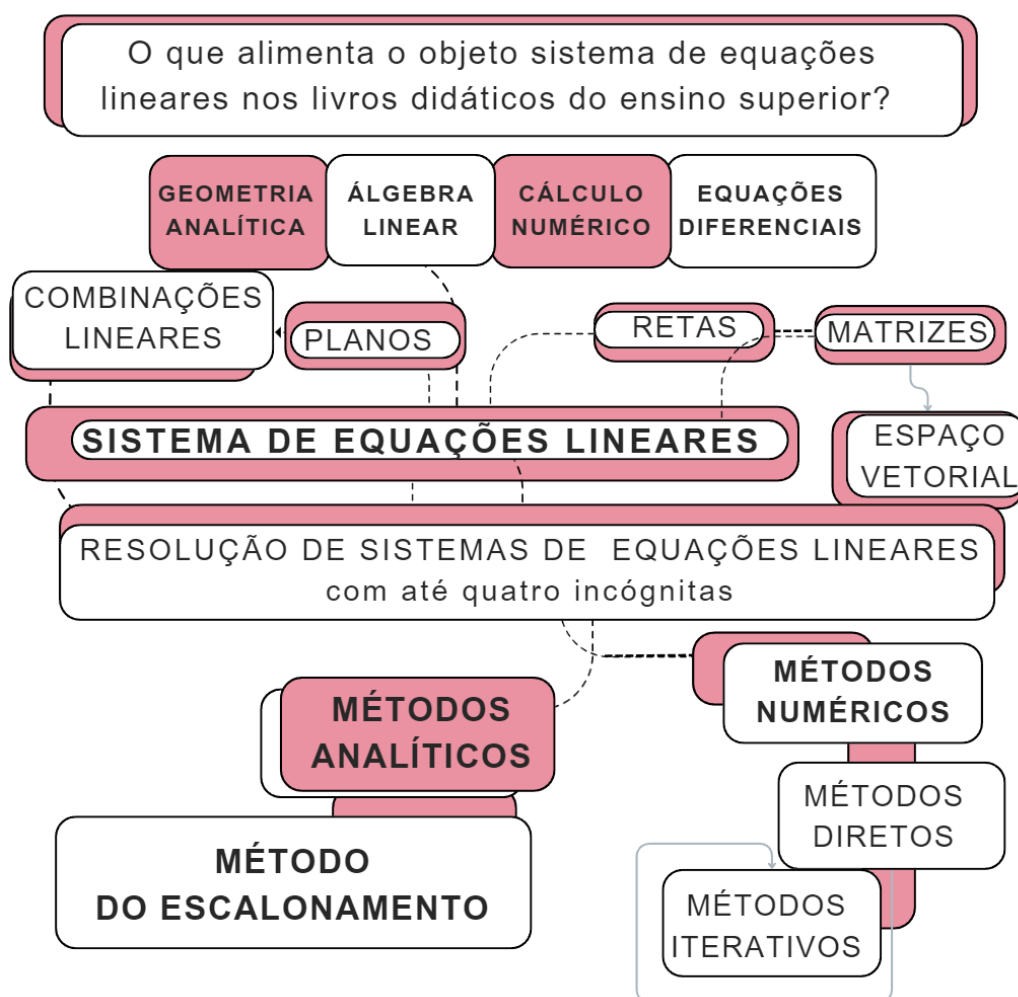
A técnica predominante é a do escalonamento estudado de Geometria Analítica ou Álgebra Linear. Nos livros de cálculos numéricos são frequentes os métodos diretos sobre os iterativos nas justificativas algorítmicas de resolver sistema de equações lineares.

O conceito de espaço vetorial é tratado tanto em livros de Geometria Analítica quanto em livros de Álgebra Linear, no entanto, não são explícitas as articulações entre os sistemas de equações lineares e tal conceito.

Acontece algumas conexões na Geometria Analítica relacionado as técnicas e interpretação de sua solução, mas com poucas articulações com outros objetos a não ser, retas, planos e matrizes. Estes sendo predominantes abordados nos livros didáticos.

A partir de nosso MER e as conjecturas com objetivo de compreender: O que alimenta os sistemas de equações lineares nos livros didáticos do ensino superior no contexto da formação de professores, são apresentados na Figura 15

Figura 15 – Modelo Didático de Referência nos livros do ensino superior.



Fonte: Elaboração própria.

No próximo capítulo apresentamos nossa proposta de um Modelo Didático de Referência Alternativo (MDRA) confrontando nossa construção de Modelo Epistemológico de Referência (MER) e o nossa identificação de Modelo Didático de Referência Dominante (MDRD).

5 PROPOSTA DE UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo, na primeira seção explanamos sobre a infraestrutura teórica e metodológica para construção do Modelo Didático de Referência Alternativo (MDR) ao Modelo Didático de Referência Dominante (MDRD).

Na segunda seção apresentamos o nosso MDRA e um Mapa de Questões (MQ) para a realização de um possível percurso de estudo e pesquisa (PEP) sobre o objeto matemático sistema de equações lineares na formação inicial de professores de matemática.

Na terceira seção, as reflexões, limitações e perspectivas da pesquisa, discutindo qual a importância da metodologia e procedimentos metodológicos adotados, a relevância da revisão da literatura e do referencial adotado na discussão dos resultados da pesquisa, quanto ao objetivo, às hipóteses tecidas e à questão de pesquisa, aos aspectos metodológicos construídos pelo estudo das três dimensões do problema didático de sistema de equações lineares e seus resultados

5.1 Estudo da dimensão ecológica dos Sistemas de Equações Lineares

A dimensão ecológica engloba questões relacionadas a indagar tipos de restrições e em que níveis se encontram, são cruciais para a ecologia das OM e OD (GASCÓN, 2011, p. 219).

Para qualquer que seja o percurso na elaboração da OD a ser ensinada, não necessariamente começa com a delimitação do problema didático a ser estudado, podendo ser motivado pela proposta de uma questão inicial problemática Q_0 considerada em uma determinada comunidade de estudo X e orientadas por um grupo de especialistas Y da área de estudo.

Partimos de uma questão Q_0 geradora de outras questões $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ constituindo uma sequência de estudo vinculado em um percurso de estudo e pesquisa (PEP). A questão Q_0 deve ser uma questão real de interesse original a uma comunidade de estudo.

O estudo da questão inicial Q_0 origina outras questões derivadas Q_k que aparecem como novo ponto de partida de um novo PEP ou novos ramos do inicial,

devendo considerar tais novas questões apenas quando forem relevantes, no sentido de produzirem respostas temporárias R_k , construindo possíveis caminhos na efetivação do PEP.

O procedimento do trabalho para produzir a resposta ótima $R^\heartsuit$ pode ser descrito como uma árvore de perguntas e repostas temporárias relacionadas entre si por meio de um processo modelado (BARQUEIRO e BOSCH, 2015).

Na realização do PEP, podemos obter repostas preestabelecidas $R_K^\diamond$ às questões derivadas Q_k , bem como objetos O_j utilizados para testar respostas disponíveis e elaborar novas questões constituindo um novo sistema que produz um meio experimental M , *milieux* em francês, dado pelo conjunto $\{R_i^\diamond, O_j, Q_k, R_k\}$, que cumpre o papel de (re)construir a praxeologia P em análise. A efetivação do PEP pode ser formalizada no esquema *herbatiano* geral, da seguinte forma: $[S(X, Y, Q_0) \Rightarrow M] \Rightarrow R^\heartsuit = [S(X, Y, Q_0) \Rightarrow \{R_i^\diamond, O_j, Q_k, R_k\}] \Rightarrow R^\heartsuit$. A seta ascendente $\Rightarrow$ indica que o sistema $S(X, Y, Q_0)$ “fabrica” o *milieux* $M = \{R_i^\diamond, O_j, Q_k, R_k\}$ contento objetos empíricos bem como repostas $R_i^\diamond$ já bem estabelecidas consideradas inicialmente encontradas na literatura da comunidade de estudo, que por sua vez, servem como ferramentas para estudo da questão Q_0 , e consequentemente a produção da resposta ótima $R^\heartsuit$ (esperada) e por fim, validá-la (CHEVALLARD, 2011).

Nessa pesquisa, o *milieux* didático (mD) foi construído para fins de pesquisa, que podemos denominar por *milieux* de pesquisa (mP) fabricado a partir de sistema de pesquisa estabelecido $\hat{S}(X, Y, Q_0)$ à medida que o pesquisador ou um grupo de pesquisadores possui acesso ao conjunto de recursos disponíveis $\{R_i^\diamond, O_j, Q_k, R_k\}$ para estudar Q_0 .

Em busca de responder nossa questão de pesquisa: *De que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo ao objeto matemático sistema de equações lineares podem contribuir com um desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDRA) como base para proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores?*

Apresentamos, na próxima seção, nosso MDRA de sistemas de equações lineares, resultado da pesquisa com objetivo *compreender de que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo aos sistemas de equações lineares podem*

contribuir com o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para a proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores.

5.2 Modelo Didático Alternativo de Sistema de Equações Lineares

A estrutura de PEP proposto pela TAD é “viva”, desse modo, permite acrescentarmos elementos que conduzem ir ao encontro das “obras” que pretendemos abordar de determinado objeto com sua a “razão de ser” a ser pesquisada, sem que o estudante apenas os visite, aprendendo a ler o mundo com os conteúdos matemáticos.

Consideramos para elaboração de um MDRA de sistema de equações lineares no ensino apoiado na TAD, nossa questão orientadora P_{31} : *Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores?*

Na busca em propor um MDRA apoiado em nosso estudo do MER e do MDRD, propomos um mapa de questões (MQ) para realização de possíveis PEP na formação inicial com o objeto matemático sistema de equações lineares.

Na construção de nosso mapa de Questões (MQ) para possíveis Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP), apoiamos na metodologia da Engenharia Didática (ED) no contexto da TAD.

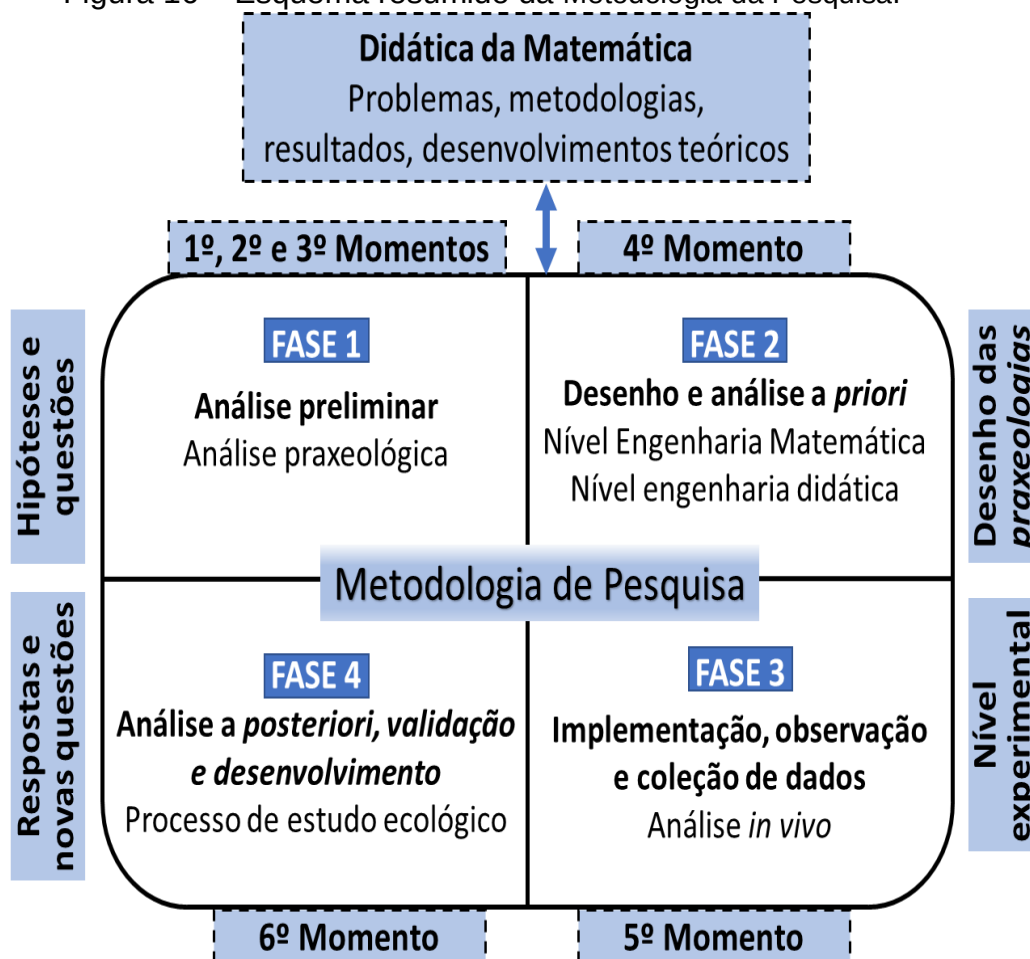
A pedagogia do PEP juntamente com a metodologia da ED permite ao didata estudar uma questão geradora Q_0 de outras questões Q_j e por meio da atividade de estudo e pesquisa (AEP) tentaremos almejar a resposta ótima (esperada) a questão de pesquisa em estudo.

Apresentamos nossos procedimentos metodológicos do mapa para possíveis PEP, que podem ser descritos como um sistema de pesquisa estabelecido $\hat{S}(X, Y, Q_0)$, a partir das questões laterais Q_j referentes às dimensões do problema didático, sendo Q_0 nossa questão de pesquisa, Y o orientador desse trabalho e pesquisadores que contribuíram com o trabalho e X o autor da tese.

É importante salientar que em vários momentos no sistema, $Y = \emptyset$, uma vez que a tarefa integrante da pesquisa foi realizada inteiramente pelo autor na construção da tese, considerando um “ser herbatiano” em busca da resposta ótima para Q_0 (CHEVALLARD 2012).

Em nossa proposta de estudo adaptada de Barqueiro e Bosch (2015), consideramos questões referentes às dimensões do problema didático, o esquema de nossa metodologia pode ser representado na Figura 16 a seguir:

Figura 16 – Esquema resumido da Metodologia da Pesquisa.



Fonte: Adaptado de Barqueiro e Bosch (2015).

A metodologia dessa pesquisa pode ser dividida em seis momentos propostos nas quatro fases da Engenharia Didática.

Em nossa pesquisa realizamos a Fase 1 e Fase 2 em 4 momentos. No primeiro momento o estudo *a priori* relativo à dimensão epistemológica. O segundo referente à dimensão econômica-institucional e o terceiro o estudo sobre a dimensão ecológica de *praxeologias* sobre o objeto de estudo sistemas de equações lineares, constituindo a Fase 1da ED. O quarto momento é o momento do desenho e análise *a priori* da *praxeologia* objeto matemático em estudo, o que equivale a Fase 2 da ED.

O quinto momento é da implementação da proposta de *praxeologia* para estudo e análise *in vivo*.

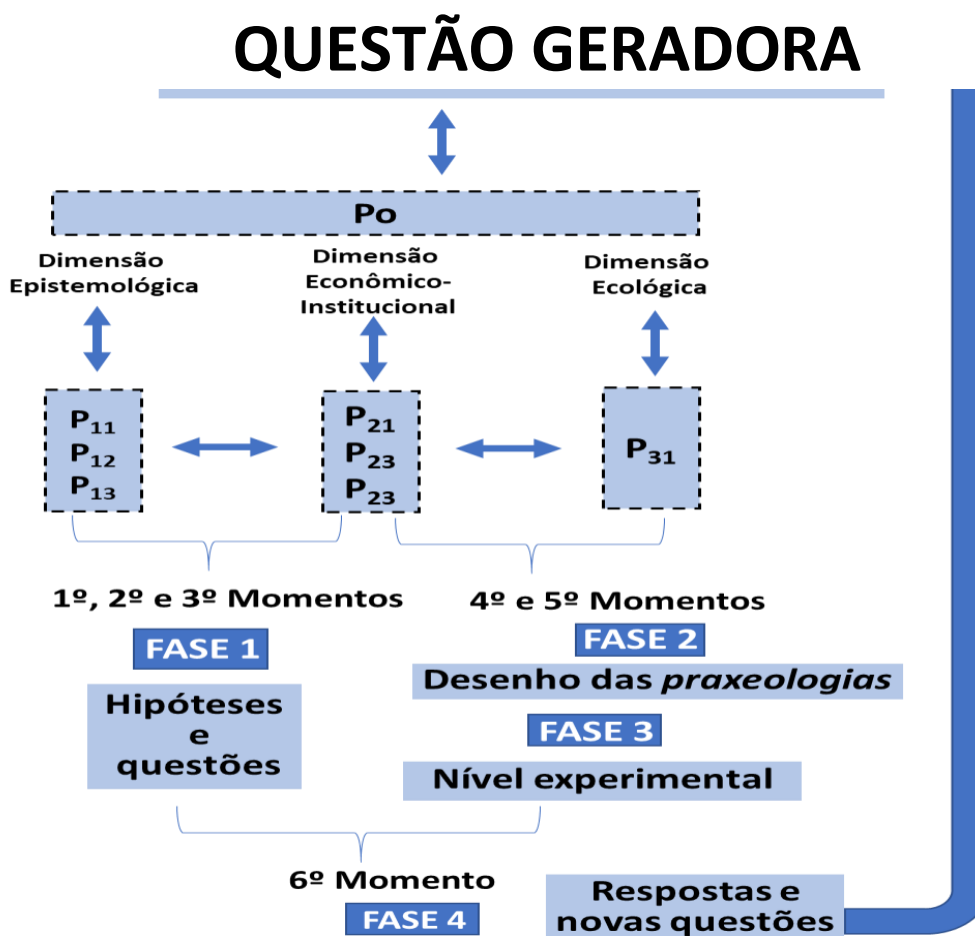
Por fim, o sexto momento, constituindo a Fase 4 de análise *a posteriori*, *validação e desenvolvimento* do processo de estudo ecológico.

Nossa proposta de MDRA foi construída no mapa que podemos resumir esquematicamente apresentado na Figura 17.

A partir de uma questão geradora associada próximo a um problema docente **como e o porquê de ensinar de sistemas de equações lineares para estudantes na formação inicial de professores?**

Realizamos análises das questões referentes às dimensões de um problema didático de sistemas de equações lineares esquematizado conforme Figura 17.

Figura 17 – Esquema de estruturação do PEP para estudo de Q_0 .



Fonte: Elaboração própria.

Consideramos inicialmente nossa questão geradora Q_0 e relacionamos com nosso problema docente P_0 , do sistema de pesquisa $\hat{S}(X, Y, Q_0)$ para fabricar o *milieu* de pesquisa mP , elaboramos as questões derivadas do problema didático P_j , $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}$ e P_{31} referentes às dimensões epistemológica, econômica-institucional e ecológica.

Assim, consideramos a questão geradora Q_0 . na Fase 1 e conjecturamos nossas hipóteses para análise econômica-institucional.

Com resultados analisados nos livros didáticos, sobretudo inspirado na conjectura C4 *Estão ausentes recursos computacionais como auxílio nas tarefas de resolução de sistemas de equações lineares*,

Construímos na Fase 2 embasado em nosso estudo da revisão da literatura, atividades realizadas no *software* GeoGebra com intuito de responder à questão P_{31} : *Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores?*

Identificamos com nosso MER que as tarefas no GeoGebra são utilizadas técnicas decorrentes dos métodos analíticos que podem ser exploradas no âmbito do Cálculo Numérico, uma vez que seus métodos estão limitados aos arredondamentos decorrentes de cálculos numéricos.

Além disso as tarefas estão limitadas ao Modelo Didático de Referência Dominante da educação escolar, ou seja, restrito a resolução de sistema de equações lineares de duas e três incógnitas.

Dessa forma, propomos para um possível Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), nosso Modelo Didático de Referência Alternativo (MDRA) ao Modelo Didático de Referência Dominante (MDRD) de sistema de equações lineares no ensino superior por meio de um Mapa de questões (MQ).

Para construção de nosso MQ nos inspiramos em Ramos (2016) e em nossas questões $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}$ e P_{31} referentes às dimensões epistemológica, econômica-institucional e ecológica.

Nosso MDRA apresentado na Figura 18, foi proposto a partir de repostas *a priori*, elaboradas a partir de nosso MER, as quais apresentamos no que segue.

Sobre a dimensão epistemológica, propomos seis questões. Para a questão *P₁₁*, como introduzir o sistema de equações lineares em um marco diferente do marco encontrado na OM dominante da instituição?

Segundo o que revelou nosso estudo, na formação inicial podemos propor o estudo de sistema de equações lineares nas práticas de matemáticas antes de introduzir o estudo de matrizes, propondo um MDRA ao MDRD.

Sobre a questão *P₁₂*, como podemos organizar o estudo da resolução de sistemas de equações lineares mediante um MER do modelo epistemológico geral que propõe a TAD?

Por meio de estudo da revisão da literatura podemos construir nosso MER e com a intenção de articular as diferentes *praxeologias* propomos nosso MDRA.

No que se tange a questão *P₁₃* quais objetos matemáticos nutrem o sistema de equações lineares, isto é, qual a razão de ser de tal objeto matemático no âmbito das *praxeologias*?

Concluimos que o sistema de equações lineares é um objeto modelizador da álgebra e serve como articulador das *praxeologias* apresentadas em nosso MDRA, no entanto é uma pergunta que leva em conta sua *razão de ser*, o modo como tal objeto foi construído só os resta está alternativa, uma vez que surgiu como ferramenta em relações humanas se tornando objeto abstrato dentro da matemática justificando a origem de objetos tais como vetores e outros conceitos e noções na Álgebra Linear

No que se refere à *P₁₄*: As tarefas são de situações reais para o estudo de Sistemas de Equações Lineares?

Nosso estudo revelou a utilidade do sistema de equações lineares como relevante quando consideramos situações reais, uma vez que a maior parte das tarefas são com situações hipotéticas.

Referente à *P₁₅*: A abordagem de ensino de Sistemas de Equações Lineares, permite articular a Geometria e Álgebra, a Álgebra Linear, a Geometria Analítica, Cálculo Numérico e Equações Diferenciais?

Em nossa pesquisa, constatamos que é possível articular uma abordagem de ensino do estudo de sistemas de equações lineares para articular essas áreas por meio de nosso MDRA.

Sobre a questão *P₁₆*: As tarefas de Sistemas de Equações Lineares são tratadas na forma algébrica?

Nosso estudo nos revelou o sistema de equações lineares como um objeto modelizador da álgebra, o que consideramos como a abordagem das tarefas tratadas na forma algébricas como questão fundamental para propositura de tarefas.

Referente à dimensão econômica-institucional, propomos quatro questões para a realização de um possível PEP.

Sobre a questão derivada P_{21} : *Que âmbito institucional temos que levar em consideração para abordar o problema didático da resolução de sistemas de equações lineares: a sala de aula, a escola, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou mesmo a Civilização?*

Antes de responder qual âmbito institucional para o problema didático, o fundamental é considerar qual o *milieux* disponível para estudar sistema de equações lineares na sala de aula, na escola, no sistema de ensino de matemática, na Sociedade ou mesmo na Civilização?

Para a questão P_{22} , *qual o modelo epistemológico de sistema de equações lineares nas “instituições” estudadas*, realizamos a pesquisa considerando MER que nos respondeu como o objeto matemático é construído e qual é a relação de tal objetos com os demais da instituição.

Sobre a questão P_{23} : *Que dificuldades que surgem quando pretendemos modificar OM dos SEL e quais possibilidades de OD surgem?*

As tarefas propostas na construção da proposta das atividades com o GeoGebra, elaboradas a partir de nosso estudo, ficaram restritas a resolução de sistema de equações lineares de duas e três incógnitas.

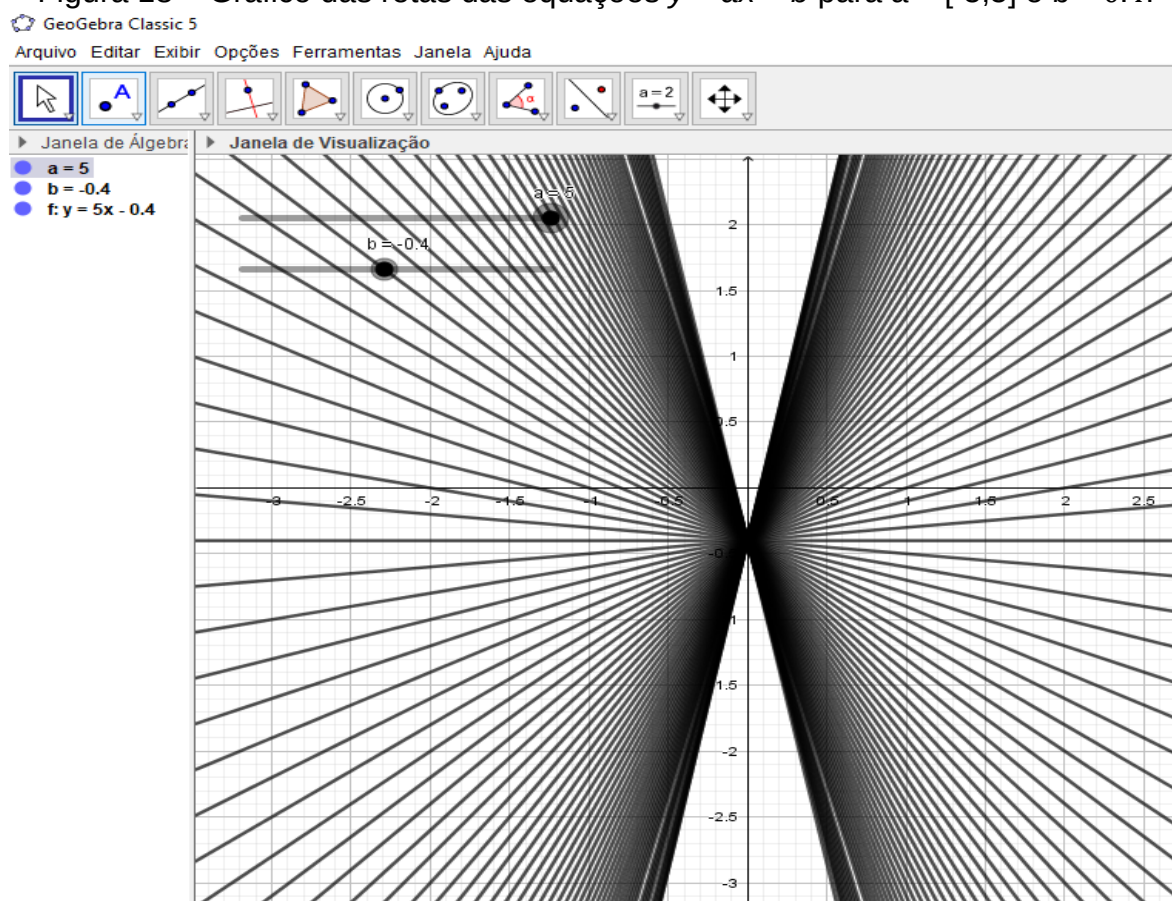
Dessa forma, por um lado, as atividades apesar de algorítmicas e procedimentais, permitem condições de visualização para sujeitos videntes, além de possibilitar propositura de tarefas com a representação simultaneamente dos registros geométrico e algébrico de resoluções de sistemas de lineares de duas equações à duas incógnitas, no entanto exclui a possibilidade de sujeitos com dificuldades de visualização aprenderem o seu estudo analítico por representações de retas.

Ao modificamos parâmetros das equações das retas, visualizamos seu gráfico instantaneamente e vice-versa, dessa maneira, podemos propor o estudo qualitativo da resolução dos sistemas lineares para duas equações à duas incógnitas.

Com o GeoGebra podemos realizar proposta de tarefas com a representação da visualização dos registros algébrico e geométrico de retas, com mudança de parâmetro b , previamente definidos no intervalo $[-5,5]$ da equação $y = ax + b$.

Para o caso de não possuir solução, fixamos a e a medida em que movimentamos b , habilitando a opção “rastros” da reta no GeoGebra fica registrado gráfico de cada vez que movimentamos os seus parâmetros, constituindo uma família de retas como apresentadas na Figura 19.

Figura 18 – Gráfico das retas das equações $y = ax + b$ para $a \in [-5,5]$ e $b = 0.4$.



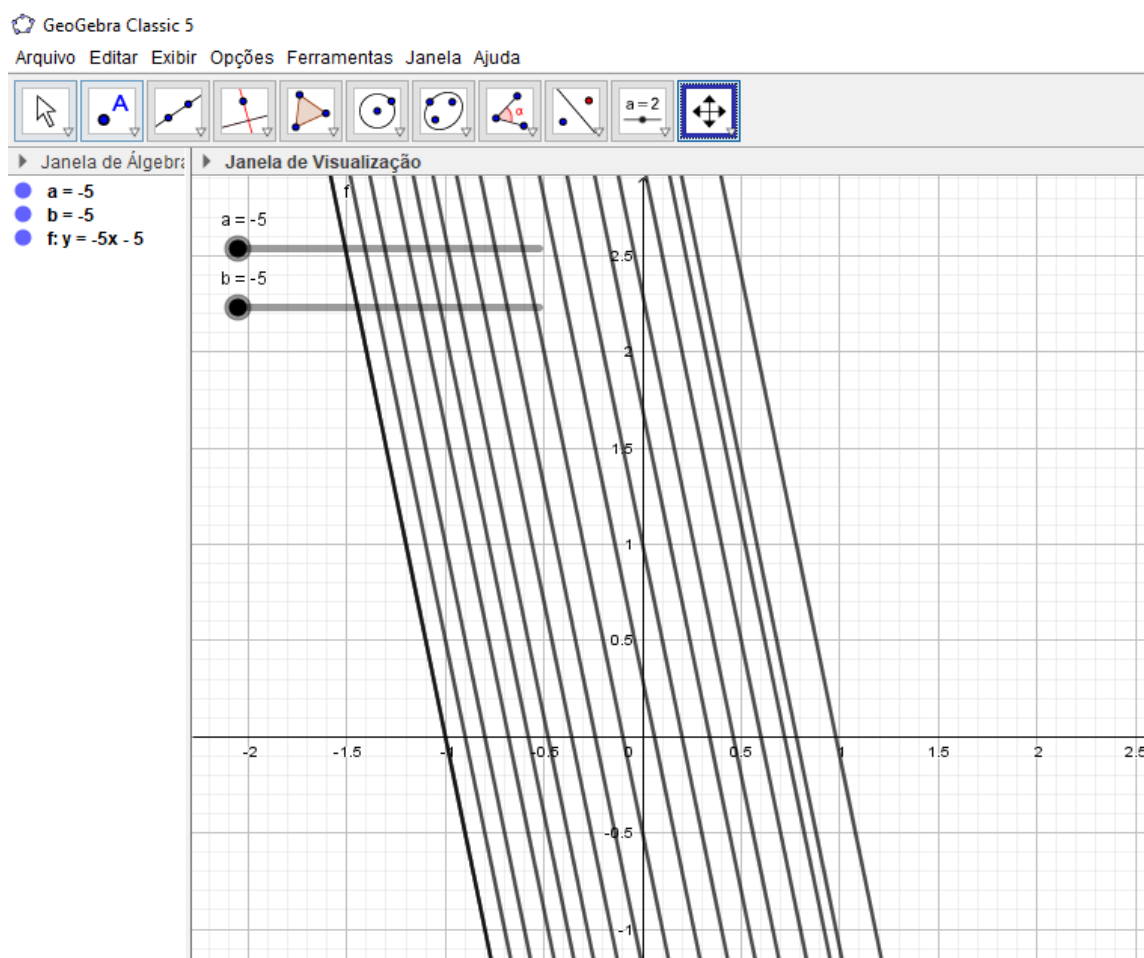
Fonte: Elaboração própria com GeoGebra

Por outro lado, veja na Figura 20 que nessa prática temos a condição ao fixarmos b e variando a , com a mesma função habilitada de mostrar o “rastros”, é possível apresentar todos os casos possíveis de rotação das retas, considerando a limitação do parâmetro determinado pelos controles deslizantes do GeoGebra.

A questão P_{24} : É tratado tarefas de sistema de equações lineares em ambiente informatizado? Esta foi proposta devido a insuficiência de práticas com sistemas de equações lineares reveladas em nossa análise em livros didáticos.

Quanto as questões relativas à dimensão ecológica, propomos duas questões, P_{31} e P_{32} , com as respostas *à priori* reveladas com as atividades elaboradas com o *software* GeoGebra, a partir de nosso estudo, dispostas no Anexo I e II, construídas a partir da revisão de *praxeologias*. Esta revelou a principal restrição de práticas que impedem a vida de tarefas com sistemas de equações com mais de três equações e três incógnitas

Figura 19 – Exemplos de gráficos de equações $y = ax + b$, para $a = -5$ e $b \in [-5,5]$.



Fonte: Elaboração própria com GeoGebra

Apesar do GeoGebra ser um recurso que permite propor práticas com a visualização e a representação dos sistemas de equações lineares de duas equações e duas incógnitas em diferentes registros simultaneamente, a principal restrição do

estudo de sistema de equações com mais de três incógnitas com o GeoGebra é quando é considerado o seu ensino com predomínio das tarefas em detrimento de outros recursos para compor o *milieu* didático.

No entanto, é um recurso a ser considerado quando se pretende ensinar sistemas de equações lineares, sobretudo para sistemas de equações com duas e três incógnitas.

Sobre a questão P_{31} : Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores? A principal restrição revelada que impede a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores, é a insuficiência de tarefas com sistemas dessa natureza.

Propomos a questão P_{32} : *Há alguma atividade com aplicação de Sistemas de Equações Lineares* com mais de equações e três incógnitas? Para suprir a insuficiência de tarefas com aplicação em outras áreas.

A síntese de nosso MQ está disposta no Quadro 20.

Quadro 20 – Mapa de Questões de sistemas de equações Lineares.

<i>O que alimenta o objeto sistema de equações lineares na formação inicial de professores?</i>
DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA
P_{11}: Como introduzir o sistema de equações lineares em um marco diferente do marco encontrado na OM dominante da instituição? P_{12}: Como podemos organizar o estudo da resolução de sistema de equações lineares mediante um MER do modelo epistemológico geral que propõe a TAD? P_{13}: Quais objetos matemáticos nutrem o sistema de equações lineares, isto é, qual a razão de ser de tal objeto matemático no âmbito das praxeologias? P_{14}: As tarefas são de situações reais para o estudo de Sistemas de Equações Lineares? P_{15}: A abordagem de ensino de Sistemas de Equações Lineares, permite articular a Geometria e Álgebra, a Álgebra Linear, a Geometria Analítica, Cálculo Numérico e Equações Diferenciais? P_{16}: As tarefas de Sistemas de Equações Lineares são tratadas na forma algébrica?
DIMENSÃO ECONÔMICO-INSTITUCIONAL
P_{21}: Que âmbito institucional temos que considerar para abordar o problema didático da resolução de sistema de equações lineares: a sala de aula, a escola, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou mesmo a Civilização? P_{22}: Qual o modelo epistemológico de sistema de equações lineares nas “instituições” estudadas? P_{23}: Que dificuldades surgem quando pretendemos modificar OM de sistema de equações lineares e quais possibilidades de OD surgem? P_{24}: É tratado tarefas de sistema de equações lineares em ambiente informatizado?
DIMENSÃO ECOLÓGICA
P_{31}: Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a vida de sistema de equações lineares com mais de três equações à três incógnitas na formação inicial de professores? P_{32}: <i>Há alguma atividade com aplicação de Sistemas de Equações Lineares</i> com mais de equações e três incógnitas?

Fonte: Elaboração própria.

Apresentamos uma proposta de um MDRA ao MDRD à luz de nosso MER, construído orientado por nossa questão de pesquisa para um possível PEP.

Nossa pesquisa sobre o estudo do problema didático dos sistemas de equações lineares quanto aos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica contribuiu para desenvolvimento um Modelo Didático de Referência Alternativo (MDRA) frente ao Modelo Didático de Referência Dominante (MDRM) com um desenvolvimento de um Mapa de Questões (MQ) como base para proposta de possíveis percursos de estudo e pesquisa na formação de professores.

No próximo capítulo apresentamos as reflexões, limitações e perspectivas da pesquisa, a importância da metodologia e procedimentos metodológicos adotados, a relevância da revisão da literatura e do referencial adotado na discussão dos resultados da pesquisa, quanto ao objetivo, às hipóteses tecidas e à questão de pesquisa.

6 REFLEXÕES, PERSPECTIVAS E LIMITAÇÕES DA PESQUISA

Ao recuperarmos nossa questão: ***como e o porquê de ensinar de sistemas de equações lineares para estudantes na formação inicial de professores?*** Esta elaborada do problema didático proposto por Gascón (2011), o que nos levou a questão de pesquisa: ***De que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo ao objeto matemático sistema de equações lineares podem contribuir com um desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores?***

Realizamos o estudo das três dimensões do problema didático do sistema de equações lineares, em busca de repostas com significados para compreender de que maneira distintos aspectos referentes às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo aos sistemas de equações lineares podem contribuir com o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência (MDR) como base para a proposta de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores.

Sobre a **dimensão epistemológica**, nosso estudo histórico nos revelou por meio de MER do objeto matemático sistema de equações lineares, a sua *razão de ser* em diversos povos e em diferentes épocas e a razão de ser da estrutura organizacional de seu estudo.

Construímos um MER que dá significação aos objetos que alimentam o sistema de equações lineares no contexto da formação inicial de professores.

O dispositivo do MER nos possibilitou realizar uma análise nos livros didáticos do curso de Licenciatura em estudo.

Sobre a **dimensão econômica-institucional**, identificamos dois Modelos Didáticos de Referência Dominantes (MDRD) sobre o estudo de sistema de equações lineares, o primeiro identificado na educação escolar e outro na educação superior no curso de Licenciatura em estudo.

Constatamos que o estudo de sistema de equações lineares é restrito a resolução nos livros didáticos da educação escolar.

No MDRD identificado nos livros didáticos do curso de Licenciatura em análise, predomina a técnica do escalonamento para sua resolução.

O que nutre os sistemas de equações lineares, nesse modelo em questão, são objetos e noções da Álgebra Linear e Geometria Analítica.

Sobre a **dimensão ecológica** situamos nosso MDRA na perspectiva antropológica que descreve o conhecimento matemático como um domínio da realidade no *mundo das matemáticas* vinculado a certas *práticas sociais*, cujo conhecimento matemático aparece, tanto como emergente quanto como condição.

Com base em nosso estudo, apresentamos uma proposta de modelo didático para o ensino de sistemas de equações lineares e um mapa de questões (MQ) para realização de um possível Percorso de Estudo e Pesquisa.

Em nossa pesquisa não realizamos a análise *in vivo* por meio de PEP, entretanto, com os elementos da TAD propomos um MDRA ao MDRD com um MQ para um possível PEP no enfrentamento do problema didático em estudo

De acordo com nosso MDRA apresentado na Figura 18, na formação inicial podemos propor o estudo de sistema de equações lineares nas práticas de matemáticas antes de introduzir o estudo de matrizes.

Em nossa proposta, apresentada na Figura 18, construída a partir de nosso estudo das três dimensões dos sistemas de equações lineares, à luz da TAD, possibilitou a proposta de um Modelo Didático de Referência Alternativo ao que está posto. Este conduzido pelo mapa de questões proposto para realização de um possível PEP.

Nosso MDRD revelou ainda que o estudo de sistemas de equações lineares, na formação inicial de professores, pode ser abordado nas disciplinas de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo Numérico e Equações Diferenciais.

Além disso, o estudo dos sistemas de equações lineares pode alimentar as disciplinas Práticas de Ensino com seu estudo, por exemplo de práticas inclusivas para sujeitos com dificuldades na visão.

Por outro lado, as retas, planos, combinações lineares e matrizes alimentam o estudo de sistemas de equações lineares. Ainda quem nutre o estudo de sistemas de equações lineares são as *praxeologias* matemáticas que compõe a sua resolução. Estas, por sua vez nutridas pelos métodos analíticos e numéricos.

Figura 20 – Modelo Didático de Referência Alternativo de Sistemas de Equações Lineares para formação inicial de professores.



Fonte: Elaboração própria.

As questões levantadas em nosso estudo, foram analisadas do ponto de vista do contexto institucional.

A infraestrutura teórica e metodológica contribuiu para responder à nossa questão de pesquisa e nos revelou o que nutre o sistema de equações lineares. Este que é um objeto modelizador da Álgebra, diferente de nossas identificações de Modelos Didáticos de Referências Dominantes.

O estudo aqui apresentado está longe de esgotar, foi proposto como sugestão para um possível Percorso de Estudo e Pesquisa (PEP) para futuras pesquisas do estudo de sistemas de equações lineares, pois ainda necessita de análise *in vivo*.

Nosso mapa de questões apresentamos respostas analisadas à priori que podem ser contrastadas com a análise *in vivo*.

A temática aqui tratada nessa tese trouxe respostas sobre a *razão de ser* que provocaram no pesquisador uma motivação para considerar novas práticas considerando a diversidade de estudante não considerar nenhuma prática em detrimento de outras se quisermos realmente considerá-las inclusivas

Nossa pesquisa mostra a importância em estudar os sistemas de equações lineares e nosso Modelo Didático de Referência é uma alternativa ao modelo dominante.

Quanto aos aspectos metodológicos, com o suporte da Engenharia Didática construímos um caminho possível de ser replicado ou continuado a partir da Fase 3.

Sobre os elementos da Teoria Antropológica do Didático. Esta demonstrou ser uma ferramenta capaz de construir um caminho para o estudo e pesquisa dos sistemas de equações lineares e com o suporte da fabricação do *milieux* enriquecido conforme a demanda de estudantes disponíveis

Além disso, com o dispositivo do Modelo didático de Referência (MER) para o estudo de sistemas de equações lineares, construímos uma ferramenta possível de análise e construção de práticas matemáticas, não privilegiando umas em detrimento de outras como identificados em nossos Modelos Didáticos de Referências Dominantes (MDRD) em nosso estudo.

Dessa forma, a tese cumpriu os seus objetivos e possibilitou além de responder nossa questão de pesquisa, propor um caminho a ser trilhado em um possível Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) por meio de nossa Mapa de Questões (MQ) para o estudo de sistemas de equações lineares na formação inicial de professores.

REFERÊNCIAS

ALBRECHT, Peter. **Análise Numérica: Um Curso Moderno**. Rio de Janeiro. Editora LTC 1973.

ALMOULOUD, Saddo. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Editora UFPR. Curitiba, 2007. 218 p.

ALMOULOUD, S. Ag.; BIANCHINI, B. L. **O Erro Ligado ao Ensino Aprendizagem de Sistemas Lineares**. In: Anais do IV EPEM. São Paulo: SBEM, 1996. p. 216-223.

ALMOULOUD, S. FARIAS, L. M. S. HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1 ed. Curitiba, PR: CRV, 2018.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v. 1, n. 42, p.9-34, nov. 2015.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da Geometria Analítica**. Tese de doutorado. Belém: Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, Universidade Federal do Pará, 2012.

ANTON, Howard.; RORRES, Chris. **Álgebra Linear e Aplicações**. Tradução técnica: Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 7, 1996.

BARBÉ, Joaquim; BOSCH, Marianna; ESPINOZA, Lorena; GASCÓN, Josep. **Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish High Schools**. Educational Studies in Mathematics, [S.l.], v. 59, p. 235-268, 2005.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011, 229 p.

BARQUERO Berta., BOSCH Marianna. Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. In: Watson A., Ohtani M. (eds) Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series. Springer, 2015.

BATTAGLIOLI, Carla dos Santos Moreno. M. **Sistemas Lineares no 2º ano do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos**. 2008 114f. Dissertação de Mestrado Profissional (PUC-SP) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BOLDRINI, José Luiz, COSTA, Sueli I. Rodrigues, FIGUEIREDO, Vera Lúcia, WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOLEA, Pilar., BOSCH, Marianna. e GASCÓN, Josep. **La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización**. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21/3, p. 247-304, 2001.

BORCEUX, Francis. **An Algebraic Approach to Geometry**. New York: Springer, 2014.

BOSCH, Marianna.; CHEVALLARD, Yves. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs Objet d'étude et problématique**. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. v.19, no 1, p.77-124, 1999.

BOSCH, Marianna, GASCÓN, Josep. **25 años de transposición didáctica**, en Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, F.J. (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, p.385-406, 2007

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília : MEC/SEF, 1998. 174 p

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 16 Mar. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12598:publicacoes>. Acesso em: 08 Mar. 2023

BRASIL. Plano Nacional de Educação (PNE). **LEI N° 13.005/2014 - Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências**. Brasília: MEC, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno **Resolução No 2, DE 1o de julho de 2015 (*) (**) (***)**". Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. [s.d.] Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf/file> . Acesso em 16 Mar. 2023.

BRASIL. Universidade Federal do Amazonas. **Resolução N°012/2017 Regulamenta o Projeto Pedagógico do Curso de Graduação em Ciências: Matemática e**

Física, modalidade licenciatura (dupla), turno diurno, versão 2014/2, do Instituto de Educação, Agricultura e Meio Ambiente - IEAA. 2017

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno **Resolução CNE/CP n. 2, de 20 de dezembro de 2019**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação), 2019b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=135951-rcp002-19&category_slug=dezembro-2019-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 16 Mar. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação Secretaria de Educação Básica. **Edital de Convocação Nº 01/2021 - CGPLI. Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD 2023**. Brasília, 2021.

CLÁUDIO, Dalcídio Moraes; MARINS, Jussara. **Cálculo Numérico Computacional: teoria e prática**. São Paulo. Editora Atlas, 2000.

CHEVALLARD, Y. **Aspectos problemáticos de la formación docente**. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca. 2001

CHEVALLARD, Y. **Didactique Fondamentale - Module 1: Leçons de didactique**. Curso dado a Universidade de Provence, 2011. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DFM_2011-2012_Module_1_LD_.pdf. Acesso em: 30 de abril de 2022.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar Matemáticas**. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE/Horsori, 1997.

CHEVALLARD, Yves. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactiques des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. (Grenoble). Disponível em: <file:///C:/Users/renne/Downloads/1060-12179-1-PB.pdf>. Acesso em: 16 Mar. 2023.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savant enseigné, La Pensée Sauvage (2ème édition), 1991.

CHEVALLARD, Yves. **Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm**. Plenary talk at 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea,. 2012.

CHEVALLARD, Yves. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009. Disponível em:

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mat_hematiques.pdf Acesso em: 28 Jun. 2020

COBB, Paul., CONFREY, Jere., DISESSA, Andrea., LEHRER, Richard., e SCHAUBLE. Leona. **Design experiments in educational research**. Educational Researcher, 32 (1), 9-13. 2003.

COULANGE, Lalina. **Étude des pratiques du professeur du double point devue écologique et économique. Cas de l'enseignementdes systèmes d'équations et de la mise en équations em classe de troisième**. Education. Université de Grenoble, Français, 2000.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2011. v.2.

DORIER, Jean–Luc - **Étar de l'art de recherche en didactique – À propôs de l'enseignement de l'algèbre linéaire** – Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 18, n° 2, pp. 191- 230, 1998.

DORIER, Jean–Luc, **Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire : approches historique et didactique**. Tese (Doutorado), Institut Fourier (Grenoble), França, 1990.

DREYFUS, Tommy. **Advanced mathematical thinking processes**. In: TALL, D. (Org.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

DUVAL, Raymond **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. p. 37-64. Strasbourg: IREM – ULP, 1993.

DUVAL, Raymond. Representation, **Vision and Visualization**: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic issues for learning. In f. Hitt and M. Santos (Eds.), Proceedings 184 of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, p.311-335. Columbus, OH: Eric. 1999.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine**: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

FAJARDO, Victoria Alejandra García. **Una secuencia didáctica que integra GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo**. Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2014.

FERRI, Rita. Borromeo.; KAISER, Gabriele. First **Results of Study of Different Mathematical Thinking Styles of Schoolchildren**. In: BURTON, L. Which way? London: Greenwood, 2003. P. 209 – 239. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Gabriele-Kaiser/publication/265040066_First_Results_of_a_Study_on_Different_Mathematical_Thinking_Styles_of_School_Children/links/548851b70cf268d28f08d400/First-Results-of-a-Study-on-Different-Mathematical-Thinking-Styles-of-School-Children.pdf>. Acesso em 02 de set. de 2017.

FONSECA BON, Cecílio. **Discontinuidades Matemáticas Y Didácticas entre la Enseñanza Secundaria Y la Enseñanza Universitária**. Tesis Doctoral Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo, Espanha, 2004.

FONSECA BON, Cecílio. **Discontinuidades Matemáticas Y Didácticas entre la Enseñanza Secundaria Y la Enseñanza Universitária**. Tesis Doctoral Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo, Espanha, 2004.

FREITAS, Nilza Aparecida de. **Systems of linear equations: a proposal to activities with different approaches to the representation of semiotics registers**. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

GAITA, Cecília e SILVA, Maria José Ferreira da. **Perspectivas em Didática e Álgebra**. In: Oliveira, Gerson Pastre de. (Org.). Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia. São Paulo: Editora da Física, 2018, p. 229-298.

GARCIA, Francisco Javier; HIGUERAS, Lúsa Ruiz. **Mathematical praxeologies of increasing complexity: variation systems modelling in secondary education**. In: European Congress of Mathematics Education, 4. St. Feliu de Guixols. Espanha, 2005.

GARCIA, Francisco Javier. **La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar**. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. Tese de doutorado. Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, 2005.

GASCÓN, Josep. **Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación**. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN), n. 22, p. 9-35, 2010.

GASCÓN, Josep. **La Necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas**. Revista Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 16, n. 1, p.11-37, 2003.

GASCÓN, Josep. **Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: El caso del álgebra elemental**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, v. 14, n. 2, p. 203-231, 2011.

GASCÓN, Josep. **Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisé**, Petit x, n. 37, 43-63, 1994.

HEFEZ, Abramo.; FERNANDEZ, Cecília.de Souza. **Introdução à álgebra linear** (Coleção PROFMAT). SBM, 2016.

KLAIBER, Michelle Andrade. **INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA**: o desenvolvimento do pensamento matemático avançado por meio de uma experiência de ensino. 2019. 329 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

HOFFMAN, Kenneth KUNZE, Ray. **Álgebra Linear**. Prentice-Hall, INC, Englewood Cliff, New Jersey, 1971.

LAY, David Clark. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LIMA, José Claudio Tomé de. **SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR**: uma proposta de ensino. 2019. 81 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática., Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, A Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

MARTINS, Elen Graciele. **Um estudo sobre os estilos de pensamento matemático mobilizados por um sujeito cego ao resolver sistemas de equações lineares**. 2019. 192 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

MATOS, Fernando Cardoso de. **Praxeologias e Modelos Praxeológicos Institucionais: O Caso da Álgebra Linear**. Tese de doutorado. Belém: Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, Universidade Federal do Pará, 2017.

PAIVA, Manoel. **Matemática sem fronteira**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 2.

PINTO, José Eustáquio. **Objeto de aprendizagem para o ensino de números complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa, PEREIRA, Joana Mata, BAPTISTA, Mónica. **EXERCÍCIOS, PROBLEMAS E EXPLORAÇÕES**: Perspetivas de professoras num estudo de aula. Revista Quadrante. Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111- 134, 2015.

RAMOS, Fábio Mendes. **Objeto de aprendizagem para o ensino médio e educação profissional: sistemas de equações algébricas lineares aplicados em circuitos**. 2016. 164 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.

RIBEIRO, José. **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia**. 1ª São Paulo (Estado) Secretária de Educação. Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Médio – 2 Série, v.2, São Paulo: SEE, 2013.

RUGGIERO, Marcia A. Gomes, LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo Numérico, Makron Books: São Paulo, 1996.

SANTOS, Nathan Moreira dos. **Vetores e Matrizes**: uma introdução à Álgebra Linear. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2007.

SANTOS, Célio Moacir dos Santos. **Sistemas de equações lineares: uma análise de livros didáticos publicados no Brasil (1930 a 1970)** 214 f.: il. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte, 2017.

SHIFFRIN, Theodore.; ADAMS, Malcolm R. **Álgebra Linear**: Uma Abordagem Geométrica. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

SILVA, Carolina Ferreira da. **SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**: contribuições de uma sequência didática à luz da teoria de registros de representações semióticas. 2021. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria, 2021.

SILVA, Thais Michelli Stori da. **SISTEMAS LINEARES**: uma proposta apoiada na exploração de registros semióticos e na utilização de um recurso computacional. 2016. 164 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Educação Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SBEM. **A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM**. Boletim SBEM, n. 21, p. 1- 42, 2013.

SOUSA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jaqueline da Silva Riberio. **Contato matemática**, 2º ano. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2016

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemático**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. v. 2.

STERNBERG, Robert. J. **Thinkig Styles**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. 2ª ed.. São Paulo: Makron Books do Brasil; Pearson Education do Brasil, 1987.

STRANG, Gilbert. **Introdução à Álgebra Linear**. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

WINSLOW, Carl. **Anthropological theory of didactic phenomena: some examples and principles of its use in the study of mathematics education**. In: Bosch M et al (eds) Un panorama de la TAD. An overview of ATD. CRM Documents, vol 10. Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona, p. 117–138. 2011. Disponível em <http://www.recercat.cat/bitstream/Zhandle/2072/200617/Documents10.pdf?sequence=1>. Acesso em 25 ago. 2016.

ANEXO I - PRIMEIRA PARTE DAS ATIVIDADES DESSA PESQUISA

Atividades Exploratórias da Investigação: *Articulação de diferentes procedimentos na resolução de sistemas lineares.*

As atividades a seguir envolvem sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas. Lembramos que as soluções de tais sistemas podem ser: determinadas, indeterminadas ou impossíveis.

1: Encontre, no espaço abaixo, a solução do sistema $\{x + 3y = 7 \quad 3x + 5y = 9\}$ sem auxílio do GeoGebra.

Para cada atividade a seguir salve o arquivo na área de trabalho como AtivX_alunoY.ggb. Elas serão recuperadas pelo pesquisador.

2: (Janela CAS) Abra o GeoGebra e a janela CAS.

Digite o comando:

Resolver[[$x+3y=7$, $3x+5y=9$],{ x,y }] e tecle Enter

Escreva a solução do sistema dada pelo GeoGebra: _____

O resultado é o mesmo do item 1? Sim () Não ()

Se Não verifique as respostas e escreva a justificativa:

3: (Procedimento: Escalonamento) Resolver o sistema $\{x + 3y = 7 \quad 3x + 5y = 9\}$ no GeoGebra, por escalonamento, segundo os procedimentos abaixo.

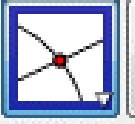
	Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a planilha e janela de álgebra. Feche a janela de visualização.
Planilha	Digite, em cada linha da planilha, os coeficientes da matriz ampliada do sistema 1 3 7 3 5 9
	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz e clicando com o botão direito do mouse na ferramenta  (3º. Ícone) crie a matriz1 = (1 3 7 3 5 9).
Entrada	Digite na entrada o comando MatrizEscalonada[matriz1] e tecle Enter.
Questão	Identifique na matriz escalonada a solução do sistema: _____

4: O que você entende por uma matriz escalonada?

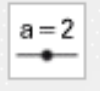
5: O sistema e a sua solução possuem alguma interpretação geométrica?

6: (Procedimento Gráfico) Construa a interpretação geométrica do sistema, no GeoGebra, conforme guia de construção abaixo.

Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a janela de álgebra e a janela de visualização.
--

Entrada	Digite na entrada cada uma das equações $x+3y=7$ e $3x+5y=9$ teclando enter em seguida. Escreva abaixo o que representa cada equação na janela de visualização.
	Encontre o ponto de intersecção das retas obtidas. Identifique na Janela de Álgebra as coordenadas desse ponto e escreva abaixo.

7: (Procedimento Gráfico Generalizado) Faça os seguintes procedimentos conforme guia de construção abaixo.

	Em um novo arquivo do GeoGebra, deixar visível a janela de álgebra e a janela de visualização. Habilite controle deslizante . Em seguida clique na janela de visualização para criar seis controles deslizantes com os respectivos nomes $\{a, b, c\}$. Cada um com intervalo min: -5, max: 5 . Finalize no botão OK . Mantenha os valores dos parâmetros =1
Entrada	Digite as equações das retas $r : ax + by = c$ e $s : 3x+5y=9$
Entrada	Digite A = Interseção[r,s]
	Encontre o ponto de intersecção da reta r e o eixo Oy. $B = (_, _)$
	Encontre o ponto de intersecção da reta r e o eixo Ox $C = (_, _)$

8: O que acontece com o gráfico da reta r em relação à reta s e aos eixos Oy e Ox ao variar cada um dos parâmetros

parâmetros	Reta s	Eixo Oy	Eixo Ox
a:			

b:			
c:			

9: O que representa a solução geométrica (se existir) de um sistema linear 2x2?

10: O que representa o ponto **A** que aparece na janela de álgebra após realizar a atividade? _____

11: Atribua valores **a = 3**, **b = 5**, **c = 3** ajustando os seletores.

Escreva as equações do sistema correspondente à **r** e **s**.

Qual a solução do sistema? _____

12: Atribua valores **a = 3**, **b = 5** ajustando os seletores e movimente apenas o seletor **c**. Qual a posição das retas **r** e **s**? _____

13: Por que em **13**, surge a resposta **A = indefinido** na janela de álgebra?

14: (Procedimento Regra de Cramer) Resolver sistema $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$ no GeoGebra pela Regra de Cramer segundo os procedimentos a seguir.

Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a planilha e janela de álgebra

Planilha	Digite os coeficientes da matriz dos coeficientes do sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ Em outro campo da planilha digite os coeficientes do sistema $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ Em outro campo da planilha digite os coeficientes do sistema $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz dos coeficientes e clicando com o botão direito do mouse crie a matriz1 = $(1 \ 3 \ 3 \ 5)$.
	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz e clicando com o botão direito do mouse crie a matriz2 = $(7 \ 3 \ 9 \ 5)$.
	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz e clicando com o botão direito do mouse crie a matriz3 = $(1 \ 7 \ 3 \ 9)$.
ENTRADA	Digite o comando Determinante[matriz1] e tecle Enter. Obtém a Digite o comando Determinante[matriz2] e tecle Enter. Obtém b Digite o comando Determinante[matriz3] e tecle Enter. Obtém c
ENTRADA	Digite o comando b/a . Obtém d
ENTRADA	Digite o comando c/a . Obtém e
Questão	Identifique a solução do sistema na janela de álgebra. A= (__,__)

15: Escreva seu entendimento sobre os procedimentos da regra de Cramer.

ANEXO II - SEGUNDA PARTE DAS ATIVIDADES DESSA PESQUISA.

Articulação de diferentes procedimentos na resolução de sistemas lineares.

As atividades a seguir envolvem sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas. Lembramos que as soluções de tais sistemas podem ser: *possível determinado(PD)* quando possui exatamente uma solução, *possível*

indeterminado (PI) quando possui infinitas soluções, ou *impossível (I)* quando não possui solução.

1: Encontre, no espaço abaixo, a solução do sistema $\begin{cases} 2x + 4y + z = -1 \\ -x + 5y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ sem auxílio do GeoGebra.

Para cada atividade a seguir salve o arquivo na área de trabalho como AtivX_alunoY.ggb. Elas serão recuperadas pelo pesquisador.

2: (Janela CAS) Abra o GeoGebra e a janela CAS.

Digite o comando:

Resolver[$\{2x+4y+z=-1, -x+5y+z=2, x-y+2z=1\}, \{x,y,z\}$] e tecla Enter

Escreva a solução do sistema dada pelo GeoGebra: _____

O resultado é o mesmo do item 1? Sim () Não ()

Se Não verifique as respostas e escreva a justificativa:

3: (Procedimento: Escalonamento) Resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 4y + z = -1 \\ -x + 5y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ no GeoGebra, por escalonamento, segundo os procedimentos abaixo. **Ao finalizar salve sua construção.**

	Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a planilha e janela de álgebra. Feche a janela de visualização.
Planilha	Digite, em cada linha da planilha, os coeficientes da matriz ampliada do sistema $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Planilha	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz e clique com o botão esquerdo do mouse para criar a matriz1 = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Entrada	Digite na entrada o comando MatrizEscalonada[matriz1] e tecele Enter.
Questão	Identifique na matriz escalonada a solução do sistema: _____ O sistema é PD () PI () I ()

4: As equações do sistema 3x3 acima e a respectiva solução possuem alguma interpretação geométrica?

5: (Procedimento Gráfico: Solução Determinada). Construa a interpretação geométrica do sistema, no GeoGebra, conforme guia de construção abaixo. **Ao finalizar salve sua construção.**

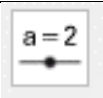
	Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a janela de álgebra e a janela de visualização 3D. Clique com o botão direito do mouse sobre a janela 3D e desabilite o plano e em Janela de visualização, básico, desabilitar clipping . Apenas os eixos serão visíveis.
Entrada	Digite na entrada cada uma das equações $2x + 4y + z = -1$; $-x + 5y + z = 2$ e $x - y + 2z = 1$ teclando enter em seguida. Para uma melhor visualização clique com o botão direito do mouse na janela de álgebra nos objetos a , b e c e mude a cor em propriedades para verde, azul e vermelho respectivamente.
	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta  no último ícone. Em seguida clique na janela de visualização 3D e arraste para girar e obter uma melhor visualização 3D.
Questão	Escreva abaixo o que representa cada equação na janela de visualização 3D. _____

Entrada	Digite na entrada o comando Intersecção[a, b] e encontre a intersecção dos objetos a e b. O objeto d obtido é_____ Em seguida digite na entrada o comando Intersecção[b, c] e encontre a intersecção dos objetos b e c. O objeto e obtido é_____ Finalmente digite na entrada o comando Intersecção[d, e] e encontre a intersecção dos objetos d e e. O objeto obtido é_____ Gire a imagem na janela de visualização 3D para uma melhor visualização.
Questão	Identifique na Janela de Álgebra as coordenadas do ponto A. O que as coordenadas do ponto A representam? _____

6: Complete a frase: “Em sistemas lineares de três equações e três incógnitas, cada equação representa e a intersecção desses objetos (se existir) representa do sistema”.

7: O que representa a solução geométrica (se existir) de um sistema linear 3x3 possível e determinado-PD?

8: (Intersecção de Planos). Siga os procedimentos conforme guia de construção abaixo. **Ao finalizar salve sua construção.**

	Em um novo arquivo do GeoGebra, deixar visível a janela de álgebra e a janela de visualização e a janela de visualização 3D.
	Habilite controle deslizante . Em seguida clique na janela de visualização para criar quatro controles deslizantes com os respectivos

	nomes {a, b, c, d} . Cada um com intervalo min: -5, max: 5 . Finalize no botão OK . Mantenha os valores dos parâmetros $a = b = c = d = 1$.
Entrada	Digite a equação do plano p: $ax + by + cz + d = 0$ e tecla Enter. Clique com o botão direito na janela de visualização 3D e desabilite os eixos.
Entrada	Digite cada uma das equações das retas dos eixos coordenados <i>Reta[(0,0,0),(1,0,0)] , Reta[(0,0,0),(0,1,0)] e Reta[(0,0,0),(0,0,1)]</i> .
	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta  no último ícone. Em seguida clique na janela de visualização 3D e arraste para girar o plano e obter uma melhor visualização 3D. Também o comando para ampliar ou reduzir, se necessário.
Entrada	Digite a Interseção[p,f] e tecla Enter. Identifique na janela de visualização e na janela de visualização 3D. O que essa intersecção representa?
Entrada	Digite a Interseção[p,g] e tecla Enter. Identifique na janela de visualização e na janela de visualização 3D. O que essa intersecção representa?
Entrada	Digite a Interseção[p,e] e tecla Enter. Identifique na janela de visualização e na janela de visualização 3D. A intersecção aparece na janela de visualização? O que essa intersecção representa?

9: O que acontece com as coordenadas de cada ponto ao variar cada um dos parâmetros da equação do plano **p**?

parâmetros	Ponto A	Ponto B	Ponto C
a:			
b:			

c:			
d:			

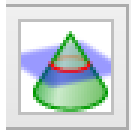
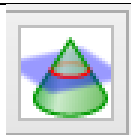
10: (Método Gráfico articulado com Escalonamento: Sistema Impossível SI- Caso I) Resolver o sistema $\begin{cases} -5x - y - 4z = 5 \\ 0x + 0y + 2z = 3 \\ -5x - y + 4z = 5 \end{cases}$ no GeoGebra, por escalonamento e método gráfico simultaneamente, segundo os procedimentos abaixo.

	Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a planilha, janela de visualização 3D e janela de álgebra. Feche a janela de visualização.
Planilha	Digite, em cada linha da planilha, os coeficientes da matriz ampliada do sistema $-5 \quad -1 \quad -4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad -5 \quad -1 \quad 4 \quad 5$.
Planilha	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz e clicando com o botão esquerdo do mouse crie a matriz1 = $(-5 \quad -1 \quad -4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad -5 \quad -1 \quad 4 \quad 5)$
Entrada	Digite na entrada o comando MatrizEscalonada[matriz1] e tecle Enter.
Questão	Identifique na matriz escalonada o tipo do sistema obtido: O sistema é PD () PI () I ()
Entrada	Clique com o botão direito na janela de visualização 3D e desabilite os eixos. Em seguida digite na entrada cada uma das equações $-5x - y - 4z = 5$, $2z = 3$ e $-5x - y + 4z = 5$ teclando enter .
Questão	Qual a solução do sistema? O sistema é PD () PI () I ()
CAS	Abra a janela CAS e digite o comando Resolver[{ -5x - y - 4z = 5, 2z = 3, -5x - y + 4z = 5},{x,y,z}] e tecle enter. O sistema é PD () PI () I ()
CAS	Abra a janela CAS e digite o comando em noval linha ResolverNumericamente[{ -5x - y - 4z = 5, 2z = 3, -5x - y + 4z = 5},{x,y,z}] e tecle enter.

	O sistema é PD () PI () I ()
--	--

11: (Método Gráfico articulado com Escalonamento: Sistema Impossível – Caso

II) Resolver o sistema $\begin{cases} -5x - y - 4z = 5 \\ -5x - y - 4z = 2 \\ -5x - y - 4z = 0 \end{cases}$ no GeoGebra segundo os procedimentos abaixo.

	Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a planilha, janela de visualização 3D e janela de álgebra. Feche a janela de visualização.
Planilha	Digite, em cada linha da planilha, os coeficientes da matriz ampliada do sistema $-5 \quad -1 \quad -4 \quad 5 \quad -5 \quad -1 \quad -4 \quad 2 \quad -5 \quad -1 \quad -4 \quad 0$.
Planilha	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz e clicando com o botão esquerdo do mouse. Em seguida, crie a matriz1 $=(-5 \quad -1 \quad -4 \quad 5 \quad -5 \quad -1 \quad -4 \quad 2 \quad -5 \quad -1 \quad -4 \quad 0)$, clicando com o botão direito do mouse em criar matriz.
Entrada	Digite na entrada o comando MatrizEscalonada[matriz1] e tecle Enter.
Questão	Identifique na matriz escalonada o tipo do sistema obtido: O sistema é PD () PI () I ()
Entrada	Clique com o botão direito na janela de visualização 3D e desabilite os eixos. Em seguida digite na entrada cada uma das equações $-5x - y - 4z = 5$, $-5x - y - 4z = 2$ e $-5x - y - 4z = 0$ teclando enter.
	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta intersecção de duas superfícies  no sétimo ícone. Em seguida clique nos planos a e depois b na janela de álgebra observando o que ocorre na janela de visualização 3D.
	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta intersecção de duas superfícies  no sétimo ícone. Em seguida clique nos planos a e depois c na janela de álgebra observando o que ocorre na janela de visualização 3D.
	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta intersecção de duas superfícies  no sétimo ícone. Em seguida clique nos planos b e depois c na janela de álgebra observando o que ocorre na janela de visualização 3D.
Questão	Por que surge, em cada caso, indefinido na janela de álgebra na intersecção dos planos ?
Questão	Qual a solução do sistema? O sistema é PD () PI () I ()
CAS	Abra a janela CAS e digite o comando Resolver[{-5x - y - 4z = 5, -5x - y - 4z = 2, -5x - y - 4z = 5},{x,y,z}] e tecle enter. O sistema é PD () PI () I ()

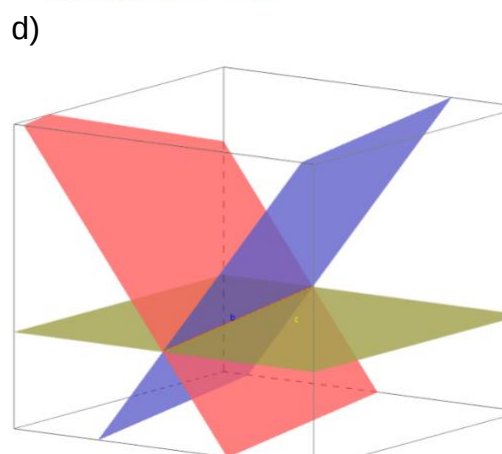
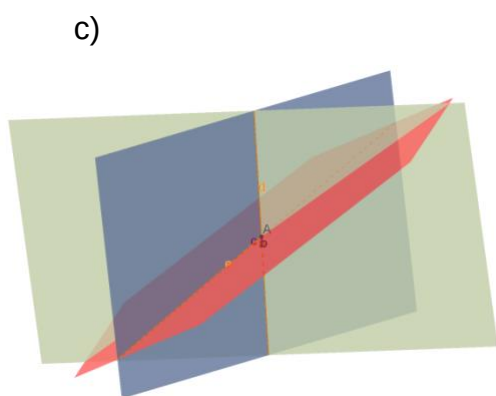
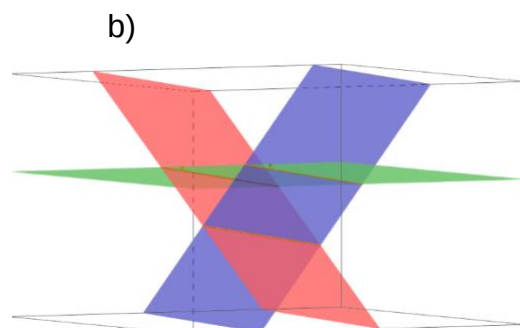
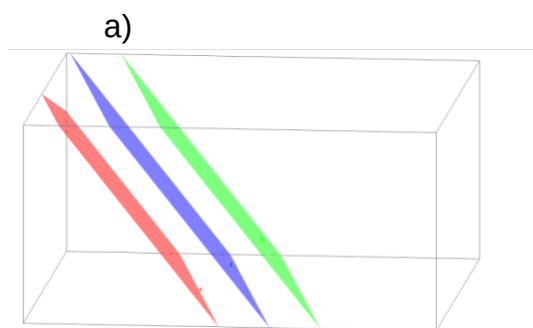
CAS	Abra a janela CAS e digite o comando em nova linha ResolverNumericamente [[- $5x - y - 4z = 5$, $-5x - y - 4z = 2$, $-5x - y - 4z = 5$],[x,y,z]] e tecla enter. O sistema é PD () PI () I ()
------------	--

12: (Método Gráfico articulado com Escalonamento: Sistema Possível e Indeterminado) Resolver o sistema $\{-5x - y - 4z = 5$ $0x + 0y + 3z = 0$ $-5x - y + 4z = 5$ no GeoGebra segundo os procedimentos abaixo.

	Em um arquivo do GeoGebra, deixe visível a planilha, janela de visualização 3D e janela de álgebra. Feche a janela de visualização.
Planilha	Digite, em cada linha da planilha, os coeficientes da matriz ampliada do sistema $-5 \ -1 \ -4 \ 5 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ -5 \ -1 \ 4 \ 5$.
Planilha	Clique na janela Planilha . Selecione todos os elementos da matriz e clicando com o botão esquerdo do mouse. Em seguida, crie a matriz1 = $(-5 \ -1 \ -4 \ 5 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ -5 \ -1 \ 4 \ 5)$, clicando com o botão direito do mouse em criar matriz.
Entrada	Digite na entrada o comando MatrizEscalonada [matriz1] e tecla Enter.
Questão	Identifique na matriz escalonada o tipo do sistema obtido: O sistema é PD () PI () I ()
Entrada	Clique com o botão direito na janela de visualização 3D e desabilite os eixos e plano. Em seguida digite na entrada cada uma das equações $-5x - y - 4z = 5$, $3z = 0$ e $-5x - y + 4z = 5$ teclando enter.
	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta intersecção de duas superfícies  no sétimo ícone. Em seguida clique nos planos a e depois b na janela de álgebra observando o que ocorre na janela de visualização 3D.
Questão	Identifique, na janela de álgebra, a intersecção encontrada. O que representa geometricamente a intersecção encontrada dos planos a e b? _____
	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta intersecção de duas superfícies  no sétimo ícone. Em seguida clique nos planos a e depois c na janela de álgebra observando o que ocorre na janela de visualização 3D.
Questão	Identifique, na janela de álgebra, a intersecção encontrada. O que representa geometricamente a intersecção encontrada dos planos a e c? _____

	Clique na janela de visualização 3D e habilite a ferramenta intersecção de duas superfícies  no sétimo ícone. Em seguida clique nos planos b e depois c na janela de álgebra observando o que ocorre na janela de visualização 3D.
Questão	Identifique, na janela de álgebra, a intersecção encontrada. O que representa geometricamente a intersecção encontrada dos planos b e c? _____
CAS	Abra a janela CAS e digite o comando Resolver[{ $-5x - y - 4z = 5$, $3z = 0$, $-5x - y + 4z = 5$},{x,y,z}] e tecle enter. O sistema é PD () PI () I ()
CAS	Abra a janela CAS e digite o comando ResolverNumericamente[{ $-5x - y - 4z = 5$, $3z = 0$, $-5x - y + 4z = 5$},{x,y,z}] e tecle enter. O sistema é PD () PI () I ()

13: Identifique nas figuras abaixo o tipo de sistema de três equações e três incógnitas em cada caso e preencha a tabela abaixo.



	a	b	c	d
P. Det				
P. Indet				
Impossível				

14: Quais dos procedimentos você considera mais confortável para resolver sistemas lineares 3×3 no GeoGebra? Por quê?

