

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Lina Flávia Morete de Queirós Maia

**Uma investigação na construção de argumentações por
alunos do 9º ano no estudo das propriedades dos pontos
notáveis de triângulo por meio de atividades de construções
geométricas**

SÃO PAULO

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Lina Flávia Morete de Queirós Maia

**Uma investigação na construção de argumentações por
alunos do 9º ano no estudo das propriedades dos pontos
notáveis de triângulo por meio de atividades de construções
geométricas**

Monografia apresentada à Pontifícia
Universidade Católica PUC/SP, como
exigência parcial para obtenção do título
de especialista em Educação Matemática,
sob a orientação do Professor Doutor
Saddo Ag Almouloud.

SÃO PAULO

2011

RESUMO

A presente pesquisa tem como tema norteador deste trabalho o acompanhamento e a investigação na construção de argumentações por alunos do 9º ano da Rede Escolar SESI de Ensino no estudo das propriedades dos pontos notáveis de triângulo utilizando uma sequência didática com atividades de construções geométricas encontrada na dissertação de mestrado de Oliveira (2009). Organizado em torno dos pressupostos da Engenharia Didática, este trabalho tem como objetivo desenvolver nos alunos habilidades investigativas para contribuir na construção do conhecimento geométrico. Para isso, as justificativas e argumentações dos alunos foram analisadas segundo a Tipologia de Provas de Balacheff que as caracteriza em 4 níveis: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental. Assim, a análise dos resultados desta pesquisa nos permite afirmar que atividades de construções geométricas desenvolvem e incentivam a produção de argumentações dos alunos, mesmo sem evoluir dentro dos níveis de prova, o que demandaria mais tempo de trabalho com os alunos.

SUMÁRIO

Introdução	7
Capítulo 1 Problemática, referenciais teórico e metodológico	9
1.1 Objetivo e questão de pesquisa	9
1.2 Os pressupostos da Engenharia Didática e a Tipologia de Provas.....	10
Capítulo 2 A Geometria e a abordagem dos Pontos Notáveis de um Triângulo em alguns livros didáticos.....	12
2.1 Projeto Radix – Raiz do Conhecimento: Matemática 8º ano – Ribeiro.....	15
2.2 Vontade de Saber Matemática 8º ano – Souza e Pataro.....	22
2.3 Tudo é Matemática 8º ano – Dante.....	28
2.4 Movimento do Aprender 9º ano – SESI – SP.....	36
2.5 Comentários sobre as análises.....	43
Capítulo 3 As fases da Engenharia Didática	46
3.1 Análises preliminares e <i>análise priori</i>	47
3.2 As variáveis didáticas.....	47
3.2.1 O uso do <i>software Geogebra</i>	48
3.2.2 O trabalho em grupo.....	48
3.2.3 Os instrumentos de construções geométricas régua, transferidor e compasso.....	50
3.2.4 O enunciado das atividades.....	51

3.3	Breve Análise <i>a priori</i> da sequência didática	51
3.4	Experimentação e Análise <i>a posteriori</i>	58
	Considerações finais	77
	Referências	79

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Abordagem dos conteúdos na Coleção Radix	13
Figura 2.	Abordagem dos conteúdos na Coleção Vontade de Saber Matemática	13
Figura 3.	Abordagem dos conteúdos na Coleção Tudo é Matemática	14
Figura 4.	Ilustração das medianas num triângulo acutângulo	15
Figura 5.	Ilustração das bissetrizes num triângulo acutângulo	16
Figura 6.	Passos para construção da circunferência inscrita no triângulo	17
Figura 7.	Ilustração das alturas num triângulo obtusângulo.....	18
Figura 8.	Definição e ilustração da Mediatriz	20
Figura 9.	Atividades envolvendo Pontos Notáveis de um Triângulo ...	21
Figura 10.	O Teorema de Napoleão	22
Figura 11.	Passos para traçar a mediana do triângulo	23
Figura 12.	Definição de mediatriz	24
Figura 13.	Definição de circuncentro	25
Figura 14.	Passos para traçar a altura de um triângulo	26
Figura 15.	Propriedade do incentro de um triângulo	26
Figura 16.	Atividade envolvendo a construção do circuncentro do triângulo ABC	27
Figura 17.	O Teorema de Napoleão	28
Figura 18.	Ilustração da altura relativa à base em triângulos	29
Figura 19.	Atividade envolvendo demonstração de propriedade	30
Figura 20.	Incentro de um triângulo	31
Figura 21.	Baricentro de um triângulo e a divisão da mediana na razão 1:2	32
Figura 22.	Mediatriz de um segmento de reta	33
Figura 23.	Passos para o traçado da mediatriz de um segmento de reta	34
Figura 24.	Demonstração de uma proposição	35
Figura 25.	Ponto equidistante aos vértices de um triângulo	35

Figura 26.	Ideia de mediatriz	38
Figura 27.	Mediatriz dos lados de um triângulo	39
Figura 28.	Medianas e a razão 1:2	41
Figura 29.	Medianas relativas aos lados de um triângulo	43

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.	1ª Atividade construção da mediatriz de um segmento	51
Quadro 2.	2ª Atividade: a definição de mediatriz de um segmento	52
Quadro 3.	3ª Atividade: Propriedade da mediatriz de um segmento	52
Quadro 4.	4ª Atividade: Ponto de encontro das mediatrizes relativas aos lados de um triângulo	53
Quadro 5.	5ª Atividade: Construção da bissetriz	53
Quadro 6.	6ª Atividade: Definição de Bissetriz	54
Quadro 7.	7ª Atividade: Traçado da bissetriz	55
Quadro 8.	8ª Atividade: Lugar geométrico bissetriz	55
Quadro 9.	9ª Atividade: Alturas relativas aos lados do triângulo	55
Quadro 10.	10ª Atividade: Alturas de um triângulo	56
Quadro 11.	Atividade 11: Ortocentro de um triângulo	57
Quadro 12.	Atividade 12: Baricentro de um triângulo	58
Quadro 13.	Construções realizadas na 5ª atividade	62
Quadro 14.	Protocolos da atividade 8	64
Quadro 15.	Protocolos da atividade 9	66
Quadro 16.	Protocolo atividade 10 – Grupo F	67
Quadro 17.	Resolução da atividade 11	73
Quadro 18.	Construção realizada pelo grupo A – 12ª atividade	74

INTRODUÇÃO

Segundo Almouloud (2004), o estudo da Geometria no Ensino Fundamental II tem se mostrado bastante falho no Brasil, a abordagem dessa área da matemática na maioria dos livros didáticos, como tenho constatado esses anos como professora, não é contínua nos volumes das novas coleções e questões que envolvam construções geométricas já não são mais tão valorizadas como foram um dia. Buscando explicações para a defasagem no estudo da Geometria me deparei com o Movimento da Matemática Moderna e encontrei algumas explicações que procurava.

Na década de 60, os currículos escolares do ensino fundamental no Brasil sofreram grandes mudanças com a promulgação da Lei nº 5692 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Zuin, 2002, p. 1) e, com isso, as construções geométricas deixaram de ser trabalhadas, principalmente nas escolas públicas. Essas mudanças decorreram de acordos internacionais para tornar o ensino da Matemática mais próximo do ensino desenvolvido na Universidade, dando origem ao Movimento da Matemática Moderna.

A escolha das construções geométricas como assunto deste trabalho foi feita exatamente para desenvolver um saber matemático que ficou esquecido por vários anos e que sem dúvida é de extrema importância no ensino e aprendizagem da Geometria, assim como confirmam recentes pesquisas ao ressaltarem a importância de se aliar as Construções Geométricas ao ensino de Geometria.

As atividades de construções geométricas que foram trabalhadas para o desenvolvimento desta pesquisa trazem os pontos notáveis de um triângulo e suas propriedades com o objetivo de investigar a construção de conceitos, a argumentação e conclusão de ideias de uma turma de 32 alunos do 9º ano do Centro Educacional SESI Mangal, localizado numa cidade do interior do estado de São Paulo, Sorocaba.

Para analisar as justificativas e as argumentações produzidas pelos alunos será utilizado como embasamento teórico a Tipologia de Provas de Balacheff (*apud* ALMOULOU, 2001), tendo como metodologia de pesquisa os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (*apud* MACHADO, 2008).

Duas das atividades da sequência didática apresentada aos alunos foram desenvolvidas no laboratório de informática educacional da escola com a utilização do software de geometria dinâmica Geogebra,

A escolha pelo software Geogebra se deu pelo fato de ser um software de matemática dinâmica que dispõe de recursos de geometria, sendo uma ferramenta de extrema importância quando o objetivo da sequência didática é a interação do aluno, levando-o a delinear suas investigações, observar e manipular as construções geométricas de modo a conjecturar teoremas. O software Geogebra contempla as necessidades para o desenvolvimento das atividades propostas neste trabalho, além de ser um software matemático gratuito.

Neste trabalho de pesquisa também será apresentada uma breve análise de três livros didáticos indicados pelo guia do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD/ 2011, já que muitas vezes o professor de matemática busca num livro didático a sua atualização e aperfeiçoamento, bem como afirma Dante no Manual Pedagógico do Professor de seus livros didáticos da coleção “Tudo é Matemática”. Essa breve análise buscará verificar como os livros didáticos trabalham os pontos notáveis no triângulo e que tipo de atividades são propostas aos alunos.

Desde fevereiro de 2011, a rede escolar SESI adota como apoio ao processo ensino e aprendizagem o material didático Movimento do Aprender, onde traz propostas de roda de conversa para levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos, atividades e sugestões de livros paradidáticos, além de sites para leitura e pesquisa. Definições e conceitos são obtidos pelo professor, muitas vezes em conjunto com os alunos tendo o Fazer Pedagógico como um manual de orientação ao professor.

Como a sequência didática será aplicada em alunos da rede escolar SESI é conveniente que o material didático utilizado pela escola também seja analisado. Os pontos notáveis de um triângulo e suas propriedades é conteúdo apresentado na unidade 7 do Movimento do Aprender – 9º ano, por isso será o único a ser analisado.

CAPÍTULO 1

Problemática, referenciais teórico e metodológico

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), o Movimento da Matemática Moderna, ocorrido nos anos de 1950 e de 1960, teve seu surgimento motivado pela Guerra Fria entre Rússia e Estados Unidos, e por outro lado, pela constatação de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico e o currículo escolar que vigia na época. A partir disso, surgem nos Estados Unidos, grupos de pesquisa formados por matemáticos, educadores e psicólogos para desenvolver um novo currículo escolar de matemática.

Aqui no Brasil a Educação Matemática inicia-se na década de 1970 aos primeiros anos da década de 1980, onde surgem os primeiros sinais de existência de um novo campo profissional.

Como consequência desse movimento, muitos professores receberam uma formação precária em Geometria, tendo como reflexo um baixo desempenho dos alunos do Ensino Fundamental, em Matemática, como mostram recentes avaliações feitas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB pela Secretaria de Educação de São Paulo, evidenciando que esse desempenho torna-se ainda mais baixo quando o tema abordado é a Geometria:

[...] estudos feitos sobre o ensino-aprendizagem da demonstração mostram as dificuldades que os alunos encontram na aquisição dos conceitos geométricos. Um dos problemas que favorecem o fraco desempenho de alguns alunos no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas, é devido à prática e às escolhas didáticas dos professores quando ensinam a geometria (ALMOULOUUD e MELLO, 2000, p. 8).

1.1 Objetivo e questão de pesquisa

Em meio a toda dificuldade de trazer novamente a Geometria para a sala de aula de forma eficaz, já que esse ramo da Matemática é de extrema

importância por servir principalmente de instrumento para outras áreas do conhecimento (ALMOULOU *et al*, 2004), o objetivo deste trabalho é desenvolver nos alunos habilidades investigativas para contribuir na construção do conhecimento geométrico, visto que não há como desvincular construções geométricas do ensino e aprendizagem da Geometria.

Para o desenvolvimento do objetivo deste trabalho a questão de pesquisa ficou, assim, definida:

“Como desenvolver a argumentação nas justificativas dos alunos na resolução de atividades de Construções Geométricas?”

Qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos adjacentes e este, por sua vez, é um dos polígonos mais simples da geometria quanto ao número de lados e ângulos. Contudo, o formato triangular é um dos mais importantes e com maior aplicabilidade no cotidiano, desde simples tripés para a sustentação de um objeto qualquer até seu uso na construção de estruturas relacionadas a questões de segurança, já que os três pontos dos vértices de um triângulo definem um único plano e assim caracteriza o triângulo como um polígono rígido e estável. Dentro desse contexto, surge a ideia que seria tema deste trabalho: propriedades relacionadas ao triângulo.

Os pontos notáveis de um triângulo permitem a exploração de vários objetos matemáticos e permitem que o aluno desenvolva a investigação, a inferência, a argumentação e a validação de suas hipóteses. Assim, a questão de pesquisa enunciada anteriormente será desenvolvida em atividades de construções geométricas relacionadas ao baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro.

1.2 Os pressupostos da Engenharia Didática e a Tipologia de Provas

Este trabalho de pesquisa trata da aplicação de uma sequência didática para análise do desenvolvimento de uma turma de 9º ano quanto à evolução nas argumentações e justificativas em atividades de construções geométricas e, para estruturação da mesma, os pressupostos da Engenharia Didática atendem a essa

necessidade de organização, já que essa metodologia de pesquisa é também baseada em experiências de sala de aula.

De acordo com Almouloud (2007, p. 171):

A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ARTIGUE, 1988, *apud* Almouloud, 2007, p. 171)

Michèle Artigue (1988) justifica o termo engenharia didática empregado nas pesquisas da Didática da Matemática:

[...] este termo foi “cunhado” para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre os conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (p. 283, *apud* Machado, 2008, p. 234).

O processo experimental da Engenharia Didática é composto por 4 fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação e a última delas sendo análise *a posteriori* e validação.

Juntamente a essa metodologia de pesquisa, a Tipologia de Provas (BALACHEFF, 1988, *apud* Varella, 2010) nos permitirá estudar e classificar as validações dos alunos nas atividades que compõem a sequência didática em quatro tipos distintos: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental.

CAPÍTULO 2

A Geometria e a abordagem dos Pontos Notáveis de um Triângulo em alguns livros didáticos

Para muitos professores, como já citado anteriormente, o livro didático é um referencial para o planejamento de suas aulas, por isso se faz necessária não uma análise de livros didáticos, mas uma verificação de como os livros didáticos atuais abordam a Geometria, mais especificamente como os pontos notáveis de um triângulo são apresentados e quais atividades são propostas aos alunos.

A escolha dos livros para os comentários deve-se aos mesmos estarem indicados no Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático PNLD/2011, programa voltado à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira.

Os livros analisados são:

- Projeto Radix – Raiz do Conhecimento: Matemática 8º ano/ Jackson Ribeiro – São Paulo: Scipione, 2010.
- Vontade de saber matemática: 8º ano/ Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro – São Paulo: FTD, 2009.
- Tudo é Matemática – 8º ano/ Luiz Roberto Dante – São Paulo: Ática, 2010.

Segundo a análise das obras trazida nas resenhas das coleções apresentadas no Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático PNLD/2011, a Geometria é apresentada em todos os volumes dos livros escolhidos para análise, mostrando assim que o abandono do ensino da geometria foi um erro e então a tentativa de resgatá-la. A coleção “Projeto Radix - Raiz do conhecimento” aborda a geometria de forma experimental, somente em alguns tópicos é mais formal, como na apresentação dos casos de congruência de triângulos para posteriormente demonstrar o teorema de Tales.

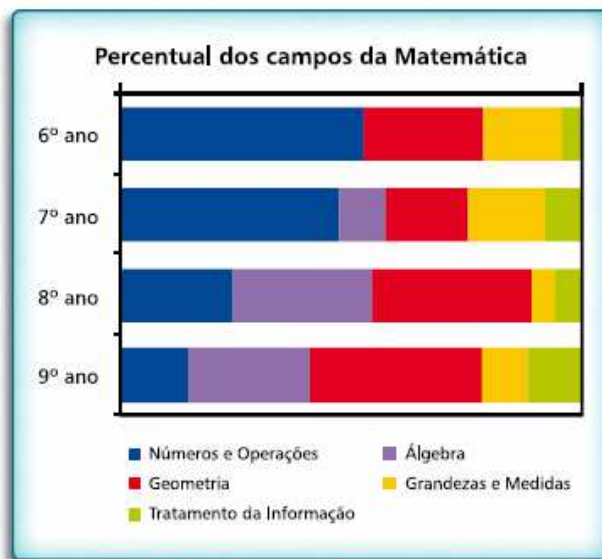


Figura 1: Abordagem dos conteúdos na Coleção Radix
PNLD 2011 p. 79

A coleção “Vontade de saber matemática” apresenta a geometria plana em todos os volumes, mas a abordagem é feita de maneira superficial. Há incentivo ao trabalho com instrumentos de desenho geométrico em algumas atividades, mas nenhuma delas estimula o aluno a fazer deduções ou demonstrações lógicas que possam levar o aluno a enunciar propriedades.

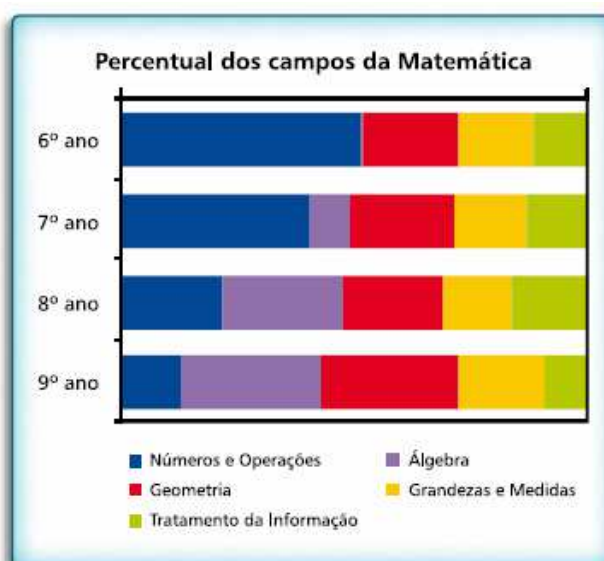
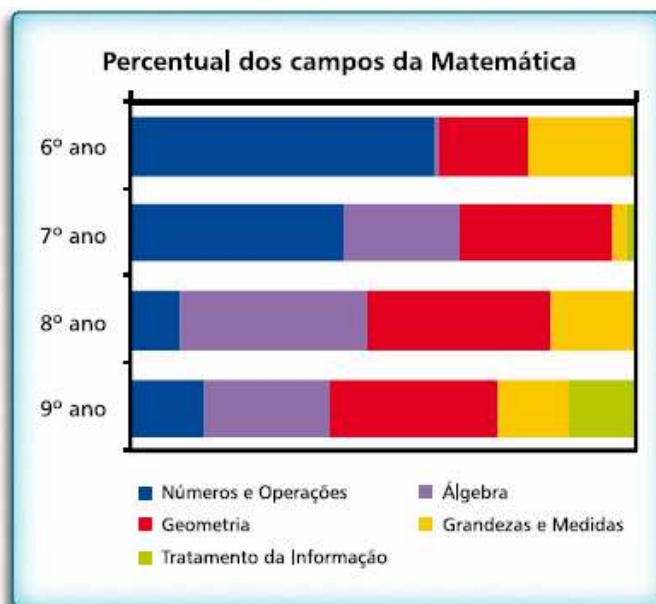


Figura 2: Abordagem dos conteúdos na Coleção Vontade de Saber Matemática
PNLD 2011 p. 93

Na coleção da editora Ática, “Tudo é matemática”, os conteúdos são constantemente retomados e observa-se o cuidado em estabelecer relações entre eles.



**Figura 3: Abordagem dos conteúdos na Coleção Tudo é Matemática
PNLD 2011 p. 85**

Não se espera que os livros didáticos apresentem uma Geometria axiomática, a mesma feita no passado a partir de Euclides, mas que estimulasse o aluno a desenvolver as competências que a Geometria propicia que o discente as desenvolva.

[...] Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998, p. 122).

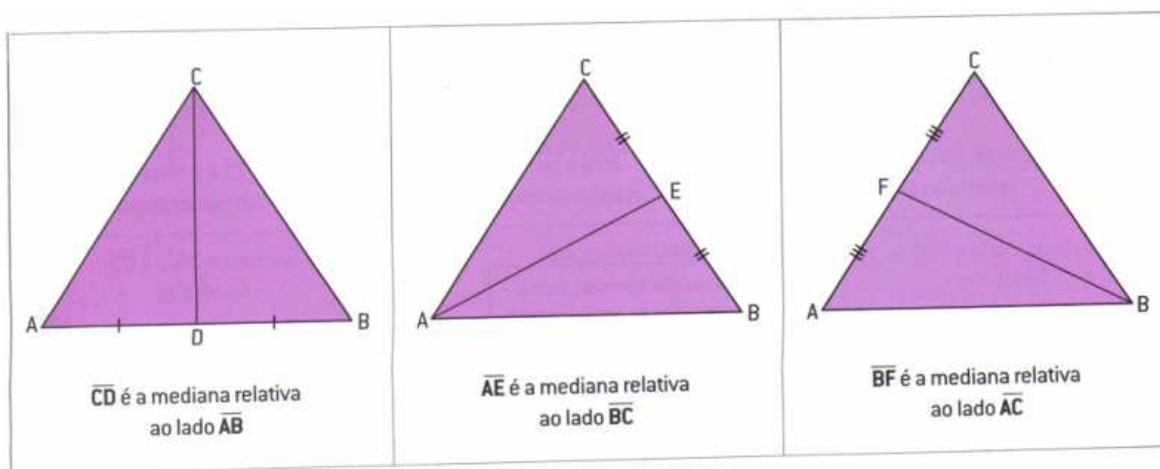
Como já descrito, segundo a análise das obras trazida nas resenhas das coleções apresentadas no Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático PNLD/2011 há uma preocupação em trabalhar a Geometria de

forma contínua nos anos do Ensino Fundamental II, resta analisar como a Geometria está sendo trabalhada nesses livros.

2.1. Projeto Radix – Raiz do Conhecimento: Matemática 8º ano – Ribeiro

O tema Pontos Notáveis de um Triângulo inicia-se nesse livro tratando das medianas de um triângulo. A mediana é definida como o segmento de reta que tem uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Logo após a definição, as medianas de um triângulo acutângulo são ilustradas e um pequeno quadro anuncia que o procedimento para traçar as medianas de um triângulo utilizando régua e compasso está no Caderno de recursos.



Veja, no *Caderno de recursos*, como traçar as medianas de um triângulo utilizando régua e compasso.

Observe o triângulo ao lado com todas as suas medianas traçadas. Note que elas se cruzam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado baricentro do triângulo.

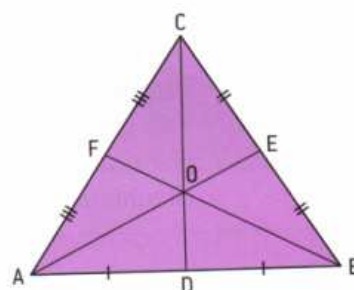


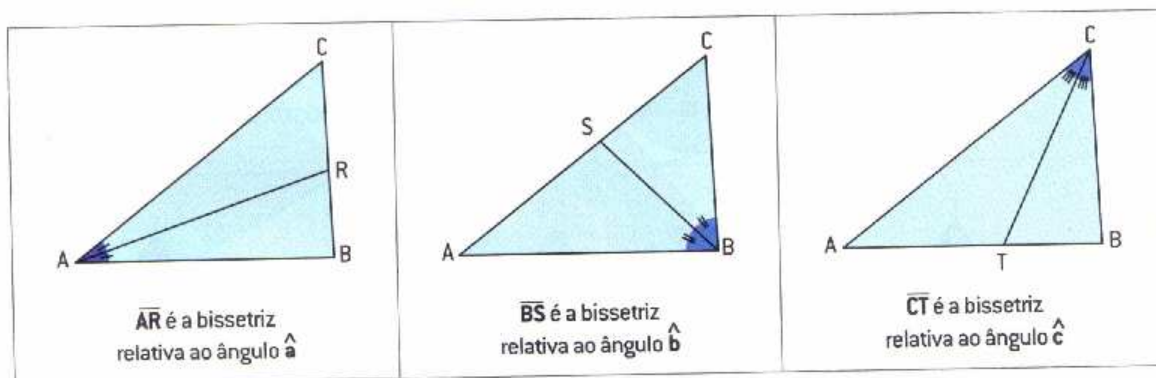
Figura 4: Ilustração das medianas num triângulo acutângulo

Ribeiro p. 209

O Caderno de recursos citado ocupa as últimas páginas do livro, o que mostra certo despreço à importância de se aliar à Geometria as construções geométricas. Ao tratar de tais construções, o caderno de recursos traz apenas “receitas” das construções, sem nenhuma explicação dos traçados feitos.

Como visto na figura 4, define-se baricentro como o ponto de cruzamento das medianas de um triângulo. Na sequência, uma atividade experimental usando um triângulo desenhado num papel grosso e barbante é proposta para mostrar que o baricentro representa o ponto de equilíbrio de um triângulo.

A definição de bissetriz é dada como o segmento de reta que tem extremidade em um vértice do triângulo, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes e a outra extremidade do segmento toca o lado oposto ao vértice. Novamente o livro traz a ilustração num triângulo acutângulo e o quadro indicando o Caderno de recursos para mais algumas receitas de construção.



Veja, no *Caderno de recursos*, como traçar as bissetrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.

No triângulo ao lado foram traçadas as bissetrizes relativas a todos os ângulos. Note que as bissetrizes se cruzam em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo.

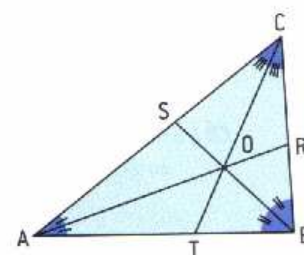


Figura 5: Ilustração das bissetrizes num triângulo acutângulo
Ribeiro p. 210

Ao apresentar as bissetrizes relativas aos três ângulos do triângulo dado na ilustração, o autor define incentro como o ponto de encontro dessas bissetrizes e apresenta os passos para construção da circunferência inscrita no triângulo dado.

O conceito de bissetriz que o aluno poderia explorar usando os conhecimentos adquiridos durante a construção da figura acabou sendo descartado pelo autor ao apresentar a construção pronta ou então apresentar a receita da construção.

Assim confirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998):

[...] as atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como o manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. (p. 68)

Podemos traçar uma **circunferência inscrita** no triângulo com centro no incentro. Para isso, traçamos uma reta perpendicular a qualquer lado do triângulo passando pelo incentro. Em seguida, fixamos a ponta seca de um compasso no incentro com abertura até o ponto em que a perpendicular toca o lado do triângulo e traçamos a circunferência.

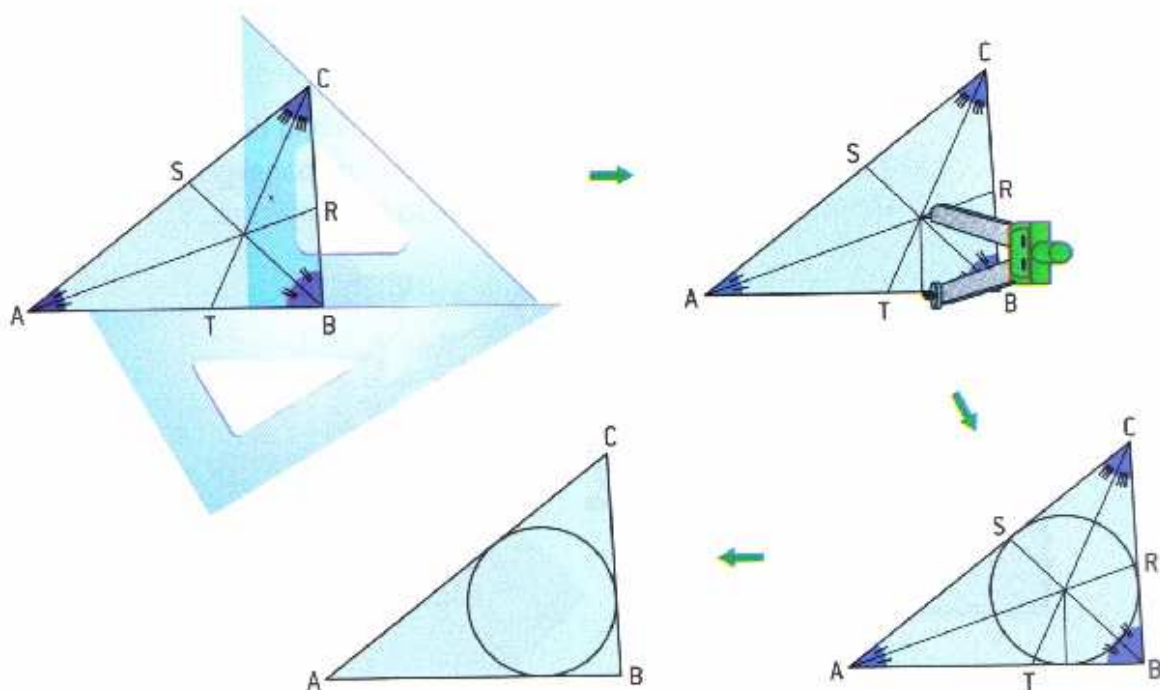
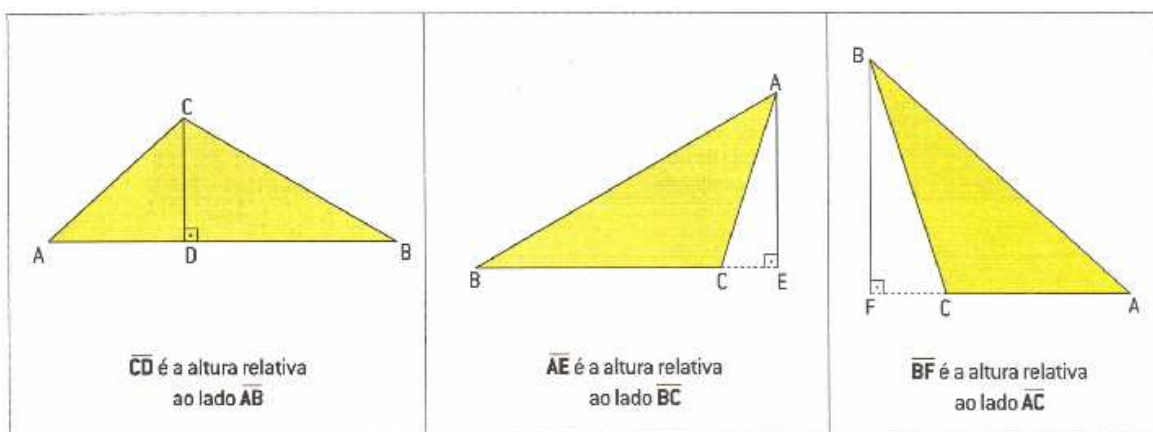


Figura 6: Passos para construção da circunferência inscrita no triângulo

Ribeiro p. 210

A definição de altura de um triângulo é dada por um segmento de reta com uma extremidade em um vértice do triângulo e perpendicular ao lado oposto ou ao prolongamento desse lado e a outra extremidade do segmento toca o lado oposto do triângulo ou seu prolongamento.

Desta vez, o autor ilustra as alturas relativas aos lados do triângulo utilizando um triângulo obtusângulo e, conseqüentemente a altura relativa ao lado nem sempre é interna ao triângulo. O ortocentro é definido como o ponto de encontro das alturas do triângulo e o que poderia ser pesquisado pelo aluno, o autor apresenta sem nenhum trabalho de investigação: as alturas se interceptam em um ponto no interior do triângulo em qualquer triângulo acutângulo, em um triângulo retângulo duas alturas coincidem com os lados menores e se interceptam no vértice do ângulo reto e, por fim, em um triângulo obtusângulo os prolongamentos das alturas se interceptam em um ponto exterior ao triângulo.



Veja, no *Caderno de recursos*, como traçar as alturas de um triângulo utilizando régua e compasso.

No triângulo que aparece ao lado foram traçadas as alturas relativas a todos os lados. Note que, prolongando essas alturas, elas se cruzam em um único ponto, chamado **ortocentro** do triângulo.

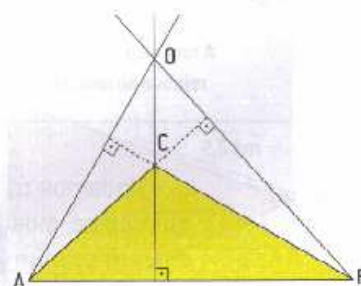


Figura 7: Ilustração das alturas num triângulo obtusângulo

Ribeiro p. 211

A representação da mediatriz é apresentada como na maioria dos livros didáticos atuais, por meio de uma figura sempre na mesma posição: um segmento de reta na horizontal e a mediatriz uma reta na vertical, limitando a visão do aluno. Assim nos confirma Gravina (1999, p. 2, *apud* Oliveira, 2009, p. 75),

Os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos. Por exemplo, quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas em triângulos sempre acutângulos, etc... Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação. E mais, para os alunos, a posição relativa do desenho ou seu traçado particular, passam a fazer parte das características do objeto, quer no aspecto conceitual ou quer no aspecto figural, estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos [...]

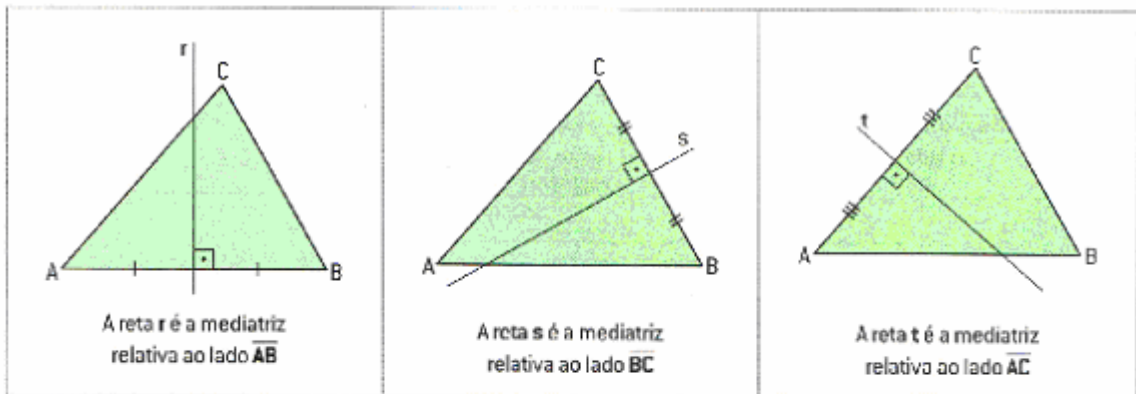
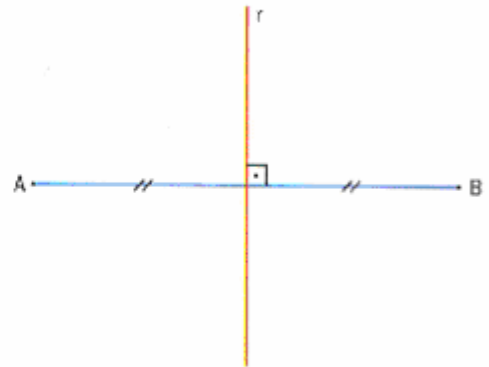
As mediatrizes relativas aos lados de um triângulo são ilustradas num triângulo acutângulo e o ponto de encontro dessas mediatrizes é definido como circuncentro do triângulo. O autor menciona que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo e novamente a construção de um lugar geométrico explora somente a visualização, a orientação para o uso de dobraduras ao trabalhar as mediatrizes de um triângulo aparece apenas na Assessoria Pedagógica ao professor como sugestão para o trabalho em sala de aula.

Mediatrizes de um triângulo

Na imagem ao lado aparece um segmento AB com uma reta r perpendicular em seu ponto médio. Essa reta é chamada **mediatriz** de AB .

Agora, veja as mediatrizes relativas a cada lado de um triângulo ABC .

Veja, no *Caderno de recursos*, como traçar as mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.



Podemos traçar todas as mediatrizes de um triângulo como mostra a figura ao lado. Note que elas se cruzam em um mesmo ponto, chamado **circuncentro** do triângulo.

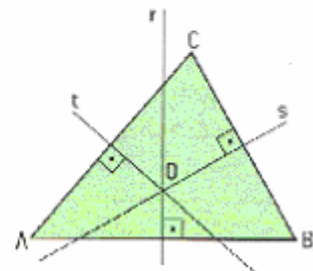


Figura 8: Definição e ilustração da Mediatriz

Ribeiro p. 212

Após as definições e construções prontas, sem explorar e investigar os conceitos envolvidos, são apresentadas 11 atividades dentre as quais apenas uma explora construções onde o aluno deve construir um triângulo equilátero, um isósceles e um escaleno para, em seguida, desenhar as circunferências inscritas e circunscritas a cada um deles. As demais atividades levam o aluno a apenas praticar os conhecimentos adquiridos, como é possível constatar nas atividades apresentadas na Figura 8.

Há uma outra seção de atividades intitulada “complementando...” que funciona como uma revisão do módulo, mas que novamente não trabalha construções geométricas.

30 • Copie e substitua cada ■ por uma das palavras nas fichas abaixo.

circuncentro

ortocentro

baricentro

alturas

mediatrizes

medianas

- O centro da circunferência circunscrita é obtido pelo cruzamento das ■ do triângulo.
- é o centro de equilíbrio de um triângulo.
- Nos triângulos obtusângulos o encontro das ■ é sempre externo ao triângulo.
- O ponto comum entre as mediatrizes é chamado ■.
- é o nome dado ao encontro das alturas de um triângulo e o baricentro é obtido pelo cruzamento das ■.

31 • A professora de Matemática do 8.º ano pediu aos alunos que desenhassem um triângulo qualquer e determinassem seu circuncentro. Observe os triângulos desenhados por três alunos.

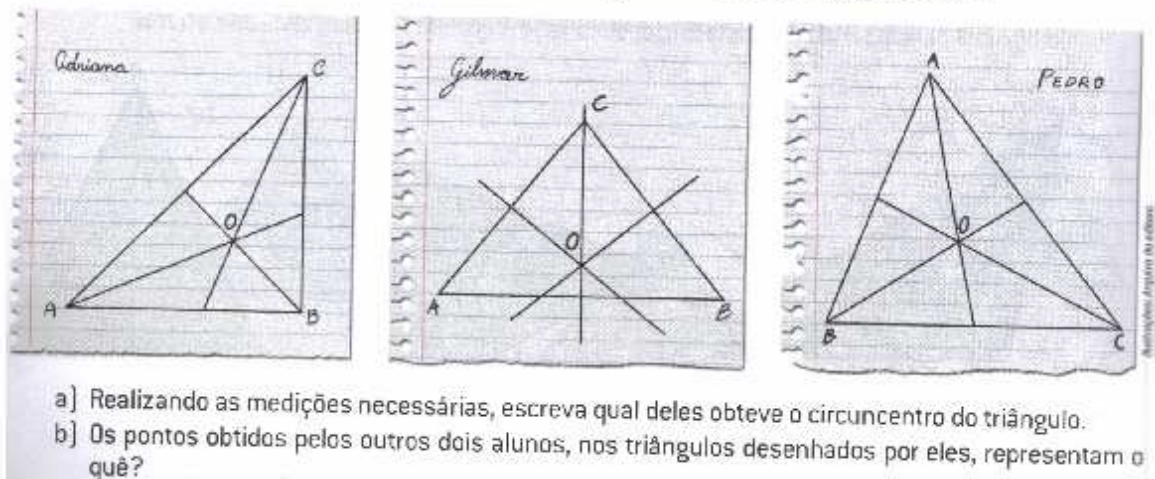


Figura 9: Atividades envolvendo Pontos Notáveis de um Triângulo

Ribeiro p. 214

Segundo a apresentação da obra, há um texto no final de cada capítulo, seção “Algo a mais”, no qual você encontra informações adicionais acerca do conteúdo em estudo, onde essas informações estão relacionadas à história da Matemática, à Geografia, entre outras áreas do conhecimento.

No final do capítulo 5 – “Ângulos”, o qual estamos tratando, o texto “O Teorema de Napoleão” traz um resumo da biografia de Napoleão e uma das contribuições que Napoleão trouxe à Geometria, o Teorema de Napoleão.

Teorema de Napoleão: Os baricentros de três triângulos equiláteros, que têm como bases os lados de um triângulo qualquer, são vértices de outro triângulo equilátero.

Para verificar esse teorema, desenhemos um triângulo qualquer e, a partir de seus lados, desenhemos três triângulos equiláteros. Em seguida, determinamos os baricentros dos três triângulos equiláteros.

Por último, traçamos segmentos de reta unindo os baricentros e obtemos outro triângulo equilátero.

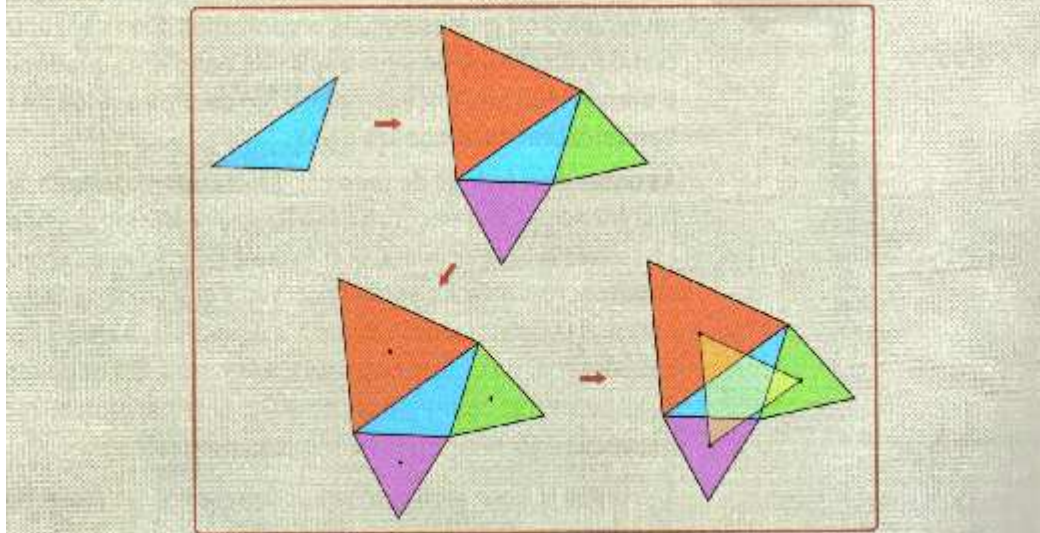


Figura 10: O Teorema de Napoleão

Ribeiro p. 217

O Teorema não é trabalhado de maneira satisfatória, já que nas questões seguintes os alunos devem responder quem foi Napoleão Bonaparte, como Napoleão Bonaparte se interessou pela Matemática e que contribuição Napoleão trouxe à Geometria. Em nenhuma das questões o aluno trabalha como um investigador que verifica e valida o teorema.

Como já exposto, o livro trabalha os Pontos Notáveis de um Triângulo valorizando mais a prática de conhecimentos adquiridos e a Álgebra do que as construções geométricas com o uso do transferidor, esquadro e compasso.

2.2 – Vontade de Saber Matemática 8º ano – Souza e Pataro

Nesse livro, o tema é iniciado com uma explicação para nomenclatura Pontos Notáveis de um Triângulo justificando que alguns pontos associados aos

triângulos apresentam características particulares e por isso são chamados pontos notáveis.

A mediana é o primeiro lugar geométrico a ser definido e a ilustração das medianas de um triângulo é apresentada num triângulo obtusângulo escaleno. Num quadro ao lado, os passos para construção da mediana do triângulo são descritos.

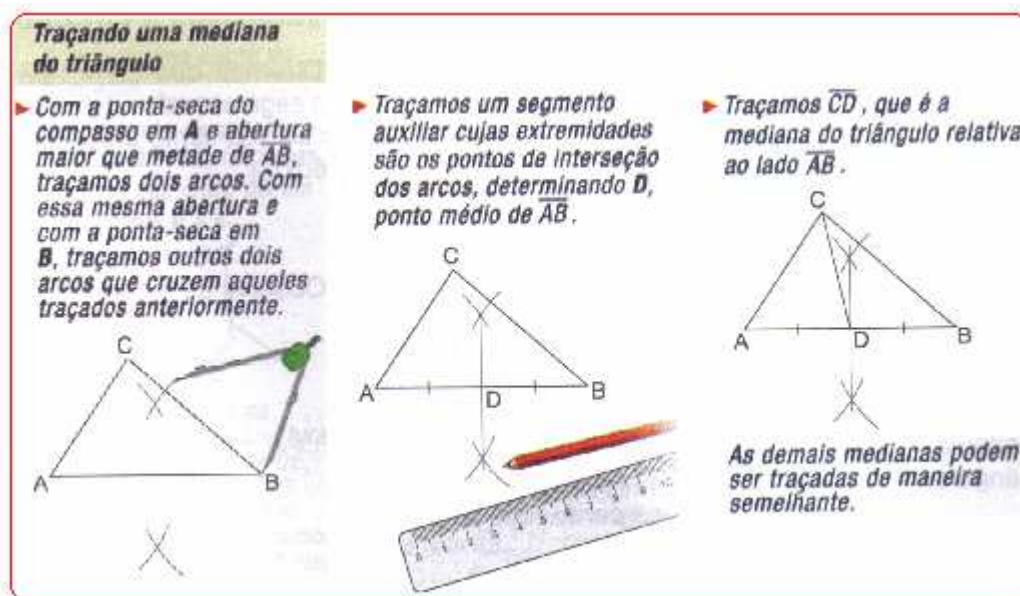


Figura 11: Passos para traçar a mediana do triângulo

Souza e Pataro p. 219

Muitas vezes, os passos apresentados no livro limitam o aluno a reproduzir a construção sem necessariamente estabelecer relações ou qualquer reflexão sobre as construções geométricas que realizou. O baricentro é dado como ponto de encontro das medianas num triângulo e da mesma forma que no livro analisado anteriormente, sugere-se a construção de um triângulo em cartolina passando um barbante pelo seu baricentro para observar a propriedade do baricentro como ponto de equilíbrio do triângulo.

Na sequência, a mediatriz é definida e mais uma vez ilustrada como o segmento vertical que passa pelo ponto médio do segmento horizontal, podendo dificultar ao aluno a associação da mediatriz a figuras diferentes daquelas prototípicas geralmente trazidas dos livros didáticos.

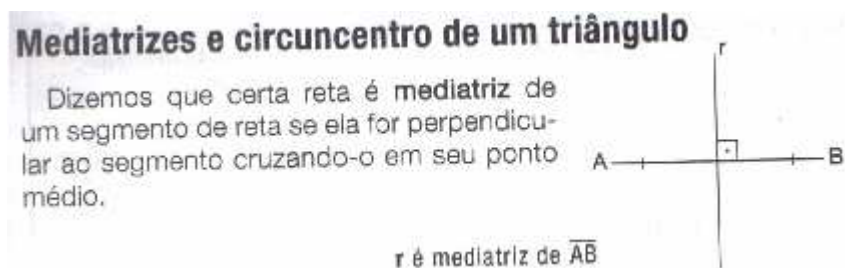


Figura 12: Definição de mediatriz

Souza e Pataro p. 220

Mais uma vez o livro apresenta uma definição e sua ilustração sem qualquer incentivo à análise da construção e reflexão sobre a sua realização. O circuncentro é apresentado como o ponto de encontro das mediatrizes e centro da circunferência circunscrita ao triângulo onde o aluno não participa dessa construção. Os passos para construção da mediatriz relativa ao lado do triângulo aparecem num quadro ao lado da definição, mas sem estimular a investigação da propriedade do circuncentro do triângulo.

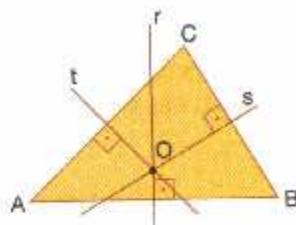
De acordo com Costa (1981),

“... a falta da geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o desenho geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica de estudo de geometria e de suas aplicações. Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1º grau, o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho, pois geralmente estes se reduziam à régua e compasso.” (Costa, 1981, p.89-90, *apud* Zuin).

As construções geométricas sendo trabalhadas como simples reprodução de passos tolhem o desenvolvimento da capacidade do aluno para argumentar e construir demonstrações perdendo o importante papel apontado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de desenvolver no aluno um tipo de pensamento particular

para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

As mediatrizes de um triângulo se cruzam em um único ponto. Esse ponto notável é chamado **circuncentro** do triângulo.



O: circuncentro do ΔABC

O circuncentro está a uma mesma distância dos três vértices do triângulo. Se traçarmos uma circunferência cujo centro é o circuncentro do triângulo e o raio é igual à distância do circuncentro a um dos vértices, essa circunferência conterá os três vértices do triângulo, ou seja, obteremos uma circunferência **circunscrita** ao triângulo.

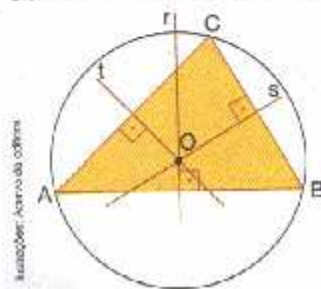


Figura 13: Definição de circuncentro

Souza e Pataro p. 220

Após definir altura de um triângulo, o autor trata do ortocentro de um triângulo como o encontro das três alturas do triângulo ou de seu prolongamento e as ilustra nos três tipos de triângulo classificados quanto aos ângulos – acutângulo, retângulo, obtusângulo. Outra vez o trabalho de pesquisa é descartado, o aluno não investiga nem participa da validação do posicionamento do ortocentro em relação ao tipo do triângulo quanto aos ângulos.

Um quadro ao lado da definição da altura de um triângulo traz novamente os passos para o traçado da altura do triângulo sem qualquer explicação. O autor poderia enriquecer e dar sentido à construção da altura do triângulo incentivando o aluno a justificar esses passos: a altura \overline{CG} relativa ao lado \overline{AB} do triângulo

ABC dado é também altura relativa à base do triângulo isósceles CDE, por isso a construção se inicia com o arco cruzando o lado \overline{AB} em dois pontos.

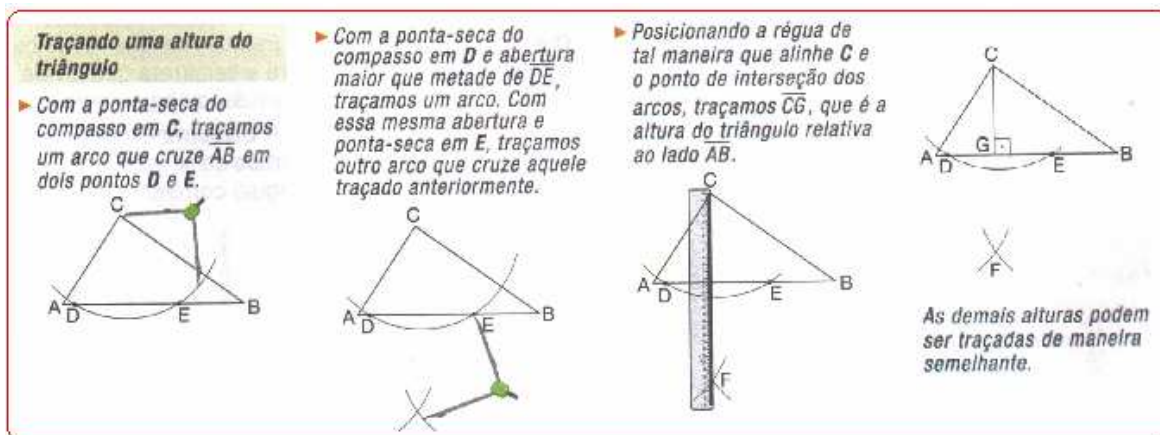


Figura 14: Passos para traçar a altura de um triângulo

Souza e Pataro p. 221

A próxima definição retoma o conceito de bissetriz de um ângulo e prossegue com a definição de bissetriz de um triângulo, além de tratar do incentro como o ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo. Ao apresentar a circunferência inscrita no triângulo, o autor descreve o centro no incentro e o raio da circunferência igual à distância do incentro ao lado do triângulo, mas não discute a construção geométrica para encontrar o raio, o que poderia ser investigado pelo aluno.

O incentro está a uma mesma distância dos lados do triângulo. Assim, ao traçarmos uma circunferência com centro no incentro e raio igual à distância do incentro ao lado do triângulo, obteremos uma circunferência **inscrita** no triângulo.

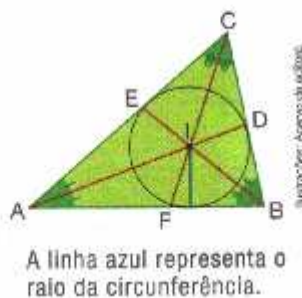


Figura 15: Propriedade do incentro de um triângulo

Souza e Pataro p. 222

O capítulo segue propondo a resolução de 12 atividades dentre as quais somente 3 se diferenciam daquelas que valorizam mais a Álgebra do que propriamente a Geometria.

A primeira delas solicita que o aluno construa um triângulo equilátero e nele determine o baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro para estabelecer uma relação entre os pontos notáveis determinados. A atividade é interessante para que o aluno investigue sobre a coincidência dos pontos notáveis no triângulo equilátero.

A atividade seguinte deve ser realizada em dupla (Figura 16), considerada também importante, visto que exige do aluno relacionar o ponto notável do triângulo e sua propriedade, além de requerer que o aluno mobilize seus conhecimentos sobre construções geométricas para determinar o local onde deve ser construído o poço artesiano.

38 Em um sítio moram três famílias, que ocupam as casas indicadas no esquema por A, B e C. Pretende-se construir um poço artesiano que fique à mesma distância de cada uma das casas.



Em que local o poço artesiano deve ser construído? Junte-se a um colega e conversem acerca dos procedimentos utilizados para resolver essa questão.

Figura 16: Atividade envolvendo a construção do circuncentro do triângulo ABC

Souza e Pataro p. 224

A terceira atividade que difere das demais por trabalhar com instrumentos de construções geométricas apresenta um mesmo teorema tratado no livro de Ribeiro analisado anteriormente: o Teorema de Napoleão. Nesta obra, o autor permite que o aluno participe da atividade validando o teorema enunciado. Na

verdade, o aluno é convidado a construir um triângulo ABC qualquer e validar o teorema para aquele triângulo construído, o que Balacheff classifica como empirismo ingênuo categorizado como prova pragmática.

39 Contexto

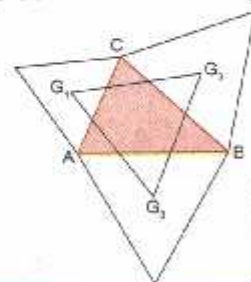
O general francês Napoleão Bonaparte (1769–1821), além de ter sido um notável estrategista de guerra, demonstrava grande interesse pela Matemática, em particular pela Geometria. Napoleão era amigo de vários matemáticos, como Lorenzo Mascheroni (1750–1800) e Gaspard Monge (1746–1818).

Entre as contribuições de Napoleão à Matemática, podemos destacar a demonstração para o teorema enunciado a seguir.



general Napoleão Bonaparte

Dado um $\triangle ABC$ qualquer, se construirmos três triângulos equiláteros, tendo como base cada um dos lados do $\triangle ABC$, então o triângulo cujos vértices são os baricentros dos triângulos equiláteros também será equilátero.



Construa um $\triangle ABC$ qualquer e verifique a validade desse teorema.

Figura 17: O Teorema de Napoleão

Souza e Pataro p. 224

Finalizando a verificação desta obra quanto ao tratamento dado ao tema Pontos Notáveis de um triângulo podemos concluir que nas construções apresentadas para conceituar os pontos notáveis o autor não estabelece uma relação entre procedimentos e propriedades geométricas presentes nas construções. Quanto às atividades apresentadas, somente 25% delas requeriam o uso de instrumentos de construções geométricas e, mesmo assim, não levavam à demonstração geométrica de maneira a dar ênfase ao conteúdo de Geometria.

2.3 – Tudo é Matemática 8º ano – Dante

O autor desta obra inicia o tema deste trabalho tratando das medianas, bissetrizes e alturas como elementos dos triângulos. A organização dos conceitos e atividades se difere dos outros dois livros analisados porque os conceitos não são apresentados todos na sequência. Um conceito é dado e, em seguida, são

apresentadas atividades que tratam daquele conceito; só então um novo conceito é discutido.

A mediana é definida como o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Uma das três atividades trazidas na sequência trabalha a construção de um triângulo com a medida de cada lado dada para construção de uma das três medianas. As demais atividades não exigem construção, são questionamentos como “quantas medianas possuem um triângulo?”.

A definição seguinte traz a bissetriz de um triângulo como o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo interno ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice. A primeira atividade que segue essa definição e a única que utiliza régua e transferidor sugerindo a construção de um triângulo ABC no qual $m(\overline{AB}) = 6\text{cm}$, $m(\hat{A}) = 50^\circ$ e $m(\hat{B}) = 70^\circ$ para o traço da bissetriz \overline{BS} . A atividade seguinte trata de uma conversa em dupla para responder à pergunta “Quantas bissetrizes há um triângulo?” e a última atividade antes da próxima definição é apresentada como um “desafio” que trabalha os conhecimentos algébricos envolvendo a bissetriz de um triângulo

A altura de um triângulo é conhecida empiricamente pelo aluno e retomada pelo autor onde ele a define e a ilustra em triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.

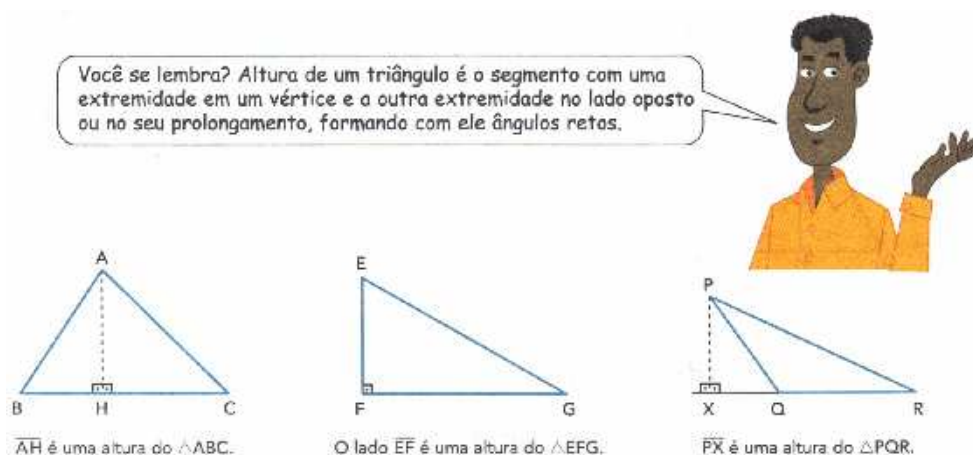


Figura 18: Ilustração da altura relativa à base em triângulos

Diferentemente da abordagem feita pelos livros analisados anteriormente, nesta obra a localização do ponto de encontro das três alturas em diferentes tipos de triângulo deve ser investigada pelos alunos por meio de uma atividade em equipe. Ainda não há indícios do uso do compasso para construção das alturas na atividade, provavelmente haja apenas o uso do esquadro. Embora seja uma construção geométrica que mobiliza poucas definições já apreendidas pelo aluno, é uma atividade que o incentiva a investigar e valoriza o trabalho em equipe, bem como as estratégias para o aprendizado. Seguem mais três atividades até a última que traz pela primeira vez nesta seção de atividades a demonstração de uma propriedade.

98 O triângulo da figura ($\triangle ABC$) é isósceles de base \overline{BC} e o segmento \overline{AM} é sua mediana. Demonstre que \overline{AM} é também bissetriz e altura desse triângulo, ou seja, demonstre a seguinte propriedade:

Em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.



Figura 19: Atividade envolvendo demonstração de propriedade

Dante p. 188

A atividade descrita acima poderia ser enriquecida se fosse aliada a construção do triângulo isósceles ABC e sua mediana, bissetriz e altura relativa à base. O triângulo pronto exclui a possibilidade de construção que permite ao aluno verificar e constatar a veracidade da afirmação, o que poderia contribuir com a mobilização dos conhecimentos geométricos necessários para a demonstração.

O tópico Pontos Notáveis de um Triângulo é introduzido já apresentando-os como ortocentro, incentro, baricentro e circuncentro. A definição e ilustração do ortocentro em triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo não se diferenciam das definições apresentadas nos livros didáticos já analisados neste trabalho. A respeito das duas atividades que decorrem dessa definição, a primeira valoriza a Aritmética e a segunda solicita que, em equipe, sejam construídos triângulos

acutângulo, retângulo e obtusângulo para localizar em cada um deles o ortocentro utilizando régua e transferidor ou régua e esquadro. A atividade é interessante por trabalhar a construção geométrica, mesmo sem o uso do compasso, e finalizada com uma conversa entre os colegas da equipe para estabelecer a relação existente entre o tipo do triângulo e a posição do ortocentro.

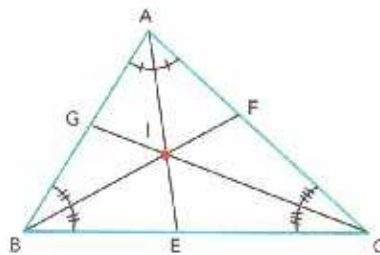
Para trabalhar o incentro de um triângulo, o autor pede que ao aluno examine uma figura onde as bissetrizes de um triângulo acutângulo ABC já estão traçadas e o incentro indicado.

▼ INCENTRO DE UM TRIÂNGULO

Agora examine a figura abaixo.

Veja o que acontece com as três bissetrizes do $\triangle ABC$: elas se cruzam no mesmo ponto, chamado *incentro*.

- \overline{AE} é bissetriz do $\triangle ABC$.
- \overline{BF} é bissetriz do $\triangle ABC$.
- \overline{CG} é bissetriz do $\triangle ABC$.
- I é o incentro do $\triangle ABC$.



Assim:

Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado *incentro* do triângulo.



Há algum motivo para esse nome: *incentro*?

É porque *incentro* é o centro da circunferência inscrita no triângulo, ou seja, da circunferência que toca cada lado do triângulo em um único ponto.

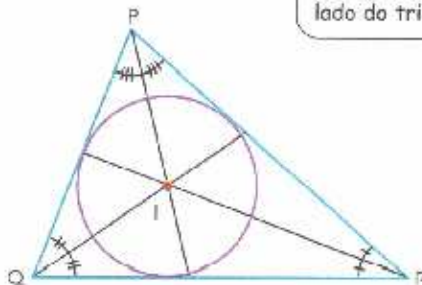


Figura 20: Incentro de um triângulo

Dante p. 189

A nomenclatura incentro poderia ser investigada pelo aluno junto das propriedades necessárias para construção geométrica das bissetrizes de um triângulo e, em seguida, analisar qual a medida do segmento para determinar o raio da circunferência inscrita no triângulo e assim traçá-la, o que não acontece na introdução nem nas atividades seguintes.

Ao discorrer sobre o baricentro de um triângulo, o autor diferencia sua abordagem daquelas apresentadas nos livros anteriores por trazer o baricentro também como o ponto que divide a mediana na razão de 1 para 2 em qualquer triângulo. Embora a razão seja apenas estabelecida, sem a participação do aluno para investigá-la, tal propriedade não havia sido sequer citada nas outras obras.

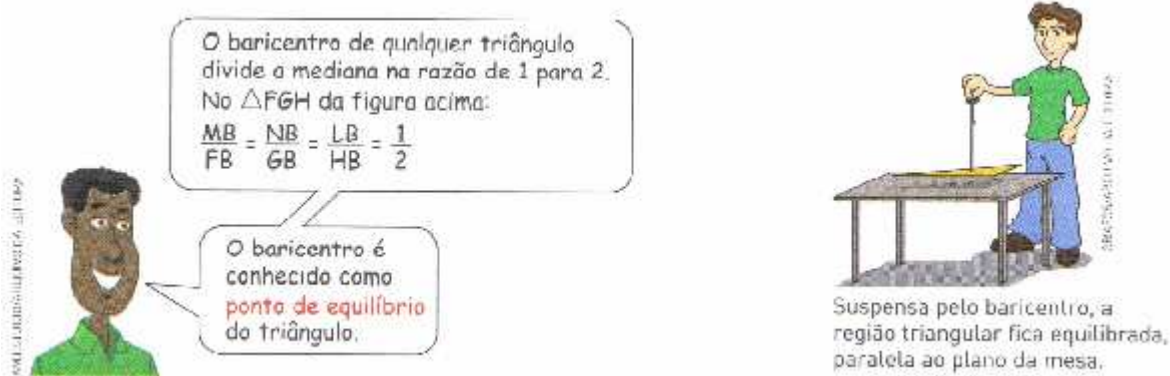


Figura 21: Baricentro de um triângulo e a divisão da mediana na razão 1:2

Dante p. 190

Antes de abordar o circuncentro de um triângulo, a mediatriz de um segmento de reta é definida numa atividade como a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio. A ilustração apresentada traz além da figura prototípica àquelas trazidas nos livros didáticos a representação de um arco e flecha como um segmento e a respectiva mediatriz.

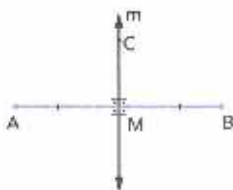
A ideia de ponto médio é retomada, visto que a representação do arco e flecha traz o arco perpendicular à flecha, mas não exatamente pelo ponto médio.

A atividade proposta é importante para investigar se o conceito de mediatriz foi realmente apreendido pelo aluno. A atividade requer que o aluno identifique a mediatriz dentre três figuras justificando sua resposta. No item a, a reta r é perpendicular ao segmento \overline{EF} , mas não passa pelo ponto médio do

segmento. O item b traz a reta r concorrente ao segmento \overline{EF} passando pelo ponto médio do segmento, mas somente no item c há a reta r perpendicular ao segmento \overline{EF} pelo ponto médio do segmento.

105 MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO DE RETA

Dado um segmento de reta de extremidades **A** e **B**, chama-se *mediatriz* de \overline{AB} a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio.



- m é mediatriz de \overline{AB} .
- $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ e \hat{CMB} é reto.

Lembre-se de que o ponto médio divide o segmento de reta em duas partes congruentes, ou seja, em duas partes de medidas iguais.



Você entendeu o que é mediatriz de um segmento?

Das três figuras abaixo, em qual delas a reta r é mediatriz de \overline{EF} ? Justifique sua resposta.

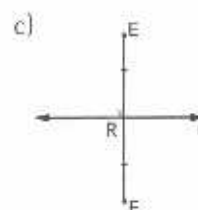
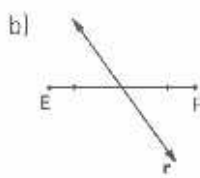
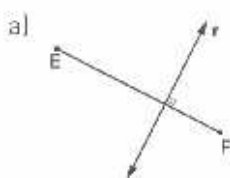


Figura 22: Mediatriz de um segmento de reta

Dante p. 191

Podemos perceber que até agora a obra analisada não trouxe atividades que priorizam o uso das propriedades envolvidas nos Pontos Notáveis de um Triângulo valorizando a Geometria e que trabalham efetivamente a construção geométrica utilizando o conjunto régua, transferidor e compasso. A primeira que utiliza régua e compasso aparece no traçado da mediatriz, mas que mais uma vez se reduz a analisar figuras e reproduzir passos. Há um incentivo à discussão

entre os alunos, mas apenas sobre a abertura que deve ter o compasso para o traçado da mediatriz de um segmento e não sobre todo o processo de construção.

Nas atividades seguintes o aluno deve utilizar régua e compasso para construir retas paralelas, traçar a mediana relativa a um dos lados de um triângulo e desenhar um triângulo qualquer para localizar nele o baricentro.

106 TRAÇADO DA MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO COM USO DE RÉGUA E COMPASSO

Analise esta sequência de figuras. Em seguida, reproduza-a em seu caderno. **Converse com os colegas** sobre qual deve ser a abertura do compasso.

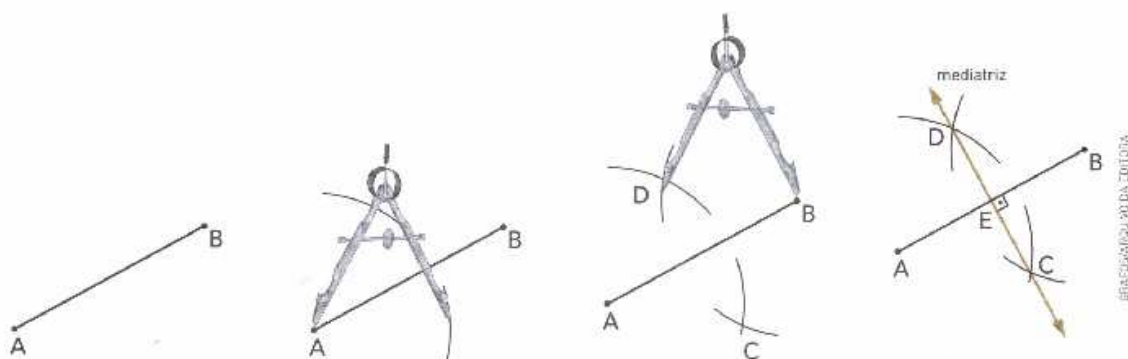



Figura 23: Passos para o traçado da mediatriz de um segmento de reta

Dante p. 191

Por último, um desafio propõe que o aluno demonstre uma proposição. Almouloud e Mello (2000) trazem no seu trabalho de pesquisa a importância de favorecer o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

“Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria”.

Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos.” (ALMOULOU e MELLO, 2000, p. 2).



*Faça a demonstração da seguinte proposição:
Se P é um ponto da mediatriz (m) de \overline{AB} , então P é equidistante de A e B , ou seja, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.*

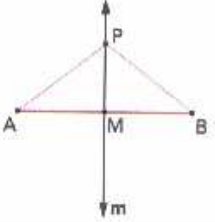


Figura 24: Demonstração de uma proposição


Dante p. 192

A atividade ajuda o professor a verificar se o aluno se apropriou do conceito de semelhança de triângulos. A ilustração trazida junto do desafio facilita a visualização de semelhança entre os triângulos PAM e PBM pelo caso LAL, já que traçando os segmentos \overline{PA} e \overline{PB} obtemos o ΔPAM e o ΔPBM que têm $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ (lado comum), $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ (M é o ponto médio de \overline{AB}); $\widehat{PMA} \cong \widehat{PMB}$ (ângulos retos) e, portanto $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

A introdução ao estudo do circuncentro enceta-se por meio de um problema em que o prédio de uma agência bancária deve ser construído num ponto à mesma distância da prefeitura, do fórum e do centro de saúde. Os alunos devem responder à pergunta “onde deve ser construída a agência bancária?”.

A questão é importante para verificar se o aluno é capaz de analisar a situação e buscar nas propriedades referentes aos pontos notáveis de um triângulo aquela que soluciona o problema exposto.

Na página seguinte à questão descrita a solução já é apresentada ao aluno.



Considerando o triângulo de vértices P , F e C (ΔPFC), o ponto B deve ser equidistante de P , de F e de C .

Então, ele deve estar nas mediatrizes dos lados desse triângulo (PF , PC e FC).




Figura 25: Ponto equidistante aos vértices de um triângulo

Dante p. 193

O circuncentro é dado como o ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo e a nomenclatura é justificada com a definição de circuncentro como o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

As seis atividades que seguem a definição de circuncentro são bem elaboradas, dentre as quais, há quatro atividades que devem ser realizadas em dupla e/ ou equipe.

Na primeira delas, os alunos devem relacionar a posição do circuncentro com o tipo do triângulo quanto aos lados; na segunda, devem justificar a afirmação “É sempre possível traçar uma circunferência que passa por três pontos não alinhados?”; na terceira, a dupla deve construir em uma folha sem pauta um triângulo equilátero e nele localizar o ortocentro, o incentro, o baricentro e o circuncentro usando régua e transferidor. A terceira atividade é experimental e permite que os alunos verifiquem e constatem que os quatro pontos (ortocentro, o incentro, o baricentro e o circuncentro) se tratam de um único ponto em um triângulo equilátero.

A quarta atividade é intitulada “Projeto em equipe: Trabalhando com Geometria” e é composta por três itens. São utilizados recortes de jornais e revistas com plantas de um bairro ou de uma cidade para localização de ângulos adjacentes e suplementares, ângulos opostos pelo vértice, ângulos formados por paralelas cortadas por uma transversal, triângulos e quadriláteros. No último item, os alunos devem fazer uma pesquisa sobre demonstração em Matemática apresentando exemplos ainda não vistos.

O capítulo ainda traz a “Revisão Cumulativa”, mas nenhuma atividade trata de construções geométricas. Para encerrar, há a seção “Para ler, pensar e divertir-se” onde é apresentado o texto Geometria Demonstrativa trazendo tópicos da história da matemática que mostram Tales de Mileto como o fundador da Geometria Demonstrativa.

2.4 – Movimento do Aprender 9º ano – SESI/ SP

Como já descrito no início desta pesquisa, há um ano o material de apoio às aulas na Rede Escolar SESI de Ensino é o Movimento do Aprender acompanhado do Fazer Pedagógico para o professor.

Durante um ano letivo, o professor deve trabalhar com seus alunos todas as “Expectativas de Ensino e Aprendizagem” determinadas pela gerência de currículos e programas para aquele ano.

Uma das expectativas de ensino e aprendizagem que deve ser trabalhada no 9º ano do Ensino Fundamental na rede escolar SESI está transcrita a seguir:

“Fazer uso de instrumentos de medida como régua, compasso, esquadro, transferidor etc., para efetuar a construção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares, das alturas e medianas de um triângulo, de alguns ângulos notáveis e de segmentos divididos em partes proporcionais” (Expectativas de Ensino e Aprendizagem - Ensino Fundamental Matemática, 2011, p. 9)

Essa expectativa de ensino e aprendizagem é tratada na unidade 7 do Movimento do Aprender – 9º ano – intitulada “Noções de desenho geométrico”, a qual será analisada neste trabalho.

A unidade é iniciada com a “Roda de Conversa” que, segundo o Fazer Pedagógico, visa avaliar o conhecimento que os alunos têm sobre o assunto e assim permitir que se elaborem estratégias mais adequadas para a efetiva aprendizagem e a consecução das expectativas de ensino.

Quatro questões iniciam a Roda de Conversa:

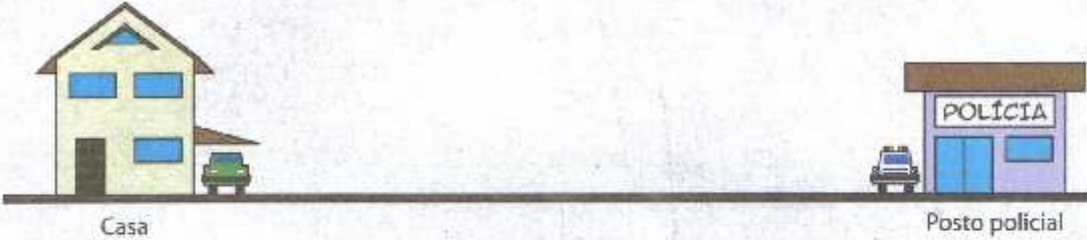
- Quais instrumentos que você conhece são utilizados para construções e medições de figuras geométricas?
- Você conhece os significados das palavras mediatriz, bissetriz e mediana? Em caso afirmativo, descreva ou represente por meio de uma figura o significado de cada uma delas.
- Quais os significados das palavras paralelismo e perpendicularismo? Descreva-os ou represente por meio de figuras.
- O que você entende por altura de um polígono? Descreva ou represente por meio de figuras.

Apesar de ser evidente, o necessário e importante trabalho de levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos antes de iniciar um novo assunto, nenhum dos livros didáticos analisados anteriormente propôs questões que subsidiassem esse trabalho.

O aluno fará uso de régua, transferidor e compasso na unidade 7 do material do aluno que traz 20 atividades envolvendo os pontos notáveis de um triângulo e suas propriedades, além de conceitos geométricos utilizados nesse campo do conhecimento. O material não apresenta conceitos, apenas as atividades. No Fazer Pedagógico, material de orientação ao professor, há indicação de quais objetos de conhecimento devem ser conceituados numa determinada atividade e cabe ao professor pesquisar e compor essa conceituação de forma clara e objetiva.

A primeira atividade proposta ao aluno trabalha a ideia de mediatriz, mas ainda sem conceituá-la. Trata-se de instalar uma antena que esteja equidistante a uma casa e a um posto policial.

1 Abaixo se vê a representação de um trecho de estrada em linha reta.



Uma antena deve ser instalada na estrada de modo que fique à mesma distância da casa e do posto policial.

- Determine a posição da antena de acordo com a informação dada e esboce a figura do aparelho.
- As ondas emitidas percorrem uma distância maior até a casa ou até o posto?
- Há outros lugares, mesmo fora da estrada, em que se possa instalar a antena de modo que ela esteja à mesma distância da casa e do posto policial? Represente dois destes lugares no desenho anterior.

Figura 26: Ideia de mediatriz

Movimento do Aprender p. 90

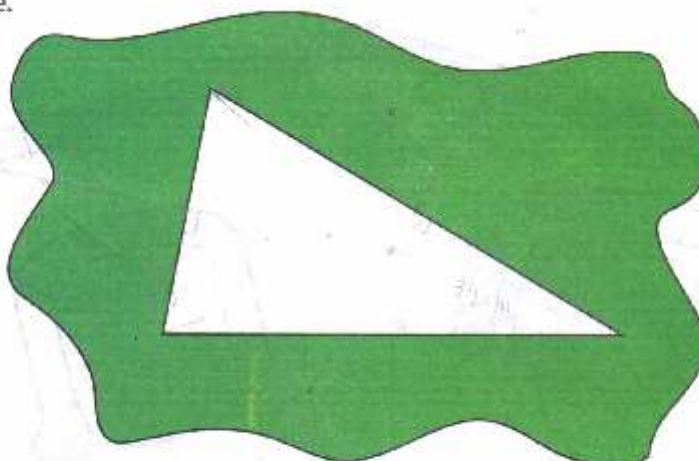
A segunda atividade traz a representação de uma circunferência de centro O e diâmetro \overline{AB} para que o aluno trace uma corda de modo que seus infinitos pontos equidistam dos extremos do diâmetro \overline{AB} descrevendo os procedimentos que adotou. Em seguida, o aluno deve usar um compasso para

centrá-lo em A e marcar dois pontos sobre a corda traçada, um acima de \overline{AB} e outro abaixo do segmento para então verificar qual a distância desses pontos até B.

A atividade seguinte solicita que o aluno considere o pentágono regular ilustrado e as ideias trabalhadas até o momento para determinar o centro do pentágono e descrever os procedimentos utilizados.

Percebemos certa preocupação em trabalhar ideias relacionadas à mediatriz de um segmento para então construir tal definição, o que acontece só na quarta atividade, onde o professor intervém para discutir um processo de construção da mediatriz e suas propriedades.

4. Você deve instalar um bebedouro em uma praça na forma de um triângulo, dentro de um parque.



- O ponto do bebedouro deve ser equidistante dos vértices do triângulo que representa a praça. Use régua e compasso para determinar o ponto.
- Desenhe um triângulo qualquer e peça que seu colega trace as mediatrizes usando instrumentos de desenho.

Figura 27: Mediatriz dos lados de um triângulo

Movimento do Aprender p. 91

A ideia de ortocentro começa a surgir na atividade 5 que traz a mesma figura ilustrada na atividade 4 para que o aluno construa, utilizando régua e compasso, a altura relativa a um dos lados e calcule a área da região triangular. Logo depois, as demais alturas devem ser construídas para analisar se há algum

ponto comum entre elas. Para se determinar a altura relativa a um dos vértices do triângulo, o problema consiste em construir a perpendicular a uma reta r , por um ponto P não pertencente a ela. Nessa atividade, o professor é orientado pelo Fazer Pedagógico a avaliar as estratégias utilizadas pelos alunos, sociabilizá-las e depois sistematizar o processo de construção geométrica.

Nas atividades 6 e 7 são utilizados os mesmos procedimentos: avaliar estratégias, sociabilizá-las e sistematizá-las, mas agora para construção geométrica e conceitual da bissetriz. A atividade 7 sugere o traço da perpendicular a uma reta passando pelo ponto O pertencente a ela e, depois, a bissetriz de cada ângulo reto associando os traçados ao movimento que as abelhas fazem para informar a posição do alimento ao restante da colmeia.

A atividade 8 trabalha o uso da régua e compasso para obter o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo acutângulo dado e incentiva o aluno a inferir sobre uma propriedade que esse ponto possui. A localização do incentro de acordo com o tipo do triângulo não é discutida em nenhuma das atividades, cabe ao professor complementar a atividade 8 com discussões em sala e, se possível, trabalhar com os alunos no laboratório de informática utilizando um software de geometria dinâmica.

A apropriação do uso das tecnologias de informação e comunicação no campo escolar se faz necessária no desenvolvimento de sequências didáticas que valorizem o desenvolvimento cognitivo dos alunos incentivando-os à pesquisa, à investigação para inferir sobre suas hipóteses e construir argumentações consistentes, visto que

[...] um programa de GD possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com régua e em função desta possibilidade de alterar objetos preservando-se a construção, podemos dizer que a GD é uma geometria do tipo 1-construção, N-testes, enquanto a tradicional de régua e compasso é do tipo 1-construção, 1-teste o que seria praticamente impossível com régua e compasso (Isotani, Brandão, 2006, p.121, *apud* Oliveira, 2009).

As atividades 9 e 10 propõem a construção da planta arquitetônica de uma casa e ruas de um bairro, respectivamente, ambas incluindo paredes e ruas perpendiculares e paralelas com o uso da régua e do compasso.

Na próxima atividade, o compasso é utilizado para encontrar os pontos médios dos lados de um triângulo. Como se trata do mesmo procedimento utilizado para construção da mediatriz, agora sem a necessidade de traçar esta reta, o aluno não terá problemas para localizar o ponto médio de cada lado do triângulo. Desta vez, cada ponto médio deverá ser unido ao vértice oposto no triângulo ABC considerado e, em seguida, uma pesquisa é sugerida sobre o nome desses segmentos e do ponto de intersecção desses segmentos, o que diferencia a atividade daquelas apresentadas nos livros já analisados neste trabalho que exclui o processo de pesquisa ao apresentar as definições prontas.

11 Determine, usando o compasso, os pontos médios R , S e T dos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, e com uma régua una cada ponto médio ao vértice oposto no triângulo a seguir. Indique o ponto P , em que esses segmentos se cruzam.

- Pesquise o nome desses segmentos com extremidade no vértice do triângulo e no ponto médio do lado, e o nome do ponto de intersecção dos segmentos.

- Calcule as razões:

$$\frac{AP}{PS} =$$

$$\frac{BP}{PT} =$$

$$\frac{CP}{PR} =$$

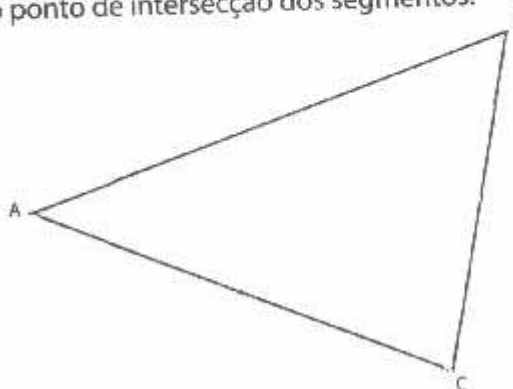


Figura 28: Medianas e a razão 1:2

Movimento do Aprender p. 94

No último item ainda da atividade 11, discute-se sobre a propriedade do baricentro: o segmento com extremos no baricentro e no ponto médio mede a metade do comprimento do segmento com extremos no baricentro e no vértice.

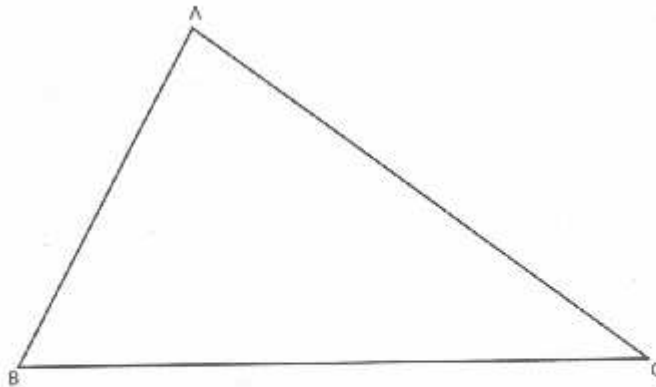
A atividade 12 deve ser realizada em dupla e propõe a localização do baricentro em triângulos quaisquer desenhados pelos alunos para mostrar que a propriedade do baricentro não se aplica somente ao caso particular da atividade anterior.

O circuncentro de um triângulo é retomado nas atividades 13 e 14 destacando-se a generalização por meio de construções de triângulos quaisquer e da obtenção do circuncentro. As atividades 15 e 16 seguem utilizando as mesmas estratégias para incentivar os alunos a generalizações relacionadas ao incentro de um triângulo.

Na atividade 17 propõe-se a divisão não exata da medida de um segmento onde os alunos podem adotar um valor aproximado. Uma nova pergunta compõe a atividade: como seria feita a divisão se não houvesse uma régua graduada. Assim, os alunos são sensibilizados para a necessidade de um novo procedimento, a divisão geométrica de um segmento de reta em partes proporcionais. A atividade seguinte apresenta o método geométrico de construção para a refacção da atividade 17. Na atividade 19 o aluno faz uma comparação entre as atividades 17 e 18, ou seja, ele valida o processo para a divisão geométrica de um segmento de reta em partes proporcionais.

A atividade 20 finaliza a seção das atividades e permite que os alunos ampliem seus conhecimentos fazendo a divisão em partes proporcionais dos lados do triângulo associando-a com a posição do baricentro, além de constatar que os pontos P, Q e G são colineares.

20 Considere o triângulo ABC.



- Determine, utilizando instrumentos de desenho, os pontos P e Q tais que $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1}$ e $\frac{AQ}{QC} = \frac{2}{1}$.
- Obtenha o baricentro G do triângulo.
- Qual a posição relativa dos pontos P , Q e G ?

Figura 29: Medianas relativas aos lados de um triângulo

Movimento do Aprender p. 96

A unidade 7 é encerrada com a seção “O que aprendi sobre...” que traz os seguintes questionamentos sobre o conteúdo estudado para serem discutidos com os alunos:

- Quais são os centros de um triângulo? E quais as propriedades de cada um deles?
- Qual a propriedade dos centros de um triângulo equilátero?
- Qual a utilização da divisão geométrica de um segmento em partes proporcionais?
- Relacione o nome de algumas construções geométricas e a respectiva propriedade.

A seção se faz importante por retomar ideias, conceitos e propriedades de todo conteúdo trabalhado e assim fechando o tema discutido.

2.5– Comentários sobre as análises

O tema Pontos Notáveis de um Triângulo é apresentado nos dois primeiros livros analisados de modo a valorizar os conteúdos aritmético e algébrico não

articulando esses saberes com outros campos da Matemática. A tentativa de integrar as Construções Geométricas ao ensino da Geometria mostra-se ineficaz ao apresentar construções geométricas prontas seguidas de passos para serem reproduzidos em que o aluno não é incentivado a inferir, justificar, argumentar, conjecturar e validar suas hipóteses.

O mesmo tema é abordado no livro Tudo é Matemática (8º ano) trazendo, além das atividades com enfoque algébrico, atividades que estimulam o aluno a fazer pequenas e simples deduções ou demonstrações lógicas o que o diferencia dos demais analisados. Também sugere ao professor o uso do software educacional *Cabri Géomètre II* apresentando no manual pedagógico do professor algumas ferramentas deste programa interativo.

O Movimento do Aprender (9º ano) é um material que foi desenvolvido recentemente e propõe na unidade 7, a qual traz o tema em estudo, atividades que associam as Construções Geométricas ao ensino da Geometria incentivando o aluno a comparar (discussões em grupo), analisar, justificar, generalizar, fazer analogias e validar hipóteses sobre as propriedades dos pontos notáveis de um triângulo. Apesar de apresentar atividades importantes para o desenvolvimento do conhecimento geométrico, em nenhuma delas é dada ao aluno a oportunidade de trabalhar com prova e demonstração sendo estas, competências indicadas nos Referenciais Curriculares da Rede SESI – SP e nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental (1998):

Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração.

Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.

Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (PCN, 1998, p. 70 – 71)

Sendo assim, percebemos que ainda há um longo caminho para que os livros didáticos abordem conceitos e atividades relacionadas às Construções Geométricas contribuindo efetivamente com a argumentação do conhecimento geométrico.

Capítulo 3

As fases da Engenharia Didática

Segundo Machado (2008, p. 238), a primeira fase da metodologia da engenharia didática – análises preliminares – *são feitas em considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, bem como sobre:*

- a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
- a análise do ensino atual e de seus efeitos;
- a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução;
- a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

Na segunda fase, a análise *a priori*, o pesquisador deve iniciar o estudo das variáveis didáticas. As variáveis relevantes do problema em estudo, chamadas de variáveis de comando, foram diferenciadas em *variáveis macrodidáticas* ou globais e *variáveis microdidáticas* ou locais para facilitar a análise de uma engenharia, onde:

- variáveis macrodidáticas ou globais, concernentes à organização global da engenharia;
- variáveis microdidáticas ou locais concernentes à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase. (ARTIGUE, 1988, apud Machado, 2008, p. 241)

Almouloud (2010) descreve a experimentação, terceira fase da engenharia didática, como o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade. Complementando essa fase, segue a última delas: análise *a posteriori* e validação, a qual Machado (2008, p. 246)

apresenta como a fase que se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos alunos em classe ou fora dela.

Finaliza essa metodologia a confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* para ratificar ou retificar as hipóteses formuladas no início do trabalho.

3.1 Análises preliminares e *análise priori*

De acordo com as fases da metodologia da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988, *apud* Machado, 2008, p. 238), as análises preliminares – primeira fase desse processo experimental – *são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão*. Sendo assim, essas análises foram realizadas ao examinarmos e constataremos o problema com o ensino da Geometria desde o Movimento da Matemática Moderna, o qual deixou resquícios até hoje. Complementamos a análise ao tratarmos da abordagem do tema em estudo nos livros didáticos atuais e a partir desses entraves fazer a escolha da sequência didática aplicada.

Na fase da análise *a priori*, cabe ao pesquisador descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática a ser desenvolvida (Almouloud, p. 176, 2010). Assim, as variáveis presentes neste trabalho de pesquisa se concentram em: o uso do *software Geogebra*; o trabalho em grupo; utilização dos instrumentos de construções geométricas régua, transferidor e compasso e o enunciado das atividades.

3.2 As variáveis didáticas

As justificativas para a escolha das variáveis didáticas utilizadas no desenvolvimento das atividades de construções geométricas contidas na sequência didática apresentada na dissertação de mestrado de Oliveira (2009) são descritas nos itens a seguir.

3.2.1 O uso do *software Geogebra*

O uso de um *software* matemático de geometria dinâmica em algumas atividades de construções geométricas como o *Geogebra* propicia ao aluno uma visão mais abrangente, visto que o *software* permite a manipulação das representações dos objetos.

Ao investigar uma propriedade em diferentes tipos de triângulos, por exemplo, dispondo de papel e instrumentos como régua, transferidor e compasso, o aluno deveria realizar várias construções tornando o trabalho de investigação enfadonho, enquanto que usando o *software* o aluno pode construir apenas um triângulo e, deslocando os pontos dos vértices do triângulo, realiza a investigação e análise das propriedades nos diferentes tipos de triângulos.

No trabalho de Gravina e Santarosa (1998) encontramos que

“as novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais.” (1998, p. 79)

Duas atividades da sequência didática aplicada foram desenvolvidas no laboratório de informática utilizando o *software* de geometria dinâmica *Geogebra*, já que nessas atividades o *software* trouxe vantagens em relação ao desenvolvimento no papel por permitir que o aluno movimentasse as figuras em diversas direções, comparasse e voltasse ao aspecto inicial.

3.2.2 O trabalho em grupo

Para a discussão do tema deste trabalho e a investigação da evolução na argumentação apresentadas nas justificativas dos alunos deveríamos dispor de apenas 8 aulas para não comprometer o desenvolvimento de outras expectativas

de ensino e aprendizagem previstas para o mesmo ano letivo. Analisando a melhor organização dos alunos para o trabalho, Abrantes afirma que

[...] Uma outra dificuldade, de outro tipo, tem a ver com o facto de não se poder esperar uma evolução significativa dos alunos em pouco tempo. O tipo de trabalho aqui delineado requer tempo e persistência, visto que lida essencialmente com a necessidade de mudar aspectos centrais da cultura tradicional da aula de Matemática. Actividades matemáticas de tipo investigativo, quando realizadas de modo isolado ou esporádico, podem ser interessantes no momento mas não abalam, só por si, concepções e práticas muito enraizadas. (ABRANTES, 1999, p. 14)

Também nos firmamos nas pesquisas de PONTE para organizar os alunos em grupo:

[...] o trabalho de grupo é o que melhor se adequa à realização de actividades de investigação/exploração. O trabalho em pequeno grupo permite atingir objectivos que dificilmente serão alcançados com o trabalho individual ou com o trabalho em grande grupo: cooperação, interajuda, trabalho em equipa, organização. Dá ainda espaço para reflectir sobre as ideias dos outros e para explicar e verificar o seu raciocínio. No entanto, a realização de uma tarefa de investigação/exploração com toda a turma (experiência realizada pela primeira vez), parece-me ter tido o mérito de permitir um alargamento das descobertas. A estratégia utilizada por um aluno, para uma dada descoberta, é utilizada por um maior número de colegas para gerar novas descobertas. Esta estratégia permitiu ainda que os alunos assumissem individualmente as suas intervenções, o que é bastante importante para o processo de ensino-aprendizagem. (PONTE, 1998, p. 6)

3.2.3 Os instrumentos de construções geométricas régua, transferidor e compasso

No trabalho de ZUIN (2001), o autor de livros didáticos de Desenho Geométrico para o Ensino Fundamental e Médio Putnoki acredita que

[...] não há Geometria sem Régua e Compasso. Quando muito, há apenas meia Geometria, sem os instrumentos euclidianos. A própria designação Desenho Geométrico me pareça inadequada. No lugar, prefiro Construções Geométricas. Os problemas de construções são parte integrante de um bom curso de Geometria. O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de “concretização”. Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem “experimentar”. Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas. (*apud* ZUIN, 2001, p. 177)

Dessa forma, os instrumentos de construções geométricas régua e compasso são indispensáveis no desenvolvimento das atividades que constituem a sequência didática a ser analisada, mesmo com a disposição de um software de geometria dinâmica.

Schumann e Green (1994) afirmam que

Desenhar lugares geométricos recorrendo ao Cabri-géomètre e fazê-lo usando ferramentas convencionais sobre papel envolve perícias e experiências bastante diferentes. É incorreto depreciar a abordagem tradicional – ambos os métodos, o tradicional e o informático são válidos. A escolha da ferramenta depende dos objectivos (SCHUMANN e GREEN, *apud* Araújo, 2010, p. 30)

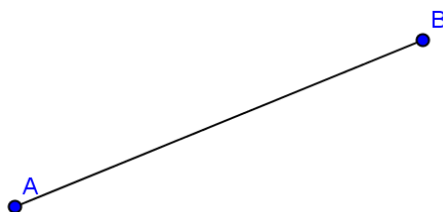
3.2.4 O enunciado das atividades

As atividades de Geometria que compõem a sequência didática apresentada no trabalho de pesquisa de Oliveira (2009) trazem enunciados em que o aluno deve realizar construções geométricas e, em seguida, validar o procedimento realizado fazendo uso de seus conhecimentos geométricos desenvolvendo a argumentação. Assim, 12 atividades dessa sequência didática foram escolhidas para aplicação e investigação.

3.3 Breve análise *a priori* da sequência didática

A 1ª atividade objetiva a construção da mediatriz de um segmento utilizando régua e compasso. Espera-se que os alunos busquem um novo procedimento para traçar a mediatriz de um segmento, agora usando o compasso, já que estavam habituados a traçar retas perpendiculares apenas com o esquadro. Além disso, a atividade apresenta um segmento que se difere dos segmentos de reta horizontais que aparecem na maioria dos livros didáticos com a intenção de mostrar ao aluno que a perpendicular não é sempre um segmento vertical.

1ª Atividade: Com o uso da régua e compasso encontre o ponto médio do segmento \overline{AB} . Desenhe usando régua e compasso o segmento perpendicular a \overline{AB} passando pelo seu ponto médio.



Quadro 1. 1ª Atividade construção da mediatriz de um segmento

Ao propor a 2ª atividade, pretendemos trabalhar com o conceito de lugar geométrico e iniciar a formalização e apropriação do conceito de mediatriz, além de incentivar os alunos a justificarem suas respostas e assim organizarem suas ideias. Provavelmente os alunos utilizem a régua para verificar e comprovar que a construção realizada se diz respeito à mediatriz do segmento \overline{AB} , o que poderá caracterizar as justificativas em empirismo ingênuo.

2ª Atividade: A mediatriz de um segmento \overline{AB} é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos pontos A e B. O que você construiu é a mediatriz do segmento \overline{AB} ? Como você justifica sua resposta?

Quadro 2. 2ª Atividade: a definição de mediatriz de um segmento

Ao propor a atividade seguinte, esperamos que os alunos se apropriem do conceito de mediatriz explorando a construção realizada na primeira atividade e utilizem a régua para validar a propriedade em jogo, além de mais uma vez, valorizar as justificativas de suas afirmações, as quais poderão ser situadas no empirismo ingênuo por utilizar medidas para confirmações.

3ª Atividade: A mediatriz também pode ser definida como um conjunto de pontos que apresentam alguma propriedade relacionada com a distância. Que propriedade é essa? Justifique sua afirmação.

Quadro 3. 3ª Atividade: Propriedade da mediatriz de um segmento

Na 4ª atividade, poderemos verificar se os alunos realmente se apropriaram do conceito de mediatriz. Esperamos que os alunos identifiquem a construção da mediatriz como solução do problema e assim, encontrem a distância procurada.

4ª Atividade (Problema): Numa certa fazenda, a área destinada ao pasto do gado tem forma triangular, de lados iguais a 5 km, 6 km e 7 km. O proprietário pretende construir um curral num ponto equidistante dos vértices desse triângulo. A que distância aproximada de cada vértice ficará o curral? (Adaptação do exercício retirado do artigo Construção da mediatriz de um segmento: um exemplo de aprendizagem significativa Marina Menna Barreto, UFRGS, pág. 5)

Quadro 4. 4ª Atividade: Ponto de encontro das mediatrizes relativas aos lados de um triângulo

A 5ª atividade fará parte de uma nova sessão onde pretendemos apresentar o conceito de bissetriz propondo uma atividade de construção que utiliza os instrumentos régua e compasso. Esperamos que os alunos observem e analisem os procedimentos envolvidos, além de notar que os lados de um ângulo podem ser formados por segmentos de medidas diferentes.

5ª Atividade: Para o ângulo abaixo construa a bissetriz, obedecendo aos passos dados:

1. Com centro no vértice do ângulo e raio qualquer, convenientemente grande, descreve-se um arco de circunferência C_1 , o qual intersecta os lados nos pontos A e B.

2. Com centro em A e com uma abertura qualquer, descreva um arco de circunferência C_2 .

3. Repita o processo agora com centro em B, usando a mesma abertura, e trace o arco C_3 .

4. Marque a interseção dos arcos C_2 e C_3 e chame de P.

5. Trace a semirreta de origem O passando por P.

Quadro 5. 5ª Atividade: Construção da bissetriz

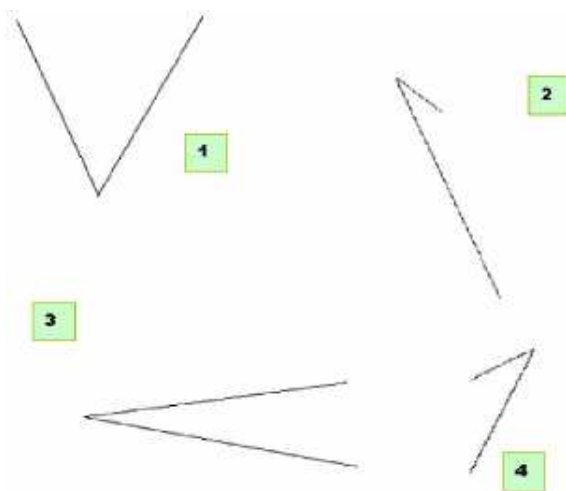
O desenvolvimento desta atividade provavelmente influenciará a resolução da próxima atividade. Esperamos que os alunos identifiquem, na 6ª atividade, a bissetriz de um ângulo como o lugar geométrico que equidista dos lados desse ângulo, podendo fazer medições com a régua e mais uma vez atingir o primeiro nível de prova descrito por Balacheff, o empirismo ingênuo.

6ª Atividade: A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico que equidista dos lados desse ângulo. O que foi construído é realmente uma bissetriz?

Quadro 6. 6ª Atividade: Definição de Bissetriz

O objetivo da aplicação da 7ª atividade é verificar a formação do conceito de ângulo para os alunos e mostrar que podemos encontrar a bissetriz em ângulos com medidas de lados diferentes. Provavelmente, alguns alunos aleguem que não é possível encontrar as bissetrizes nos ângulos 2 e 4 pelas medidas distintas dos lados dos ângulos.

7ª Atividade: Em qual(is) desenho(s) de ângulo podemos encontrar a bissetriz?



Quadro 7. 7ª Atividade: Traçado da bissetriz

A atividade seguinte tem como objetivo verificar se o aluno realmente se apropriou da definição de bissetriz e, para isso, o enunciado da atividade não faz referência ao objeto matemático que deve ser construído. Os alunos podem encontrar certa dificuldade por ser uma atividade que não apresenta uma figura no enunciado.

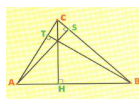
É provável que os alunos desenhem as retas concorrentes, perpendiculares ou não, mas associem a construção do lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância dessas retas à construção da bissetriz de um ângulo, apresentando apenas parte da construção.

8ª Atividade: Desenhe duas retas concorrentes, a reta c e a reta d e construa o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de c e d .

Quadro 8. 8ª Atividade: Lugar geométrico bissetriz

A terceira sessão será iniciada com a 9ª atividade que pretende mostrar ao aluno que um triângulo tem 3 alturas, já que este é um conceito relativo aos seus lados. Ainda inferimos que o conceito de alturas de um triângulo será facilmente compreendido pelos alunos.

9ª Atividade: Dado o triângulo ABC, chamaremos de altura do triângulo relativamente ao lado BC o segmento AS, perpendicular a BC e que passa pelo ponto A, como mostra a figura abaixo.



Observando o desenho podemos afirmar que existe mais que uma altura? Por quê?

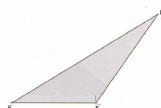
Quadro 9. 9ª Atividade: Alturas relativas aos lados do triângulo

A 10ª atividade terá como subsídio a atividade anterior e esperamos que os alunos construam as alturas do triângulo equilátero com o esquadro. Ao repetir o procedimento no triângulo escaleno, alguns alunos podem encontrar dificuldade, já que duas das três alturas não poderão ser traçadas dentro do triângulo. O objetivo nessa atividade, além do traçado das alturas em diferentes tipos de triângulos, é que os alunos percebam que a mediatriz, a mediana e a altura sempre coincidirão no triângulo equilátero.

10ª Atividade: Construa as alturas dos triângulos abaixo, seguindo os passos apresentados.



- 1) Construa uma reta perpendicular à reta AB passando pelo ponto C.
- 2) Faça o mesmo procedimento para os lados BC e CA.
- 3) Agora repita os procedimentos 1 e 2 no triângulo DEF.



Baseando-se nas suas construções, responda as questões abaixo:

2.1) O triângulo ABC é um triângulo equilátero.

a) Poderemos afirmar que as alturas construídas também são mediatrizes?

b) E ainda, será que elas são também medianas desse triângulo?

c) Explique ou justifique suas respostas.

2.2) Observe o triângulo DEF ele é um triângulo escaleno. O que você construiu foram as alturas do triângulo? Justifique sua resposta.

A última sessão será desenvolvida no laboratório de informática educacional da escola e trata de alguns pontos notáveis do triângulo.

Propondo a 11ª atividade, esperamos sistematizar o conceito de ortocentro oferecendo meios para que o aluno visualize e constate por meio de construções no *software Geogebra* que ponto de encontro das alturas de um triângulo pode estar no interior ou exterior do triângulo. Ao tentar movimentar o ponto O, o aluno perceberá que o ponto O não pode ser movimentado porque foi construído em função das alturas. Caso o aluno não chegue a esse nível de inferência, serão feitos questionamentos para que todos possam se conscientizar que a localização do ortocentro (dentro ou fora do triângulo) depende do tipo do triângulo construído. O nível de prova nessa atividade poderá ser situado até o exemplo genérico, não atingindo a experiência mental, visto que o aluno se apoiará na sua construção para justificar suas respostas.

11ª Atividade: Sabendo que o ortocentro de um triângulo qualquer é o encontro das suas alturas, construa um triângulo qualquer e encontre suas alturas. Esta é uma atividade livre; você poderá usar o que quiser de recursos do Geogebra. Ao encontrar as alturas marque o seu ponto de interseção, chame este ponto de ponto O. Movimente este ponto e responda as perguntas abaixo:

- a) Ao movimentar o ponto O o que aconteceu com o seu desenho? Por quê?
- b) O seu ponto pode estar fora ou dentro do triângulo? Por quê?
- c) Quando o ponto O está fora do triângulo que tipo de triângulo eu tenho?

Quadro 11. Atividade 11: Ortocentro de um triângulo

Na última atividade trataremos do conceito de baricentro, além de explorarmos o conceito de lugar geométrico. A atividade solicita que o aluno marque os vértices de um triângulo sobre uma circunferência para que ao movimentar quaisquer um dos vértices do triângulo, tenhamos um ponto G (baricentro do triângulo) descrevendo uma circunferência.

Inferimos que os alunos não terão dificuldade para responder aos itens a e b, já que a definição de baricentro é apresentada do início do enunciado. Quanto ao item c, apesar de termos trabalhado atividades sobre lugares geométricos, não é fácil perceber que um triângulo sem a circunferência circunscrita não teria um lugar geométrico para o baricentro. É provável que, nessa atividade, os alunos atinjam apenas o primeiro nível de prova descrito por Balacheff.

12ª Atividade: O baricentro de um triângulo é o encontro de suas medianas. Crie uma circunferência e sobre ela marque os pontos A, B e C. Construa o triângulo ABC. Encontre o ponto médio M do lado BC e o ponto médio N do lado AC e, em seguida, construa os segmentos AM e BN.

a) O que significam os segmentos AM e BN relativamente ao triângulo ABC?

b) Esses segmentos se interceptaram em um ponto, chame este ponto de G. Este ponto é o baricentro?

c) Se você mantiver fixos os vértices B e C e variando o vértice A (sempre sobre a circunferência) qual é o lugar geométrico do baricentro G? Exercício adaptado do artigo: Pesquisas de lugares geométricos com o auxílio da Geometria Dinâmica, Carneiro, revista do Professor de Matemática, SBM, pág. 5.

Quadro 12. Atividade 12: Baricentro de um triângulo

3.4 Experimentação e Análise *a posteriori*

A sequência didática foi aplicada numa turma de 32 alunos da 8ª série (9º ano) da Rede Escolar SESI – SP na cidade de Sorocaba – SP, o Centro Educacional SESI 123. Os alunos foram divididos em 8 grupos com 4 alunos e, em cada grupo, havia alunos com diferentes níveis de conhecimento em Geometria. Os alunos realizaram as atividades em 4 sessões de 2 aulas cada

sessão, tendo 50 minutos cada aula. Dentre as sessões, uma se passou no laboratório de informática educacional da escola, as demais, em sala de aula.

Os dados foram coletados e analisados por meio dos registros realizados pelos alunos em folhas, além de anotações próprias durante as discussões dos alunos e análise das construções realizadas no Geogebra salvas em pastas em um diretório comum. Para organizar as análises, nomearemos os oito grupos dos alunos em A, B, C, D, E, F, G e H.

Ao analisarem a 1ª atividade, os alunos se incomodaram com o enunciado solicitando o uso da régua e compasso, mas logo iniciaram uma discussão sobre um processo de construção de retas perpendiculares.

Os alunos do grupo C lembraram um meio utilizado pelo professor do ano letivo anterior para dividir um círculo em quatro quadrantes associando o procedimento à resolução da 1ª atividade proposta.

O procedimento relatado consistia em traçar o diâmetro \overline{AB} de uma circunferência de centro O qualquer, ponta seca do compasso em A, com uma abertura qualquer maior que a medida do segmento \overline{AO} uma semicircunferência é traçada. Este último processo repete-se com a ponta seca do compasso em B e os dois pontos encontrados pelo cruzamento das semicircunferências são pontos pelos quais se traça o diâmetro que divide o círculo em quatro quadrantes.

Os demais grupos logo se lembraram do procedimento e todos eles traçaram corretamente o segmento perpendicular a \overline{AB} passando pelo seu ponto médio. Nos grupos pelos quais me atentei, o aluno que traçava a mediatriz girou a folha de maneira que segmento \overline{AB} ficasse paralelo à base da carteira.

Esta primeira atividade não solicitou justificativa, apenas uma construção que será discutida em outras atividades, por isso, não se encaixa em nenhum dos níveis de prova de Balacheff.

A 2ª atividade afirmava que a mediatriz de um segmento \overline{AB} é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e B em que o aluno deveria justificar se a construção realizada se tratava da mediatriz. As justificativas dadas pelos oito grupos seguem transcritas:

Grupo A: *Sim, pois com os dois pontos encontrados, que equidistam de A e B, pode se traçar a reta que é mediatriz.*

Grupo B: *Sim, o ponto encontrado é o ponto que equidista dos pontos A e B.*

Grupo C: *Sim, em qualquer ponto da reta criada, esse ponto é equidistante dos pontos A e B.*

Grupo D: *Sim, marcando qualquer ponto na reta construída, ele estará na mesma distância de A e B.*

Grupo E: *Sim, pois qualquer ponto na reta de 90° com \overline{AB} tem a mesma distância de \overline{AC} e \overline{BC} entre elas.*

Grupo F: *Sim, marcando um ponto qualquer (O) e medindo sua distância até os pontos A e B encontramos o mesmo valor.*

Grupo G: *Sim, porque a distância do ponto A ao O é igual a distância do ponto B ao O.*

Grupo H: *Sim, marcando um ponto nesta reta nova, a distância deste ponto até o A é igual deste ponto até o B.*

Analisando as respostas dos grupos de alunos podemos constatar respostas semelhantes, onde os alunos dos grupos E, F e G utilizaram a régua para medir a distância de um ponto marcado na mediatriz aos pontos A e B situando assim as argumentações no empirismo ingênuo.

A terceira atividade também foi desenvolvida em sala de aula com os mesmos alunos compondo os grupos e as respostas obtidas foram:

Grupo A: *O conjunto de pontos falado são os que equidistam das extremidades A e B.*

Grupo B: *A propriedade é que qualquer ponto da mediatriz tem a mesma distância (equidistante) dos pontos A e B.*

Grupo C: *A mesma distância entre os pontos A e B. A partir do ponto médio, quando ele se move perpendicularmente (fazendo parte da mediatriz), a distância até A e B continuará a mesma.*

Grupo D: *O conjunto de pontos está a mesma distância do ponto A e do ponto B.*

Grupo E: *Qualquer ponto nessa reta equidista de A e B igualmente.*

Grupo F: *Os pontos estão equidistantes dos pontos A e B.*

Grupo G: *A propriedade é que os pontos dados pela mediatriz do segmento \overline{AB} estão a igual distância de A e de B, ou seja, se tivermos um ponto O na mediatriz, $\overline{AO} = \overline{BO}$.*

Grupo H: *A distância de A e B são iguais até um ponto qualquer na mediatriz.*

De acordo com as respostas obtidas, podemos classificá-las novamente em empirismo ingênuo, já que os grupos afirmaram a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos utilizando a régua. Somente o grupo G tentou formalizar sua resposta, mas não chegou a atingir o segundo nível de prova por não fazer uma verificação para um caso especial.

A quarta atividade mostrava a utilização da propriedade da mediatriz numa situação-problema em que um proprietário de uma fazenda pretendia construir um curral num ponto equidistante dos vértices do triângulo que formava o pasto do gado

Ao interrogá-los sobre a resolução da atividade, um aluno do grupo A comentou: *“Deve ter a ver com a mediatriz porque é o que a gente tá estudando”*. Outro aluno do mesmo grupo complementou: *“Tem que construir a mediatriz da base do triângulo”*. Continuei perguntando onde estaria o ponto equidistante dos vértices do triângulo e o grupo G se pronunciou: *“Ah, daí tem que encontrar outra mediatriz”*. Encerrei o diálogo pedindo para que resolvessem o problema.

Antes de iniciar o trabalho com as construções geométricas, tratamos do Teorema de Tales para o qual o material didático “Movimento do Aprender” propunha atividades utilizando medições com a régua e a utilização de escalas que traziam a razão entre as medidas da figura e as medidas reais. Acredito que a resolução da atividade 4 por todos os grupos deve-se a esse trabalho com escalas.

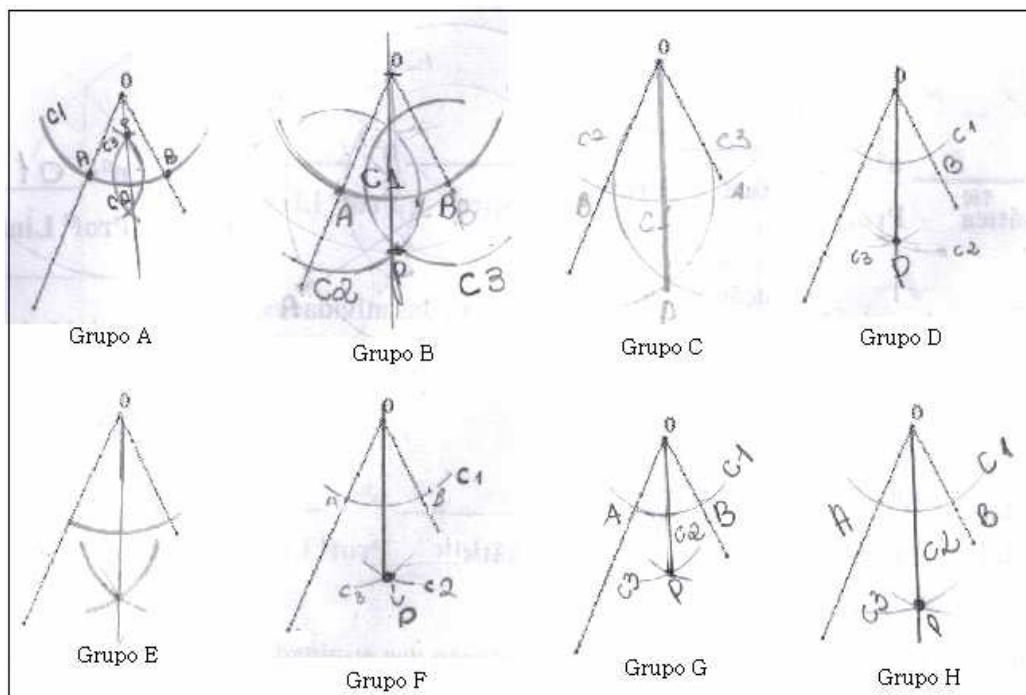
Todos os grupos construíram um triângulo escalado de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm. Os grupos A, E, F e G utilizaram régua e compasso: traçaram um dos lados do triângulo e, com a ponta seca do compasso em um dos extremos do segmento da base, traçaram um arco de circunferência com medida do raio dada no enunciado. Repetiram o processo com a ponta seca do compasso no outro extremo do segmento da base e abertura do compasso com outra medida solicitada na atividade, finalizaram unindo o ponto de intersecção dos arcos aos

pontos extremos da base. Os demais grupos, B, C, D e H, construíram o triângulo utilizando somente a régua ajustando os lados até que satisfizessem a condição do enunciado. Encontraram o ponto de encontro das mediatrizes relativas aos lados do triângulo e a resposta foi unânime: aproximadamente 3,5 km. Nenhum dos grupos estabeleceu a escala utilizada, mas indicaram na construção do triângulo medidas de lados iguais a 5 km, 6 km e 7 km.

Embora todos os grupos tenham resolvido o problema, nenhum deles apresentou uma justificativa junto da construção, o que não nos permite situar as respostas em um dos níveis de prova.

A primeira sessão se encerrou com a 4ª atividade. Na aula seguinte, demos início à segunda sessão com a análise da 5ª atividade em que eram apresentados passos para construção da bissetriz.

As construções realizadas pelos grupos estão apresentadas a seguir:



Quadro 13. Construções realizadas na 5ª atividade

Todos os grupos realizaram a construção e nomearam os objetos como solicitado na atividade, exceto o grupo E que apenas realizou a construção. A atividade serviu como subsídio para realização da sexta atividade que definia a

bissetriz de um ângulo como o lugar geométrico que equidista dos lados desse ângulo e questionava se o que foi construído era realmente uma bissetriz.

As respostas para a sexta atividade estão transcritas a seguir:

Grupo A: *Sim.*

Grupo B: *Sim, pois o ângulo foi dividido na metade.*

Grupo C: *Sim.*

Grupo D: *Sim.*

Grupo E: *Sim.*

Grupo F: *Sim, pois é um ponto central.*

Grupo G: *Sim, ao medir a distância do ponto P ao ponto A encontramos a mesma medida do ponto P ao ponto B e assim acontece com qualquer ponto da bissetriz em relação aos lados do ângulo.*

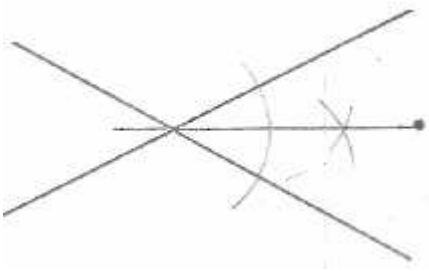
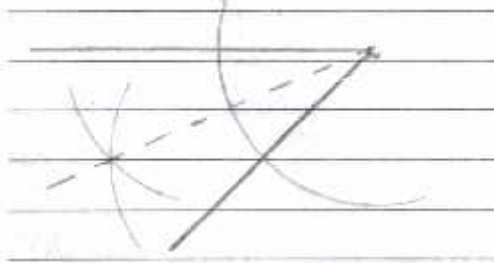
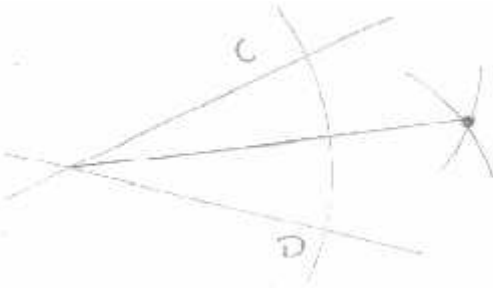

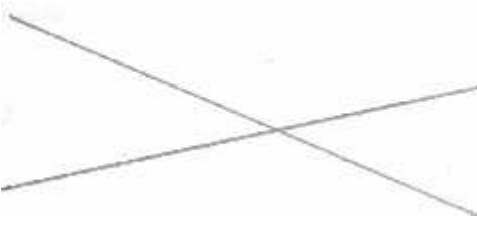
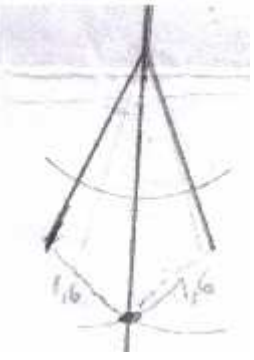
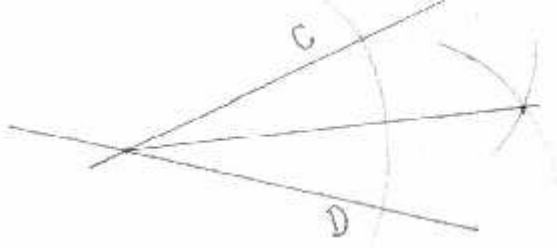
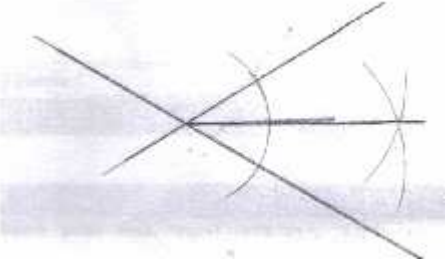
Grupo H: *Sim, pois é uma semirreta que sai do vértice do ângulo dividindo em outros dois ângulos com a mesma medida.*

Os grupos A, C, D e E não apresentaram justificativas. O grupo F não desenvolveu sua justificativa e o grupo H já tinha uma concepção de bissetriz que seria uma consequência daquela apresentada no enunciado. Apenas a resposta do grupo G pode ser classificada num nível de prova, empirismo ingênuo, por afirmar a veracidade da proposição após verificar a distância entre os pontos A e P e, B e P. Mais uma vez os grupos não evoluíram nos níveis de prova de Balacheff.

A 7ª atividade trazia desenhos de ângulos para que os alunos encontrassem a respectiva bissetriz.

O grupo A foi o único a prolongar os lados dos ângulos 2 e 4 e a construir a bissetriz em cada um deles. Os grupos C e D alegaram que não era possível traçar as bissetrizes nos ângulos 2 e 4, a presença dos desenhos na atividade induziu os grupos a não realização da tarefa. Os demais grupos construíram as bissetrizes nos quatro ângulos sem prolongar os lados dos ângulos.

A atividade 8 verificava se o aluno se apropriou da definição de bissetriz. O quadro a seguir mostra as construções realizadas pelos grupos:

<p style="text-align: center;">Grupo A</p> 	<p style="text-align: center;">Grupo B</p> 
<p style="text-align: center;">Grupo C</p> 	<p style="text-align: center;">Grupo D</p> 
<p style="text-align: center;">Grupo E</p> 	<p style="text-align: center;">Grupo F</p> 
<p style="text-align: center;">Grupo G</p> 	<p style="text-align: center;">Grupo H</p> 

Quadro 14. Protocolos da atividade 8

Analisando as construções, podemos afirmar que o conceito de bissetriz foi apreendido pelos alunos, embora os grupos B, C, D, F, G e H tenham construído apenas parte da figura e nenhum grupo tenha traçado um par de retas bissetrizes, como previsto em nossa *análise a priori*.

Os alunos do grupo E tiveram dificuldade para relacionar o conceito à construção da bissetriz, chegando a traçar as retas concorrentes, mas não concluindo que essa construção satisfaria as condições do enunciado da questão. Nenhum grupo justificou o procedimento para que pudéssemos classificá-lo quanto aos níveis de prova de Balacheff.

A 9ª atividade referia-se ao conceito de altura de um triângulo. As respostas e justificativas apresentadas pelos grupos seguem nos protocolos abaixo:

Grupo A

Sim, pois o segmento \overline{CH} também é perpendicular ao lado AB e está ligado ao vértice C , e o mesmo acontece com o segmento \overline{BT} , que é perpendicular ao lado AC .

Grupo B

Sim, relativo ao lado AC o segmento \overline{IB} é a altura; relativo ao lado AB o segmento \overline{HC} é a altura e relativo ao lado BC o segmento \overline{AS} é a altura.

Grupo C

Sim. Dependendo do lado que é usado de base, se possui uma altura diferente.

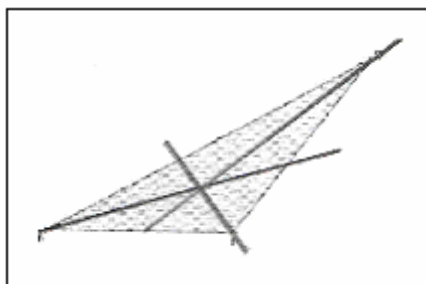
<p>Grupo D</p> <p>Sim, a altura varia de acordo com a posição do triângulo, dependendo do ângulo pode ser \overline{AS}, \overline{BT}, \overline{CH}.</p>
<p>Grupo E</p> <p>Sim, pois para cada base existe uma altura.</p>
<p>Grupo F</p> <p>Sim, pois dependendo do seu ângulo de visão, a altura pode ser \overline{AS} ou como pode ser \overline{BT}, e também pode ser \overline{CH}. Tudo depende de qual é o base de seu triângulo</p>
<p>Grupo G</p> <p>Sim, pois dependendo de sua base podemos encontrar diferentes alturas, podendo ser \overline{AS}, \overline{BT}, ou \overline{CH}, tudo depende do ângulo da sua visão</p>
<p>Grupo H</p> <p>Sim, porém independentemente de sua base é possível encontrar diferentes alturas (3), sendo \overline{AS}, \overline{BT} e \overline{CH}.</p>

Quadro 15. Protocolos da atividade 9

Analisando as respostas de cada grupo, concluímos que todos têm o conceito de altura de um triângulo construído, ainda que tenham sido sucintos em suas justificativas. Podemos situar apenas a resposta do grupo A no primeiro nível de prova, o empirismo ingênuo, já que foi o único grupo a apresentar a definição de altura de um triângulo.

Na atividade 10 pudemos verificar a aplicação da ideia de alturas de um triângulo discutida na atividade anterior.

A construção das alturas no triângulo ABC foi realizada corretamente por todos os grupos utilizando o esquadro. Ao tentar repetir os procedimentos para o triângulo DEF, os grupos A, B, C, D e F realizaram construções bastante semelhantes, mas que não correspondiam às alturas do triângulo, enquanto os grupos E, G e H não realizaram a construção.



Quadro 16. Protocolo atividade 10 – Grupo F

As repostas para os itens 2.1 e 2.2 da atividade 10 seguem transcritas:

Grupo A:

2.1

a) *Sim.*

b) *Sim, porque partem de um vértice e são perpendiculares a um lado.*

c) *Podemos afirmar que as alturas do triângulo ABC são mediatrizes do mesmo porque qualquer ponto do segmento de reta equidista do lado em que é perpendicular.*

2.2 *Não, pois as alturas têm que partir de um vértice, e têm que ser perpendicular em um dos lados (lado oposto ao vértice), porém no triângulo DEF isso não acontece, pois os segmentos de reta não são perpendiculares, a não ser o que parte do vértice F.*

Grupo B:

2.1

a) *Sim, as alturas também são consideradas mediatrizes.*

b) *Sim, pois são retas perpendiculares a uma reta e encontra-se a um vértice.*

c) *Mediatrix é a reta perpendicular a um lado do triângulo, a mediana é o segmento de reta que une cada vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.*

2.2 *Não, as alturas são retas perpendiculares a um dos lados e forma um ângulo de 90° , e isso não acontece.*

Grupo C:

2.1

a) *Sim.*

b) *Sim, porque são perpendiculares a um lado e passam pelo ponto médio.*

c) Não respondeu.

2.2 *Não, precisa de outro procedimento para ter as alturas.*

Grupo D:

2.1

a) *Sim.*

b) *Sim..*

c) *Mediatrix é a reta que passa pelo ponto médio do lado de um triângulo formando um ângulo de 90° , o que nesse caso coincide com a mediana.*

2.2 *Não, pois as alturas são segmentos perpendiculares a um dos lados, sendo que isso não acontece.*

Grupo E:

2.1

a) *Sim.*

b) *Sim.*

c) Não respondeu.

2.2 Não respondeu.

Grupo F:

2.1

a) *Sim.*

b) *Sim.*

c) *A mediatriz é a reta que passa pelo ponto médio e é perpendicular ao lado do triângulo e como a mediana também passa pelo ponto médio acaba coincidindo.*

2.2 *Não, pois apesar de passarem pelo ponto mais alto do triângulo, não formam 90° .*

Grupo G:

2.1

a) *Sim.*

b) *Sim.*

c) *A mediatriz é uma reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele. E a mediana é um segmento de reta ligando o vértice ao ponto médio do lado oposto.*

2.2 Não respondeu.

Grupo H:

2.1

a) *Sim.*

b) *Sim.*

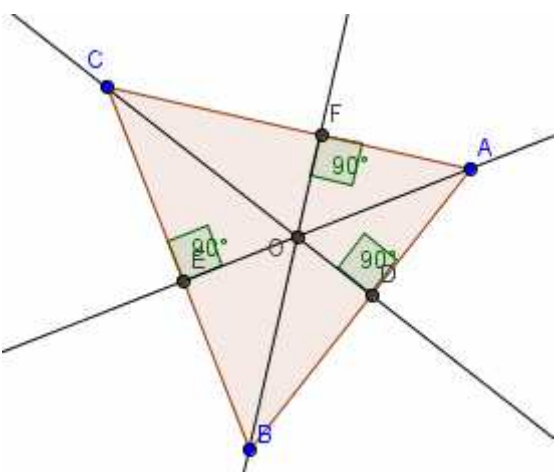
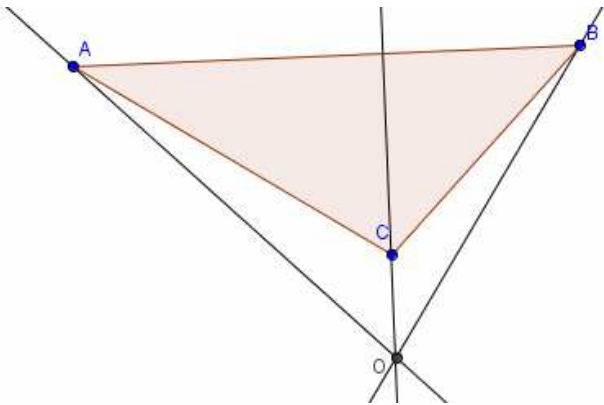
c) *A mediana é um segmento de reta que se liga a um vértice ao seu ponto médio do lado oposto e a mediatriz é a reta que passa pelo ponto médio e é perpendicular a ele.*

2.2 Não respondeu.

As respostas dadas pelos alunos mostram que os grupos A, B, C, D e F se apropriaram do conceito de alturas de um triângulo, mesmo tendo traçado incorretamente as alturas no triângulo DEF. Os grupos tinham consciência de que os traçados não correspondiam às alturas do triângulo, provavelmente, não souberam como traçá-las por acreditar que a altura de um triângulo é um segmento de reta sempre interno a ele.

As próximas atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática da escola com apoio do *software* Geogebra. Os alunos conheceram o *software* quando trabalhamos a resolução gráfica de sistemas de equações com duas incógnitas no laboratório de informática, neste mesmo ano letivo e, embora naquele momento tenhamos trabalhado apenas a álgebra, os alunos estavam

familiarizados com a interface e a barra de ferramentas do *software*. As construções e respectivas respostas dos grupos estão relacionadas a seguir:

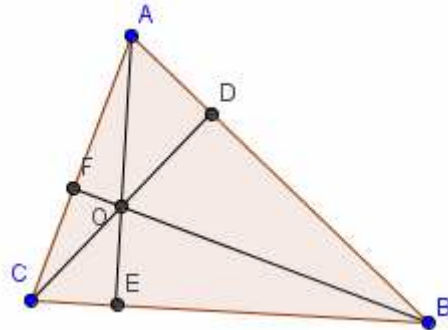
<p>Grupo A</p> <p>a) Com o ângulo menor de 90°, o ortocentro fica dentro do triângulo. E quando o ângulo é maior que 90° o ortocentro fica fora do triângulo. E também pode acontecer de o ponto O se unir ao vértice que tem 90°.</p> <p>b) Dentro ou fora porque nem sempre as alturas de um triângulo estão dentro do triângulo.</p> <p>c) Obtusângulo.</p>	
<p>Grupo B</p> <p>a) Quando os ângulos têm menos de 90° o encontro das alturas (ortocentro) fica dentro da figura. Quando um ângulo tem mais de 90° o ortocentro fica fora da figura. E, quando o ponto O se encontra com o vértice formando 90°, lá é o ortocentro.</p> <p>b) Fora, quando o triângulo tem um ângulo com mais de 90° e dentro, quando se tem um ângulo com menos de 90°.</p> <p>c) Um triângulo obtusângulo.</p>	

Grupo C

a) O triângulo sendo agudo, o ortocentro permanece dentro da figura, agora o triângulo sendo obtuso o ortocentro fica fora da figura. O ponto O se junta ao vértice quando o triângulo é retângulo.

b) O ponto O pode estar dentro ou fora porque o triângulo pode ser agudo ou obtuso.

c) Triângulo obtuso.

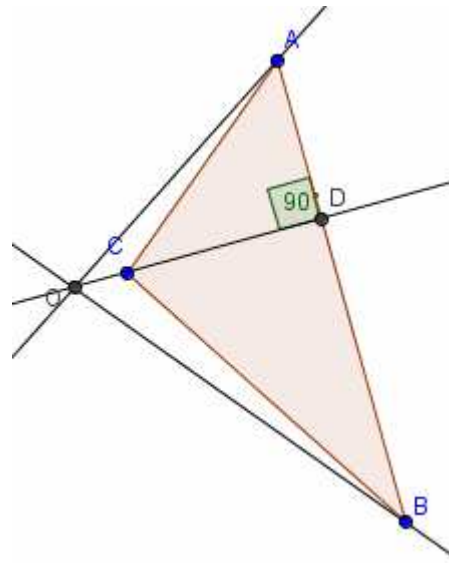


Grupo D

a) Ao movimentar o ponto O, o triângulo se transformou em diferentes triângulos porque tivemos que mexer nos vértices para movimentar o ponto O.

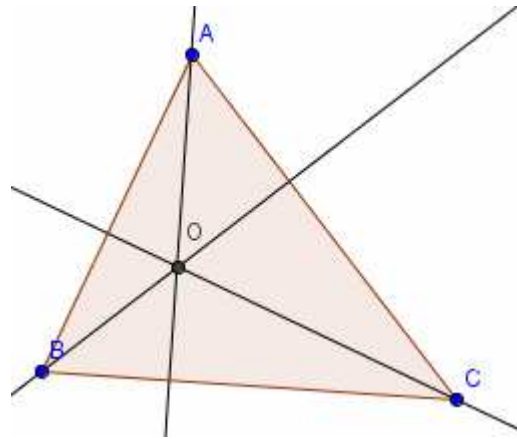
b) Dentro ou fora, depende do triângulo, se ele é agudo o ponto O fica dentro, se é obtuso o ponto O fica fora e também pode ficar em cima de um vértice se formar 90° .

c) Obtuso.

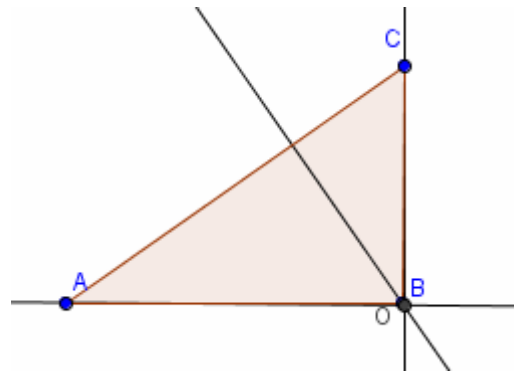


Grupo E

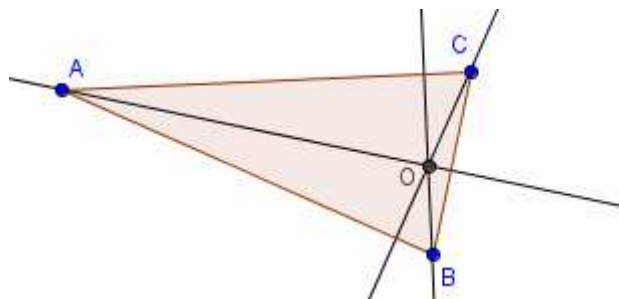
- a) O triângulo se modifica porque movemos os pontos A, B, C que são seus vértices.
- b) Pode estar fora ou dentro. Tudo vai depender do formato do triângulo
- c) Um triângulo com mais de 90° .

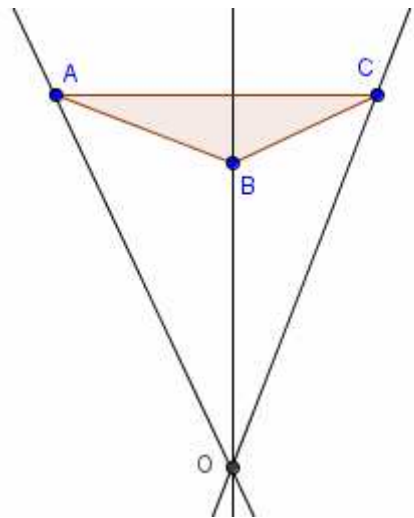
**Grupo F**

- a) Para movimentar o ponto O tivemos que movimentar os vértices do triângulo e assim o triângulo passou a ser de diferentes tipos.
- b) O ponto O estará fora quando for um triângulo obtuso, estará no vértice quando tiver um ângulo de 90° e estará dentro quando for um triângulo agudo.
- c) Triângulo obtuso.

**Grupo G**

- a) O triângulo se modificou.
- b) O ponto O pode estar fora ou dentro do triângulo porque o triângulo pode ser de vários tipos e conforme o tipo o ponto O muda.
- c) Um triângulo do tipo obtuso.



<p>Grupo H</p> <p>a) O desenho do triângulo se altera e se torna triângulo de diferentes tipos.</p> <p>b) Quando o triângulo tem menos de 90° ele fica dentro, e quando tem mais de 90°, fica fora.</p> <p>c) Um triângulo que tem um ângulo maior do que 90° (esquecemos o nome).</p>	
---	--

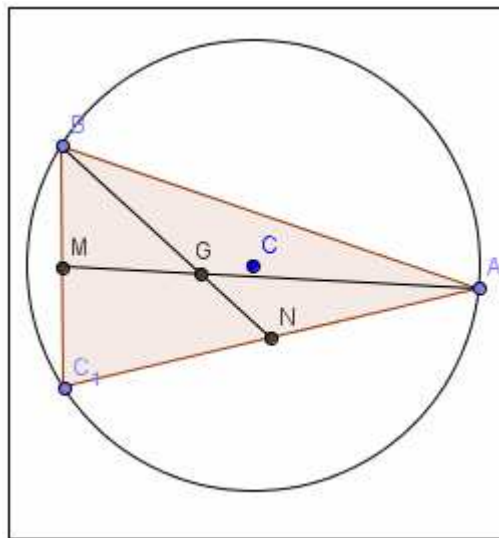
Quadro 17. Resolução da atividade 11

Observando as construções e as respostas dos grupos, concluímos que os alunos evoluíram em suas concepções sobre alturas de um triângulo. Na atividade 10, não tinham construído ou construíram incorretamente as alturas do triângulo obtusângulo. Com o apoio do software, devido à interatividade e fácil movimentação das figuras, os alunos constataram que as alturas de um triângulo nem sempre são segmentos de reta internos ao triângulo e, como consequência, o seu ortocentro pode ser um ponto dentro, fora do triângulo ou coincidir com o vértice do ângulo reto.

Os grupos não lembraram da nomenclatura correta para a classificação dos triângulos quanto aos ângulos: acutângulo, retângulo e obtusângulo, porém, atingiram o objetivo da atividade. Nos níveis de prova de Balacheff, chegaram ao segundo nível de prova, o experimento crucial, por afirmarem a verdade de uma proposição após a verificação do ortocentro para tipos não familiares de triângulos.

Ainda no laboratório de informática e com apoio do Geogebra, os oito grupos de alunos desenvolveram a 12ª atividade trabalhando o baricentro de um triângulo.

Todos os grupos realizaram as construções solicitadas na atividade, alterando apenas o raio da circunferência e a localização dos pontos ABC pertencentes a ela. Assim, apresentamos apenas a construção realizada pelo grupo A, já que as demais se assemelham a esta, e a transcrição das respostas de todos os grupos:



Quadro 19. Construção realizada pelo grupo A – 12ª atividade

Grupo A

- Eles significam as medianas do triângulo ABC.*
- Sim, o ponto G é o baricentro do triângulo.*
- Ao mover o ponto A, o baricentro também se move, porém, permanece dentro do triângulo.*

Grupo B

- Os segmentos AM e BN são as medianas do triângulo.*
- Sim, é o baricentro.*
- O lugar geométrico do baricentro é sempre dentro do triângulo.*

Grupo C

- Os segmentos significam duas medianas do triângulo ABC..*
- O ponto G é o baricentro do triângulo.*
- Mesmo movendo o ponto A, o ponto G permanece interno ao triângulo ABC.*

Grupo D

- a) *Esses segmentos significam as medianas do triângulo ABC.*
- b) *Sim, o ponto G é o baricentro do triângulo.*
- c) *Movendo o ponto A, o ponto G (baricentro) sempre estará dentro do triângulo.*

Grupo E

- a) *São as medianas do triângulo ABC.*
- b) *Sim, este ponto é o baricentro do triângulo.*
- c) *Podemos movimentar o ponto A que o ponto G sempre fica dentro do triângulo.*

Grupo F

- a) *Os segmentos significam as medianas do triângulo.*
- b) *Sim, o ponto G é o baricentro.*
- c) *Quando variamos o vértice A, o baricentro continua dentro do triângulo.*

Grupo G

- a) *Os segmentos AM e BN significam as medianas relativamente ao triângulo ABC.*
- b) *Este ponto G é o baricentro.*
- c) *Movimentando o ponto A na circunferência, notamos que o ponto G permanece sempre dentro do triângulo.*

Grupo H

- a) *São as medianas do triângulo.*
- b) *Sim, o ponto G é o baricentro porque é o encontro das medianas.*
- c) *O lugar geométrico é sempre interno ao triângulo.*

As respostas dos grupos nos mostram que a concepção de lugar geométrico para esses alunos não está bem definida. Como na 11ª atividade a ideia referia-se à localização do ponto notável, os alunos transferiram-na para a atividade seguinte. Para trabalhar o lugar geométrico circunferência, o enunciado da 12ª atividade poderia incentivá-los a utilizar a opção do software “habilitar rastro” do baricentro e assim, visualizando o lugar geométrico, trazer a discussão entre os grupos. Logo, para esta atividade não classificaremos as respostas nos níveis de prova de Balacheff.

Após a análise de toda aplicação das atividades, podemos inferir que a escolha das variáveis foi um fator determinante para o empenho dos alunos no desenvolvimento dessas atividades. O trabalho em grupo permitiu que os alunos expusessem suas ideias e defendessem seus pontos de vista, o que costuma não acontecer quando trabalham sozinhos, os alunos ficam receosos ao expor suas opiniões individualmente. O uso do software Geogebra e dos instrumentos de construções geométricas régua, transferidor e compasso para resolução das atividades tornou as sessões mais atrativas, despertando a curiosidade dos alunos, além de trabalharmos atividades de caráter investigativo.

Não diagnosticamos uma evolução notável nas argumentações dos alunos quanto aos níveis de prova de Balacheff, mas percebemos que os grupos se preocupavam em justificar suas respostas. Os alunos chegaram ao empirismo ingênuo e ao experimento crucial no desenvolvimento das atividades, não atingindo o exemplo genérico por não encontrar uma característica que representasse uma classe de objetos. O último nível de prova, a experiência mental, também não foi atingida, já que as atividades solicitavam construções geométricas.

Podemos afirmar que todas as variáveis didáticas envolvidas neste trabalho influenciaram a evolução nas justificativas dos alunos no desenvolvimento das atividades, mas para desenvolver a argumentação nessas justificativas, objetivo deste trabalho, deveríamos dispor de mais tempo para trabalhá-las.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante todo desenvolvimento deste trabalho, pudemos comprovar a importância e os benefícios de aliar as construções geométricas ao ensino da geometria, dado que ao trabalhá-las, resgatamos a teoria que as fundamenta e, dessa forma, desenvolvemos habilidades fundamentais, assim como trazem os Parâmetros Curriculares Nacionais:

“Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive.

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação das propriedades das figuras, além da construção de outras relações.” (PCN, *apud* Zuin, 2001, p. 101)

Ao analisarmos o tema pontos notáveis de um triângulo em livros didáticos atuais, percebemos que há um longo caminho a ser percorrido até que os mesmos apresentem o conteúdo utilizando uma demonstração matemática e atividades que tenham caráter investigativo. Sendo assim, o professor nunca deve ter o livro didático como única fonte de pesquisa para desenvolver seu trabalho e preparar suas aulas, lembrando que *um dos problemas que favorecem o fraco desempenho de alguns alunos no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas, é devido à prática e às escolhas didáticas dos professores quando ensinam a geometria.* (Almouloud e Mello, 2000, p. 8)

Quanto à questão de pesquisa “**Como desenvolver a argumentação nas justificativas dos alunos na resolução de atividades de Construções Geométricas?**”, podemos inferir que a escolha das variáveis didáticas contribuiu para o desenvolvimento da argumentação nas justificativas dos alunos. O trabalho

em grupo permitiu que os alunos se sentissem mais seguros para argumentar; o uso de instrumentos de construção geométrica, num ambiente computacional ou não – cada um com seus valores, permitiram que os alunos analisassem seus passos nas construções e assim fundamentar suas respostas; além dos enunciados das questões que valorizavam o trabalho investigativo.

A sequência didática presente na dissertação de Oliveira (2009) foi escolhida para ser aplicada e analisada por trazer atividades que levavam o aluno a apresentar argumentos em sua resolução. Para analisar esses argumentos e justificativas, utilizamos os níveis de prova de Balacheff que as caracterizaram em empirismo ingênuo e experiência crucial. Os alunos não tiveram suas respostas situadas no exemplo genérico por não apresentarem afirmações advindas da manipulação de exemplos que caracterizassem uma classe de objetos. Quanto ao último nível de prova, não poderíamos situá-los na experiência mental porque as atividades traziam enunciados que vinculavam o aluno à utilização de construções geométricas para argumentar.

Concluindo, ainda que as respostas dos alunos não estivessem situadas em nenhum nível de prova de Balacheff, notamos certa preocupação em justificar essas respostas. Em apenas 4 sessões não poderíamos esperar uma evolução significativa nas argumentações dos alunos, visto que o desenvolvimento do pensamento lógico-demonstrativo é um processo longo que deve permear todos os níveis escolares.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. **Investigações em geometria na sala de aula**. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P.; ABRANTES, P. (org.) . Ensino da geometria no Virar do Milênio. Lisboa: Defcul, 1999.

ALMOULOUD, S. A. e MELLO, E. G.S. de. **Iniciação à demonstração apreendendo conceitos geométricos**. In: 23ª Anais Reunião Anual da ANPed, Caxambu, 2000.

ALMOULOUD, S. A. et al. **A geometria no ensino fundamental**: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro: v.27 p; 94 – 108, 2004

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARAÚJO , P. B. **Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC/ SP, 2010.

ÁVILA, G . **Revista do Professor de Matemática – RPM nº 71**

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino fundamental – matemática. Brasília, 1998.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. 8º ano. São Paulo. Ed. Ática, 2010.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

GRAVINA, M. A. **Geometria dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.** In: Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, MG, 1996.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** In: Anais do Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação. 4, 1998, Brasília.

JESUS, G. B. **Construções Geométricas: Uma Alternativa para Desenvolver Conhecimentos Acerca da Demonstração em uma Formação Continuada.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC/ SP, 2009.

MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: uma nova introdução.** 3 ed. São Paulo: EDUC, 2008.

OLIVEIRA, S. G. S. **Um Estudo de Argumentações Produzido por Alunos do 8º. ano em Atividades de Construções Geométricas Envolvendo Pontos Notáveis de Triângulos.** Dissertação de Mestrado. Campo Grande, UFMS, 2009.

PONTE, J. P. **Da formação ao desenvolvimento profissional.** Actas do ProfMat 98, 1998, Lisboa: APM.

RIBEIRO, J. da S. **Projeto radix: matemática.** 8º ano. São Paulo. Ed. Scipione, 2010.

SESI. **Movimento do Aprender.** São Paulo, 2011.

SOUZA, J. R. de e PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática.** 8º ano. São Paulo. Ed. FTD, 2009.

VARELLA, M. **Prova e demonstração na Geometria Analítica: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC/ SP, 2010

ZUIN, E. de S. L. **Da régua do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Faculdade de Educação Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

ZUIN, E. S. L. **Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações**. In: Reunião anual da associação nacional de pesquisa e pós-graduação em educação, 15, 2002, Caxambu, Minas Gerais. Anais...Caxambu, MG: ANPED, 2002.