CARLOS GONÇALVES DOS SANTOS

A RAZÃO ÁUREA E SUAS APLICAÇÕES

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
SÃO PAULO
2010

CARLOS GONÇALVES DOS SANTOS

A RAZÃO ÁUREA E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática, sob a orientação da Professora Doutora Ana Lúcia Manrique.

SÃO PAULO
2010

Dedico este trabalho às minhas irmãs, Edilene e Marilene, as quais me fortaleceram sendo os meus alicerces.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de estar no mundo.

Aos meus pais, Adevaldo Gonçalves dos Santos e Nailde Neres da Cruz, in memorian, que onde estiverem sempre vão olhar por mim e me confortarem.

Aos meus pais adotivos, Dely Ferreira Lopes e Ana Ferreira Porto, agradeço pela oportunidade que me deram de seguir em frente através da educação, do amor, carinho, compreensão e respeito que têm por mim.

As minhas irmãs adotivas e meus irmãos adotivos Carmelita, Maria Cidália, Joanália, Alzira, Terezinha, David, Darly, Dely Filho, Djalma e Davináscio, pelo carinho.

A minha namorada Raquel, pelo amor, carinho e compreensão que tem por mim.

Ao amigo e colega José Alves dos Santos Neto, por ter sonhado esta vitória junto comigo.

A professora e orientadora Ana Lúcia Manrique, pelo seu espírito que nos leva ao prazer de aprender e da busca de novos caminhos para o aprendizado.

Agradeço este momento a todos os meus amigos e professores que, de alguma forma, contribuíram para que este se concretizasse. Não citarei todos os nomes não por medo de esquecer algum, mas simplesmente por não caber todos neste espaço.

Algumas pessoas marcam a nossa vida para sempre, uma porque nos vão ajudando na construção, outras porque nos apresentam projetos de sonho e outras ainda porque nos desafiam a construí-los. Quando damos conta, já é tarde para lhes agradecer. Por isso deixo aqui o meu eterno agradecimento a todos que de alguma forma participaram destes momentos. Obrigado.

Aprenda olhando para a Natureza,
Use-a como mentora.

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

Ao falarmos em Matemática pensamos em números, raramente o aluno tem sobre seu domínio elementos que permitam pensar sobre Matemática como idéias. E os números têm má fama. As aulas de Matemática costumam ser lembradas de forma traumática por grande parte dos alunos. O objetivo deste trabalho é mostrar que a Matemática é uma matéria que vai além das salas de aula e que, ao longo dos séculos, foi uma formidável ajuda a todas as ciências, bem como mostrar a presença da Matemática nas diversas áreas do conhecimento. Para isso, utilizaremos como tema a Razão Áurea, conhecida também como Proporção Divina ou Número de Ouro, considerada até os dias atuais como um grande tesouro da Geometria. A Razão Áurea representa a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas, e podemos encontrá-la em questões simples do dia-a-dia, facilitando assim sua compreensão. Realizamos um estudo histórico e apresentamos a história de alguns grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática, dando contribuições também para a Razão Áurea, bem como diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento e sua presença no corpo humano. Este trabalho considera que a introdução de metodologias que desenvolvam a capacidade de abstração do aluno, possibilitando uma clara conexão entre linguagem simbólica utilizada nos livros didáticos e os conceitos envolvidos no descobrimento de relações, são fundamentais para que o aprendizado da Matemática se torne mais que uma ferramenta para a solução de problemas cotidianos, seja um prazer para o estudante.

Palavra-chave: Razão Áurea, Matemática, Geometria.

ABSTRACT

When we talk about Mathematic, we think in numbers, rarely the student has in his domain evidence to think about Mathematic as ideas. The numbers have bad fame. The Mathematics' classes had been remembered of traumatic form to students. The main idea of this research is to show that Mathematics is a subject that goes beyond the classroom, and over the centuries, was a great aid to all sciences, and presented it presence in different areas of knowledge. We'll use the Aurea Reason, also known like Proportion Divine or Golden Number, considered until today as a great Geometry treasure. The Aurea Reason represents the most pleasant proportion between two segments or two measures, and we can found it in simple matters of everyday thus facilitating their comprehension.

We've carried a historical study and we've presented the history of some greats Mathematical that have contributed to Aurea Reason like various applications in different knowledge areas and its presence in the human body.

This research considers the introduction of methodologies to develop student's capacity for abstraction, allowing a clear connection between symbolic languages, used in textbooks, and concepts involved in the relation's discovery, they are essential to the learning of Math become more than a tool for solving everyday problems, been a pleasure for the student.

KEY WORD: AUREA REASON, MATHEMATIC, GEOMETRY;

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área que se relaciona com todas as áreas, o que o torna uma ciência interdisciplinar.

Quando pensamos em Matemática, imaginamos números, contas, resoluções de problemas. Os números têm má fama. A aula de Matemática costuma ser lembrada como o momento mais traumático do aprendizado em relação a outras matérias.

Falamos em Matemática, pensamos em números e, portanto, a apresentação a seguir visa contar a história de um dos maiores e mais surpreendentes números da Matemática, Phi, também conhecido como Razão Áurea, Proporção Áurea, Secção Áurea, Proporção Áurea, representado pela letra grega ϕ (phi) em homenagem ao matemático e escultor Fídias, por ter utilizado em tantas obras suas a Razão Áurea.

Sua origem é geométrica e a figura mais famosa e mais usada na Razão Áurea é o Retângulo Áureo.

Pode-se dizer que ϕ (phi) tende a ser o mais irracional dos números irracionais, pois essa fração converge tão vagarosamente para ϕ (phi), que parece nos mostrar que ϕ (phi) não quer ser representado por uma fração, mesmo que a fração não seja de inteiros.

A Razão Áurea pode ser encontrada em lugares inesperados e fascinantes como em algumas figuras geométricas, na escrita antiga, na arquitetura, na arte, no cinema, na música, na literatura, na fotografia, na natureza, na indústria, no corpo humano, nos fractais, no mercado financeiro e até mesmo na Bíblia.

> "A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras, o outro a Proporção Áurea. Podemos comparar o primeiro a uma porção de Ouro e o segundo a uma jóia preciosa." (KEPLER, apud ÁVILA, 1985, p.14).

Com este trabalho pretendo mostrar que a Matemática pode ser apresentada de várias maneiras demonstrando um método do aluno não mais vê-la como uma matéria de difícil compreensão e sim despertar o interesse deles para que no momento que se encantarem com a fascinação que a Razão Áurea nos traz, ele busque por mais conhecimento mesmo quando está fora da escola.

Podemos demonstrar vários meios materiais e intelectuais para compreender e assim ensinar a Matemática através da Razão Áurea, demonstrando que é uma matéria que vai além das salas de aula, ao longo dos séculos, os números foram dando uma formidável ajuda a todas as ciências.

O objetivo deste trabalho é ode aprimorarmos o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático para o aluno ao se defrontar com conceitos matemáticos mais avançados e a uma nova gama de conhecimentos que contrasta com o histórico de números, contas e resoluções de problemas que vem acompanhando durante o seu aprendizado fazendo com que ele tenha uma perspectiva mais clara sobre o assunto que o acompanhou durante o ensino.

A disciplina será desenvolvida por meio de aulas teóricas, exercícios, discussões, levantamento bibliográfico, trabalhos práticos, participação nas aulas, elaboração de atividades de ensino envolvendo várias outras áreas, podendo assim optar por trabalhos fora da sala de aula, visitando o próprio prédio da escola para procurarmos a Razão Áurea que pode ser encontrada de diversas formas, podemos também programar visitas a um Espaço Cultural ou a um Museu de Arte que pode revelar-se uma ótima oportunidade para que os alunos visualizem o que estão aprendendo na sala de aula de uma maneira lúdica, prazerosa e crítica, tendo acesso a realidade que pode nos apresentar a Matemática identificando concretamente o uso destas relações, podemos desenvolver atividades escolares nas quais os alunos explorem os recursos apresentados pela natureza e realizar múltilpas construções Matemáticas e artísticas, desenvolvendo o pensamento, a criatividade e um melhor entendimento da matéria podendo nos dar grandes oportunidades para uma abordagem multidisciplinar.

No capítulo 1 intitulado “A Misteriosa Razão Áurea – A História da Divina Proporção” apresento um pouco da história da Divina Proporção e enfatizo sobre grandes matemáticos das mais diversas épocas, os quais foram escolhidos pela colaboração que eles tiveram para a Matemática em relação à Razão Áurea.

É importante ressaltar que estou enfocando que, embora muitos destes personagens da história da Matemática tenham sido vítimas de situações complicadas, nada os impediu de apresentar contribuições valiosas e tais contribuições são mais relevantes do que as dificuldades encontradas. Acreditamos que o enfoque da História da Matemática também deva ser abordado em sala de aula.

O capítulo 2 intitulado “A Razão Áurea e as Figuras Geométricas”, apresentamos a presença da Razão Áurea em diversas figuras que nos levarão a enxergar melhor a presença desta nas mais diversas formas como nos apresentará o capítulo 3.

No capítulo 3 intitulado “Um pequeno Número e Diversas Aplicações”, poderemos mostrar diversas formas que a Razão Áurea nos presenteia. Podemos encontrá-la na disposição das plantas, caracóis, espirais, corpo humano, e em tantos outros lugares que desejarmos encontrar.

No capítulo 4 intitulado “A Razão Áurea apresentando seus mistérios através do corpo humano”, veremos como a Matemática nos envolve interna e externamente, pois abrange vários órgãos do nosso corpo, nos levando a entender como encontrar a beleza áurea do ser humano. A Razão Áurea é usada por médicos, como por exemplo, cirurgiões plásticos e ortodontistas para melhorar a estética do ser humano.

Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes, tendo este como uma das missões usarem sua disciplina como instrumento para atingir os objetivos maiores da educação, possibilitar, estimular e facilitar a ação de cada aluno para atingir seu potencial. Vamos acompanhar nesse trabalho quem sabe uma trajetória para conseguirmos um novo caminho para tomar o ensino mais prazeroso.

CAPÍTULO 1: A MISTERIOSA RAZÃO ÁUREA - A HISTÓRIA DA DIVINA PROPORÇÃO.

A Matemática está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento, mas nem sempre é fácil demonstrar aplicações práticas e interessantes aos olhos dos alunos permeando as aulas usuais com aulas diferentes. Neste capítulo abordaremos um pouco da história da Razão Áurea, o que acreditamos que pode ser um diferencial no despertar dos alunos para a beleza da Matemática e para sua utilização prática cada vez mais indispensável no nosso mundo atual.

A Razão Áurea também conhecida como Número de Ouro, Proporção Áurea, Proporção Divina, ou número perfeito, representada pela letra grega ϕ (Phi) em homenagem ao matemático grego Fídias, o famoso arquiteto e escultor grego que viveu entre 490 e 430 a. C. , sendo suas maiores realizações o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia, ele foi homenageado porque alguns historiadores da arte sustentavam que Fídias fazia uso freqüente e meticuloso da Razão Áurea em suas esculturas. (LIVIO, 2006, p. 16).

O Número de Ouro foi descoberto no século V a. C. por Hipasos de Metaponto, um matemático grego. (LIVIO, 2006, p. 14).

O Número de Ouro é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada como uma oferta de Deus ao mundo.

A primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da Geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria. Com os estudos de Euclides, em 1923, devido à grande admiração que ele inspirava a poetisa Edna St. Vicent Millary escreveu um poema intitulado "Somente Euclides viu a beleza Nua". (LIVIO, 2006, p. 13).

Esta história começou há cerca de 2500 anos, com a busca do modo mais harmonioso e simétrico de dividir um segmento em duas partes:

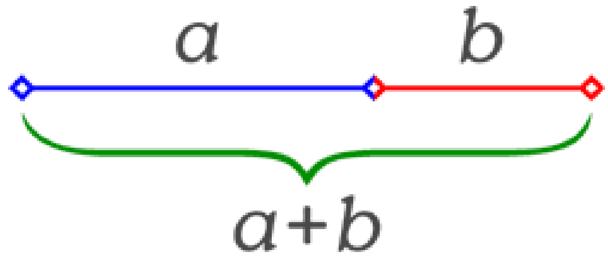
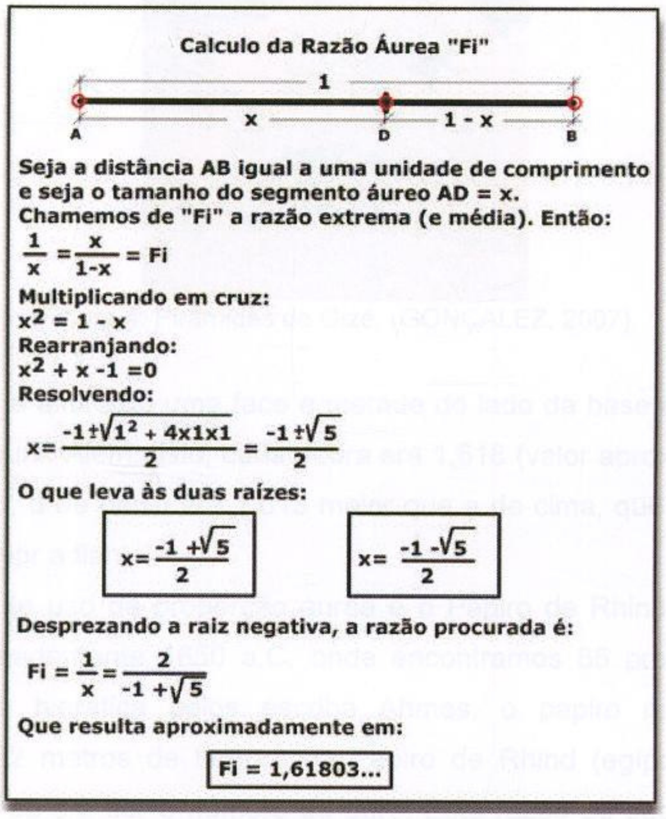


Figura 1: Proporção áurea: razão entre a+b que coincide com a razão entre “a” e “b”. (MARQUES, 2008)

Uma das propriedades da “secção” é que, ela se auto-propaga. A construção equivale à resolução de uma equação quadrática.

O valor exato da Razão Áurea é o número que nunca termina e nunca se repete 1,6180339887..., e esses números que nunca terminam têm intrigado os homens desde a Antiguidade.



Calculo da Razão Áurea "Fi"

Seja a distância AB igual a uma unidade de comprimento e seja o tamanho do segmento áureo AD = x.
Chamemos de "Fi" a razão extrema (e média). Então:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} = Fi$$

Multiplicando em cruz:

$$x^2 = 1 - x$$

Rearranjando:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4x1x1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

O que leva às duas raízes:

$$\boxed{x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \qquad \boxed{x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$$

Desprezando a raiz negativa, a razão procurada é:

$$Fi = \frac{1}{x} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}$$

Que resulta aproximadamente em:

$$\boxed{Fi = 1,61803...}$$

Figura 2: Cálculo da Razão Áurea “Phi”. (PIROPO, 2007a).

Um exemplo desta maravilha é o fato de que se desenharmos um retângulo cujos lados tenham uma razão entre si igual ao número de ouro este pode ser dividido em um quadrado e outro retângulo em que este tem também ele, a razão entre os dois lados iguais ao número de ouro. Este processo pode ser repetido indefinidamente mantendo-se a razão constante.

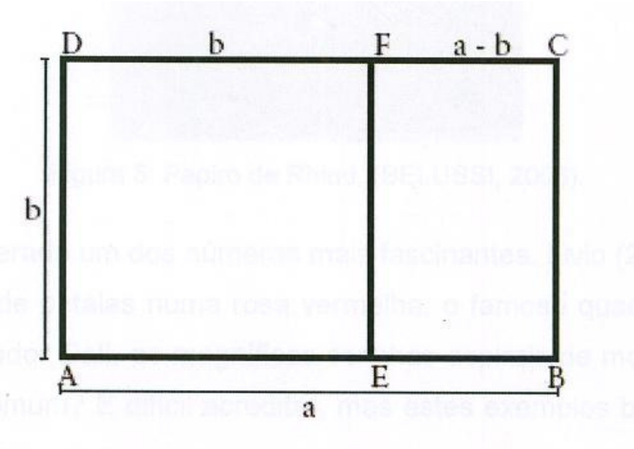


Figura 3: Retângulo Áureo. (LAURO, 2005, p. 35).

A história deste inigmático número perde-se na antiguidade. No Egito as Pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a Razão Áurea:

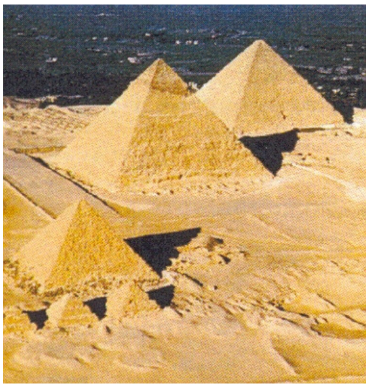


Figura 4: Pirâmides de Gizé. (GONÇALEZ, 2007).

A razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande Pirâmide é igual ao número de ouro. Além disto, cada pedra era 1,618 (valor aproximado de phi) menor que a pedra de baixo, a de baixo era 1,618 maior que a de cima, que era 1,618 maior que da 3ª fileira e assim por diante.

Um exemplo de uso da proporção áurea é o Papiro de Rhind (egípicio) ou Ahmes que data de aproximadamente 1650 a. C. onde encontramos 85 problemas matemáticos copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes, o papiro mede 5,5 metros de comprimento por 0,32 metros de largura. O Papiro de Rhind (egípicio) refere-se a uma "razão sagrada" que se crê ser o número de ouro. Esta razão ou secção áurea surge em muitas estátuas da antiguidade. (BELUSSI, 2006).

Figura 5: Papiro de Rhind. (BELUSSI, 2006).

O Phi é considerado um dos números mais fascinantes. (Livio, 2006) questiona: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dali, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil acreditar, mas estes exemplos bem diferentes têm em comum a Razão Áurea.

Muitos matemáticos, de diversas épocas, estudaram a Razão Áurea. Houve uma época em que “cientistas” e “matemáticos” eram indivíduos auto-selecionados que simplesmente se dedicavam a questões que despertavam suas curiosidades. Essas pessoas muitas vezes trabalhavam e morriam sem saber se seus trabalhos iriam mudar o curso do pensamento científico ou iriam simplesmente desaparecer sem deixar vestígios. (LIVIO, 2006, p. 22).

Apresentaremos alguns grandes matemáticos e suas contribuições para o conhecimento da Razão Áurea.

1.1: EUCLIDES

Euclides de Alexandria (360 a. C. – 295 a. C.) foi um professor, matemático e escritor. Apesar de Euclides ser um autor de best-sellers, sua vida é tão misteriosa que até mesmo o local de seu nascimento é desconhecido. Teria sido educado em Atenas e freqüentando a Academia de Platão. Convidado por Ptolomeu I para compor o quadro de professores da recém fundada Academia, que tornaria Alexandria no centro do saber da época, tornou-se o mais importante autor de Matemática da Antiguidade greco-romana e talvez de todos os tempos com o livro “Os Elementos”.

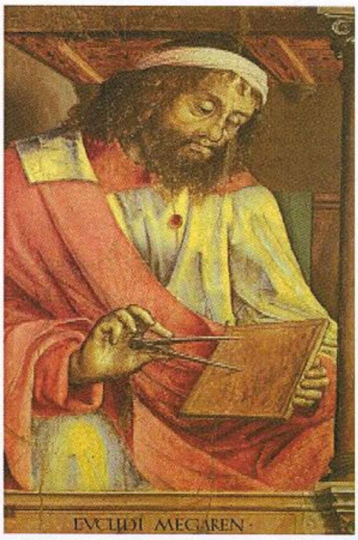


Figura 6: Euclides. (WIKIPÉDIA, 2008a).

“Os Elementos”, uma obra em treze volumes, sobre Geometria e teoria dos números, apresentam em seu segundo volume a primeira definição da Razão Áurea relacionada às áreas, no volume quatro, ele apresenta uma definição mais clara sobre a nossa famosa proporção, em virtude da construção do pentagrama, por Euclides, definiu-se a proporção áurea e volta novamente a utilizá-la no seu décimo terceiro livro, apresentando a construção do Icosaedro e do Dodecaedro. (LIVIO, 2006, p. 94).

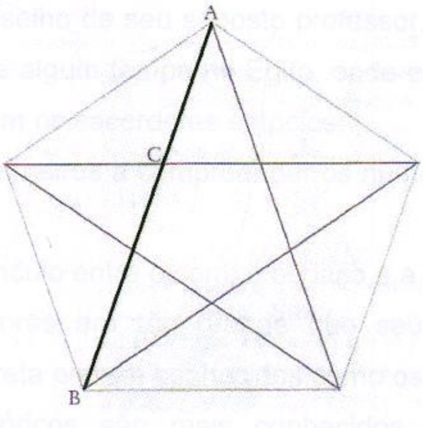


Figura 7: Pentagrama. (LAURO, 2005, p. 40).

Neste desenho podemos verificar um segmento AB em destaque que é um pedaço do pentagrama, e este por sua vez é denominado de Segmento Áureo.

Veremos com mais detalhes as figuras geométricas relacionadas à Razão Áurea no próximo capítulo.

Também é de autoria de Euclides o algoritmo que busca encontrar o máximo divisor comum entre dois números inteiros diferentes de zero. É um dos algoritmos mais antigos conhecidos. O algoritmo não requer fatoração.

Embora Euclides possa não ter sido o maior matemático que já existiu, certamente foi o maior professor de Matemática. (LIVIO, 2006, p. 95).

1.2: PITÁGORAS

Tanto Euclides como Pitágoras tiverem o seu papel fundamental na história da Divina Proporção. Já vimos neste capítulo que Euclides define a Razão Áurea através da construção do Pentagrama. Agora apresentaremos um pouco de Pitágoras.

Figura 8: Pitágoras. (WIKIPÉDIA, 2007e).

Pitágoras nasceu por volta de 570 a. C. na ilha de Samos, no mar Egeu.

Talvez seguindo o conselho de seu suposto professor, o matemático Tales de Mileto, Pitágoras tenha vivido durante algum tempo no Egito, onde ele teria aprendido Matemática, Filosofia e temas religiosos com os sacerdotes egípcios.

Pitágoras foi um dos primeiros a compreender os números como entidades abstratas que existem por si mesmos.

Pitágoras estudou o vínculo entre o som, o espaço e a Matemática.

A influência de Pitágoras era tão grande que seus seguidores mais aplicados formaram uma sociedade secreta e eram conhecidos como pitagóricos.

Pitágoras e os pitagóricos são mais conhecidos pelo seu suposto papel no desenvolvimento da Matemática e pela aplicação da Matemática ao conceito de ordem, seja a ordem musical, a ordem do cosmo ou até mesmo ética.

Os pitagóricos usaram também a secção de ouro na construção do símbolo que representava a sua sociedade secreta, a estrela pentagonal, ou pentagrama.

Figura 9: O Pentagrama - Símbolo dos pitagóricos. (DONALD NO PAÍS DA MATEMÁGICA, Video, 1959).

Foi Pitágoras quem relevou as principais características dos números, como por exemplo, o número 1 – este era o início de tudo. O legado desse matemático grego vai muito além do famoso “Teorema de Pitágoras”. (LIVIO – 2006) demonstra detalhadamente a importância do “Teorema de Pitágoras”, assim como a interessante afirmação de que os babilônios já conheciam a trinca pitagórica (o quadrado sobre a hipotenusa é claramente igual em área à soma dos quadrados menores). Podendo ser expresso como $c^2 = a^2 + b^2$.

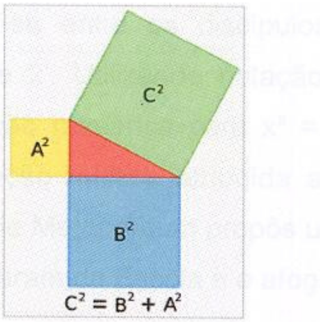


Figura 10: Teorema de Pitágoras. (WIKIPÉDIA, 2007e).

Não conseguiram exprimir como quociente entre dois números inteiros, a razão existente entre o lado do pentágono regular estrelado (pentáculo) e o lado do pentágono regular inscritos numa circunferência. Quando chegaram a esta conclusão ficaram muito espantados, pois tudo isto era muito contrário a toda a lógica que conheciam e defendiam que lhe chamaram irracional.

Este número era o número ou secção de ouro apesar deste nome só lhe ser atribuído uns dois mil anos depois.

Livio (2006), diz que Pitágoras acreditava na magia dos números, além deles estarem intimamente conectados à natureza.

Retomando a Samos, indispôs-se com o tirano Polícrates e imigrou para o sul da Itália, na ilha de Crotona, de denominação grega. Aí fundou a Escola Pitagórica, a quem se concede a glória de ser a "primeira Universidade do mundo".

A Escola Pitagórica e as atividades se viram desde então envoltas por um véu de lendas. Foi uma entidade parcialmente secreta com centenas de alunos que compunham uma irmandade religiosa e intelectual. Entre os conceitos que defendiam, destacam-se:

- Prática de rituais de purificação e crença na doutrina da metempsicose, isto é, na transmigração da alma após a morte, de um corpo para outro. Portanto, advogavam a reencarnação e a imortalidade da alma;
- Lealdade entre os membros e distribuição comunitária dos bens materiais;
- Austeridade, ascetismo e obediência à hierarquia da Escola;
- Proibição de beber vinho e comer carne (portanto é falsa a informação que os discípulos tivessem mandado matar 100 bois quando da demonstração do denominado Teorema de Pitágoras. A palavra hecatombe que significa mortandade ou carnificina, deve a etimologia ao grego: sacrifício de 100 bois);
- Purificação da mente pelo estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia;
- Classificação aritmética dos números em pares, ímpares, primos e fatoráveis;
- Criação de um modelo de definições, axiomas, teoremas e provas, segundo o qual a estrutura intrincada da Geometria é obtida de um pequeno número de afirmações explicitamente feitas e da ação de um raciocínio dedutivo rigoroso;
- Grande celeuma instalou-se entre os discípulos de Pitágoras a respeito da irracionalidade da "raiz de 2". Utilizando notação algébrica, os pitagóricos não aceitavam qualquer solução numérica para $x^2 = 2$, pois só admitiam números racionais. Dada a conotação mística atribuída aos números, comenta-se que, quando o infeliz Hipasus de Metapontum propôs uma solução para o impasse, os outros discípulos o expulsaram da Escola e o afogaram no mar;
- Na Astronomia, idéias inovadoras, embora nem sempre verdadeiras: a Terra é esférica, os planetas movem-se em diferentes velocidades nas várias

órbitas ao redor da Terra. Pela cuidadosa observação dos astros, cristalizou-se a idéia de que há uma ordem que domina o Universo.

- Aos pitagóricos deve-se provavelmente a construção do cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e a bem conhecida secção áurea;

Na Música, uma descoberta notável de que os intervalos musicais se colocam de modo que admitem expressões através de proporções aritméticas. (WIKIPÉDIA, 2007e).

Pitágoras é o primeiro matemático puro. Entretanto é difícil separar o histórico do lendário, uma vez que deve ser considerado uma figura imprecisa historicamente, já que tudo o que dele sabemos deve-se à tradição oral. Nada deixou escrito, e os primeiros trabalhos sobre os mesmo deve-se a Filolau, quase 100 anos após a morte de Pitágoras.

Não é fácil negar aos pitagóricos o papel primordial para o estabelecimento da Matemática como disciplina racional. A respeito de algum exagero, há séculos cunhou-se uma frase: “Se não houvesse o ‘teorema de Pitágoras’ não existiria a Geometria”. (WIKIPÉDIA, 2007e).

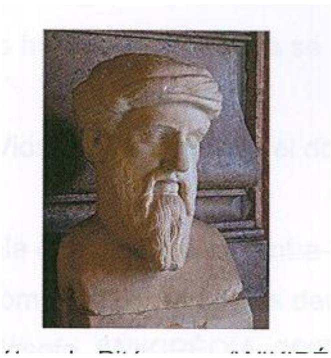


Figura 11: Estátua de Pitágoras. (WIKIPÉDIA, 2007e).

A escola Pitagórica ensejou forte influência na poderosa verve de Euclides, Arquimedes e Platão, na antiga era cristã, na Idade Média, na Renascença e até em nossos dias com o Neopitagorismo. (WIKIPÉDIA, 2007e).

Ainda, atribui-se a Pitágoras e aos pitagóricos a descoberta das progressões harmônicas nas notas de escala musical, por observar que os intervalos musicais e o tom das notas correspondiam aos comprimentos relativos das cordas que vibravam.

Foi devido a Pitágoras e aos pitagóricos que surgiu a base da música que é tocada até os dias atuais.

Pitágoras foi o primeiro filósofo a criar uma definição que quantificava o objetivo final do Direito: a justiça. Ele definiu que um ato justo seria a chamada “justiça aritmética”, na qual cada indivíduo deveria receber uma punição ou ganho quatitativamente igual ao ato cometido. Tal argumento foi refutado por Aristóteles, pois ele acreditava em uma justiça geométrica, na qual cada indivíduo receberia uma punição ou ganho qualitativamente, ou proporcionalmente, ao ato cometido; ou seja, ser desigual para com os desiguais a fim de que estes sejam igualados com o resto da sociedade. (WIKIPÉDIA, 2007e).

Pitágoras também descobriu que dentro do Pentagrama encontra-se o segredo do Retângulo Áureo ou também conhecido como Retângulo de Ouro que para os gregos representava a lei da beleza Matemática.

O Retângulo Áureo foi utilizado como base na criação de obras de arte, obras arquitetônicas, na natureza e em vários outros segmentos que veremos nos capítulos a seguir.

Pensamentos de Pitágoras:

1. - Educai as crianças e não será precisa punir os homens.
2. - Não é livre quem não obteve domínio entre si.
3. - Pensem o que quiserem de ti, traz aquilo que te parece justo.
4. - O que fala semeia; o que escuta recolhe.
5. - Ajuda teus semelhantes a levantar a carga, mas não a carregues.
6. - Com ordem e com o tempo encontra-se o segredo de fazer tudo e tudo fazer bem.
7. - Todas as coisas são números.
8. - A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar , é aproximar-se de Deus.
9. A Evolução é a Lei da Vida, o Número é a Lei do Universo, a Unidade é a Lei de Deus.
10. A vida é como uma sala de espetáculos: entra-se, vê-se e sai-se.
11. A sabedoria plena e completa pertence aos deuses, mas os homens podem desejá-la ou amá-la tornando se filósofo. (WIKIPÉDIA, 2007e).

Os fatos acerca da morte de Pitágoras são tão imprecisos quanto os fatos sobre sua vida. (LIVIO, 2006, p.38).

1.3: LEONARDO DE PISA

Matemático, Leonardo Fibonacci de Pisa (também chamado Leonardo Pisano) viveu três séculos antes de Leonardo da Vinci. Na Argélia, Fibonacci foi instruído por um professor árabe e teve a oportunidade de conhecer os algarismos árabes. (LIVIO, 2006, p. 112 e 113).

Figura 12: Leonardo de Pisa. (WIKIPÉDIA, 2008b).

Em 1202 Fibonacci escreveu o Líber Abaci (Livro do Ábaco), introduzindo na Europa o sistema decimal de números, com zero e tudo.

Atalay (2007), afirma que Fibonacci, também seguindo os árabes, introduziu o conceito de valor posicional, em que cada posição representa uma diferente potência de 10 e elas são dispostas em ordem ascendentes da direita para a esquerda. Cada posição tem por multiplicador uma potência de 10. Assim, no número 12.345,67, por exemplo, o 1 tem por multiplicador 10^4 (ou 10.000); 0 2 tem por multiplicador 10^3 (ou 1.000); o 3 tem por multiplicador 10^2 (ou 100); ... e o 7 tem por multiplicador 10^{-2}.

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
1	2	3	4	5	6	7

Quadro 1: Valor Posicional. (ATALAY, 2007, p. 63)

No capítulo XII do Líber Abaci, Fibonacci propõe um problema muuito estudado por matemáticos e cientistas:

A seqüência criada por Leonardo de Pisa – conhecido como Fibonacci – é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34..., tendo como base a soma dos dois números anteriores. Fibonacci descobriu essa seqüência quase por acaso, quando propôs um problema de reprodução de coelhos.

Uma seqüência numérica como esta, que aparentemente é inofensiva, possui aplicações importantíssimas. Por exemplo, podemos citar:

1. Estudo genealógico de coelhos;
2. Estudo genealógico de abelhas;
3. Comportamento da luz;
4. Comportamento de átomos;
5. Crescimento de plantas;
6. Ascensão e queda em bolsas de valores;
7. Probabilidade e Estatística;
8. Curvas com a forma espiralada como: Nautilus (marinho), galáxias, chifres de cabras da montanha, marfins de elefantes, filotaxia, rabo do cavalo marinho, onda no oceano, furacão; (GONÇALEZ, 2007).

Veremos a seguir o estudo do problema dos coelhos e a sequencia de Fibonacci.

No problema dos coelhos proposto por Fibonacci, as regras são as seguintes (1) Um casal de coelhos novinhos é colocado num cercado. (2) Os coelhos precisam de dois meses até chegar à idade adulta e poder produzir-se. Um casal de coelhos precisa cruzar para gerar um novo a cada mês. (4) A cria, subsequentemente, precisa de dois meses até chegar à idade adulta e também poder começar a reproduzir-se. (5) Nenhum coelho mais pode vir de fora, e nenhum coelho pode sair do cercado. (ATALAY, 2007, p. 63)

Figura 13: Tabela do número de casais a cada mês sucessivo. (BELUSSI, 2006).

A razão entre os termos consecutivos da seqüência de Fibonacci e sua relação com o número de ouro podem ser expressos através de um gráfico, como dado abaixo.

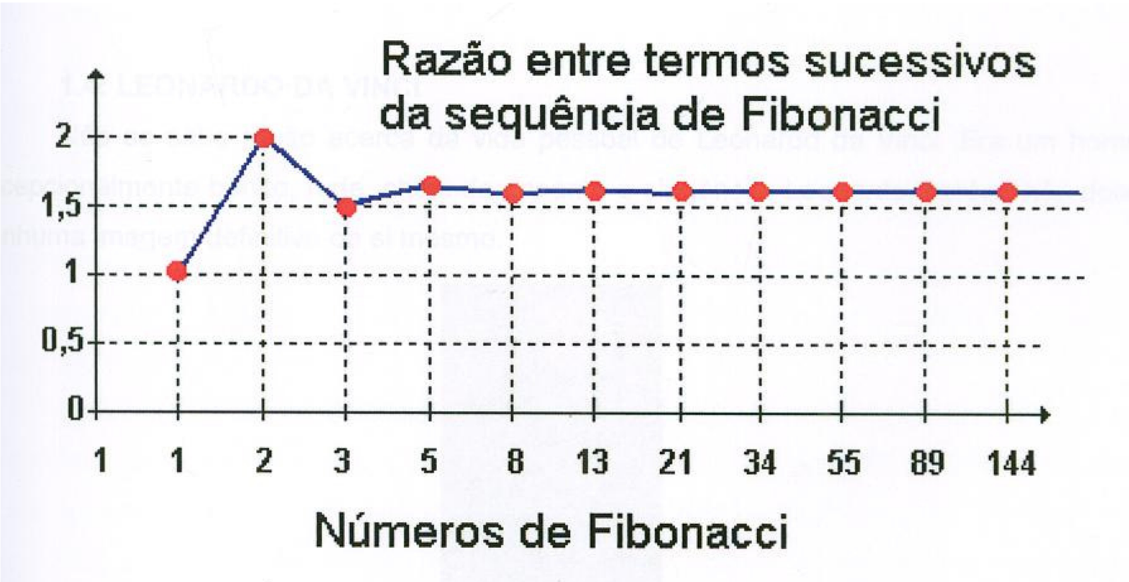


Figura 14: Gráfico que representa a Razão entre termos sucessivos da seqüência de Fibonacci. (GONÇALEZ, 2007).

Razão entre termos sucessivos da seqüência de Fibonacci		
1:1	=	1,000000000000000
2:1	=	2,000000000000000
3:2	=	1,500000000000000
5:3	=	1,666666666666670
8:5	=	1,600000000000000
13:8	=	1,625000000000000
21:13	=	1,615384615384620
34:21	=	1,619047619047620
55:34	=	1,617647058823530
89:55	=	1,618181818181820
144:89	=	1,617977528089890
233:144	=	1,618055555555560
377:233	=	1,618025751072960
610:377	=	1,618037135278510
987:610	=	1,618032786885250
1597:987	=	1,618034447821680
2584:1597	=	1,618033813400130
4181:2584	=	1,618034055727550
6765:4181	=	1,618033963166710
10946:6765	=	1,618033998521800
17711:10946	=	1,618033985017360
28657:17711	=	1,618033990175600
46368:28657	=	1,618033988205320

Quadro 2: Razão Áurea entre termos sucessivos da seqüência de Fibonacci. (LAURO, 2005, p. 37).

Foi o matemático e astrônomo Johannes Kepler que descobriu que a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos converge para a Razão Áurea.

Leonardo Fibonacci foi o principal matemático da Europa medieval.

1.4: LEONARDO DA VINCI

Não se sabe muito acerca da vida pessoal de Leonardo da Vinci. Era um homem excepcionalmente bonito, forte, cheio de encanto e elegância. Leonardo, porém, não deixou nenhuma imagem definitiva de si mesmo.

Figura 15: Auto-retrato de Leonardo da Vinci na velhice. (ATALAY, 2007, p. 161).

Leonardo viveu seus 67 anos numa era não só de guerras freqüentes e de agitação política e social, mas também do auge artístico e intelectual como não se via desde a idade de Ouro da Grécia.

Aos 17 anos tornou-se aprendiz no ateliê de pintura de Andréa di Francesco di Cione, o Verrocchio, talentoso ourives, escultor e pintor.

Algumas das invenções de Leonardo talvez tenham sido executadas, mas a maioria delas ficou apenas no plano teórico.

Os desenhos de Leonardo também são famosos pelo uso da escrita invertida.

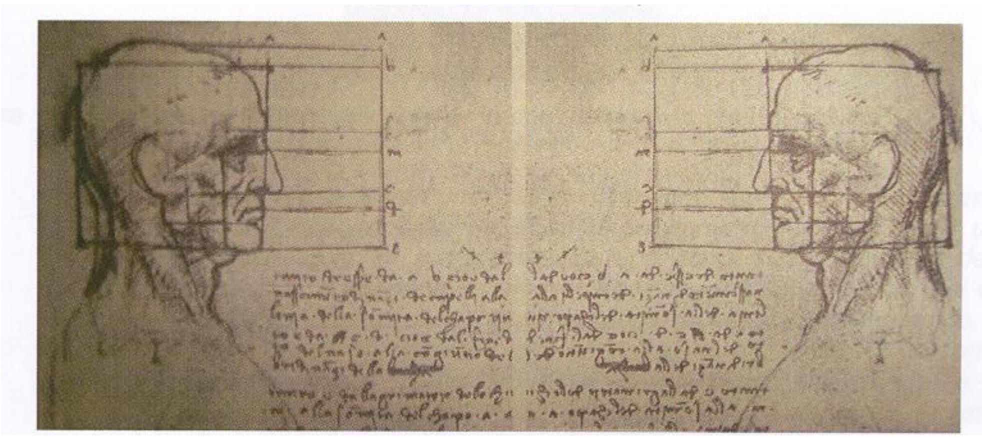


Figura 16: À direita, retrato de perfil de um velho, por Leonardo, acompanhado de escrita invertida. (Castelo de Windsor, Royal Library). À esquerda, o reflexo de imagem, produzido digitalmente. (ATALAY, 2007, p. 28).

Segundo o físico e ilustrador Bulent Atalay, nenhum personagem da História encarna tão bem o ideal renascentista de integração da emoção com a razão, ele relata Leonardo da Vinci como o grande inovador que abriu as portas para a ciência moderna com sua arte e reverência pela estética da Natureza. Leonardo da Vinci, cujos quadros imortais revolucionaram a pintura, era não só um visionário nas artes como também nas ciências.

Suas máquinas voadoras, submarinos e ilustrações anatômicas revelam sua profunda paixão pela ordem geométrica que via nas formas naturais. Para Leonardo, a arte e a ciência refletem a perfeição Matemática do mundo.

Segundo Pater (1977, p. 13) em 1509, Leonardo da Vinci ilustra o livro Divina proportione de Luca Pacioli (1445 – 1517), o fascínio pela Geometria foi tal, consta que ele teria deixado de lado a pintura, para se dedicar unicamente a Geometria e só retomar anos mais tarde para a pintura.

Leonardo teve contribuições significativas no campo da Matemática. O desenho conhecido por “Homem de Vitruvius” ilustra a velha tese Pitagórica (490 – 420 a. C.) segundo a qual “o homem é a medida de todas as coisas”, Leonardo inscreve numa circunferência e num quadrado, um homem de braços e pernas estendidos, assim representando as proporções do corpo humano. O texto que acompanha o desenho transmite-nos a idéia muito concreta de que cada secção do corpo humano é uma medida (porcentagem) do todo.

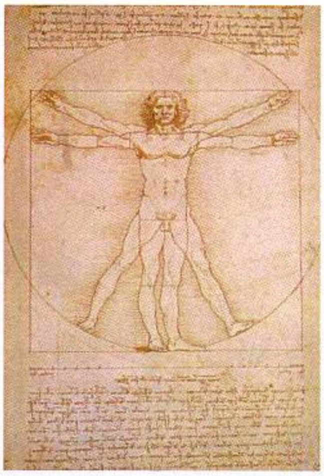


Figura 17: Construção geométrica sobre O Homem de Vitrúvio (1490). (PATER, 1977, p. 35).

> "Os 4 dedos fazem uma palma e 4 palmas fazem 1 pé, 6 palmas fazem um cúbito; 4 cúbitos fazem a altura de um homem. 4 cúbitos fazem um passo e 24 palmas fazem um homem. Se abrir as pernas até termos descido 1/14 de altura e abrimos os braços até os dedos estarem ao nível do topo da cabeça então o centro dos membros abertos será no umbigo. O espaço entre as pernas abertas será um triângulo eqüilátero. O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura.Desde as raízes dos cabelos até ao fundo do queixo é um décimo da altura do homem ; desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é 1/8 da altura do homem; desde o topo do peito até ao topo da cabeça é 1/6 da altura do homem; desde o topo do peito até às raízes do cabelo é 1/7 da altura do homem; desde os mamilos até ao topo da cabeça é ¼ da altura do homem. A maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem. Dede o cotovelo até à ponta dos dedos é 1/5 da parte da altura do homem e desde o cotovelo até ao ângulo da axila é 1/8 da altura do homem. A mão inteira será 1/10 da altura do homem. O início dos órgãos genitais marca o centro do homem. O pé é 1/7 do homem. Da sola do pé até debaixo do joelho é ¼ da altura do homem. Desde debaixo do joelho até o início dos órgãos genitais é ¼ do homem. A distância entre o fundo do queixo e o nariz e entre as raízes dos cabelos e as sobrancelhas é a mesma e é, como a orelha, um 1/3 da cara". (texto que acompanha a gravura do Homem de Vitruvius – PATER, 1977, p. 35).

Este desenho comporta uma forma de resolver um problema, que muitos matemáticos tentaram resolver antes de Leonardo: partindo de um círculo, encontrar um modo de construir geometricamente um quadrado com a mesma área.

Conforme Pater (1997, p. 35):

> "O que parece ter passado despercebido durante os mais de 500 anos deste famoso desenho é que o círculo e o quadrado, de área desigual, são completados por um novo círculo, respectivamente, em que as medidas das áreas passam a ser "iguais" em cada par círculo/quadrado.

Quanto ao novo círculo é surpreendendo perceber como o desenho já o induzia: os dedos médios dos braços horizontais definem este círculo, do mesmo modo que os dedos médios dos braços esticados para cima definem o círculo maior. “É de realçar que a área do quadrado original mede aproximadamente 153,9 cm^2 e a área do círculo associado mede 153,9 cm^2”.

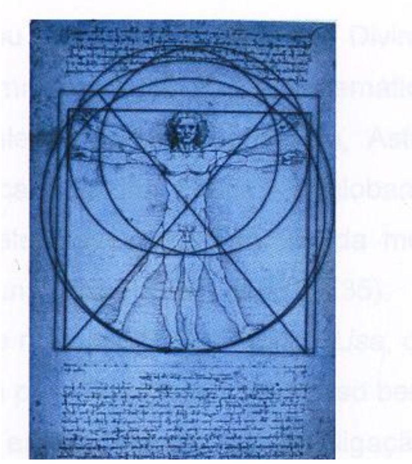


Figura 18: Construção geométrica sobre O Homem de Vitrúvio. (PATER, 1977, p. 35).

E quanto ao segundo quadrado, com a mesma área do círculo que Leonardo desenhou? Basta traçar os diâmetros deste círculo determinados pelos vértices inferiores do quadrado original, ou seja, unindo estes vértices ao umbigo e intersectando com o círculo maior, obtemos dois pontos pertencentes ao lado superior do segundo quadrado. Ficamos, assim, com dados suficientes para desenhar este quadrado; a sua área mede 176,9 cm^2, ao passo que o círculo correspondente tem uma área de 176,9 cm^2. Repare-se que, na base do pescoço da figura humana, Leonardo maçou dois pontos unidos por um segmento. Areta que contém este segmento também contém os pontos de intersecção do quadrado original com o círculo menor. Mais do que isso, os pontos que Leonardo assinalou são precisamente os centros das rotações que transformam os braços horizontais nos braços levantados. “São observações importantes, pois há razões suficientes para crer que fazem parte do conceito do homem de Vitrúvio”. (Dias, 2006).

Um dos quadrados mais célebres de Leonardo da Vinci: Mona Lina, pintado por cerca de 1510, feito em madeira, 77 x 53 cm. Paris, Louvre. Também contém o número de Ouro, ou melhor, o Retângulo de Ouro.

Exemplo:

-Desenhado um retângulo à volta da face, o retângulo resultante é um retângulo de Ouro;

-Dividindo este retângulo por uma linha que passe nos olhos, o novo retângulo obtido também é de Ouro.

Figura 19: Demonstração do Retângulo de Ouro no quadro da Monalisa. (DONALD NO PAÍS DA MATEMÁGICA, Vídeo, 1959).

Leonardo da Vinci ilustrou um livro chamado De Divina Proportione. A integração entre ciência e arte tem muito mais vertente que a Matemática de Fibonacci e a arte de Leonardo: ela também extrai elementos da Arquitetura, Astronomia, Biologia, Química, Geologia, Engenharia, Matemática, Filosofia, Física – englobando a extraordinária gama de interesses de Leonardo. Para ele, esses eram ramos da mesma árvore, parte de uma grandiosa estrutura unificada, o universo. (LIVIO, 2006, p. 35).

Leonardo morreu em 2 de maio de 1519. A Mona Lisa, obra da qual Leonardo nunca se separava, ficou como herança para Francisco I, generoso benfeitor de Leonardo da Vinci.

Há entre a Matemática, a estética e a ciência uma ligação mais ampla que nos leva a pôr os dois Leonardos (o Da Vinci e o Fibonacci) sob a mesma égide intelectual. (LIVIO, 2006, p. 116).

1.5. LUCA PACIOLI

Luca Bartolomeo de Pacioli, nasceu em Sansepolcro no ano de 1445, foi um monge franciscano e célebre matemático italiano.

Educado pelo matemático Dominico Bragadino e, tornou-se professor de Matemática de uma escola local.

Em 1470, na cidade de Veneza, escreveu a sua primeira obra de Matemática na área de Álgebra.

Em 1475 tornou-se o primeiro professor de Matemática da Universidade de Perugia.

Em 1494 publicou sua famosa obra “Samma de Arithmetica, Geometria proportioni et propornaliti” (coleção de conhecimentos de Aritmética, Geometria, proporção e proporcionalidade). Pacioli tornou-se famoso devido a um capítulo deste livro que tratava sobre contabilidade: “Particulario de computies et Scripturis”. Pacioli foi o primeiro a descrever a contabilidade pelo método das partidas dobradas. Por isso foi considerado o pai da contabilidade.

Figura 20: Luca Pacioli. (WIKIPÉDIA, 2008c).

Tornou-se famoso por esta obra, sendo convidado em 1497 para lecionar na corte de Ludovico em Milão, tendo como um de seus alunos e amigo Leonardo da Vinci.

Em 1509 escreveu a sua segunda obra mais importante De Divina Proportioni, ilustrada por Leonardo da Vinci.

Pacioli dedicou o primeiro volume de A Proporção Divino a Ludovico Sforza, e no quinto capítulo ele apresenta cinco razões pelas quais acredita que o nome apropriado para a Razão Áurea deveria ser A Proporção Divina.

1. “Que ela é uma só e não mais”. Pacioli compara o valor único da Razão Áurea com o fato de que a unidade “é o supremo epíteto do próprio Deus”!
2. Encontra uma similaridade entre o fato de que a definição da Razão Áurea envolve exatamente três comprimentos e a existência da Santíssima Trindade, do Pai, do Filho e do Espírito Santo.
3. Para Pacioli, a impossibilidade da compreensão de Deus e o fato de a Razão Áurea ser um número irracional são equivalentes. Em suas próprias palavras: “Assim como Deus não pode ser definido adequadamente nem entendido por meio de palavras, nossa proporção também não pode ser designada por números inteligíveis nem pode ser expressa por uma

quantidade racional, e sempre permanecerá oculta e secreta, e é chamada de irracional pelos matemáticos".

4. Pacioli compara a onipresença e a invariabilidade de Deus com a auto-similaridade associada à Razão Áurea – de que seu valor é sempre o mesmo e não depende do comprimento da linha sendo dividida ou não do tamanho do pentágono no qual o quociente entre os comprimentos calculados.
5. A quinta razão revela uma visão ainda mais platônica da existência do que a expressa pelo próprio Platão. Pacioli sustenta que, assim como Deus conferiu existência a todo o cosmo através da quinta essência, representado pelo dodecaedro, a Razão Áurea conferiu existência ao dodecaedro, já que não se pode construir o dodecaedro sem a Razão Áurea. Ele acrescenta que é impossível comparar os quatro sólidos platônicos (representando terra, água, ar e fogo) entre si sem a Razão Áurea. (LIVIO, 2006, p. 155-156).

Até a época de Pacioli, a Razão Áurea era conhecida apenas por nomes um tanto intimidantes, como "razão extrema e média" ou "proporção que tem uma média e dois extremos", e o próprio conceito só era conhecido pelos matemáticos. A publicação de A Proporção Divina em 1509 renovou o interesse pela Razão Áurea e começou a se tornar disponível para artistas em tratados que não eram excessivamente matemáticos, que eles poderiam realmente usar. (LIVIO, 2006, p. 159).

Continuou a estudar, lecionar e escrever até sua morte no mosteiro de Sansepolcro, em 1517.

Luca Pacioli certamente não pode ser lembrado por sua originalidade, mas sua influência no desenvolvimento da Matemática em geral e na história da Razão Áurea em particular não pode ser negada.

Neste capítulo contamos um pouco da história da Divina Proporção, a Razão Áurea. Contamos também um pouco da história de alguns grandes matemáticos e da importância de suas descobertas e contribuições para o estudo da divina proporção.

Nos próximos capítulos entraremos nas impressionantes formas que a Razão Áurea se apresenta em nossas vidas e nos apresentando uma gama de sugestões de ensino à Matemática.

CAPÍTULO 2: A RAZÃO ÁUREA E AS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Os pitagóricos estudaram as relações entre os segmentos de um pentagrama e descobriram um número de importância histórica na Geometria, Estética, Arquitetura e Biologia. (BELUSSI, 2006).

A arte das figuras geométricas dimensionadas através do número de ouro nos apresenta a perfeição de diversos tipos de construções, levando-nos a conseguir, através do conhecimento das figuras, os cálculos realizados com maior facilidade.

Apresentaremos em seguida algumas figuras geométricas que nos leva à Razão Áurea.

2.1: O SEGMENTO ÁUREO

Um segmento áureo é a forma ideal de dividir um segmento transformando-o em uma proporção tão especial que despertou grande interesse em mentes tão privilegiadas.

Essa divisão seria a correspondente à posição do ponto D na figura 21, que define o chamado "Segmento Áureo", mostrada em destaque. Ela foi considerada por grandes célebres geniais como a forma mais bonita, mais harmônica, mais elegante, esteticamente perfeita, a mais nobre maneira de dividir um segmento de reta.

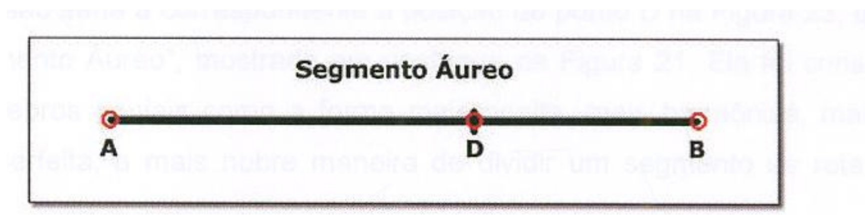


Figura 21: Segmento Áureo. (PIPORO, 2007a).

Ele pode ser dividido em duas partes inserindo-se ma posição qualquer de seu interior um terceiro ponto, digamos o ponto D. Se D for inserido em um local que as distâncias dele às duas extremidades do segmento forem iguais, ele o dividirá ao meio (ou na proporção 1:1, ou ainda "um para um"), como na figura 22.

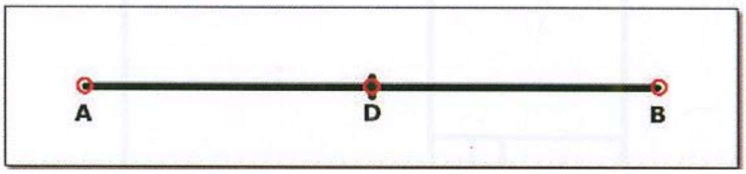


Figura 22: Segmento AB dividio ao meio. (PIPORO, 2007a).

Mas pode-se escolher qualquer outra posição para o ponto D. A figura 23 mostra situações diversas em que o ponto D divide o segmento em diferentes proporções, como 1:2 (um para dois, no ponto D2), 1:3 (um para três, no ponto D3), 1:4 (um para quatro, no ponto D4) ou em qualquer outra, como a mostrada pelo ponto D da figura 23.

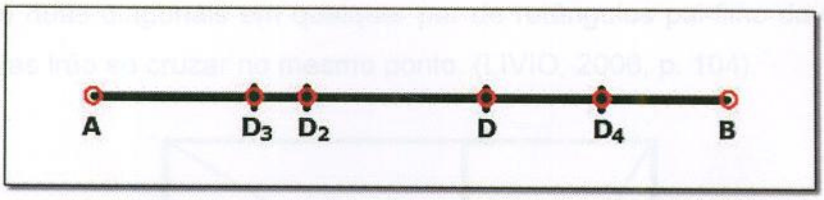


Figura 23: Segmento AB dividido em partes diferentes. (PIPORO, 2007a).

E qual seria esta forma ideal de dividir um segmento, uma proporção tão especial que despertou tamanho interesse em mentes tão privilegiadas?

Ela vem sendo discutida através dos séculos pelas mais privilegiadas mentes das gerações passadas. A história relata que esta pergunta ocupou os pensamentos de gênios do quilate de Johannes Kepler, o astrônomo que concebeu as leis do movimento planetário, Pitágoras, o mago dos números, Euclides, o pai da Geometria, Leonardo da Vinci, o gênio da ciência e das artes, e gente talvez menos ilustre, mas nem por isso menos importante como Leonardo de Pisa (também conhecido como Leonardo Pisano, ou Fibonacci), que concebeu a seqüência de Fibonacci, Luca Pacioli, que dedicou todo um tratado a este tema e centenas, talvez milhares, dos mais ilustres matemáticos, geômetras, astrônomos e cientistas que abrilhantaram a história da humanidade e que acreditaram que sim, há uma forma melhor que todas as demais para dividir um segmento de reta. (PIPORO, 2007a).

Esta divisão seria a correspondente à posição do ponto D na figura 23, que define o chamado “Segmento Áureo”, mostrada em destaque na figura 21. Ela foi considerada por todos estes cérebros geniais como a forma mais bonita, mais harmônica, mais elegante, esteticamente perfeita, a mais nobre maneira de dividir um segmento de reta. (PIROPO, 2007a).

2.2: O RETÂNGULO ÁUREO

Trata-se do retângulo no qual a razão entre o comprimento e largura é aproximadamente o número Phi, ou seja, 1,618.

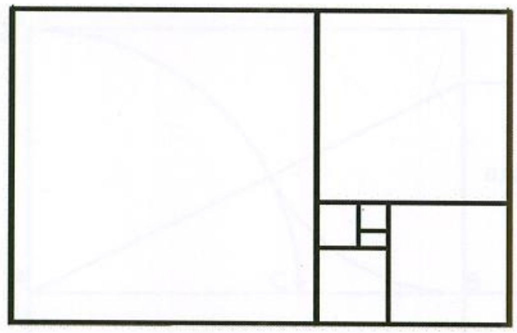


Figura 24: Retângulo Áureo. (LIVIO, 2007, p. 40).

O Retângulo Áureo é o único retângulo com a propriedade de que, ao se cortar um quadrado, forma-se outro retângulo semelhante. (LIVIO, 2006, p. 103).

Desenhe duas diagonais em diagonais em qualquer par de retângulos pai-filho série, como na figura 25, e todas irão se cruzar no mesmo ponto. (LIVIO, 2006, p. 104).

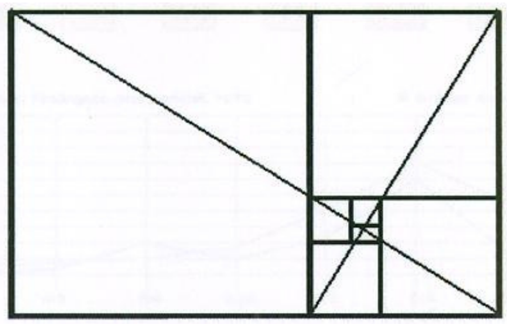


Figura 25: Retângulo Áureo cortado por duas Diagonais. (LIVIO, 2006, p. 104).

O retângulo áureo exerceu grande influência na arquitetura grega. As proporções do Parthenon prestam testemunho desta influência. Construído em Atenas no século V a. C., o Parthernon é considerado uma das estruturas mais famosas do mundo. Quando seu frontão triangular ainda estava intacto, suas dimensões podiam ser encaixadas quase exatamente em um retângulo áureo. (BARISON, 2005).

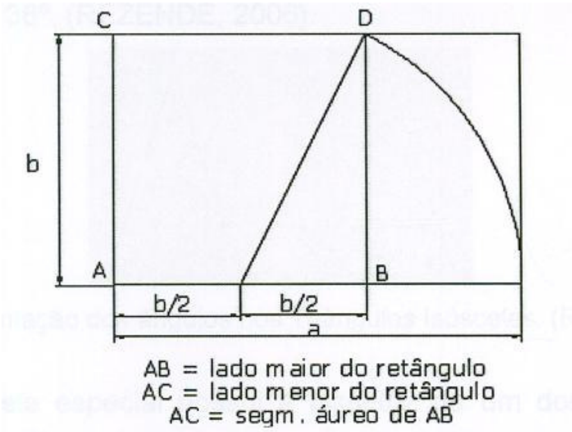


Figura 26: Retângulo áureo a partir de lado maior. (BARISON, 2005).

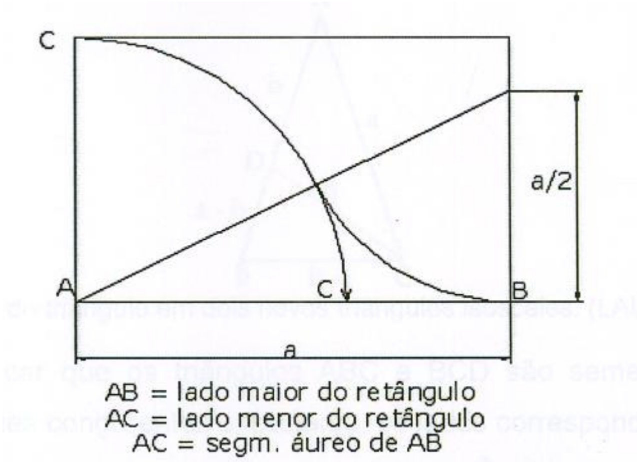
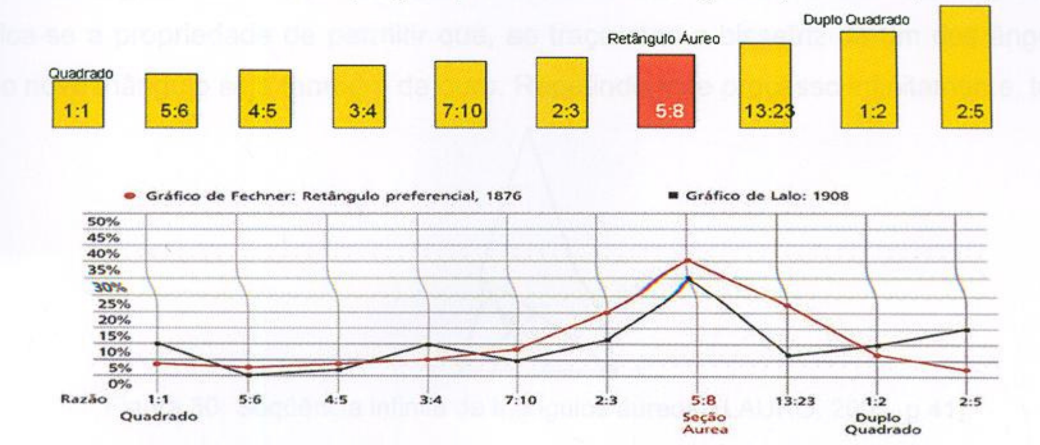


Figura 27: Retângulo áureo a partir do seu lado maior. (BARISON, 2005).

Quadro 3: Tabela das Proporções preferidas em Retângulos. (VISCONTI, 2002).



Na Idade Moderna, o retângulo de ouro dominou o conceito de beleza em todo o mundo ocidental. Como veremos nos próximos capítulos.

2.3: O TRIÂNGULO ÁUREO

Um triângulo diz-se triângulo de ouro quando é um triângulo isósceles no qual a divisão de um dos lados iguais pela base é o número de ouro, possuem ângulos da base de 72º e o ângulo da ápice de 36º. (RESENDE, 2006).

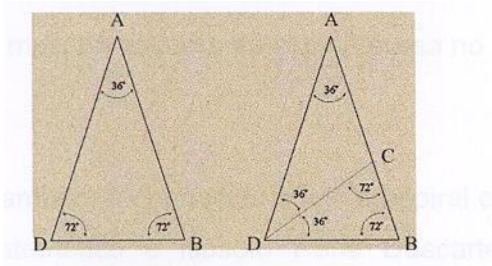


Figura 28: Apresentação dos ângulos nos triângulos isósceles (REZENDE, 2006).

O triângulo isósceles especial possui a bissetriz de um dos ângulos da base que divide o triângulo em dois novos triângulos.

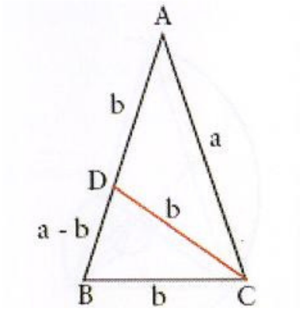


Figura 29: Divisão do triângulo em dois novos triângulos isósceles. (LAURO, 2005, p. 41).

Podemos verificar que os triângulos ABC e BCD são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes congruentes e, portanto, os lados correspondentes proporcionais.

$$\frac{a}{a-b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cong 1{,}618$$

Tal triângulo é chamado “triângulo isósceles áureo”. Assim como no retângulo áureo, identifica-se a propriedade de permitir que, ao traçarmos a bissetriz de um dos ângulos da base, o novo triângulo seja também de ouro. Repetindo este processo infinitamente, temos:

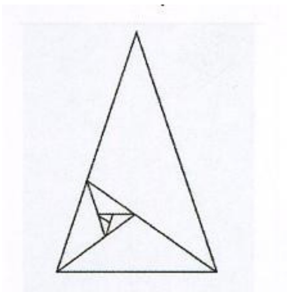


Figura 30: Seqüência infinita de triângulos áureos. (LAURO, 2005, p. 41).

E também podemos obter uma espiral áurea.

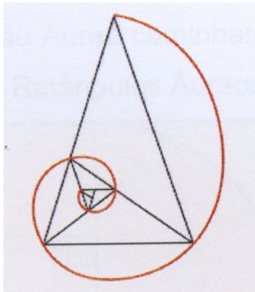


Figura 31: Espiral áurea sobre seqüência infinita de triângulos áureos. (LAURO, 2005, p. 41).

Aprofundar-nos-emos mais no assunto da espiral áurea no item seguinte.

2.4: ESPIRAIS

A espiral logarítmica também é conhecida como espiral eqüiângular. Esse nome foi cunhado em 1638 pelo matemático e filósofo Renê Descartes (1596 – 1650), em cuja homenagem batizou os números usados para localizar um ponto no plano (com respeito aos dois eixos) – coordenadas cartesianas.

Ligando os vértices de um Triângulo Áureo progressivamente, obtemos uma espiral logarítmica.

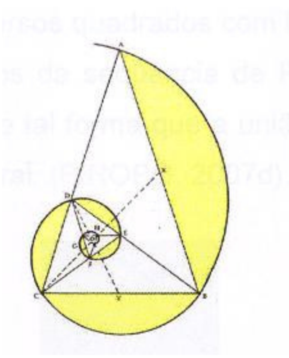


Figura 32: Triângulo Áureo. (BARISON, 2005).

Se desenharmos uma linha reta do pólo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente o mesmo ângulo (conforme figura 33). Os falcões usam essa propriedade quando atacam suas presas.

O fascinante é que a mesma forma espiral encontrada no vôo do falcão também é observada nos “sistemas de estrelas agrupadas em um plano comum, como as da Via-Láctea”. (LIVIO, 2006, p. 141).

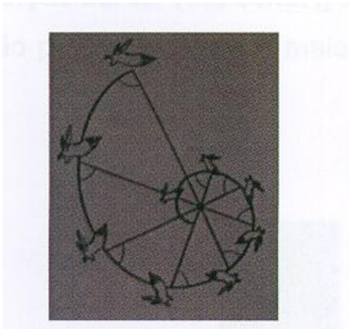


Figura 33: Espiral logarítmica - Vôo do falcão. (LIVIO, 2006, p. 141).

A espiral logarítmica e a Razão Áurea caminham de mãos dadas, são apresentadas tanto pelo Triângulo Áureo como nos Retângulos Áureos, que veremos a seguir.

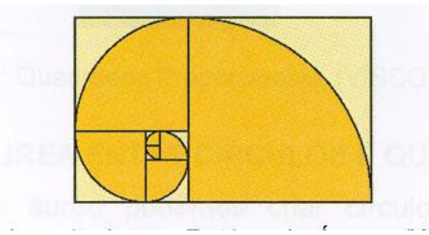


Figura 34: Espiral logarítmica no Retângulo Áureo. (WIKIPÉDIA, 2007g).

Com as concordâncias dessas curvas, obtemos uma espiral como a do Nautilus marinho. Você acha que o “Nautilus” estudou Matemática para construir a sua casa?

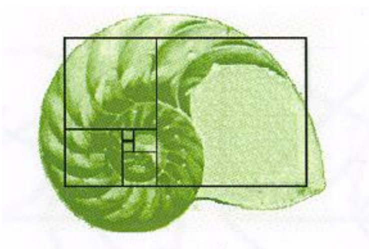


Figura 35: Nautilus no Retângulo Áureo. (WIKIPÉDIA, 2007g).

A idéia básica é construir diversos quadrados com lados cujos comprimentos possam ser expressos por termos sucessivos da seqüência de Fibonacci (desprezando-se o zero inicial, naturalmente) e arrumá-los de tal forma que a união de vértices por uma curva produza uma linha em forma de espiral. (PIROPO, 2007d).

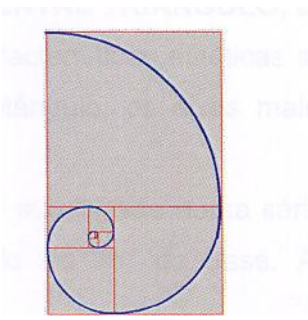


Figura 36: Espiral de Fibonacci. (PIROPO, 2007d).

2.5: PROPORÇÃO ÁUREA E OS QUADRADOS PROPORCIONAIS

Os quadrados proporcionais do diagrama possuem em suas subdivisões uma proporcionalidade entre si, gerando assim uma proporção áurea. (VISCONTI, 2002).

Os quadrados menores são proporcionais aos maiores, colocados numa disposição a qual forma uma espiral áurea.

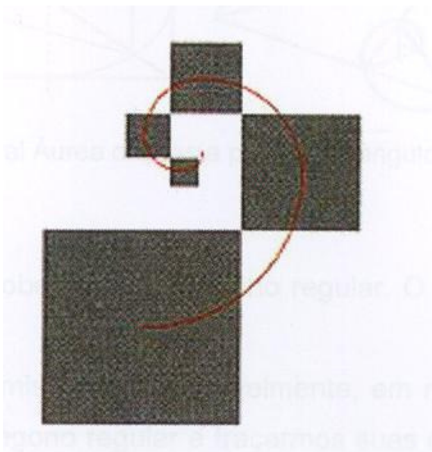


Figura 37: Quadrados Proporcionais. (VISCONTI, 2002).

2.6: PROPORÇÃO ÁUREA ENTRE CÍRCULOS E QUADRADOS

A partir do triângulo áureo podemos criar círculos e quadrados mantendo a proporcionalidade.

O método de construção do triângulo áureo resulta numa sucessão de círculos ou quadrados que guardam, entre si, a proporção áurea. (VISCONTI, 2002).

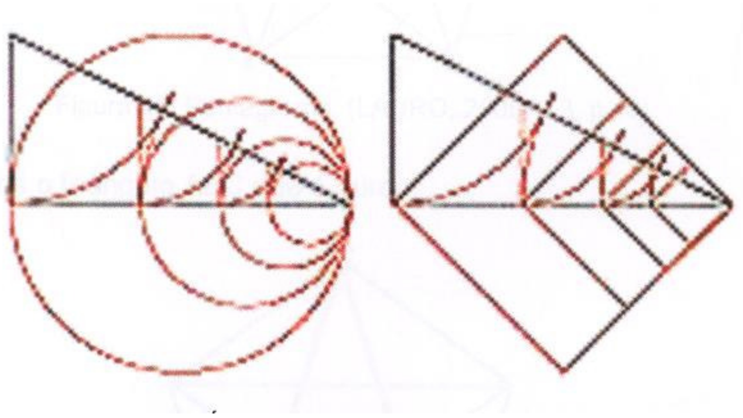


Figura 38: Proporção Áurea etre Círculos e Quadrados. (VISCONTI, 2002).

2.7: PROPORÇÃO ÁUREA ENTRE TRIÂNGULO, ELIPSE E ESPIRAL ÁUREA

A elipse também ostenta características estéticas semelhantes a do retângulo e do triângulo áureo. A exemplo do retângulo, os eixos maior e menor guardam entre si a proporção de 1: 1,618.

Um triângulo áureo pode ser subdividido numa série de triângulos áureos menores, desenhados a partir de um ângulo de 36º da base. A espiral é criada usando-se o comprimento dos lados dos triângulos das subdivisões como raios de um círculo. (VISCONTI, 2002).

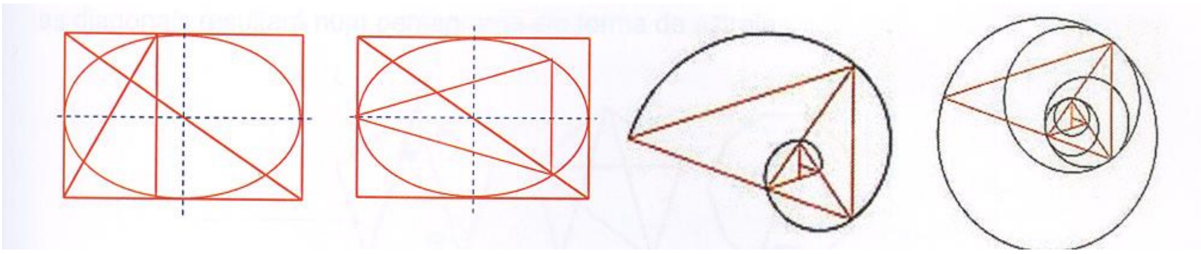


Figura 39: Elipses e Espirais Áurea criadas a partir de triângulos áureos. (VISCONTI, 2002).

2.8: O PENTAGRAMA

A Razão Áurea foi descoberta no pentágono regular. O pentagrama é o pentágono regular estrelado.

Esta figura envolve um misticismo, provavelmente, em razão de suas propriedades pois, ao desenharmos um pentágono regular e traçarmos suas diagonais veremos que elas se cruzam e formam um pentágono interior ao anterior. (LAURO, 2005, P. 40).

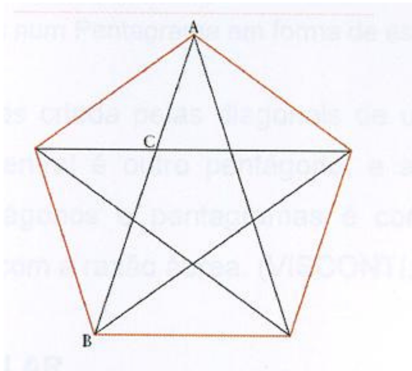


Figura 40: Pentagrama. (LAURO, 2005, v.3, p. 40).

Considerando o triângulo ABC que é áureo:

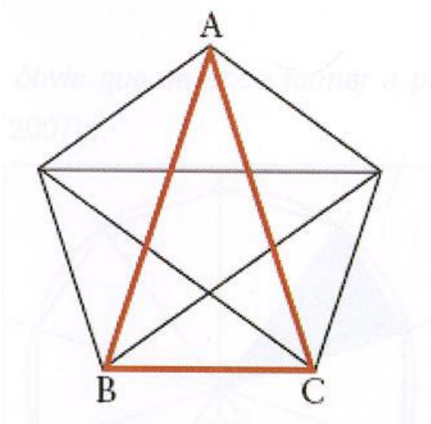


Figura 41: Triângulo Isósceles Áureo no Pentagrama. (LAURO, 2005, v.3, p. 41).

O triângulo áureo é isósceles, e é também conhecido pelo nome de "triângulo sublime" por apresentar propriedades estéticas ao retângulo áureo. É fácil de construí-lo, a partir de um pentágono regular.

Esta construção pode ainda gerar outro triângulo áureo, ligando-se a base do maior triângulo ao vértice do pentágono, no lado oposto. A conexão continuada dos vértices com as diagonais resultará num pentagrama em forma de estrela.

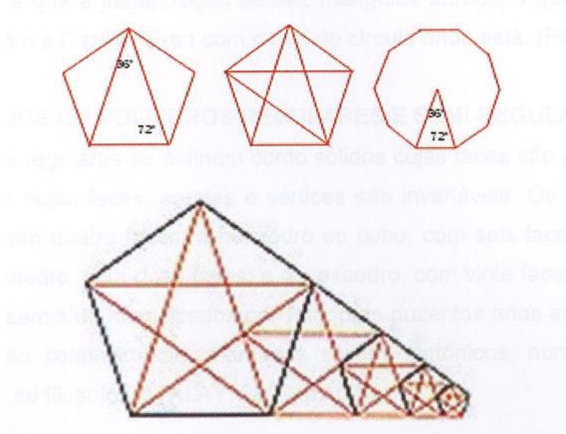


Figura 42: Proporção Áurea num Pentagrama em forma de estrela. (VISCONTI, 2002).

A estrela de cinco pontas criada pelas diagonais de um pentágono regular resulta num pentagrama, cuja parte central é outro pentágono, e assim sucessivamente. Esta progressão de pequenos pentágonos e pentagramas é conhecida como o “alaúde de Pitágoras”, devido à proporção com a razão áurea. (VISCONTI, 2002).

2.9: DECÁGONO REGULAR

O decágono regular, polígono de 10 lados, também pode conter uma série de triângulos áureos, conectando-se o ponto central a qualquer dos vértices adjacentes. (VISCONTI, 2002).

“A figura regular mais óbvia que se pode formar a partir de uma razão Áurea é o decágono regular”. (PIROPO, 2007b).

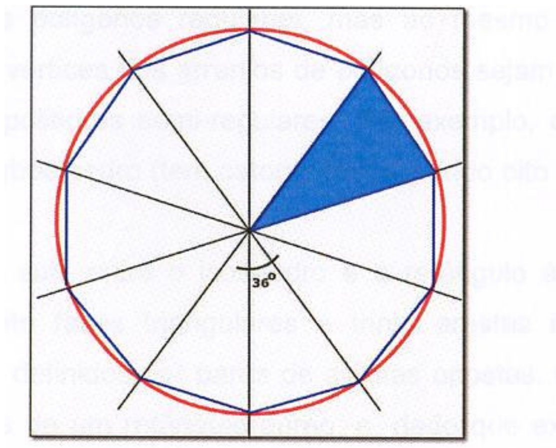


Figura 43: Decágono Regular. (PIROPO, 2007b).

Mas isto é a conseqüência do fato de que se dividindo os 360º de uma circunferência em dez ângulos iguais chega-se ao ângulo interno do decágono regular, 36º, nosso velho conhecido por se tratar do ângulo do vértice de um triângulo áureo. Assim, o decágono regular nada mais é que a justaposição de dez triângulos áureos, o que justifica o fato de que seu lado mantém a Razão Áurea com o raio do círculo onde está. (PIROPO, 2007b).

2.10: SÓLIDOS OU POLIEDROS REGULARES E SEMI-REGULARES

Os poliedros regulares se definem como sólidos cujas faces são polígonos regulares de um único tipo e cujas faces, arestas e vértices são invariáveis. Os poliedros regulares são o tetraedro, com quatro faces; o hexaedro ou cubo, com seis faces; o octaedro, com oito faces; o dodecaedro, com doze faces; e o icosaedro, com vinte faces. Embora todos os cinco tipos já tivessem sido identificados por Pitágoras duzentos anos antes do nascimento de Platão, eles são coletivamente chamados sólidos platônicos, numa homenagem do geômetra Euclides ao filósofo. (ATALAY, 2007, p. 107).

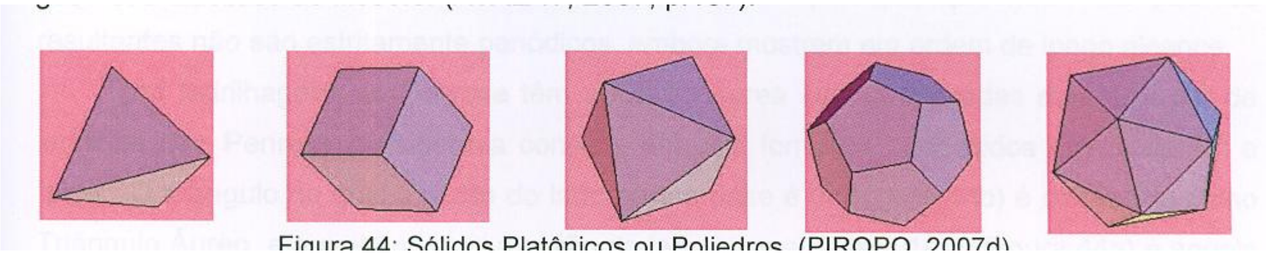


Figura 44: Sólidos Platônicos ou Poliedros, 2007d).

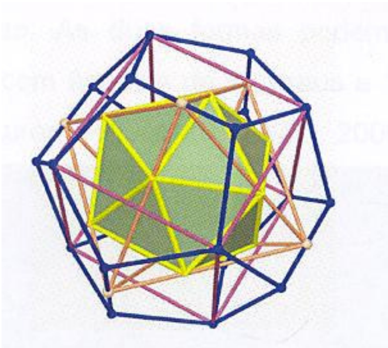


Figura 45: Quatro dos sólidos Platônicos inscritos uns nos outros. (PIROPO, 2007d).

Misturando diversos polígonos regulares, mas ao mesmo tempo obedecendo à exigência de que todos os vértices dos arranjos de polígonos sejam idênticos, obtêm-se as figuras sólidas chamadas poliedros semi-regulares. Por exemplo, o icosaedro (com vinte triângulos eqüiláteros), o cuboctaedro (tem quatorze faces, sendo oito triângulos eqüiláteros e seis quadrados).

Existe uma relação sutil entre o icosaedro e o retângulos áureo. A análise atenta daquele poliedro, com vinte faces triangulares e trinta arestas revela a existência de retângulos áureos que são definidos por pares de arestas opostas. Cada um desses pares forma os lados mais curtos de um retângulo áureo e, dado que existem trinta arestas no icosaedro, há um total de quinze retângulos áureos inscritos. (ATALAY, 2007, p. 113).

2.11: LADRILHOS DE PENROSE

No final da década de 1970, um fascinante padrão de pavimentação Matemática surgiu da mente do físico matemático Roger Penrose, da Universidade de Oxford. Neste padrão, dois tipos de losango (os “losangos magros”, com ângulos internos de 36 e 144 graus e os “losangos gordos”, com ângulos internos de 72 e 108 graus) se dispõem num padrão aperiódico, centro da pavimentação de Penrose. Os losangos magros, bissectados, resultariam em pares de triângulos isósceles com ângulos internos de 72, 36 e 72 graus, ou seja, triângulos áureos. (ATALAY, 2007, p. 105).

A figura geométrica plana mais diretamente relacionada à Razão Áurea é, obviamente, o pentágono regular, que tem simetria quíntupla. Pentágonos, porém, não podem ser usados para preencher totalmente o plano e formar um padrão de ladrilhagem periódica. Por mais que tentemos, sobrarão espaços vazios. Contudo, em 1974, Roger Penrose descobriu dois conjuntos básicos de ladrilhos que podem ser encaixados , para preencher o plano todo e exibir a simetria rotativa quíntupla “proibida”. Os padrões resultantes não são estritamente periódicos, embora mostrem em ordem de longe alcance.

As ladrilhagens de Penrose têm a Razão Áurea escrita em todas elas. Um par de ladrilhos que Penrose considerava consiste em dois formatos conhecidos como “dardo” e “pipa”. O triângulo no qual a razão do lado para a base é ϕ (Figura 44b) é conhecido como Triângulo Áureo, e aquele no qual a razão do lado para a base é $1/\phi$ (Figura 44b) é aquele conhecido como Gnômon Áureo. As duas formas podem ser obtidas cortando-se um formado de diamante ou rombo com ângulos 72 graus e 108 graus, de modo a dividir a diagonal longa em uma Razão Áurea (Figura 45). (Lívio, 2006, p. 230).

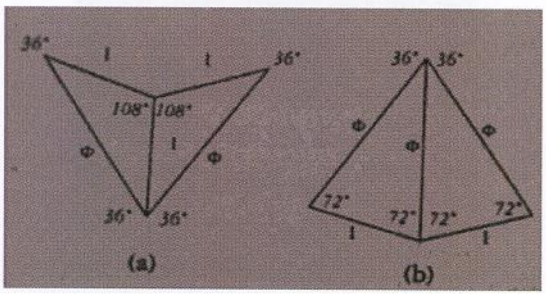


Figura 46: (a) dardo; (b) pipa. (LIVIO, 2006, p. 230).

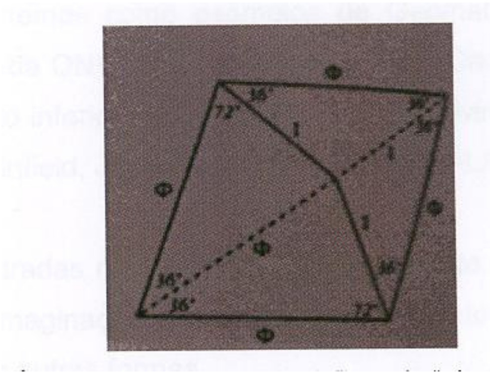


Figura 47: Razão Áurea formada pelo "dardo" e pela "pipa". (LIVIO, 2006, p. 230).

A “invenção” de Penrose ou criações da arte islâmica, seus ladrilhos, a ornamentação das mesquitas e o revestimento aperiódico com polígonos não regulares não deixam de ser manifestações da Razão Áurea e do número Phi. (PIROPO, 2007c).

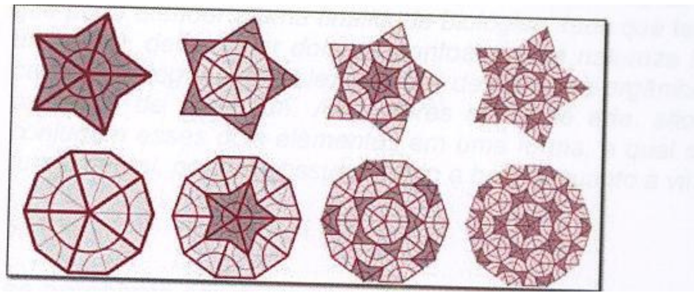


Figura 48: Evolução de um desenho por "deflação". (PIROPO, 2007c).

A figura 48, mostra como é possível derivar figuras cada vez mais complexas a partir de uma combinação simples de um único tipo de ladrilho (“dardo”, na série superior, “pipa” na inferior) no qual se vão derivando recursivamente combinações com um segundo tipo cada vez mais complexas. Todas elas usam apenas dois ladrilhos: “pipa” e “dardo”. E nenhuma delas apresenta qualquer simetria. (PIROPO, 2007c).

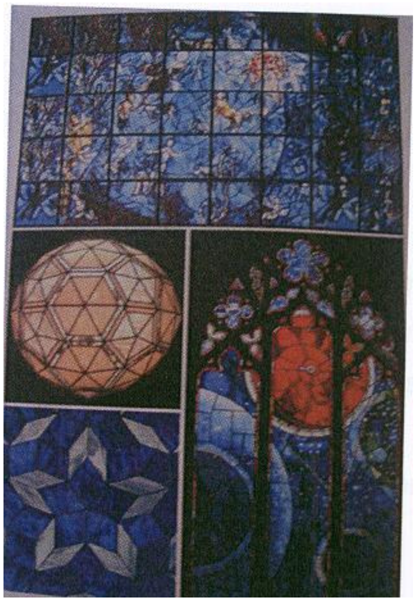


Figura 49: Exemplos de Geometria em Vitrais. (ATALAY, 2007, Prancha 2).

Na figura acima temos como exemplos de Geometria em Vitrais: no alto: Marc Chagall, vitral para a sede da ONU; no centro à esquerda: Candelabro de vitral em forma de icosaedro truncado; canto inferior esquerdo: Roy Miller, pavimentação de Penrose; e no canto direito: Rodney Winfield, janela espacial, 1974. (ATALAY, 2007, p. 162).

As formas encontradas na Geometria representando a Razão Áurea são inúmeras, talvez o quanto nossa imaginação nos permita, no próximo capítulo teremos o prazer de encontrá-las em diversas outras formas.

CAPÍTULO 3: UM PEQUENO NÚMERO E DIVERSAS APLICAÇÕES

> "Em toda obra de arte autêntica, (e por autêntica se deve entender a tudo que pode atender a uma finalidade biológica, tudo que tenha geneticamente um valor), deve haver dois elementos: um de natureza Matemática que dá causa à categoria de beleza, outro de natureza orgânica, que dá origem à categoria de vitalidade. As maiores obras de arte, são, portanto, as que conjugam esses dois elementos em uma forma, a qual se pode chamar de fundamental, porque possuem tanto a beleza quanto a vitalidade".
>
> (READ, 1981)

A Razão Áurea se apresenta em diversos campos entre a arte e a ciência.

O que há de comum entre a estrutura espiral das conchas de alguns seres vivos marinhos, no crescimento das plantas, nas proporções do corpo humano e dos animais, nas pinturas do período renascentista, nas obras Arquitetônicas da Antiguidade Clássica, da Idade Média e até da Era moderna? (LAURO, 2005, p.36).

No contexto da obra humana e do mundo natural existe uma comprovada preferência humana cognitiva pela proporção áurea, comprovada através da história. A arquitetura, onde se encontra o mais importante monumento megalítico da Europa (2000 a.C) é uma das mais antigas evidências do uso do retângulo áureo, com uma proporção de 1:1,618. Encontram-se outras evidências em escritos, na arte e arquitetura dos gregos e civilizações antigas, no século 500 a.C.

Bem mais tarde, os artistas renascentistas estudaram, documentaram e empregaram a razão áurea em esculturas célebres, pinturas e obras de arquitetura.

Além da obra humana, as proporções áureas podem ser encontradas no mundo natural, através das proporções dos seres humanos e dos padrões de crescimento de muitas plantas, animais e insetos. (VISCONTI, 2002).

O que uma pinha, um corpo humano e uma truta têm em comum?

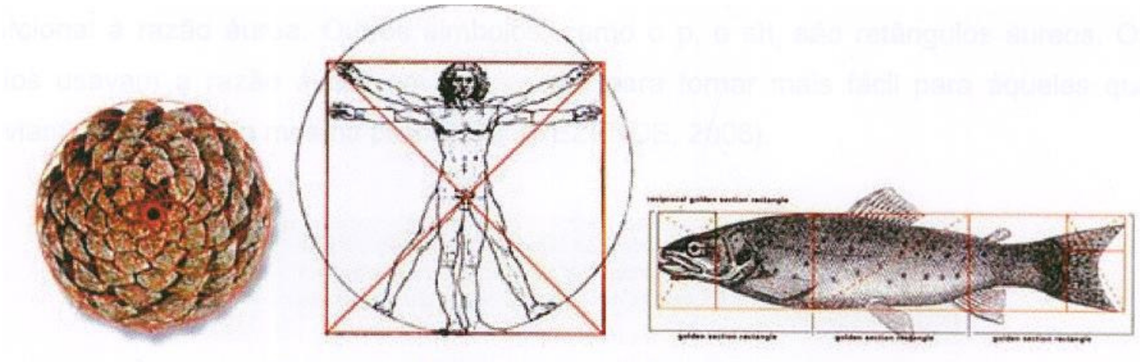


Figura 50: À esquerda: pinha; Centro: corpo humano (homem Vitruviano); à direita: truta. (VISCONTI, 2002).

Todos são providos de sistemas naturais de proporções que propiciam os fundamentos para o trabalho de artistas, arquitetos e designers.

Ao desvendar estes sistemas naturais, revela-se a misteriosa relação entre a Matemática e a beleza. Conduz-se até o reino da Geometria, das Seções de Ouro da Proporção Divina e da Sequência de Fibonacci, em linguagem acessível a muitos dos avessos à Matemática.

Apresentaremos neste capítulo algumas áreas onde podemos encontrar a misteriosa Razão Áurea.

3.1: A RAZÃO ÁUREA NO EGITO ANTIGO

Muitos hieroglíficos, escrita antiga têm proporções baseadas na Razão Áurea.

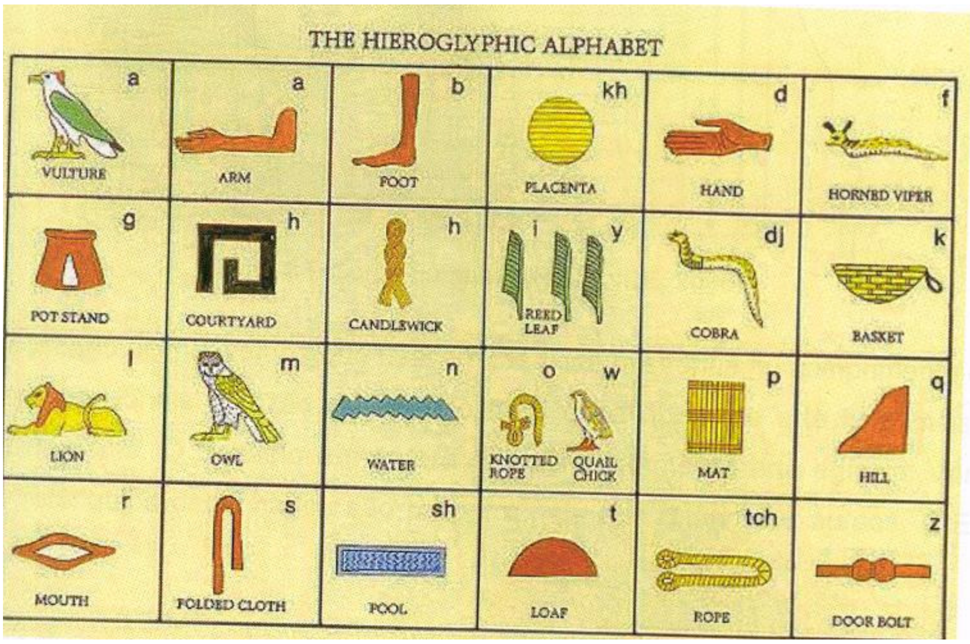


Figura 51: Hieroglíficos. (REZENDE, 2006).

Na figura 49, vemos que a letra h é na verdade uma espira dourada. O uso da mão e pé como hieroglíficos mostra que os egípcios eram cuidadosos com o corpo como proporcional à razão áurea. Outros símbolos, como o p, e sh, são retângulos áureos. Os egípcios usavam a razão áurea em sua escrita para tornar mais fácil para aqueles que escreviam o fazer com a mesma proporção. (REZENDE, 2006).

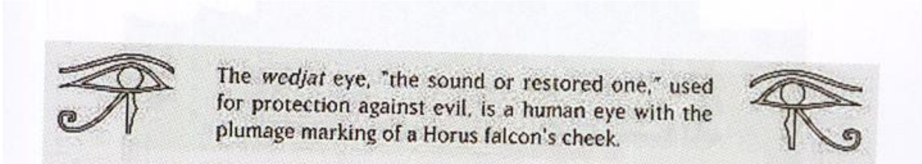


Figura 52: O Olho de Rã. (REZENDE, 2006).

O olho de Rã é um importante símbolo dos egípcios antigos. Ele simboliza o rei sol Rã, o mais importante de seus deuses. Ele pode ser visto nos sarcófagos dos mortos. O olho pode ser redesanhado como um retângulo áureo.

Durante grande parte da história egípcia, as proporções do desenho humano foram relacionadas com as linhas da palma da mão. Essas medidas eram baseadas em uma razão divina, mais tarde denominada razão áurea.

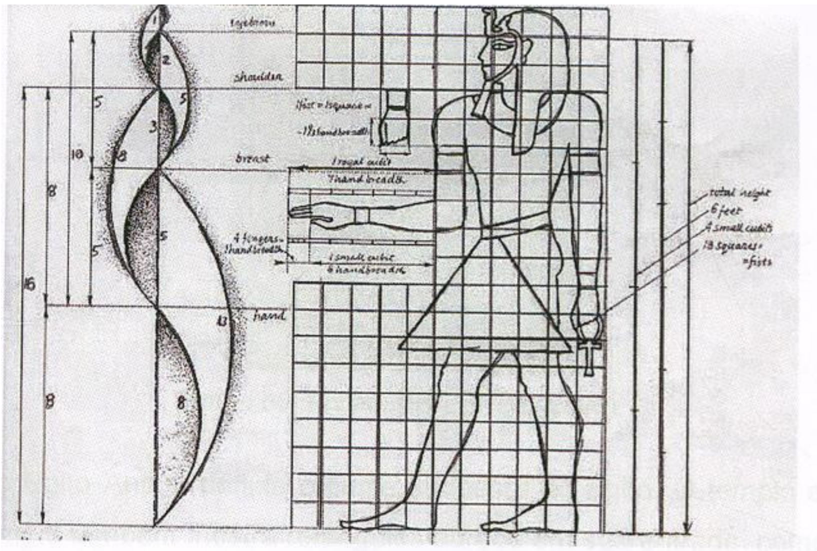


Figura 53: Corpo humano. (REZENDE, 2006).

No sedenho acima, vemos que usavam medidas baseadas no comprimento do corpo por serem proporcionais à razão áurea. Isto fazia suas obras de arte ficar mais bonitas olhadas rapidamente. O trabalho a mão era muito importante na arte egípcia. Vemos que muitos retângulos desenhados são proporcionais aos retângulos áureos. (REZENDE, 2006).

3.2: A RAZÃO ÁUREA NA ARQUITETURA

A história deste enigmático número perde-se na antiguidade. (MARQUES, 2008).

A razão áurea também se mostra presente nos templos egípcios.

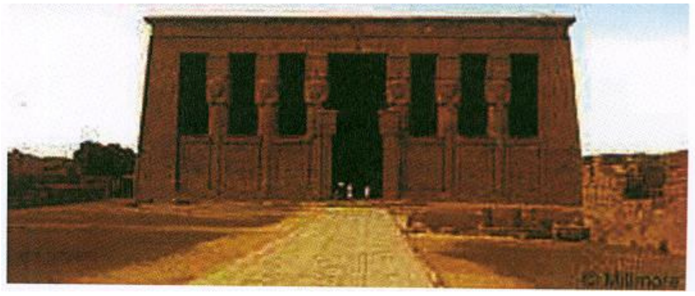


Figura 54: Templo de Dendur. (REZENDE, 2006).

Na figura acima vemos que os arcos do templo estão alinhados para formar retângulos decrescentes que são proporcionais à razão áurea.

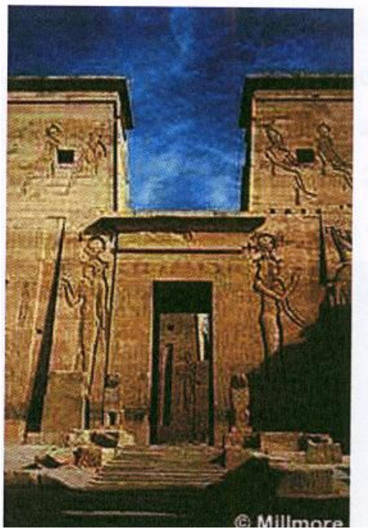


Figura 55: Philae. (REZENDE, 2006).

Philae no Egito Antigo definia o limite sudoeste do Egito. O templo era dedicado à deusa Isis. O templo também mostra retângulos áureos em sua entrada, como no templo de Dendur.

No entanto, o maior exemplo da aplicação se encontra nas pirâmides egípcias, e obedecem à razão áurea. (REZENDE, 2006).

No Egito, as pirâmides de Gizé foram construídas considerando a Razão Áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. (BELUSSI, 2006).

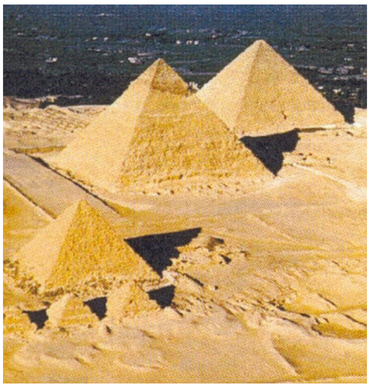


Figura 56: Pirâmides de Gizé. (GONÇALEZ, 2007).

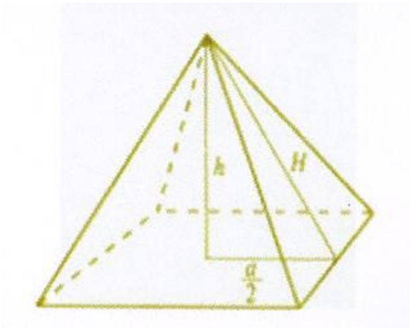


Figura 57: Representação da Pirâmide com a Razão Áurea. (REZENDE, 2006).

O retângulo áureo foi muito utilizado nas construções gregas. Os gregos o consideravam a figura geométrica mais harmoniosamente dimensionada e o Parthenon, ou templo da deusa Atena, construído no século V a. C. pelo arquiteto e escultor Fídias, é um dos mais famosos exemplos dessas construções. (LAURO, 2005, P. 41).

O Parthenon possui, na fachada principal, um quase exato retângulo áureo.

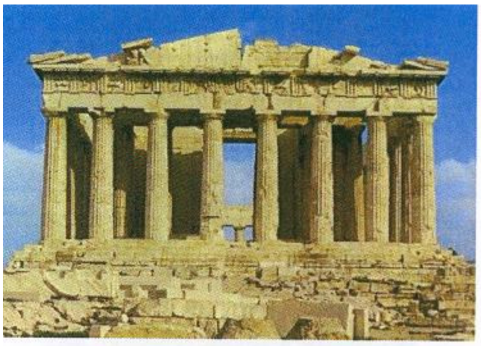


Figura 58: Parthenon. (PIROPO, 2007e).

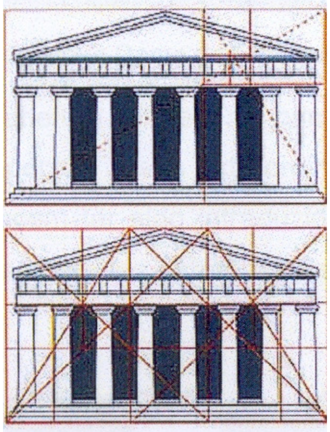


Figura 59: Parthenon e Razão Áurea. (VISCONTI, 2002).

Vale lembrar que as esculturas que compõem essa grande obra também possuem o Retângulo de Ouro. (LIVIO, 2006, p. 91).

A composição de a Church Lane, Ledbury, Inglaterra se baseia na subdivisão do retângulo áureo que é vista no detalhe da figura 58. É o “ponto atrativo”, o qual neste exemplo se localiza na parte inferior do retângulo. (ATALAY, 2007, p. 158).

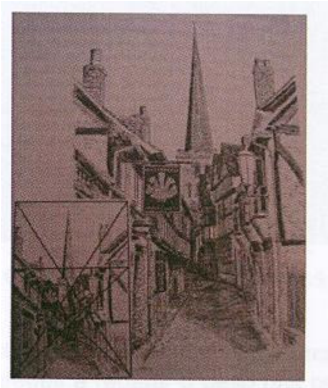


Figura 60: Church Lane, Ledbury, Inglaterra. (ATALAY, 2007, p. 158).

Outra obra arquitetônica importante é a Catedral de Notre Dames de Chatres, na França, considerada a rainha das catedrais góticas, a fonte em pedra e luz de toda uma fé. (LAURO, 2005, p. 42).

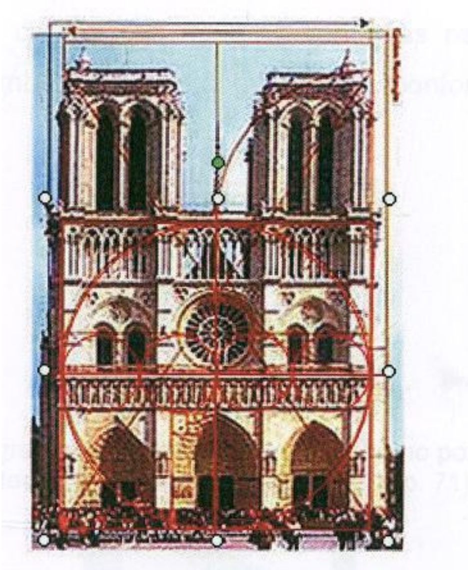


Figura 61: Catedral de Notre Dame de Chatres. (VISCONTI, 2002).

Os historiadores de arquitetura oferecem primorosas explicações artísticas e estruturais de quase todos os aspectos dessa extraordinária edificação, que se ergue tão alto, com arcobotantes[1] que parecem ter sido introduzidos ali como adorno, e não como recurso crucial para sustentar imensas paredes enfraquecidas por janelas colossais. (ATALAY, 2007, p. 165-166).

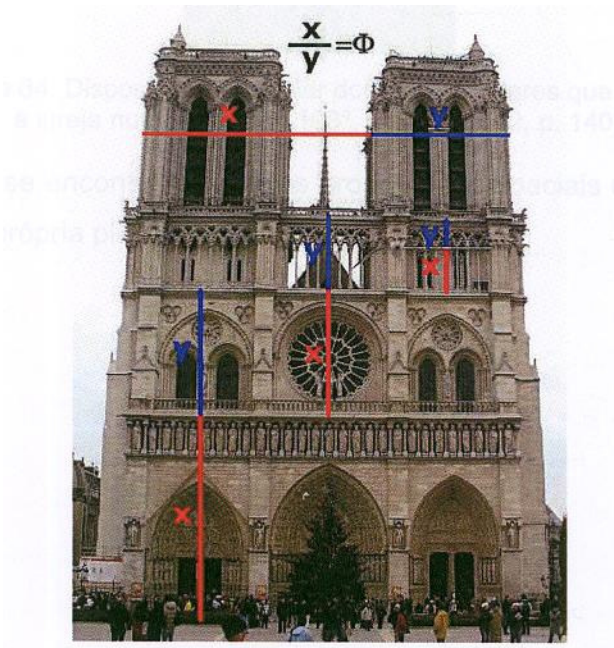


Figura 62: Catedral de Notre Dame de Chatres. (AMARAL, 2007).

[1] O arcobotante (ou botaréu) é uma construção em forma de meio arco, erguida na parte exterior dos edifícios românicos e góticos para apoiar as paredes e repartir o peso das paredes e colunas só assim se conseguiu aumentar as alturas das edificações dando forma (beleza), função (estrutura com a técnica da época. (WIKIPÉDIA 2008g

O retângulo que envolve a fachada da catedral abrange a maior porção da fachada, e o retângulo áureo recíproco envolve as duas torres.

As linhas de regulação são as diagonais, que vão se encontrar logo acima da janela do clerestório[2], cruzando os cantos das maiores variações na superfície da catedral. O centro da porta de entrada também é um retângulo áureo, conforme mostra o diagrama. (LE CORBUSIER, 1998).

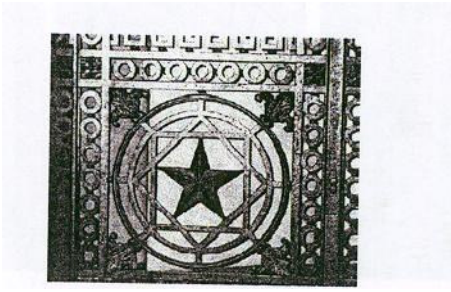


Figura 63: Pentagrama no centro de um octágono no portão do coro da Catedral de Notre Dame de Chatres. (KLUG, 2002, p. 71).

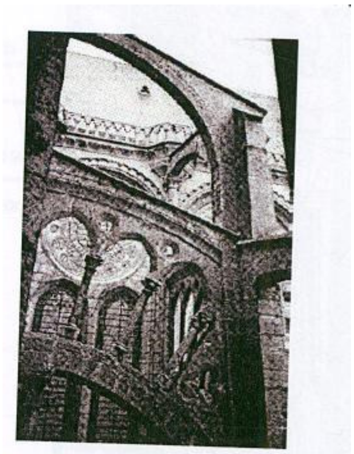


Figura 64: Disposição retangular dos arcos e pilares que apóiam a igreja num ângulo de 108º . (KLUG, 2002, p. 140).

A razão áurea se encontra em muitas proporções espaciais da catedral. O retângulo áureo foi utilizado na própria planta da igreja.

[2] Em arquitetura clerestório é o nome que se dá à parte da parede de uma nave, iluminada naturalmente por um conjunto de janelas laterais do andar superior das igrejas medievais do estilo gótico. Ge uma forma geral, refere-se à fiada de janelas altas, dispostas sobre um telhado adjacente. O seu uso remonta às basílicas romanas. (WIKIPÉDIA, 2008j).

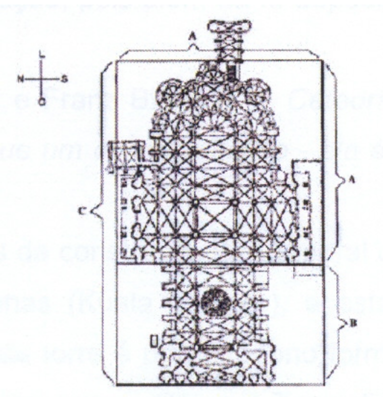


Figura 65: Planta da Catedral de Chatres. (KLUG, 2002, p. 75).

No portal oeste, entrada principal da catedral, há “figuras vestidas”, esculturas que representam o profeta Davi, a rainha de Sabá e o rei Salomão, e que foram estruturadas de acordo com a razão áurea. (LAURO, 2005, p. 42).

Figura 66: Figuras vestidas do portal oeste. (KLUG, 2002, p. 5).

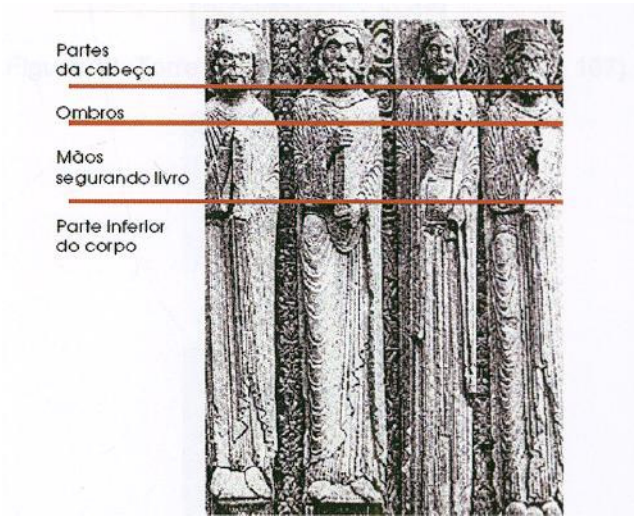


Figura 67: Retângulo áureo nas figuras vestidas do portal oeste. (KLUG, 2002, p. 76).

Logo essa grande arquitetura é considerada uma das obras mais harmônicas e de grande significado para a população, pois além da fé depositada nela, a igreja encanta com seus incríveis mistérios.

Segundo Grazyna Fosar e Franz Bludorf: “ A Catedral de Chatres é mais que uma casa de Deus normal; é mais que um objeto artístico – ela é um local de iniciação cheio de mistérios”. (KLUG, 2002, p. 89).

Quase um milênio depois da construção da Catedral de Chatres nos deparou com a construção das Torres Petronas (Kuala Lampur), a estatal petrolífera da Malásia. No projeto estrutural, a base de cada torre é um octógono formado pelo engate de um par de quadrados, emblemáticos da união entre o Céu e a Terra. Enormes colunas de concreto de alto desempenho (HPC) e aço se erguem de cada ponto de intersecção dos quadrados, conferindo integridade estrutural aos dois imensos edifícios, cujas faces externas são recobertas com inox e vidro. Depois, tem-se a impressão de que se elevam seções cada vez menores, semelhantes às de um telescópio. A medição desses segmentos revela que as proporções deles obedecem ao esquema:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{CE}{DE} = \frac{DE}{CD} = \phi$$

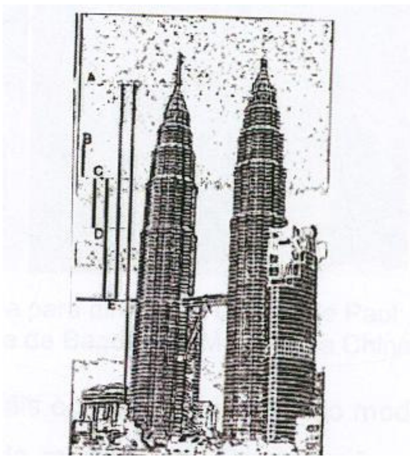


Figura 68: Torres Petronas. (ATALAY, 2007, p. 167).

Figura 69: Torres Petronas (atualmente). (STUART, 2006).

A escadaria circular dupla do Museu Vaticano, projetado por Leonardo da Vinci. (ATALAY, 2007, prancha 5).

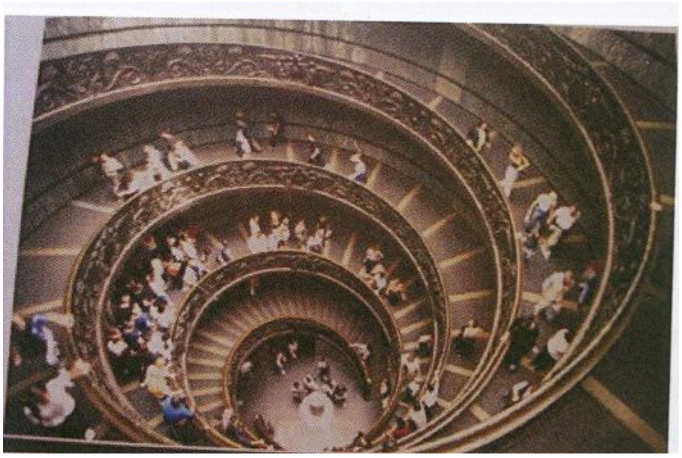


Figura 70: Escadaria circular dupla do Museu do Vaticano. (ATALAY, 2007, prancha 5.)

Na arquitetura podemos encontrar a Razão Áurea em uma imensidão de construções até os dias de hoje.

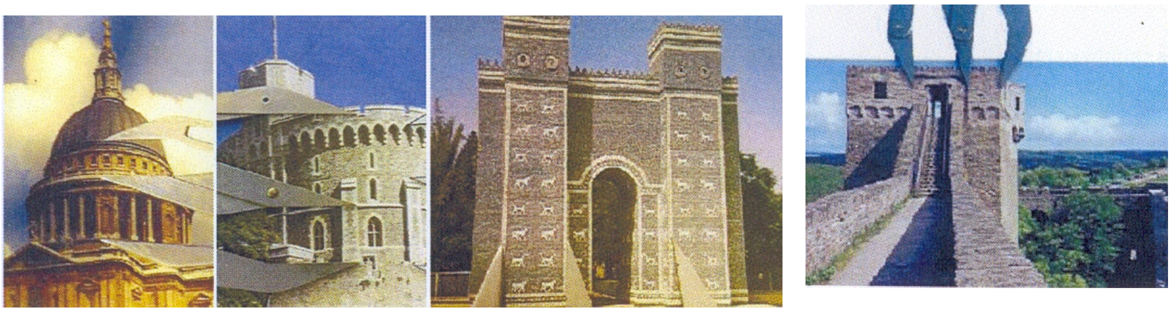


Figura 71: Da esquerda para direita - A Cúpula de Paul; o Castelo de Windsor; o Portão da cidade de Bagdá; a Muralha da China. (PRADO, 2004).

Uma das edificações mais conhecidas do mundo moderno é o monumental, conjunto arquitetônico que abriga a sede mundial das organizações das Nações Unidas em Nova Iorque, EUA. Talvez não se possa medir na figura, mas uma observação do desenho da fachada do prédio comprova que seus lados mantêm a proporção Áurea. (PIPORO, 2007e).

Este edifício foi desenhado por Le Corbusier, pelo brasileiro Oscar Niemeyer e pelo inglês Sir Howard Robertson, em 1947. (WIKIPÉDIA, 2008f).

Figura 72: Demonstração do Retângulo Áureo na Sede da ONU. (AMARAL, 2007).

Falando em estruturas monumentais, não podemos esquecer a "Torre CN" (seu nome deve-se à empresa ferroviária "Canadian National", construtora e original proprietária da torre), símbolo da cidade de Toronto, no Canadá e mostrada na Figura 73. Ela é considerada como a estrutura mais alta do mundo em terra firme e não sustentada por cabos. Sua altura é de 553,33 metros e seu observatório principal situa-se a uma altura de 342 metros (para comparação: ainda segundo a mesma fonte, a altura do Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro, é de 366 metros). Divida a altura total pela altura do observatório com precisão de três casas decimais e obtenha exatamente 1,618. (PIROPO, 2007e).

Figura 73: No Canadá encontramos o Phi na torre CN, em Toronto. (PIROPO, 2007e).

O conjunto de edificações conhecido como “Engineering Plaza” que abrigará as instalações da faculdade de engenharia da Universidade Politécnica Estadual da Califórnia, EUA, a “Cal Poly”. Na planta mostrada do lado esquerdo da Figura 74, todo o complexo foi projetado em torno de uma forma básica, a espiral de Fibonacci, que se desenvolve em toda a área, determinando a orientação geral do projeto. Na foto ao lado direito da mesma figura, não se trata de acaso: a espiral está claramente desenhada no piso da área central da Plaza, ainda em construção. Neste caso os arquitetos deixaram claro que prestavam uma homenagem a Fibonacci, sua seqüência e ao número Phi na própria concepção do projeto. (PIROPO,2007e).

Figura 74: Engineering Plaza. (PIROPO, 2007e).

3.3: A RAZÃO ÁUREA NAS ARTES

Vários pintores utilizaram à razão Áurea em suas obras, porém como desejamos mostrar a presença da Razão Áurea nessas harmoniosas obras de artes, optaremos por falar principalmente de Leonardo da Vinci, foi ele quem realmente chamou a Razão Áurea de Divina Proporção e também a utilizou na maior parte de seus trabalhos.

A “Anunciação”, obra que foi pintada por D’ vinci entre os anos de 1472 1475, que apresenta a cena do arcanjo Gabriel informando à Virgem Maria que a mesma conceberia Jesus Cristo. Esta obra transparece muita harmonia e isso se dá pelo fato desta pintura ser dividida várias vezes pelas Proporções Áureas. (PIROPO, 2007e).

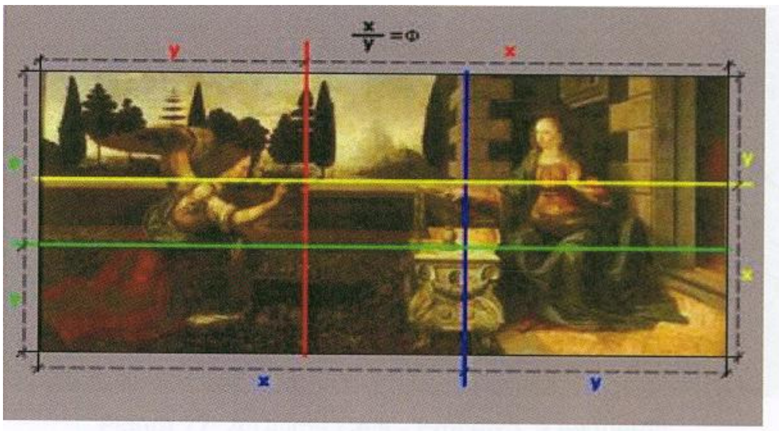


Figura 75: A Anunciação. (PIROPO, 2007e).

Na obra “Virgem dos Rochedos” podemos analisar a razão entre a altura e na largura da pintura e encontraremos o valor de 1,64 um número bem próximo de ϕ. (LIVIO, 2006, p. 187).

Figura 76: A Virgem dos Rochedos. (ATALAY, 2007, prancha 14).

Em a “Última Ceia” criada entre os anos de 1495 e 1498, Leonardo apresenta na figura a imagem de Jesus Cristo anunciando aos Apóstolos que um deles o trairá. O mais interessante é que podemos verificar na pintura abaixo que a imagem de Jesus Cristo preenche quase exatamente um triângulo áureo e a linha que divide a mesa é exatamente a Divina Proporção. (PIROPO, 2007e).

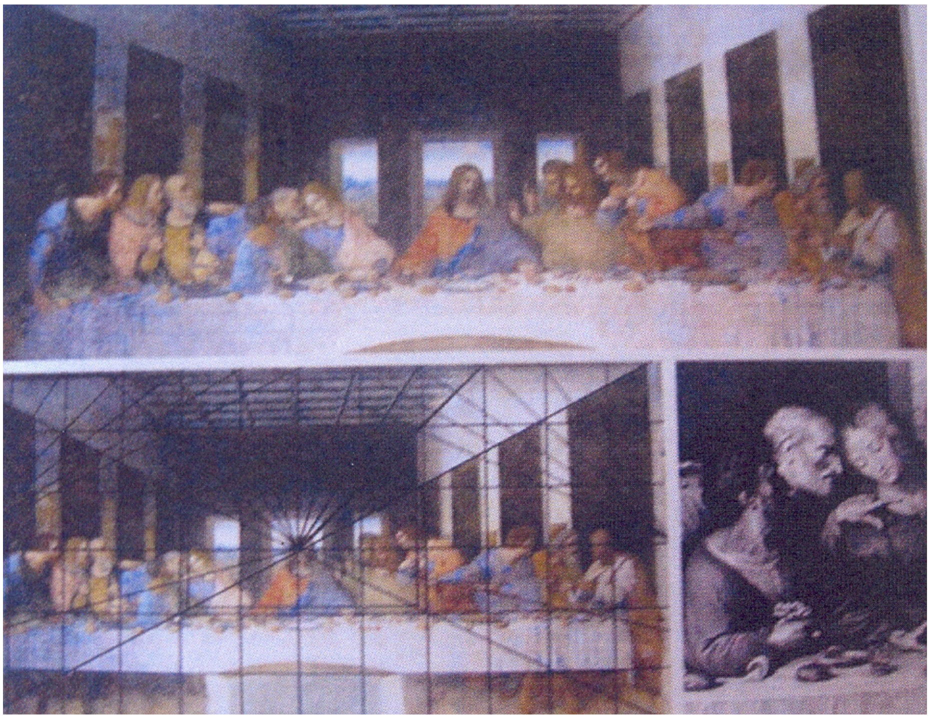


Figura 77: A Última Ceia - Embaixo, à esquerda: O estudo perspectivo do quadro; à direita: Detalhe do quadro. (ATALAY, 2007, prancha 8).

Os três famosos retratos femininos de Leonardo: um retângulo áureo foi superposto a cada um dos três retratos, incorporando a área desde o topo da cabeça até o limite do vestido.

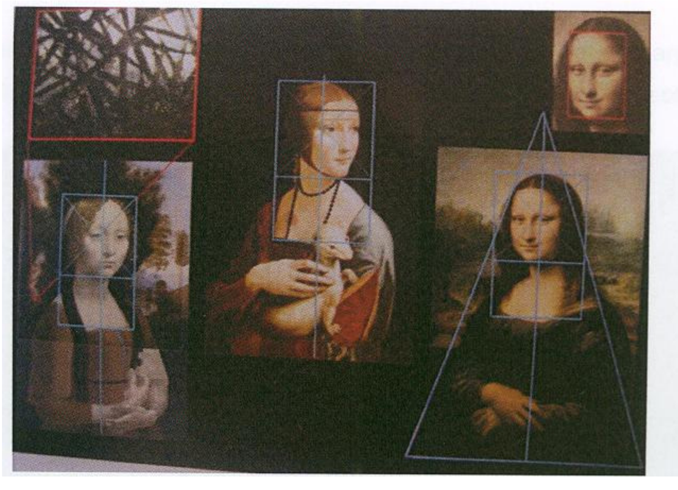


Figura 78: à esquerda: Ginevra de'Benci; ao centro: Cecília Gallerani; à direita: Mona Lisa. (ATALAY, 2007, prancha 15).

Dentre todas essas obras a que realmente o deixou famosa foi “Mona Lisa” (La Gioconda), apreciada pelo mundo inteiro foi concretizada em 1502 e retrata o rosto de uma mulher. Muitas pessoas e inclusive estudiosos afirmaram que Leonardo teria utilizado as suas próprias características faciais na obra, ou seja, o seu próprio retrato com traços de mulher. Ele nunca se separou deste quadro até a sua morte, deixando-o de herança para seu generoso benfeitor, Francisco I. (LIVIO, 2006, p. 33).

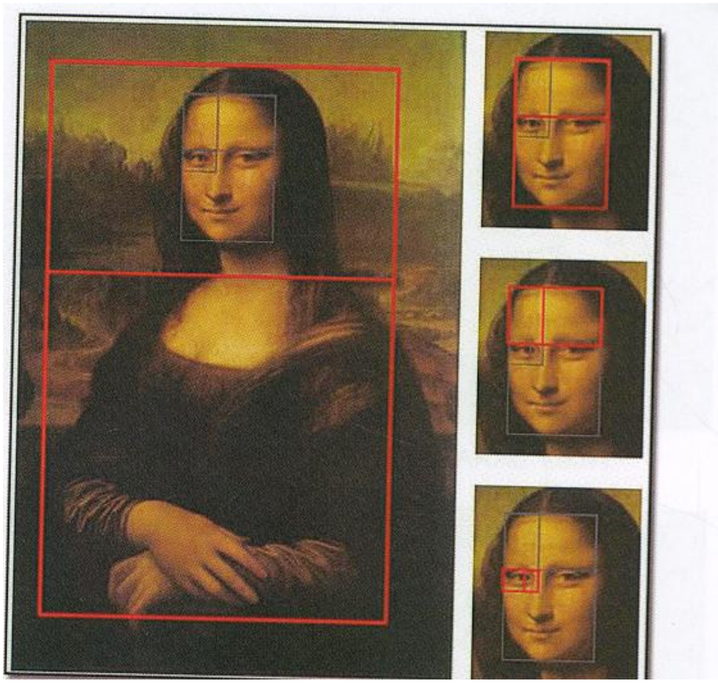


Figura 79: A Mona Lisa. (AMARAL, 2007).

Apresentaremos agora mais algumas de outros artistas que também utilizaram a harmoniosidade da Razão Áurea.

O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dali: a Razão entre a largura e a altura desta tela é de 1,603, próxima da razão áurea. No teto encontra-se um dodecaedro.

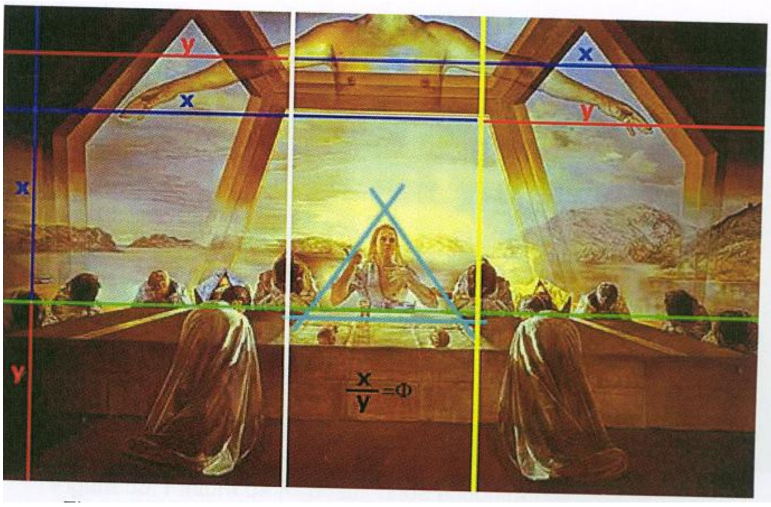


Figura 80: O Sacramento da Última Ceia. (PIROPO, 2007e).

A belíssima Vênus, ou Afrodite, deusa da beleza em um quadro que retrata o mito de seu nascimento. As proporções seguem aquelas do retângulo áureo nessa pintura de Bouguereau.

Figura 81: Deusa da Beleza. (AMARAL, 2007).

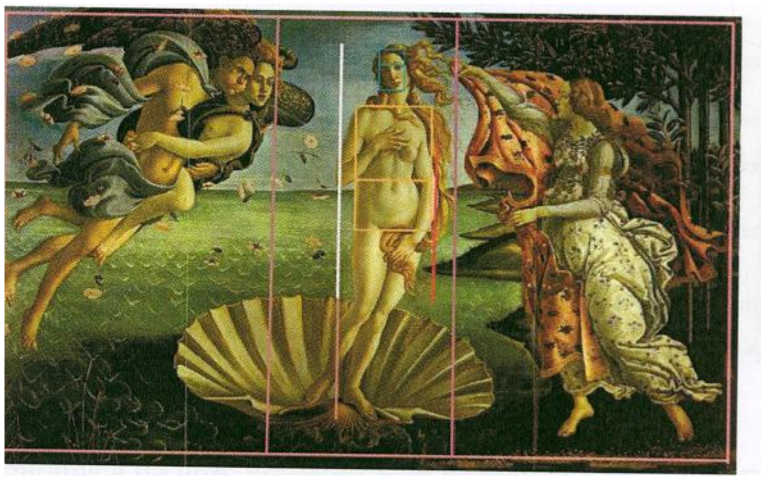


Figura 82: Deusa da Beleza representada no retângulo áureo. (AMARAL, 2007).

Outros exemplos:

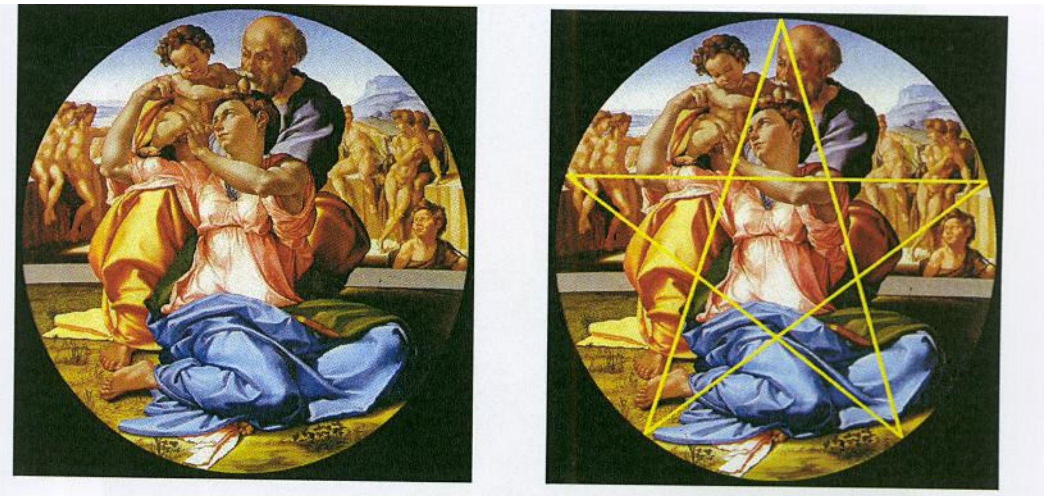


Figura 83: Pintura de Raphael, onde encontramos o pentágono e suas razões áureas. (AMARAL, 2007).

O Retrato de John F. Kennedy, 1967, por Jamie Wyeth. A reta vertical divide a largura na proporção 1: 1,618.

Figura 84: John F. Kennedy. (ATALAY, 2007, prancha 12).

Um artista contemporâneo que utilizou a proporção divina na sua pintura foi o pintor norte-americano Piet Mondrian. (prado, 2004).

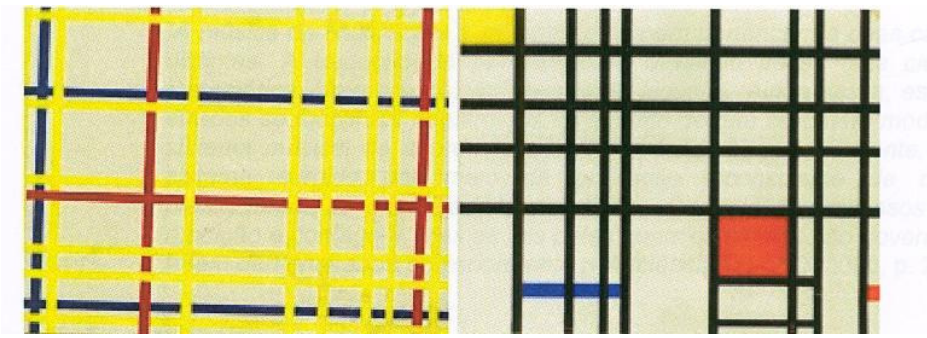


Figura 85: Pinturas de Piet Mondrian. (PRADO, 2004).

A espiral logarítmica na arte: Frederick Hart baseou sua escultura. Ex Nihilo, em uma espiral logarítmica, conforme vemos no desenho menor da figura 84.

Figura 86: Ex Nihilo. (ATALAY, 2007, prancha 5)

As estátuas do Gladiador e de Zeus tomam por base a teoria de Vitruvius e a análise de suas proporções é praticamente idêntica.

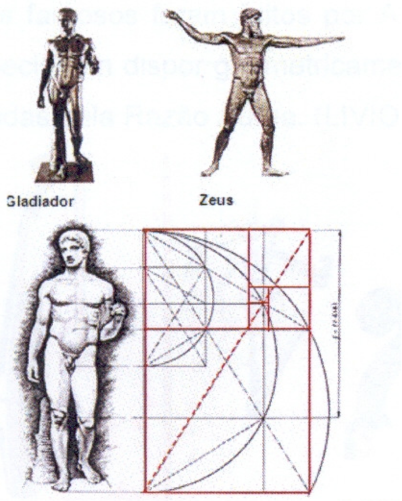


Figura 87: Estátuas do Gladiador e de Zeus. (VISCONTI, 2002).

3.4: A RAZÃO ÁUREA NA MÚSICA

> "A música da natureza e a música do homem pertencem a duas categorias distintas. A tradução da primeira para a última passa pela ciência da Matemática. Uma proposição importante fecunda. Ainda assim, estaríamos errados se fossemos contribuí-las no sentido de que o homem modelou seu sistema musical de acordo com cálculos feitos intencionalmente, tendo o sistema surgido por meio de aplicação inconsciente de conceitos preexistentes de quantidade e proporção, por meio de processos sutis de medição e contagem. Mas as leis pelas quais os últimos são governados só foram demonstradas posteriormente pela ciência." (LIVIO, 2006, p. 219).

Atribuiu-se a Pitágoras a descoberta das progressões harmônicas nas notas de escala musical, por observar que os intervalos musicais e o tom das notas correspondiam aos comprimentos relativos das cordas que vibravam. (LIVIO, 2006, p. 40).

Todos os quartetos de cordas e todas as orquestras sinfônicas ainda usam a descoberta de Pitágoras das relações entre números inteiros e os diferentes tons musicais.

Desde a Grécia antiga até a Era Medieval a música fez parte da Matemática, os músicos se esforçavam para compreender a base Matemática dos tons.

Estudiosos afirmam que no século XII a música rompeu com a Matemática, porém no século XVIII, o filósofo Gottfried Wilhelm Leibnitz escreveu: “A música é um exercício aritmético secreto, e a pessoa que se delicia com ela não percebe que está manipulando números”. (LIVIO, 2006, p. 208).

Devido a essas relações históricas entre música e números, é bastante natural nos perguntarmos se a Razão áurea e os números de Fibonacci tinham algum papel no desenvolvimento de instrumentos musicais ou na composição musical.

O violino é um instrumento no qual a Razão Áurea de fato, aparece freqüência. A caixa de som do violino contém doze ou mais arcos de curvatura de cada lado. O arco plano na base quase sempre é centrado no ponto da Secção Áurea, a partir da linha do centro.

Alguns dos violinos mais famosos foram feitos por Antonio Stradivari (1644-1737), ele tinha um cuidado especial em dispor geometricamente o lugar dos “olhos” dos f- buracos, em posições determinadas pela Razão Áurea. (LIVIO, 2006, p. 209).

Figura 88: Violino representado em Retângulo de Ouro. (NETO, 2003).

O violoncelo segue o mesmo padrão do violino.

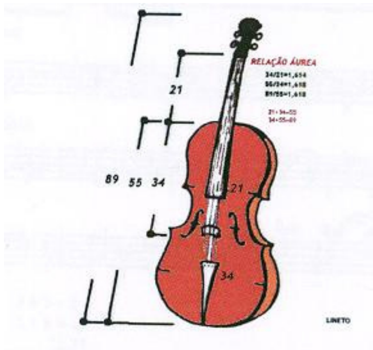


Figura 89: Violoncelo e a Relação Áurea. (NETO, 2003).

O piano, outro instrumento musical, possui em seu teclado a oitava consistindo em treze teclas: oito são brancas e cinco são pretas, porém a divisão dessas teclas é formada por dois grupos. As oito teclas brancas se formam um grupo de três teclas e as pretas por um grupo de duas teclas. Os números 2, 3, 5, 8 e 13 fazem parte da Seqüência de Fibonacci. (LIVIO, 2006, p. 210).

Citaremos abaixo alguns compositores famosos que teriam utilizado a Divina Proporção em suas músicas.

Mozart um grande compositor, não pensava em nada além de números, na época em que passara na escola. Pesquisas mostram que Mozart teria utilizado a Razão Áurea em vinte e nove movimentos de suas sonatas para piano.

O matemático John F. Putz, estudou de perto essa questão. Putz analisando as sonatas de Mozart descobriu que elas se dividem em duas partes: A Exposição e o Desenvolvimento, denominadas de compassos. Logo após examinou as razões entre os números desses compassos. Na sonata nº 1 em Dó maior, Putz descobriu que o primeiro movimento, consiste em sessenta e dois compassos no Desenvolvimento e trinta e oito na Exposição. A razão desses números 62/38 é igual à 1,63, um número próximo da Razão Áurea. Porém após Putz examinar com precisão as sonatas de Mozart, se convenceu de que a Razão Áurea não aparece em nenhum de seus trabalhos. (LIVIO, 2006, p. 213).

O húngaro Belo Bartók, outro famoso compositor, pode ter realmente a Divina proporção em suas composições. Ficou conhecido por misturar elementos de outros compositores com a música folclórica. O ritmo e a simetria de suas músicas fez dele, um dos compositores mais famosos do século XX.

O musicólogo Erno Lendvai estudou as obras de Bartók, e descobriu que sua principal técnica era utilizar as leis da Seção Áurea. (LIVIO, 2006, P. 213).

Em alguns trabalhos de Bartók também encontramos a presença da Razão Áurea. Em "Sonata para dois pianos e percussão", podemos observar que os vários temas se desenvolvem em uma ordem de Fibonacci. (LIVIO, 2006, p. 214).

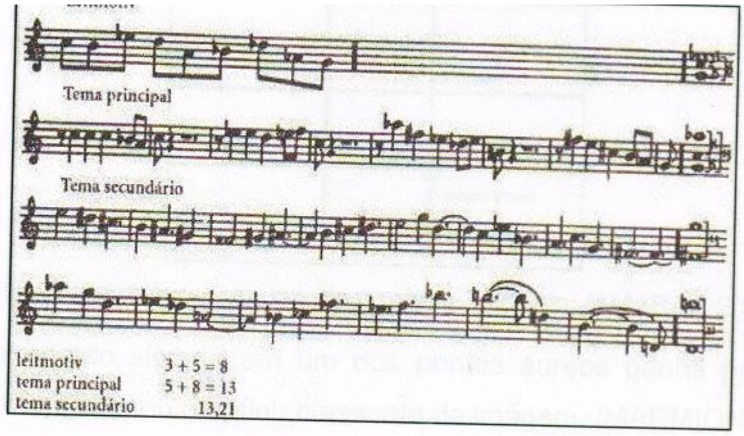


Figura 90: Sonata para dois pianos e percussão. (LIVIO, 2006, P.214).

Atualmente todos os quartetos de cordas e todas as orquestras sinfônicas ainda utilizam a base Matemática descoberta por Pitágoras.

Alguns modernos aparelhos eletrônicos de reprodução musical, como por exemplo o MP3, possuem hoje desenhos mais harmônicos, o seu formato são similares ao de um Retângulo de Ouro, porém é importante deixarmos claro que esse formato não tem nada a ver com o Retângulo Áureo. Podemos observar no Ipod da marca Apple, uma proporção de 1:1,67, um número bem próximo da Razão Áurea. (PIPORO, 2007e).

Figura 91: MP3. (AMARAL, 2007).

3.5: A RAZÃO ÁUREA NA LITERATURA

Na literatura o número de ouro encontra sua aplicação mais notável no poema épico grego Ilíada, de Homero, que narra os conhecimentos dos últimos dias da guerra de Tróia. Quem o ler notará que a proporção entre as estrofes maiores e as menores dá um número próximo ao 1,618, o número de ouro.

Luís de Camões na sua obra “Os Lusíadas”, colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra na razão de ouro.

Virgilio em sua obra “Eneida” construiu a razão áurea com as estrofes maiores e menores. (WIKIPÉDIA, 2007f).

3.6: A RAZÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA

Uma famosa técnica de fotografia é colocar o foco da foto em um ponto que é encontrado usando a razão áurea, como ilustrado na Figura 92.

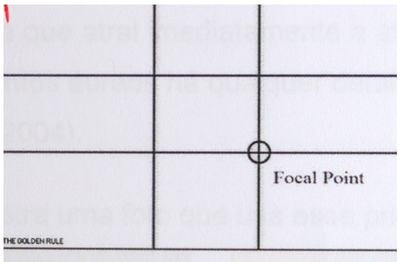


Figura 92: Foco para foto usando o retângulo áureo. (AMARAL, 2007).

Qualquer elemento situado em um dos pontos áureos, ganha peso visual, dando destaque o assunto e ajudando a definir o assunto da imagem. (MARMION, 2004).

Figura 93: Foto utilizando-se dos Pontos Áureos. (MARMION, 2004).

O primeiro elemento que notamos muito provavelmente o retrato do Che Guevara, já que ocupa um dos pontos Áureos. O homem aparece no segmento à direita, e não contribui a desviar a atenção da foto; simplesmente a complementa. Ao tentarmos, mentalmente, “cortar” esta foto sem descaracterizá-la não vamos conseguir, pois qualquer corte afeta o conjunto, tornando-a uma boa composição. (MARMION, 2004).

A seguir veremos o quadro São Jorge e o Dragão, de Rafael:

Figura 94: São Jorge e o Dragão. (MARMION, 2004).

O dragão está exatamente em um dos pontos áureos. Não é por acaso que estar ali, é o lugar onde deveria estar, já que atrai imediatamente a atenção. Podemos notar também que em nenhum dos outros pontos áureos há qualquer detalhe de interesse, o que reforça a figura do dragão. (MARMION, 2004).

O exemplo a seguir mostra uma foto que usa esse princípio.

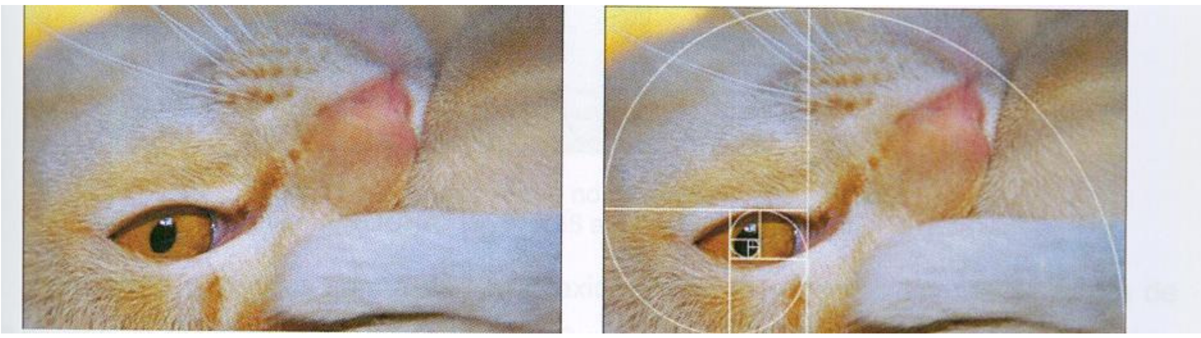


Figura 95: Foto utilizando a técnica do retângulo áureo. (AMARAL, 2007).

3.7: A RAZÃO ÁUREA NA NATUREZA

Na natureza, a razão áurea está presente nos caramujos marinhos, nas estrelas do mar, nos ouriços, em flores como petúnia e o jasmim estrela, no pinheiro e em tantos outros animais e plantas.

Há vários fatores e também curiosidades que envolvem a presença da Razão Áurea nas plantas.

As folhas crescem de forma que sejam expostas ao sol, à chuva e ao ar. Desta maneira elas jamais crescem nos talos uma sobre as outras. A passagem de uma folha para outra, se dá de forma parecida a de um parafuso envolvendo o ramo.

É denominado a este fenômeno o nome de “Phyllotaxis” (arranjos de folhas). (LIVIO, 2006, p. 129).

Foi descoberto pelo astrônomo Johannes Kepler a relação entre a “Phyllotaxis” e a Seqüência de Fibonacci, como é possível observar na Figura 96.

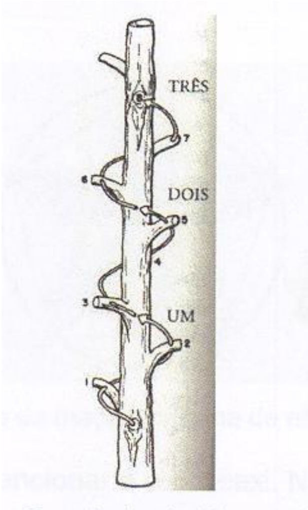


Figura 96: Phillotaxis e a Seqüência de Fibonacci. (LIVIO, 2006, p. 130).

A Razão Áurea também se encontra na natureza presente em progressões lineares como, por exemplo, no desenvolvimento de uma árvore. (LAURO, 2005, p. 47).

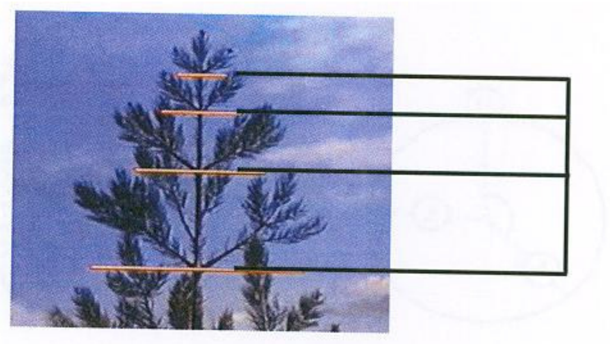


Figura 97: A Razão Áurea no desenvolvimento de uma árvore. (ROCHA, 1999, p. 68 apud LAURO, 2005, P. 48).

Arranjos parecidos com a da Phyllotaxis, podem ser encontrados nas sementes de um girassol. É possível observar na Figura 98 que a flor possui espirais nos sentidos horário e anti-horário, formados pelos flósculos. É comum encontrarmos 34 espirais em um sentido e 55 no outro, porém estudiosos já encontraram girassóis que possuem 89/55, 144/89 e até mesmo 233/144. Ao analisarmos esses números, nos deparamos novamente com a Seqüência de Fibonacci. (LIVIO, 2006, p. 133).

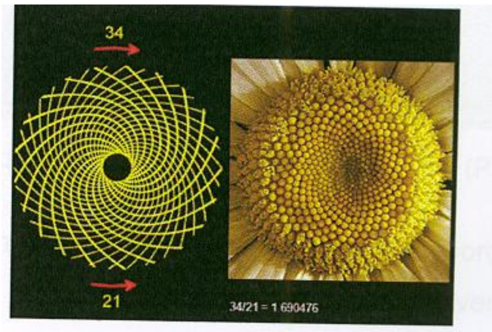


Figura 98: Girassol. (AMARAL, 2007).

Nas frutas a presença da Razão Áurea é bem fascinante. Ao cortarmos a maçã pela sua circunferência encontraremos as sementes alinhadas em um padrão de cinco pontas ou um pentagrama.

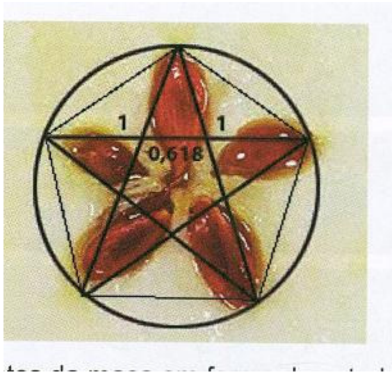


Figura 99: As sementes da maçã em forma de estrela. (SVEVO, 2003).

Outro exemplo simples a mencionar é o abacaxi. Na maioria das vezes a fruta possui cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação crescentes em sua superfície. (LIVIO, 2006, p. 131).

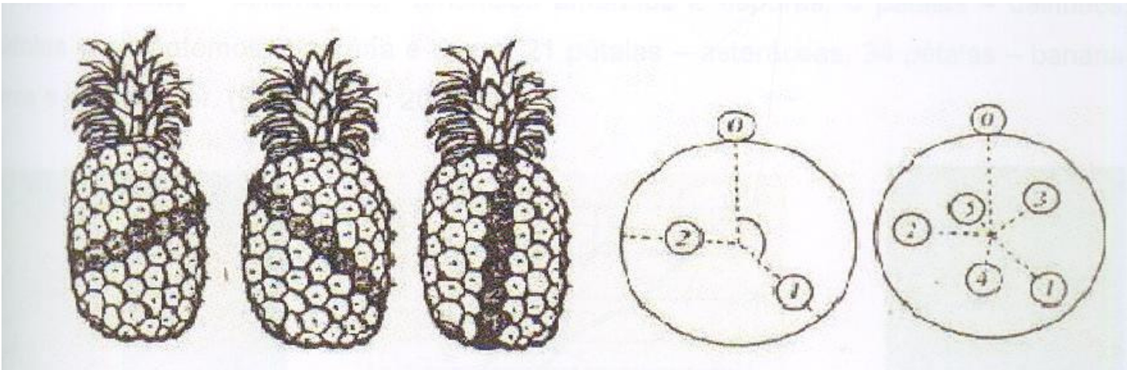


Figura 100: O abacaxi. (LIVIO, 2006, P. 131).

Nos legumes, as espirais de Fibonacci estão presentes, em uma simples couve-flor ou até mesmo em um brócolis.

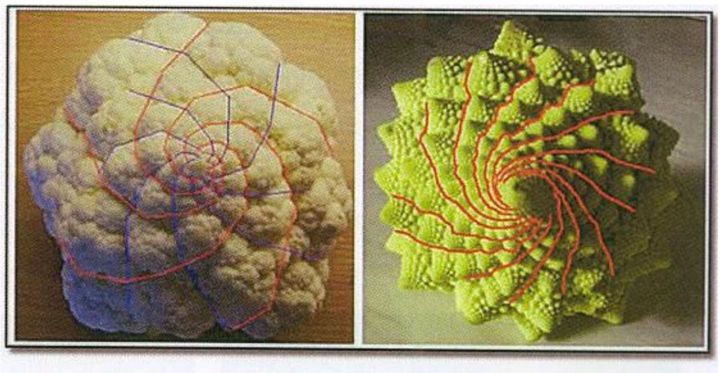


Figura 101: À esquerda Couve-Flor, à direita: Brócolis. (PIROPO, 2007).

Outra flores também apresentam relação com a Proporção Divina. Ao colocarmos um pentágono sobre uma petúnia ou um jasmim-estrela verificaremos que as flores possuem em sua estrutura a presença da Razão Áurea. (LAURO, 2005, p. 46).

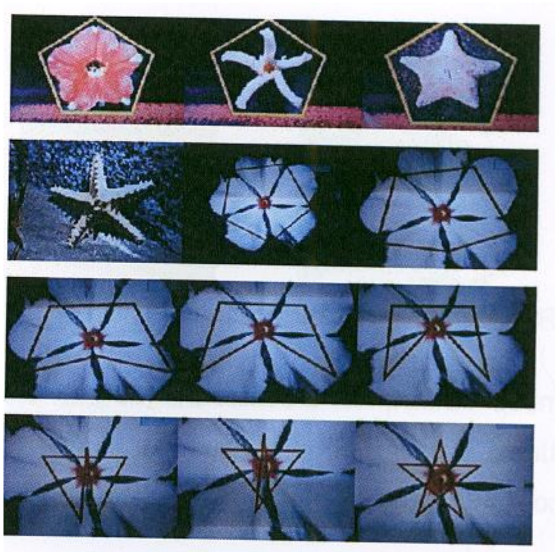


Figura 102: Estrela de cinco pontas e o pentágono presente na natureza. (DONALD NO PAÍS DA MATEMÁGICA, vídeo, 1959).

Em muitas plantas, o número de pétalas é um número de Fibonacci: 3 pétalas – lírios e íris; 5 pétalas – columbinas, rainúnclos amarelos e esporas; 8 pétalas – delfíneos; 13 pétalas – crisântemos, cinerária tasna, 21 pétalas – asteráceas; 34 pétalas – banana-na-terra e malmequer. (BROLEZZI, 2006).

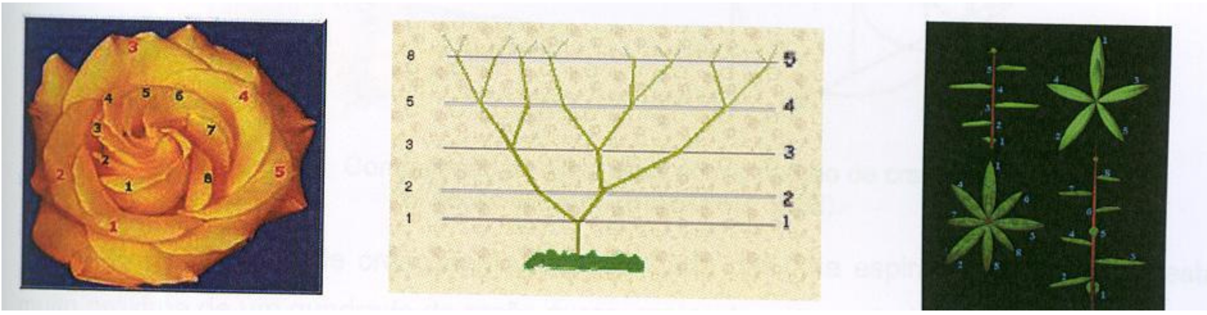


Figura 103: Tipos de flores que apresentam o número de Fibonacci. (BROLEZZI, 2006).

Da mesma forma que as plantas e os alimentos, os animais também se relacionam com a Razão Áurea. Podemos encontrá-la nas diferentes formas de arraias, nos olhos e na cauda de um pavão, em insetos como besouros, moscas, abelhas, libélulas entre outros. (LAURO, 2005, p. 47).

Observando as belas mariposas, verificaremos que as medidas do número de ouro se ajustam perfeitamente em suas estruturas.

Figura 104: Medidor sendo usado para verificação da Proporção Áurea na Mariposa. (PRADO, 2004).

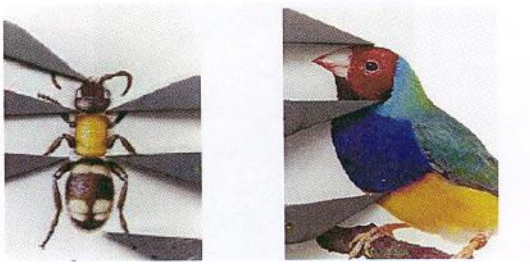


Figura 105: Verificação da Proporção Áurea em Animais. (PRADO, 2004).

A espiral de contorno das conchas revela um padrão acumulativo de crescimento, que já foram objeto de numerosas investigações artísticas e científicas. Tais padrões são espirais logarítmicas de razão áurea, o que é conhecido como a teoria perfeita do padrão de crescimento.

Figura 106: Crescimento espiralado. (VISCONTI, 2002).

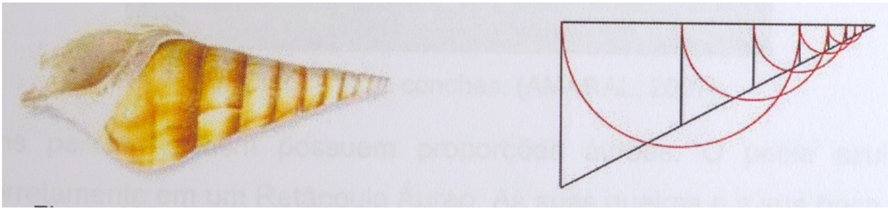


Figura 107: Comparação da Tíbia Shell com o padrão de crescimento da seção de ouro. (VISCONTI, 2002).

Em cada fase de crescimento, caracterizada por uma espiral, a nova espiral está muito próxima de um quadrado de razão áurea, maior do que o anterior.

O Náutilus, pequeno animal de aproximadamente 20 centímetros, é um molusco que possui sua concha formada por vários tanques isolados de gás que possibilita maior facilidade de locomoção. Além dos tanques, a concha possui cavidades onde o animal se localiza, à medida que ele cresce, ele gera novos tecidos, dessa forma surgem novas cavidades, que são ocupadas imediatamente pelo corpo do animal. (PIROPO, 2007f).

Essa construção de “residência” é bem interessante, já que o Náutilus desenvolve a sua concha de acordo com os padrões da Espiral Áurea.

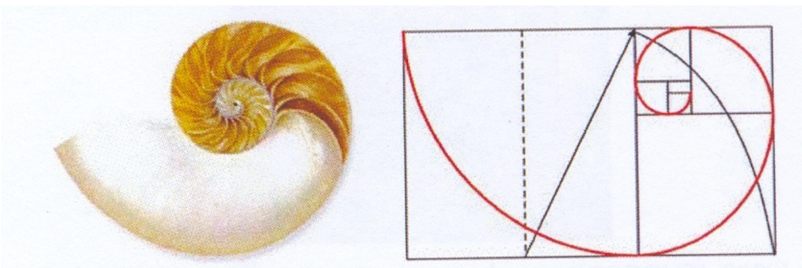


Figura 108: O Náutilus e a Espiral Áurea. (VISCONTI, 2002).

Figura 109: O Náutilus. (PIROPO, 2007).

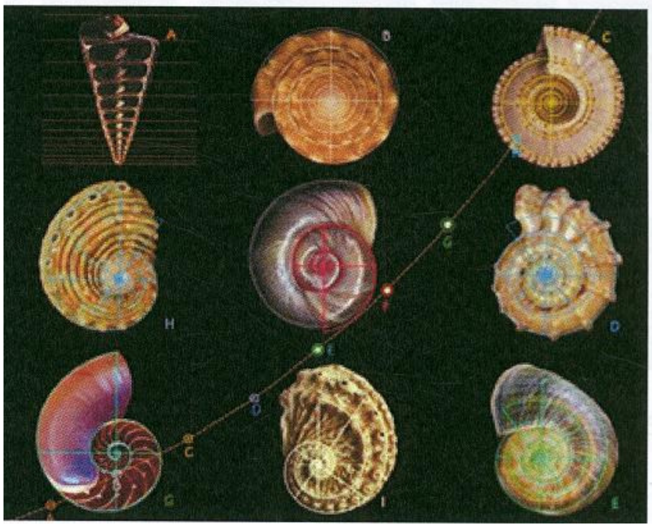


Figura 110: Outras conchas. (AMARAL, 2007).

Alguns peixes também possuem proporções áureas. O peixe azul tropical se enquadra corretamente em um Retângulo Áureo. As suas guelras e a sua boca apresentam-se em harmonia com o restante do corpo, assim como o salmão-prateado, o mangangá e a truta. (VISCONTI, 2002).

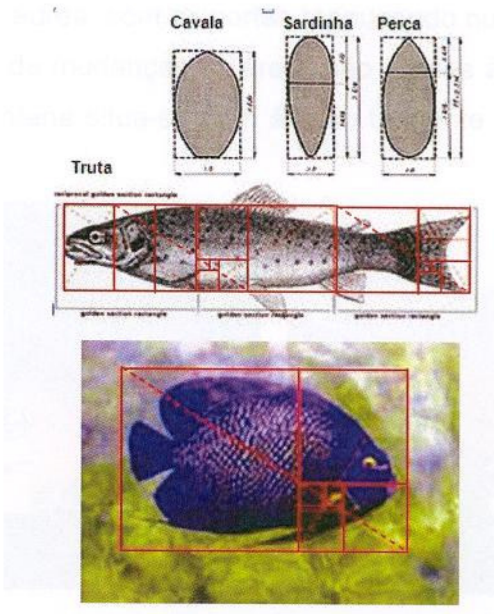


Figura 111: Peixes em um Retângulo Áureo. (VISCONTI, 2002).

A Razão Áurea é muito encontrada na natureza. Aparece em várias formações em espiral (espiral áurea), como furacões, rede-moinho, arranjo das sementes na flor de margarida, casca do abacaxi, cavalo marinho, caramujos, galáxias, chifres de alguns animais, ondas do mar, na trajetória de partículas atômicas numa câmara. (FASCIONI, 2006). Segue alguns exemplos.

Figura 112: Espiral Áurea na Natureza. (FASCIONI, 2006).

3.8: A RAZÃO ÁUREA NA INDÚSTRIA

Veremos como exemplo de Razão Áurea na indústria Automobilística o novo Besouro Volkswagem que é menos um veículo do que uma peça de escultura cinética à medida que se move pelas ruas. Distintamente diferente dos demais carros, ele exibe a idéia visual de coesão de forma. Seu corpo é, ao mesmo tempo, atrasado e futurista, uma fusão de Geometria e nostalgia.

O corpo adapta-se na metade superior de uma elipse áurea. As janelas laterais repetem a forma da elipse áurea, com as portas repousando num quadrado de um retângulo áureo. Todos os detalhes de mudança de áreas são elipses áureas tangentes ou círculos, mesmo a colocação da antena situa-se num ângulo tangente à roda fronteira. (VISCONTE, 2002).

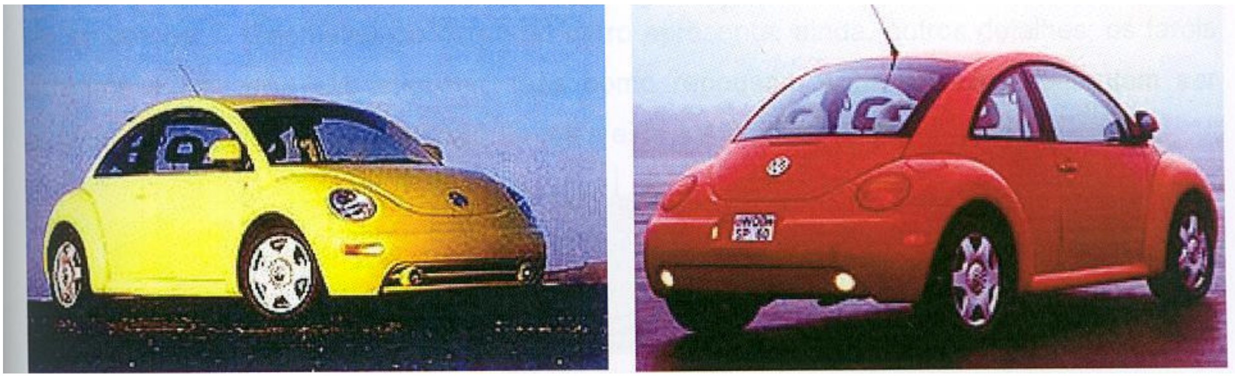


Figura 113: Besouro Volkswagem. (VISCONTI, 2002).

A frente do carro é um quadrado com todas as superfícies simétricas. O logotipo da Volkswagen no capô situa-se no quadrado.

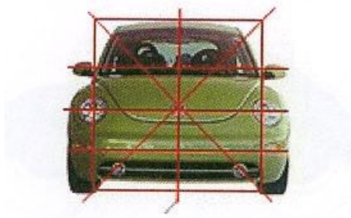


Figura 114: Besouro Volkswagem - Vista Frontal. (VISCONTI, 2002).

Uma elipse áurea está inscrita no diagrama de construção de um retângulo áureo. O corpo cabe claramente na metade superior desta elipse áurea. O eixo maior da elipse alinha-se com o corpo, logo abaixo do centro das rodas.

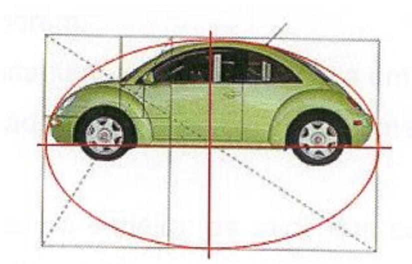


Figura 115: Besouro Volkswagem - Carroceria. (VISCONTI, 200).

Uma segunda elipse áurea engloba as janelas laterais. Está elipse é também tangente á roda da frente e à roda traseira. O eixo principal da elipse tangencia tanto a roda frontal como a traseira.

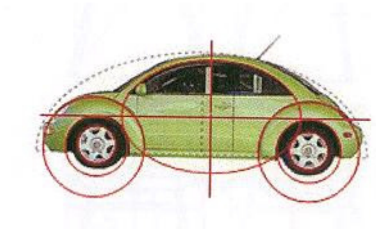


Figura 116: Besouro Volkswagem - Volume. (VISCONTI, 2002).

A exemplo da visão frontal, a visão traseira pode ser inscrita num quadrado. O logotipo está colocado próximo ao centro do quadrado, e todas as superfícies e elementos são simétricos. A Geometria do corpo do carro apresenta, ainda, outros detalhes; os faróis dianteiros e traseiros são elípticos, mas como repousam sobre curvas, aparentam ser circulares. O ângulo que rege o capô da mala está a 45º.

Figura 117: Besouro Volkswagem - Vista Posterior. (VISCONTI, 2002).

O ângulo da antena é tangente ao círculo do pára-lama da roda da frente e a posição da sua base alinha-se com o pára-lama da roda traseira.

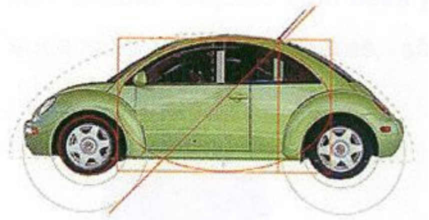


Figura 118: Besouro Volkswagem - Antena. (VISCONTI, 2002).

Na fabricação de móveis, temos como exemplo uma cadeira, ainda em produção, a relação entre as proporções da cadeira e a seção áurea foram intencionalmente planejadas, isso é impossível de afirmar, porém:

As costas da cadeira adaptam-se perfeitamente a um retângulo áureo.

As proporções da cadeira são aproximadamente as de uma relação áurea. (VISCONTI, 2002).

Detalhe das proporções da cadeira: Os raios dos cantos das costas das cadeiras, assim como suas pernas tubulares, têm proporções modulares de 1:4 e 6:8, sendo A = 1; B = 4; C = 6; D = 8.

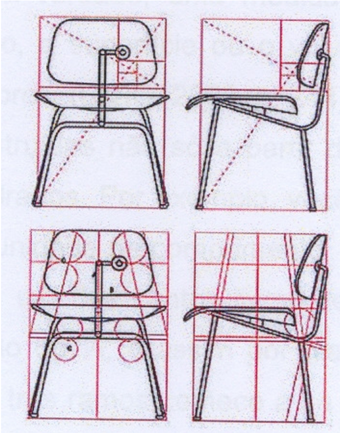


Figura 119: Cadeiras. (VISCONTI, 2002).

A Razão Áurea ainda pode ser encontrada em diversas frentes da indústria, a seguir vemos alguns exemplos:

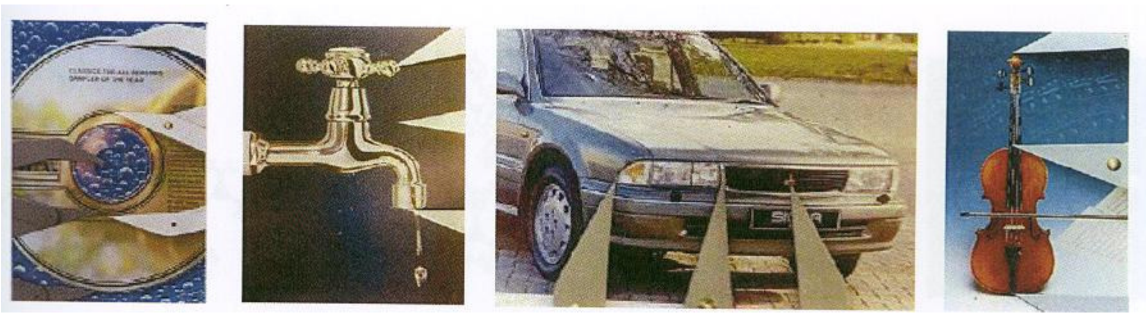


Figura 120: Verificação da Proporção Áurea na Indústria. (PRADO, 2004).

3. 9: A RAZÃO ÁUREA E OS FRACTAIS

A cada padrão dentro da Razão Áurea, descobriremos que o mesmo padrão é encontrado na seqüência em outra escala. Objetos com essa propriedade, como as bonecas Russas Matrioshka, que se encaixam uma nas outras, são conhecidos como fractais. (LIVIO, 2008, p. 243).

Figura 121: Bonecas Russas Matrioshka. (FASCIONI, 2006).

A dimensão fractal é, na verdade, uma medida da rugosidade do fractal ou da rapidez com que o comprimento, a superfície ou o volume aumentam se medirmos com relação a escalas cada vez menores. (LIVIO, 2008, p. 244).

Fractais podem ser construídos não só a partir de linhas, mas também de figuras simples, como triângulos e quadrados. Por exemplo, você começar com um triângulo eqüilátero cujo o lado tenha uma unidade de comprimento, e em cada canto anexar um novo triângulo com ½. Em cada um dos cantos livres de triângulos de segunda geração, anexe um lado de 1/4, e assim por diante (Figura 122). Qual o fator de redução que faz com que esses três ramos comece a se tocar (Figura 123) e novamente a resposta será $1/\phi$. Exatamente a mesma coisa acontece se você constrói um fractal similar usando um quadrado (Figura 124) – a superposição ocorre quando o fator de redução for $1/\phi$ (Figura 125). (LIVIO, 2008, p. 247).

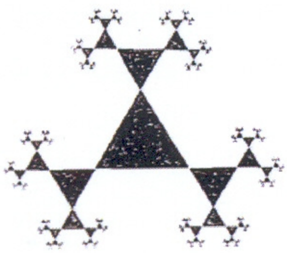


Figura 122: Fractais. (LIVIO, 2006, p. 248).

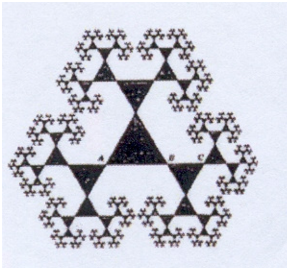


Figura 123: Fractais. (LIVIO, 2006, p. 248).

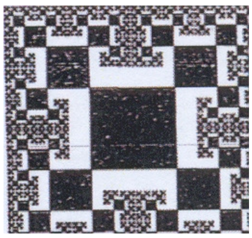


Figura 124: Fractais. (LIVIO, 2006, p. 248).

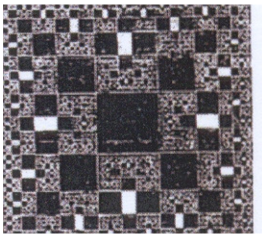


Figura 125: Fractais. (LIVIO, 2006, p. 248).

A sucessão de Fibonacci é o exemplo de um fractal obtido a partir da sucessão infinita binária de 0 a 1.

1011011011011011010110...

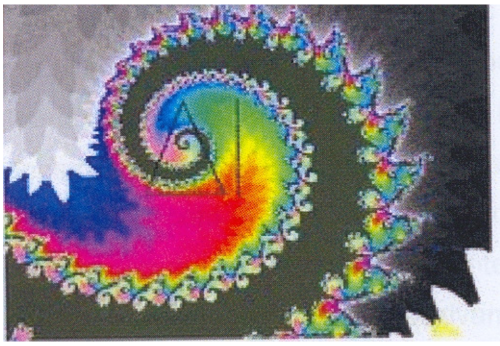


Figura 126: Fractal obtido pela seqüência de Fibonacci. (MARQUES, 2008).

3.10: A RAZÃO ÁUREA E O MERCADO FINANCEIRO

O uso dos números de Fibonacci na Bolsa de Valores está baseado nos trabalhos pioneiros de Ralph Nelson Elliott (1871 – 1948), um analista financeiro norte-americano que estudou o comportamento do índice Dow Jones, da Bolsa de Valores de Nova Iorque, a partir da década de 20 do século passado. Tendo presenciado a quebra da bolsa em 1929 e a Grande Depressão que dela se seguiu, Elliott concluiu que as flutuações da bolsa não eram aleatórias. (GONÇALEZ, 2007).

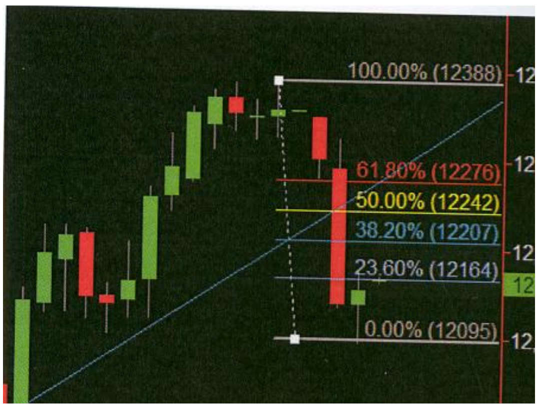


Figura 127: Ciclo completo do mercado. (GONÇALEZ, 2007).

Observamos que, definitivamente, algo misteriosamente matemático move o universo e a sociedade humana. (GONÇALEZ, 2007).

Com a análise detalhada das estruturas ou Padrões de Ondas, impulso e corretivo, que Elliott percebeu se repetirem nas séries temporais de preços nos mais variados mercados financeiros. É importante frisar que as repetições não são necessariamente exatas, podendo ser aproximadas, já que um mesmo padrão pode aparecer com tamanhos e inclinações diferentes em várias épocas e em várias escalas (primary, intermediat, etc.) sem que suas regras de construção sejam violadas. Uma estrutura Elliott, à medida que a análise da série temporal transcorre com o tempo, se liga dinamicamente com outras estruturas Elliott, e tal acúmulo de estruturas, em algum instante de tempo, constituirá uma nova estrutura Elliott de escala superior. E assim sucessivamente, seguindo-se a idéia fractal. Este acúmulo de ondas e tendências para formar outras ondas e tendências de escala superior levou Elliott a procurar na Matemática alguma ferramenta na qual pudesse basear este acúmulo. Encontraram então na série de Fibonacci fortes correlações com o seu princípio.

A série de Fibonacci é uma seqüência de números inteiros, cuja lei de formação é muito simples e parecia com a formação das ondas Elliott: dados dois números iniciais, o próximo número da sequência será sempre igual à soma dos dois números anteriores a ele. A série de Fibonacci mais conhecida é aquela cujos primeiros termos são iguais a 1. Tem-se então a sequência infinita: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Lembrando-se que as estruturas corretivas possuem 3 ondas e as estruturas impulsivas contém 5 ondas, e sabendo-se que sempre após um impulso vem uma correção, tem-se então o acúmulo de 8 ondas, mais um próximo impulso, teríamos 13 ondas, e assim por diante.

Elliott descobriu, entretanto que a serventia surpreendente da série de Fibonacci para a análise dos mercados financeiros estava na razão entre os números da série. Dividindo-se o primeiro número pelo segundo, obtém-se a razão 1, ou 100%. Dividindo-se o segundo pelo terceiro, obtém-se 50%. Continuando-se com o mesmo procedimento, obtém-se as seguintes razões: 66,7%, 62,5%, 61,5%, 61,9%, 61,8%, 61,8%, 61,8%, ... Ou seja, esta última série formada pelas razões de um número Fibonacci para seu posterior converge para 61,8% valor arredondado da constante, conhecida como razão áurea. As porcentagens citadas neste parágrafo e as taxas complementar e inversa da porcentagem áurea, 38,2% e 161,8%, foram registradas por Elliott em muitas ocasiões do mercado financeiro quando se comparou os comprimentos de duas ondas consecutivas em sentido contrário. Portanto, tais porcentagens são amplamente utilizadas para se prever o tamanho da próxima onda a partir do comprimento da onda corrente. (HAYASHI, 2002).

O princípio original das ondas de Elliott representou uma ousada, embora um tanto ingênua, tentativa de identificar um padrão no que poderia parecer um processo aleatório. Mais recentemente, contudo, os números de Fibonacci e o acaso tiveram um encontro ainda mais intrigante. (LIVIO, 2006, p. 254).

Como a teoria das proporções de Fibonacci e a Teoria de Elliott estão estabelecidas ao comportamento humano, nada melhor do que trabalhar com as duas ferramentas. (FERREIRA, 2006).

Proporções de Fibonacci e Teoria de Elliott

Método para se medir o término da onda 5.

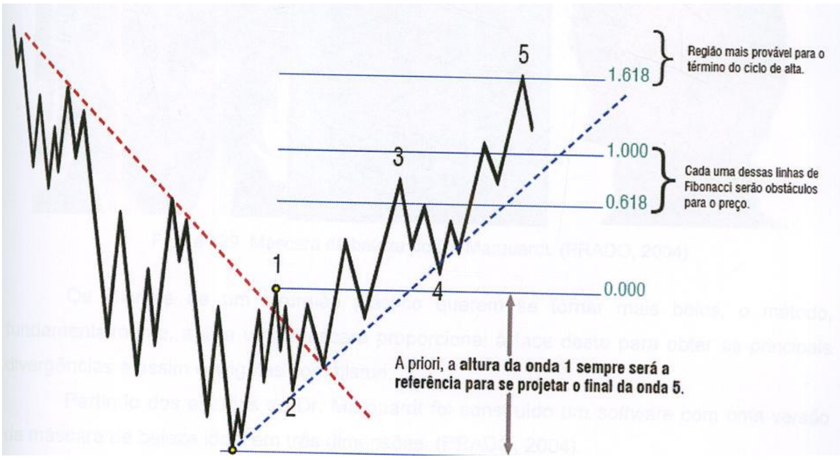


Figura 128: Método para medir o término da Onda 5. (FERREIRA, 2006, p. 32).

Como descrito na revisão teórica sobre as aplicações dos conceitos da complexidade na economia, os movimentos de subida e descida nos mercados podem ser encarados como tendências que emergem da auto organização – por feedback positivo ou retornos crescentes – das percepções em comum dos preços por parte dos agentes do mercado (psicologia dos hedgers e especuladores). Sabendo-se que a razão áurea é uma propriedade dos seres humanos (DNA, proporções corpóreas), e como os movimentos dos preços são regidos por decisões humanas, pode-se com certa naturalidade induzir a existência da razão áurea nos mercados financeiros. Até hoje, entretanto, não há uma demonstração matemática rigorosa para esta afirmação. (HAYASHI, 2002).

3.11: A MÁSCARA DE MARQUARDT

O cirurgião plástico Dr. Marquardt, tem feito notáveis pesquisas sobre as proporções e simetrias observadas na estética humana. Em sua carreira, ele realizou cirurgias tanto estética quanto reconstrutivas. Seu trabalho culminou numa série de "máscaras de beleza" que proclama a divina proporção. Sobrepor à foto do paciente uma máscara em escala adequada equivale a fazer aferição matemática da aparência física levando em conta a distância entre os olhos, o comprimento relativo da testa e do nariz, e assim por diante. (ATALAY, 2007, p. 139 – 140).

De maneira impressionante a máscara se encaixa perfeitamente em qualquer rosto considerado bonito, independente de raça, região ou tempo.

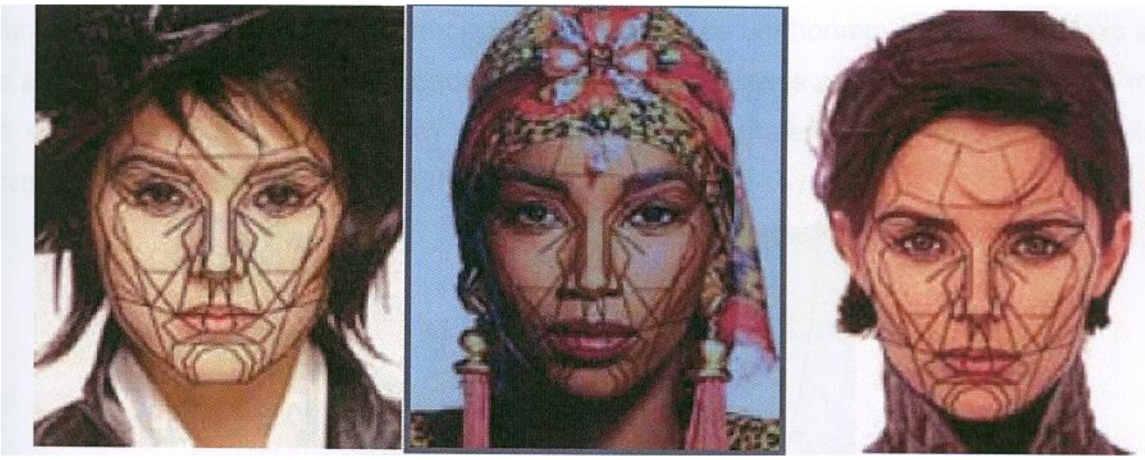


Figura 129: Máscara de beleza do Dr. Marquardt. (PRADO, 2004).

Os clientes de um cirurgião plástico querem se tornar mais belos, o método, fundamentalmente, aplica uma máscara proporcional à face deste para obter as principais divergências e assim corrigi-las com bisturi.

Partindo dos estudos do Dr. Marquardt foi construído um software com uma versão da máscara de beleza ideal em três dimensões. (PRADO, 2004).

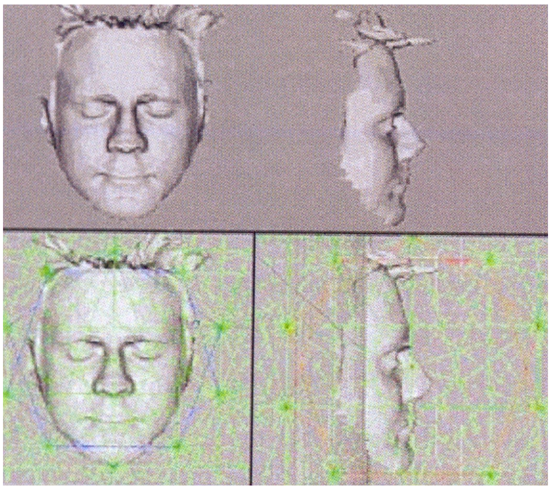


Figura 130: Utilização do software para a máscara de beleza. (PRADO, 2004).

3.12: O MODULADOR

Um dos defensores mais rigorosos da aplicação da Razão Áurea na arte e na Arquitetura foi o famoso arquiteto e pintor suíço-francês Le Corbusier (Charles-Édouard Jeanneret, 1887 – 1965). (ATALAY, 2007, p. 196).

A busca de Le Corbusier por uma proporção padronizada culminou na introdução de um novo sistema proporcional chamado “Modulador”. (ATALAY, 2007, p. 197).

O Modulador narrava seu sistema de proporções baseado na Matemática da seção áurea e a proporção do corpo humano. Além de seu trabalho específico na arquitetura e no planejamento urbano, seus murais, suas pinturas, e criações gráficas exerceram significativa influência sobre o design bidimensional. Esse sistema adotou a divisão áurea como base, fundamentado em três pontos principais na anatomia de um homem de 1,90m: o plexo solar, o alto da cabeça e a ponta dos dedos da mão erguida. Esses pontos constituem uma média e extrema razão (divisão áurea) que Le Corbusier transferiu para uma série infinita de proporções matemáticas. (VISCONTI, 2002).

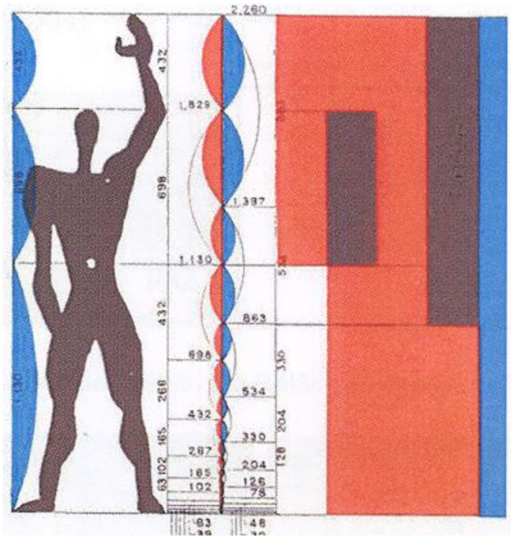


Figura 131: Modulador. (FASCIONI, 2006)

Introduzido no fim da Segunda Guerra, o Modulador pode ser aplicado ao plano bidimensional embora sua principal utilização esteja relacionada com a Arquitetura. (VISCONTI, 200).

Le Corbusier sugeriu que o Modulador daria proporções harmoniosas a tudo, de tamanhos de gabinetes e maçanetas a edifícios e espaços urbanos. Em um mundo com uma crescente necessidade de produção em massa, esperava-se que o Modulador fornecesse um modelo de padronização. (ATALAY, 2007, p. 198).

Antes de patentear seu trabalho, Le Corbusier pediu a opinião de Albert Einstein sobre o sistema. Einstein escreveu que o Modulador podia ser qualificado “como uma série de dimensões que tornam o ruim difícil e o bom fácil”. (VISCONTI, 2002).

3.13: A RAZÃO ÁUREA E ALGUMAS CURIOSIDADES

3.13.1: No cinema

O diretor russo Sergei Eisenstein se utilizou do número no filme. O Encouraçado Potemkin para marcar os inícios de cenas importantes da trama, medindo a razão pelo tamanho da fitas de película. (WIKIPÉDIA, 2007f).

3.13.2: Efeito

Algumas das correntes místicas acreditam que objetos cujas dimensões sejam relacionadas a Phi se harmonizam com a glândula pineal[3], o que provocaria ou estimularia uma sensação de beleza e harmonia no ser humano. (WIKIPÉDIA, 2007f).

3.13.3: A Razão Áurea no Design

Atualmente, essa proporção ainda é muito usada. Ao padronizar internacionalmente algumas medidas usadas em nosso dia-a-dia, os projetistas procuraram “respeitar” a proporção divina. (PRADO, 2004).

Figura 132: Cartão de Crédito e o Retângulo Áureo. (PRADO, 2004)

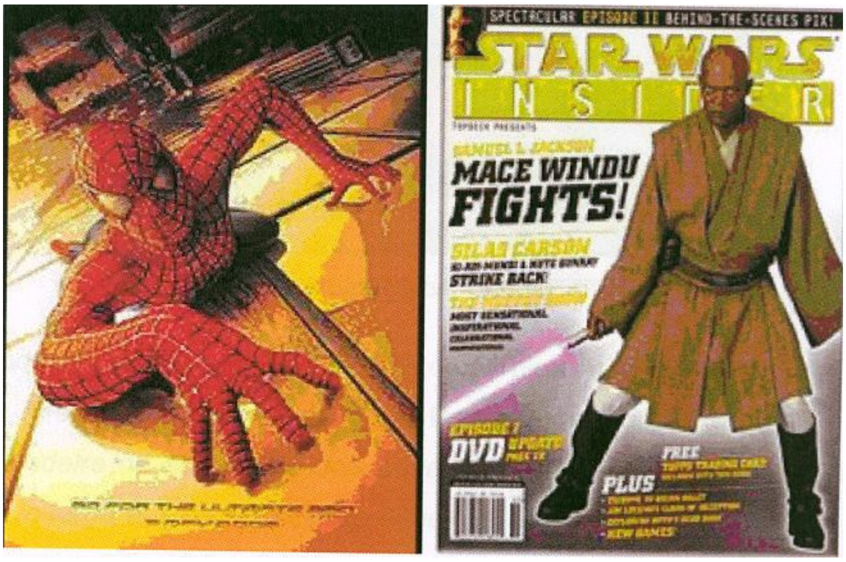


Figura 133: Cartaz publicitário e revista em Retângulo Áureo. (BROLEZZI, 2006)

[3] Glândula pineal é uma pequena glândula endócrina localizada perto do centro do cérebro, ela tem uma importância na regulação dos chamados ciclos circadianos, que são os ciclos vitais (principalmente o sono) e no controle das atividades sexuais e de reprodução. (WIKIPÉDIA, 2008h).

3.13.4: Na Bíblia

Encontra-se também o número Phi a partir do número da besta (uma referência bíblica).

O número da besta é 666.

Sen(666) = -0,809016994...

Figura 134: Cálculo do número 666. (BROLEZZI, 2006)

Note que isso é metade do Phi negativo: sen(666) x (-2) = 1,61803...

Em Gênesis 6:15, Deus ordena a Noé que construa a arca: "Deste modo a farás: de trezentos côvados será o comprimento; de cinqüenta a largura; e a altura de trinta".

Assim, as extremidades da arca, de 50 por 30 côvados[4], estão na proporção de 5 para 3, ou 1,666..., é uma boa aproximação de Phi, a diferença não é visível a olho nu. (BROLEZZI, 2006).

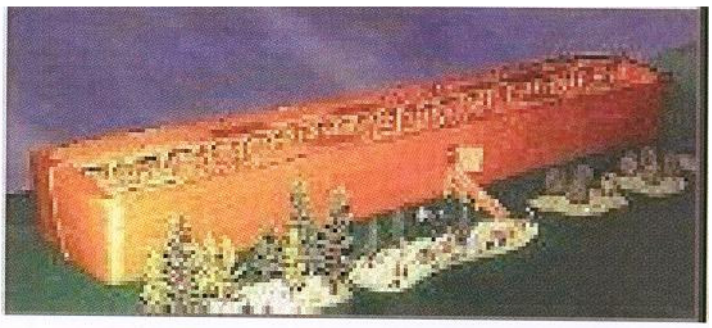


Figura 135: Arca de Noé. (BROLEZZI, 2006)

[4] No Egito antigo, o côvado era uma medida retirada da distância entre o cotovelo e as pontas dos dedos. Correspondia a dezoito polegadas (45,72 centímetros). (WIKIPÉDIA, 2008i).

Em Êxodo 25:10, Deus manda Moisés construir a Arca da Aliança, para nela guardar as Tábuas da Aliança com os israelitas, os Dez Mandamentos, dizendo: "Também farão uma arca de madeira de acácia; de dois côvados e meio será o seu comprimento, de um côvado e meio, a largura, e de um côvado e meio, a altura".

A razão entre 2,5 e 1,5 é 1,666..., tão próximo de Phi que a diferença não é visível a olho nu.

A Arca da Aliança é assim construída usando o Segmento Áureo, ou a Divina Proporção. Esta é a mesma razão entre 5 e 3, números da série de Fibonacci.

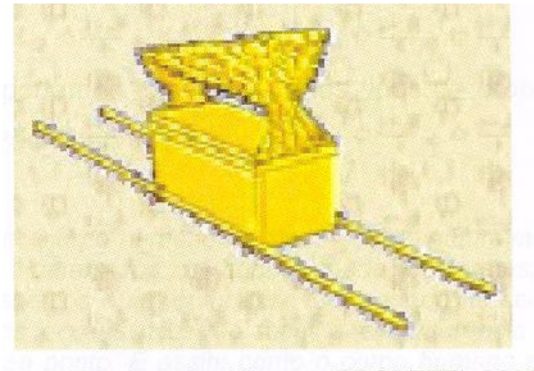


Figura 136: Arca da Aliança. (BROLEZZI, 2006)

A arca de Noé construída na mesma proporção de dez arcas da aliança colocadas lado a lado. (BROLEZZI, 2006).

Vimos neste capítulo a formidável viagem que a Razão Áurea é capaz de nos proporcionar, nos levando à diversas áreas que podem ser relacionadas à Matemática. No próximo capítulo veremos a Razão Áurea no corpo humano, fazendo-nos entender melhor ainda o porquê deste número ser de ouro.

CAPÍTULO 4: A RAZÃO ÁUREA APRESENTANDO SEUS MISTÉRIOS ATRAVÉS DO CORPO HUMANO

No corpo humano podemos encontrar vários tipos de proporcionalidades. No livro a “Proporção Divina”, Luca Pacioli afirma que:

> “... no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadrados”. (PACIOLI apud LIVIO, 2006, p. 157).

Da maneira forma que plantas e animais apresentam proporções áureas, fenômeno similar ocorre com os seres humanos.

Esta talvez seja uma explicação para a preferência cognitiva pela razão áurea: a face e o corpo humano guardam as mesmas relações matemáticas encontráveis em outros seres vivos.

De acordo com este esquema, o corpo humano é dividido na metade da virilha, e pela seção áurea, no umbigo. (VISCONTI, 2002).

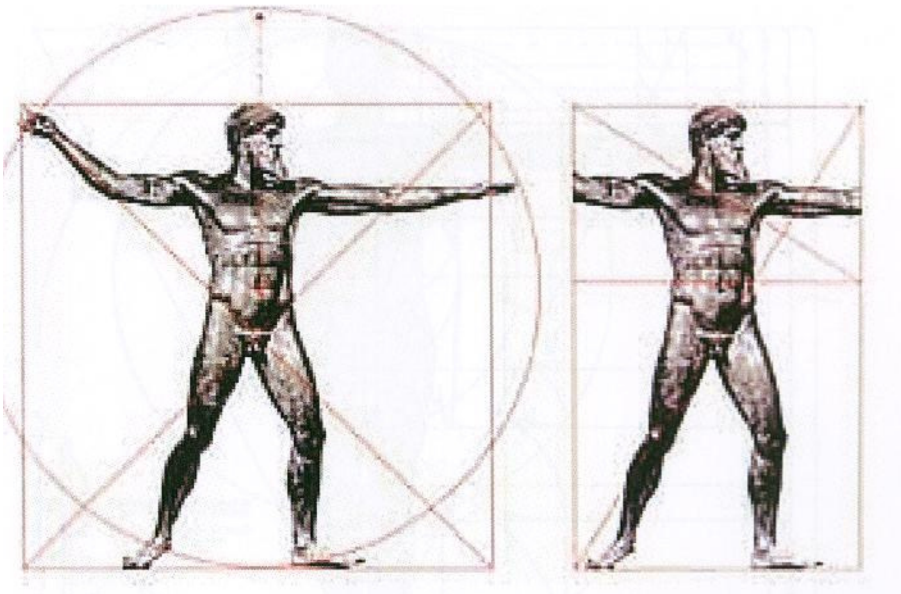


Figura 137: Corpo Humano no Retângulo Áureo. (VISCONTI, 2002)

O quadrado inscreve a altura do corpo; as mãos e os pés tocam o círculo cujo centro é no umbigo. A figura é dividida ao meio na virilha pela seção áurea cujo lado superior do quadrado passa também no umbigo.

Medindo a altura de um corpo qualquer (H) e a altura do umbigo até o chão (h), ao dividirmos $\frac{H}{h}$ e o resultado for igual a 1,61803... diz-se que esse corpo é harmoniosamente perfeito.

Utilizaremos à figura da obra Doryphoros (o portador de lanças), criada por Policleto no século V a. C. para auxiliar no entendimento do conteúdo acima. (LAURO, 2005, p. 353).

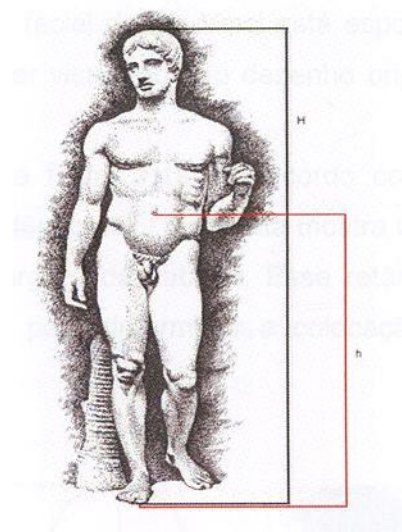


Figura 138: Doryphoros. (DOCZI, 1990, p. 104)

Para verificarmos se um corpo é perfeitamente harmonioso, utilizamos novamente como base o Retângulo Áureo e o Segmento Áureo já que estas figuras são consideradas harmoniosas.

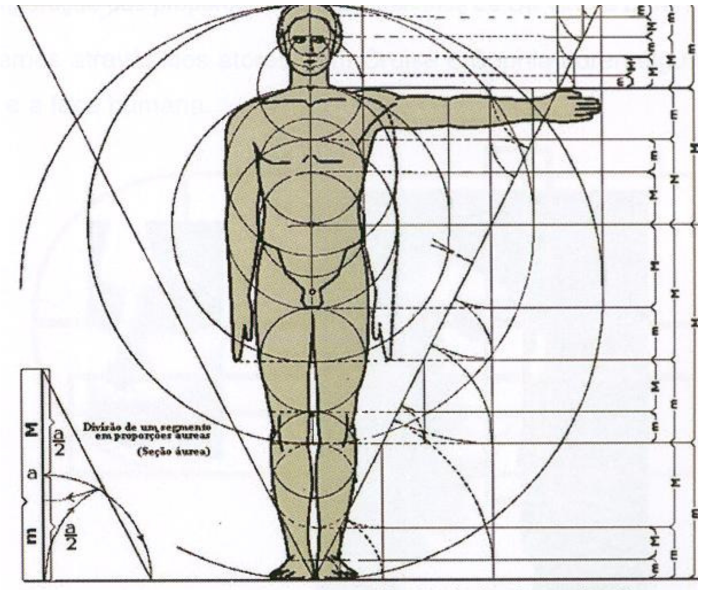


Figura 139: Proporção do corpo humano. (AMARAL, 2007).

4.1: A RAZÃO ÁUREA ENCONTRADA NA FACE

Podemos encontrar a Razão Áurea também em outras partes do corpo humano.

A teoria de Vitruvius inclui as proporções da face e do corpo. As características faciais guardam as proporções clássicas usadas nas esculturas gregas e romanas.

Embora tanto Da Vinci como Durer tivessem empregado os padrões de Vitruvius, no que toca às proporções do corpo, tal não acontece com relação às faces, que apresentam diferenças notáveis: o sistema facial de Da Vinci está espelhado no de Vitruvius, e fracas linhas de construção podem ser vistas no seu desenho original das proporções humanas. (VISCONTI, 2002).

A análise da proporção facial está em acordo com a teoria de Vitruvius, e as proporções são praticamente idênticas. O diagrama mostra um retângulo áureo único, como guia para o comprimento e a largura da cabeça. Esse retângulo é subdividido por outros, sempre em proporção áurea, para determinar a colocação dos apêndices. (VISCONTI, 2002).

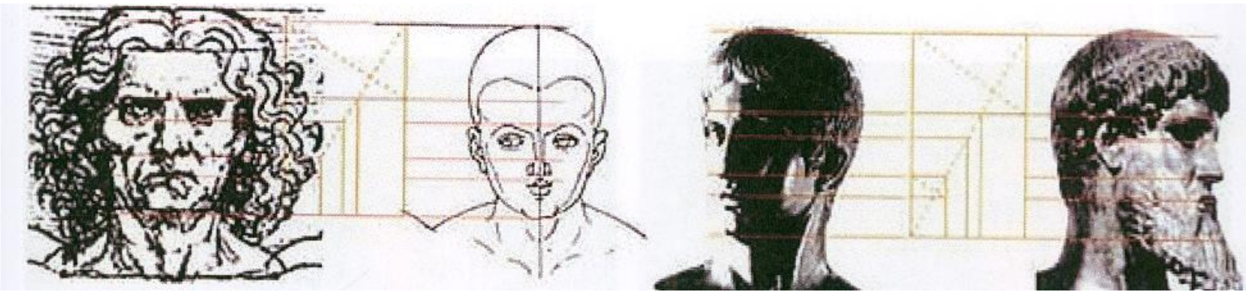


Figura 140: Comparação das proporções faciais (desenhos de Da Vinci e Durer). (VISCONTI, 2002)

Mostraremos através dos atores Tom Cruise e Sophia Loren, algumas relações entre a Razão Áurea e a face humana.

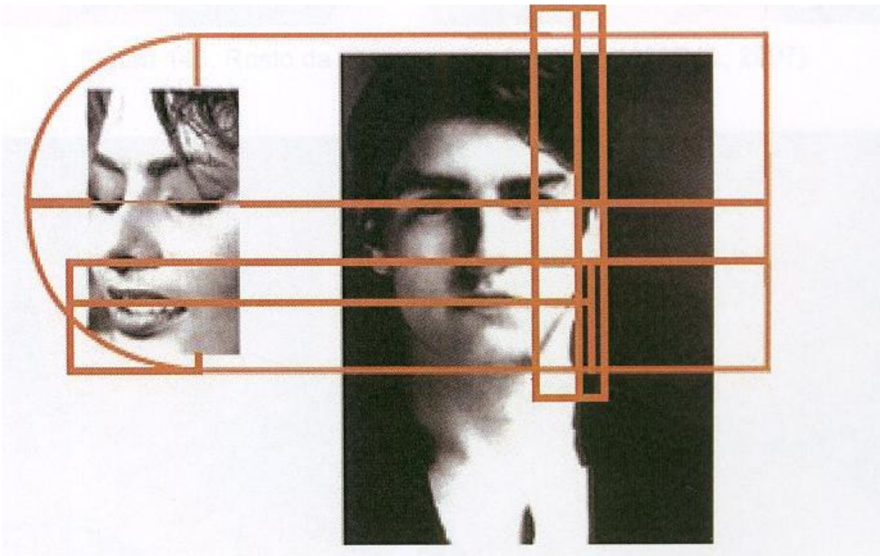


Figura 141: Relações áureas nos atores Tom Cruise e Sophia Loren. (ROCHA, 1999, p. 133, apud LAURO, 2005, p. 45)

Estudamos as proporções Áureas em apenas um lado do rosto humano, pois os seres humanos possuem como característica a assimetria.

Ao espelharmos a figura do ator, a partir do meio da face, notamos que o seu rosto fica diferente, chegando até mesmo a parecer outra pessoa. (LAURO, 2005, p. 45).

Figura 142: Tom Cruise. (ROCHA, 1999, p. 133, apud LAURO, 2005, p. 45)

É claro que o conceito de beleza que possuímos se relacionam a questões culturais.

Veremos a seguir alguns rostos famosos e outros rostos comuns para podermos avaliar a Razão Áurea como medida de beleza.

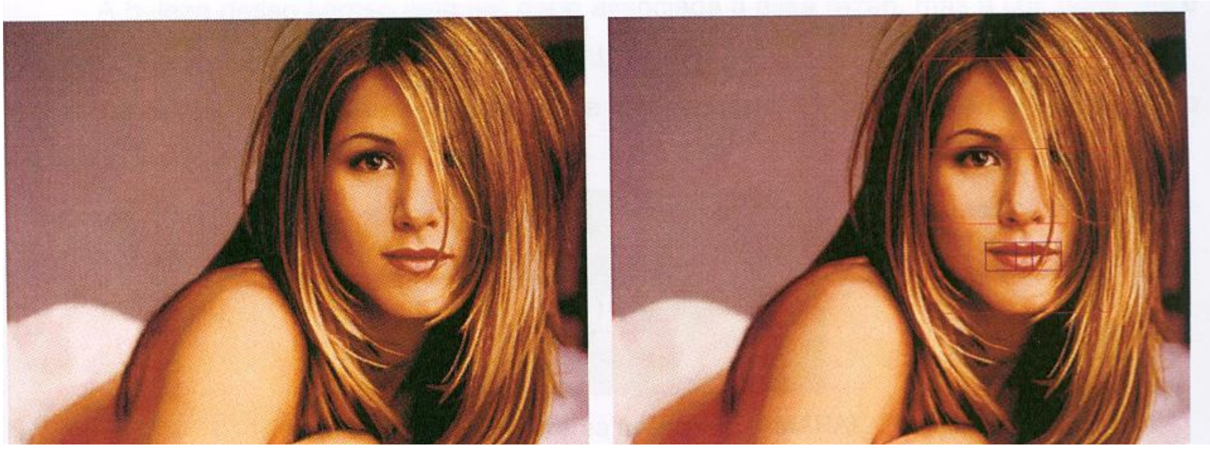


Figura 143: Rosto da atriz Jennifer Aniston. (AMARAL, 2007)

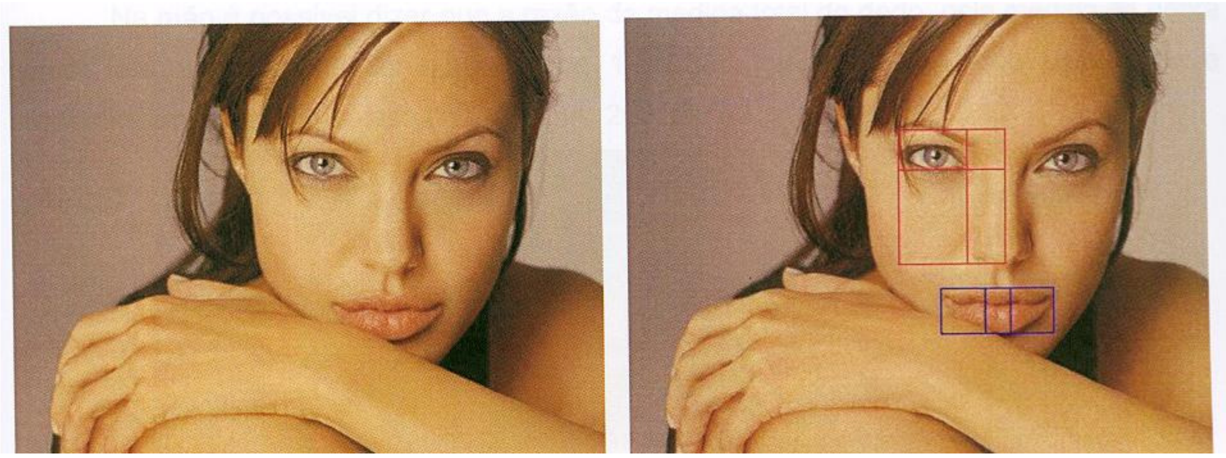


Figura 144: Rosto da atriz Angelina Jolie. (AMARAL, 2007).

Com base em nosso trabalho, podemos dizer que os atores das figuras anteriores são perfeitamente harmoniosos, no entanto, ao visualizarmos as pessoas comuns abaixo podemos não concordar que a beleza delas seja tão harmoniosa quanto à dos atores, porém baseados na Razão Áurea elas o são.

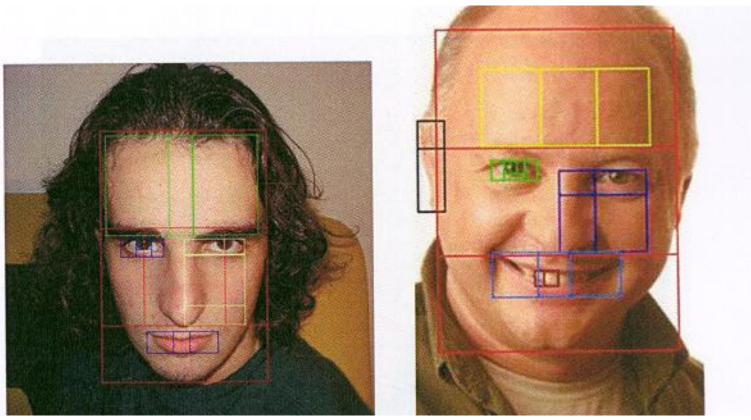


Figura 145: Rosto de pessoas comuns. (AMARAL, 2007)

4.2: A RAZÃO ÁUREA ENCONTRADA NO SORRISO

A beleza desse sorriso está em parte associada a essa razão, mas a cor, contraste e tamanho também são considerados. (AMARAL, 2007).

Os dentes são proporcionais conforme verificamos o retângulo áureo que foi aplicado sobre os dentes.

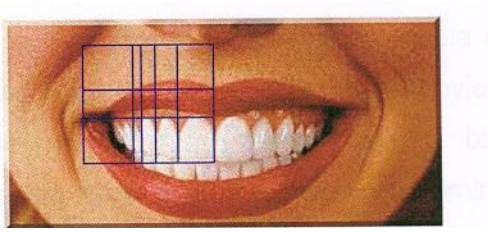


Figura 146: A proporção áurea no sorriso. (AMARAL,2007)

4.3: A RAZÃO ÁUREA ENCONTRADA NAS MÃOS

Na mão é possível dizer que a razão da medida total do dedo, pela medida da dobra central até a ponta, resulta no valor de 1,61803..., pode –se dizer que esse dedo é proporcionalmente harmoniosa (WIKIPÉDIA, 2007f).

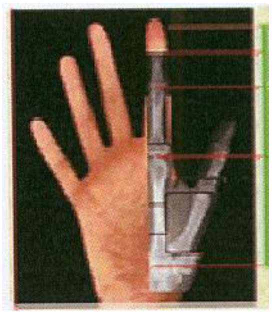


Figura 147: A mão e as Proporções Áureas. (BROLEZZI, 2006)

4.4: A RAZÃO ÁUREA ENCONTRADA NOS OLHOS

O traço representativo do olho é batizado lateralmente pelo canto externo e na outra ponta correspondente ao aspecto lateral do canto mais profundo ou fim da bola branca ocular visível. A distância entre os dois olhos é a distância entre o “Branco dos Olhos”.

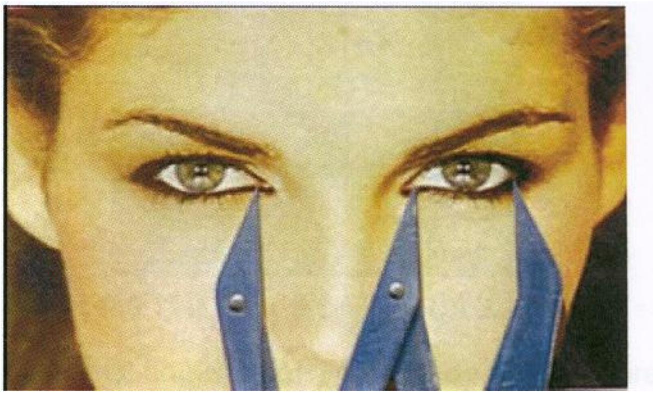


Figura 148: Distância entre o "Branco dos Olhos". (PRADO, 2004)

A distância entre o “Branco dos Olhos” está inter-relacionada em Divina Proporção como mostra a Figura 145. (PRADO, 2004).

4.5: A RAZÃO ÁUREA ENCONTRADA NO DNA

A molécula de DNA (ácido desoxirribonucléico), o agente do código genético, é uma macromolécula na qual se entrelaça um par de colunas de moléculas de açúcar e fosfato. Os comprimentos desiguais de suas ligações resultam naquela configuração helicoidal da estrutura. Portanto, ao fim e ao cabo, unidades moleculares enviesadas são o que dá forma à dupla hélice. Quando se projeta num plano (espaço bidimensional) a estrutura tridimensional da dupla hélice (processo que os cientistas denominam graphing), surge o par de curvas senoidais entrelaçadas. O computólogo israelense David Harel e seus colegas, ao medirem a molécula de DNA, descobrirem que, para cada ciclo de curvas senoidais, a razão entre a altura e a largura é o ϕ (aproximadamente 1,62). (ATALAY, 2007, p. 124).

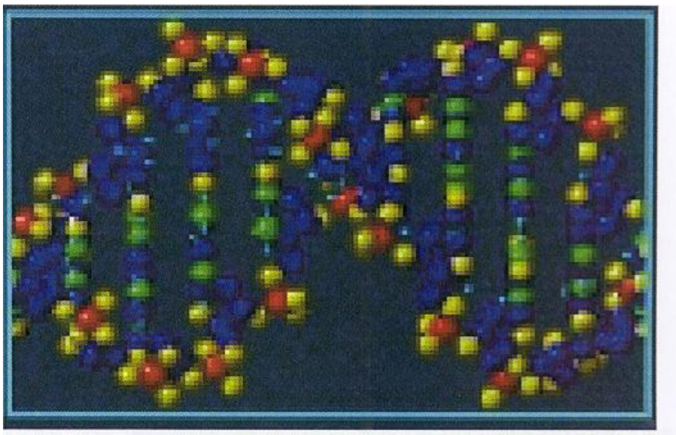


Figura 149: As proporções da molécula de DNA. (BROLEZZI, 2006)

Na figura abaixo vemos que uma secção transversal da dupla hélice do DNA vista de cima forma um decágono. (BROLEZZI, 2006).

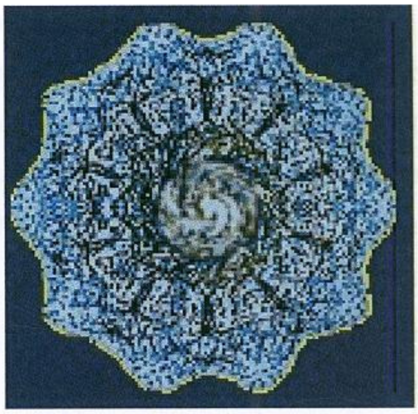


Figura 150: DNA visto de cima. (BROLEZZI, 2006)

A razão entre a diagonal do pentágono e seu lado é Phi, Figura 151. Não importa o jeito que olhamos, mesmo o menor elemento da vida, o DNA, é constituído usando o segmento áureo. (BROLEZZI, 2006).

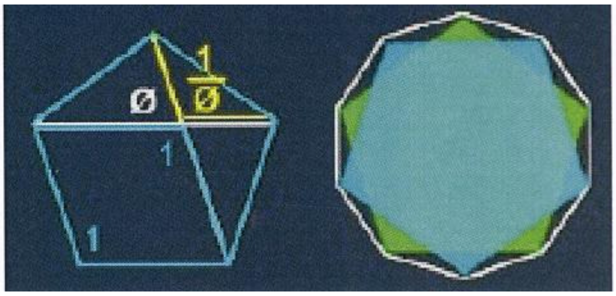


Figura 151: Razão Áurea entre o Pentágono e um dos lados do DNA. (BROLEZZI, 2006)

Esta forma do DNA, Figura 152, tem dois sulcos em uma espiral, cuja razão entre o maior e o menor é Phi. (BROLEZZI, 2006).

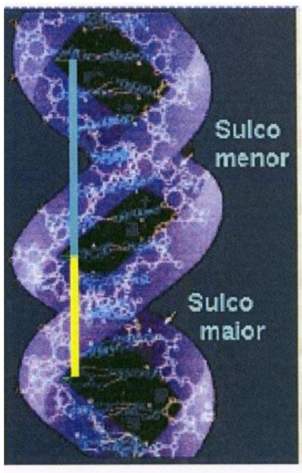


Figura 152: Apresentação dos Sulcos no DNA, proporções da molécula de DNA. (BROLEZZI, 2006)

A compreensão dos princípios básicos da Geometria traz à criatividade um senso de coesão e composição, em que cada elemento da obra ostenta um sentido de propriedade visual. Ao se desvendar a Geometria, os sistemas e as proporções, torna-se possível compreender melhor as intenções e o raciocínio dos profissionais que utilizam essa técnica. Adquire-se assim, uma visão do processo de realização e obtém-se uma explicação racional para muitas decisões, seja o uso de Geometria intuitivo ou deliberado, aplicado com rigidez ou por acaso. (VISCONTI, 2002).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Citamos importantes matemáticos e seus estudos para contribuir com o conhecimento relacionado ao princípio de tudo, gerando assim não só o interesse do aluno pela Matemática, mas pela sua história que também é fascinante, pois sem os recursos que hoje temos, os matemáticos citados e muitos outros, foram capazes de grandes estudos e maravilhosos resultados.

Como podemos observar é muito fácil encontrarmos a Razão Áurea em nosso cotidiano. Podemos assim ensinar nossos alunos um novo jeito de enxergar a Matemática, analisando as diversas aplicações nas quais apresentamos. É claro que para calcular a Razão Áurea a figura tem que ter padrões harmônicos e medidas que possibilitem a esse cálculo, mas com certeza despertará nos alunos o interesse pelo assunto e não mais olharão para uma figura, uma construção sem tentar imaginar a Razão Áurea, entendendo assim que a Matemática não seja apenas utilizada para resolver contas e problemas passados pelos professores em sala de aula.

Todos os exemplos citados aqui nos levam a perceber quão grandes é a importância deste número e por este motivo foi chamado de “ouro”.

Visamos com este trabalho despertar no educando mais interesse pela de Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. Episódios da História Antiga da Matemática, coleção Fundamentos da Matemática Elementar São Paulo, editora SBM, 1984.

AMARAL, F. P. Apresentação Razão Áurea. Stoa, 2007. Disponível em: <stoa.usp.br/franklinpda/files/-1/5834/ApresentaçãoRazaoAurea.ppt>. Acesso em: 10 de out. de 2009.

ÁVILA, G. Retângulo Áureo, Divisão Áurea e Seqüência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, nº 06, São Paulo, 1985.

ATALAY, B. A. Matemática e a Mona Lisa: A confluência da Arte com a ciência. São Paulo: Mercuryo, 2007.

BARISON, M. B. Definições, traçados, exemplos e aplicações da Proporção Áurea em Desenho Geométrico e Arquitetura. Geométrica 1, vol. N.4ª. 2005.

Belussi, G. M. Número de Ouro. 2006 – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina. Disponível em: <http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf>. Acesso em 05 nov. 2009.

BOYER, C. História da Matemática, 2ª edição, São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BROLEZZI, A. C. Fibonacci: Sua formação e seu legado. 2006 – Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20062/mat341/fibonacci.pdf>. Acesso em 03 out. 2009.

DIAS, A. A. Número de Ouro: Um pouco da história do Número de Ouro, 2006. UNIMESP – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo. Disponível em: <http://www.unimesp.edu.br/arquivos/mat/tcc06/Artigo_Andreia_Aparecida_Dias.pdf>. Acesso em 8 nov. 2009.

DOCZI, G. O Poder dos Limites: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura. São Paulo: Editora Mercuryo, 1990.

DONALD no país da Matemágica. Produção de Milt Banta, Bill Berg, Dr. Heinz Haber. Distribuição de Buena Vista Home Vídeo. Califórnia: Walt Disney Co. 1959.

FASCIONI, L. Introdução a Biônica, 2006. Disponível em: <http://www.ligiafascioni.com.br/aulas/aulabionica3.pdf. Acesso 28 out. 2009>.

FERREIRA, R. A. Sequência de Fibonacci. UNIFIEO, São Paulo, v.01, p. 14 2006. Disponível em: <http://www.fieo.br/v2/o_unifieo_cursos/antigo-matema/fibonacci.pdf>. Acesso em: 01 nov. 2009.

GONÇALEZ, R. Natureza Elegante – Os Números de Fibonacci, 2007. Disponível em: <http://rrgoncalez.wordpress.com/2007/12/02/natureza-elegante-os-numeros-de-fibonacci>. Acesso em 08 set. 2009.

HAYASHI, A. D. Aplicação dos Fractais ao Mercado de Capitais utilizando as Elliott Waves, 2002. Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <http://teses.eps.ufsc.br/defesa/pdf/8919.pdf>. Acesso em: 25 out. 2009.

HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção – Um ensaio sobre a Beleza e a Matemática. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1995.

KLUG, S. U. Catedral de Chartres – A Geometria Sagrada do Cosmos. São Paulo. Madras, 2002.

LAURO, M. M. A Razão Áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. Exata, Uninove, São Paulo, v.3, p. 35 – 48, 2005.

LE CORBUSIER. Por uma nova arquitetura. 5 ed. São Paulo: Editora Perspectiva, 1998.

LIVIO, M. Razão Áurea, a história de FI, um número surpreendente. São Paulo: Record, 2006.

MARMION, J. Noções Básicas de Composição. Sampa Oline. 2004. Disponível em: <http://www.sampaoline.com.br/reportagens/cursodefotografia_composição.htm>. Acesso em 02 set. 2009.

MARQUES, S.M.C. História do Número de Ouro. 2008. Disponível em: http://susymcmarques.googlepages.com/hist%B3riadophi. Acesso em: 01 out. 2009.

NETO, L. Segmento Áureo aplicado à construção de violoncelos, violinos. 2003. Disponível em: http://members.tripod.com/caipora/proporouro.htm. Acesso em 28 set. 2009.

PATER, W. Leonardo da Vinci, edição especial, São Paulo: Círculo do livro S/A, 1977.

PIPORO, B. Um número muito especial I: Razão Áurea. 2007a. Disponível em: <www.bpiporo.com.br/fpc20070115.htm. Acesso em: 16 nov. 2009.

PIPORO, B. Um número muito especial V: Razão Áurea e figuras planas. 2007b. Disponível em: www.bpiporo.com.br/fpc20070205.htm. Acesso em 16 nov. 2009.

PIPORO, B. Um número muito especial VI. Ladrilhos de Penrose. 2007c. Disponível em: www.bpiporo.com.br/fpc20070212.htm. Acesso em 16 nov. 2009.

PIPORO, B. Um número muito especial VII. Espiral de Fibonacci e Poliedros. 2007d. Disponível em: www.bpiporo.com.br/fpc20070219.htm. Acesso em 16 nov. 2009.

PIPORO, B. Um número muito especial VIII. FI e as Artes. 2007e. Disponível em: www.bpiporo.com.br/fpc20070226.htm. Acesso em 16 nov. 2009.

PIPORO, B. Um número muito especial IX. FI e o Reino Animal. 2007f. Disponível em: www.bpiporo.com.br/fpc20070319.htm. Acesso em 16 nov. 2009.

PRADO, J.L., Investigação Biométrica em Imagens Digitais para Detecção de Faces Humanas através da Proporção Divina, 2004. Dissertação – Escola de Engenharia de São Paulo da Universidade de São Paulo.

READ, H. As origens da Forma na Arte. 2. Ed. Rio de Janeiro: Zahar editores, 1981.

REZENDE, E.Q.F. Números Áureos e Segmento Áureo, 2006. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/aureo.pdf. Acesso em: 01 set. 2009.

STUART, G. Estruturas: Conceitos fundamentais e históricos. 2006. Disponível em: http://www.lmc.ep.usp.br/people/hlinde/Estruturas/petronas.htm. Acesso em 01 nov. 2009.

SVEVO, C. A lógica da Beleza. 2003. Disponível em: http://bonsfluidos.abril.uol.com.br/edicoes/0045/beleza/a.shtml. Acesso em: 28 out. 2009.

VISCONTI, L. A Geometria do Design. Estudos sobre proporção e composição da forma. Instituto de Artes Visuais, 2002.

WIKIPEDIA. Euclides. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/euclides. Acesso em: 07 set. 2009ª.

WIKIPEDIA. Leonardo Fibonacci. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci. Acesso em 07 set. 2008b.

WIKIPEDIA. Luca Pacioli. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli. Acesso em: 07 set. 2008c.

WIKIPEDIA. Oscar Niemeyer. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Oscar_Niemeyer. Acesso em: 01 nov. 2009d.

WIKIPEDIA. Pitágoras. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras. Acesso em 07 set 2009e

WIKIPEDIA. Proporção Áurea. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/divina_propor%C3%A3o. Acesso em 10 nov. 2009f.

WIKIPEDIA. Arcobotante. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/arcobotante. Acesso em: 13 nov. 2009g

WIKIPEDIA. Glândula Pineal. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Gl%C%A2ndula_pineal. Acesso em: 13 nov. 2009h

WIKIPEDIA. Côvado. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B4vado. Acesso em: 13 nov. 2009i

WIKIPEDIA. Clerestório. Disponível em: http://wikipedia.org/wiki/Clerest%C3%B3rio. Acesso em: 13 nov. 2009j.