

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – SP

DANILO DOS SANTOS CHRISTO

**DOCUMENTAÇÃO DE PROFESSORES PARA O ENSINO REMOTO DE LIMITE
EM CURSOS DE EXATAS**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2022**

DANILO DOS SANTOS CHRISTO

DOCUMENTAÇÃO DE PROFESSORES PARA O ENSINO REMOTO DE LIMITE
EM CURSOS DE EXATAS

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
DOUTOR em Educação Matemática sob orientação
da Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori.

PUC-SP
2022

Aprovado em: ____/____/____

Banca Examinadora

Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori
(Orientadora)- PUC-SP

Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira
Abar - PUC-SP

Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis -
UFPB

Prof. Dr. Luc Trouche - Institute Français de l'Éducation

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva – PUC - SP

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____

Data: ____/____/____

E-mail: _____

FICHA CATALOGRÁFICA -

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

Christo, Danilo dos Santos

Documentação de professores para o ensino remoto de limite em cursos de exatas / Danilo dos Santos Christo. -- São Paulo: [s.n.], 2022. 180p. il. ; cm.

Orientador: Sonia Barbosa Camargo Iglioni. Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Abordagem Documental do Didático. 2. Esquemas de Utilização. 3. Recursos. 4. Documentos; Limite. I. Iglioni., Sonia Barbosa Camargo. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – 88887.189975/2018-00.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – 88887.189975/2018-00.

Ao meu Nino, o mais que amado!

AGRADECIMENTOS

À COMISSÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR, DO GOVERNO FEDERAL, pelo imprescindível apoio, sem o qual esta produção não seria possível.

À Professora Doutora **Sonia Barbosa Camargo Iglori**, pelo trabalho de orientação e o permanente apoio mesmo em situações críticas dentro de minha vida privada.

Ao Professor Doutor **Luc Trouche**, pela atenção e paciência demonstradas nos encontros, seminários e trocas de *e-mail* e pelas fundamentais contribuições no desenvolvimento dessa pesquisa.

À Professora Doutora **Cibelle de Fátima Castro de Assis**, pelas contribuições e observações apresentadas com muita paciência e dedicação para a realização desse trabalho.

À Professora Doutora **Celina Aparecida Almeida Pereira Abar**, por me ajudar na confecção dessa tese desde quando era minha professora na disciplina Seminários Avançados II.

À Professora Doutora **Maria José Ferreira da Silva**, por me ajudar na confecção desta tese desde quando era minha professora na disciplina Seminários Avançados I e por contribuir para a minha formação desde a época de minha graduação.

À minha querida e amada esposa, **Denise da Silva Ferreira Christo** pela paciência, compreensão e apoio no decorrer dessa pesquisa e nos momentos difíceis durante o seu desenvolvimento.

Aos colegas de curso **Armênio Lannes Xavier Neto, Douglas Borreio e Rafael Rix**, pelas contribuições e, principalmente, pelas suas amizades e companheirismos.

À **Suzanne de Lima Freitas**, minha eterna gratidão pelos auxílios fundamentais para a conclusão dessa pesquisa.

Aos professores designados para a pesquisa com **P1** e **P2**, pois sem a imprescindível colaboração deles, esse estudo nunca poderia ter sido desenvolvido. Minha sincera e eterna gratidão.

À **Coordenação do PEPG em Educação Matemática** pelo apoio e compreensão em momentos difíceis.

À **todas e todos os funcionários** do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e da Biblioteca da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP.

Às **professoras e professores brasileiros** por exercerem suas atividades profissionais sob condições adversas na busca por diminuir as perdas dos estudantes na pandemia.

Às **famílias das vítimas** que sofreram e sofrem ainda com as consequências da pandemia e da irresponsabilidade do governo federal (2019 -2022) que não enfrentou com seriedade essa pandemia.

Ao **Povo Brasileiro**, principalmente os mais humildes que, por meio de seus impostos, financiou minha bolsa de estudos CAPES.

CHRISTO, D. S. **Documentação de professores para o ensino remoto de limite em cursos de exatas**. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022. 180 páginas.

RESUMO

Esta pesquisa refere-se à documentação de professores de cursos superiores da área de exatas, para o ensino remoto do conceito de limite de uma função, tendo como aportes teóricos a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e a teoria da Abordagem Documental do Didático (ADD). Ou seja, objetiva investigar os recursos mobilizados por professores universitários e os esquemas de utilização associados, no ensino do conceito de limite. Adotou-se para isso, a Metodologia da Investigação Reflexiva (MIR), específica da (ADD) que se apoia em cinco princípios fundamentais, os três primeiros são direcionados aos acompanhamentos dos sujeitos da pesquisa no planejamento e realização de suas aulas, e os dois últimos são voltados à coleta dos recursos materiais e digitais utilizados para o ensino e às respectivas confrontações entre as reflexões a respeito da elaboração de seus documentos. A delimitação da problemática da pesquisa foi efetivada pelos aportes teóricos, revisão de literatura, a justificativa e questão da pesquisa, e a metodologia. A revisão selecionou estudos que justificaram cientificamente a pesquisa e as análises dos dados. Um estudo de natureza histórica e epistemológica foi realizado com o objetivo de compreender o desenvolvimento histórico do conceito de limite, as dificuldades e os obstáculos encontrados na construção desse saber matemático. As análises dos dados foram realizadas, por diferentes ferramentas. Os resultados mostraram que, de forma majoritária, os professores adaptaram seus recursos mobilizados do ensino presencial para o ensino remoto e desenvolveram esquemas de utilização para eles e ao se apropriarem de novos recursos para o ensino remoto. Ou seja, pode-se responder à questão de pesquisa e atingir os objetivos declarados, ao conferir por meio da MIR como os dois professores criaram seus documentos para o ensino remoto de limite, conhecendo os recursos que mobilizaram e quais foram os esquemas de utilização deles.

Palavras-chave: Recursos. Esquemas de Utilização. Documentação Profissional. Ensino Remoto. Conceito de Limite.

ABSTRACT

This research refers to the documentation of professors of higher education courses in the area of exact sciences, for the remote teaching of the concept of limit of a function, having as theoretical contributions the Theory of Conceptual Fields (TCF) and the theory of the Documentational Approach to Didactics (DAD). That is, it aims to investigate the resources mobilized by university professors and the associated use schemes, in teaching the concept of limit. For this purpose, the Reflective Investigation Methodology (RIM), specific to DAD was adopted, which is based on five fundamental principles, the first three of which are aimed at monitoring the research subjects in planning and carrying out their classes, and the two the latter are focused on the collection of material and digital resources used for teaching and the respective confrontations between the reflections regarding the elaboration of their documents. The delimitation of the research problem was effected by theoretical contributions, literature review, justification and research question, and methodology. The review selected studies that scientifically justified the research and data analyses. A historical and epistemological study was carried out with the aim of understanding the historical development of the concept of limit, the difficulties and obstacles encountered in the construction of this mathematical knowledge. Data analyzes were performed using different tools. The results showed that, for the most part, teachers adapted their mobilized resources from face-to-face teaching to remote teaching and developed schemes of use for them and by appropriating new resources for remote teaching. That is, one can answer the research question and achieve the stated objectives, by checking through the RIM how the two teachers created their documents for the remote teaching of the limit, knowing the resources they mobilized and what were the schemes of their use.

Keywords: Resources. Usage Schemes. Professional Documentation. Remote Learning. Boundary Concept.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES NX^2 PARA $N = 2, 3, 10$	19
FIGURA 2 – UMA PROFESSORA TRABALHANDO COM MUITOS RECURSOS	34
FIGURA 3 – PROCESSO DA RELAÇÃO DIALÉTICA ENTRE RECURSOS E DOCUMENTO.....	39
FIGURA 4 - ESQUEMA DA GÊNESE DOCUMENTAL	41
FIGURA 5 - PLANO DE AULA DE P1	82
FIGURA 6 - PLANO DE AULA DE P2	82
FIGURA 7 - RESRE DE P1.....	118
FIGURA 8 - RESR DO PROFESSOR P2.....	123
FIGURA 9 - A RESR DE P2 REESCRITA	124
FIGURA 10 - CAMPO CONCEITUAL DO CÁLCULO.....	132
FIGURA 11 - CAMPO CONCEITUAL LIMITE DE UMA FUNÇÃO	133
FIGURA 12 - <i>SLIDE</i> ABORDANDO O CONCEITO DE LIMITE.....	136
FIGURA 13 - UM DOS PARADOXOS DE ZENÃO	137
FIGURA 14 - TABELA COM VALORES INSERIDOS	138
FIGURA 15 - SLIDE ABORDANDO A NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE	139
FIGURA 16 - SLIDE ABORDANDO UM RESULTADO - LIMITES E LIMITES INFINITO	141
FIGURA 17 - SLIDE ABORDANDO LIMITES E LIMITES INFINITO.....	142
FIGURA 18 - FIXANDO A NOTAÇÃO DE LIMITES	146
FIGURA 19 - EXEMPLO RESOLVIDO POR P2 ENVOLVENDO A REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA DE LIMITES.....	147
FIGURA 20 - DESENVOLVIMENTO DA EXPLICAÇÃO SOBRE PONTO DE ACUMULAÇÃO	149
FIGURA 21 - VIZINHANÇA DE PONTOS NA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.....	150
FIGURA 22 - DESENVOLVIMENTO DE UM LIMITE POR MEIO DA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE	152

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - TRABALHOS SELECIONADOS PARA A REVISÃO DE LITERATURA SOBRE A ADD.....	44
QUADRO 2 - TRABALHOS SELECIONADOS PARA A REVISÃO DE LITERATURA SOBRE LIMITES	46
QUADRO 3 - PERFIS DOS SUJEITOS DA PESQUISA	115
QUADRO 4 - CONCEITOS CONSTITUINTES DO CAMPO CONCEITUAL LIMITES.....	134

SUMÁRIO

1 Introdução	13
2 Problemática da pesquisa.....	26
2.1 Aportes Teóricos da pesquisa.....	26
2.1.1 Teoria dos Campos Conceituais (TCC)	26
2.1.2 Abordagem Documental do Didático	33
2.2 Revisão da literatura.....	43
2.2.1 Interlocução com trabalhos selecionados	46
2.3 Justificativa e delimitação do problema.....	72
2.4 A Metodologia da Investigação Reflexiva (MIR)	76
2.4.1 Sujeitos da pesquisa	79
2.4.2 Ferramentas de coletas de dados.....	79
2.4.3 Implementação e processos da coleta de dados.....	81
3 O Conceito de Limite	85
3.1 A análise histórica e epistemológica.....	85
3.2 Análise epistemológica do conceito de limite.....	87
3.2.1 Ideias iniciais de infinito.....	88
3.2.2 O desenvolvimento formal de limite	101
4 Dados empíricos.....	115
4.1 Os sujeitos da pesquisa	115
4.2 Representações esquemáticas dos sistemas de recursos de P1 e P2	117
4.3- Campo Conceitual do Limite	130
4.4 Análise dos dados coletados por meio do acompanhamento das aulas remotas dos professores.....	134
5 Considerações Finais	154
5.1 Conclusões	160
Referências	165
Anexo A – QUESTIONÁRIOS	172
Anexo B – Plano pedagógico de Cálculo 1 – Professor P1.....	174
Anexo C – Plano pedagógico de Cálculo 1 – Professor P2.....	177

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa trata da documentação (recursos mobilizados e esquemas de utilização desses recursos) de dois professores do ensino superior em cursos de exatas resultante do ensino e aprendizagem do conceito de limite efetivados durante a pandemia do COVID 19, na forma remota. Ela se apoia na teoria da Abordagem Documental do Didático (ADD) e visa a contribuir com a educação matemática universitária, em especial com o ensino e aprendizagem do cálculo.

Nessa introdução nos ocuparemos em apresentar temas relevantes ao escopo desta tese, referentes à: educação matemática no ensino superior; ensino e aprendizagem do conceito de limite de funções; impactos da pandemia no ensino e por fim nossas experiências de estudos da ADD.

No que se refere à educação matemática no ensino superior vale de início realizar um sobrevoo pela conferência do 10º ICME quando Mogens Niss (2008) nos situa a inserção, dos diversos níveis de ensino como problemas de pesquisa em educação matemática, considerada como a evolução da área. É o caso de, por exemplo, a informação de que: no começo, os objetos e fenômenos de estudo eram fundamentalmente referidos à matemática escolar (escola primária durante o século XX, escola secundária a partir dos anos 60 do mesmo século), mas logo aspectos da educação pós-secundária são agregados. Formação de professores e pré-escola ganham espaço nos anos 70 e 80, e do mesmo modo ensino superior em geral (nos anos 80 e 90). Esta tese se ocupa da educação matemática no ensino superior e espera-se contribuir com a elaboração de um *corpus* de conhecimentos nesse nível de ensino na educação matemática, com igual relevância ao já produzido para o ensino básico. Acrescenta-se a isso a contribuição esperada à ADD, considerando-se ser ainda exígua a produção brasileira de pesquisas destinadas a esse nível de ensino apoiadas por essa teoria.

Em 2013, o GT04 da SBEM (Ensino Superior), organizou um livro com 14 capítulos sobre sua produção intitulado “Marcas da educação matemática no ensino superior” organizado por Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, Barbara Lutaif Bianchini e Maria Clara Rezende Frota. Três capítulos desse livro são dedicados às pesquisas sobre ensino e aprendizagem do cálculo, mas o conceito de limite não é contemplado. As abordagens enfocam vantagens da visualização no entendimento de conceitos, preocupações com a formação de professores e questões relacionadas aos

registros de representação semióticas. Há ainda no capítulo 4 (p.89) quando se aborda ensino e aprendizagem da integral o uso de recursos digitais, no caso o *software* GeoGebra.

Em 2015 esse mesmo GT organiza outro livro, publicado pela Springer-link: *Mathematics Education at University*, relativa à sua produção no VI SIPEM, em que aponta que as pesquisas no âmbito do Cálculo sofreram um aumento significativo. Essas pesquisas reforçaram as dificuldades que essa área da matemática tem apresentado aos estudantes em todo o mundo. As pesquisas empíricas tiveram por sujeitos estudantes de Cursos de Exatas, ou seja, que não são de formação de matemáticos, e revelaram que o ensino superior em estudo tem sido aquele em que a matemática é disciplina de serviço.

Igliori e Almeida (2015) no artigo *Desenvolvimento de Material para o Ensino de Conceitos do Cálculo Diferencial*, são analisados recursos para o ensino de Cálculo, visando a contribuir com a prática educacional na medida em que os autores buscam problematizar dificuldades geradas por obstáculos cognitivos dos estudantes. Esse artigo se apoia em constructos teóricos da ADD (recursos) e de Tall para o ensino do Cálculo. São abordados os conceitos: continuidade e diferenciabilidade. São consideradas três componentes para os recursos: a material; a matemática e a didática. O computador munido do *software* GeoGebra é a componente material, os conceitos matemáticos continuidade e de diferenciabilidade de uma função real, a componente matemática e a noção de retidão local trazida por Tall, como a componente didática, a qual permitiu aos autores abordarem a representação gráfica da diferenciabilidade de uma função em um ponto.

Lima, Bianchini e Gomes (2019, p. 115), em um mapeamento da produção do GT04 eles dizem que “[..] tanto em relação ao Cálculo e à Análise, quanto a respeito da Álgebra Linear, os estudos já realizados apontam lacunas e conseqüentemente, perspectivas para novas investigações”.

Na página 120 esses autores dizem que:

Em relação a pesquisas por nós classificadas como intersecções entre reflexões sobre Cálculo e Análise, há, no *corpus* em questão, três investigações, número que consideramos baixo, dado a estreita ligação existente entre esses dois campos da Matemática. Entendemos como importante os membros do GT se debruçarem sobre estudos referentes àquilo que é específico do Cálculo ou da Análise e o que deve ser explorado em ambas as áreas, mas com enfoques diferentes (por exemplo, limite).
(LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2019, p. 120)

No que se refere a resultados de pesquisas na educação matemática, sobre o conceito de limite iniciamos destacando que esse conceito desempenha, sem dúvida, um papel central na matemática e em especial no cálculo diferencial e integral. Nele se apoiam as definições de aproximação, continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade e de infinito potencial e atual.

O conceito de limite de uma função é introduzido em geral no ensino superior brasileiro, em Cálculo 1 (diferenciabilidade e integrabilidade de funções reais de uma variável real) como unidade curricular das matrizes curriculares de cursos de exatas.

Na educação matemática do ensino superior as pesquisas voltadas ao cálculo direcionam-se ao aprendizado do aluno, a questões relativas ao rigor ou à intuição no cálculo e seu desenvolvimento para a análise real, como por exemplo as pesquisas de Cornu, Artigue e Sierpinska.

Cornu (1983), por exemplo, aponta que o conceito de limite, fundamental na análise matemática, traz dificuldades à aprendizagem e que elas são persistentes até o ensino superior. Na França o conceito de limite é introduzido já no ensino médio.

Cornu (1983) propaga que o conceito limite, não deve ser reduzido à sua definição. Ele diz que, mesmo que uma definição seja matematicamente suficiente para caracterizar um conceito, em termos de conhecimento ela não considera todas as suas características. O autor defende que para se ter a ideia completa do conceito de limite deve-se examinar, em detalhes, como ele é utilizado em todas as áreas da matemática, ou seja, examinar os cálculos dos limites, as demonstrações e os resultados das aproximações. Segundo o autor, a forma como um conceito funciona é que o determina como um objeto matemático.

Cornu (1983) ainda apresenta uma análise dos programas e dos manuais implementados entre 1981 e 1982 na França para verificar como o limite era apresentado. Para o autor, existe uma lacuna entre a definição de limite e o conceito de limite. A definição de limite não transmite a ideia dinâmica (tudo está ligado ao “tender a”, ao fato de “se aproximar de”). A definição formal transforma o conceito em algo extremamente complexo que mistura infinito, ideia de aproximação, a ideia de abordar algo sem atingir ou alcançar, misturando quantificadores e desigualdades.

Cornu (1983) ressalta que essa lacuna aparece de diversas maneiras e que compreender o conceito de limite e compreender sua definição em (ϵ, δ) são relativamente independentes. Segundo o autor, alguns estudantes assimilam a definição de maneira suficiente para resolverem a maioria dos exercícios durante seus

estudos, porém não assimilam o conceito de limite. Por outro lado, outros estudantes compreenderão uma série de aspectos fundamentais de limite, porém não entenderão sua definição. Para o autor, a aquisição do conceito de limite pressupõe uma representação mental, imagens, desenhos, exemplos, *links* que não são os mesmos para a aquisição da definição de limite. Compreender a definição permite, por exemplo, demonstrar que o limite da soma é a soma dos limites, mas não permite calcular o limite.

Cornu (2002) aponta que, no caso do conceito de limite, as palavras “tende para” e “limite” têm significado para os estudantes antes dos estudos sobre esse conceito começarem e que essas palavras continuam a depender desse sentido depois de a definição de limite ser apresentada. Suas investigações revelaram diferentes sentidos para a expressão “tende para”:

- . Aproximar (eventualmente ficando fora de);
- . Aproximar... sem alcançar;
- . Aproximar... apenas alcançando e
- . Assemelhar (sem qualquer variação, como “esse azul tende para violeta”).

A palavra “limite” pode ter diferentes sentidos em diferentes momentos. O mais frequentemente considerado é o de um “limite intransponível”, entretanto existem outros significados:

- . Um limite intransponível que é alcançável;
- . Um limite intransponível impossível de alcançar;
- . Um ponto que se aproxima e atinge;
- . Um limite superior (ou inferior);
- . Um máximo ou mínimo;
- . Um intervalo;
- . O que vem “imediatamente após” podendo ser alcançado;
- . Uma restrição, uma proibição, uma regra;
- . O fim, o acabamento.

De um estudante a outro, o sentido dado à palavra “limite” varia, pois vários sentidos podem ser criados conforme a situação. As ideias espontâneas que envolvem o sentido dessa palavra duram um longo tempo e que podem permanecer com os estudantes em estágios mais avançados do aprendizado.

Cornu (2002) aponta que na noção de limite é interessante identificar as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de aprendizagem desse conceito e buscar estratégias mais apropriadas para seu ensino. Segundo ele, é possível distinguir obstáculos genético e psicológico. Os obstáculos ocorrem como resultado do desenvolvimento pessoal do estudante, os obstáculos didáticos ocorrem por causa da natureza do ensino e da prática do professor enquanto os obstáculos epistemológicos ocorrem por causa da natureza dos conceitos matemáticos. Portanto, no planejamento para ensinar os conceitos matemáticos, é muito importante considerar esses obstáculos.

Cornu (2002) considera os obstáculos na visão endêmica conforme Bachelard (1996) que considera os obstáculos como inevitáveis e essenciais constituintes do conhecimento a ser alcançado e são encontrados, ao menos em parte, no desenvolvimento histórico de um conceito.

Ao tratar dos obstáculos epistemológicos (BROUSSEAU, 1983) no desenvolvimento da história, Cornu (2002) ressalta a importância do estudo da história do conceito para identificar períodos de desenvolvimento lento, sendo que as dificuldades que surgiram podem indicar obstáculos epistemológicos.

O desenvolvimento do conceito de limite aponta que a noção desse conceito foi introduzida para resolver problemas geométricos (cálculo de áreas, natureza geométrica do comprimento e “exaustão” de figuras geométricas), o problema da soma e razão de convergência de séries e o problema de diferenciação relacionado à razão de duas quantidades que tendem a zero.

Cornu (2002) aponta quatro principais obstáculos na história do conceito de limite:

- . O fracasso em associar a geometria a números;
- . A noção do infinitamente grande e do infinitamente pequeno;
- . O aspecto metafísico da noção de limite;
- . O limite é atingido ou não?

O autor também destaca obstáculos epistemológicos presentes na matemática moderna e aponta ser interessante buscar na história as dificuldades que deram origem a ideias modernas. A introdução da análise de Weierstrass dependendo somente da definição lógica do conceito de número falhou ao eliminar o conceito de infinitesimal, pois era parte essencial da cultura matemática nos seus primórdios. Embora seja possível formular definições de limite e continuidade em termos de

épsilons e *deltas*, existem situações em que usar a linguagem dinâmica de “variável tendendo a zero”, de forma análoga a de Cauchy, resulta em uma imagem mental ligada ao “arbitrariamente pequeno”.

Para Cornu (2002), independente da tentativa de se eliminar os infinitésimos da análise moderna, esses continuam presentes nas mentes e na comunicação dos profissionais da matemática, mesmo que fossem eliminados das provas formais.

Segundo o autor, a complexidade da matemática moderna e as diferentes colorações culturais de sentidos afetam a aprendizagem dos alunos. As interações humanas são sensíveis ao tom da voz, aos sentidos implícitos e à certas ideias que são didaticamente transmitidas pelos professores. Embora alguns sentidos sejam evitados em textos escritos, eles podem ser transmitidos, erroneamente, de geração em geração quando o professor busca “simplificar” algo complexo com o objetivo de contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Cornu (2002) aponta que *“A diversidade de concepções, a riqueza e a complexidade de noções e os obstáculos cognitivos tornam o ensino do conceito de limite extremamente difícil”* (CORNÜ, 2002, p. 165, tradução nossa). Muitos professores consideram que é suficiente mostrar uma clara exposição do conceito de limite para capacitar o aluno a compreendê-lo. Porém, o autor aponta que é muito mais importante que os estudantes sejam conscientizados da complexidade da noção de limite e reflitam sobre suas ideias, bem como dos obstáculos epistemológicos que sobre ela recaem.

Para o autor, o importante é considerar a ordem em que os conceitos de limites são apresentados aos alunos sem considerar a apropriação cognitiva da sequência do currículo e dos problemas a serem resolvidos.

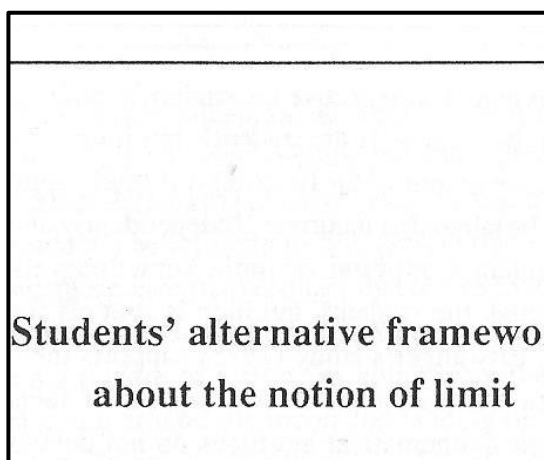
Artigue (2002) destaca o nível altamente sofisticado de estrutura dos objetos nas fundações do campo conceitual do Cálculo, como sequências e funções e aponta a existência de vários obstáculos: no desenvolvimento histórico, aqueles devidos ao significado cotidiano conflitante de alguns dos termos, obstáculos devidos ao problema onipresente do infinito e às conceituações dos alunos dos reais mais consoantes com a teoria não padronizada do que a formalização padrão, além das dificuldades apresentadas na aprendizagem de técnicas específicas como nas resoluções de limites superiores e inferiores, do axioma da completude e das dificuldades devido à sua formalização.

Segundo a autora, ao se tentar evitar as dificuldades de formalização e técnicas de aproximação, cria-se um verdadeiro abismo entre a definição do conceito e a imagem do conceito (TALL, 1981) e quando o professor enfatiza excessivamente a abordagem algébrica por meio da algoritmização fácil, reduzem-se as possibilidades de mudança de pontos de vista, essenciais à prática real do matemático. Além disso, exclui a possibilidade de aproveitar as diversidades cognitivas que podem existir entre os alunos.

Ao evitar os problemas de legitimação leva-se o aluno a ver as provas como uma simples questão de contrato didático, ou seja, o simples compromisso, por parte do professor, de cumprir as exigências do curso. Para a autora, os alunos chegam a obter um nível razoável de sucesso em um determinado número de tarefas algorítmicas, porém é preciso ressaltar que não há, no contexto desta instrução, uma verdadeira introdução, pois as concepções desenvolvidas pelos alunos são pobres e as técnicas sutis não são assimiladas.

Em Moura (1995) é apresentado um exemplo, o da sequência de funções (nx^2) $n \in \mathbb{N}$, no qual se percebe um conflito entre a intuição de limite de estudantes e o conceito matemático. A autora indica que em diferentes situações, estudantes questionados sobre o limite dessa sequência, apresentada graficamente como na Figura 1, respondem ser o eixo dos y. A prova de que a sequência não tem limite não é convincente para eles.

Figura 1 - Sequência de Funções nx^2 para $n = 2, 3, 10$



Fonte: Adaptado Moura (1995, p. 67)

O exemplo da Figura 1 gera uma discussão que trata da relação da intuição dos estudantes com definições de limite. É dito que:

[...] independentemente do ponto de vista de alguém sobre a legitimidade da intuição de limite dos alunos, outra coisa ocorre se a intuição dos alunos for rejeitada: a intuição do aluno é fechada por causa da rigidez da definição (MOURA, 1995, p. 68)

As discussões enveredam pela apresentação de referenciais teóricos alternativos que tratam de concepções inadequadas de estudantes. É quando são citadas concepções inadequadas de estudantes sobre limite. Por exemplo: *“O limite de uma sequência é o final dessa sequência; ele indica até onde uma sequência pode ir, ou até não haver mais elementos, ou a sequência não acontece mais; ou até onde a sequência tenha um último termo uma espécie de a_∞ ”* (MOURA, 1995 p.68 apud DAVIS, VINNER, 1995, tradução nossa).

E ainda na perspectiva da concepção alternativa e obstáculos epistemológicos, consideram nessa discussão de que a noção de obstáculo epistemológico leva à visão de tomar a matemática como um sistema cultural constituído de três níveis, o formal, o informal e o técnico. Em Sierpinska (1989) pode-se encontrar a ideia de que alguns dos elementos do nível formal e do informal podem ser fontes para os obstáculos epistemológicos. Um exemplo dessa consideração, bem conhecido e resistente relaciona-se ao limite da sequência, $(0,9)$. Estudantes consideram que *“1 é uma aproximação de $(0,9)$...e há um acordo em identificar os dois números, sem, no entanto, aceitar que seja verdade”* (MOURA, 1995 p.72 apud DAVIS, VINNER, 1995, tradução nossa)

Acrescenta-se à lista de discussões as concepções de limite apresentados por Tall e Vinner (1989), Cornu (1981), William (1991) e Sierpinska (1997). As contribuições de Cornu (1983; 2002) estão indicadas no início dessa Introdução.

Segundo Moura (1995), Sierpinska objetiva propagar que as ideias dos estudantes são fortes referências para eles, e que parece mesmo se configurar uma mudança conceitual para concepção técnica de limite. No bojo desse estudo ela relaciona uma lista de obstáculos epistemológicos buscados nas pesquisas históricas e experimentais: a heurística geométrica estática; a heurística numérica estática, a heurística geométrica cinética, rigor-Eudoxo e rigor Fermat- (MOURA, 1995 p.70 apud SIERPINSKA, 1995^a, p.373, tradução nossa). Essa pesquisadora relaciona esses obstáculos aos conceitos de infinito, função e número real.

Muito há para indicar sobre os estudos teóricos das dificuldades de aprendizagem do conceito de limite. Os que apresentamos nessa introdução cobrem, de certa forma, elementos essenciais.

No que se refere ao ensino na pandemia e em consequência ensino remoto apuramos alguns depoimentos que consideramos representativos e por isso trazemos nessa Introdução. Com título “Docência e Ensino Remoto: sustentar a transferência” Charkzuc (2020) indica que:

A demanda emergente da passagem de uma forma de trabalho docente presencial para a oferta do ensino remoto produziu nos professores uma urgência em adaptar os modos de encontro com os alunos e a partilha dos conteúdos didáticos. Nesse sentido, podemos conjecturar que os professores, em um primeiro momento, (pre)ocuparam-se em pensar recursos técnicos (áudio, vídeo, apostilas) que subsidiassem o ensino, fazendo com que o estabelecimento de um outro laço possível com o conhecimento e com os alunos ficasse frágil ou fosse colocado em segundo plano. (CHARKZUC, 2020, p.12)

E ainda que:

A impossibilidade de compartilhamento da escola como espaço físico tradicional exige que a sustentação do laço possa se dar de outras maneiras e tendo que contar com o intermédio das tecnologias digitais. Mais do que centrarmos no debate sobre os recursos tecnológicos em si, propomos que o questionamento acerca dos modos de sustentar a interação no ensino remoto inscreve-se como grande desafio. (CHARKZUC, 2020, p.12)

Essa autora chama a atenção para o fato de que é *“justamente o laço entre professor, aluno e conhecimento que produz efeitos de reconhecimento dos sujeitos e de autoria nos processos de ensino e aprendizagem.”* (CHARKZUC, 2020 p.12)

Pode se encontrar as informações de que:

Não são conhecidos com clareza, ainda, do ponto de vista científico, os efeitos de uso do Ensino Remoto Emergencial ou da suspensão das atividades no Ensino Superior. A literatura sobre Ensino Emergencial faz referência predominantemente a experiências em situações de guerra ou desastres, focando em educação básica (p. ex., GLOBAL COALITION TO PROTECT EDUCATION FROM ATTACK, 2016). Nesses casos, a recomendação é a manutenção remota do ensino como meio de manter uma rede de proteção à criança e ao adolescente, mais do que ensinar conteúdos curriculares (UNESCO, 2020b, 2020c). (GUSSO et al, 2020, p.6)

E ainda que:

Dadas as condições institucionais e as condições dos agentes envolvidos nesse processo (i. e., gestores, professores, estudantes, funcionários), definir prioridades, no sentido de estabelecer o que precisa ser garantido no Ensino Superior durante o período de pandemia e o que seria viável e adequado ser ensinado nesse momento (OCDE, 2020), talvez seja um dos pontos de partida para tornar o ensino, apesar de emergencial, mais planejado e estruturado. (GUSSO et al, 2020, p.6)

Sobre as metodologias utilizadas no ensino remoto durante a pandemia pode-se apurar que:

Neste sentido, os estudos revelam que os professores foram forçados a aprender subitamente a utilizar plataformas virtuais de aprendizagem, sistemas de videoconferência e outros recursos tecnológicos. Entretanto, na maioria dos casos, estas tecnologias foram e estão sendo utilizadas numa perspectiva instrumental, reduzindo as metodologias e as práticas pedagógicas a um ensino puramente transmissivo (Moreira, Henriques e Barros, 2020; Santana Filho, 2020), em que os professores prestam tutoria eletrônica, disponibilizam material online e interagem com seus alunos de forma síncrona ou assíncrona, com pouca interatividade e feedback insuficiente (Almeida e Alves, 2020; Vasconcelos, Soares e Colares, 2020). (VIEIRA; SILVA, 2020, p. 1024)

E que:

Evidencia-se a necessidade de formação docente que possibilite o desenvolvimento de competências digitais, de modo a serem capazes de modificar suas práticas pedagógicas com uso dos recursos tecnológicos (Silva Monteiro, 2020). Para além do domínio tecnológico, torna-se imprescindível o desenvolvimento de habilidades autorais e competências digitais docentes para sintetizar, produzir, “remixar” e compartilhar conhecimentos no ciberespaço, de modo que os professores sejam capazes de criar um ambiente inovador, com uma dinâmica que se diferencie das práticas transmissivas historicamente consolidadas na educação (Almeida e Alves, 2020). O modelo de formação inicial de professores precisa ser (re)pensado/adaptado para as demandas da contemporaneidade (Barreto e Rocha, 2020). (VIEIRA; SILVA, 2020, p. 1024)

Encerramos nossas considerações sobre o ensino remoto, desenvolvido na Pandemia, indicando seus impactos no ensino superior apontados nessa publicação: Dizem seus autores que, muitos docentes não conseguiam lidar com novas tecnologias e que ministraram aulas tradicionais na *internet* achando que tudo iria continuar como antes, e que, a implementação do ensino remoto às pressas implicou possivelmente em obstáculos a aparecer com o tempo. Eles reforçaram que alguns docentes observaram o baixo desempenho dos acadêmicos com aumento do acréscimo da perspectiva de evasão; desgaste dos docentes que estiveram sobrecarregados pelas múltiplas atividades e pelos desafios de lidar com a tecnologia a fim de promover o ensino de qualidade.

Vamos em seguida, descrever alguns elementos que motivaram a escolha da ADD, como apoio teórico desta pesquisa.

Os primeiros incentivos apareceram nas participações em eventos específicos sobre as pesquisas com apoios nessa teoria, os quais destacamos.

Em maio de 2018, participamos da conferência internacional *Re(s)ources – Understanding Teachers’ Work Through Their Interactions With Resources For Teaching* ocorrida em Lyon, França. Essa conferência fez um balanço dos dez anos

de contribuições, avanços e questionamentos da teoria Abordagem Documental do Didático (ADD) de Gueudet e Trouche (2008) para a área de educação matemática e outras áreas de educação. Nessa conferência estabelecemos os primeiros contatos com as propostas de Trouche e Gueudet, criadores da ADD, como as de outros importantes pesquisadores dessa abordagem como Pepin, Ruthven, Sabra, Gitirana, Assis, Rocha, entre outros. Nela tomamos conhecimento de pesquisas que estavam sendo desenvolvidas, em mais de dez países, apoiadas por esse quadro teórico.

Os conhecimentos adquiridos indicaram a pertinência de sua utilização em estudos relativos ao ensino e aprendizagem de matemática, na medida em que ADD traz uma abordagem que ilumina a relação do papel do professor na ação de ensinar o que estava em acordo com o que me interessava investigar. Essa teoria propugna que os processos de ensino e aprendizagem sofrem forte influência dos recursos que os professores mobilizam para o ensino e a forma que eles os utilizam em suas práticas. Na realidade para a ADD o desenvolvimento profissional do docente tem relações estreitas com os recursos utilizados pelos professores.

Nossos conhecimentos sobre a ADD se iniciaram já nessa conferência quando nas horas vagas buscamos realizar um breve levantamento das pesquisas desenvolvidas no Brasil apoiadas nessa teoria. Naquela época, fizemos uma breve consulta por pesquisas brasileiras no quadro da ADD na ferramenta de busca Google. Encontramos muitas realizadas ou em desenvolvimento no ensino básico, porém apenas uma no ensino superior. Essa constatação nos instigou ainda mais a desenvolver esta pesquisa de doutorado, por meio desse quadro teórico, com vistas a investigar as interações do professor universitário com seus recursos mobilizados para o ensino de Limites.

Em 2018 buscamos aprofundar os estudos sobre a ADD e iniciamos a elaboração e o desenvolvimento desta pesquisa nos apoiando nesse quadro teórico a partir de suas potencialidades. Esses estudos resultaram no pôster, que mostrava as informações iniciais da pesquisa em andamento no quadro teórico da ADD, apresentado no 11º CERME - Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - ocorrido em Útrecht, Holanda, no período de 05 a 10 de fevereiro de 2019. Esse pôster foi apresentado no TWG14: University mathematics education – GT14: Educação matemática universitária – liderado pelas doutoras Ghislaine Gueudet, Irene Biza e pelo doutor Alejandro Gonzáles-Martin. É necessário destacar que os estudos apresentados no 11º Cerne eram apoiados, por meio de

outras teorias da educação matemática, ou seja, na era dedicado somente à ADD, como aquela que ocorreu em Lyon em 2018.

Durante o ano de 2021, a PUC-SP no âmbito do Projeto PIPRINT- PG 9302/2020, apoiou o Ciclo de 10 seminários em torno da Abordagem Documental do Didático com a participação de Trouche. Os seminários trataram de diferentes temas e tiveram a participação de pesquisadores nacionais e estudantes de pós-graduação que se dedicam ao estudo da ADD.

As participações nas duas conferências e nos 10 seminários nos propiciaram maior envolvimento com essa área da Didática Francesa e nos motivaram ainda mais a desenvolver esta pesquisa de investigação da prática profissional de professores universitários tendo como aporte teórico a ADD.

A proposição da pesquisa foi então planejada para se utilizar contatos presenciais com os possíveis sujeitos da pesquisa.

Entretanto, a pandemia causada pelo vírus da Covid-19 no início de 2020 forçou o fechamento físico de escolas e universidades. Nesse contexto, surgiram muitas incertezas de como, quando e se as aulas seriam retomadas. A falta de perspectiva sobre o futuro impactou diretamente no desenvolvimento da pesquisa, pois o fechamento físico das universidades ocorreu exatamente quando planejávamos contatar os professores universitários para participarem.

O cotidiano das pessoas teve de ser modificado e, no caso da educação, não poderia ser diferente. As previsões do retorno das aulas permaneciam incertas. Na verdade, o retorno às aulas presenciais foi adiado devido às incertezas causadas pelo contexto pandêmico e até aquele momento nenhuma perspectiva de quando o ensino presencial seria retomado podia ser considerado, portanto, o único meio em que as aulas poderiam ser retomadas, desenvolvidas e ministradas era por meio remoto.

Nesse contexto, uma solução possível com o intuito de diminuir as perdas na área de educação foi a implantação do ensino remoto por meio de plataformas digitais de trabalho em grupo, tais como, o MS Teams e o Google for Education.

Nessa perspectiva, decidimos por continuar o desenvolvimento da pesquisa por meio remoto, adaptando as ferramentas de coletas de dados e do acompanhamento dos professores. A crise sanitária gerou circunstâncias inusitadas à atividade profissional dos professores, assim como na dos pesquisadores, pois também tivemos que migrar de um ambiente de pesquisa presencial para um ambiente de pesquisa remoto.

Assim sendo esta pesquisa objetivou apreender e analisar a documentação elaborada por dois professores de cursos superiores de exatas ao interagirem com seus recursos para o ensino remoto de limites.

A estruturação deste Relatório da Pesquisa está feita em seis capítulos, na forma que segue.

O capítulo 1 contém a Introdução, na qual apresentamos temas que consideramos relevantes ao escopo desta tese.

No capítulo 2 estão a problemática da pesquisa que inclui os aportes teóricos; a revisão de literatura; a justificativa e a delimitação do problema, os princípios da Metodologia da Investigação Reflexiva (MIR), suas adaptações para o contexto da pesquisa e as ferramentas de coleta de dados.

O capítulo 3 é dedicado ao conceito de limite, por meio de um estudo histórico e epistemológico do desenvolvimento desse conceito. Nesse capítulo, conforme Boyer (1959), buscamos esclarecer as ideias contribuídas por Zenão, Platão, Pitágoras, Eudoxo, dos matemáticos gregos, Newton, Leibniz, Descartes, Euler, Lagrange, Weirstrass e muitos outros na longa passagem dos métodos de exaustão dos Gregos e paradoxos de Zenão ao moderno conceito de limite independente da experiência do sentido e iluminando não só os métodos da descoberta matemática, mas também a fundamentação do pensamento matemático.

No capítulo 4 são apresentados os dados empíricos da pesquisa e no capítulo 5 as considerações finais em que são apontadas as conclusões, por meio da análise dos dados coletados e apresentadas novas questões que ensejam futuras pesquisas.

2 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a problemática, a qual envolve os aportes teóricos da pesquisa, a definição do campo conceitual do cálculo diferencial e integral; uma revisão de literatura, a justificativa e delimitação do problema da pesquisa, e a metodologia de investigação.

2.1 Aportes Teóricos da pesquisa

2.1.1 Teoria dos Campos Conceituais (TCC)

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) busca ampliar e redirecionar o foco piagetiano das operações lógicas gerais e das estruturas gerais do pensamento, para o estudo do funcionamento cognitivo do sujeito em situação. A TCC baseia-se no conceito de esquema de Piaget e nas relações entre interação social, linguagem e simbolização de Vygotsky.

Nessa perspectiva, Vergnaud (1990) propôs uma teoria que busca compor, em um mesmo foco de análise, o desenvolvimento e o funcionamento cognitivos, que segundo o autor:

[...] é uma teoria cognitivista, que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios básicos para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, especialmente das que se referem às ciências e às técnicas. Por oferecer uma estrutura de aprendizagem, é de interesse da didática (VERGNAUD, 1990 p. 133, tradução nossa)

Na teoria, Vergnaud (1990) tem-se que:

o saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por problema é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação em que é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução. (VERGNAUD, 1990, p. 52, tradução nossa).

E assim “situação”, para esse autor, constitui-se de um conjunto de dados complexos de objetos, propriedades e relações, em um espaço e tempo determinados, que envolve o sujeito e suas ações.

Ele toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais, que se referem a:

um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. (VERGNAUD, 1982 p. 40)

A TCC é uma teoria pragmática, pois pressupõe que a aquisição do conhecimento pelo sujeito é desenvolvida por situações e por suas ações nessas situações e que é por meio dessas situações que um conceito adquire sentido para o sujeito. De acordo com Vergnaud (1990), esse processo de elaboração pragmática é essencial para a psicologia e para a didática e:

[...] não prejudica de forma alguma a natureza dos problemas para os quais um novo conceito fornece uma resposta: esses problemas podem ser teóricos e práticos. Isso também não prejudica a análise do papel da linguagem e do simbolismo na conceituação; este papel é muito importante (VERGNAUD, 1990 p. 135, tradução nossa)

Segundo Vergnaud (1990), um conceito não pode ser reduzido a uma definição, caso se esteja interessado em sua aprendizagem e em seu ensino, um conceito só faz sentido para o sujeito, por meio das situações e problemas a serem resolvidos. Para ele um conceito C constitui-se em uma terna de conjuntos: $C = (S, I, R)$, sendo:

1. S: um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);
2. I: um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto. Esse conjunto de invariantes garante a operacionalidade dos esquemas (significado);
3. R: um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações, o conceito, suas propriedades e os procedimentos de tratamento (o significante).

Portanto, para investigar o desenvolvimento e o uso de um conceito é necessário considerar esses três conjuntos, simultaneamente. Não há, em geral, correspondência biunívoca entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações; não se pode reduzir o significado nem aos significantes nem às situações. Por outro lado, vale ressaltar que um único conceito não se refere a um só tipo de situação e uma única situação não pode ser analisada por meio de um só conceito.

Um campo conceitual é, em primeiro lugar, um conjunto de situações que compartilham as mesmas propriedades e que requerem o domínio de vários conceitos de naturezas distintas. Os conceitos tornam-se significativos por meio de situações, portanto, naturalmente, são as situações e não os conceitos que constituem a principal entrada em um campo conceitual. Além disso, a operacionalidade de um conceito abrange uma diversidade de situações e se manifesta sob uma variedade de ações e de esquemas.

Para Vergnaud (1990) existem dois tipos de situações que, quando assumem algum significado para o sujeito, podem gerar dois tipos de processos diferentes para a sua resolução:

1º tipo: classe de situações em que o sujeito tem em seu repertório de competências, em um determinado momento de seu desenvolvimento e em determinadas circunstâncias, os procedimentos necessários para o tratamento relativamente imediato da situação.

2º tipo: classe de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias para o tratamento da situação. Nessa classe, há uma ruptura do conhecimento e um momento de descoberta que, em alguns casos, resulta no surgimento do novo. A resolução da nova situação leva o sujeito a um momento de reflexão e exploração, dúvidas, tentativas abortadas que podem, eventualmente, levar ao sucesso ou ao fracasso.

No primeiro tipo, os esquemas já estão disponíveis, ou seja, a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações é aplicada quase que automaticamente. No segundo, ocorre a utilização sucessiva de vários esquemas, cuja aplicação se mostra pertinente à situação apresentada, por analogia ou semelhança. Nesse caso, os esquemas são acomodados, descombinados e recombinados.

Para chegar à dialética esquema/classe de situações, Vergnaud (1990) estudou e trabalhou com algoritmos, em sua tese. Essa dialética permite operacionalizar o conceito de esquema, uma vez que são os esquemas que se adaptam às situações. Portanto, a noção de esquema ocupa um lugar central no que diz respeito à organização do sujeito para agir e intervir nas classes de situações que lhe são apresentadas.

Vergnaud (1990) chama de esquema a organização invariante da conduta do sujeito (sua ação) para uma classe de situações. De acordo com o autor, é nos

esquemas que se investiga os conhecimentos-em-ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória. É importante destacar que a característica de ser invariante não se refere aos elementos formais que definem uma classe de situações, nem mesmo às ações, mas, essencialmente, ao que é invariante na organização das ações.

Para Vergnaud (1998):

O conceito de esquema é particularmente bem adaptado para designar e analisar classes de situação para às quais o sujeito dispõe em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento e sob determinadas circunstâncias, as competências necessárias para o tratamento relativamente imediato da situação. Porém, ele é igualmente válido para a descoberta e invenção em situação de resolução de problemas. Muitos são evocados sucessivamente e mesmo simultaneamente, em uma situação para o sujeito. (VERGNAUD, 1998 p. 176, tradução nossa)

Um esquema gera ações e deve conter regras, porém não é um estereótipo, e sim uma função temporalizada de argumentos que permite gerar diferentes sequências e tomadas de informação em função dos valores das variáveis da situação. De acordo com Vergnaud (1990), isso é possível, pois um esquema comporta:

- invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação), que pilotam o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação e a apreensão da informação sobre a situação apresentada;
 - antecipações do objetivo a se alcançar, dos efeitos a considerar e das etapas intermediárias eventuais;
 - regras de ação do tipo “se ... então”, que permitem gerar a sequência de ações do sujeito;
 - inferências que permitem calcular as regras e as antecipações, a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que o sujeito dispõe.
- (VERGNAUD, 1990 p. 159, tradução nossa)

Os invariantes operatórios, como os próprios nomes indicam, possuem a propriedade de invariância e são os responsáveis pela operacionalidade dos esquemas, determinam as diferenças entre um esquema e outro e realizam a essencial articulação entre teoria e prática, uma vez que a percepção, a busca e a seleção de informação baseiam-se inteiramente no sistema de conceitos em ação disponíveis para o sujeito (objetos, atributos, relações, condições, circunstâncias etc.) e nos teoremas em ação subjacentes à sua conduta.

O autor também os chama de conhecimento em ação que é o conhecimento que orienta a ação. O conhecimento em ação permite ao sujeito identificar os diferentes objetos de uma situação e as relações entre eles, pois esses objetos são

específicos para cada assunto. Vergnaud (1990) distingue duas categorias de invariantes operacionais: teoremas em ação e conceitos em ação

De acordo com o autor,

teoremas em ação (invariantes do tipo “fazer propostas”), que são as proposições elaboradas pelo sujeito e consideradas como verdadeiras sobre o real, e os conceitos em ação (invariantes do tipo “função proposicional” e “do tipo “argumento”), que são uma categoria do pensamento considerada pelo mesmo sujeito. (VERGNAUD, 1990, p.138, tradução nossa)

Os teoremas em ação podem se basear, por exemplo, em um conhecimento institucional, cuja veracidade é compartilhada por uma comunidade, ou em uma crença baseada na experiência do sujeito, que sempre foi verificada. Os conceitos em ação permitem ao sujeito determinar quais elementos considerar para realizar sua tarefa em determinada situação.

Segundo Vergnaud (1990), os invariantes operatórios também são componentes estáveis no processo de conceituação. A atividade do sujeito em aulas com diferentes situações apresentadas, pode ser guiada por invariantes operatórios parcialmente comuns e diante dessas novas situações o sujeito recorrerá a seu repertório de invariantes operatórios para identificar os objetos da situação e suas relações. Os invariantes operatórios quando testados por novas situações, provavelmente mudarão para se adaptar. De fato, os invariantes operatórios também possuem um aspecto dinâmico.

As regras de ação constituem-se em uma série de atividades que têm como objetivo transformar a realidade em que um sujeito está inserido. Essas regras, o controle e a aquisição de informações constituem o modo de funcionamento do esquema. Algumas regras podem ser observadas, principalmente, as que envolvem gestos e fala. Portanto, a observação dos professores universitários em atividade, sujeitos da pesquisa, é essencial para que possamos identificar padrões.

As regras de ação de um mesmo esquema podem variar de uma situação para outra dentro de uma mesma classe de situações, dependendo da informação obtida pelo sujeito e da análise que ele faz para cada uma das situações apresentadas. A coleta de informações permite ao sujeito determinar quais são importantes para continuar na atividade e atingir o objetivo.

A teoria de Vergnaud (1990) foi essencial para a Didática Profissional, de Pastré, Mayen e Vergnaud (2019) que trata, de forma mais abrangente, do conceito de esquema em situações distintas da atividade humana. O desenvolvimento

cognitivo ocorre, principalmente, no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas que afeta esferas muito distintas da atividade humana que, quando envolve conteúdos da competência profissional, são observadas competências técnicas, científicas, sociais e afetivas.

Para eles:

O conceito de esquema é pertinente para os gestos, os raciocínios e operações técnicas e científicas, as interações sociais e notadamente as atividades da linguagem, as emoções e a afetividade. Todos os registros são de fato envolvidos, inclusive, às vezes, na mesma situação de trabalho. (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2019, p. 22)

Com relação à atividade profissional dos professores, Goigoux e Vergnaud (2005) defendem que é essencial recorrer a uma teorização de sua atividade cognitiva, pois, os professores apresentam comportamentos subjacentes observáveis cuja reiteração diária desses comportamentos pressupõem que sejam organizados. Os autores propõem então a seguinte definição de esquema que abrange a atividade profissional do professor: *“uma forma organizada e estabilizada da atividade docente para uma certa variedade de situações pertencentes a uma mesma turma[...]”* (GOIGOUX; VERGNAUD, 2005, p. 7, tradução nossa)

Para uma descrição mais precisa da atividade profissional do professor em situação de trabalho, os autores fornecem uma segunda definição de esquema, dividida em quatro elementos:

1. O objetivo e os possíveis subobjetivos que resultam de um determinado planejamento da atividade;
2. Regras de ação (a segmentação da tarefa em subtarefas, a representação gráfica, a condução do diálogo com o aluno, os gestos etc.), regras para a obtenção de informações (o que se busca fazer ao aluno, como ele procede, qual é o problema para ele?) e controle (guiei seus procedimentos corretamente? Ele pode remobilizá-los sem ajuda? eles conseguiram identificá-los?). Eles se relacionam com ações que geralmente são palavras. Porque a palavra do professor também é um fazer, mesmo que essa palavra não esgote o seu saber.
3. Conceitos em ação e teoremas em ação que estruturam a organização da atividade;
4. As inferências que permitem fazer a ligação entre os invariantes operatórios e o cálculo em pensamento dos objetivos, das antecipações e das regras. (GOIGOUX; VERGNAUD, 2005 p. 8, tradução nossa)

Segundo os autores, a análise das ações docentes permite identificar condutas realizadas pelo professor que se repetem de modo regular no cotidiano de sua sala de aula e que fazem parte da organização do seu modo de ensinar. Tais condutas podem ser entendidas como seus esquemas profissionais que, portanto, são formas invariáveis e estabilizadas de atividade de ensino de um professor que se

destacam em uma variedade de situações pertencentes a uma mesma classe. O conceito de esquema é útil para explicar tanto as rotinas profissionais, quanto a inventividade dos professores diante de situações repetitivas, mas sempre únicas. Os esquemas dizem respeito a todos os registros da atividade do professor (gestos, juízos e raciocínios intelectuais, linguagem, interações com os outros, afetos) função principal é gerar essa atividade, em interação com a dos alunos, à medida que a sequência didática se desenvolve. O estudo dos padrões profissionais também permite compreender melhor as diferenças observáveis entre as formas de fazer dos professores, pois facilita a comparação dos fundamentos de sua atividade profissional.

Goigoux e Verganud (2005) também defendem que o conceito de esquema permite estudar o processo de desenvolvimento profissional dos professores. Segundo os autores, o conhecimento é um processo formidável de adaptação durante o qual, em primeiro lugar, os padrões se adaptam às situações. Portanto, é a dialética esquema/situação que permite identificar e analisar os momentos críticos do desenvolvimento profissional do professor e revelar as principais regularidades em seu comportamento profissional.

Na seção a seguir, apresentamos a teoria da Abordagem Documental do Didático proposta por Gueudet e Trouche (2008)

2.1.2 Abordagem Documental do Didático

A Abordagem Documental do Didático (ADD) é uma teoria da didática da matemática, que visa a compreender o desenvolvimento profissional dos professores por meio do estudo de suas interações com os recursos concebidos para fins de ensino (como, por exemplo, um livro didático) e aqueles que não têm finalidade de ensino (por exemplo, um artigo de periódico). O uso desses recursos, em sala de aula ou fora dela, incluem seleção, modificação e a criação de novos recursos, as quais resultam no que é denominado na ADD de trabalho documental do professor, e seus resultados documentação do professor. Atualmente há na internet uma profusão de recursos cujas utilizações podem causar mudanças na maneira que os professores escolhem os recursos e os utilizam. Assim, o estudo de recursos e possíveis interações que os professores podem ter com eles tornaram-se um importante campo de pesquisa (Trouche, Gueudet & Pepin 2019). Esses autores afirmam que a ADD se alimenta de:

vários quadros teóricos, alguns usuais em educação matemática (a teoria das situações – BROUSSEAU, 1998 - a Teoria Antropológica do Didático – CHEVALLARD, 2002 - ou teoria conceitual VERGNAUD, 1996), outros já bem estabelecidos em estudos sobre a inclusão de instrumentos em Didática (RABARDEL teoria ergonômica - 1995), outras abordagens, finalmente, mais diretamente relacionadas ao nosso propósito, no campo da engenharia documental (PEDAUQUE, 2006, 2007). (GUEUDET; TROUCHE, 2015 p. 6)

Assim, *“alimentar-se de quadros teóricos significa, para nós, absorver abordagens ou conceitos e colocá-los em um novo contexto e/ou procurar pontos comuns entre os quadros diferentes.”* (GUEUDET; TROUCHE, 2015 p. 6).

Gueudet (2019) aponta no Capítulo 1 do livro *“The ‘Ressources’ Approach to Mathematics Education”* que o desenvolvimento da Abordagem Documental do Didático ocorreu em um contexto de proliferação de recursos *on-line* para professores e alunos. Segundo a autora, a primeira versão dessa teoria foi apresentada em 2007, na 14ª *French Mathematics Didactic Summer School* (14ª Escola de Verão da Didática Matemática Francesa), por Ghislaine Gueudet e Luc Trouche. Nesse evento, organizado por temas específicos em que cada tema possui cursos e tutoriais associados, esses pesquisadores foram corresponsáveis pelo tema “Situações matemáticas e documentos do professor” em que decidiram ministrar um curso a

respeito do trabalho de professores nesse contexto de proliferação e evolução de recursos *on-line*.

Figura 2 – Uma professora trabalhando com muitos recursos



Fonte: Serge Cecconi (2007)

A Figura 2, constante da apresentação de Gueudet e Trouche (2009, p.109), mostra uma professora trabalhando com diversos recursos. Os autores buscaram destacar a quantidade de recursos disponíveis para a atividade profissional tanto dentro, quanto fora da sala de aula. De acordo com a autora, a decisão de apresentarem esse tema foi impulsionada por trabalhos anteriores que desenvolveram individualmente ou em parceria com outros pesquisadores e que diziam respeito, principalmente, às tecnologias educacionais.

Trouche foi um dos primeiros que contribuíram para a introdução da abordagem instrumental nas pesquisas em educação matemática. Dentre seus trabalhos destaca-se: a introdução da Orquestração Instrumental de 2004, que contribuiu para focar a atenção no uso de tecnologias por professores; pesquisas desenvolvidas a respeito do uso de calculadoras pelos alunos conforme Guin e Trouche (2005).

2.1.2.1 As fontes teóricas que inspiraram e alimentaram a ADD

A intenção aqui não é fazer uma apresentação exaustiva, e sim, uma apresentação dos elementos centrais. Conforme Gueudet (2017) a ADD:

Prolonga a abordagem instrumental. Referindo-se ao trabalho de Adler (2000), centra-se nos professores e considera os recursos, definidos como qualquer coisa que possa reavaliar a prática do professor. Adler considera recursos materiais, mas também recursos socioculturais e humanos. Artefatos podem ser recursos, se fonte de prática do professor; mas um recurso também pode ser uma expressão confusa no rosto de um aluno, que normalmente não é um artefato.

Os professores procuram recursos, embora às vezes eles encontrem recursos mesmo que não procurem (discussões com um colega na máquina de café, por exemplo). Eles associam esses recursos, modificam, concebem seus próprios recursos e os usam com os alunos. (GUEUDET, 2017, p. 201, tradução nossa)

Com relação aos recursos, a ADD vai ao encontro da proposta de Adler (2000) que, em seu trabalho sobre o desenvolvimento profissional de professores na África do Sul, examinou os recursos e seus usos na matemática escolar. Para a pesquisadora, a utilização de recursos é eficaz para o ensino e a aprendizagem de matemática no contexto em sala de aula. Nesse trabalho, ela defende que a formação de professores de matemática precisa dar mais atenção aos recursos, ao que eles são e como funcionam como extensão do professor em sua prática escolar. O argumento girou em torno dos conceitos de matemática escolar como uma prática híbrida e na transparência dos recursos em uso.

Adler (2000, p. 207) propõe “*pensar em um recurso [resource em inglês] em torno do verbo inglês re-source: nutrir da fonte novamente ou de maneira diferente*”. Segundo Trouche et al. (2020), na língua portuguesa, a palavra “recurso” pode dar o mesmo significado pretendido por Adler (2000), pois:

recurso é uma palavra composta pela justaposição do prefixo « re » e do substantivo « curso», o primeiro significa repetição e o segundo um caminho já utilizado, sendo esse o sentido do latim *recursus*. (TROUCHE et al, 2020, p. 3)

Os estudos de Adler (2000) e depois de Gueudet e Trouche (2008) mostram a importância das interações de professores com os seus recursos mobilizados para o ensino na atividade profissional que contribui ~~contribuindo~~ para a construção da ADD como um novo campo de pesquisa.

De acordo com Gueudet (2019), a segunda fonte da ADD veio do campo de pesquisa de gestão de documentos, que apontam que as consequências do uso de recursos digitais tiveram um grande impacto.

Pesquisadores dessa área introduziram uma distinção entre recurso e documento. A noção de recurso é usada como recurso para projetar documentos, enquanto o documento traz uma intenção que depende do contexto de seu uso. Essa distinção está ligada ao estudo dos recursos digitais, que conforme Gueudet (2019):

Pédauque (2006, 2007) destacou que com o digital significa que cada leitura não foi apenas associada à reinterpretação, mas possivelmente levou à reescrita, portanto, produzindo algo diferente dos recursos iniciais. Para Pédauque, um documento é “um contrato entre humanos” (Pédauque 2006

p.12). As intenções, nos documentos, podem ser interpretadas como objetivos possíveis e, portanto, como componentes de esquemas. (GUEUDET, 2019 p. 16)

Conforme Gueudet e Trouche (2015), a distinção entre os recursos disponíveis e o documento criado pelo professor com intenção didática, parece compatível com a distinção adotada no campo da engenharia documental:

O quadro conceitual e tecnológico que exploramos é o da engenharia documental que, substitui as propriedades computacionais da tecnologia digital na discussão, distingue recurso documental calculável, como meio, e documento calculado, como finalidade. (GUEUDET; TROUCHE, 2015, p. 7)

A ADD também se inspirou nos estudos de Ball, Hill e Bass (2005) sobre “conhecimento matemático para o ensino” em que mostram que o ensino não se reduz apenas ao trabalho em sala de aula, mas inclui as atividades de preparação, de elaboração de um planejamento, de avaliação ou de intercâmbio com diferentes atores da instituição (colegas ou pais de alunos).

Após apresentarmos as fontes teóricas que inspiraram e alimentaram a ADD, buscamos na próxima seção apresentar os conceitos fundamentais dessa teoria.

2.1.2.2 Desenvolvimento profissional dos professores por meio de suas interações com os recursos

As interações entre os professores e os seus recursos disponíveis para o ensino é o núcleo fundamental da ADD. Trouche, Gueudet e Pepin (2018) buscaram contribuir para que os pontos de vista de artefato; de instrumento e de gênese instrumental (constructos da Abordagem Instrumental de Rabardel, 1995) substituíssem pelos de recurso, documento e gênese documental.

Os autores, na perspectiva de Adler (2000), consideram um amplo espectro de recursos que são selecionados, criados, modificados, desenvolvidos e usados, dentro e fora da sala de aula pelo professor: livros didáticos, recursos *online*, trocas de *e-mails* com colegas, produções de alunos etc., ou seja, é tudo o que realimenta o trabalho do professor, que dizem algo a esse professor, inclusive os recursos evocados por Remillard (2005) em seu estudo sobre recursos curriculares, e que apoiam a atividade profissional do professor. Para Trouche (2020 et al. p. 2), “*essa visão ampliada dos recursos leva a uma visão ampliada do desenvolvimento profissional dos professores*”.

A ADD conceitua e diferencia recurso e documento para evidenciar e construção de documentos como elemento essencial do desenvolvimento profissional do professor. A perspectiva documental distingue os recursos disponíveis para a atividade profissional dos professores e o que eles desenvolvem para apoiar essa atividade, ou seja, seus documentos. Assim, o termo *documento* designa o que o professor desenvolve para um objetivo específico, durante seu trabalho com recursos. Trouche et al propuseram o termo documento

usado no campo da arquitetura da informação (Salaün 2012) para designar um suporte que possui uma intenção, bem como dedicado a um determinado uso em um contexto preciso. É dessa escolha que surge naturalmente a denominação “abordagem documental do didático”. (TROUCHE et al., 2020 p. 3)

Segundo Trouche (2021), a ADD é baseada em três essenciais dialéticas¹. A primeira considera as relações entre os professores e os recursos para o ensino que pode ser descrita em termos de instrumentação e instrumentalização. Essas duas componentes serão abordadas mais adiante ao apresentarmos a terceira dialética que trata da Gênese Documental.

A segunda dialética desenvolve-se entre todos os recursos disponíveis que o professor “toma emprestado” para desenvolver seu ensino (recurso mãe) e os recursos resultantes de sua adaptação (recurso filho) que são acumulados, organizados, estruturados e constituem o Sistema de Recursos do professor.

A ADD conceitua o Sistema de Recursos como o conjunto formado por todos os recursos utilizados/desenhados por um professor e estruturado em relação aos seus diferentes usos e aos diferentes contextos de sua atividade profissional. Esse sistema é constantemente revisado, reutilizado, enriquecido, reestruturado etc.

De acordo com Gueudet e Trouche (2009) os recursos ou sistemas de recursos de um professor não são caracterizados apenas por recursos materiais como o computador ou o livro didático. Eles também compreendem uma componente matemática e outra didática atribuídas ou construídas pelo professor para situações de aula específicas. Por meio da componente matemática, torna-se possível observar as noções envolvidas, as técnicas e as tarefas propostas ou os roteiros das atividades. A componente didática mostra os elementos organizacionais do desenvolvimento das

¹ Dialética é uma relação que se desenvolve de forma descontínua, por oposição ou confronto e que permite chegar a um termo superior (organização, pensamento etc.) (TROUCHE, 2021, 1º Seminário sobre a Abordagem Documental do Didático)

propostas de ensino ou a sequência das ações planejadas para o desenvolvimento da aula.

Segundo Gueudet e Trouche (2009) os recursos mobilizados pelos professores para o ensino são, com o tempo, renovados e adquirem outros significados e novas formas de utilização. Novos recursos são integrados ao seu repertório e as experiências vivenciadas em sua atividade profissional modificam e influenciam a seleção e a criação de tarefas, ou mesmo o planejamento de suas aulas pode ser modificado pela interação com outros professores.

As ações dos professores, nesse movimento constante de resignificação e de revisita de um recurso ou conjunto de recursos em que se inserem as componentes matemática e didática, representam o “coração” da atividade e do desenvolvimento profissional do professor de matemática

Ao conjunto das ações em que os professores transformam, no decorrer do tempo e de maneira significativa, seus recursos para o ensino e que resultará em um documento é denominado, pelos autores, trabalho documental do professor que engloba todas as atividades profissionais em que ele interage com seus recursos e está relacionado à terceira dialética. Essa dialética diz respeito à relação entre a atividade produtiva do professor, quando produz recursos para o ensino e à atividade construtiva, quando o professor desenvolve novos conhecimentos. Na ADD é o documento que permite descrever essa dialética.

Segundo os autores, o trabalho documental do professor está no cerne de sua gênese documental e acreditam:

[...] que o professor, em seu trabalho documental, dispõe de um conjunto de recursos de diversas naturezas, que darão origem, para uma determinada classe de situações, durante um processo de gênese documental, a um documento. (GUEUDET e TROUCHE, 2015 p. 7)

A Gênese Documental é um processo complexo que engloba as três dialéticas e está no centro do desenvolvimento profissional do professor. Nesse processo, o professor se apropria de recursos disponíveis e desenvolve, em conjunto, um novo recurso composto de um conjunto de recursos selecionados, modificados, recombinaos e um esquema de utilização deste recurso.

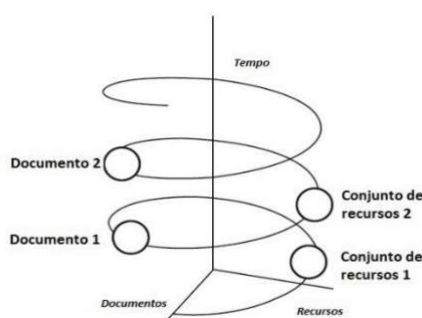
O processo da Gênese Documental é responsável pela transformação de um recurso em documento e, assim como na Abordagem Instrumental (AI), esse processo também possui duas componentes inter-relacionadas denominadas de instrumentação e instrumentalização.

- A Instrumentação é a componente que aborda a influência dos recursos mobilizados, suas possibilidades, limitações, condições e restrições na atividade prática do professor;

- A Instrumentalização aborda a apropriação e re(criação) dos recursos pelo professor, modificando-os para o seu uso.

Na dialética recurso/documento, o professor se apropria de um recurso ou conjunto de recursos nos processos de instrumentação e instrumentalização para uma determinada classe de situações que, na ação do tempo, leva à criação de um documento. Os processos de instrumentação e instrumentalização são processos sobrepostos relacionados à primeira dialética em que um professor é instrumentado por recursos e instrumentaliza esses recursos.

Figura 3 – Processo da relação dialética entre recursos e documento



Fonte: Adaptado e traduzido de Gueudet e Trouche (2009, p.8)

O processo da relação dialética entre recursos e documento no decorrer do tempo está representada na Figura 3 em que podemos observar uma espiral em torno de um eixo vertical que representa o tempo ao redor do qual, a criação do Documento 1 vai se constituindo da utilização de um conjunto de recursos 1, o Documento 2 constituído por um novo conjunto de recursos 2 acrescido ao Documento 1, e assim sucessivamente. Ou seja, com a passagem do tempo a interação do professor com seu conjunto de recursos 1 resultará na criação do Documento 1. Por sua vez, a partir do momento em que esse Documento 1 vai se constituindo de novos recursos por meio das interações desse professor com o seu conjunto de recursos 2, um novo documento será criado, o Documento 2, e assim por diante. Um documento já criado alimentará a constituição de um novo documento, à medida que novos recursos vão sendo apropriados pelo professor.

Nesse contexto, o professor, ao se apropriar de um novo recurso disponível para uma nova atividade de ensino por meio dos processos de instrumentação e instrumentalização, ou seja, a primeira dialética no quadro da ADD, associa esse novo recurso mãe aos já existentes, acomodando-o em seu conjunto de recursos. Esse conjunto de recursos é formado pelos recursos filhos adaptados às novas situações que se acumulam no repertório do professor e é estruturado de acordo com o nível de escolaridade, a antiguidade dos recursos, o tipo de atividade, a estruturação explícita ou implícita etc.

Os recursos filhos acumulados no repertório do professor formam seu Sistema de Recursos. Esse sistema vai sendo constituído, no decorrer do tempo, pelos recursos mães que foram projetados para uma nova tarefa e pelos recursos filhos para as tarefas anteriores.

No quadro teórico da ADD, ao interagir com seu sistema de recursos, o professor exerce uma atividade produtiva, quando produz recursos para o ensino e exerce uma atividade construtiva quando desenvolve novos conhecimentos. Ressaltamos que a relação entre a atividade produtiva e a atividade construtiva se refere à terceira dialética, sendo que é a definição de documento que permite descrever essa dialética.

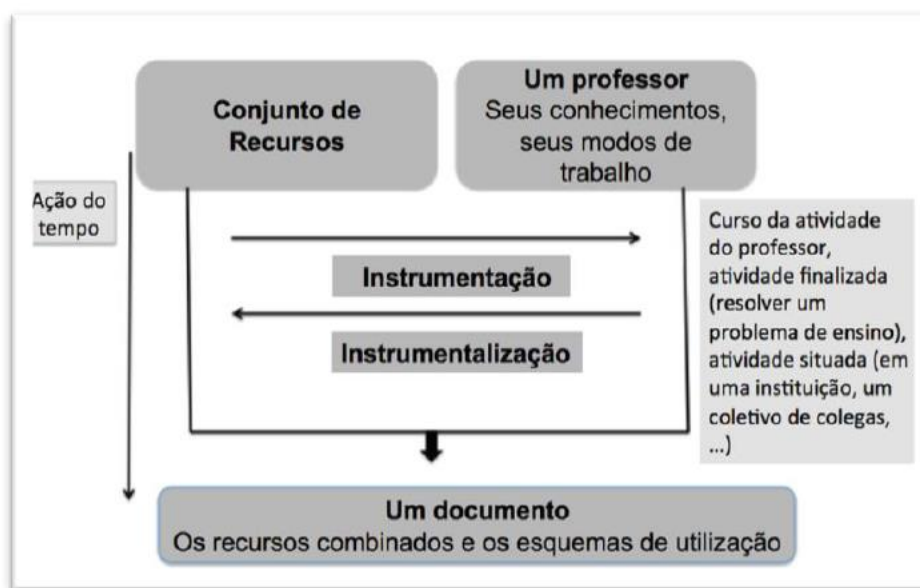
Portanto, um documento permite estudar o resultado do trabalho do professor por meio de suas interações com recursos para alcançar uma determinada meta de ensino, documentando suas atividades produtivas e construtivas.

Gueudet e Trouche (2015) definem um documento como uma entidade híbrida constituída pelos recursos disponíveis e mobilizados por um professor em sua atividade profissional e pelos esquemas de utilização desses recursos em diferentes classes de situações, tais como, planejamentos de aulas, preparação de avaliações sobre conteúdos específicos, a escolha de *softwares* educacionais ou de outros tipos, *sites de Internet*, vídeos etc.

De acordo com Gueudet e Trouche (2015, p. 13), *“um documento é desenvolvido a partir de um conjunto de recursos, por meio de uma variedade de contextos de usos para a mesma classe de situações”* e indica o desenvolvimento profissional do professor. Portanto, um documento não fornece apenas um suporte para a atividade profissional do professor, ~~ele~~ é também um indicativo do seu desenvolvimento profissional.

A Gênese Documental é um processo complexo que engloba as três dialéticas e está esquematizado na Figura 4 em que podemos perceber as componentes da primeira dialética: a instrumentação que ocorre no sentido do recurso para o professor (sentido recurso → professor) e a instrumentalização no sentido contrário, ou seja, do professor para o recurso (sentido professor → recurso).

Figura 4 - Esquema da Gênese Documental



Fonte: Gueudet e Trouche (2015, p. 8)

A Figura 4 mostra ainda que o processo de constituição de um documento, a terceira dialética, ocorre quando o professor combina seu conjunto de recursos com seus esquemas de utilização. Podemos observar também que a constituição de um documento, na ação do tempo, é composta dos conhecimentos do professor, quando interage com um conjunto de recursos (segunda dialética), seus modos de trabalho nos processos de ensino e de aprendizagem, o curso de sua atividade nos contextos individuais, quando resolve problemas de ensino, coletivos e institucionais em seu ambiente de trabalho, considerando sua experiência ao longo do tempo. Portanto, Gueudet e Trouche (2015) representam, de forma simplificada, o processo de produção de um documento—como uma entidade híbrida composta parcialmente de uma componente material (os recursos) e parcialmente de uma componente cognitiva (o esquema de utilização).

Segundo Bellemain e Trouche (2016, p. 11), o termo “utilização” nos “esquemas de utilização” tem um sentido amplo, pois: *“trata-se de toda a ação didática*

do professor, desde a seleção dos recursos até sua adaptação, sua estruturação, sua implementação em sala de aula, sua revisão a posteriori etc.”

Os esquemas de utilização representam as organizações invariantes ou estáveis apresentadas na prática do professor dentro de para uma classe de situações que são identificados quando são percebidas regularidades na ação do professor ao interagirem com os recursos disponíveis em diferentes classes de situações. Porém, de acordo com os autores, outros aspectos não observáveis também fazem parte dos esquemas de utilização de um recurso, os invariantes operatórios que são a base dos esquemas e orientam a utilização dos recursos. Entretanto, por não serem observáveis nos esquemas de utilização do professor, esses invariantes são inferidos por meio dos conhecimentos, das concepções, das crenças do professor com relação aos processos de ensino e de aprendizagem presentes em sua prática docente, ou seja, por meio do processo de desenvolvimento dos seus documentos que ocorre na sua ação dentro e fora da sala de aula.

De acordo com Gueudet e Trouche (2015) são os esquemas que orientam o trabalho sobre os recursos mobilizados para um objetivo específico de ensino e sua determinação:

é uma tarefa complexa para o pesquisador, mas permite esclarecer significativamente as práticas, como mostra, por exemplo, Goigoux (2007) em seu estudo sobre os professores que ensinam a leitura nas escolas. A identificação dos invariantes operatórios que estruturam a atividade parece uma chave essencial para a compreensão do trabalho docente, em particular, para um estudo do trabalho documental. (GUEUDET e TROUCHE, 2015 p. 8)

Portanto, para Gueudet e Trouche (2009) um documento é composto pelos recursos com usos observáveis e regulares na atividade profissional do professor, para os quais estão também associados os invariantes operatórios.

A pesquisa, que apresentamos neste relatório, se alinha a esses quadros teóricos, pois interessa-nos estudar os documentos criados pelos professores universitários no ensino remoto de limites em cursos de exatas.

Na próxima seção, apresentamos a revisão de literatura da pesquisa em que são mostrados alguns estudos selecionados para embasar a pesquisa e justificar seu desenvolvimento, além de fornecerem subsídios e elementos que contribuirão para a análises dos dados que foram coletados.

2.2 Revisão da literatura

A presente sessão tem por objetivo apresentar a revisão de literatura considerando-se orientações de Creswell (2014) para uma pesquisa qualitativa, que, uma revisão da literatura cumpre funções de compartilhar resultados de estudos relacionados àquele que está sendo realizado e de proporcionar uma estrutura que visa a estabelecer a importância do estudo conduzido.

Nessas perspectivas buscamos, estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de limite de função ou que se apoiem na teoria da Abordagem Documental do Didático, em bancos de dados digitais de instituições e em periódicos nacionais no caso do limite e no caso da ADD incluímos os anais da conferência Re(s)ources – Understanding Teachers' Work Through Their Interactions With Resources For Teaching e dois livros relativos a ela. O período dos produtos foi estipulado de janeiro de 2015 a dezembro de 2022.

Os bancos de dados em que os dados foram coletados foram: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (<https://bdtd.ibict.br/vufind/>); Portal CAPES de Dissertações e Tese, em específico da área Ensino (<https://catalogodeteses.capes.gov.br/>); Google Acadêmico (<https://scholar.google.com>), Springer Link (<https://link.springer.com>) e Academia.edu(<https://www.academia.edu>)

Como mecanismos de busca usamos as palavras-chave: “limite de uma função”, “abordagem documental do didático” ou “recurso”. As aspas, garantem, que o mecanismo de busca inclua em seus resultados as páginas com as referidas frases ou palavras procuradas na ordem indicada, ou seja, os resultados não são apresentados de forma isolada para cada uma das palavras pesquisadas. Esse mecanismo deve ser utilizado, como é o nosso caso, quando se busca por palavras-chave precisas. Com relação à conjunção “ou”, ela foi utilizada, pois por meio dela, o mecanismo de busca mostrará as páginas em que pelo menos uma das palavras-chave digitadas está indexada.

Passamos na sequência a indicar a quantidade de produtos colhidos em cada um dos bancos relativos à ADD e ensino de funções, e entre esses quantos e porque foram descartados.

Na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações foram encontrados 1 trabalho sobre a ADD e 12 sobre limite, mas apenas 1 foi selecionado. Os descartados

ou se referiam ao ensino fundamental ou não eram brasileiros ou ainda eram de outras áreas (língua portuguesa e processos industriais).

No Catálogo de dissertações e teses da CAPES foram encontrados 8 trabalhos sobre limite. Apenas 1 foi selecionado, pois um deles já havia sido capturado no banco Biblioteca Digital e 6 eram anteriores à implantação da Plataforma Sucupira² e, portanto, não estão disponibilizadas de modo *on line*.

No Google Acadêmico foram encontrados período 79 estudos sobre ADD e 13 sobre limite, mas foram selecionados apenas 15 sobre a ADD e 8 sobre limite. Os descartados eram ou relativos ao ensino fundamental, ou estavam descritos na sessão XX de aportes teóricos (Trouche et. al (2020), Gueudet, Trouche e Pepin (2018) Gueudet e Trouche (2016) e Gueudet e Trouche (2008)), não eram brasileiros; utilizava o conceito de limite em outra perspectiva (organização de uma linha do tempo).

No livro *Re(s)ources – Understanding Teachers’ Work Through Their Interactions With Resources For Teaching* foram selecionamos 3 artigos sobre a ADD.

Os Quadros 1 e 2 trazem, respectivamente, os estudos selecionados sobre a ADD e sobre o ensino de limites. Na primeira coluna constam autor(es) e ano de publicação, na segunda o título, na terceira o banco de dados e, na última a discriminação: A, para artigo, D, para dissertação e T, para tese.

Quadro 1 - Trabalhos Selecionados Para a Revisão de Literatura sobre a ADD

Autores(as)	Título	Fonte	Tipo
Espíndola e Trgalová (2015)	Trabalho documental e Decisões Didáticas do professor de matemática: um estudo de caso	Revista Em Teia (Google Acadêmico)	A
Bellemain e Trouche (2016)	Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático.	Academia.edu (Google Acadêmico)	A
Gueudet (2017)	<i>University Teachers’ Resources Systems and Documents</i>	Academia.edu (Google Acadêmico)	A
Assis (2018)	Os Recursos do Professor de Matemática e a Perspectiva Documental do Trabalho Docente	Revista Educação Matemática em Foco (Google Acadêmico)	A
Alves e Assis (2018)	A gênese documental na formação de professores de Matemática: interações entre o livro didático e a geometria dinâmica	Ensino da Matemática Em Debate (Google Acadêmico)	A

²A Plataforma Sucupira é um sistema de coleta de informações, análises e avaliações a serem utilizadas como base padronizadora do Sistema Nacional de Pós-Graduação brasileira. O nome da Plataforma Sucupira é uma homenagem ao professor Newton Sucupira, autor do Parecer nº 977 de 1965. O documento conceituou, formatou e institucionalizou a pós-graduação brasileira nos moldes dos dias de hoje. (Fonte: <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/35995>)

Rocha e Trouche (2018)	A Trajetória Documental: uma análise da história da integração de recursos na prática do professor de matemática	Ensino da Matemática Em Debate (Google Acadêmico)	A
Lima e Trgalová (2018)	Trabalho coletivo de professores de Matemática: um olhar na perspectiva da gênese documental	Ensino da Matemática Em Debate (Google Acadêmico)	A
Machado Júnior, Espíndola, Trgalová e Luberiaga (2018)	Abordagem Documental do Didático e o Ensino de Equação do 1º grau na Educação de Jovens e Adultos Ensino Médio	Revista Paranaense de Educação Matemática (Google Acadêmico)	A
González-Martín, Nardi e Biza (2018)	<i>From resource to document: scaffolding content and organising student learning in teachers' documentation work on the teaching of series</i>	Springer Link (Google Acadêmico)	A
Désiré (2018)	<i>The importance of documentary and digital resources in the definition of quality of higher education</i>	<i>Proceedings of the Re(s)ources 2018 International Conference</i>	A
Bifano (2018)	<i>Institutional resources at university admission: emerging documental identity for the analysis of the professor's work</i>	<i>Proceedings of the Re(s)ources 2018 International Conference</i>	A
Martínez, Cruz e Soberanes (2018)	<i>The mathematical teacher: a case study of instrumental genesis in the UAEM</i>	<i>Proceedings of the Re(s)ources 2018 International Conference</i>	A
Ignácio (2018)	Criação de capítulo de livro didático digital no Estágio Curricular Supervisionado: uma análise da documentação na formação inicial do professor de Matemática	Universidade Anhanguera de São Paulo (Google Acadêmico)	T
Xavier Neto, Silva e Trouche (2019)	A Construção de Atividades Para o Ensino de Sequências Numéricas: Uma Análise Pela Lente da Abordagem Documental do Didático	Educação Matemática Pesquisa (Google Acadêmico)	A
Abar (2019)	Articulações Teóricas sobre a Abordagem Documental do Didático	Educação Matemática Pesquisa (Google Acadêmico)	A
Assis, Gitirana e Trouche (2019)	A Metamorfose do Sistema de Recursos de Licenciandos em Matemática na Formação Inicial	Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (Google Acadêmico)	A
Almeida e Nascimento (2020)	Avaliação em Matemática Aliada ao Processo de Ensino e Aprendizagem: do trabalho documental às representações sociais	Ensino da Matemática em Debate (Google Acadêmico)	A
Messaoui (2020)	<i>Développement de l'expertise documentaire des professeurs dans des situations de mutations de leur enseignement: le cas de professeurs de mathématiques et d'anglais.</i>	Academia.edu (Google Acadêmico)	T

Fonte: Os autores

Quadro 2 - Trabalhos Seleccionados para a Revisão de Literatura sobre Limites

Autores(as)	Título	Fonte	Tipo
Soares (2018)	O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: um estudo à luz dos três mundos da matemática	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações	D
Messias (2018)	Teorias cognitivas do pensamento matemático avançado e o processo de construção do conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade	Banco de Teses e Dissertações da CAPES	T
Moura e Laudares (2018)	Estudo do limite de uma função: análise com um objeto de aprendizagem para cursos de engenharia e matemática	Revista de Ensino de Engenharia (Google Acadêmico)	A
Almouloud e Sardeiro (2019)	O estudo do limite de uma função: O que disseram os alunos?	Revista Linhas Críticas (Google Acadêmico)	A
Fonseca (2019)	Aprendizagem com compreensão dos conceitos de limite e continuidade: uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra na formação inicial de professores de matemática, no Brasil.	Revista ProQuest (Google Acadêmico)	A
Batista (2019)	Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos	Universidade Federal de Pernambuco (Google Acadêmico)	D
Thiele, Miotto e Kamphors (2020)	Atividades de investigação em Cálculo Diferencial e Integral: uma proposta para o ensino do conceito de limite de uma função com o software GeoGebra – Revista eletrônica de matemática	Revista Eletrônica da Matemática (Google Acadêmico)	A
Araújo (2020)	A construção do conceito de limite através da resolução de problemas	Universidade Estadual da Paraíba (Google Acadêmico)	D
Messias (2021)	Uma decomposição genética para o objeto matemático limite de uma função	Revista de Educação em Ciências e Matemática (Google Acadêmico)	A
Ferreira (2021)	Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas	PUC - SP (Google Acadêmico)	T

Fonte: Os autores

2.2.1 Interlocução com trabalhos seleccionados

Nesta seção buscamos explicitar dados da interlocução desta pesquisa com os trabalhos seleccionados, com vistas a compartilhar resultados, evidenciar a pertinência e importância dela na educação matemática e tomar contato com o estado do conhecimento da ADD e limite de função, nos níveis de ensino de interesse. Informamos que não encontramos nenhum estudo, no período estudado, que tratasse

dos dois temas. Trazemos esses elementos seguindo a ordem cronológica dos trabalhos, conforme aparecem nos quadros.

Iniciamos com os trabalhos do Q1, 18 trabalhos que utilizaram a teoria da ADD ou trataram dela em algum contexto. Identificamos cada trabalho, por seu(s) o(s) autor(es) e por seu título, esse em itálico e entre aspas.

Espíndola e Trgalová (2015): “*Trabalho documental e Decisões Didáticas do professor de matemática: um estudo de caso*” traz análises de decisões didáticas, um dos interesses desta pesquisa. Nele é apontando, por exemplo que essas decisões têm um certo número de fatores subjacentes, como por exemplo, a concepção de aprendizagem do professor. Exemplifica com a relação concepção que toma por base: definição, exemplo e exercícios. As implicações dessa relação estão, notadamente, na escolha das atividades e a ordem em que foram propostas aos alunos. Com relação ao fator da didática, as autoras destacam que professor considerou que devido ao conhecimento de matemática dos alunos ele ia buscar atividades consideradas simples, em um primeiro momento, para fazê-los adquirir os conhecimentos básicos, necessários para a resolução de exercícios e problemas mais complexos. Outro ponto interessante à nossa pesquisa foram os meios apontados pelas autoras para uma melhor compreensão da relação entre os esquemas de uso dos recursos. Destacam elas que essa relação é constitutiva da documentação do professor e revela os fatores que influenciam as decisões didáticas da elaboração à implementação de atividades de ensino.

Bellemain e Trouche (2016): “*Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático*” refletem sobre a instrumentação do trabalho do professor, do formador e do pesquisador para o ensino de matemática, desenvolve pontos de vista didáticos na integração com pontos de pontos de vista informáticos, os quais devem ser observados, mesmo porque tratamos nesta tese do ensino remoto, no qual esses pontos de pontos de vista são relevantes. A demonstração de evidências da característica frutífera de uma dupla abordagem, didática e tecnológica, para desenvolver a análise do trabalho documental de professores é motivador.

A interação teórica favorece o desenvolvimento de instrumentos e de documentos *web*.

Gueudet (2017, p.199): *“University Teachers’ Resources Systems and Documents”* foi um dos trabalhos mais importante sobre a ADD como referência para nós, isso porque tratou do ensino superior. Nele é informado que *“As interações entre professores e recursos na universidade e suas consequências ainda não foram muito estudadas por meio de pesquisas.”* A pesquisadora chama a atenção de que:

[...] a atividade profissional dos professores ocorre em instituições (Chevallard 2006) que moldam sua práxis, incluindo o uso de recursos, em diferentes níveis de determinação didática (Winsløw 2015). O ambiente de trabalho dos professores (em termos de material disponível e espaço físico, bem como alunos e colegas, Ruthven 2009) também é um fator importante que influencia as transações dos professores com os recursos. As crenças profissionais dos professores também desempenham um papel central no uso (ou não) de recursos nesses níveis. (GUEUDET, 2017 p.199, tradução nossa)

Ela levanta como hipótese que os fatores que influenciam a documentação de um professor são semelhantes nos diferentes níveis de ensino. Com o objetivo de investigar essa hipótese, a pesquisadora estudou, durante o período letivo de 2013-2014, o trabalho documental de quatro professores e dois alunos de doutorado que lecionavam em uma mesma universidade da França, de médio porte com cerca de 270 alunos matriculados em um programa de 2 anos intitulado Matemática, Ciência da Computação, Engenharia, Eletrônica e Economia (MCEEE). Esses professores tinham experiência bastante variada, de 1 a 24 anos; eles ensinavam métodos numéricos, cálculo e álgebra linear para alunos de 1º e 2º anos. A autora concentrou-se em dois estudos de casos, um voltado ao algoritmo euclidiano e outro a números complexos.

As experiências descritas no artigo ressaltam a importância de se utilizar entrevistas e de observar diferentes tipos de recursos que os professores projetam e os que realmente usam. Outra importante referência foi a associar a ocorrência de diferentes recursos segundo o objetivo da aula, por exemplo, dependia da experiência do professor de ministrar aulas apenas expositivas ou não e, ou dependendo da atividade, fazer uso de computadores, ou seja, de recursos digitais.

Foi importante para nós a apresentação de outros recursos que contribuem para as evoluções nas práticas de ensino dos professores, como por exemplo a experiência internacional de se trabalhar no exterior e as discussões com alunos. Além disso a pesquisadora destaca crenças dos professores,

quanto à competência de alunos: *alunos novos são hábeis em usar diferentes representações dos números complexos*”; quanto aos conteúdos específicos que os alunos deveriam aprender na universidade: *“os alunos devem aprender a comparar a eficiência dos algoritmos”*; ou quanto às práticas matemáticas mais gerais: *“os alunos devem aprender a usar livros de*

matemática e quanto às estratégias de ensino: “a ideia é mostrar aos alunos que a matemática que eles aprenderam é útil”.

A autora sugere que pesquisas futuras devem dar suporte a um trabalho documental mais coletivo na universidade, a fim de permitir que os recursos projetados sejam melhorados coletivamente.

Assis (2018): “*Os recursos do professor de matemática e a perspectiva documental do trabalho docente*”. Este trabalho levanta questionamentos que devem ser incorporados em pesquisas apoiadas na ADD, como:

- os sistemas de recursos do professor (sua estrutura, evolução e mapeamento): Como são constituídos? Que lugar os recursos curriculares ou mesmo o livro didático ocupam nesse sistema? Quais são os fatores de sua evolução: experiência, ambiente cultural, mudanças curriculares, participação em cursos de formação? O que motiva professores a buscar determinados recursos?
- competências e habilidades para usar os recursos (instrumentação, planejamento, conhecimentos): Como se desenvolvem ao longo do tempo na prática? Como se relacionam com experiências prévias? Ou com os recursos em si? Ou com o conteúdo matemático?
- a integração de recursos digitais (mudanças, invariâncias e orquestração): como escolher recursos apropriados a partir de uma gama de opções disponíveis? Como adaptar esses recursos? Como conduzir o uso desses recursos pelos estudantes? Como preparar professores para essa integração?
- a pesquisa com recursos (metodologia): Como analisar a interação dos professores com os recursos “como um todo”? Como analisar a estrutura do sistema de recursos? Como essa interação toma forma de acordo com os conteúdos didáticos e os níveis de ensino? Como estudar a longo prazo a evolução das interações dos professores com os recursos? (ASSIS, 2018 p.30)

A conclusão de que a Abordagem Documental do Didático tem se revelado uma perspectiva teórica e metodológica atual, nas pesquisas em educação matemática, que discutem a formação do professor e seu desenvolvimento profissional, seja do ponto de vista coletivo ou individual, no contexto da formação *online* ou presencial, corrobora com a importância desta tese.

O estudo de Alves e Assis (2018), “*A gênese documental na formação de professores de Matemática: interações entre o livro didático e a geometria dinâmica*”, tem o objetivo discutir a integração de recursos, no caso o Geogebra e o livro didático em uma proposta de classificação de triângulos. A integração entre recursos é de interesse de todo estudo na ADD, como é o nosso caso

De acordo com as autoras, a formação inicial é um momento importante da trajetória profissional do professor de matemática, pois é nela que são desenvolvidos

conhecimentos formais necessários à profissão associados ao uso de recursos específicos. Nesta pesquisa os sujeitos são professores experientes, mas vale para nós referências sobre conhecimentos formais.

Outro aspecto deste trabalho de interesse é a indicação de que documentos curriculares nacionais incentivam a utilização de tecnologias computacionais para o ensino de matemática na educação básica, e que os professores apresentam dificuldades quanto à sua utilização.

São nossas hipóteses, de que no caso do ensino superior, ocorram esses tipos de dificuldades, e que o livro didático seja, como indicaram as autoras, o principal recurso dos professores de matemática e que a influência em suas decisões sobre o que ensinar, e desenvolvimento de propostas didáticas deve-se à integração com recursos digitais como é o caso do GeoGebra.

As conclusões apontam aspectos relevantes sobre a interação do professor ou do futuro professor de matemática com os recursos, revelando suas potencialidades e limitações, além da potencialidade da ADD em apoiar e orientar a busca de identificação ou de inferência de esquemas na utilização dos recursos mobilizados pelos sujeitos da pesquisa.

Rocha e Trouche (2018). *“A trajetória documental: uma análise da história da integração de recursos na prática do professor de matemática”*. Os autores mostram que as novas possibilidades advindas das tecnologias de comunicação e informação para o ensino causaram grande impacto nas discussões da educação matemática. Essa mudança tecnológica no cenário educacional acentuou a importância e as potencialidades dos recursos no trabalho do professor afetando enormemente os recursos disponíveis e a maneira de produção de recursos. Conforme os autores, nesse contexto, o professor cria, ao longo do tempo, uma história de produção de recursos denominada trajetória documental. Por meio de uma discussão em torno da questão: *“quais contribuições o trabalho coletivo pode causar para a trajetória documental do professor?”* e com base nos pressupostos teóricos da Abordagem Documental do Didático, os autores analisaram os dados referentes a uma professora de matemática, do ensino fundamental francês. Este trabalho é importante para nós na medida que apresenta o uso da metodologia reflexiva. O trabalho dessa professora foi acompanhado de diversas maneiras: na produção de planejamentos, por meio de um diário de bordo, entrevistas e reuniões coletivas na escola. Além disso o trabalho serve como referência para nossa pesquisa pois tratam da elaboração de mapas da

trajetória documental e os sistemas de recursos da professora, fornecendo uma visão parcial dos recursos utilizados.

Com relação ao mapeamento da trajetória documental da professora, os pesquisadores destacam o seu caráter temporal ligado ao fato de que ele representa uma parte do seu trabalho documental e está condicionado às questões e ao modo em que os autores propuseram sua representação. Nesse sentido, no decorrer da pesquisa, esse mapa foi se transformando e possibilitando novos resultados.

Lima e Trgalová (2018): O artigo “*Trabalho coletivo de professores de matemática: um olhar na perspectiva da gênese documental*” contribui com as reflexões trazidas sobre constructos teóricos e metodológicos.

As professoras mostram que a escolha de recursos deve levar em consideração a pertinência ao projeto de ensino, desde o planejamento até a concretização; que a coleta dos dados pode ser implementada por meio de um ambiente criado na *Internet* para esse fim, de modo que as professoras disponibilizassem recursos e informações utilizados na preparação coletiva das aulas.

As autoras revelam suas entrevistas semiestruturadas, revelando as motivações das professoras em realizar um trabalho coletivo; critérios de seleção de recursos; o questionamento do lugar que os livros didáticos ocupavam em seus sistemas de recursos; qual a organização e o funcionamento do trabalho coletivo e quais as vantagens e inconvenientes identificados durante o percurso desenvolvido.

A investigação das gêneses documentais das professoras e das noções de recurso mãe e recurso filho permitiu às autoras constatarem que as professoras utilizavam recursos de páginas eletrônicas do Instituto de Pesquisa em Ensino de Matemática – *IREM* (sigla em francês) por considerá-las interessantes e de boa qualidade. Segundo as autoras, ao agirem dessa forma, as professoras deixaram de utilizar os livros didáticos de maneira sistemática, recorrendo a eles somente para o caso em que escolhiam exercícios.

Machado Júnior et al. (2018): “*Abordagem documental do didático e o ensino de equação do 1º grau na educação de jovens e adultos – ensino médio*”, analisam o trabalho documental de um estudante-estagiário da licenciatura em matemática e de um professor-supervisor de estágio. Durante dois meses, os pesquisadores acompanharam o estágio do estudante, em três momentos: antes, durante e depois de sua aula sobre equação do 1º grau em uma turma do 2º módulo da EJA-Ensino Médio em uma escola pública estadual do Recife. A pesquisa utilizou o diário de bordo,

entrevistas semiestruturadas realizadas com o estagiário, com o professor-supervisor e com a professora orientadora do estágio, além da observação da aula ministrada pelo estagiário que foi gravada em vídeo.

González-Martín, Nardi e Biza (2018), *“From resource to document: scaffolding content and organising student learning in teachers’ documentation work on the teaching of series”* abordam o uso de recursos para o ensino de séries de números reais por três professores franceses de anos escolares equivalentes ao ensino médio brasileiro.

Os pesquisadores examinaram o uso de recursos de cinco professores do ensino superior de três instituições em Quebec (Canadá) que utilizavam o mesmo livro didático, como recurso principal e descreveram as interações pessoais desses professores com o livro didático, apoiando-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard, (2003) e, em termos de trabalho documental, por meio do quadro teórico da Abordagem Documental do Didático (ADD) de Gueudet e Trouche (2009).

Neste trabalho os autores utilizam entrevistas para identificar objetivos e subjetividades dos professores na exploração do conteúdo apresentado no livro didático, nos diversos tipos de representações e nos exemplos e exercícios. Eles, os autores, descrevem o trabalho de documentação dos professores pelos conjuntos de objetivos e pelas regras de ação: o conteúdo matemático como trampolim para aprender polinômios de Taylor e séries de Maclaurin, e a organização do aprendizado do estudante por meio de exercícios de simulação, visualização, exemplos e aplicativos. Quanto ao objetivo de apresentar o conteúdo do livro didático, os autores destacam duas regras de ação relacionadas às maneiras que os professores usam o livro didático e outras atividades em sala de aula: *“Seguir a estrutura do livro didático que abrange o conteúdo do curso”* e *“resolver principalmente os exercícios do livro”*. E apontam uma segunda regra de ação: *“A ordem do livro didático é boa”*, *“Série é sobre critérios de convergência”* e *“É importante praticar muitos exercícios.”*

Em relação à primeira regra de ação, os autores inferiram os seguintes invariantes operacionais: *“A ordem do livro didático é boa, ou seja, fundamental para a forma como o conteúdo é apresentado aos alunos”* e *“O conteúdo do curso tem uma estrutura já estabelecida / essa estrutura é lógica e ajuda no aprendizado.”* Os invariantes operatórios inferidos com relação à segunda regra de ação foram: *“A ordem do livro didático é boa”*, *“Série é sobre critérios de convergência”* e *“É importante resolver muitos exercícios”*.

Os resultados da pesquisa mostraram que, embora os objetivos dos professores em relação ao ensino desse conteúdo fossem semelhantes, os trabalhos documentais diferem entre si. Para os autores, esse fato ocorre, pois as decisões didáticas dos professores são guiadas por diferentes invariantes operacionais e, mesmo quando são as mesmas, a relação pessoal dos professores com os conteúdos ministrados interfere em suas escolhas didáticas.

Désiré (2018), em seu trabalho intitulado *“The importance of documentary and digital resources in the definition of quality of higher education”*, traz um estudo realizado em instituições de ensino superior na Costa do Marfim. Esse estudo inclui entrevistas, questionários e revisões das informações com alunos, acadêmicos e funcionários administrativos, com vistas a importância dos recursos documentais para a qualidade do ensino superior. O estudo despertou nosso interesse por tratar da utilização da ADD de modo diferente dos demais, porém ao fim e ao cabo a formação docente está relacionada à qualidade das instituições.

Os resultados mostraram que esses recursos contribuem em grande parte para o desenvolvimento e melhoria dos cursos. Mas a autora destaca que, apesar desses resultados, os recursos são cada vez mais insuficientes e escassos e que a inexistência de materiais digitais nas escolas superiores está impactando a qualidade dos cursos. Os acadêmicos relataram o fato de que não é fácil prepararem os cursos devido à falta de recursos e até mesmo realizarem alguns cursos, pois o ambiente de trabalho não propicia uso de tecnologia e material digital. No estudo ficou evidenciado que os sistemas de recursos dos professores evoluem muito lentamente, pois as bibliotecas estão vazias e não há recursos digitais suficientes.

Bifano (2018), *Institutional resources at university admission: emerging documentary identity for the analysis of the professor's work*, defendeu que a identidade profissional é uma construção em evolução em que vários elementos convergem. Nesse sentido, ele buscou mostrar, por meio da Abordagem Documental do Didático (ADD), como se relaciona o trabalho do professor em torno de recursos institucionais. Sua pesquisa foi um estudo de caso de um professor de matemática na admissão universitária, analisando essa relação com foco em seus traços identitários.

Este trabalho, assim como o anterior não trata de documentação de professor, como o nosso. Trazemos aqui porque que ampliam as perspectivas da ADD e estimulam temas a novas pesquisas. Sua questão central é, *“Qual é a relação entre a gênese do documento e a gênese da identidade?”*, o autor apresentou a noção de

identidade documental por meio de alguns aspectos das tendências teóricas que as integram e a noção de recurso que considerou uma ponte para unificá-los. As características mais salientes do desenho metodológico nesse estudo de caso foram: a escolha de professores e do trabalho na universidade, as ferramentas utilizadas para a coleta intencional de dados e os aspectos essenciais da negociação do acordo metodológico entre pesquisador e atores.

Sua análise focou a entrevista de “auto confrontação” e o uso dos recursos institucionais propostos na admissão à universidade, na Argentina. O autor apresentou algumas características do que ele chamou de identidade documental.

Martínez, Cruz e Soberanes (2018): “*The mathematical teacher: a case study of instrumental genesis in the UAEM*” apresentam um caso de gênese instrumental na Universidade Autônoma do Estado do México, em particular no Centro Universitário de Valle de Chalco, em que professores universitários que ensinam disciplinas na área de matemática têm acesso a recursos institucionais que fazem parte de um ambiente de programa formal, bem como incentivam a criação e utilização de materiais didáticos alternativos pelos docentes de modo a favorecer a passagem do professor aos processos da instrumentação para os processos de instrumentalização e a realização da orquestração. Apesar das boas intenções da instituição, os professores enfrentam diferentes dilemas: como selecionar materiais “bons” para sua aula de matemática? Como incorporar os recursos selecionados em sua prática docente? Para esse trabalho, os autores questionam: qual é o papel do professor, do estudante e da tecnologia?

Os autores criaram uma estrutura de análise que possibilitou aos professores fornecerem respostas que levavam em consideração as características locais de trabalho.

Os professores realizaram a maior parte de seus planejamentos e foram acompanhados fora da instituição por meio de plataformas interativas, com o objetivo de incorporarem a tecnologia para incentivar processos conceituais e meios de prática operacional nas aulas, ou seja, uma configuração didática alternativa à tradicional. Portanto, foram feitos ajustes às suas dinâmicas em sala de aula obedecendo uma variedade de conhecimentos e habilidades a fim de obterem respostas sobre os papéis desempenhados pelo professor, pela tecnologia e pelo estudante.

Os autores concluíram que a mudança de paradigma e o monitoramento metodológico permitiram que o professor participasse do processo e avançasse via a

modificação do recurso. Além disso, a coletivização da atividade com outros professores permitiu gerar uma apropriação criativa, demonstrando assim, o modo pelo qual uma gênese instrumental enfatiza uma gênese conceitual.

Ignácio (2018): *“Criação de Capítulo de Livro Didático Digital no Estágio Curricular Supervisionado: uma análise da documentação na formação inicial do professor de Matemática”*, se insere no tema da formação inicial do professor de matemática, e foca a etapa de prática do estágio curricular supervisionado de matemática. Para o autor, em tal momento da formação, espera-se que os conhecimentos teórico práticos desenvolvidos pelos licenciandos, em disciplinas das diversas áreas, sejam evocados como suportes ao planejamento e prática docente e, a partir dessa formação se desenvolvem continuamente suas trajetórias profissionais. Nesse contexto, o autor desenvolveu a pesquisa visando analisar o processo de gênese documental de um licenciando em matemática por meio da criação, experimentação e recriação de um capítulo de livro didático digital sobre o conteúdo de funções para o ensino fundamental. De acordo com o autor, os conceitos de formação reflexiva de Donald Schön e de esquemas foram importantes para definir os aspectos da formação dos professores.

Os princípios da metodologia reflexiva foram utilizados na investigação da documentação e do acompanhamento, realizados por meio de observações e entrevistas. Os dados foram analisados buscando-se traçar a evolução dos esquemas de uso dos recursos, no processo de evolução documental dos licenciandos.

Em suas análises, o autor conclui que o repertório de recursos e conhecimentos mobilizados pelos licenciandos para estruturar seu sistema documental durante o projeto de estágio, pode ser apresentado em duas fases de desenvolvimento: a primeira em que houve um resgate de concepções firmadas em etapas anteriores de seu aprendizado acadêmico, pelo qual o sujeito utilizou, como recursos, conceitos oriundos de literatura acadêmica para argumentar suas escolhas metodológicas e de ferramentas (conceituais e tecnológicas) a serem empregadas, enquanto que na segunda houve uma intensa busca de novos materiais para cumprir demandas surgidas em todas as etapas do estágio. O desenvolvimento do projeto de estágio serviu como fator de desequilíbrio de esquemas já constituídos no sistema documental do sujeito e as situações de planejamento de aulas, de desenvolvimento de materiais e de regência foram promotoras do desenvolvimento de novos esquemas em um processo característico de atuação profissional em curso de aprimoramento.

O autor afirma que havia um sistema documental anterior ao Estágio Curricular Supervisionado, portanto os novos documentos, criados em torno do livro didático digital, se agregaram ao sistema como componente de uma mesma.

Segundo o autor, o envolvimento do licenciando com a estruturação de recursos didáticos em um capítulo de livro didático digital serviu como elemento de desequilíbrio, pois provocou uma demanda por novas formas de lidar com os recursos para o ensino. A organização do sujeito, para lidar com os desafios enfrentados, permitiu o desenvolvimento de uma estrutura de documentação em torno do material de apoio (livro didático) em termos de currículo, de organização de trabalho coletivo e de ressignificação de recursos para integração a uma proposta específica.

Xavier Neto, Silva e Trouche (2019): “*A construção de atividades para o ensino de sequências numéricas: Uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático*”, traz um estudo inicial sobre formação continuada de professores da educação básica de escolas pública e privada do estado de São Paulo, com o objetivo de analisar a construção de parte de um documento para introduzir o ensino de sequências numéricas, de alunos do 1º ano do ensino médio. Essa análise consistiu na avaliação de esquemas de utilização de recursos e do trabalho coletivo de professores.

No desenvolvimento desse projeto, os autores apontaram que os professores buscam mobilizar recursos antigos já conhecidos e ao interagirem com novos recursos, o fazem baseando-se do modo como interagem com os antigos. Nesse projeto, os pesquisadores também inferiram o seguinte invariante operatório apresentado pelos professores: “padrão de regularidade poderia possibilitar a introdução do tema”.

Segundo os autores, o conjunto de recursos mobilizados pelos sujeitos ao elaborar as quatro atividades para ensinar sequência numérica, durante o processo de gênese documental, desencadeou a construção de um documento formado pelo conjunto dessas quatro atividades contribuindo para o desenvolvimento profissional desses professores.

Abar (2019): “*Articulações Teóricas Sobre a Abordagem Documental Do Didático*”, entre a ADD e *Technological Pedagogical Content Knowledge* TPACK (Mishra e Koehler, 2006) que envolve constructos pedagógico, conteúdo e tecnológico que podem permitir a identificação de obstáculos, na construção de documentos pelo professor; entre a ideia de inovação de (Rogers, 2003), teoria considerada pela autora

como adequada para compreender a situação por que passam os professores ao se depararem com uma “nova” situação de trabalho, em que a experiência acumulada é muito importante, porém insuficiente para atender às novas demandas pedagógicas e tecnológicas específicas para a escolha e desenvolvimento de recursos para a sua prática, formar uma opinião ou uma atitude a seu respeito, até chegar à decisão de adotá-la ou rejeitá-la para, enfim, no caso de adoção, trabalhar com a implementação e confirmar esta decisão.

Para a autora, a escolha e a transformação dos recursos em documentos, a documentação do professor, podem ser influenciadas pelos conhecimentos prévios dos professores do ponto de vista matemático, tecnológico, pedagógico e didático. Nesse sentido, a autora argumenta sobre a importância de se compreender os componentes que estão presentes no processo de transição pelo qual passam os professores no contexto da Gênese Documental e que elementos podem influenciar seu trabalho documental. De acordo com a autora, os conhecimentos prévios dos professores podem facilitar a relação com uma inovação, ou seja, a aceitação da transformação e do desenvolvimento de documentos, com suas especificidades, para a sua prática docente. Crenças e expectativas são elementos que também podem surgir na abordagem da inovação, pois, segundo a autora, no tempo próprio de cada um, há uma relação particular com a inovação e, o trabalho em equipe, remete a uma relação coletiva, facilitando a superação de certos receios diante do trabalho documental e sua difusão.

Assis, Gitirana e Trouche (2019): “*A metamorfose do sistema de recursos de licenciandos em matemática na formação inicial*”, teve por objetivo identificar aspectos do desenvolvimento profissional de licenciandos em matemática por meio da análise do seu trabalho com recursos, por meio de quatro fases: estudo e representação da Trajetória Documental; coleta e análise de tarefas matemáticas em situações de estudo e de ensino; entrevistas e análise da atividade durante a implementação de uma aula em uma escola.

Os autores observaram que um conjunto de recursos tem uma estrutura própria que permite nomeá-lo como um sistema e que a integração entre esses recursos caracteriza mudanças nos sistemas de recursos.

Almeida e Nascimento (2020): “*Avaliação em Matemática Aliada ao Processo de Ensino e Aprendizagem: do trabalho documental às representações sociais*”. Neste trabalho o foco foi a avaliação como indica o título. Os autores realizaram um

levantamento dos projetos pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática de três universidades públicas de Pernambuco quanto às aceções de avaliação propostas nesses documentos. Posteriormente, confrontaram as narrativas de oito licenciandos e de uma formadora de uma dessas instituições, à luz da Abordagem Documental do Didático (ADD) e da Teoria das Representações Sociais (TRS).

O objetivo do estudo consistiu em entender como se observa a avaliação em matemática e, em particular, a implementada no componente curricular Cálculo II pela referida docente. Para o tratamento dos dados, os autores utilizaram a Análise Textual Discursiva, que se desenvolveu em três movimentos: unitarização, categorização e produção de metatextos. Por meio dessa análise, os pesquisadores observaram que, em geral, os documentos curriculares e os docentes revelam a necessidade de estabelecer diálogos entre a avaliação formativa e a somativa. Com base em suas análises, os autores defendem que o processo de documentação do professor de matemática acerca da avaliação da aprendizagem é relevante e carece de reflexões.

Messaoui (2020): *Développement de l'expertise documentaire des professeurs dans des situations de mutations de leur enseignement: le cas de professeurs de mathématiques et d'anglais*, tratou de alterações curriculares propostas no currículo francês para o ensino médio da França em 2016. A ADD foi o principal aporte teórico para construir um modelo metodológico em que a investigação reflexiva, denominada expertise documental de professores pela autora, foi utilizada para compreender a gênese documental nas atividades profissionais de duas professoras de inglês e uma de matemática, em situações de preparação de aulas.

De acordo com Messaoui (2020), a nova reforma curricular francesa introduziu uma organização com um ciclo de três anos com novos temas introduzidos, como algoritmos na matemática e tecnologia e outras áreas do conhecimento. Segundo a autora, as transformações do ambiente informático mudaram a relação dos professores com seus recursos para o ensino proporcionando o desenvolvimento de novos conhecimentos informáticos, mídias e digitais, necessários para o exercício de suas atividades profissionais.

Essa tese tem como objetivo identificar os conhecimentos desenvolvidos pelos professores no processo de classificação de um novo recurso em seus sistemas de recursos pré-estruturados. A autora destaca a convergência dos campos em que a pesquisa se baseia: a abordagem documental do didático e a conceituação em ação como práticas de informação.

Os dados da pesquisa foram coletados quando as professoras exerciam suas atividades em situações de ação que envolviam, por exemplo, a preparação de uma aula no computador em um *software* específico ou em situações de ensino relacionadas aos temas propostos pelo novo currículo, durante a realização de uma entrevista semiestruturada. Messaoui (2020) acompanhou as três professoras por dois anos, observando a contribuição teórica para a compreensão dos esquemas organizados nos esquemas de uso e esquemas de ação instrumentais, além dos esquemas documentais que intervêm diretamente em situações de interações com recursos. Essas interações foram classificadas em esquemas documentais de ação e os esquemas documentais de uso.

Segundo a autora, os esquemas de ação estão relacionados às atividades primárias do professor que correspondem às ações globais que transformam a atividade do sujeito, enquanto os de uso estão relacionados a tarefas secundárias relacionadas aos recursos.

Em suas análises, a autora identificou características comuns para as três professoras referentes ao esquema de uso 'classificação de recursos'. As regras de ação observadas nesse esquema foram organizadas de acordo com critérios de cronologia, nível de ensino e tipos de atividades. Os invariantes operatórios inferidos desse esquema foram conteúdo de ensino e gestão da informação. O conteúdo de ensino refere-se ao conhecimento da organização escolar e do currículo, enquanto o de gestão da informação diz respeito ao letramento digital.

A autora destaca que os principais resultados da pesquisa apontaram para a necessidade de um acompanhamento das gêneses documentais dos professores em um período maior de observação, a fim de compreender com mais clareza as possíveis alterações em suas práticas profissionais.

Os estudos selecionados mostram e comprovam cientificamente a importância de se estudar as interações entre professores e os seus recursos mobilizados para o ensino e por conseguinte, a criação de seus documentos.

A Abordagem Documental do Didático (ADD) foi inicialmente desenvolvida para investigar o desenvolvimento profissional de professores de matemática por meio de suas interações com recursos digitais, como o GeoGebra. Entretanto, os estudos selecionados mostram uma evolução e um desenvolvimento natural desse aporte teórico para outras disciplinas (MESSAOUI, 2020) e para outros tipos de recursos, além do livro didático (ASSIS, 2016; GONZÁLEZ-MARTIN; NARDI; BIZA, 2018) e

novos termos, como os termos recursos mãe, recursos filho e metamorfose (LIMA; TRGALOVÁ, 2018; ASSIS, GITIRANA; TROUCHE, 2019), foram sendo incorporados, além de novas formas de inferir e analisar o trabalho reflexivo do professor por meio de sua trajetória profissional e da interação com recursos (ROCHA; TROUCHE, 2018).

Os trabalhos também identificaram a possibilidade de estudar o desenvolvimento profissional de professores em formação. (ASSIS, 2016; MACHADO JÚNIOR *et al.* (2018); XAVIER NETO; SILVA; TROUCHE, 2019; ASSIS; GITIRANA; TROUCHE, 2019), ou seja, o quadro teórico da ADD permite estudar o desenvolvimento profissional de professores dentro do contexto de formação continuada ou na perspectiva do término do curso de graduação. Esses estudos também mostraram o livro didático e o GeoGebra como os recursos que os professores mais mobilizam.

A mudança tecnológica no cenário educacional acentuou a importância e as potencialidades dos recursos no trabalho do professor afetando, enormemente, os recursos disponíveis e a maneira de produção de recursos (ROCHA e TROUCHE, 2018). Apesar de ser uma teoria nova, os estudos também mostram a perspectiva teórica e metodológica promissoras em que a Abordagem Documental do Didático (ADD) se insere (ASSIS, 2018), inclusive em articulações com outras teorias (ESPÍNDOLA; TRGALOVÁ, 2015; JÚNIOR *et al.*, 2018; ABBAR, 2019; GONZÁLEZ-MARTÍN; NARDI; BIZA, 2018; ALMEIDA e NASCIMENTO, 2020).

Os resultados apresentados apontam a relevância de se estudar os esquemas construídos e/ou mobilizados pelos professores (MACHADO JÚNIOR *et al.* (2018); XAVIER NETO; SILVA; TROUCHE, 2019) e de identificar seus componentes na criação de documentos em situações profissionais de ensino e quais elementos podem influenciar a atividade documental (ABBAR, 2019).

Ignácio (2018) mostrou o quanto foi importante para a evolução profissional do estagiário, sujeito de sua pesquisa, a postura de assumir parte da responsabilidade com o seu próprio percurso formativo, por meio da estruturação de um sistema documental a partir dos recursos desenvolvidos anteriormente e integrados à sua proposta de capítulo de livro didático digital.

As análises também apresentaram como o processo de documentação do professor de matemática acerca da avaliação da aprendizagem é relevante e carece de reflexões (ASSIS; GITIRANA; TROUCHE, 2019).

Dentre os estudos selecionados, os de Désiré (2018), Bifano (2018), Martínez, Cruz e Soberanes (2018) mostram que é possível desenvolver estudos em nível universitário por meio da ADD corroborando o desenvolvimento da pesquisa. Em sua pesquisa, Gueudet (2017), coautora da ADD, defendeu a importância de se estudar o desenvolvimento profissional de professores na criação de seus documentos por meio das suas interações com recursos para o ensino no nível universitário, assim como em outros níveis, o que se alinha à pesquisa que desenvolvemos.

Damos sequência a esta exposição apresentando agora 18 trabalhos do Q2, que investigam o ensino e aprendizagem do conceito de limite de função. Apresentamos seu(s) autor(es) e seus títulos em itálico, como segue:

Soares (2018): *“O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: um estudo à luz dos três mundos da matemática”* considera o limite de uma função em um ponto, tem por sujeitos de pesquisa estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática e suas estratégias de ensino à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Encontra-se neste trabalho um teste, sobre limites de funções, aplicado a alunos que já haviam cursado Cálculo I e entrevistas com docentes dessa disciplina dos dois cursos. Pela análise de livros didáticos foi possível constatar que, nos capítulos introdutórios há características dos Mundos Simbólico e Corporificado, especialmente do primeiro e alguns aspectos do Mundo Formal.

As entrevistas dos professores mostraram que a introdução ao conceito de limite acontece a partir de exemplos gráficos e tabelas de valores de função para, em seguida, introduzirem a definição formal de limite; que eles perpassam os Três Mundos da Matemática e seguem a sequência de apresentação de livros didáticos. Os capítulos introdutórios dos livros didáticos analisados, fazem apelo a características dos três mundos da matemática, buscando exemplificar as afirmativas intuitivas por meio de gráficos ou tabelas de valores de uma função, usando simbologia matemática na descrição das construções, para, enfim abordar a definição formal de limite de uma função em um ponto.

Os professores entrevistados mostraram preocupação com a aprendizagem dos alunos percorrendo sobre a forma como introduzem o conceito de limite seguindo a sequência do livro didático.

Como mostrou a revisão de literatura para a pesquisa sobre a ADD, o recurso livro-didático é um dos recursos mais utilizados pelos professores no planejamento e no desenvolvimento de suas aulas sobre o Cálculo e o estudo de Limites.

O teste aplicado aos estudantes mostrou que a maior parte desses utiliza a linguagem natural para conceituar limite, com alguns elementos simbólicos, mas sem atingir desenvolvimentos axiomático e formal compatíveis com a definição.

Os alunos que haviam concluído Cálculo I há pouco tempo e estavam cursando outras disciplinas que envolvem seus conceitos, ao retomarem à definição formal de limite, mostraram dificuldades, de linguagem natural ou matemática, influenciando a aprendizagem de outros conteúdos.

No que concerne à definição formal de Limite, o estudo histórico e epistemológico do campo conceitual do Cálculo que realizamos para a pesquisa mostrou os obstáculos relacionados ao seu desenvolvimento e que se mostram presentes no seu processo de ensino.

Para as análises dos dados coletados para a pesquisa, destacamos que esse estudo aqui apresentado fornece indícios de que fatos semelhantes relacionados ao livro didático, como principal recurso do professor, e os obstáculos que o ensino de limites evoca podem aparecer no trabalho documental do professor.

Messias (2018); *“Teorias cognitivas do pensamento matemático avançado e o processo de construção do conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade”*, conjectura sobre quais estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos, por um indivíduo, de modo a possibilitá-lo a compreender os conceitos de limite e continuidade de uma função, ou seja, estruturas que fazem parte do campo conceitual de limite.

A partir da teoria sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991), um estudo preliminar foi realizado e por meio desse foram analisados os elementos que compuseram a imagem conceitual de estudantes de um curso de licenciatura em matemática no que tange aos conceitos de limite e continuidade de uma função.

A partir das respostas dos sujeitos investigados, a autora aponta que suas imagens conceituais evocadas sobre limite foram pautadas, sobretudo, em interpretações dinâmicas desse conceito. Além disso, a existência do limite esteve vinculada, em algumas das evocações, à continuidade da função, às condições de domínio, ou ainda, à ausência de “saltos” e/ou buracos” na representação gráfica da

função, configurando-se, portanto, como um fator de conflito cognitivo para esses sujeitos.

A compreensão dos estudantes sobre continuidade esteve vinculada, principalmente, à ideia de conectividade. Nesse sentido, uma concepção de inteireza atrelada à imagem “sem saltos ou buracos” fez parte de suas imagens conceituais. As condições que implicam na (des)continuidade em um ponto ou ao longo de um intervalo foram equivocadamente apontadas por alguns dos sujeitos investigados.

A decomposição genética para limite e continuidade, tendo como referência esses conceitos matemáticos, partiu do desenvolvimento histórico-conceitual, das experiências docentes no âmbito do Cálculo, da multiplicidade de compreensões relativas a esses conceitos, evidenciadas tanto em outros estudos quanto no primeiro estudo com os estudantes sujeitos da pesquisa e, principalmente, nos pressupostos da teoria APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014). Por meio dessa decomposição genética, a autora aponta que para a apreensão de um conceito por parte de um sujeito, ele precisa ser vinculado à evocação de múltiplas imagens conceituais coerentes com o conceito nos diferentes contextos matemáticos.

Os principais resultados apontaram que as múltiplas imagens sobre limite e continuidade foram evocadas, fato que desencadeou reflexões que contemplaram a decomposição genética que, por sua vez, foi elaborada a partir de diferentes objetos matemáticos, tais como função, definição de limite, relação entre limites laterais e bilateral, propriedades de limite, limites envolvendo infinito, continuidade no ponto ou intervalo, dentre outros.

Moura e Laudares (2018): “*Estudo do limite de uma função: análise com um objeto de aprendizagem para cursos de engenharia e matemática*” apresenta em estudo conceitual de limite de uma função de uma variável. Os referenciais teóricos são Tall (2013), Vinner (2013), Duval (2009), Laudares (2013), Lachini (2001), para os quais há a necessidade de se buscar o entendimento desse conceito, pelo estudante, antes de formalizar uma definição, privilegiando a estruturação da matemática e não apenas os procedimentos de cálculo.

O software GeoGebra, ou seja, um recurso digital, serviu de mediação da informática no processo didático em que foram exploradas as representações algébricas e, especialmente, a geométrica-gráfica com recursos da Informática Educativa.

O uso das TIC, como recurso facilitador, buscou instigar descobertas, oportunizar o levantamento de conjecturas e a elaboração de conclusões a partir de um espírito participativo, colaborativo e sedutor, tanto para o docente quanto para o discente.

O uso das tecnologias para o ensino e a aprendizagem de conceitos, como no caso do estudo do conceito de limite e continuidade, segundo os autores, propicia compreensão e apreensão dessas entidades matemáticas, num processo que permite que o sujeito explore esse objeto, portanto, nas perspectivas da ADD e da TCC.

Segundo os autores, as consequências do desenvolvimento das tarefas como instrumento de apoio em sala de aula, bem como na proposta metodológica, têm implicações na forma como o sujeito interage com os objetos matemáticos, reflete, organiza suas ideias e se apropria do conhecimento.

O professor tem a oportunidade de acompanhar e avaliar todo o processo, pois, no exercício da comunicação das ideias, seja oral ou escrita, o sujeito necessita estruturar, sintetizar, refletir, conjecturar, e esse processo leva o aluno a demonstrar os conhecimentos adquiridos.

Os autores apontam que houve um avanço significativo no processo de aprendizagem do conceito de limite, levando-os a aceitar a didática da ação para a elaboração conceitual, isto é, a importância de se construir um conceito matemático antes de defini-lo e, no caso, por meio de um recurso digital.

Portanto, esse trabalho apresentou uma prática educativa que busca colaborar para a aquisição de saberes, no processo de ensino e aprendizagem de Limite a partir de tarefas que efetivam os objetos de aprendizagem, aliados ao uso da tecnologia.

Almouloud e Sardeiro (2019): “*O estudo do limite de uma função: O que disseram os alunos?*” apresentam resultados obtidos em uma pesquisa de doutorado que teve como objetivo trazer novas reflexões relacionadas ao ensino e aprendizagem do conceito de limite de uma função.

Nesse estudo, foram propostas questões para três turmas do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública federal, sobre o conceito de limite, seu desenvolvimento histórico, indeterminações, limites infinitos e no infinito e suas representações formais e gráficas.

Segundo os autores, a maioria das respostas dos alunos indicou que seus professores não utilizam a história da matemática em suas aulas.

A palavra mais utilizada pelos estudantes para expressarem a ideia de limite foi “aproximação”, revelando a ideia intuitiva de limite de uma função. Outro dado importante que a pesquisa mostra é que os alunos consideram que o limite da função é um valor nunca alcançado, em termos gerais, ao falarem sobre limites, os estudantes se referenciam-se a tendências. Com relação à indeterminação, a resposta mais fornecida foi “sem solução”, ou seja, os alunos não dão significado ao “levantamento da indeterminação”, nem em termos gráficos, nem em termos algébricos.

Conforme os autores, as análises das respostas indicam que não há como falar da dificuldade do aluno sem relacionar sua vivência em sala de aula. As dificuldades geradas pelos obstáculos que se fazem presente na origem do conceito precisam ser superadas.

Propagam que se o aluno apresenta dificuldades em aprender esse conceito, o professor também pode ter dificuldades em ensiná-lo.

O trabalho documental do professor universitário é um dos meios para se observar as conclusões trazidas nessa pesquisa.

Fonseca (2019): *“Aprendizagem com compreensão dos conceitos de limite e continuidade: uma experiência de ensino com recurso ao geogebra na formação inicial de professores de matemática, no Brasil”* analisa e evidencia a compreensão de estudantes no processo de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, no contexto de uma experiência de ensino de cunho exploratório, integrando o uso do GeoGebra e a contribuição do GeoGebra para essa compreensão, ou seja, o uso de um recurso digital na apropriação do conceito de limite.

A fundamentação teórica foca no conhecimento profissional do professor de matemática, contextualizado para o ensino e a aprendizagem dos conceitos de limite e de continuidade de funções, com vistas a investigar as potencialidades do uso do GeoGebra. Esta pesquisa se assemelha à nossa por se tratar da atividade profissional do professor. Mas, também investigou a compreensão por parte de estudantes sobre o limite e continuidade tendo por base um referencial de três categorias, nomeadamente, os significados atribuídos aos conceitos, as suas representações e competência para a resolução de problemas que envolvem os conceitos visados.

O autor aponta que os resultados do estudo permitem concluir que os estudantes, em geral, evidenciaram uma compreensão relacional do limite e continuidade, pois atribuíram-lhes diferentes significados que evidenciam uma concepção adequada desses conceitos, sendo igualmente capazes de reconhecer, representar e transformá-los em suas diferentes representações e de os aplicar na resolução de problemas que apelam à modelação matemática, análise de erros e provas matemáticas.

As explorações no GeoGebra permitiram a construção de significados corretos de limite e continuidade, favoreceram o trabalho com suas diferentes representações e possibilitaram a resolução de problemas que os envolvem.

De acordo com o autor, as principais dificuldades reveladas pelos estudantes contemplam concepções errôneas sobre esses conceitos e uma fragilidade nas transformações (tratamentos e conversões) de suas diferentes representações e em procedimentos da álgebra. No entanto, o estudo evidencia também que algumas dessas dificuldades foram superadas pelos estudantes, com o apoio das explorações no recurso GeoGebra.

Os resultados permitem, ainda, fazer uma avaliação positiva do papel das tarefas exploratórias integrando o GeoGebra para a aprendizagem de limite e continuidade de funções.

Batista (2019), *“Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didático”* teve como objetivo estudar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de não-saber para um estado de saber no que se refere aos conceitos limites de funções reais de uma variável real.

O autor compara dois livros, O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017) e aponta diferenças nos modos de apresentação dos limites. Partindo-se da análise das organizações praxeológicas constituídas em torno dos subtipos de tarefas relacionadas à determinação desses limites, o autor constatou que existe uma diferente distribuição (não muito grande) da representatividade de tais tarefas e a não-presença (no livro mais antigo) e presença (no livro mais recente) das praxeologias a serem relacionadas à atividade de conjecturar limites numericamente; e também; das abordagens histórico-epistemológicas; do uso de calculadoras, computadores e sistemas de computação algébrica; e das aplicações aos demais campos do conhecimento humano.

O autor indica que as organizações matemáticas são praticamente as mesmas (apenas com diferenças em relação à variedade das técnicas elaboradas). As praxeologias didáticas ocorrem (basicamente) em três momentos, a saber: (i) exploração do subtipo de tarefa/elaboração da técnica, (ii) avaliação do ambiente técnico-tecnológico e (iii) trabalho da técnica. As razões de ser para tais limites são essencialmente as mesmas, ou seja, estudam-se limites para explicar e justificar os demais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Thiele, Carmo e Kamphors (2020): “*Atividades de investigação em Cálculo Diferencial e Integral: uma proposta para o ensino do conceito de limite de uma função com o software GeoGebra*” traz considerações acerca do desenvolvimento de atividades investigativas apoiadas na utilização de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, além de uma proposta metodológica para o ensino do conceito de limite de uma função por meio desses recursos digitais.

Os autores apontam que o papel docente precisa estar preparado para lidar em uma organização dinâmica do espaço de aprendizagem, ou seja, preparado para um ambiente em que os recursos digitais fazem parte da atividade profissional docente.

Por meio do desenvolvimento de atividades propostas no GeoGebra, os autores possibilitavam que os estudantes construíssem imagens próprias acerca do conceito de limite. O exemplo trazido, graficamente, foi o caso de uma função $y=f(x)$ com y se aproximando de 1, quando x tendia a 0 pela esquerda e direita (sem assumir o valor 0). A expectativa é que os alunos desenvolvessem uma noção intuitiva de limite de uma função.

Segundo os autores, ao definirem intuitivamente o conceito de limite de uma função, os estudantes poderiam pensar que ele expressasse o comportamento de uma função quando sua variável independente tende a determinado valor. Essa tendência está intimamente relacionada ao sentido de aproximação. Outra noção intuitiva poderia estar relacionada ao comportamento da variável dependente em relação à aproximação da variável independente para determinado valor.

O uso do recurso digital GeoGebra buscou desafiar os estudantes em uma investigação matemática com o intuito de mobilizarem recursos cognitivos para a formulação de conjecturas sobre situações matemáticas.

É inferida por esses autores de que a contribuição das tecnologias digitais, no contexto da matemática investigativa, permite que os estudantes experimentem e simulem diferentes situações com o objeto de estudo. Por exemplo, no caso do GeoGebra, movimentar os objetos na janela de visualização gráfica e verificar as aproximações tanto no gráfico quanto na janela de álgebra, não poderia ser realizado dinamicamente sem o uso desse *software*. Trata-se de ampliar as linguagens e, conseqüentemente, as formas de interação entre o aluno e o conteúdo estudado.

Os autores apontam que a abordagem dinâmica do conceito de limite no GeoGebra permite resgatar sua natureza geométrica e destacam que as abordagens pedagógicas têm deixado de lado essa epistemologia, e focado no seu estudo algébrico. Portanto, a proposta desse estudo busca justamente repensar esse trabalho pedagógico na perspectiva de dinamizar o processo de aprendizagem. O uso de um recurso digital dinâmico permite relacionar as diferentes representações sem enfrentar grandes dificuldades, além de possibilitarem um maior envolvimento dos alunos.

Na perspectiva do campo conceitual de limite, as atividades buscavam o envolvimento com situações em que conhecimentos prévios eram necessários, mais especificamente, conhecimento sobre plano cartesiano, função e a sua representação gráfica.

De acordo com os autores, a aprendizagem conceitual de limite acontece a partir do momento em que as generalizações sejam entendidas, isto é, quando o aluno atribui significado ao conceito de limite em qualquer situação que o envolva, não dependendo nem do ponto e nem mesmo de uma função específica.

O estudo evidencia que a realização de atividades de investigação matemática pode ser uma importante aliada na busca pela aprendizagem significativa e conceitual. As TDIC são ferramentas que complementam esse processo a partir da possibilidade de colocar o aprendiz diante de situações que dificilmente estariam disponíveis de outra forma.

A proposta para o ensino do conceito de limite de uma função, apresentada nesse estudo, fornece, na perspectiva da ADD, uma possibilidade metodológica de estudar o conceito de limite por meio de recursos digitais e de forma investigativa para a construção desse conceito de forma dinâmica e significativa.

Por fim, os autores destacam que por mais autonomia que o estudante tenha, o trabalho docente continua sendo imprescindível para a aprendizagem. A condição

de orientar em um ambiente de aprendizagem dinâmico e coletivo faz do professor a ligação entre o aprendiz e o conhecimento.

Araújo (2020): “*A construção do conceito de limite através da resolução de problemas*” busca mostrar que no ensino superior o conceito de Limite é visto com bastante apreensão pelos estudantes, apontando que a metodologia aplicada pelo professor e as lacunas advindas da educação básica, tais como, fatoração, produtos notáveis, simplificação e operações com frações algébricas; são alguns dos fatores que contribuem para o baixo rendimento na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Considerando essas lacunas, o estudo buscou identificar os erros cometidos pelos estudantes, sujeitos da pesquisa, a partir de suas atividades e avaliações. A pesquisa foi apoiada no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, cujo modelo apresenta onze atividades e os dados coletados se deram por meio dos registros produzidos pelos estudantes durante as aulas de CDI e por meio de diário de campo do professor-pesquisador, ao longo das aulas.

Os autores descreveram o que consideraram os principais erros e dificuldades apresentados por eles e os principais resultados evidenciados por essa investigação. Quase todos os estudantes resolveram a atividade proposta, no entanto apenas cinco as responderam por completo, portanto, foram as respostas desses cinco estudantes que compuseram as análises dos dados.

Os autores destacaram que foi possível evidenciar a evocação das seguintes imagens conceituais: o limite de uma função é visto como uma operação algébrica, em que há operação com valores e um valor numérico é encontrado e a compreensão de limite como uma noção intuitiva.

Analisando as respostas dos estudantes, os autores concluíram que foi possível chegar à conclusão de que a compreensão do conceito de limite, por parte dos estudantes, não é internalizada corretamente, pois essa compreensão não é evidenciada e apresenta conflitos com a sua definição conceitual.

A análise dos trabalhos e das atividades dos estudantes evidenciou que a compreensão do conceito de limite não é bem internalizada pelos mesmos, além disso, essa análise também apontou que a não consolidação de aspectos algébricos do ensino básico são fatores que contribuem para um aproveitamento insatisfatório de uma parcela significativa dos estudantes.

O autor defende que, o conceito de limite é essencial no estudo e nas aplicações da matemática, e por isso seria importante ser ensinado desde cedo na escola, podendo ser introduzido de forma intuitiva já na educação básica, pois quanto mais cedo os estudantes se familiarizarem com o conceito de limites no contexto da álgebra, poderiam também de forma inicial atribuir significado a ele.

Com relação aos erros cometidos pelos estudantes, esses se deram em virtude da ausência do domínio de conceitos básicos da álgebra. Nesse caso, as análises dos escritos dos alunos revelaram que eles têm dificuldades em reconhecer padrões e identificar a ocorrência ou não de indeterminação.

Messias (2021): “Uma decomposição genética para o conceito matemático limite de uma função” conjectura sobre quais estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo, de maneira a possibilitá-lo compreender o conceito de limite de uma função.

O estudo evidencia a importância de que diferentes conceitos matemáticos, tais como função, a definição de limite, a relação entre limites laterais e bilateral, as propriedades de limite, limites envolvendo infinito, dentre outros elementos, sejam contemplados em uma Decomposição Genética (DG) para Limite de uma Função, baseando-se, para tanto, na teoria APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014).

Ferreira (2021): “*Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas*” está inserida na linha de pesquisa denominada “Tecnologia da Informação e Educação Matemática” analisa a compreensão do conceito de limite de função de uma variável real por alunos de cursos de Ciências Exatas de uma universidade pública.

Devido à pandemia da Covid-19, foram propostas e aplicadas seis “Sequências de Atividades”, desenvolvidas em encontros *on-line*, por meio da plataforma *Google Meet* e com a utilização de diferentes tecnologias, entre elas, o *software* GeoGebra.

A elaboração e a análise das atividades se basearam na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e na Teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA). Segundo o autor, a pesquisa teve como meta contribuir para o processo de aprendizagem de limite de uma função de uma variável real, por meio

dessas atividades que foram elaboradas e implementadas com o uso de *applets* do GeoGebra.

As “Sequências de Atividades” envolveram Imagem Conceitual, Definição Conceitual, processos de abstração, representação e visualização do conceito de limite de função de uma variável real.

Os autor consideraram dois aspectos fundamentais e relevantes para a elaboração das Sequências de Atividades: uma abordagem do conceito de limite tratada em livros didáticos considerando problemas aplicados em situações de outras áreas de conhecimento e em um ambiente computacional, que possibilitou associar o estudo de limite de funções de uma variável real a softwares de geometria dinâmica, no caso do estudo o GeoGebra.

O desenvolvimento da primeira atividade relacionadas com limites, os alunos usaram os seguintes recursos: lápis, papel, calculadora, régua e interpretaram os dados de uma tabela. A partir da segunda atividade, o estudo utilizou como recurso *applets* do GeoGebra, que possibilitaram aos alunos trabalharem com duas representações distintas, simultaneamente, uma algébrica e outra gráfica propiciando ver o mesmo objeto de duas maneiras distintas ao mesmo tempo.

Na perspectiva da TCC, as atividades permitiram a representação entre diferentes representações, que consistiram na passagem da representação algébrica para a gráfica com a interpretação dos dados, assim como da linguagem natural de problemas para a linguagem algébrica ou gráfica. Por meio do processo de visualização, ao movimentar o Controle Deslizante do recurso GeoGebra e investigar de maneira dinâmica os valores de $x \rightarrow x_0^-$ e $x \rightarrow x_0^+$, foi possível visualizar o comportamento $f(x) \rightarrow L$. Os alunos também expressaram, por meio da representação da linguagem natural a interpretação dos resultados.

Os autores consideraram que a visualização proporcionada pelos *applets* do GeoGebra, *software* de Geometria Dinâmica, contribuiu significativamente para que os alunos criassem, na perspectiva de Dreyfus (2002) imagens mentais que poderão ser utilizadas mais tarde em outras atividades. Os autores também apontam que os processos de mudança de representação e tratamento entre elas, possibilitaram a interpretação de representações do limite pelos sujeitos da pesquisa. Eles admitiram que a definição de limite traz dificuldades para a aprendizagem de Cálculo.

Os resultados expressos nesse trabalho evidenciam que atividades desenvolvidas utilizando diferentes representações dos conceitos matemáticos podem potencializar a compreensão da definição formal de limite.

A próxima seção apresenta a justificativa com os objetivos gerais e específicos da pesquisa e a delimitação do problema por meio da questão de pesquisa.

2.3 Justificativa e delimitação do problema

A revisão da literatura traz muitas contribuições para esta pesquisa. Ela indica a pertinência, a importância e amplitude dos aportes teóricos da ADD para a investigação da formação profissional do professor de qualquer área e nível de ensino, e justificativa o desenvolvimento desta tese no que se refere ao ensino superior. Assis (2018), reforça nossa convicção quando diz:

A Abordagem Documental do Didático é uma referência para pesquisadores interessados em compreender várias questões relacionadas ao trabalho do professor de Matemática. Em contínuo desenvolvimento, a Abordagem Documental do Didático se enriquece como uma perspectiva reflexiva à medida que novos conceitos são criados ou outros problemas de pesquisa são formulados. O desejo de compreender o que move o trabalho do professor de Matemática, o sentido da evolução dos seus sistemas de recursos e a relação com o desenvolvimento profissional parece ser a razão maior de diferentes pesquisas que se voltam para os recursos e documentos do professor. (ASSIS, 2018 p. 30)

Os estudos selecionados revelaram a relação direta entre os documentos criados pelos professores ao interagirem com recursos de diversos tipos para o ensino e os seus respectivos desenvolvimentos profissionais.

O modo como os recursos são selecionados, criados, modificados etc. impacta a atividade profissional dos professores. Ou seja, dependendo de como as situações de ensino se apresentam, o professor seleciona, cria, modifica seus recursos e desenvolve esquemas de utilização.

Tendo em vista que, no contexto da crise sanitária, os professores tiveram que lidar com situações e adaptações quando migraram do ensino presencial para o ensino remoto, selecionando, criando e modificando seus recursos para essa modalidade de ensino, pode-se inferir a importância de uma pesquisa, como esta nossa, para o entendimento da ação profissional por meio da documentação de professores universitários no ensino remoto.

Nessa revisão de literatura, pudemos encontrar no Brasil, vários estudos desenvolvidos no nível da educação básica apoiadas na ADD, mas somente um no nível universitário. Porém, essa revisão também evidenciou que é possível investigar o desenvolvimento profissional de professores universitários por meio do quadro teórico da ADD, como mostram os resultados dos estudos de Désiré (2018), Bifano (2018), Martínez, Cruz e Soberanes (2018), e em especial a pesquisa de Gueudet (2017), quando defende que:

Uma investigação mais aprofundada dos documentos dos professores universitários naturalmente requer dar este novo passo, incluindo a observação direta na coleta de dados, a fim de ser capaz de combinar os depoimentos dos professores não apenas com seus recursos reais, mas também com vários tipos de dados. É necessário também estudar como as interações com os alunos tornam-se recursos para os professores; isso poderia levar a uma perspectiva renovada sobre o desenvolvimento pedagógico dos professores. (GUEUDET, 2017, p. 222, tradução nossa).

Com essas perspectivas, a autora nos alerta ser a ADD:

[...] uma direção importante para pesquisas futuras em Educação Matemática Universitária, porque no ensino superior, assim como em outros níveis, o trabalho de documentação é central no trabalho dos professores. (GUEUDET; 2017, p. 222, tradução nossa)

Entendemos, portanto, que se justifica o desenvolvimento desta pesquisa, da investigação sobre a evolução profissional do professor universitário por meio do estudo de seu trabalho documental conforme orienta a ADD.

No que se refere ao conceito matemático focado, limite de uma função, a revisão e estudos apresentados na Introdução destacam que há ainda muito a ser investigado sobre o ensino de limite, devido à importância desse conceito no ensino do cálculo e da matemática. Eles contribuíram com esta pesquisa na medida em que nos municia de informações, para a análise dos recursos utilizados pelo sujeitos da pesquisa. Os resultados apontados nos dois grupos de estudos (Introdução e revisão) identificam obstáculos de aprendizagem, hábitos de professores, mudanças relacionadas ao uso de *software* de animação e o impacto dessas mudanças no ambiente de aprendizagem.

Sintetizamos os resultados:

[...] A introdução ao conceito de limite acontece a partir de exemplos gráficos e tabelas de valores de função; em geral os professores seguem a sequência de apresentação de livros didáticos (SOARES; 2018); múltiplas imagens sobre limite são evocadas a partir dos conceitos de função, definição de limite, relação entre limites

laterais e bilateral, propriedades de limite, limites envolvendo infinito (MESSIAS, 2018); [...] há necessidade de se buscar o entendimento desse conceito, pelo estudante, antes de formalizar uma definição, privilegiando a estruturação da matemática e não apenas os procedimentos de cálculo. O software GeoGebra, ou seja, um recurso digital, serviu de mediação da informática no processo didático (MOURA; LAUDARES, 2018); A palavra mais utilizada pelos estudantes para expressarem a ideia de limite foi “aproximação”, revelando a ideia intuitiva de limite de uma função. O limite da função é um valor nunca alcançado (ALMOULOU; SARDEIRO, 2019); As explorações no GeoGebra permitiram a construção de significados corretos de limite e continuidade, favoreceram o trabalho com suas diferentes representações e possibilitaram a resolução de problemas que os envolvem (FONSECA, 2019); As razões de ser para tais limites são essencialmente as mesmas, ou seja, estudam-se limites para explicar e justificar os demais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. (BATISTA; 2019); [...] o papel docente precisa estar preparado para lidar em uma organização dinâmica do espaço de aprendizagem, ou seja, preparado para um ambiente em que os recursos digitais fazem parte da atividade profissional docente. (THIELE; CARMO; KAMPHORS, 2020); [...] a compreensão do conceito de limite, por parte dos estudantes, não é internalizada corretamente, pois não é evidenciada e apresenta conflitos com a sua definição conceitual. (ARAÚJO, 2020); Contemplar em uma Decomposição Genética (DG) para Limite de uma Função, os diferentes conceitos como: função, definição de limite, relação entre limites laterais e bilateral, propriedades de limite, limites envolvendo infinito (MESSIAS, 2021); a visualização proporcionada pelos *applets* do GeoGebra, software de Geometria Dinâmica, contribuiu significativamente para que os alunos criassem, na perspectiva de Dreyfus (2002), imagens mentais que poderão ser utilizadas mais tarde em outras atividades. (FERREIRA, 2021).

Consideramos que tais resultados iluminam nossas análises relativas aos recursos utilizados ou possíveis esquemas que possam ser comuns a professores universitários como por exemplo, seguir seus cursos segundo a ordem dos livros didáticos. Sobre a formação de imagens conceituais pelos estudantes pudemos observar que os resultados indicam que elas dependem das experiências com situações voltadas à *aproximação*, à *continuidade*, que o limite de uma função não é atingido, que a definição formal traz dificuldades de compreensão por exemplo.

Após todos esses dados cognitivos dos estudantes quanto ao conceito de limite (concepções, imagens conceituais, diferenciação entre registros de representação e obstáculos) e a constatação de que o uso de diferentes recursos pode auxiliar à atribuição de significado ao conceito de limite pelos estudantes, pudemos inferir dessas informações possibilidades de dados a serem esperados na documentação dos sujeitos de pesquisa, com a possibilidade de enriquecimento das trocas a serem realizadas durante os processos de elaboração desses documentos. Acrescentamos as contribuições dos estudos sobre a educação matemática no ensino superior e ensino remoto durante a pandemia do COVID 19, relacionados na Introdução desta tese.

A delimitação do problema vem então carregada de muitos dados. A questão que nos colocamos como problematizadora deveria orientar nossos procedimentos de pesquisa que pudesse assimilar as questões até aqui estudadas. Após algumas formulações elaboramos a questão de forma simples e sintética, mas com a clareza do que deveríamos buscar com ela. Ela ficou assim formulada: **Como são elaborados documentos de professores universitários para introduzir o conceito de limite de uma função em um curso de exatas, no ensino remoto?**

E a partir dela declaramos os objetivos da pesquisa, como segue:

Objetivo Geral: identificar documentos de professores universitários por meio de suas gêneses documentais ao interagirem com recursos para o ensino remoto de limite de funções.

Objetivos específicos:

- Identificar os recursos que os professores selecionam para ensinar limites de funções;
- Identificar os esquemas de utilização dos professores universitários, participantes da pesquisa, ao interagirem com seus recursos para introduzir limites de funções no ensino remoto;
- Avaliar o fenômeno da gênese documental no desenvolvimento do documento dos professores no ensino de limites de função, no ensino remoto.

Na continuidade da pesquisa, na busca de respostas à questão de pesquisa, e com vistas a atender os objetivos declarados nos assenhoramos dos elementos que seriam necessários, os quais constam da seção 2.4: a Metodologia da Investigação

Reflexiva (MIR), as ferramentas selecionadas para coleta de dados, suas implementações e os processos de coleta.

2.4 A Metodologia da Investigação Reflexiva (MIR)

A metodologia da Investigação Reflexiva é uma metodologia específica da Abordagem Documental do Didático (ADD). Ela foi proposta por Trouche, Gueudet e Pepin (2018) como uma metodologia de pesquisa empírica e tem como características fundamentais: a reflexão do professor sobre seu trabalho de documentação e seu envolvimento na etapa de coleta de dados. Posteriormente, ela foi formatada a partir da constatação de que o estudo do trabalho documental de professores deveria considerar:

a diversidade dos recursos que alimentam esse trabalho e dele resultam, a variedade das interações (coletivas, institucionais e sociais e o tempo necessário para o desenvolvimento das gêneses documentais. (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018, p. 8, tradução nossa).

Nessa perspectiva, a Metodologia de Investigação Reflexiva (MIR) se apoia em cinco princípios fundamentais (TROUCHE *et. al.*, 2020):

1. o princípio de uma ampla coleção de recursos materiais usados e produzidos durante o trabalho documental;
2. o princípio do acompanhamento de longa duração; as gêneses são processos em desenvolvimento e os esquemas se desenvolvem em longos períodos;
3. o princípio do acompanhamento em todos os lugares (dentro e fora da sala de aula).
4. o princípio do acompanhamento reflexivo do trabalho documental, em que a visão do professor sobre seu próprio trabalho é amplamente requisitada;
5. o princípio de confrontação, do ponto de vista do professor com seu trabalho documental e a materialidade desse trabalho (materialidade proveniente, por exemplo, da coleção de recursos materiais ou mesmo das práticas do professor em suas aulas).

A MIR foi criada pensando no contexto do ensino presencial, porém com o suporte de ferramentas computacionais, foi possível adequar e aplicar essa metodologia num contexto de ensino remoto, ou seja, os princípios foram adaptados.

O princípio de uma ampla coleção de recursos materiais usados e produzidos durante o trabalho documental está relacionado diretamente à própria ideia de recurso. No contexto pandêmico, os recursos digitais e as plataformas virtuais permitiram que o ensino remoto fosse desenvolvido por meio de adequações entre o ambiente virtual e os recursos mobilizados para essa modalidade de ensino.

A disponibilidade de uma enorme quantidade de recursos, de origens digitais ou não, para o âmbito educacional auxiliam os professores no desenvolvimento das suas aulas remotas possibilitando uma multiplicidade de escolhas.

Nesse contexto, para esta pesquisa foram considerados todo tipo de recursos mobilizados e utilizados pelos professores para o ensino remoto de limites, tanto dentro quanto fora da sala de aula remota, de origem digital ou não, tais como, livros didáticos, linguagem natural, mesa digitalizadora, apresentações por meio do MS Powerpoint, GeoGebra, entre outros. Ou seja, todos os recursos que auxiliaram a atividade remota desses professores para o ensino de limites no contexto pandêmico

O princípio do acompanhamento de longa duração está diretamente relacionado ao desenvolvimento da gênese documental do professor, pois as gêneses documentais são processos contínuos que exigem tempo para evoluir, bem como para observá-las (TROUCHE; GUEUDET; PEPIN, 2018). Os esquemas também são desenvolvidos em longos períodos e, assim como ocorre com a gênese, demandam um longo período de observação.

Entretanto, no caso da pesquisa, devido ao contexto pandêmico, não foi possível realizarmos um acompanhamento de longa duração. Porém, Trouche (2021) apontou, em um dos 10 Seminários sobre a ADD, mais especificamente no segundo seminário, que mesmo que esteja previsto e seja desejável que o acompanhamento da atividade profissional do professor deva ocorrer em um período longo, eventos excepcionais, como os causados pelo contexto pandêmico e que impediram um acompanhamento mais duradouro, são motivos que justificam um acompanhamento mais curto. Ainda segundo o autor, mesmo nessas circunstâncias, os dados coletados são válidos e não comprometem a cientificidade da pesquisa.

O princípio de acompanhamento em todos os lugares (dentro e fora da sala de aula) tem por objetivo compreender a extensão do trabalho documental do professor. A sala de aula é um local importante em que o ensino planejado é implementado, uma implementação que requer adaptações, revisões e improvisações.

No entanto, uma parte significativa do planejamento dos professores pode ser elaborado em qualquer lugar e momento, no caso remoto, esse planejamento pode ocorrer em reuniões virtuais com os demais professores ou em reuniões virtuais pedagógicas, por exemplo. Isso faz com que seja necessário considerá-los tão importantes quanto os eventos que ocorrem dentro da sala de aula remota.

Para o desenvolvimento da pesquisa, solicitamos aos professores que nos fornecessem informações sobre seus planejamentos, para o ensino remoto de limites, desenvolvidos nos seus respectivos ambientes virtuais de trabalho, ou seja, nos ambientes em que os professores exerceram suas respectivas atividades profissionais tanto dentro quanto fora do ambiente virtual.

O princípio de acompanhamento reflexivo do trabalho documental envolve o professor diretamente com a coleta de dados, pois é ele que tem a visão do próprio trabalho, para além da observação direta do pesquisador. O acompanhamento reflexivo também permite que o professor tenha uma atitude introspectiva, tornando visível o que poderiam ser recursos que, de outra forma, o pesquisador não conseguiria identificar.

Nessa perspectiva, tanto o planejamento quanto a coleta dos dados foram realizados por meio do auxílio de ferramentas virtuais, como por exemplo, as observações e gravações das aulas remotas dos professores, capturas de telas de momentos específicos dessas aulas, e gravações das entrevistas remotas realizadas após o término das suas respectivas aulas remotas.

O último princípio da MIR permite a confrontação permanente das visões do professor e de seu trabalho documental e possibilita ao pesquisador revisar os dados coletados e sugerir ao professor que interprete traços de seu trabalho documental. As ferramentas de coleta de dados, descritas nas próximas seções, visaram a contemplar todos os princípios da MIR, principalmente esse último.

Por meio dessas ferramentas, buscamos envolver os professores na coleta de informações sobre suas respectivas atividades profissionais remotas, buscando proporcionar-lhes reflexões a respeito de suas próprias práticas com o intuito de identificarmos mais dados, além dos visíveis, no processo de construção de seus documentos para o ensino remoto de limites

Portanto, mesmo no contexto do ensino remoto, o envolvimento ativo do professor na confrontação dos dados coletados contribui para as análises de seu próprio trabalho documental refletindo sobre ele.

Tendo por base os princípios da MIR adaptados ao contexto pandêmico da pesquisa, na próxima seção descrevemos as ferramentas de coleta de dados selecionadas para a pesquisa.

2.4.1 Sujeitos da pesquisa

Desde o momento que decidimos a temática desta tese começamos a realizar contatos com professores de cálculo entre colegas de curso ou indicados por eles. Participar de uma pesquisa que requer aumento de trabalho e envolvimento não é uma coisa fácil. A nós nos interessaria professores envolvidos com pesquisa e que tivessem experiência no ensino de cálculo para que fosse possível a interação, que pudessem utilizar outros recursos além do livro didáticos e que tivessem algum conhecimento sobre a educação matemática. Desejávamos também poder contar com professores da escola pública e privada. Ao final de 2018 já tínhamos dois professores (no caso ambos da escola pública) que estavam dispostos a participar da pesquisa. Estávamos a procura ainda de um professor da escola privada. Porém em 2019, tudo se altera. Vem a Pandemia e durante algum tempo nenhum professor tinha disponibilidade de tocar em assunto de pesquisa, nem mesmo o pesquisador. Quando uma certa regularidade é estabelecida entre as escolas, voltamos a manter contato com os professores que já tinham aceitado participar desta pesquisa. A resposta que recebemos foi desoladora, nenhum deles estava mais disposto a participar. As justificativas foram justas, muito trabalho extra era necessário. Recomeçamos a busca entre colegas e ex-colegas. Após alguns meses conseguimos dois novos professores, os sujeitos da pesquisa, que gostaram da pesquisa, tinham o perfil que desejávamos e se dispuseram a participar, eles mesmos fizeram ressalvas de tempo de dedicação que poderiam dispor. Felizmente um deles pertence a uma universidade privada e o outro à pública. Os perfis dos professores estão expressos no Q1 (um questionário com essa finalidade) do Anexo 1.

2.4.2 Ferramentas de coletas de dados

As ferramentas de coleta de dados, em acordo com a Metodologia da Investigação Reflexiva foram: Representação Esquemática dos Sistemas de Recursos (RESR), entrevistas semiestruturadas baseadas em questionários divididos em categorias (Anexo A) e nos acompanhamentos das aulas remotas.

A Representação Esquemática do Sistema de Recursos (RESR) do professor, também chamada de mapa de recursos, é de grande importância na MIR. Essa representação é feita pelo próprio professor na forma de desenhos ou esquemas, geralmente, com lápis e papel. O objetivo dessa representação consiste em permitir aos professores explicarem seus sistemas de recursos da forma como preferirem.

A RESR é uma ferramenta de coleta de dados que o professor faz, independentemente do pesquisador e que mostra seus recursos e estilos de uso. Apesar de não ser estruturada para o pesquisador, a forma da representação é estruturada para os professores, pois eles são livres para desenhá-la. Por ser uma representação livre de modelos específicos, ela também permite observarmos a relação entre os professores e seus recursos.

Entretanto, a RESR não fornece uma identificação completa do sistema de recursos do professor, portanto, sua análise deve ser complementada por outras ferramentas de coleta de dados, por exemplo, uma entrevista que confronte o professor e complemente a representação feita.

Acompanhamentos remotos das aulas virtuais dos professores universitários participantes da pesquisa ao introduzir o conceito de limite de uma função para as classes de situações que buscaremos identificar: aproximação, registros de representação, ponto de acumulação, vizinhança de pontos, definição formal, entre outras. Esses acompanhamentos visam a observar os professores em sua atividade profissional ao interagirem com recursos no ensino remoto.

No Anexo A apresentamos os três questionários: o Questionário 1 teve como objetivo traçar o perfil pessoal dos sujeitos da pesquisa e foi adaptado do "Formulário de Informações Pessoais dos Professores" indicado em Gueudet (2017). Nesse questionário é solicitado que cada professor descreva sua formação, sua experiência profissional, o perfil da sua turma de alunos, a modalidade de universidade em que trabalha (pública ou privada), restrições e regras institucionais e sociais, além de um questionamento sobre o trabalho coletivo na universidade em que trabalha. No Questionário 2 constam questões sobre os Sistema de Recursos do professor, mesmo antes do contexto pandêmico e o Questionário 3 visa a identificar a experiência do professor no ensino remoto, e busca informações desses sujeitos sobre aulas presenciais e remotas.

As entrevistas semiestruturadas têm a finalidade de envolver o professor ativamente na coleta de seus próprios dados, além de fazê-lo refletir sobre sua própria

prática. Na MIR, essa postura reflexiva do professor contribui para expor dados relevantes para a pesquisa.

A seção a seguir apresenta a implementação das ferramentas de coletas de dados selecionadas e descritas para a pesquisa.

2.4.3 Implementação e processos da coleta de dados

Para esta pesquisa, além dos princípios da MIR, consideramos a noção de contrato metodológico definido por Sabra (2016): *“um conjunto de expectativas mútuas entre o pesquisador e o participante, essencialmente implícitas a respeito de uma atividade, individual ou coletiva, ligada ao ensino de Matemática.”* (SABRA, 2016 p. 62, tradução nossa). Com base nessa perspectiva, os contatos com os professores se iniciaram na primeira semana do mês de março de 2021 por meio da troca de e-mails e de mensagens escritas e/ou de vídeos por *WhatsApp*. Nessas mensagens apresentamos um desenho da pesquisa, os objetivos, a metodologia e as ferramentas de coleta de dados buscando obter informações iniciais sobre início das aulas e tempo de experiência no ensino superior e no ensino de cálculo.

Os professores aceitaram participar da pesquisa e um primeiro encontro remoto e individual com cada professor foi marcado para a semana seguinte, um para o dia 09 de março e o outro para o dia 12 de março, ambos na parte da manhã. Ou seja, buscamos envolver os professores participantes da pesquisa, desde as etapas iniciais de implementação e coleta de dados, com o intuito de criarmos uma relação de confiança mútua e envolvê-los ativamente na pesquisa.

Nos respectivos encontros remotos, detalhamos para cada professor o estudo que seria desenvolvido, os tópicos, o objeto matemático, as ferramentas de coleta de dados e como a participação ativa deles nessa coleta e a subsequente reflexão sobre seus próprios dados seriam fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa. Mostramos, também, que a pesquisa seria desenvolvida com eles, uma vez que não se tratava de uma pesquisa sobre eles.

Para garantirmos a validade e a confiabilidade científica da pesquisa, explicamos detalhadamente a cada professor, nos respectivos encontros remotos, os processos e as ferramentas de coleta de dados e de que forma esses dados seriam analisados. Para garantirmos a validade e a confiabilidade científica dos dados, explicamos que as informações obtidas por meio das ferramentas de coleta de dados seriam confrontadas umas com as outras em uma espécie de triangulação.

A cada um dos professores, garantimos os seus respectivos anonimatos e que todos os dados obtidos não seriam expostos publicamente. Portanto, a partir desse ponto e por questões éticas, os professores serão designados para a pesquisa, como P1 e P2. Durante esse primeiro encontro, solicitamos os planos das aulas remotas de P1 e de P2 sobre a introdução ao estudo dos Limites de funções. No planejamento de P1 esse estudo se iniciaria por volta de 14 de abril; no plano de ensino de P2, as aulas remotas sobre essa introdução começariam no dia 12 de abril, como mostram as Figuras 5 e 6, respectivamente.

Figura 5 - Plano de Aula de P1

DATA	TÓPICOS
09/04	Aproximação: tabela de números e paradoxos de Zenão. .
10/04	Noção intuitiva do conceito de limite de uma função em um ponto de acumulação do domínio- Representação algébrica e gráfica
15/04	Propriedades dos limites- limites laterais
16/04	Limites fundamentais
22/04	Limites no infinito
23/04	Limites infinitos
29/04	Teoremas sobre limites
30/04	Avaliação

Fonte: Professor P1

Figura 6 - Plano de Aula de P2

Data	ATIVIDADE
12/04	Noção intuitiva de limite a partir das representações algébricas e numéricas.
13/04	Monitoria
14/04	Noção intuitiva de limite a partir da representação gráfica.
15/04	Monitoria
16/04	Cálculos usando propriedades dos limites
17/04	Monitoria
19/04	Ponto de acumulação, e Teorema do Confronto.
20/04	Monitoria
21/04	Definição formal de limite.
22/04	Monitoria
26/04	Continuidade
27/04	Monitoria
28/04	Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais.
29/04	Monitoria
30/04	Revisão

Fonte: Professor P2

Ao final desse primeiro encontro, solicitamos a cada professor que respondesse a 1ª questão do Questionário 1 sobre seus perfis e que refletisse sobre seu trabalho documental e desenhasse suas respectivas RESR, destacando que não havia forma certa ou errada de desenhá-la, pois o importante para a pesquisa é que

eles desenhasssem, com lápis e papel, ou como preferissem, e esboçassem seus sistemas de recursos mobilizados para o ensino introdutório de limites.

Solicitamos, também, que assim que respondessem as questões e desenhasssem a RESR, nos fossem enviadas por *e-mail*, pois em nosso segundo encontro pretendíamos dispor de elementos de análises e estarmos preparados, com perguntas sobre seus respectivos trabalhos documentais.

Às perguntas sobre as ferramentas buscamos responder de modo que os professores se sentissem livres e seguros para participarem como sujeitos da pesquisa.

Com base no Plano Pedagógico de cada professor, um segundo encontro remoto foi agendado para o mês de abril, na semana anterior ao início do desenvolvimento das aulas sobre limite e conforme a disponibilidade de cada um. P1 optou pelo dia 06 de abril e P2 pelo dia 07 de abril, ambos na parte da manhã. Solicitamos aos professores que apresentassem, nesses encontros, os respectivos esboços da RESR.

Os acompanhamentos das aulas remotas, ocorreram nos meses de Abril e Maio de 2021.

As aulas do professor P1 eram às terças e quintas-feiras, pela plataforma MS Teams e as do professor P2 às segundas, quartas e sextas-feiras na plataforma Google Education.

Essas aulas foram observadas e gravadas, por meio do recurso de gravação dos próprios *softwares* usados por eles. Durante o acompanhamento dessas aulas, capturas de tela foram feitas quando julgamos necessário para a composição das análises, além de anotações que denominamos de anotações do pesquisador. Essas anotações foram organizadas de modo a nos informar: dia do mês, os objetivos da aula, os recursos mobilizados pelos professores e possíveis esquemas de utilização inferidos.

Após o término de cada aula, realizamos entrevistas, com cerca de 20 a 40 minutos, que foram gravadas por meio de um aplicativo de gravação de voz no celular do pesquisador. Nessas entrevistas, buscamos envolver os professores na reflexão de seu trabalho documental, a fim de obtermos dados relevantes para as análises desta investigação, além de discutirmos aspectos, que consideramos interessantes, e que foram também observados em suas aulas. Outro objetivo das entrevistas foi garantir a confiabilidade e a validade dos dados coletados.

Os dados coletados foram transcritos e codificados de tal modo que, no momento das análises, os esquemas de utilização dos professores ao interagirem com os recursos durante as aulas para o ensino introdutório de limite pudessem ser revelados e identificados. Ou seja, na criação de seus documentos por meio das gêneses documentais.

O próximo capítulo apresenta, como parte de um estudo didático, um estudo histórico e epistemológico do desenvolvimento do Conceito de Limite, em que buscamos também inferir o seu campo conceitual que envolve as situações.

3 O CONCEITO DE LIMITE

Neste capítulo, mostramos brevemente a importância de uma análise epistemológica para pesquisas em educação matemática do conceito alvo desta investigação, o conceito de limite. Na sequência apresentamos um estudo histórico-epistemológico do desenvolvimento desse conceito, por meio do qual buscamos delimitar o seu campo conceitual do limite em que as situações devem organizadas para o ensino e aprendizagem.

3.1 A análise histórica e epistemológica

A análise epistemológica de um conceito tem sua importância na busca da compreensão de seu desenvolvimento histórico e das dificuldades encontradas nesse desenvolvimento. As dificuldades encontradas podem indicar a presença de obstáculos. De acordo com Artigue (1990):

[..] a análise epistemológica é, me parece, necessária ao educador matemático para o ajudar a colocar a distância e sob controle “as representações epistemológicas da matemática induzidas pelo ensino; a restaurar uma historicidade aos conceitos matemáticos, uma vez que o ensino usual tende a apresentá-los como objetos universais, às vezes no tempo e no espaço e igualmente às noções matemáticas como aquelas do rigor uma vez que o ensino usual cultiva a ficção de um rigor eterno e perfeito da matemática. (ARTIGUE, 1990, p.1)

O conceito de obstáculo epistemológico surge na filosofia da ciência na obra intitulada “A formação do espírito científico” de Gaston Bachelard (1996) que é o primeiro a interpretar a gênese do conhecimento científico com o apoio desse conceito. Segundo o autor, “*é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado.*” (BACHELARD, 1996 p. 14). O autor não considera os obstáculos externos, tais como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos e nem busca incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano e sim defender que “*é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos.*” (BACHELARD, 1996 p. 14). Mostra as causas de estagnação e até de regressão, além de permitir a detecção das causas de inércia, chamadas de obstáculos epistemológicos, do conhecimento científico. Isto é:

Ao retomar um passado cheio de erros, encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual. No fundo, o ato de conhecer dá-se *contra* um

conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (BACHELARD, 1996 p. 14)

Com base em exemplos históricos, são identificadas algumas categorias principais de obstáculos: a experiência primeira, o conhecimento geral, o obstáculo verbal e a extensão abusiva de imagens usuais, conhecimento unitário e pragmático, o obstáculo substancialista, psicanálise realista, o obstáculo animista e os obstáculos do conhecimento quantitativo. Entretanto, são excluídos os obstáculos epistemológicos intrínsecos ao desenvolvimento histórico da matemática. Para esse autor, seria necessário estudar, do mesmo ponto de vista crítico à formação do espírito científico, a formação do espírito matemático:

Com efeito, a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erros. Logo, nenhuma das teses que sustentamos neste livro se refere ao conhecimento matemático. Tratam apenas do conhecimento do mundo objetivo. (BACHELARD, 1996 p. 24)

Os pesquisadores em educação matemática irão, no entanto, importar a noção de obstáculo epistemológico para o estudo do ensino da matemática. Brousseau (1983), apoiando-se na noção de obstáculo epistemológico de Bachelard (1996), defende que os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados ao longo do desenvolvimento da história da matemática por meio da observação das dificuldades que os matemáticos encontraram na busca de compreensão e utilização de conceitos, pois para o autor, um obstáculo epistemológico é sempre um conhecimento ao invés de um estado de ausência de conhecimento. Por mais que os obstáculos possam ser observados nessas dificuldades, essas devem ser reformuladas a fim de serem caracterizadas como conhecimentos.

Um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, que se pode em princípio encontrar na história do conceito e do qual não se pode escapar. A noção de obstáculo permite analisar a gênese histórica de um conhecimento a partir de uma análise histórica.

Com o objetivo de identificar esses obstáculos, Brousseau (1983) propõe um método de pesquisa em que inicialmente deve-se encontrar erros sistemáticos e concepções em torno das quais determinados erros se agrupam, para, em seguida, buscar obstáculos no desenvolvimento da história da matemática e confrontá-los com os obstáculos que se manifestam durante o processo de aprendizagem. Portanto,

para o autor, a análise epistemológica possibilita ao pesquisador de educação matemática, a identificação de obstáculos nas dificuldades detectadas no processo de aprendizagem.

A noção de obstáculo proposta por Bachelard (1996), de que o problema do conhecimento científico deve ser colocado em termos de obstáculos, e a introdução da noção de obstáculo epistemológico por Brousseau (1983) contribuíram para uma convergência entre a epistemologia e a didática.

Na próxima seção apresentamos um estudo histórico-epistemológico do desenvolvimento do conceito de limite a partir das ideias iniciais do infinito e do Cálculo Diferencial e Integral. Ressaltamos que as próximas seções não visam reduzir a história desse desenvolvimento a uma simples narrativa, em que se destacam os principais fatos históricos que envolvem esse conceito, e sim se propõem a uma análise epistemológica.

Optamos por começar cada uma das subseções destacando aspectos históricos e ao final de cada uma mostrar os obstáculos associados a esses aspectos por meio dos estudos de Cornu (1983, 2002), Sierpiska (1985) e Artigue (1990).

3.2 Análise epistemológica do conceito de limite

As ideias iniciais que originaram o desenvolvimento epistemológico do Cálculo e que englobam, por exemplo, as relações conceituais entre limite, derivada e integral, levaram séculos para serem desenvolvidos e aceitos. Muitos questionamentos surgiram desde o pensamento grego antigo tais como o de separar o discreto e o contínuo, motivado pelo “horror ao infinito” (SIERPINSKA, 1985), até o desenvolvimento e formalização do Cálculo como o conhecemos atualmente.

O conceito de limite é um conceito basilar do Cálculo, pois os principais conceitos desse ramo da matemática, derivada e integral são definidos em termos de limites. Porém, o registro histórico nos mostra que não houve um desenvolvimento ordenado do Cálculo, partindo do conceito de limite para os demais, pois o conceito de limite não foi desenvolvido antes dos conceitos de derivada e integral.

Por muitos séculos, as noções de limite foram confundidas com ideias vagas ou ideias filosóficas relacionadas ao infinito sobre números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos, além de intuições geométricas subjetivas e indefinidas. O termo limite, como o conhecemos hoje, surgiu no século XVIII e início do XIX na

Europa, no entanto, o primeiro a utilizar a ideia de limite parece ter sido Zenão de Elea (c. 460 a.C.) por meio de seus Paradoxos. E foi por meio do desenvolvimento do Cálculo que os matemáticos conseguiram lidar adequadamente com os desafios propostos por esses Paradoxos.

O desenvolvimento histórico e conceitual do Cálculo e todo o processo de formalização e sistematização dos conceitos matemáticos envolvidos não podem ser atribuídos a uma única pessoa. De acordo com Boyer (1996):

[...] raramente – quem sabe nunca – um único matemático ou cientista foi intitulado por receber o crédito completo por uma inovação ou, nenhuma Era merece ser chamada de renascença em relação a determinado aspecto cultural. Por trás de qualquer descoberta ou invenção há, invariavelmente, um desenvolvimento evolucionário de ideias, tornando seu surgimento possível. A história do cálculo nos fornece uma notável ilustração desse fato. (BOYER, 1996, p. 299).

No que segue exploramos ideias iniciais dos conceitos envolvidos com limite

3.2.1 Ideias iniciais de infinito

No século V a.C., alguns filósofos antigos começavam a questionar o mundo a sua volta. Questões filosóficas relacionadas a cosmologia e divergências entre o senso comum e a ciência da época começaram a surgir. Esse século foi caracterizado por essas questões e pela necessidade dos filósofos de defender seus paradoxos contra os preceitos da visão não científica.

Os matemáticos gregos da época buscavam fazer uma analogia entre os pensamentos matemáticos e o mundo físico com o objetivo de explicar, por meio da matemática, o que eles consideravam como verdadeiro. Por exemplo, buscavam explicar, por meio de analogias, que o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis ou a existência de um menor elemento indivisível de tempo e de espaço. Nesse contexto, surgiram as ideias filosóficas iniciais que levaram ao desenvolvimento do Cálculo.

De acordo com Boyer (1996), Hípias (c.425 a.c.) ou algum outro por volta da sua época, mostrou que não era possível nenhuma comparação numérica exata da medida da diagonal com a do lado de um quadrado, um pentágono regular, um cubo ou um hexágono regular, em termos de números inteiros. A comunidade matemática grega ficou profundamente perturbada quando tomou conhecimento de que há coisas como segmentos de reta incomensuráveis e que a ocorrência dessas situações é

espantosamente comum. A questão da incomensurabilidade confrontou os matemáticos, diretamente com um processo infinito.

Enquanto o algoritmo euclidiano permitia encontrar o máximo divisor comum de dois números inteiros, por meio de um número finito de passos, uma vez que o conjunto dos números inteiros positivos tem um mínimo, o número 1, a aplicação de um esquema análogo e com roupagem geométrica para achar a maior medida comum a dois segmentos de reta, resultava em um processo infinito. Essa perspectiva de um processo infinito gerou a crise dos incomensuráveis, pois os matemáticos antigos não conseguiam replicar a ideia desse algoritmo aos sutis paradoxos de Zenão de Eléia propostos por volta da mesma época.

Zenão de Eléia (c. 460 a.C.) propôs uma série de Paradoxos³ com o intuito de argumentar sobre os conceitos de movimento e de tempo, e foi assim que as ideias iniciais que conduziram ao conceito de limite começaram a surgir.

As discussões relacionadas a esses Paradoxos afetaram as concepções da época, pois envolviam abstrações extrínsecas ao pensamento matemático grego. Segundo Caraça (2000), esses Paradoxos possuem um valor inestimável, pois nos mostram que:

[...] o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considerá-lo assim, equivale abordar seu estudo por um método estático que traz consigo o germen da infecundidade e da incompreensão (CARAÇA, 2000, p. 215).

De acordo com Boyer (1996), Zenão escreveu um livro que continha aproximadamente 40 paradoxos, mas esse se perdeu. O que sabemos de Zenão nos foi transmitido por Platão, Aristóteles e pelo comentador Simplicio do século VI.

Zenão era discípulo do grande filósofo Parmênides de Eleia (c.450 a.C.), que defendia que a pluralidade, ou seja, o estado de haver muitas coisas distintas ao invés de uma só não existe, portanto, para esse filósofo, qualquer mudança é impossível.

Parmênides foi filósofo, poeta e o fundador da Escola Eleática. O princípio fundamental dos Eleáticos era a unidade e a permanência do ser, ponto de vista que contrastava profundamente com as ideias pitagóricas de multiplicidade. O ponto de partida de Parmênides era a razão, o intelecto, em oposição à observação. Para esse

³ A palavra Paradoxo vem do grego “Paradoxos”, que significa contrário à previsão ou à opinião comum, portanto é uma afirmação que parece ser contraditória, incrível ou absurda, isto é, é tão absurda que jamais poderá ser verdadeira (Fonte: <https://www.dicio.com.br/paradoxo/>).

pensador, apesar de nossos sentidos veem uma mudança aparente, isso seria pura ilusão, pois a realidade não poderia mudar. Houve três teorias de Parmênides que ficaram famosas: “o ser e o não ser” que buscava comparar qualidades opostas e ordenava-as, por exemplo, o masculino em oposição ao feminino e cada um apenas com a negação do outro, em que o não ser era uma oposição do ser; “o vir a ser” que segundo Parmênides era quando o “ser e o não ser” agiam conjuntamente; e “o ser-*absoluto*” que era a unidade eterna. Os eleatas defendiam a unidade do espaço, que deveria ser indivisível, e a permanência do ser no tempo, ou seja, a ausência de mudança.

Por meio de seus Paradoxos, Zenão buscava defender as ideias de seu mestre, atacando a ideia de movimento e de pluralidade de pontos em uma reta. Para tanto, ele buscou mostrar que se o conceito de contínuo e de divisão infinita forem aplicados ao movimento de qualquer corpo, então o movimento não existe; ou atacar a pluralidade de pontos em uma reta, buscando deduzir uma consequência que contradissesse sua suposição, levando assim a uma redução ao absurdo. Segundo Boyer (1996):

O método adotado por Zenão era dialético, antecipando Sócrates nesse modo indireto de argumento: partindo das premissas de seus oponentes, ele as reduzia ao absurdo. [...] Zeno propôs seus paradoxos, dos quais aqueles sobre o movimento são citados mais frequentemente. Na forma em que chegaram a nós, através de Aristóteles e outros, quatro parecem ter causado maior perturbação: (1) a Dicotomia (2) o Aquiles (3) a Flecha (4) o Estádio. (BOYER, C. B., 1996, p. 51).

Os dois primeiros Paradoxos refutam a suposição de que espaço e tempo são infinitamente divisíveis, enquanto os outros dois, mostram que espaço e tempo não podem ser compostos por elementos mínimos indivisíveis.

Dos Paradoxos do movimento, os 4 que chegaram até nós são:

- . Paradoxo da Dicotomia;
- . Paradoxo de Aquiles e da tartaruga;
- . Paradoxo da Flecha;
- . Paradoxo do Estádio.

No Paradoxo da Dicotomia, Zenão discute o movimento de um objeto que se move entre dois pontos fixos. Esse Paradoxo afirma que para um objeto percorrer determinado espaço, deve percorrer a primeira metade, porém, antes disso, o objeto deve percorrer metade da metade desse espaço e, antes disso, a metade da metade

da metade e assim indefinidamente por meio de infinitas subdivisões, ou seja, o movimento não começa nem a começar. Nesse Paradoxo, Zenão ataca o fato do espaço ser infinitamente divisível, apresentando um raciocínio que, partindo dessa ideia, chega-se à impossibilidade do movimento, o que é um paradoxo.

O Paradoxo de Aquiles assemelha-se ao da Dicotomia. A diferença consiste no fato de as bissecções serem progressivas ao invés de regressivas: “Se Aquiles, o corredor mais veloz da Ática, apostar corrida com uma lenta tartaruga, nunca mais conseguirá alcançá-la, por mais depressa que corra”. Quando Aquiles chegar ao local de onde a tartaruga partiu, essa já terá avançado um pouco mais e se encontrará em outra posição mais adiante dele e, quando Aquiles percorrer essa mesma distância, a tartaruga já terá realizado um novo avanço e assim esse processo continuará indefinidamente. Desse modo, conclui-se que Aquiles jamais poderá atingir a lenta tartaruga.

Portanto, nesses dois Paradoxos, Zenão argumentou que o movimento seria impossível caso o tempo e o espaço fossem divisíveis: se sairmos de um ponto A, para alcançarmos o ponto B, necessariamente teremos que alcançar o ponto C, que é o ponto médio entre A e B; para alcançar C é necessário alcançar D, que é o ponto médio entre A e C; para alcançar D é necessário alcançar E, que é o ponto médio entre A e D. Esse argumento continua, assim, infinitamente. Portanto, com essas considerações de Zenão, o movimento não chegaria nem a começar.

Nos Paradoxos da Dicotomia e de Aquiles, encontramos a ideia de que mesmo em distâncias muito pequenas entre dois pontos, sempre existirão infinitos pontos colineares compreendidos entre eles em que as distâncias entre esses pontos serão ainda menores, e assim sucessivamente. Portanto, ideias iniciais relacionadas às noções básicas de infinito.

No Paradoxo da Flecha, Zenão argumenta que se o tempo é formado por instantes indivisíveis, então uma flecha voando ao encontro de um alvo está, na verdade, parada, pois se a cada instante a flecha ocupa uma determinada posição fixa, então a cada instante, a flecha está parada. Para Zenão, sendo isso verdadeiro, a flecha está sempre parada. O objetivo desse Paradoxo consistiu em provar que, se o tempo é constituído de instantes e o espaço por mínimos indivisíveis, então um corpo em movimento está, na verdade, em repouso. Esse Paradoxo também levou à reflexão sobre a natureza do movimento e à ideia de velocidade instantânea.

Atualmente, definimos o movimento de um corpo pela sua velocidade e não pela mudança do espaço que esse ocupa.

De acordo com Boyer (1996), dentre todos os Paradoxos, o Paradoxo do Estádio é possivelmente o mais complexo de se descrever. É o seguinte: considerem-se três filas de objetos idênticos, uma fileira paralela à outra. A primeira fila contém T_1, T_2, T_3, T_4 corpos idênticos entre si e imóveis; a segunda fileira contém T_5, T_6, T_7, T_8 corpos, também idênticos entre si e aos da primeira fileira, que se move num dos sentidos de modo que cada corpo da segunda fileira passa por um corpo da primeira num instante (unidade de tempo indivisível). Sejam $T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}$ também corpos idênticos aos oito primeiros e entre si, que se movem uniformemente na mesma direção, mas em sentido oposto aos corpos da segunda fileira, de maneira que cada corpo da terceira fila passa por um corpo da primeira num instante de tempo. Num dado momento, os corpos ocupam posições relativas. Dessa forma, decorrido um instante de tempo, cada um dos corpos em movimento passa por um corpo da fila em repouso e, portanto, um corpo de uma fila passa por um corpo da outra fila em metade desse tempo. Então, a unidade de tempo é igual ao seu dobro. Assim, passado apenas um instante de tempo, ou seja, decorrida uma subdivisão do tempo, T_9 , por exemplo, terá passado pelos corpos T_5 e T_6 e assim indefinidamente, ou seja, não é possível adotar uma unidade mínima de tempo.

De acordo com Boyer (1996), os Paradoxos de Zenão influenciaram profundamente a matemática grega. Para esse autor, essa influência tem a importância semelhante à descoberta dos incomparáveis:

As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em Os Elementos os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos (BOYER, 1996, p.52).

Para os gregos, toda teoria de número é incorporada em estruturas geométricas e todos os conceitos impraticáveis na geometria não são aceitos. Nesses contextos, em nenhum momento a ideia de infinito é aceita ou estudada.

Entretanto, a ideia de infinito e como defini-lo e interpretá-lo começou a surgir na filosofia da época justamente devido a esses questionamentos e analogias. Mesmo não aceitando essa ideia, os antigos matemáticos gregos se deparavam com questões que a envolviam. De um ponto de vista atual da análise matemática, termos

como “tender ao infinito” faz parte do ensino tradicional do conceito de limite. Porém, os antigos matemáticos continuaram a encontrar dificuldades quando se deparavam com situações que tendiam ao infinito.

Hipócrates de Chios (470 a.C. – 410 a.C.) buscou fornecer uma solução para esse tipo de situação provando que a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados dos seus diâmetros. Para tanto, ele inscreveu nos dois círculos, polígonos regulares semelhantes e aumentou indefinidamente o número de lados desses polígonos. A cada aumento, a razão dos dois polígonos inscritos era igual à razão dos quadrados dos diâmetros dos dois círculos. Considerando as áreas dos círculos, em determinado momento, os aumentos pareciam resultar em um limite. Entretanto, Hipócrates não conseguiu comprovar seu argumento, pois a ele faltava o conceito de limite.

Segundo Roque (2012), Hipócrates acreditava no princípio da continuidade, portanto ele não considerava inconveniente usar o método de aproximação de áreas de círculos por áreas de polígonos com um número de lados que crescia indefinidamente. De acordo com a autora, Eudoxo buscou aprimorar os procedimentos infinitos usados por Hipócrates ao perceber a dificuldade de extensão do método de aumentar indefinidamente o número de lados.

Eudoxo sugeriu uma abordagem que servia, essencialmente, aos mesmos propósitos de um processo infinito. Para tanto, ele buscou evitar a discussão sobre a natureza dos irracionais e sobre a validade dos processos infinitos e definiu a igualdade entre duas razões de uma maneira engenhosa: por meio do axioma muitas vezes conhecido como “lema de Arquimedes” (definição 4 do livro V dos *Elementos* de Euclides) que diz que “...grandezas têm uma razão, uma para a outra, se, por multiplicação, uma for capaz de exceder a outra.”

O método de Eudoxo consistia em inscrever polígonos regulares em uma figura curvilínea, como um círculo e ir dobrando o número de lados até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada. Esse método ficou conhecido no século XVII como “Método da Exaustão” e se baseia no fato de que o infinito não pode ser levado à exaustão, ou seja, não pode ser exaurido, pois por mais que nos aproximemos, nunca chegaremos a ele.

Para Caraça (2000), esse método foi uma

[...] tendência para fugir de tudo aquilo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas; em particular, do conceito de infinito, não porque se banisse da Filosofia tal conceito, mas porque se renunciou a abordar um estudo quantitativo dele e se passou a eliminá-lo sistematicamente dos raciocínios matemáticos; da Matemática grega veio-nos um método de raciocínio – o Método de Exaustão - que não tem outro objectivo. (Caraça, 2000 p.217)

O Método de Exaustão também ficou conhecido como “Postulado de Arquimedes” e podemos considerá-lo como uma resposta aos Paradoxos de Zenão. Segundo Boyer (1996),

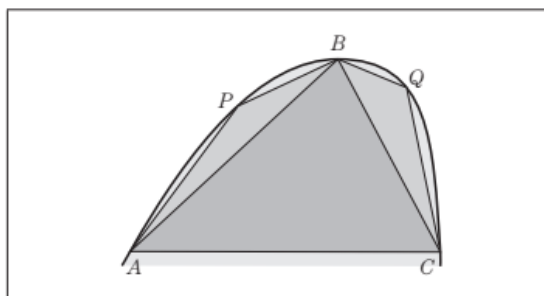
Eudoxo com certeza utilizou essa definição, que realmente é uma suposição, de maneira muito semelhante à empregada por Euclides no Livro X.1 (e ainda posteriormente por Arquimedes) para provar o procedimento básico no “método de exaustão”, o equivalente grego do Cálculo: *Consideradas duas grandezas, se da maior subtraímos uma grandeza maior que sua metade, e da que resta uma grandeza maior que sua metade, e se este processo é repetido continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor das grandezas consideradas.* (Boyer, 1996 p. 55)

Arquimedes (287 – 212 a.C.) aplicou elegantemente o Método de Exaustão, como uma forma primitiva de integração, em problemas que envolviam o cálculo de áreas e volumes. Esse método, embora servisse perfeitamente às necessidades de ordem prática, uma vez que permitia encontrar valores aproximados de grandezas incommensuráveis, deixava em aberto o problema de natureza dessas mesmas grandezas. Esse tipo de problema só foi completamente resolvido no século XIX.

Com relação às provas rigorosas das fórmulas de determinadas áreas e volumes, Arquimedes encontrou diversas séries infinitas, ou seja, somas que contêm um número infinito de parcelas. Porém, ele nunca aceitou esse fato. Para lidar com esse contexto e na ausência do conceito de limite, ele utilizou um método mecânico de demonstração indireta denominado “*dupla redução ao absurdo*”.

Dentre os tratados que se ocupavam principalmente do Método de Exaustão, destacamos o mais popular, o da “*Quadratura da parábola*”:

As secções cônicas eram conhecidas havia mais de um século quando Arquimedes escreveu, mas nenhum progresso fora feito no cálculo de suas áreas. Só o maior matemático da Antiguidade conseguiu resolver a questão de quadrar uma secção cônica – um segmento de parábola – [...] Arquimedes não falou em soma de série infinita, pois processos infinitos eram malvistas em seu tempo; em vez disso, ele provou por uma dupla *reductio ad absurdum* que K (área do segmento parabólico APBQC – figura A) não pode ser nem maior nem menor que $\frac{4}{3}$ T (área de um triângulo ABC – Figura A)



(BOYER, 1996, p. 88).

Na *Quadratura da parábola*, Arquimedes calcula a área do segmento parabólico, como mostra a Figura A, inscreve sucessivos triângulos no segmento de parábola, calcula a área desses triângulos e vai obtendo valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos. Desse modo, ele demonstra que a área do segmento de parábola é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo com a mesma base e com a mesma altura do segmento. Entretanto, Arquimedes não prolonga as somas até o infinito, apenas deduz o seu valor demonstrando que esse não pode ser nem maior, nem menor que $\frac{4}{3}$.

Os métodos empregados por Arquimedes contribuíram para as ideias iniciais da noção de limite, pois ele trabalhou com quantidades infinitamente pequenas. Nas demonstrações rigorosas das fórmulas para certas áreas e volumes, algumas séries infinitas foram encontradas e, mesmo sem uma definição formal para o conceito de limite, desenvolveu argumentos muito engenhosos por meio da redução ao absurdo duplo. Esses argumentos apresentam muito das técnicas empregadas atualmente nos cálculos de limites.

Porém, de acordo com Ávila (1999, p. 43), esse método de demonstração indireta, com dupla redução ao absurdo, embora proporcione rigor, exige conhecimento prévio do que se pretende demonstrar, portanto “*não serve como instrumento de descoberta*”. O método mecânico de Arquimedes, ao contrário, permite descobrir resultados novos. Esse método exige a decomposição de figuras planas em segmentos retilíneos ou de volumes em áreas. Desse modo, os corpos geométricos são constituídos de elementos indivisíveis, como os segmentos retilíneos das figuras planas ou áreas em se tratando de sólidos. Porém, essa concepção esbarrava nas dificuldades que o infinito trazia para o raciocínio matemático na época, uma vez que perguntas de como se obter o volume de um sólido, somando-se uma infinidade de áreas ou volumes infinitamente pequenos, não podiam ser respondidas por meio

desse método. Arquimedes utilizava seu método como instrumento útil de descoberta e manifestava sua eficácia, inclusive nas mãos de outros matemáticos.

O Método de Exaustão ilumina o conceito de limite, porém atualmente, nenhum estudo comprova que os gregos possuíam um conceito formal desse conceito. O método empregado consistia em um método geométrico que possibilitava a prova de resultados que, além de desconsiderarem o problema do infinito, era aplicado a casos específicos relacionados a contextos geométricos.

Apesar dos matemáticos gregos já se depararem com as ideias intuitivas do conceito de limite, nenhum estudo mostra que eles tinham a intenção de estudá-lo, mesmo porque naquela época as ideias de infinito eram inadmissíveis.

Mas é fato que as definições de limite, como as conhecemos hoje, pressupõem a ideia de infinito. Arquimedes, mesmo não aceitando as ideias de infinito, fez o primeiro uso inédito e significativo da ideia de limite de uma sequência infinita de números, ou seja, 19 séculos antes de Newton e Leibniz apresentarem suas próprias sistematizações para o Cálculo Diferencial e Integral.

Os estudos de Arquimedes constituíram a principal fonte de inspiração e incentivo para a Geometria do século XVII, uma vez que desempenharam um papel muito importante para as ideias iniciais de infinito e de limite. Portanto, podemos assim dizer que o Método de Exaustão foi fundamental para os processos essenciais do Cálculo Infinitesimal.

Nas obras de Kepler, Galileu, Cavalieri e de muitos outros, um novo método dos indivisíveis começou a ser apresentado e desenvolvido. Nessa época, os escritos de Arquimedes voltavam a ser conhecidos, estudados e admirados, exercendo grande influência na investigação matemática e no desenvolvimento de uma nova análise dos indivisíveis.

Segundo Baron e Bos (1985), Simon Stevin (1548 - 1620), que analisava a matemática sempre para fins práticos, utilizou o método de Arquimedes para determinar os centros de gravidade de figuras planas, dando assim o primeiro passo radical para modificar a estrutura de demonstração de Arquimedes. Porém, enquanto Arquimedes considerava sempre um número finito de termos, Stevin toma um número infinito, no sentido de Aristóteles, ou seja, o de infinito potencial, que não apresenta nenhuma realidade física, pois é apenas uma construção do espírito necessária à resolução de certos problemas. O infinito potencial era admitido apenas no caso de grandezas contínuas infinitamente pequenas e de números infinitamente grandes.

Em sua demonstração, Stevin, embora mantivesse o Método de Exaustão, o elemento de redução era, aos poucos, substituído pela passagem direta ao limite.

Johannes Kepler (1571 – 1630) e Galileo Galilei (1564 - 1642) introduziram o uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas, ou seja, foram os primeiros a abandonar a demonstração proposta por Arquimedes.

Kepler utilizou o Método de Exaustão, porém considerou somas infinitas à custa de métodos intuitivos. Seu método consistia em considerar as áreas como somas de retas, outra forma de integração.

Na época do Renascimento (século XV), muitos outros matemáticos calcularam áreas e volumes por meio do Método de Exaustão, decompondo figuras em infinitesimais ou em indivisíveis (como também eram chamados). Dentre os mais conhecidos, Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675) e Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) que foi quem deu ao método de Eudoxo o nome de Método de Exaustão.

De acordo com Boyer (1992), Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) escreveu um tratado que abordou os indivisíveis ou infinitesimais fixos aplicados com êxito em problemas de mensuração de áreas e volumes. Esse tratado, que hoje em dia é conhecido como “teorema de Cavalieri”, mostra que é permitido passar de uma estrita correspondência de indivisíveis numa dada razão à conclusão de que todos também estavam entre si nessa mesma razão.

A obra mais conhecida de Cavallieri, conhecida como “*Geometria indivisibilibus continuorum nova*”, apresenta a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Nessa obra, uma linha é um conjunto infinito de pontos, uma superfície um conjunto infinito de linhas e um volume um conjunto infinito de planos.

Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos indivisíveis. Nos dias atuais, o método usado por ele é escrito como $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Entretanto, para calcular uma área, por exemplo, em vez de somar esse número infinito de linhas, ele compara a superfície com outra que tenha o mesmo número de linhas.

Conforme Boyer (1996), Cavalieri aplicou a ideia dos indivisíveis a uma ampla gama de problemas suscitados por outros matemáticos como Pierre de Fermat (1601 – 1665), Roberval (1602 - 1675), John Wallis (1616 - 1703) e Évangelista Torricelli (1608 – 1647). Portanto, podemos afirmar que o método dos indivisíveis não era

propriamente de Cavalieri, pois estava sendo amplamente usado por pensadores matemáticos da época.

Fermat, Roberval, Wallis e Torricelli usaram métodos que usavam técnicas de cubatura ou quadratura que se aplicavam a regiões ou sólidos específicos, porém sem nunca terem usado limites. Quase todos os resultados encontrados estavam corretos, entretanto, dependiam de uma argumentação não algébrica e—que podia ser questionada em algum ponto crítico.

O método usado por Grégoire de Saint-Vincent consistia em preencher exaustivamente uma linha curva, não de pontos, mas de segmentos de reta e se referia explicitamente à soma de um número infinito de grandezas. Essa abordagem impulsionará o desenvolvimento do Cálculo Integral, em que se decompõe uma figura em um número infinito de elementos e se soma efetivamente esse número infinito.

Boyer (1996) afirma que a consequência lógica dessas ideias foi a Geometria Analítica de Pierre de Fermat (1601 – 1665) e René Descartes (1596 - 1650) que, por meio de estudos sobre curvas, superfícies e sólidos, desenvolveram a geometria desses objetos. Esses estudos acarretaram o desenvolvimento da Geometria Analítica.

O destaque para Fermat advém das contribuições quanto aos métodos de integração iniciados por Eudoxo dois milênios antes. Atribui-se também a Fermat o processo que hoje chamamos de diferenciação.

Fermat, possivelmente, estava de posse de sua geometria analítica desde 1629, pois por essa época, ele fez duas descobertas significativas que se relacionavam de perto com seu trabalho sobre lugares. A mais importante dessas foi descrita alguns anos depois em um tratado, também não publicado durante sua vida, chamado *Méthode de quadrature* (1658). Nesse tratado, Fermat considerou lugares dados por equações na forma $y = x^n$ (em notação moderna).

Atualmente são frequentemente chamadas “*parábolas de Fermat*”, se n é positivo ou “*hipérboles de Fermat*” se n é negativo. Aqui temos uma geometria analítica de curvas planas de grau superior.

Fermat quadrou qualquer tipo de parábola ($y = px^k$) e hipérbole ($y = px^{-k}$), usando uma propriedade bem conhecida da progressão geométrica, antecipando os resultados que hoje obtemos quando calculamos a integral imprópria da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida pela lei $f(x) = x^k$, em que $k \in \mathbb{Q}$, $k \neq -1$. Em sua obra

“*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii*”, Grégoire de Saint Vincent resolveu o caso para $n = -1$.

Descartes publicou *La géométrie* em 1637, somente dois anos depois da publicação da *Geometria indivisibilis*, de Cavalieri, mudando inevitavelmente o curso da análise infinitesimal. A geometria pura foi sendo ofuscada e pouco desenvolvida no século seguinte. A análise infinitesimal entrou em um processo de aritmetização quase resultando em uma revolução.

Para Descartes, o problema de encontrar a normal (ou tangente) a uma curva era de grande importância. Porém, segundo Boyer (1996), o método que ele publicou em *La géométrie* era menos eficiente que o que Fermat havia desenvolvido na mesma época.

Portanto, na época do Renascimento, os matemáticos buscaram estudar a geometria das curvas. Esses estudos contribuíram para o desenvolvimento dos conceitos de derivada, de integral, do cálculo dos máximos e mínimos sobre uma curva; contribuíram também para encontrar a normal e a tangente a uma curva, pontos de inflexão de uma curva (com a correspondente necessidade da segunda derivada); desenvolveram o estudo das superfícies e de sólidos; calcularam áreas e volumes utilizando processos semelhantes ao Método de Exaustão, decompondo as figuras em infinitesimais.

Porém, apesar desses estudos apresentarem formas apropriadas de se obter os respectivos resultados, a necessidade da ideia de limite não foi percebida. Ressaltamos que os resultados apresentados dependiam de uma argumentação não algébrica, pois recorriam, muitas vezes, à intuição geométrica ou filosófica, questionáveis em algum ponto crítico. A necessidade da ideia de limite e o rigor possibilitado por essa ideia eram necessários.

Segundo Boyer (1996), nenhum achado novo específico era necessário, pois as técnicas estavam disponíveis, faltando apenas um senso de universalidade das regras, necessitava-se sim, de um algoritmo geral aplicável indistintamente a todas as funções, racional ou irracional, algébrica ou transcendente.

Os Paradoxos de Zenão propiciaram questionamentos e conflitos sobre as ideias de infinito, contínuo, número, tempo e movimento. Os estudos de Hipócrates, Eudoxo e, principalmente, o de Arquimedes influenciaram os matemáticos renascentistas que também tiveram que lidar com a ideia de infinito. Essas ideias serão fundamentais para o desenvolvimento do conceito de limite até sua definição

formal e atual, pois envolvem a ideia de aproximação (ε e δ), ou seja, de convergência; infinito; infinitesimal (uma linha reta finita composta por infinitos números e de indivisíveis pontos); contínuo (dependência da existência dos números irracionais).

Os questionamentos envolvendo a ideia de infinito, possibilitaram a identificação de obstáculos epistemológicos no desenvolvimento da noção de limites e que estão presentes nos processos de ensino e de aprendizagem dessa noção como mostram alguns estudos.

Sierpinska (1985) destaca em seus estudos “o horror ao infinito” a partir de questões relacionadas à ideia de infinitamente pequeno ou questões sobre se o limite deve ou não ser alcançado. Para a autora, a passagem ao limite é um método de demonstração rigorosa que segue um esquema que elimina o problema do infinito, o que acaba gerando um obstáculo. Esse tipo de obstáculo se manifesta no Método da Exaustão, pois, conforme a autora, nesse método o problema do infinito é eliminado.

Ainda em relação ao “horror ao infinito”, a autora mostra as dificuldades apresentadas no que diz respeito às “simplificações algébricas” no cálculo de limites. Em sua pesquisa, a autora menciona que os alunos não reconhecem as situações de indeterminação presentes em cada um dos limites e buscam interpretar e resolver as indeterminações por meio de uma álgebra do infinito. Nesse caso, o interessante é que o infinito passa a se comportar como número.

Para Cornu (1983), a ideia de infinito surgiu como sendo mais da metafísica ou filosofia que da matemática. Portanto, os matemáticos gregos mostraram grande relutância para a aceitação dessa ideia, o que os levou a evitar o infinito no raciocínio matemático. O autor considera esse fato como fonte geradora de um obstáculo que dá um caráter metafísico à noção de limite.

No sentido de Bachelard (1996), destacamos os conflitos que os Paradoxos de Zenão provocaram ao questionarem se o espaço e o tempo seriam contínuos ou discretos. Segundo Caraça (2000), em muitos casos, os alunos não sabem responder o que é um número real, pois desconhecem o conceito de continuidade no processo de construção desse conjunto.

O Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga mostra as dificuldades e a importância da dicotomia convergência/divergência. Nesse Paradoxo, encontramos a ideia de que se somarmos uma quantidade infinita podemos obter uma grandeza finita. Nessa perspectiva, ressaltamos a ideia implícita de convergência de uma soma infinita.

Cornu (1983) caracteriza como obstáculo, a ideia de que qualquer convergência é monótona e não atinge o limite, ideia essa que, segundo o autor, prevalecerá até os estudos de Cauchy. Outro grande obstáculo consiste na dificuldade que os alunos têm de perceberem que a soma infinita pode ser finita.

Com relação à dicotomia divisíveis/indivisíveis, os estudos de Cavalieri, Torricelli, Roberval e Saint-Vincent, mostraram que grandezas podem ser divisíveis, contrariando as ideias de que espaço e tempo são indivisíveis como apresentadas nos Paradoxos de Zenão. Os resultados desses estudos foram fundamentais para o desenvolvimento do conceito de limite.

Os fatos históricos apresentados nessa seção evidenciam outro aspecto relacionado ao desenvolvimento da ideia de limite: uma visão geométrica grega que é ao mesmo tempo subjetiva e intuitiva, e que apresenta questionamentos quanto ao seu rigor. Nesse contexto, destacamos Artigue (1990), quando chama a atenção para o fato de o ensino usual cultivar uma ficção de um rigor eterno e perfeito da matemática.

Na próxima seção apresentamos os fatos e os aspectos históricos-epistemológicos que contribuíram para a definição formal do Conceito de Limite em que se destaca a transição do Cálculo para a Análise por meio da transposição de geométrica para a numérica.

3.2.2 O desenvolvimento formal de limite

Baron e Bos (1985) observam que a tradição atribuiu a Newton e Leibniz um papel central na "invenção" do Cálculo, ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com esses dois homens.

Isaac Newton nasceu em 1642 em *Woolsthorpe, Lincolnshire*, no interior de Inglaterra, formou-se na Universidade de *Cambridge* em 1665. Nesse mesmo ano, ele desenvolveu o Teorema do Binômio. Esse teorema proporcionou uma maneira nova e eficaz de calcular logaritmos com exatidão e trabalhar com números de muitas casas decimais. No ano anterior, 1664, Newton (1642 - 1727) expressou funções em termos de séries infinitas. Nessa mesma época e simultaneamente a Newton, que dificilmente pudesse saber disso, Grégoire Saint Vincent fazia o mesmo na Itália.

Por volta de 1666, Newton também começou a desenvolver estudos sobre taxas de variação, ou fluxo, de quantidades contínuas, variáveis ou fluentes, tais como

comprimentos, áreas, volumes, distâncias e temperaturas. Ao juntar esses dois tipos de problemas, séries infinitas e taxas de variação, Newton sintetizou um estudo coerente baseado no que ele chamou de “método das fluxões”, em que as noções de movimento desempenharam um papel central e significativo.

De acordo com Boyer (1996), o primeiro livro em que Newton delineia seu cálculo foi o *“De analysi pera equationes numero terminorum infinitas”*, publicado em 1711. Nessa obra, o autor descreve a extensão do uso da palavra “análise”, argumentando que os algoritmos matemáticos que lidam com processos infinitos são tão respeitáveis quanto aqueles que se aplicam à álgebra ordinária, concedendo assim, um espaço considerável ao método das “séries infinitas”. Baron e Bos (1985) nos dizem que o método das séries infinitas, como ferramenta no desenvolvimento de métodos sistemáticos de integração, foi uma ferramenta indispensável para Newton na quadratura das curvas e na retificação dos arcos.

Panza (2010), nos diz que os principais resultados, para o que mais tarde veio a constituir-se no método das fluxões, foram obtidos por Newton entre o final de 1663 e o outono de 1666. Segundo o autor, a introdução do termo “fluxão” ocorreu simultaneamente a uma importante mudança conceitual na compreensão de Newton sobre seus próprios feitos matemáticos e foi utilizado:

[...] primeira vez no *De methodis*, um tratado composto provavelmente no inverno de 1670-1671 (MP, 3, p. 3-372), e que não foi publicado durante a sua vida, só foi publicado em 1736 (cf. Newton, 1736). O termo “fluxão” desempenhará nesse tratado e nas exposições finais da teoria de Newton o mesmo papel que outros termos tais como “movimento”, “determinação do movimento” e “velocidade” desempenharam, *mutatis mutandis*, em seus primeiros apontamentos (PANZA, 2010 p. 510).

O *De methodis* foi escrito em 1671 e decorre da revisão de outro tratado que Newton deixara inacabado por volta de outubro e novembro de 1666: *“The october 1666 tract on fluxions”*, assim intitulado por Whiteside⁴. Nesse período, Newton já obtivera os principais resultados que mais tarde seriam expostos no *The methodis* que, de acordo com Panza (2010, p. 509), *“todos consideram a melhor apresentação da sua teoria das fluxões”*.

⁴ Conforme Panza (2010), todas as referências a essa edição dos manuscritos matemáticos de Newton, intitulada *The mathematical papers of Isaac Newton* foram conservadas e publicadas por Whiteside (1967-1981).

Newton trabalhou a ideia de curvas por movimento: se x, y, z são os *fluentes*, ou seja, são variáveis que aumentam ou diminuem com o tempo, então $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ representam as *fluxões* ou velocidades.

Em seu método das fluxões, Newton resolveu o problema da determinação da tangente a uma curva de equação $f(x, y) = 0$, uma vez que para ele uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, x e y eram fluentes, ou seja, quantidades que fluem com o tempo e a taxa de variação desses *fluentes* que chamou de fluxo de fluentes. Introduziu ainda, o chamado momento de um fluente, que era o incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente em um intervalo de tempo infinitamente pequeno. Newton declarou que usava esse método na quadratura de curvas. Desse modo, ele estabeleceu a questão fundamental que atualmente traduz o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC): dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões e inversamente. Geometricamente, o TFC permite resolver os dois tipos de problemas, o do cálculo de áreas sob uma curva e o do traçado da tangente à curva.

O método das fluxões de Newton aproxima-se bastante da ideia de derivada. Entretanto, apesar de Newton apresentar as ideias iniciais sobre a noção de limite ao retomar os “infinitamente pequenos”, essa noção não é explicitamente tratada nessa obra. Até esse ponto, Newton não tinha reconhecido o papel fundamental do conceito de limite, pois para séries infinitas raciocinou da mesma maneira que para polinômios. Nesse método e na maioria dos seus outros trabalhos ele negligenciou esse conceito.

Pois,

[...] Em 1676 Newton escreveu ainda uma terceira exposição de seu Cálculo, sob o título '*De quadratura curvarum*' e dessa vez tentou evitar tanto quantidades infinitamente pequenas quanto quantidades que fluem, substituindo-as por uma doutrina de '*primeira e últimas razões*'. [...] (BOYER, 1996, p. 273):

Nessa obra, Newton realmente se aproxima do conceito de limite, a única objeção seria o uso da palavra “desaparecer” em que se questiona se realmente existiria uma razão entre incrementos que desapareceriam. Esse questionamento não foi esclarecido por Newton, fato esse que continuou a perseguir os matemáticos durante todo o século XVIII.

A ideia de limite só foi reconhecida por Newton em 1687 em sua obra *Principia Mathematica*, talvez a maior obra em Ciência e Matemática. No início do livro I,

Newton reconhece que o ponto de partida para questões que envolvem tangência, quadratura, entre outros, é o conceito de limite e busca defini-lo da seguinte forma:

Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do final desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais (NEWTON, 2008 p.71).

Em sua definição, Newton reconhece o papel fundamental que o conceito de limite desempenhava no desenvolvimento lógico do cálculo. E, mesmo apresentando uma linguagem arcaica, o início da definição moderna desse conceito estava presente em suas afirmações.

As principais contribuições de Newton foram: um sistema lógico em que os problemas propostos por ele e por outros matemáticos podiam ser resolvidos; o fato de ser possível, dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões e inversamente, ou seja, a relação entre os conceitos de derivada e integral; o uso de uma linguagem algébrica e de técnicas analíticas para resolver questões ligadas à Geometria.

Newton reconheceu a necessidade de um tratamento sistemático para todas as questões referentes às propriedades das linhas curvas e desde o início dos seus estudos estabeleceu tabelas de resultados, que lhe possibilitassem a integração e diferenciação diretas, com o objetivo claro de estabelecer regras compreensivas por meio das quais todas as propriedades identificáveis das curvas que conhecia pudessem ser deduzidas com o mínimo de esforço.

Baron e Bos (1985) resumem, assim, as contribuições de Newton, para o desenvolvimento do Cálculo:

1. Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para cobrir as soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal que eram conhecidos no seu tempo;
2. Embora muitas dessas regras tivessem sido estabelecidas ou introduzidas de uma ou de outra maneira pelos seus predecessores, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser formulados;
3. O uso das séries infinitas foi uma ferramenta importante ao estender-se à classe das curvas “quadráveis”, isto é, curvas cuja quadratura podia ser determinada;
4. Com Newton a ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas foi firmemente estabelecida considerando a ordenada móvel proporcional ao momento ou a fluxão de uma área;
5. A síntese que Newton atingiu foi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação “padrão” com ponto para representar a diferenciação e, aparentemente, não

sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração;

6. Os fundamentos do cálculo foram apresentados por Newton de várias maneiras em épocas diferentes, ele constantemente procurava estabelecer os seus métodos analíticos sobre uma base mais segura. (BARON e BOS, 1985 V. 3 p.39)

Entretanto, além de não utilizar símbolos especiais para denotar os processos de integração e derivação, Newton não tinha apresentado uma definição para o conceito de limite.

Os símbolos especiais para denotar os processos de integração e derivação foram propostos por Leibniz, assim como o termo “Cálculo” que perdura até hoje, ao contrário do termo de Newton “fluxões”.

Gottfried Leibniz (1646 - 1716) nasceu em Leipzeig, na Alemanha. Formou-se em Direito pela Universidade de Altdorf e foi filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão. Interessado pela matemática, investigou, além do Cálculo, o sistema de números binários e explorou a teoria dos determinantes.

Leibniz, como diplomata e representante governamental influente, teve a oportunidade de viajar muito durante toda a sua vida. Em 1672 viajou para Paris onde conheceu Huygens, que lhe sugeriu a leitura dos tratados de 1658 de Blaise Pascal, caso quisesse tornar-se um matemático.

Em 1673, visitou Londres, onde adquiriu uma cópia do *Lectiones Geometricae* de Isaac Barrow. Foi devido a essa visita que apareceram os rumores de que Leibniz talvez tivesse tido acesso aos trabalhos de Newton, que por sua vez teriam influenciado seus estudos sobre o Cálculo, colocando em dúvida a legitimidade de seus trabalhos.

Em outra visita posterior a Londres, Leibniz participou de reuniões da *Royal Society*. Em uma dessas reuniões apresentou uma máquina de calcular que ele mesmo desenvolveu. Com essa exibição, Leibniz ganhou notoriedade nessa Sociedade, permitindo que ele fosse eleito membro estrangeiro, garantindo sua participação em encontros e reuniões.

Leibniz forneceu importantes contribuições para o desenvolvimento do Cálculo, tais como notações e fórmulas elementares para as derivadas e integrais (que usamos atualmente) e chegou ao Teorema Fundamental do Cálculo em 1676. Entretanto, esse teorema só foi publicado em 1677, ou seja, onze anos depois de “*The october 1666 tract on fluxions*” de Newton, que relutava em publicar suas obras com

o receio de que elas não fossem aceitas ou bem recebidas, pela comunidade científica.

Assim como ocorreu nos estudos de Newton, o estudo de séries infinitas foi muito importante para o desenvolvimento do Cálculo de Leibniz que, relacionando o Triângulo de Pascal e o Triângulo Harmônico, percebeu uma maneira de encontrar o resultado de muitas séries infinitas convergentes.

Nesse ponto, apoiando-se no trabalho de Blaise Pascal, *Traité des sinus du quart de cercle*, Leibniz percebeu que a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das abscissas e ordenadas, na medida em que essas se tornassem infinitamente pequenas, e que a quadratura, ou seja, a área, dependia da soma das ordenadas ou retângulos infinitamente finos.

Portanto, em 1676 Leibniz chegava às mesmas conclusões que Newton chegara há pelo menos onze anos antes. O método de Leibniz era abrangente, pois independentemente de uma função ser racional ou irracional, algébrica ou transcendente (termo que o próprio Leibniz propôs), as operações de encontrar “somadas” ou “diferenças” poderiam ser sempre aplicadas, ou seja, respectivamente, as operações de integração e de diferenciação.

Leibniz publicou, antes de Newton e sem mencionar suas obras, o primeiro trabalho sobre o Cálculo Diferencial e Integral, intitulado *“Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur”*, em 1684. Nesse trabalho apareceram as fórmulas para a derivada do produto e para a derivada do quociente.

Baron e Bos (1985) destacam que o Cálculo desenvolvido por Leibniz se fundamentou no seu interesse pelo simbolismo e pela notação vinculada à sua ideia de uma linguagem simbólica geral; no reconhecimento de que somar sequências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que a determinação de áreas e a de tangentes também são operações inversas; no uso de um triângulo característico para deduzir transformações gerais de áreas.

Para Boyer (1959), o elemento essencial no cálculo apresentado por Leibniz foi o reconhecimento, em 1676, de que também estava construindo uma análise nova e universal. Em seus primeiros artigos publicados, Leibniz mostrou que seu novo método não apresentava impedimentos para funções irracionais ou transcendentais.

No período entre 1677 e 1704, o Cálculo desenvolvido por Leibniz mostrou-se como um instrumento poderoso e de fácil aplicabilidade no continente. Porém na

Inglaterra, devido à relutância de Newton em divulgar seus estudos, o Cálculo continuava relativamente desconhecido.

Em 1684, quando Leibniz publicou seus estudos e não mencionou os trabalhos de Newton, surgiu uma disputa muito grande entre eles. Apesar de os métodos de ambos terem notações diferentes, eles resolveram os mesmos problemas. Para Newton, Leibniz tinha conhecimento do seu método, e deveria tê-lo citado no seu trabalho. Na primavera de 1711, Leibniz envia uma carta à *Royal Society* reivindicando a prioridade das ideias do Cálculo. Havia alguns matemáticos que acreditavam que Leibniz tinha desenvolvido o Cálculo, e outros que achavam o contrário. Para esses, Leibniz teria tido acesso ao método de Newton ainda na década de 1670, quando conversaram ou quando alguns matemáticos mostraram o manuscrito de Newton a outros. Além disso, existiam cartas trocadas com várias pessoas nesse período, em que Newton falava do seu Método das Fluxões.

A análise de documentos que ambos deixaram, mostra que Newton apresentou seu Método das Fluxões em 1665 e 1666 e que Leibniz desenvolveu independentemente o Cálculo Diferencial e Integral cerca de uma década depois e antes de conhecer os trabalhos de seu opositor. Entretanto, a disputa pública requeria um parecer da *Royal Society* no período em que Newton era seu presidente. Portanto, para os pensadores da época é difícil não admitir que ele se tenha valido de sua condição de presidente para obter os méritos para si.

Newton e Leibniz desenvolveram por caminhos diferentes e cada um à sua maneira o Cálculo. A linguagem de cada um e a concepção com que expressam suas ideias fundamentais são diferentes. Newton utiliza conceitos mais ligados ao movimento e à continuidade e Leibniz com uma visão mais estática e discreta, ou seja, Newton desenvolveu seu Cálculo pela via do contínuo, e Leibniz, pela via do discreto. De qualquer modo, ambos podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da reciprocidade entre a Integral e o Diferencial que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo.

Do ponto de vista da atualidade, o termo “Cálculo” proposto por Leibniz perdurou, ao contrário do termo de Newton “fluxões”. Também as notações e símbolos de Leibniz, tais como dx e dy para diferenciação e $\int$ para integração.

As formas como cada um abordou as questões relacionadas às series infinitas foram úteis, pois como ainda não estava estabelecida a noção de limite, essas ideias surgiram no sentido de definir os números reais e o conceito de limite.

A difusão dessa nova análise proposta por Newton e Leibniz gerou muitas críticas com relação aos fundamentos e às noções básicas dos novos métodos. Dentre esses críticos destacam-se George Berkeley (1685-1753), James Jurin (1684-1750) e Benjamim Robins (1707 - 1751). Berkeley, por exemplo, critica o fato de que a diferencial dx era nula ou não nula conforme as conveniências. Esse fato deixou os matemáticos sem resposta até ao séc. XIX, quando Weierstrass (1815-1897), com base nos estudos de Bolzano (1781-1848), estabeleceu uma fundamentação completa e rigorosa para o cálculo infinitesimal.

Apesar desses críticos não concordarem com a maioria dos assuntos, duas questões ficaram claras em suas discussões: que as quantidades infinitamente pequenas não podiam ser aceitas e que as razões últimas de Newton só podiam tornar-se rigorosas sendo introduzidas como limites. Robins, por exemplo, buscou definir limite como:

[...] uma grandeza última como sendo o limite do qual uma grandeza variável pode aproximar-se em qualquer grau de proximidade, embora ela nunca possa tornar-se absolutamente igual a ele (CAJORI, 1919 *apud* BARON e BOS, 1985, p. 27, vol.4).

Leonhard Euler (1707-1783) também afirmou, em seu livro sobre Cálculo Diferencial, que quantidades infinitamente pequenas não existiam, sendo as quantidades menores que qualquer quantidade finita igual a zero. Euler buscou associar o Cálculo Diferencial à ideia de função, que ele considerava somente como uma expressão analítica. Essa associação, além de ser favorável aos seus cálculos por vezes estranhos, favorecia o seu tipo de tratamento formalista e com desenvolvimento algorítmica.

Em 1754, Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) defendeu que o uso de limites era basilar para o Cálculo. No artigo que ele escreveu para a *Encyclopédie* sobre o diferencial, D'Alembert afirmou que a “*diferencial de equações consiste simplesmente em achar os limites da razão de diferenças finitas de duas variáveis da equação*”. Contrariamente ao que diziam Leibniz e Euler, D'Alembert defendia que se uma quantidade é alguma coisa, ela não desapareceu ainda, ou se é nada, ela literalmente desapareceu e que era impossível um estado intermediário.

Baron e Bos (1985, p. 28, v. 3) destacam que para D'Alembert “o *Cálculo opera com os limites das razões de diferenças finitas de quantidades variáveis inter-relacionadas*”. Nesse contexto, o matemático buscou explicar o conceito de limite da seguinte forma:

Diz-se que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável (D'Alembert *apud* BARON e BOS, 1985, p. 28, v. 3).

Nessa definição, D'Alembert busca excluir a vaga noção de diferenciais como grandezas infinitamente pequenas. No artigo da *Encyclopédie* sobre o diferencial, D'Alembert se refere à obra *De quadratura curvarum* de Newton, interpretando a sentença “*primeira e última razão*” como um limite em vez de uma primeira ou última razão de duas quantidades que estão apenas a surgir.

D'Alembert (1717-1783) defendeu desde 1754 o uso de limites com o como uma base rigorosa para o Cálculo, como citado.

As definições de Robins e D'Alembert possuem desvantagens em termos topológicos. Em suas definições de Limite, as variáveis são concebidas como crescentes ou decrescentes, podendo assim o limite estar situado somente na fronteira do domínio da variável, entretanto, se o domínio de uma variável é aberto, topologicamente, há um limite, mas se o domínio é fechado, não há limite.

Os inúmeros trabalhos sobre o Cálculo levaram ao desenvolvimento da Análise no século XVIII. A transição do Cálculo para a Análise nesse século, envolveu o interesse dos matemáticos dessa época mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras geométricas. A Análise tornou-se o estudo e a manipulação de fórmulas.

A mudança de interesse de figuras geométricas para fórmulas estava ligada ao surgimento do Conceito de Função em que a ideia da Análise era tida como estudo de funções e fórmulas.

De acordo com Baron e Bos (1985):

O cálculo por volta de 1700 era ainda essencialmente orientado para a geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas, ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas, e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. A análise tornou-se o estudo e manipulação de fórmulas. (BARON e BOS, 1985, p. 43, v.3)

Portanto, embora Leibniz e Newton tenham sido muito importantes para o desenvolvimento do Cálculo, não foram eles que formalizaram seus algoritmos. Somente no século XIX, suas ideias foram formalizadas principalmente por Cauchy e Weierstrass.

Cauchy (1789-1857) buscava desenvolver uma exposição clara, rigorosa e correta do Cálculo para apresentar aos seus alunos, e assim encontrou erros cometidos nos estudos de Lagrange. Nos seus estudos e nas suas aulas, ele usou a ideia de limite como base para introduzir precisamente continuidade e convergência, derivada, integral e outros conceitos do Cálculo. Porém, seus estudos não foram muito rigorosos na aplicação da sua definição de limite a funções contínuas e à convergência de certas séries infinitas.

A noção de limite é apresentada por meio de linguagem matemática elaborada e com uma estrutura flexível em que as noções de discreto e contínuo pudessem ser trabalhadas. As variáveis e seus limites são apresentados por Cauchy da seguinte forma:

Chamamos quantidade *variável* aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade *constante* aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o limite de todos os outros. [...] Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável pela abreviação "lim." escrita antes da variável em questão (CAUCHY, *apud* BARON E BOS, 1985, p.46, v. 4)

A diferença entre as definições de limite propostas por Robins e d'Alembert e a de Cauchy reside no fato desse último não excluir a possibilidade de uma variável alcançar seu limite.

A noção de limite proposta por Weierstrass (1815-1897) introduziu a linguagem dos *Épsilons* e *Deltas*. Para dar à Análise Matemática um fundamento lógico, Weierstrass desenvolveu as definições modernas de limite e de continuidade. Ele separou o Cálculo da Geometria, baseando-se apenas no conceito de número. Para tanto, foi necessário definir número irracional independentemente da noção de Limite.

Weierstrass chegou à conclusão da existência de um Limite de uma sucessão convergente e definiu número Irracional por meio de uma sucessão ordenada de um conjunto de racionais. Portanto, ele não só contribuiu para a definição de número Real,

como também para um melhor Conceito de Limite, que é em essência o que temos hoje, assim definindo-o:

O número L é o limite da função $f(x)$, em $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε , outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ , o valor de $f(x)$ diferir de L por menos que ε (BOYER, 1959 p. 287, tradução nossa)

Essa definição, além de ser muito similar a definição atualmente encontrada em livros de Cálculo Diferencial e Integral, afasta os infinitésimos dos métodos da Análise na definição de limite de uma sucessão, continuidade, continuidade uniforme, derivada etc., seguindo o axioma arquimediano: qualquer número é arquimediano, logo não há infinitésimos.

Os aspectos históricos apresentados mostram que, apesar do conceito de limite ser fundamental para definirmos Derivada e Integral, ele só foi formalmente definido muito depois desses conceitos. Porém, interessa-nos destacar que os livros didáticos sobre Cálculo Diferencial e Integral definem Limites antes de definirem Derivada e Integral, portanto, não seguem a ordem cronológica do desenvolvimento histórico do Cálculo.

O presente estudo epistemológico sobre o desenvolvimento do Limite evidencia que a transposição geométrica para a numérica possibilitou a transição do Cálculo para a Análise. Essa transição foi fundamental para a formalização da definição de limite como o conhecemos atualmente.

Entretanto, Cornu (1983) identifica nessa transposição um obstáculo epistemológico, pois para o autor uma das grandes dificuldades do desenvolvimento do conceito de limite era o de abstrair do contexto geométrico a cinemática, não para trabalhar com a "grandeza" e sim com os números.

Para o autor, a interpretação geométrica dos fenômenos tem sido abrandada pela transposição numérica, uma vez que o Método de Exaustão dos gregos é bem próximo à noção atual de limite. Essa demora de tantos séculos para que essa noção fosse especificada o deixa surpreso, pois os gregos pareciam conhecê-la. O autor destaca que a transposição numérica representa a diferença entre esses dois marcos e é o principal motivo desse obstáculo ter sido tão difícil de atravessar.

A ausência da noção de limites, principalmente na visão geométrica grega, fez com que muitos estudos gregos e da época renascentista fossem demonstrados por meio de técnicas questionáveis e sem o devido rigor matemático. Esse contexto

comprova a necessidade da construção do saber que envolve o conceito de limite e que permite estabelecer razões entre as grandezas.

Ao nos referirmos à construção do “Limite”, ressaltamos que o desenvolvimento da sua definição formal, foi constituído, em sua gênese, por razões incrementais.

A necessidade desse saber começou a ser reconhecido por Newton em sua obra *Principia Mathematica*. Nessa obra, Newton estabelece limites de razões incrementais em problemas de vários tipos como os de tangência, uma das situações mais estudadas em sua época e apresenta seu “Método das Fluxões”. Os estudos de Newton, além de serem um marco para o desenvolvimento do conceito de limite, mostram e reconhecem a importância de se definir formalmente o limite. Como destacado, o Cálculo desenvolvido por Leibniz também é considerado como um instrumento poderoso, além de fácil aplicabilidade.

Os estudos de Newton e Leibniz geraram controvérsias e produziram um intenso debate que culminou na definição formal do conceito de limite e, finalmente, no reconhecimento da necessidade desse saber.

Considerando um ponto de vista histórico e filosófico, os resultados desses debates, em que foram apresentadas as definições de limites de D’Alembert, Cauchy e Weierstrass, possibilitaram a formalização do conceito de limite como o conhecemos atualmente. Ressaltamos que nesses debates, os conhecimentos sobre convergência, infinito, grandezas infinitesimais, indivisíveis, contínuo e discreto que vinham sendo debatidos há séculos, permitiram o desenvolvimento e a aquisição de novos conhecimentos como as noções de vizinhança e ponto de acumulação, definições consideradas recentes na história e na análise matemática, além de função.

Na definição apresentada por Robins, destacamos outro obstáculo epistemológico em que se questiona “se um limite é atingido ou não”. A ideia de que se o limite é ou não atingido comprova mais uma vez que os obstáculos que surgiram no desenvolvimento da ideia de limite continuam presentes em seu processo de ensino e aprendizagem, como mostra Cornu (1983).

Um outro obstáculo epistemológico abordado por esse autor, consiste na noção de “infinitamente pequeno” ou infinitamente grande”. Para o autor, a suposição da existência de quantidades infinitamente pequenas, como as afirmadas por Euler, dificulta o entendimento da noção de limite, pois a quantidade é algo qualquer ou nada, ou seja, não existe um estado intermediário entre as duas. Ainda, segundo o autor, as

definições de D'Alembert e Cauchy também são fontes de obstáculos, pois essas definições não deixam claro se “o limite é atingido ou não”.

Segundo Cornu (1983), existe uma distância entre a definição intuitiva de limite e sua definição formal por meio de ϵ e δ , que não deve ser desconsiderada no seu processo de ensino. A discussão da definição intuitiva, na maioria das vezes, fica em torno do que ocorre quando x se aproxima de um ponto p , sem ser p , com o valor da função $f(x)$ que se aproxima de um dado número L . Ressaltamos que, essa discussão é análoga ao que é apresentado no estudo de funções, uma vez que a apresentação da noção intuitiva de limite fica bem próxima do que o aluno estudou na educação básica, ou seja, são situações pertinentes às discussões que abrangem o conceito de limite.

Nesse contexto, Artigue (1990), mostra que muitos dos conceitos envolvidos no estudo de Limites são considerados estabilizados e prontos para serem utilizados, uma vez que foram apresentados aos alunos em estudos anteriores. A autora chama a atenção para o fato de que muitas dessas situações, por exemplo para a aprendizagem do conjunto dos números reais ou do conceito de função, só são enfrentadas, pelos alunos, ao lidarem com cálculo de limites.

Esse capítulo buscou situar o desenvolvimento histórico e epistemológico da ideia de limite, dentro de um breve panorama histórico, mostrando que a construção desse saber não é fruto do trabalho de uma única pessoa. Na verdade, o saber construído durante o desenvolvimento do conceito de limite é fruto de muitos debates e embates que envolveram muitos pensadores de diversas épocas. O reconhecimento da necessidade desse conceito permitiu o desenvolvimento de novos conhecimentos que substituíram conhecimentos antigos e, por conseguinte, a sua formalização.

A construção desse novo saber também foi caracterizada pelo surgimento de obstáculos epistemológicos que estudos, como os de Cornu (1981), e Sierpinska (1985) e Artigue (1990) evidenciaram desde o surgimento da ideia de infinito até a formalização da definição de Limite.

Para finalizar trazemos considerações importantes sobre a noção de limite de uma função segundo Bkouche e Lille (2000). Segundo os autores, a noção de limite surge de dois problemas que, se interligados, apresentam aspectos contraditórios. O primeiro problema é cinemático, baseado na noção de movimento: quando se diz “ $f(x)$ tende para b quando x tende para a ” se deve entender que: quando a variável independente x se aproxima do valor a indefinidamente, então $f(x)$ (variável

independente) se aproxima do valor b indefinidamente. O segundo problema se refere à aproximação quando se propõe que a partir de um controle da aproximação entre $f(x)$ e b deve se condicionar a aproximação da variável x de a de modo a se garantir a aproximação de $f(x)$ a b desejada. Aqui, a questão cinemática do movimento fica em segundo plano, o que importa não é o movimento da variável independente e sim a ordem de aproximação desejada entre $f(x)$ e b . Ou seja, para os autores: *“Dito de outra maneira é a variável dependente que se impõe. E a estrutura gramatical, a asserção ritual “ $f(x)$ tende a b quando x tende a a ” é diferente, há apenas uma proposição do limite segundo o princípio de um cálculo aproximado”* (BKOUICHE; LILLE, 2000, p.39, tradução nossa)

Com este capítulo ressaltamos a importância de um estudo histórico e epistemológico de um conceito matemático para uma pesquisa, pois esse estudo possibilita uma melhor compreensão da construção desse saber, a importância de novos conhecimentos fundamentais para sua aceitação e formalização, além dos obstáculos que surgiram nessa construção.

Após os estudos realizados e apresentados nos capítulos anteriores, passamos, no que segue, a descrever os elementos da pesquisa empírica, aquela que revela na perspectiva documental a ação de dois professores universitários no ensino e aprendizagem do limite de uma função. Os conhecimentos elencados, até aqui, se constituíram referências para a continuidade da pesquisa implicando no levantamento e análise de dados. A pandemia e o acúmulo dos afazeres dos sujeitos de pesquisa impactaram os procedimentos metodológicos, por exemplo não foi possível a elaboração do diário de bordo e contato de longo tempo com os professores. Mas, em geral pode haver ocorrência, como essa, em um estudo empírico.

4 DADOS EMPÍRICOS

Neste capítulo apresentamos os dados empíricos da pesquisa que incluem: os sujeitos da pesquisa, as respectivas Representações Esquemáticas dos Sistemas de Recursos (RESR), as entrevistas semiestruturadas, os relatos do acompanhamento das aulas remotas, o campo conceitual de limite e situações propostas pelos professores (estruturação *a posteriori* pelo pesquisador) segundo perspectiva de Vergnaud (1990).

4.1 Os sujeitos da pesquisa

Os sujeitos desta pesquisa são dois professores universitários: P1 leciona para 35 alunos, do curso de Ciência da Computação de uma instituição privada, “*majoritariamente de classe média*”. P2 leciona para 20 alunos “*majoritariamente de classe social baixa*” do curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade pública. O Quadro 3 apresenta o perfil de cada professor.

Quadro 3 - Perfis dos sujeitos da pesquisa

Denominação	Experiências Profissionais	Formação
P1	Professor do ensino superior de uma universidade privada em cursos das áreas de exatas; Tem experiência em educação matemática. Mais de 15 anos de experiência de ensino e pesquisa	Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Doutorado em Matemática, Pós-doutorado em Educação Matemática.
P2	Professor da rede pública (Ensino Fundamental, Médio, EJA) e do Ensino Superior; Tem experiência em educação matemática. Menos de 15 anos de experiência de ensino e pesquisa	Licenciatura em Matemática, Doutorado em Matemática, Pós-doutorado em Educação Matemática.

Fonte: Compatibilização dos dados pelo autor

Por meio do Quadro 3, podemos observar que os dois professores possuem o título de Doutor em Matemática e pós-graduação em Educação Matemática.

Segundo P1, “*logo após eu me formar na graduação, surgiu a oportunidade de eu dar aulas. A partir de então eu me identifiquei com a carreira de professor e desde então trabalho na área de educação há mais de 15 anos*”, no caso de P2, “*no começo de minha carreira como professor, além de me identificar mais com a*

profissão docente, notei que eu precisava aprender teorias da educação para aprimorar minha docência. Desde então invisto e pesquiso na área de Educação Matemática”.

A carga horária semanal de P1 consiste em dez aulas por semana na graduação, sendo que dessas, quatro são de Cálculo. Ele também trabalha com projetos e orientações no setor de pós-graduação de sua universidade com dez aulas de carga horária semanal, portanto a carga horária total de P1 é de 20 horas semanais de trabalho.

A carga horária de P2 é composta de vinte aulas por semana na graduação, sendo que quatro de Cálculo e participa também de projetos e orientações, tanto na graduação e pós-graduação, com carga horária de vinte aulas semanais, totalizando 40 horas semanais de trabalho.

Notamos que P1 limitou-se a descrever sua experiência atual, enquanto P2 destacou sua experiência como professor do ensino básico público e como professor na educação de jovens e adultos desde 2003.

Com o objetivo de conhecer melhor esses professores e como exercem suas respectivas atividades profissionais, solicitamos que descrevessem o conjunto de restrições e regras institucionais e sociais que as influenciavam (Questão 2 do Questionário 1).

A resposta fornecida por P1 foi a seguinte:

“As restrições institucionais em meu modo de ver são a rigidez de programas, que dificultam a utilização de estratégias mais ativas, por exemplo, modos de avaliação definidos sem a participação do professor. Do ponto de vista social as restrições que percebo são modos de relacionamento que os estudantes têm a cada vez mais com menos compromissos frente ao conhecimento. Penso que no Brasil o conhecimento é pouco valorizado, pois não é ele que gera certamente renda. Isso interfere na profissão, pois com raras exceções o estudante faz esforços para aprender, mas sim para estudar para a prova.” (Professor P1, Março de 2021)

Com relação à pergunta, P2 disse:

“Em relação às restrições e regras institucionais que influenciam minha prática docente, posso citar a não possibilidade de escolher a turma com que se vai trabalhar e a obrigatoriedade de seguir o PPC do curso para o qual se vão ministrar aulas. Com respeito às restrições e regras sociais que influenciam minha prática docente, posso citar o fato da maioria dos discentes do curso de licenciatura em matemática ser de

classe baixa e isso faz com que, ao prepararmos certas atividades, tenhamos que pensar, por exemplo, se ele terá condições de pagar pela impressão, de ter de vir na universidade em outro turno, ou de passar o dia inteiro na universidade e pagar sua alimentação, se ele tem acesso à internet em casa para fazer alguma pesquisa, dentre outros. Isso tudo deve ser levado em consideração pelo professor.” (Professor P2, Março de 2021)

No quadro teórico da ADD, as restrições institucionais têm forte influência no trabalho documental dos professores, por conseguinte, no desenvolvimento profissional desses. Nessa perspectiva, verificamos que os professores expuseram seus desconfortos e que as respostas fornecidas por P1 e P2 vão ao encontro uma da outra, ou seja, a rigidez dos programas e a obrigatoriedade de seguir o PPC.

Com relação às regras e restrições sociais, P1 expôs sua preocupação com a falta de interesse e de comprometimento dos seus alunos pelos estudos e P2 considerar a condição social de seus alunos, mostrando uma legítima preocupação com os fatores que afetam os seus estudos. Essa fala expõe as condições que estudantes de baixa renda têm que enfrentar para conseguirem estudar e mostra uma realidade da educação brasileira, evidenciada pelo contexto pandêmico. As respostas fornecidas pelos professores são impactadas pelo fato de P1 lecionar para alunos de classe média e P2 para alunos de baixa renda.

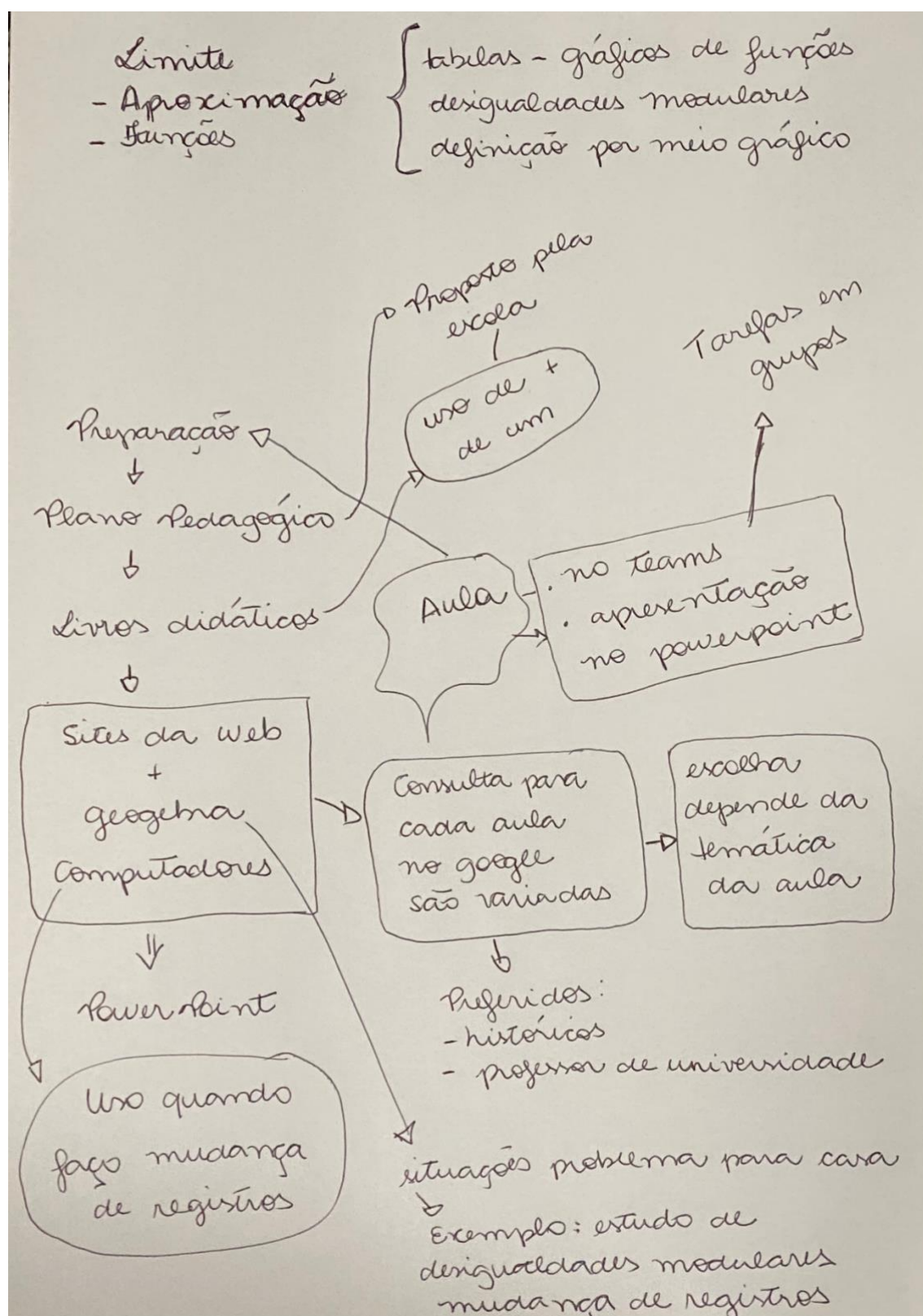
Ao questionarmos as restrições institucionais e sociais que os professores P1 e P2 enfrentam, buscamos elementos que interferem em seus respectivos trabalhos documentais influenciando na seleção, modificação, criação, entre outros dos seus recursos mobilizados para o ensino em particular do conceito de limite.

Nesse contexto, na próxima seção apresentamos as análises das Representações Esquemáticas dos Sistemas de Recursos (RESR) dos professores.

4.2 Representações esquemáticas dos sistemas de recursos de P1 e P2

A Figura 7 mostra a Representação Esquemática do Sistema de Recursos (RESR) de P1 para introduzir o tema Limites no ensino remoto esboçada pelo próprio docente nos apresentada em 06 de abril.

Figura 7 - RESRE de P1



Fonte: Professor P1

A Figura 7 mostra os recursos mobilizados por P1 para o ensino introdutório de limite em duas fases distintas, porém interligadas: “Preparação” e “Aula” é possível notar uma estrutura hierárquica do Sistema de Recursos de P1 composto dos seguintes recursos: Plano Pedagógico, Livros didáticos, *Sites da Web*, GeoGebra, Computador, MS *PowerPoint*, destaque de mudança de registros. De acordo com P1, ele já os mobilizava para o ensino presencial de introdução de limite e os manteve para o ensino remoto.

A fase intitulada por P1 como “Preparação de Aulas” mostra que ele desenvolve e organiza seu trabalho documental seguindo uma determinada sequência hierárquica de tarefas. Nessa fase, o ponto de partida na preparação de suas aulas é o plano pedagógico e, a partir desse, o livro didático, *Sites da Web*, computador e MS *PowerPoint*.

P1 descreve do seguinte modo a preparação de suas aulas sobre Limites (Questão 1 do Questionário 2): *“Eu acompanho o plano pedagógico que preparamos no início das aulas. Gosto de introduzir algumas informações históricas. Consulto o livro didático e organizo as aulas de modo a destacar os pontos essenciais de cada conteúdo. Tenho sempre a intenção de destacar quais são as informações apresentadas e o que se quer desenvolver. Minhas aulas são, em geral, preparadas em meu escritório. Sempre usei o computador para fazer gráficos no GeoGebra, introduzir conceitos na representação gráfica ou explorar alguma propriedade, mesmo antes da pandemia. Agora na pandemia tenho utilizado PowerPoint e GeoGebra. Eu preparo minhas aulas no meu escritório.”*

Portanto, a partir do “Plano Pedagógico” na sua entrevista, P1, na fase intitulada “Preparação das Aulas”, seleciona os demais recursos que comporão seu conjunto de recursos nessa fase: o livro didático, *sites da Web*, computador e o MS *Powerpoint*.

Ao mencionar que acompanha o Plano Pedagógico, P1 mostra o efeito institucional, destacado na seção 4.1, em sua atividade profissional, ou seja, a seleção dos recursos que comporão seu sistema de recursos está atrelada à rigidez, conforme exposto por ele, do plano pedagógico da instituição em que trabalha. Nesse caso, inferimos o teorema-em-ação: “Na seleção de um recurso, o plano pedagógico deve ser considerado” e o conceito em ação “seguir o plano pedagógico”.

Considerando o uso de *“informações históricas”*, questionamos P1 sobre o porquê do uso desse recurso. Segundo ele, *“além de considerar a história da matemática importante para o seu ensino, busco motivar os meus alunos e faço isso toda vez que introduzo um conceito novo.”*

A forma como ele usa a história da matemática em suas aulas, nos permite identificar um esquema associado a uma regra de ação toda vez que introduz um conceito novo. Deduzimos o seguinte teorema em ação “um novo conceito matemático deve começar a ser apresentado por meio de seu contexto histórico”, o conceito em ação associado “contexto histórico do conceito motiva os alunos”.

Ele usa a história para motivar, então apresenta vídeos que busca na internet. Ele diz que há vários e os escolhe segundo o nível dos alunos. Usa a história como motivação.

Para introduzir um conceito ele consulta regularmente o livro didático, entre aqueles que constam do plano pedagógico, organiza suas aulas destacando os pontos essenciais de cada conteúdo e os desenvolve com seus alunos por meio de exercícios e situações-problema (do livro). Identificamos uma regra de ação, relacionada ao modo de utilização desse recurso, ao seguir sua estrutura com o objetivo de introduzir um conceito. Nesse contexto, inferimos o seguinte teorema em ação “a sequência do livro didático é fundamental para introduzir um conteúdo aos alunos”. O conceito em ação relacionado é “a estrutura lógica do livro auxilia no aprendizado”.

Outro recurso que P1 mobiliza para o ensino introdutório de limite são as videoaulas. Segundo ele, ele busca usar essas videoaulas *“todas as vezes que introduzo a noção de Limite ou a noção de um outro conceito”*. A regra de ação exposta na regularidade com que ele usa o recurso videoaula ao introduzir a conceito de limite nos permite formular o teorema em ação: “um conceito deve ser introduzido, previamente, por meio de uma videoaula, recurso que contribuir com a atribuição de significado ao conceito” e o conceito em ação associado “introdução de um novo conceito por videoaula”.

P1 enfatiza, nas entrevistas, o uso do GeoGebra como um recurso mobilizado tanto na preparação, como no desenvolvimento de suas aulas sobre limite. Ele menciona o uso desse recurso na entrevista ao citar o uso do seu computador para apresentar gráficos de funções no GeoGebra e, por meio dele, efetivar mudanças de representação da algébrica para a representação gráfica, ou explorar visualmente

alguma propriedade. A forma como ele expõe a mobilização desse recurso para introduzir limite, nos leva a refletir se ele considera o tripleto $C = (S, I, R)$ de Vergnaud (1990) ao introduzi-lo.

Observando o esboço da RESR de P1 complementada pela sua entrevista, na fase “Preparação da aula”, ele mobiliza o recurso-mãe computador e os recursos-filho GeoGebra e MS *PowerPoint* para preparar suas aulas com o objetivo de introduzir limite. E, uma vez que o GeoGebra já fazia parte do sistema de recursos de P1 desde antes da pandemia, ao incorporar o MS *PowerPoint* ao seu sistema, como exposto em “*Agora na pandemia tenho utilizado **PowerPoint** e GeoGebra.*” (grifo nosso), as dimensões instrumentação e instrumentalização na sua gênese documental podem ser inferidas pelos esquemas resultantes dos teoremas em ação e conceito em ação do uso desse recurso, em suas aulas remotas.

A regularidade com que ele diz mobilizar o recurso GeoGebra, desde “*antes da pandemia*”, nos permite inferir um esquema de utilização construído enquanto interage com esse recurso (antes da pandemia). Para a regra de ação apresentar limite e suas representações por meio do GeoGebra, formulamos o teorema em ação “ao selecionar um recurso para o ensino, o professor o escolhe de acordo com seu objetivo de aula, método de ensino e suas crenças.” O conceito em ação associado é o de “documentação na ADD.”

Na fase intitulada “Aulas”, P1 esboça os recursos mobilizados para o ensino introdutório de limite durante o desenvolvimento de sua aula remota. Segundo ele, todo o desenvolvimento de sua aula ocorre trabalhando em seu computador, em que apresenta o conteúdo, exemplos e exercícios considerados relevantes, nos *slides* do MS *PowerPoint*, além de apresentar as videoaulas ou usar o GeoGebra de acordo com seu planejamento na fase “Preparação das aulas”.

Por meio da RESR de P1 e das entrevistas, percebemos que a maioria dos recursos mobilizados por ele para introduzir limite foram apropriados no ensino presencial e adaptados e recombinaos para introduzir limite no ensino remoto. O professor P1 não indicou em seu RESR o “Após a aula”, mas indicou tarefas e atividades em grupo. Essa parte foi realocada após a entrevista e, portanto, não temos como identificar outros elementos desse momento.

Para essa modalidade de ensino *online*, ele apropriou-se de um novo recurso, o MS *PowerPoint*, mostrando uma adaptação para essa modalidade de ensino. Essa

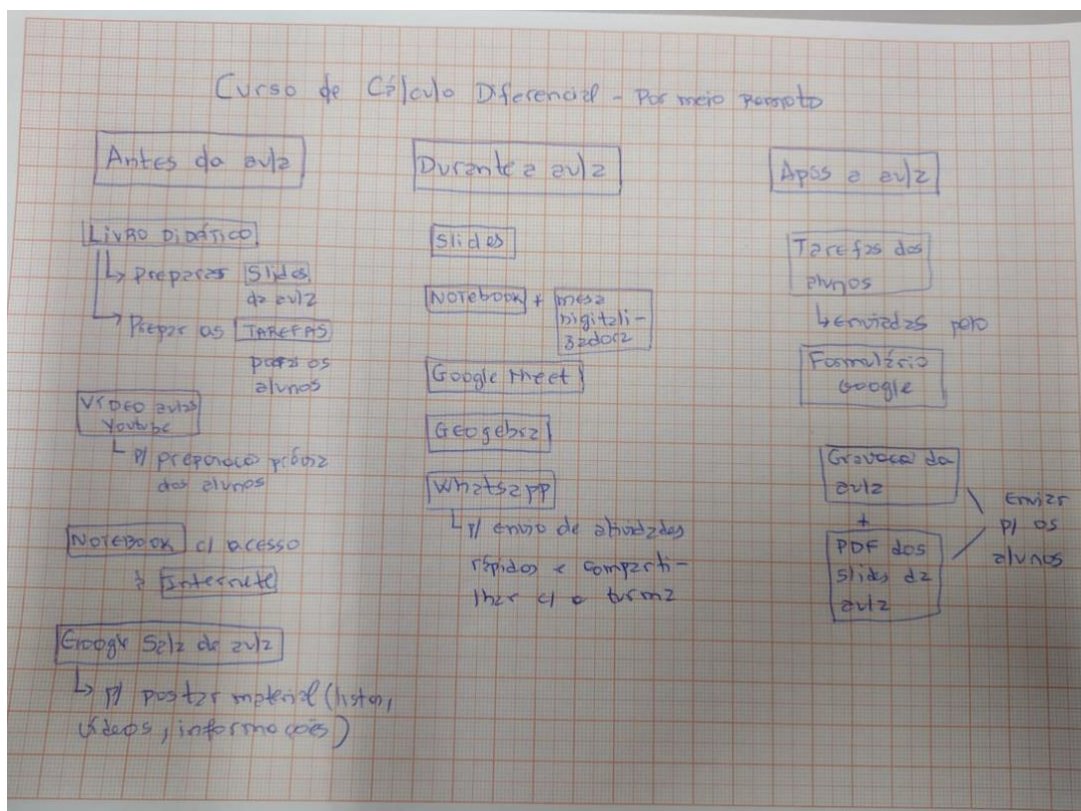
adaptação mostra uma evolução no desenvolvimento profissional de P1 para o ensino remoto.

Os esquemas profissionais que identificamos e inferimos em algumas regularidades na ação de P1 mobilizando e usando seu conjunto de recursos nos permite apontar em sua gênese documental a criação de seus documentos para introduzir limite no ensino remoto.

Ao final da entrevista, perguntamos para P1 sobre sua experiência com o trabalho coletivo em sua universidade (Questão 3 do Questionário 1): *“não tenho essa prática. Em outros momentos vivenciei essa experiência, principalmente para avaliar o resultado de cursos apresentados por professores diferentes.”* Perguntamos o porquê de ele não desenvolver mais nenhum trabalho coletivo em sua universidade e ele expôs que existe uma *“falta de interesse geral”* dos professores em trabalhar coletivamente.

Na sequência, analisamos a RESR de P2 por meio do seu esboço e de entrevistas. A Figura 8 mostra a Representação Esquemática do Sistema de Recursos (RESR) de P2 para introduzir limite no ensino remoto esboçada pelo próprio docente nos apresentada em 07 de abril.

Figura 8 - RESR do professor P2

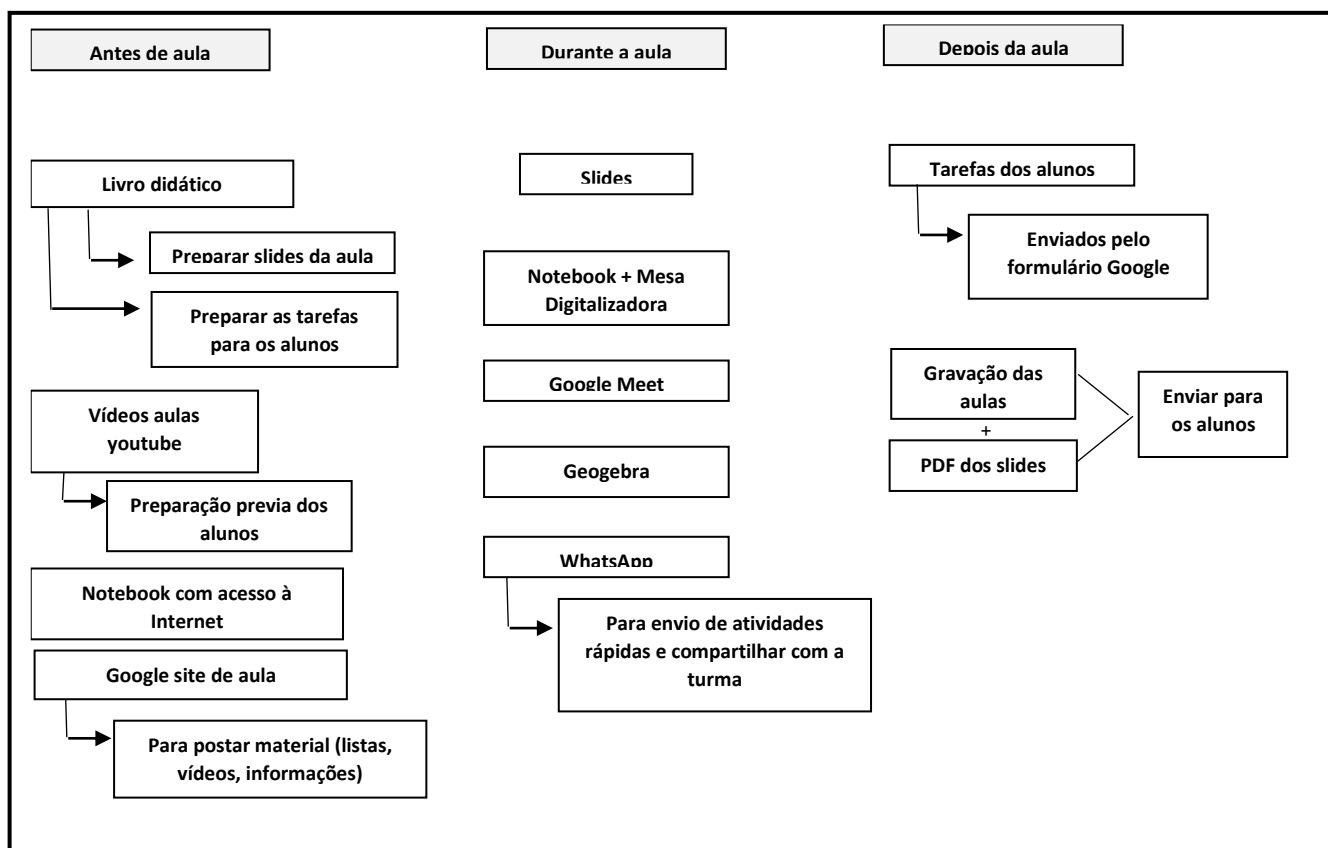


Fonte: Professor P2

Para melhorar sua nitidez, reescrevemos a RESR de P2 como mostra a Figura

9.

Figura 9 - A RESR de P2 reescrita



Fonte: Os autores

A Figura 9 mostra os recursos mobilizados por P2 para o ensino introdutório de limite em três fases distintas, porém interligadas: na preparação de suas aulas, ou seja, “Antes da Aula”, em seu desenvolvimento, designada por “Durante a aula” e do pós-aula que ele chamou de “Após a aula”.

Observando a Figura 9, podemos destacar que o Sistema de Recursos de P2, que ele mesmo intitulou “Curso de Cálculo Diferencial – por meio remoto”, é composto dos seguintes recursos para introduzir limite: livro didático, *slides* do MS *PowerPoint*, tarefas para os alunos, videoaulas do *YouTube*, *Notebook*, *Internet*, *Google Sala de Aula*, listas de exercícios, mesa digitalizadora, *Google Meet*, *Geogebra*, *Whatsapp*, *Formulário Google* e arquivos dos *slides* das aulas em PDF.

Nesse sistema de recursos é possível perceber uma estrutura hierárquica entre alguns recursos e uma predominância dos recursos digitais em relação aos materiais. De acordo com P2, ele já os mobilizava para o ensino presencial e os

manteve para o ensino remoto, exceto a mesa digitalizadora, que, segundo ele, foi incorporada ao seu sistema de recursos durante a pandemia.

A fase intitulada por P2 como “Antes da aula” mostra que P2 desenvolve e organiza seu trabalho mobilizando um conjunto de recursos para o ensino introdutório de limite e seguindo uma determinada sequência de tarefas. Segundo ele, *“Antes da pandemia, as aulas eram preparadas na universidade e em casa, no atual contexto da pandemia, exclusivamente em casa.”*

Inicialmente, ele começa a preparar sua aula por meio do recurso “livro didático” e, com base nesse recurso, “preparar *slides* da aula” e “preparar tarefa para os alunos”.

P2 descreve do seguinte modo a preparação de suas aulas sobre limite (Questão 1 do Questionário 2): *“Durante a preparação de minhas aulas, sigo a sequência do livro texto adotado procurando adaptar a linguagem, os exemplos e os exercícios para a realidade de cada turma. Antes da pandemia, as aulas eram preparadas na universidade e em casa, no atual contexto da pandemia, exclusivamente em casa.”*

O fato de P2 buscar adaptar a linguagem, os exemplos e os exercícios do livro didático adotado para a linguagem de cada turma, mostra que ele, em alguns momentos, considera que essa linguagem pode não ser apropriada, portanto, destacamos que P2 busca modificar, ajustar e adaptar esse recurso à realidade de suas turmas. Ao se instrumentar do recurso livro didático, P2 identificou na forma de exposição dos conteúdos sua linguagem que poderia trazer incompreensão de seus alunos, portanto, essa identificação teve influência em sua atividade profissional, fazendo com que ao se instrumentalizar desse recurso, P2 buscasse outro modo de explicitar as informações adaptando-o e recriando-o de acordo com a realidade de suas turmas. Ele faz isso, sem descuidar do rigor da linguagem matemática, mas simplificando no que considera possível. Desse modo, P2 apropriou-se do recurso livro didático moldando-o às características de seus alunos

A partir do recurso mãe livro didático, P2 prepara suas aulas sobre limite e ao facilitar no que considera possível a linguagem dos exemplos e a dos exercícios as insere em *slides* do MS PowerPoint para exibir aos seus alunos e ao preparar tarefas para eles. Portanto, por meio da fala de P2, observamos que os *slides* do MS PowerPoint e as tarefas preparadas representam os recursos-filhos desse conjunto de recursos.

Durante as suas entrevistas, ele confirmou o uso regular da sequência do livro didático, mesmo antes da pandemia, pois segundo ele, faz isso todas as vezes que tem que preparar aula para o ensino de limite. Essa regularidade mostra uma regra de ação relacionada ao modo de utilização desse recurso ao seguir sua estrutura com o objetivo de introduzir limite. Nesse contexto, inferimos o seguinte teorema em ação “a sequência do livro didático é fundamental para apresentar o conteúdo aos alunos”. Seu conceito em ação relacionado é “a estrutura lógica do livro auxilia no aprendizado”.

Identificamos na regularidade com que P2 adapta a linguagem do livro didático outro esquema de utilização associado a esse recurso-mãe e que diz respeito à regra de ação “*adaptar a linguagem do livro dos exemplos e dos exercícios para a realidade dos alunos*”. O teorema em ação associado a esse esquema pode ser formulado como “a linguagem do livro deve ser adaptada aos conhecimentos prévios dos alunos” e o conceito em ação “conhecimentos prévios dos alunos”.

Assim como fizemos com P1, questionamos P2 se ele usava algum recurso que o livro didático disponibiliza, ele expôs que esses recursos nunca chamaram a sua atenção.

Outro recurso que P2 mobiliza para o ensino introdutório de limite na fase “Antes da aula” são as videoaulas do *Youtube*. Segundo ele, essas videoaulas são usadas para “*uma preparação prévia dos alunos todas as vezes que introduzo um tópico novo, inclusive no caso de limites*”. Identificamos uma regra de ação relacionada à exibição de uma videoaula do *Youtube* quando o objetivo da aula de P2 é introduzir um novo conceito, como é o caso de limite. Portanto, podemos formular o teorema em ação “um novo conceito deve ser explorado previamente antes ser formalmente definido” e o conceito em ação associado “introdução de um novo conceito”.

De acordo com P2, é por meio do recurso *Notebook* com acesso à *Internet* que ele prepara e desenvolve suas aulas remotamente, faz pesquisas e se comunica com seus alunos no contexto pandêmico. O último recurso esboçado por P2 na fase “Antes da aula” é o Google Sala de Aula. Segundo ele, é por meio desse outro recurso que ele posta materiais para os seus alunos como listas, vídeos e informações.

Na fase intitulada “Durante a aula”, P2 esboça os recursos mobilizados para o ensino introdutório de limite durante o desenvolvimento de sua aula remota. Segundo ele, todo o desenvolvimento de sua aula ocorre trabalhando em seu

Notebook, em que apresenta o conteúdo, exemplos e exercícios da aula nos *slides* do MS *PowerPoint* criados na fase “Antes da Aula” e usa uma mesa digitalizadora para escrever informações nesses *slides* com uma caneta da própria mesa digitalizadora.

De acordo com P2, esse recurso começou a ser mobilizada por ele no ensino remoto. Identificamos as dimensões instrumentação e instrumentalização na gênese documental desse professor ao adicionar esse recurso ao sistema de recursos. Segundo o professor, a mesa digitalizadora é *“usada para realizar as aulas, permitindo que se escreva no Power Point ou no Xournal como num quadro digital”*. Portanto, ele se apropriou desse recurso para o desenvolvimento de suas aulas devido ao contexto pandêmico, com o intuito de suprir a ausência de uma lousa. Os esquemas de uso relacionam-se com a situação remota.

O recurso *Google Meet*, de acordo com P2, é *“usado para realizar as aulas por meio síncrono permitindo a interação instantânea de todos os presentes.”* Esse recurso digital permite que ele interaja com seus alunos a distância durante o isolamento social causado pelo contexto pandêmico. Apontamos também as dimensões instrumentação e instrumentalização para a necessidade de adaptar a linguagem do livro didático com o intuito de contribuir na interpretação dessa pelos seus alunos.

O uso do *software* GeoGebra no desenvolvimento das aulas de P2 é mobilizado para *“[...] apresentar objetos matemáticos nas representações algébrica e gráfica, pois contribui para a compreensão dos discentes acerca de alguns conceitos, inclusive o de limite.”* Segundo ele, esse recurso era mobilizado para as aulas de introdução de limite no ensino presencial e foi mantido no ensino remoto devido à sua versatilidade e, principalmente, por ser gratuito.

Com base no exposto por P2, inferimos um esquema de utilização construído por ele, associado à regra de ação “apresentar os conceitos matemáticos e suas representações no GeoGebra”. O teorema em ação pode ser formulado como “os alunos compreendem melhor os conceitos matemáticos quando apresentados no GeoGebra” e o conceito em ação associado “compreensão e visualização de conceitos matemáticos”.

Como uma forma de comunicação e envio de atividades instantaneamente, P2 encaminha e recebe, quando necessárias, durante o desenvolvimento de sua aula, atividades e mensagens, por meio da plataforma de comunicação instantânea *Whatsapp*, para o grupo de nome “Cálculo 1 – 2021/1” em que ele e seus respectivos

alunos fazem parte. De acordo com ele, esse recurso de comunicação era mobilizado também no ensino presencial como uma forma de interação com sua turma quando necessário, porém nos horários extraclasse.

Ao término de suas aulas, na fase intitulada “Após a aula”, o esboço desenhado por P2 mostra que ele disponibiliza as tarefas preparadas para os alunos e as envia para um formulário *Google*. Segundo ele, as gravações das aulas e os respectivos *slides* apresentados e convertidos em PDF também são enviados aos alunos.

Ao disponibilizar os recursos gravação da aula e os *slides* em PDF sobre limite, P2 busca incentivar os alunos a reverem os assuntos abordados, pois para ele *“rever o conteúdo da aula e refazer os exercícios, ajudam a resolver os exercícios das tarefas enviadas”*. Nesse contexto, ele construiu mais um esquema de utilização no modo como interage com esses recursos que tem uma regra de ação relacionada à disponibilização de todo o conteúdo apresentado e desenvolvido na aula remota. Formulamos o teorema em ação “resolver repetidamente os mesmos exercícios contribuem para a resolução de novos exercícios” e o conceito em ação associado “resolução de exercícios”.

Ao final da entrevista, do mesmo modo como fizemos com P1, questionamos P2 sobre sua experiência com o trabalho coletivo em sua universidade (Questão 3 do Questionário 1): *“Com relação ao meu trabalho coletivo nunca trabalhei com colegas na preparação das minhas aulas, materiais ou recursos.”* Perguntamos o porquê e ele expôs que nem ele e nem os demais professores demonstraram a intenção de desenvolver um trabalho coletivo na universidade.

Por meio da RESR de P2 e das entrevistas, notamos que a maioria dos recursos mobilizados por ele para introduzir limite foram apropriados no ensino presencial e adaptados e recombinaados para o ensino remoto. Na ausência de uma lousa, ele mobilizou o recurso mesa digitalizadora para poder desenvolver suas aulas remotas, o que mostra que ele se apropriou desse recurso nas dimensões instrumentação e instrumentalização. Apontamos que essa adaptação mostra uma evolução no seu sistema de recursos e no seu desenvolvimento profissional causado pelo contexto pandêmico.

Os esquemas profissionais que identificamos e inferimos no trabalho documental de P2 durante sua ação mobilizando seus conjuntos de recursos mostram

o processo de sua gênese documental na criação de seus documentos para a introduzir limite no ensino remoto.

As respostas de P1 e P2 às questões do questionário sobre seus perfis, restrições institucionais e sociais permitiram identificar como esses professores buscam desenvolver suas atividades profissionais. Notamos um certo desgaste dos professores com relação aos respectivos planos pedagógicos e preocupações com a aprendizagem de seus respectivos alunos e como as condições sociais dos alunos interferem nessa aprendizagem. Constatamos também que, apesar de formações acadêmicas semelhantes, eles se diferenciaram em relação à elaboração de seus documentos, sendo o conjunto de recursos exposto por P2 mais diversificado que aquele de P1. Isso já acontecia antes da pandemia. Ambos alteraram suas práticas inserindo as ferramentas do *teams* ou do *google* aos seus sistemas de recursos.

A observação direta das RESR dos dois professores não foi suficiente para compreendermos suas gêneses documentais na criação de seus documentos para introduzir limites no ensino remoto. Mas a complementação com as entrevistas e participação em suas aulas (de modo remoto) favoreceram melhor percepção da elaboração de seus trabalhos documentais para o ensino de limite.

As confrontações também permitiram identificar as regularidades em suas respectivas práticas docentes, as dimensões instrumentação e instrumentalização para alguns dos recursos mobilizados, os recursos-mãe e os recursos-filhos de seus sistemas de recursos e inferir esquemas profissionais construídos por esses professores ao interagirem com seus sistemas de recursos para introduzir limite no ensino remoto.

No contexto da MIR, essas entrevistas de confrontação foram fundamentais para completar as análises, pois permitiram que certos aspectos implícitos nas práticas dos professores participantes da pesquisa fossem percebidos.

As RESR de P1 e P2 mostraram a importância dos recursos digitais mobilizados por ambos para o ensino remoto. Como eles mesmos expuseram, a maioria desses recursos eram mobilizados no ensino presencial e continuaram sendo mobilizados no ensino remoto, ou seja, os professores já se apropriaram desses recursos antes do contexto pandêmico, exceto pelo uso do MS *PowerPoint* por P1 e pela mesa digitalizadora por P2, que foram apropriados para esse contexto. Essa constatação reforça, dentro do quadro da ADD, a importância que os recursos digitais têm na atividade profissional e na documentação dos professores, uma vez que, foram

apropriados antes do contexto pandêmico e que, nesse contexto, foram esses recursos que permitiram que as aulas fossem retomadas e os professores pudessem exercer suas atividades profissionais remotamente.

Os dois professores têm em comum alguns recursos tais como, os respectivos livros didáticos, usado na preparação de suas aulas, o GeoGebra, videoaulas e aulas apresentadas e desenvolvidas por meio de *slides* no MS *PowerPoint*. Entretanto, os esquemas de utilização construídos por esses dois professores em suas interações com esses recursos para o ensino introdutório de limite não são os mesmos. Isso mostra as influências das suas respectivas crenças profissionais em seus respectivos trabalhos documentais.

Gueudet (2017) apontou em seu estudo que o trabalho de documentação dos professores universitários participantes da sua pesquisa, raramente se assemelhava a um trabalho coletivo e que recursos, potencialmente interessantes e projetados pelos próprios professores, não eram compartilhados com os demais colegas. Com base nessa perspectiva, questionamos ao final das entrevistas de P1 e de P2 se eles desenvolviam trabalhos coletivos em suas respectivas universidades. Ambos expuseram que também não desenvolviam e que não havia em suas instituições condições que indicavam essa direção de trabalho.

A seguir são apresentadas o campo conceitual de limite e as análises dos dados coletados por meio do acompanhamento das aulas remotas dos professores participantes desta pesquisa.

4.3- Campo Conceitual do Limite

Como apresentado na seção 2.1.1, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1990) é uma teoria em que a conceitualização está no centro do desenvolvimento cognitivo, portanto quando o professor busca ensinar um conceito, ele busca ensinar o conhecimento referente a esse conceito.

Nessa perspectiva, a construção dos esquemas profissionais associados ao campo conceitual do Cálculo Diferencial e Integral depende das classes de situações que o professor propõe aos seus alunos e que dão sentido aos conceitos estudados, tais como, funções, limites e derivadas, ou seja, a identificação dos esquemas criados pelo professor, durante o desenvolvimento de sua prática profissional, deve ocorrer por meio dessas classes de situações. Ressaltamos que para o campo conceitual do

Cálculo, as classes de situações não são propostas por meio de um único conceito e sim por vários relacionados entre si.

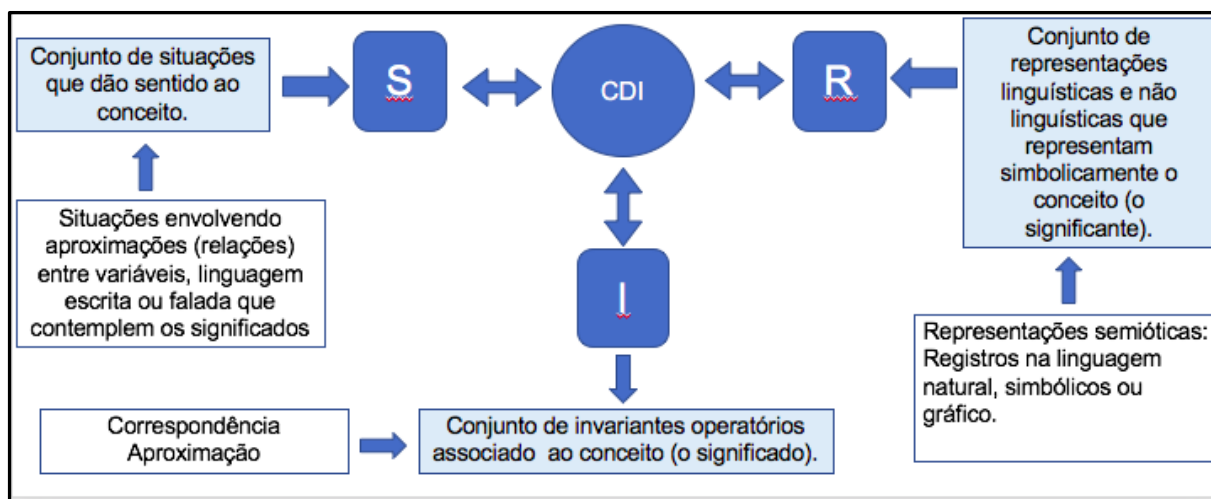
Segundo Vergnaud (1990), são os esquemas evocados por um sujeito dentro de uma classe de situações que dão sentido a um conceito. No caso da diferenciação, por exemplo, os esquemas criados por um aluno permitem que ele lide com situações que implicam na ideia de diferenciação. Porém, se o professor favorecer, por exemplo, apenas o tecnicismo, em detrimento do conhecimento relacionado ao conceito, fazendo com que o aluno absorva apenas mecanicamente sua ideia, a aprendizagem de tal conceito, por parte do aluno, não permitirá que ele resolva satisfatoriamente outras situações que envolvam esse mesmo conceito.

No caso do campo conceitual do Cálculo, se o aluno não se apropriar satisfatoriamente do conceito de limite, situações que envolvam esse conceito e os demais conteúdos pertinentes a esse não serão solucionados de modo satisfatório por ele. Portanto, as classes de situações propostas pelo professor devem considerar o desenvolvimento cognitivo na construção dos conceitos do Cálculo pelo aluno. As situações e representações devem dar sentido a esses conceitos.

O professor deve verificar se o aluno construiu um campo conceitual particular para, por exemplo, funções, limites, derivadas, etc., caso contrário, o professor deve buscar outras situações que contribuam satisfatoriamente para a aquisição desses conceitos e que permitirão lidarem satisfatoriamente com as mais diferentes situações que envolvam os conceitos do Cálculo, ou seja, que ele enfrente situações cada vez mais complexas.

Os conceitos de funções, limites, derivadas etc., alguns dos conceitos constituintes do campo conceitual do Cálculo, devem ser apresentados, por exemplo, em situações que envolvam correspondência, aproximação, taxa de variação, velocidade e, conseqüentemente, situações em que esses conceitos são representados linguisticamente, graficamente, por meio de suas notações etc. A Figura 10 apresenta uma proposta, do campo conceitual do Cálculo considerando o triplete $C = (S, R, I)$, para pesquisa.

Figura 10 - Campo Conceitual do Cálculo



Fonte: os Autores

A Figura 10 apresenta o campo conceitual do Cálculo em que estão incluídas situações que envolvem aproximações (relações) entre variáveis, linguagem escrita ou falada, portanto que contemplam os significados para o aluno. O significante está representado pelo conjunto de representações linguísticas e não linguísticas e os invariantes operatórios associado ao conceito.

A criação de um conjunto dos possíveis invariantes operatórios por parte do professor, ao ministrar conteúdos pertencentes ao campo conceitual do Cálculo, está fortemente relacionada às classes de situações propostas por ele aos seus alunos.

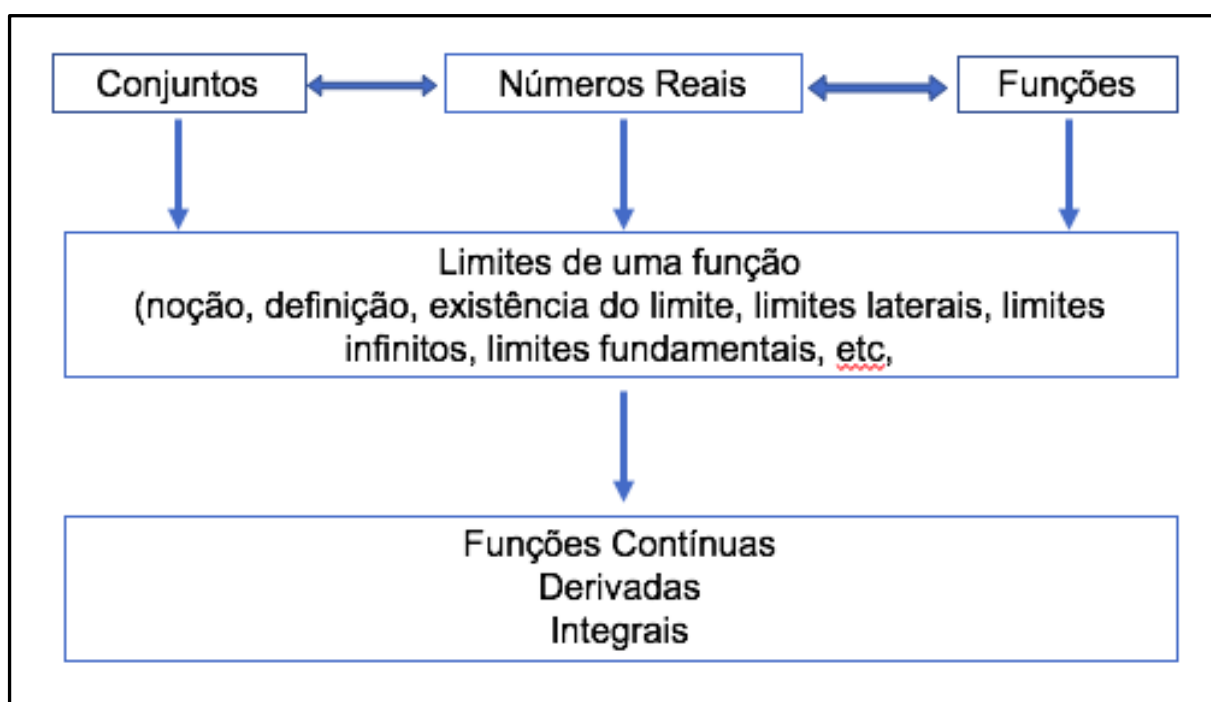
O professor deve propiciar aos alunos situações que apresentem conjuntos de propriedades, relações e informações dos conceitos e dos conteúdos do Cálculo que se relacionam entre si, como no caso de limites e derivadas, além de um conjunto de representações diferenciadas que possibilitem a apropriação satisfatória pelos alunos dos conceitos estudados.

Cornu (1991) aponta que o conceito de limite é particularmente difícil, porém necessário à matemática avançada. Esse conceito possui um papel central para a análise matemática, pois é fundamental para os estudos que envolvem aproximação, continuidade e cálculo diferencial e integral. Segundo o autor, as dificuldades relacionadas ao ensino do conceito de limite consistem no fato de que os aspectos cognitivos não podem ser construídos apenas por meio da sua definição matemática, pois não possibilita a aquisição de sua concepção fundamental. Para o autor, a

definição de limite de função possibilita apenas lidarmos com a álgebra desse conceito, operando com uma estrutura aditiva (limite da soma e da diferença), com uma estrutura multiplicativa (limite de um produto e de um quociente) e com composição de funções.

Portanto, considerando também os estudos de Cornu (1991), para a pesquisa propomos elementos constituintes do campo conceitual limite de uma função conforme a Figura 11.

Figura 11 - Campo Conceitual Limite de Uma Função



Fonte: os Autores

A Figura 11 mostra uma proposta para o campo conceitual limite de uma função em que consideramos as associações e relações entre os campos conjuntos, números reais e funções, considerados pré-requisitos para o desenvolvimento dos estudos sobre o conceito de limite que por sua vez é fundamental para os demais conceitos e conteúdos do Cálculo. Dentro de cada um desses campos, podemos destacar outros conceitos constituintes desses como mostra o Quadro 4.

Quadro 4 - Conceitos Constituintes do Campo Conceitual Limites

Conjuntos	Números Reais	Funções	
Conjuntos	Intervalos	Domínio, contradomínio e imagem	Primeiro Grau
Sub-Conjuntos	Vizinhança	Raízes	Segundo Grau
Operações	Desigualdades	Injeção, sobrejeção e Bijeção	Polinomial
Conjuntos Numéricos	Relação de Ordem	Crescente e decrescente	Modular
Representação dos Conjuntos	Reta Real	Par ou ímpar	Inversa e Composta
Relações	Valor Absoluto	Representação Gráfica	Trigonométricas
Representações Gráficas	Sequências		Exponencial
	Frações		Logarítmica
	Raízes		Hiperbólicas

Fonte: os Autores

O Quadro 4 mostra os elementos que compõem cada um dos campos que consideramos na construção do campo conceitual de limites.

No que se refere ao conjunto de situações que dão sentido ao conceito e que envolvem todos os elementos dos demais campos, cabe ao professor propor situações por meio de atividades, exercícios, situações-problema, entre outros recursos, que favoreçam a aquisição de conceitos como limites, derivadas, integral, etc. Essas classes de situações podem ser apresentadas, inclusive, por meio de *softwares*, do desenvolvimento histórico do Cálculo, jogos, videoaulas etc., ou seja, por meio dos mais diferentes recursos.

Portanto, na proposta de construção do campo conceitual limite de uma função, identificamos inicialmente os invariantes operatórios associados às práticas profissionais dos professores universitários sujeitos da pesquisa, ou seja, seus possíveis esquemas profissionais observáveis.

4.4 Análise dos dados coletados por meio do acompanhamento das aulas remotas dos professores

Em Vergnaud (1990) a TCC como uma teoria cognitivista possui duas entradas: a primeira, relacionada às classes de situações apresentadas ao sujeito e, a segunda, os conceitos.

Acompanhando essa teoria, buscamos identificar nos desenvolvimentos das aulas remotas de P1 e de P2 as classes de situações propostas por eles para o ensino de limites.

Inicialmente descrevemos, de forma geral, como as aulas de P1 sobre limites foram desenvolvidas e, em seguida, apresentamos as análises das classes de situações identificadas, os recursos mobilizados por ele, os possíveis esquemas inferidos na perspectiva da ADD e considerações acerca dessas aulas.

Na perspectiva de Charkzuc (2020), observamos que P1, na ausência de uma lousa, adaptou os *slides* do MS PowerPoint para substituí-la e, por meio desses, apresenta conteúdos já digitados e desenvolve sua aula usando o ponteiro do *mouse* como apontador enquanto busca explicar o respectivo conteúdo. Quando julga necessário, ele insere caixas textos e escreve nessas informações que julga necessárias para o entendimento do conteúdo.

Isto é, verificamos que a urgência da adaptação de P1 para o ensino remoto, devido ao contexto pandêmico, inclusive no uso da plataforma digital, impactou o dinamismo de sua aula.

Durante o desenvolvimento das aulas remotas sobre limites, os alunos de P1 não ligaram suas câmeras e praticamente não se comunicaram com ele, apenas diziam que tinham entendido, quando essa informação era necessária para P1 prosseguir com sua aula. Quando seus alunos faziam perguntas, essas eram bem pontuais e buscavam fazê-las por meio do *chat*: “*Por que inverteu o sinal?*”, “*Por que simplificou o numerador com o denominador*” ou “*Pode refazer a passagem anterior?*”. Ou seja, as perguntas não abordavam, necessariamente, o conteúdo sobre limites, mas do ensino básico.

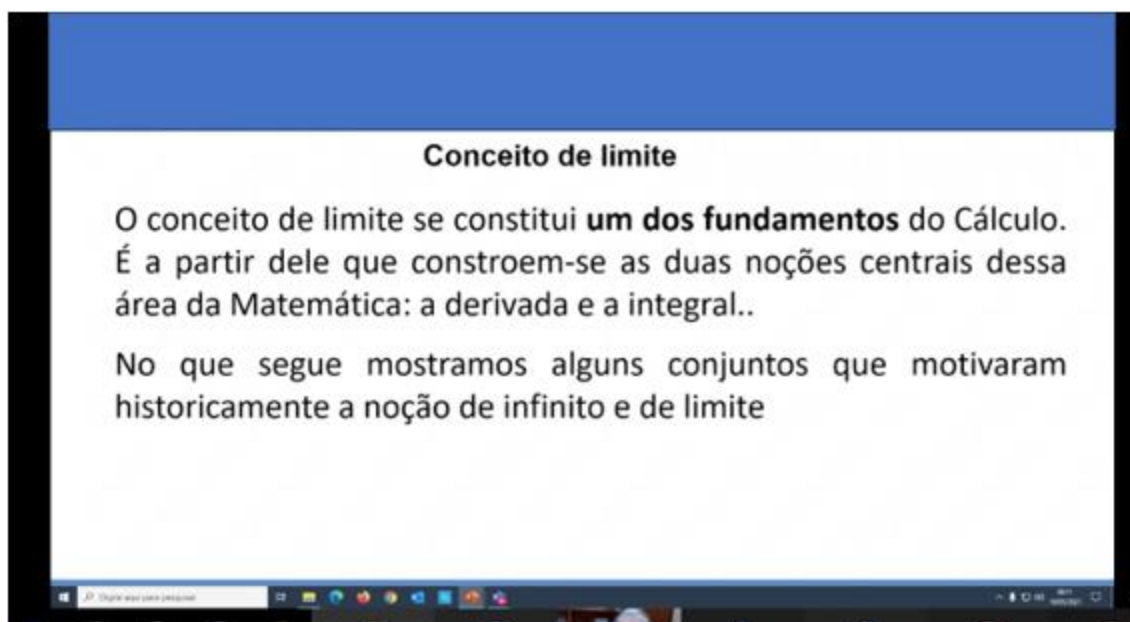
Portanto, nesse sentido, verificamos que as interações entre P1 e seus alunos mostrou uma certa fragilidade (CHARKSUK, 2020), provavelmente devido ao contexto remoto, nessas interações e com relação ao conhecimento buscado.

O acompanhamento e a gravação da aula remota de P1 que, segundo ele, teve como objetivo “*A noção intuitiva de limite*” ocorreu por meio MS Teams que é o ambiente virtual disponibilizado pela instituição em que trabalha para exercer suas atividades profissionais remotas, ou seja, todo o ambiente de ensino teve de ser preparado e desenvolvido por P1 por meio de desse recurso digital (THIELE; CARMO; KAMPHORS, 2020).

P1 inicia sua aula remota destacando o conceito de limite como fundamental para o Cálculo Diferencial e Integral e para as definições de derivada e integral (BATISTA, 2019), pois “*é por meio dele que esses conceitos se alicerçam*”. Cita Newton e Leibniz como grandes desenvolvedores do Cálculo buscando mostrar a importância desses dois pensadores para esse ramo da matemática, como o conhecemos atualmente e sobre os problemas que os antigos matemáticos enfrentaram para lidar com a ideia de infinito. P1 também busca ilustrar o que é um paradoxo.

A Figura 12 mostra o *slide* introdutório dessa aula.

Figura 12 - *Slide* Abordando o Conceito de Limite



Fonte: Professor P1

A Figura 12 mostra um *slide* do recurso MS *PowerPoint* em que o título é “Conceito de Limite”.

Na sequência de sua aula, P1 expõe aos seus alunos o que significa um paradoxo e apresenta um outro *slide* em que busca tratar da questão do infinito. A Figura 13, mostra um *slide* sobre um dos Paradoxos de Zenão.

Figura 13 - Um dos Paradoxos de Zenão

Paradoxos de Zenão

1) A corrida entre Aquiles e a Tartaruga-

Aquiles via disputar uma corrida com a tartaruga.

Ele corre duas vezes mais depressa que ela.

Ela ganha uma vantagem de 10 metros e Aquiles precisa, exatamente, de um segundo para completar a primeira fase da corrida; isto é, para chegar ao ponto de partida da tartaruga.

v	1	2	3	4	5	
t(s)	1	1/2	1/4	1/8	1/16	

Fonte: Professor P1

Por meio do *slide* *mostrado* na Figura 13, P1 busca apresentar a ideia de um movimento infinito, representado pelos valores da tabela, presente na corrida entre Aquiles e a Tartaruga, destacando que Aquiles nunca alcançará a Tartaruga.

P1, no desenvolvimento dessa parte da aula, busca levar seus alunos a “*perceberem*” que como a Tartaruga nunca será alcançada, o movimento apresentado pelos dois nunca terá fim ou seja, será infinito, algo que os “*antigos não compreendiam*”. P1 expõe que esse movimento “*tende a zero, mas que nunca será zero*”.

Questionamos P1 sobre a escolha desse Paradoxo entre os demais: “*esse é mais conhecido mostra a ideia de um movimento infinito*. Em seguida, perguntamos se ele fez algum estudo histórico e epistemológico sobre o desenvolvimento do Cálculo: “*um estudo propriamente dito, não, mas por meio de minhas leituras e conversando com colegas conheço os problemas relacionados ao ensino de limites.*”

Na sequência, P1 exhibe uma tabela e pede para que seus alunos calcularem os respectivos valores de $f(x)$. Ele vai inserindo os valores de $f(x)$, conforme os alunos vão calculando esses valores por meio de uma calculadora. A Figura 14 mostra essa tabela preenchida.

Figura 14 - Tabela Com Valores Inseridos

limite				
De uma função em um ponto				
	$x < 2$	$f(x)$	$x > 2$	$f(x)$
	1,0	2,0	3,0	8,0
	1,5	2,35	2,5	5,75
	1,8	3,44	2,2	4,64
	1,9	3,71	2,1	4,31
	1,95	3,85	2,05	4,1525
	1,99	3,9701	2,01	4,0301
	1,995	3,985025	2,005	4,015025
	1,999	3,997001	2,001	4,003001

Fonte: Professor P1

De acordo com P1, o objetivo desse preenchimento “é fazer com que os alunos percebam a noção de limite em um ponto.” Movendo o cursor do mouse na tela, ele sobe e desce esse cursor pelos valores das duas colunas da tabela buscando mostrar para os seus alunos que “Tanto para valores menores que 2 como para valores maiores que 2, os valores de $f(x)$ ficam próximos de 4.” Ao término de sua explicação, ele pediu para os seus alunos que representassem, podendo ser apenas um esboço no papel, os valores da tabela em um gráfico.

De acordo com P1, ao propor a tabela, ele quis que os alunos argumentassem por quê conforme se inseriam novos valores nessa tabela, tanto à esquerda quanto à direita, os resultados se “aproximavam de um número limite.” Os poucos alunos que responderam, via *chat*, disseram ter percebido a relação de aproximação ao valor igual a 4.

Por meio das Figuras 13 e 14 e do desenvolvimento da aula de P1 até esse ponto, identificamos a classe de situação “aproximação” em que ele mobilizou diversos recursos buscando introduzir uma noção intuitiva de limite.

As Figuras 13 e 14 também mostram que P1 trabalhou em situações diferentes, pois apresentou a ideia de aproximação por meio de um recurso histórico e outro tabular utilizando mais de uma representação para falar sobre limites.

Para essa classe de situação, P1 também apresentou uma variedade de conceitos relacionados ao campo conceitual de limites, como os campos dos números

reais, variáveis, relações, função, mostrando, na perspectiva da TCC, que o domínio do campo conceitual de limite necessita de vários conceitos de naturezas diferentes para uma mesma classe de situação.

P1, por meio de representações diferentes (MESSIAS, 2018), buscou fornecer um entendimento sobre o conceito de limite antes da sua definição (MOURA, LAUDARES, 2018).

Na busca por dar sentido à ideia intuitiva de limite, P1 propôs situações aos seus alunos que se relacionavam com os significantes linguagem natural, ao discorrerem sobre tendência, às tabelas e às representações simbólicas, tais como, letras e sinais. Entretanto, nenhum aluno usou especificamente o termo “aproximação” para se referir a limite (ALMOULOU; SARDEIRO, 2019).

Com relação aos significados, ou seja, ao esquema observado, inferimos o seguinte teorema-em-ação “a ideia de aproximação deve estar relacionada ao desenvolvimento da capacidade argumentativa do aluno”. E o conceito em ação “capacidade do aluno argumentar.”

Outro *slide* apresentado por P1 é mostrado na Figura 15.

Figura 15 - Slide Abordando a Noção Intuitiva de Limite

Exercícios-

- Olhando a tabela ou o gráfico podemos perceber que quanto o x está mais próximo de 2 o $y=f(x)$ está mais perto do 4

Noção intuitiva de limite: F um função definida “tão próximo quanto quisermos” de um ponto a e quanto mais o x se aproxima de a o t se aproxima de L . Então dizemos que

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ Lemos: o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L

No exemplo escrevemos: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$

Fonte: Professor P1

Por meio da Figura 15, notamos que P1 também busca apresentar a noção intuitiva de limite por meio de diferentes registros de apresentação⁵ (DUVAL, 2013), uma vez que cita a representação da tabela, em linguagem natural e linguagem simbólica.

Questionado sobre usar diferentes representações para introduzir esse conceito ele expôs o seguinte: *“é uma forma de mostrar para os alunos a ideia de aproximação.”* Nesse caso, identificamos uma outra classe de situação proposta por P1: “registros de representação”.

Nessa situação, P1 traduz a representação formal de limites para a linguagem natural, mostra o cálculo do limite de uma função quadrática. Como vimos, Cornu (1983) aponta que existe uma “distância” entre a definição intuitiva de limite e sua definição formal por meio de épsilon e delta, que não deve ser desconsiderada no seu processo de ensino.

Considerando o campo conceitual de limite outros conceitos relacionados a esse campo são novamente apresentados: números reais, variáveis, relações e função, ou seja, outros conceitos de naturezas diferentes.

P1 novamente busca trabalhar com diferentes representações de limite (MESSIAS, 2018) e busca trabalhar com o entendimento do seu conceito antes de defini-lo formalmente.

Na frase *“tão próximo quanto quisermos”*, P1 buscou destacar a ideia de ponto de acumulação que, como vimos, permitiu a estabilização da ideia de limite, portanto, P1 buscou destacar a importância do entendimento desse ponto para uma compreensão satisfatória de limite por parte de seus alunos.

Ao usar mais de uma representação para expor a ideia de aproximação identificamos uma regra de ação nesse uso em que inferimos o teorema em ação: “usar mais de uma forma de representação permite aos alunos perceberem a ideia de aproximação”. O conceito em ação associado: “diferentes representações contribuem para a noção intuitiva de limites”.

⁵ Segundo Duval (2013), a principal dificuldade na aprendizagem da matemática decorre do fato que os objetos matemáticos não possuem existência física e, sendo assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico. Fonte: DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. (2013). In: Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v.2, nº3, jul-dez 2013. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende.

A Figura 16 mostra um *slide* em que P1 busca apresentar uma classe de situação que identificamos como “limites laterais”.

Figura 16 - Slide Abordando um Resultado - Limites e Limites Infinito

Limites Laterais

A função H de Heaviside (engenheiro elétrico que viveu 1850-1925)

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Podemos considerar os dois limites laterais.

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 1$$

Nesse caso se nos interessamos pelo $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$ O que podemos concluir?

Concluimos que esse limite não existe.

Fonte: Professor P1

Assim como nos *slides* anteriores, P1 apresenta limites laterais por meio de um exemplo, a função H de Heaviside, e uma variedade de conceitos relacionados ao campo conceitual de limites, como os campos dos números reais, desigualdades, descontinuidade, variáveis, relações, função, mostrando vários conceitos de naturezas diferentes para uma mesma classe de situação. Por meio desse *slide*, verificamos que P1 visou o entendimento de limites laterais sem apresentar suas definições formais (MOURA; LAUDARES, 2018)

P1, mobilizando representações diferentes (MESSIAS, 2018), buscou apresentar limites laterais por meio da função de Heaviside. Perguntado sobre a escolha dessa função, ele disse que “*Essa função é muito aplicada em outras áreas de exatas, como na engenharia elétrica, em modelagem matemática e que quis mostrar aos alunos uma aplicação de limite*”. Por meio da fala de P1, inferimos o teorema-em-ação: “apresentar limite aplicado em outras áreas de exatas” relacionado ao seguinte conceito-em-ação: “cálculo aplicado”.

Com relação à existência do limite, P1 os fez analisarem, por meio de suas perguntas direcionadas, “*Olhem para a primeira linha da função, qual é a imagem para valores menores que zero, ou seja, para valores à esquerda de zero? E abaixo, à direita de zero?*”. Poucos alunos responderam, porém, as reações dos alunos via *chat*,

mostraram que entenderam que ele não existe, devido aos resultados dos seus limites laterais serem diferentes.

A Figura 17 mostra um *slide* de P1 busca apresentar uma classe de situação que identificamos como “limites infinitos”.

Figura 17 - Slide Abordando Limites e Limites infinito

Um resultado sobre limites/limite infinito

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

o limite não existe pois os laterais são diferentes

Fonte: Professor P1

Assim como nos *slides* anteriores, P1 apresenta limites laterais e limites infinitos buscando um entendimento satisfatório, por parte de seus alunos, antes de defini-los formalmente (MOURA; LAUDARES, 2018). Nesse *slide*, o campo conceitual de limite está relacionado, mais uma vez, a outros conceitos.

Perguntado sobre a opção de buscar apresentar limites sem suas respectivas definições formais, P1 respondeu: *“Eu prefiro que o aluno compreenda, o que são limites, como interpretá-los. Apesar de muitas vezes seguir a sequência do livro didático, eu não gosto de seguir a sequência definição, exemplo e exercício.”*

Inferimos, por meio dessa fala, um esquema relacionado à quebra do contrato didático (BROUSSEAU, 1997), ou seja, P1 não quis seguir a “sequência” que muitos alunos poderiam estar acostumados a vivenciar. O teorema-em-ação observado: “tirar o aluno da sua zona de conforto” e o conceito-em-ação: “Quebra do contrato didático”.

A baixa interatividade dos alunos não foi suficiente identificarmos se a questão do infinito (ARTIGUE, 2002; SIERPINSKA, 1995) causou algum desconforto, pois não houve perguntas direcionadas a P1 sobre a questão do infinito. As perguntas que

foram feitas mais uma vez versavam sobre conhecimentos anteriores que envolviam frações: *“Por que dividiu a fração?”*

Na perspectiva de Cornu (2002), P1 não buscou reduzir os conhecimentos que envolvem limite apenas à sua definição, pois ele buscou trabalhar com aproximações, cálculos e representações distintas. As perguntas feitas por P1 eram com o intuito de instigar seus alunos a refletirem sobre o tópico estudado, portanto ele não enfatizou apenas as técnicas específicas e uma abordagem algébrica (ARTIGUE, 2002).

Como vimos, no contexto do ensino remoto, os desenvolvimentos das aulas remotas sobre limites de P1 ocorriam por meio de *slides* e as interações dos seus alunos praticamente não ocorreram. Conjecturamos que a migração do ensino presencial para o remoto, devido ao contexto pandêmico, causou algum desconforto por parte dos alunos.

Questionado sobre a baixa interação com seus alunos durante sua aula remota (Questão 4 do Questionário 3), P1 expôs o seguinte: *“Na realidade, eles agem assim com todos os professores. Eu não falei nada sobre como deveriam agir. Quando os chamo eles não abrem a câmera. Não sei se é o fato de assistirem aulas pelo celular.”*

Questionamos P1 sobre o não uso de uma mesa digitalizadora ou outro recurso que suprisse a ausência de uma lousa: *“eu tentei usar, mas não me adaptei à caneta da lousa. Não conseguia escrever na mesa digitalizadora de forma a inserir informações nos slides.”* Considerando as dimensões instrumentação e instrumentalização, percebemos que P1 não conseguiu instrumentar-se de algum recurso que suprisse a ausência de uma lousa.

P1 desenvolveu seu trabalho documental ao interagir com seu conjunto de recursos mobilizados por ele para introduzir a noção intuitiva de limites: *slides* criados no MS *Powerpoint*, tópicos da história do desenvolvimento do Cálculo, tabela e representações algébricas. Portanto, ao desenvolver esse trabalho, ele recorreu ao seu conjunto de recursos para introduzir a noção intuitiva de limite e seus esquemas de utilização criando um documento por meio da sua gênese documental.

Questionado sobre suas aulas presenciais e virtuais pedimos para ele fazer um comparativo entre essas duas modalidades de ensino (Questão 1 do Questionário 3): *“Eu não tinha tido experiência com aulas virtuais. E estou aprendendo agora. Vejo como vantagem a possibilidade de favorecimento de usos de outros recursos digitais*

que estão aparecendo, ou seja, tornando o ensino mais próximos de outras atividades nos dias de hoje. As presenciais têm vantagens no que se refere ao conhecimento do aluno. Na busca da individualidade de cada um. Acho a individualidade no ato de aprender muito importante.”

O fato de ele expor que está aprendendo (CHARKZUC, 2020) ao dar aula por meio remoto mostra, sob referencial teórico da ADD, sua evolução profissional, pois ele adaptou sua prática, conhecimentos e crenças para essa modalidade de ensino. Porém, ele considera fundamental o contato direto com seus alunos, pois para ele essa interação permite reconhecer se o aluno está conseguindo aprender ou não. Salientamos que no quadro da ADD, reações dos alunos são consideradas como recursos.

Segundo P1 (Questão 02 do Questionário 3), ele nunca havia ministrado aulas remotas, portanto as aulas atuais foram uma consequência do contexto pandêmico. Presumimos que o fato dele não se apropriar do recurso mesa digitalizadora por meio das dimensões instrumentação e instrumentalização decorre dele nunca ter lecionado cursos *online*. Uma vantagem dessas aulas (Questão 05 do Questionário 3) consiste na possibilidade de serem gravadas e retomadas posteriormente pelos alunos para estudarem seus conteúdos.

As análises das aulas remotas e das classes de situações de P2 identificadas são apresentadas na sequência.

Os acompanhamentos do desenvolvimento das aulas remotas de P2 ocorreram no período entre 14 de Abril e 26 de Abril, às segundas, quartas e sextas.

As aulas remotas de P2 sobre limites foram desenvolvidas por meio da plataforma digital *Google Classroom* e possuem semelhanças com as desenvolvidas por P1, pois assim como P1, P2 desenvolve suas aulas por meio de slides criados no MS PowerPoint em que constam os conteúdos que busca ensinar.

O acompanhamento e a gravação das aulas remotas de P2 ocorreram por meio da plataforma digital que foi o ambiente virtual disponibilizado pela instituição em que trabalha para exercer suas atividades profissionais remotas, ou seja, todo o ambiente de ensino foi preparado e desenvolvido por P2 por meio desse recurso digital (THIELE; CARMO; KAMPHORS, 2020).

Na perspectiva de Charkzuc (2020), observamos que P2, na ausência de uma lousa, adaptou os *slides* do MS PowerPoint para substituí-la e, com a ajuda de uma mesa digitalizadora, inseria informações que considerava pertinentes aos conteúdos

já digitados nos *slides*, ou seja, ele desenvolvia sua aula por meio desses dois recursos.

Portanto, verificamos que a urgência da adaptação de P2 para o ensino remoto, devido ao contexto pandêmico, inclusive no uso da plataforma digital, impactou o dinamismo e as escolhas dos recursos, mobilizados para sua aula.

Durante o desenvolvimento das aulas remotas sobre limites, os alunos de P2, ao se comunicarem com ele, não ligavam suas câmeras e a maioria apenas interagiu quando solicitados.

Quando havia alguma interação, as câmeras dos alunos permaneciam desligadas. Segundo P2, além da questão de nunca terem estudado remotamente, as condições dos equipamentos usados para acessarem as aulas e a qualidade do sinal da Internet também afetavam as decisões de não ligarem as câmeras, pois interferiam na qualidade da transmissão.

Portanto, nesse sentido, também verificamos que as interações remotas entre P2 e seus alunos mostrou uma certa fragilidade (CHARKZUK, 2020), pois era impossível para P2 averiguar as reações dos seus alunos. Na ADD, a reação do aluno em resposta à atividade do professor é considerada um recurso.

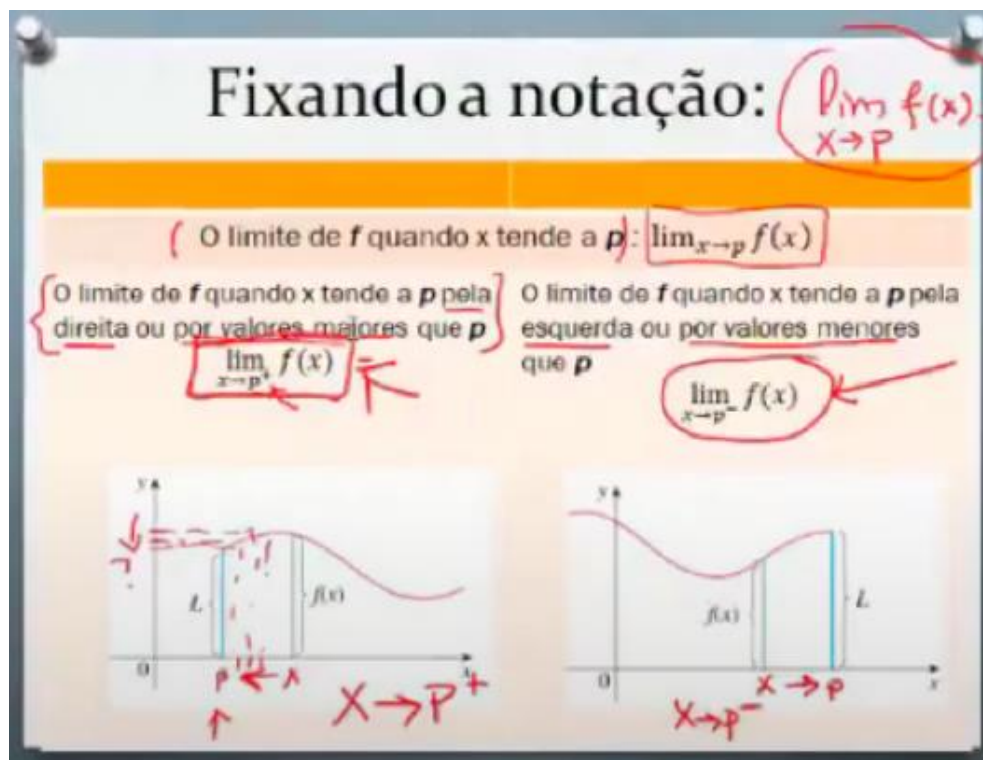
Apesar da disciplina ser Cálculo I, a maioria das perguntas que os alunos faziam tinha relação direta com conteúdos do ensino básico, tais como, “*Por que simplificou a fração?*”, “*Por que o resultado deu positivo?*” ou, ainda, “*Não entendi porque mudou o sinal?*”. Ou seja, as perguntas não abordavam, necessariamente, o conteúdo sobre limites e sim conteúdos do ensino básico.

P2 sempre iniciava suas aulas remotas destacando a importância do conceito de limite para o Cálculo Diferencial e Integral, principalmente para as definições de derivada e integral (BATISTA, 2019).

Durante o desenvolvimento de suas aulas remotas envolvendo limites, P2 não abordou tópicos da história do desenvolvimento do Cálculo ou questões relacionadas à sua epistemologia. Questionado sobre isso, ele expôs que tendo em vista que sempre busca adaptar o PPC do curso ao tempo que tem para ensinar, ele escolhe os temas que julga mais importante para o curso. Ou seja, verificamos as influências institucionais na atividade profissional de P2.

A Figura 18 mostra um slide apresentados por P2 em que busca fixar a notação de limites.

Figura 18 - Fixando a Notação de Limites



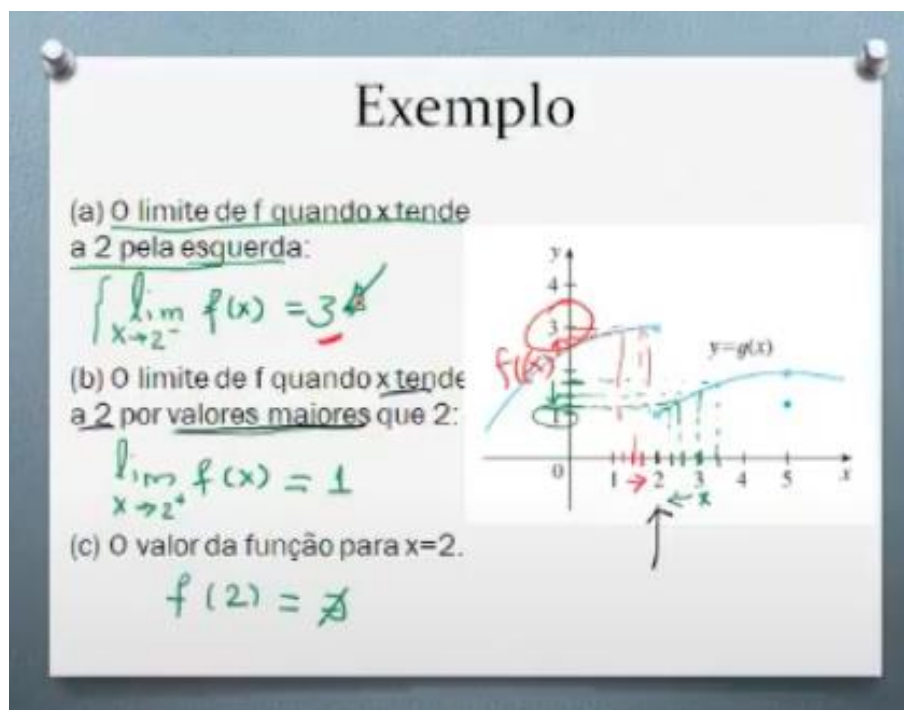
Fonte: Professor P2

Por meio da Figura 18, podemos perceber que existiam anotações, na cor vermelha, que eram escritas na mesa digitalizadora mobilizada por P2 para inserir informações explicativas no próprio slide. Essas anotações apareciam instantaneamente conforme ele as escrevia na mesa por meio de uma caneta própria para esse fim.

De acordo com P2, os alunos deveriam perceber em notação de limite as frases ditadas por ele, ou seja, traduzir para a simbologia matemática dos limites sua representação em linguagem natural.

Para ilustrar seu objetivo, ele desenvolveu com os alunos o exemplo mostrado na Figura 19 em que ele expôs mais uma vez aos seus alunos como representar simbolicamente, o que estava escrito nas frases. Nessa figura, podemos observar as frases dos itens (a) "O limite de f quando x tende a 2 pela esquerda:", (b) "O limite de f quando x tende a 2 por valores maiores que 2" e (c) "O valor da função para $x = 2$ ", em linguagem natural e que deveriam ser representadas por meio da representação simbólica. A Figura 19 mostra o desenvolvimento desse exemplo.

Figura 19 - Exemplo resolvido por P2 envolvendo a Representação Simbólica de Limites



Fonte: Professor P2

Na representação gráfica à direita na Figura 19, P2, frisando aos seus alunos para não se preocuparem com a lei da função, faz anotações que visam a explicar como interpretar as frases junto a essa representação para então escrevê-las na notação dos limites. As respectivas respostas aos itens (a), (b) e (c), nessa simbologia, são escritas por P2 na cor verde à direita no slide.

No desenvolvimento desse exemplo, identificamos a classe de situação “utilizar registros de representação simbólicos de limites”.

Para essa classe de situação, P2 apresentou uma variedade de conceitos do campo conceitual de limites, como dos números reais, linguagem natural, variáveis, relações, função, representação gráfica e aproximação, mostrando, na perspectiva da TCC, que o domínio do campo conceitual de limite necessita de vários conceitos de naturezas diferentes para uma mesma classe de situação.

P2, por meio de representações diferentes (MESSIAS, 2018), buscou fornecer um entendimento envolvendo limite antes da sua definição (MOURA, LAUDARES, 2018).

Verificamos, a preocupação de P2 em cumprir o PPC do curso, pois ele optou por trabalhar a representação simbólica dos limites e limites laterais, em uma mesma classe de situação.

P2 explora os registros de representação simbólicos e gráficos de uma situação cujo tema é a aproximação, indicadas pelas setas no entorno de $x = 2$ na Figura 19. Observamos um esquema em que inferimos o teorema em ação “a visualização, por meio do registro gráfico, contribui para o aluno a perceber o conceito de aproximação” e o conceito em ação associado “desenvolver o conceito de limite por meio do registro de representação gráfico”.

Ao pedir aos seus alunos que utilizassem o registro da língua natural, com frases ditadas, para representar o conceito de limite, identificamos o teorema-em-ação “realizar a mudança de registro de representação da linguagem natural para o simbólico favorece à aprendizagem”. E o conceito-em-ação relacionado é “representação simbólica”.

Uma outra classe de situações que identificamos no desenvolvimento das aulas de P2 foi “ponto de acumulação”, como mostra a Figura 20.

A Figura 20 mostra as informações que P2 inseriu no *slide*, por meio da mesa digitalizadora, para mobilizar o conceito de ponto de acumulação de um conjunto de números reais.

Figura 20 - Desenvolvimento da Explicação sobre Ponto de Acumulação

Situação 3 - Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando todo intervalo aberto de centro em a , contém algum ponto $p \in X$ diferente de a . Um ponto $a \in X$ que não é ponto de acumulação de X chama-se um ponto isolado de X . Desse modo, determine se:

- (a) 2 é ponto de acumulação de $\mathbb{N}$ (conjunto dos número naturais);
- (b) -1 é ponto de acumulação de $\mathbb{Z}$ (conjunto dos número inteiros);
- (c) $2/3$ é ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$ (conjunto dos número racionais);
- (d) $\sqrt{3}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$ (conjunto dos número reais);
- (e) Intuitivamente, podemos afirmar que todo número real é um ponto de acumulação de $\mathbb{R}$?

$x \rightarrow 2$

Fonte: Professor P2

Assim como no caso de P1, P2 buscou destacar a importância do ponto de acumulação de um intervalo de reais para favorecer a compreensão, por parte de seus alunos, do conceito de limite.

Explicando item a item por meio da mesa digitalizadora, como mostra a Figura 20, P2 busca que seus alunos percebam, caso o ponto seja mesmo ponto de acumulação em relação ao conjunto numérico dado, o que significa esse ponto ser de acumulação e sua importância para a compreensão e definição de limite. Nesse sentido e, diferentemente de outras aulas, as interações com seus alunos foram bem dinâmicas, pois a cada item discutido, ele propunha perguntas e seus alunos participavam com suas respostas.

Conforme os pontos de acumulação eram determinados, P2 reforçava o significado “*dessa história de x tender a ou se aproxima de a* ”, questões que Cornu (2002) apontou como geradores de obstáculos epistemológicos, pois, no que concerne à linguagem natural dos alunos, eles sempre trazem para a matemática o que aprenderam durante a vida fora da escola.

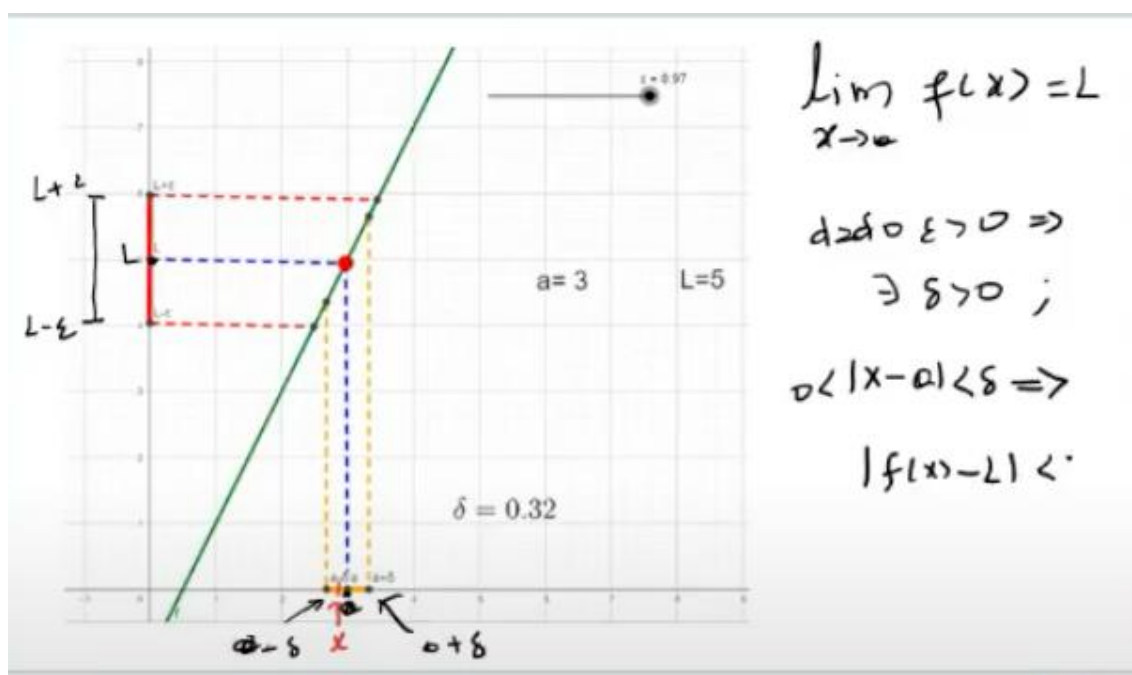
Para essa classe de situação, P2 também apresentou uma variedade de conceitos do campo conceitual de limites, como os campos dos números reais,

registros de representação semiótica, relações, registro de representação gráfico e aproximação, em consonância com a TCC, de que em uma classe de situação há um campo conceitual. Nesse caso o campo conceitual de limite.

P2 desenvolveu seu trabalho documental interagindo com seu conjunto de recursos mobilizados para essa classe de situação: slides criados no MS PowerPoint, mesa digitalizadora, representações gráficas e criando esquemas que permitiram a interação com esses recursos.

A Figura 21 mostra outra classe de situações que identificamos: “Vizinhança de pontos na representação gráfica”.

Figura 21 - Vizinhança de pontos na Representação Gráfica



Fonte: os Autores

Por meio da Figura 21, observamos o desenvolvimento da explicação que envolve elementos da definição formal de limite representado no registro gráfico, construído previamente no GeoGebra. As informações inseridas por P2 por meio da sua mesa digitalizadora aparecem no próprio gráfico e à direita desse. Essas informações visam destacar que “os pontos na vizinhança de a têm suas imagens na vizinhança do L . É o que na representação do registro da língua natural significa dizer: “o limite de $f(x)$ é L quando x tende a a .”

Ao buscar apresentar esses pontos graficamente, P2 corrobora o uso desse recurso e o invariante operatório identificados em sua RESR, ou seja, o esquema de utilização que ele mobiliza ao interagir com o recurso GeoGebra.

Salientamos que segundo Cornu (2002) e Bkouche e Lille (2000), as palavras “tende para” têm significados para os estudantes antes mesmo deles começarem a estudar limite, que é outra palavra que os estudantes também já atribuíram significado, e que eles continuam a depender desses significados mesmo depois da definição formal de limite ter sido apresentada.

Uma variedade de outros conceitos relacionados ao campo conceitual de limites também aparecem nessa classe de situação: campos dos números reais, desigualdades, ponto de acumulação e registro de representação gráfica.

P2 ressalta que calcular limites pela definição “*é algo muito complicado, dependendo da função. É por isso que aqui a gente só vai fazer usando funções afins ou funções bem simples*”. Para mostrar aos seus alunos como se calcula limites, ele resolve o exemplo exibido na Figura XX. Identificamos nessa fala a classe de situações “a definição formal do conceito de limite”.

A Figura 22 exhibe o cálculo do limite $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.

Figura 22 - Desenvolvimento de um Limite por meio da Definição Formal de Limite

The image shows a screenshot of the Xournal software interface with handwritten mathematical work. The work is as follows:

$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \text{ tal que } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |4x - 5 - 7| < \varepsilon$
 $\Rightarrow$ Se $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |4x - 5 - 7| < \varepsilon$ Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$
 $\Rightarrow$ Se $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |4x - 12| < \varepsilon$
 $\Rightarrow$ Se $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |4(x - 3)| < \varepsilon$ Agora vamos verificar no def.
 $\Rightarrow$ Se $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow 4 \cdot |x - 3| < \varepsilon$ porque que $0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Se $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$ $|4x - 5 - 7| < \varepsilon$
 $\Rightarrow$ Se $0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$, então:
 $|4x - 5 - 7| = |4x - 12| = 4 \cdot |x - 3| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$ $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$
 δ

Fonte: Professor P2

A Figura 22 mostra todo o desenvolvimento cálculo do limite $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ que P2 desenvolveu mobilizando os recursos *Xournal*, que lembra uma folha de caderno pautado, e a mesa digitalizadora.

P2 desenvolveu seu trabalho documental interagindo com seu conjunto de recursos mobilizados para desenvolver as classes de situações que identificamos por meio de slides criados no MS *PowerPoint*, mesa digitalizadora, GeoGebra, representações gráficas e o *Xournal*.

A mesa digitalizadora permitiu uma interação dinâmica entre P2 e seus alunos, que também interagiram com seu professor, porém sem ligarem suas respectivas câmeras. A estrutura usada por P2 para trabalhar com a definição formal de limite é, como ele expôs nas análises da sua RESR, similar à sequência do livro didático.

Questionamos P2 sobre suas aulas presenciais e virtuais e pedimos para ele fazer um comparativo entre essas duas modalidades de ensino (Questão 1 do Questionário 3): “Depois de trabalhar por 2 semestres no modelo remoto, estou convencido de que o modelo presencial é insubstituível. Mesmo com o uso de diversos

recursos, o que percebi, a partir da minha experiência e dos relatos de colegas, foi que muitos discentes não conseguem se manter motivados para participar das aulas. Não penso que haja dicotomia entre esses dois modelos, mas sim, que as possibilidades trazidas pelo ensino remoto devem ser incorporadas às aulas presenciais, pois, em minha opinião, só trará benefícios para o processo de ensino e aprendizagem.”

Pedimos para P2 explicar o que ele quis dizer com *“as possibilidades trazidas pelo ensino remoto devem ser incorporadas às aulas presenciais”*. Ele destacou a comunicação remota com seus alunos fora da sala de aula, ou seja, poder tratar do que foi ministrado nas aulas presenciais em encontros remotos fora dos horários de aula. De acordo com P2 (Questão 2 do Questionário 3), ele nunca havia ministrado aulas remotas, portanto as aulas atuais foram, como no caso de P1, uma consequência do contexto pandêmico.

Acompanhando suas aulas, notamos que, aos poucos, seus alunos começaram a buscar interagir com você, algo que nem sempre acontece (Questão 3 do Questionário 3): *“No início eles interagem pouco, mas com o tempo eles foram ganhando confiança e perdendo o medo de falar. Isso eu sempre busco incentivar neles e tem dado certo.”* E sobre as vantagens dessas aulas (Questão 04 do Questionário 3): *“Para mim, apenas o ensino remoto não substitui os benefícios das aulas presenciais (evidentemente dependendo da aula!). Mas se tratando especificamente do ensino remoto, eu vejo que há muitos benefícios, desde que todos os discentes tenham acesso à uma internet de qualidade e um espaço adequado em sua casa para assistir às aulas. Infelizmente, não é isso que tenho percebido com alguns de meus alunos nem com os estudantes da rede básica que participam de aulas remotas realizadas por nossos acadêmicos das disciplinas pedagógicas. Penso que existem dois grandes obstáculos no ensino remoto: (1) Falta de internet de qualidade para todos os discentes; (2) Falta de hábito e de disciplina para os discentes nesse modelo remoto.”*

Portanto, como já mencionado anteriormente por P2, as condições sociais dos seus alunos interferem diretamente na aprendizagem desses e é uma preocupação que ele sente, além de não demonstrarem autonomia e hábitos condizentes com o ensino remoto.

No próximo capítulo, apresentamos as considerações finais da pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação para o desenvolvimento desta pesquisa se alicerçou em nossa prática docente, como professor do ensino superior há quinze anos. Durante este período lecionando, entre outras, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, sendo ela a que mais nos identificamos, principalmente em se tratando do processo de ensino e de aprendizagem de limites, constatei que em muitos casos os conceitos abordados nessa disciplina não são devidamente apropriados e mobilizados satisfatoriamente pelos nossos alunos, principalmente em situações em que esses conceitos não são apresentados de forma explícita e sim em situações-problema.

Ressaltamos que, não responsabilizamos os alunos. Como professor, temos muita responsabilidade na forma como buscamos transmitir os conhecimentos para os alunos, ou seja, nossa prática docente interfere diretamente na apropriação dos conhecimentos por parte deles.

Em nossa trajetória como professor e nas conversas com colegas da área, notamos que o modelo de ensino predominantemente proposto nos processos de ensino e de aprendizagem de limites segue, na maioria das vezes, o modelo tradicional, enfatizando mais o uso de fórmulas, de técnicas e propriedades, ou seja, enfocando mais na racionalidade técnica, do que na apropriação significativa desse conceito. Apesar dessa racionalidade técnica ter sido muito importante para o desenvolvimento do Cálculo, os conceitos essenciais são apresentados como prontos e acabados e não como um conhecimento que foi construído e desenvolvido por séculos, pois esse modelo predominante, na maioria das vezes, ignora inclusive suas origens e motivações históricas.

Essas constatações, nos fazem refletir sobre as limitações do processo de ensino de limites para os alunos, que fazem, na maioria das vezes, que os aceitem sem questioná-los ou reflitam e interpretem com significado ou, ainda pior, abandonem os estudos pelas dificuldades de aprendizagem que encontram ao estudá-lo. Nossa expectativa é que se deve investir em uma educação mais abrangente desse conceito, de forma a superar essa racionalidade técnica e o simples fazer por fazer de regras e propriedades; como, se esse fazer, apesar de satisfatório fosse suficiente em um ensino que se pretende a aprendizagem.

Portanto, com base nessas nossas motivações pessoais, buscamos desenvolver esta pesquisa, no ensino superior, investigando o processo de ensino de limites.

O estudo, inicialmente planejado para ser desenvolvido presencialmente, foi adaptado para ser desenvolvido no contexto pandêmico, impactando em seu desenvolvimento.

A crise sanitária mundial provocada pelo vírus da COVID-19, impactou o cotidiano das pessoas e, no caso da educação, não poderia ser diferente. Nesse contexto, uma solução possível com o intuito de diminuir as perdas na área de educação foi a implantação do ensino remoto por meio de plataformas digitais de trabalho em grupo, tais como, o *MS Teams* e o *Google for Education*.

Nessa perspectiva, a pesquisa buscou investigar a documentação de dois professores do ensino superior em cursos de exatas resultante do ensino e aprendizagem do conceito de limite na modalidade de ensino remota.

Como vimos, é importante investigar problemas de pesquisa no ensino superior, pois estudos anteriores reforçaram as dificuldades que essa área da matemática tem apresentado aos estudantes em todo o mundo. Portanto, buscamos desenvolver a pesquisa visando contribuir com a elaboração de um *corpus* de conhecimentos nesse nível de ensino na educação matemática, com igual relevância ao já produzido para o ensino básico.

Esses estudos também apontaram que há lacunas e conseqüentemente, perspectivas para novas investigações, porém suas abordagens focaram nas vantagens da visualização no entendimento de conceitos, preocupações com a formação de professores e questões relacionadas aos registros de representação semióticas, mostrando que nem sempre contemplaram o conceito de limite. Ressaltamos que esse conceito desempenha, sem dúvida, um papel central na matemática e em especial no cálculo diferencial e integral, pois nele se apoiam as definições de aproximação, continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade e de infinito potencial e atual.

Na educação matemática do ensino superior as pesquisas voltadas ao cálculo direcionam-se ao aprendizado do aluno, a questões relativas ao rigor ou à intuição no cálculo e seu desenvolvimento para a análise real, porém não encontramos muitas pesquisas que investigam a atividade profissional do professor do ensino superior.

No que se refere ao ensino na pandemia e em conseqüência ensino remoto, as análises dos dados da pesquisa mostraram elementos que vão ao encontro dos depoimentos que destacamos na Introdução deste Relatório da pesquisa.

Por meio das entrevistas de P1 e P2, verificamos que ambos não tinham experiência no ensino remoto, corroborando o estudo de Vieira e Silva (2020) que aponta que os professores foram forçados a aprender subitamente a utilizar plataformas virtuais de aprendizagem, sistemas de videoconferência e outros recursos tecnológicos.

Conforme o abordado em Charkzuc (2020), as análises mostraram que a necessidade emergente da migração do ensino presencial para o ensino remoto produziu nos professores P1 e P2 uma urgência em adaptarem as interações com seus alunos e na forma que os conteúdos seriam transmitidos.

Os professores P1 e P2, em um primeiro momento, ocuparam-se em pensar como desenvolveriam suas atividades profissionais e quais recursos subsidiariam o ensino remoto de limites. Entretanto, mesmo preocupados em desenvolverem satisfatoriamente suas respectivas atividades profissionais no meio remoto, o estabelecimento de um laço possível com o conhecimento e com os seus alunos se mostrou frágil, pois a falta de interações, de percepções e de reações deles, durante os desenvolvimentos das aulas remotas, mostrou fragilidades que, conjecturamos, não ocorreriam no ensino presencial.

Portanto, as análises dos dados coletados mostram que, a prática docente no ensino remoto não pode se limitar apenas à migração das aulas tradicionais para a *Internet*, em que os professores acreditam que tudo continuaria como antes. A implementação do ensino remoto às pressas implicou possivelmente em obstáculos que só apareceram com o tempo. Esses obstáculos devem ser considerados a fim de promover um ensino remoto de qualidade.

Na perspectiva da TCC, buscamos identificar nas ações docentes de P1 e de P2 condutas realizadas que se repetiam de modo regular no desenvolvimento de suas aulas remotas e que faziam parte da organização dos seus modos de ensinar. Portanto, buscamos identificar seus esquemas profissionais que se destacavam em uma variedade de situações pertencentes a uma mesma classe por meio de formas invariáveis e estabilizadas em suas respectivas atividades profissionais.

No acompanhamento remoto das aulas de P1, identificamos as seguintes classes de situações: aproximação, registros de representação, limites laterais e limites infinitos. Acompanhando remotamente as aulas de P2, identificamos: ponto de acumulação, vizinhança, representação gráfica e definição formal de limite.

As análises dos dados coletados por meio do acompanhamento das aulas remotas de P1 e P2 para as classes de situações que identificamos mostraram elementos apontados nos outros estudos que obtivemos na revisão bibliográfica.

P1 e P2 buscaram apresentar diferentes registros de representação. Por meio dessas representações (MESSIAS, 2018), buscou fornecer um entendimento sobre o conceito de limite antes da sua definição (MOURA, LAUDARES, 2018).

Os *slides* exibidos por P1 e P2, mostravam conceitos constituintes do campo conceitual de limites que apresentamos na seção 4.3: campos dos números reais, igualdades, desigualdades, frações, intervalos, vizinhança, variáveis, relações, representações, funções, entre outros. Ou seja, corroborando o que Vergnaud (1990) defende em seus estudos quando aponta que um conceito não pode ser ensinado apenas pela sua definição e sim por meio do triplete $C = (S, I, R)$ dentro de um campo conceitual que engloba outros conceitos de natureza distintas. Os *slides* também significantes: linguagem natural, tabelas, expressões algébricas, figuras, etc.

Cornu (2002) aponta que os obstáculos epistemológicos ocorrem por causa da natureza dos conceitos matemáticos. Portanto, no planejamento para ensinar os conceitos matemáticos, é muito importante considerar esses obstáculos.

Apenas P1 buscou mostrar aos seus alunos o que representa a dificuldade da ideia de infinito (SIERPINSKA, 1995; ARTIGUE, 2002) desde o desenvolvimento do Cálculo, ou seja, considerou esse obstáculo epistemológico para o processo de ensino de limites. P2 não recorreu a um estudo histórico e epistemológico do Cálculo, pelo fato, como disse, tinha preocupação em cumprir o PPC do curso com relação aos prazos e conteúdos.

P1 e P2 não reduziram o conceito de limite à sua definição, como mostraram os acompanhamentos das suas aulas remotas. Os professores apresentaram aplicações em outras áreas da matemática, efetuaram cálculos e trabalharam por meio de aproximações e dos diferentes registros de representações semióticas (DUVAL, 2013).

A lacuna entre a definição de limite e o conceito de limite (CORNU, 1983) pode ser identificada nas aulas de P1 e P2, levando os professores a trabalharem com as ideias de aproximação, exercícios e diferentes registros de representação, antes de definirem formalmente o conceito de limite.

Os termos “tender a” e “se aproximar de” (CORNU, 2002) foram mencionados por P1 e P2, tratando da ideia de aproximação, porém nenhum aluno usou

especificamente o termo “aproximação” para se referir a limite (ALMOULOU; SARDEIRO, 2019).

P1 e P2 iniciaram suas aulas remotas abordando limite de modo intuitivo. Moura (1995) destaca que há um conflito entre a intuição de limite de estudantes e o conceito matemático; Artigue (2002) propaga que ao se tentar evitar as dificuldades de formalização e técnicas de aproximação, cria-se um verdadeiro abismo entre a definição do conceito e a imagem do conceito (TALL, 1981).

No contexto pandêmico, os recursos, principalmente os digitais, tais como, as plataformas de trabalho em grupo *MS Teams* e o *Google for Education*, possibilitaram a migração do ensino presencial para o ensino remoto. Essa migração se mostrou urgente, pois devido à pandemia do COVID-19, todas as instituições de ensino estavam fechadas devido ao isolamento social, impactando o ensino no ano letivo de 2020. Portanto, foram os recursos, componentes fundamentais da ADD, que permitiram o retorno às aulas, mesmo que remotamente.

O planejamento e o desenvolvimento das aulas remotas de P1 e de P2 mostraram que eles tinham em comum alguns recursos tais como, o plano pedagógico, o livro didático, o GeoGebra, videoaula e conteúdos exibidos por meio de *slides* no *MS PowerPoint*. Entretanto, os esquemas de utilização construídos por esses dois professores em suas interações com esses recursos para o ensino remoto de limites não foram os mesmos. Isso mostra que, mesmo que compartilhem alguns recursos, as suas crenças influenciam seus trabalhos documentais. Goigoux e Verganud (2005) apontam que é por meio do conceito de esquema que conseguimos estudar o processo de desenvolvimento profissional dos professores.

A triangulação entre os dados coletados por meio das Representações Esquemáticas dos Sistemas de Recursos (RESR) de P1 e de P2, nos acompanhamentos e nas gravações das suas aulas remotas foram essenciais para a identificação das regularidades em suas atividades profissionais. Essas regularidades, nos permitiram identificar os recursos mobilizados por eles no ensino presencial, os recursos apropriados para o ensino remoto, recursos mãe, recursos filhos e seus esquemas profissionais associados.

As respostas de P1 e P2 às entrevistas permitiram a coleta de mais dados para as análises, pois nem tudo que envolvia o trabalho documental deles estava visível. Portanto, foi também por meio dessas entrevistas que buscamos identificar as regularidades no desenvolvimento das respectivas atividades profissionais, as

dimensões instrumentação e instrumentalização para alguns dos recursos que não haviam sido apropriados para o ensino remoto e inferir os esquemas profissionais construídos por eles ao interagirem com seus recursos para as classes de situações que identificamos.

No contexto da MIR, essas entrevistas de confrontação são fundamentais para completar as análises, pois permitem que certos aspectos implícitos nas práticas dos professores fossem revelados.

Notamos que os professores ficaram incomodados com a pouca interatividade de seus alunos durante o desenvolvimento de suas aulas remotas, mostrando mais uma vez as fragilidades e dificuldades de se trabalhar com recursos digitais remotamente (CHARCZUK, 2020). Como destacado pelos próprios professores, a interação entre professor e aluno é fundamental para os processos de ensino e de aprendizagem de qualquer conteúdo, por isso que evocaram a importância das aulas presenciais.

A pesquisa estudou dois casos específicos, porém tivemos informações por diferentes fontes, colegas, jornais, mídias que essa constatação ocorreu com a maioria dos professores, ou seja, terem de desenvolver sua prática profissional em um ambiente virtual que nunca trabalharam.

P1 e P2 expuseram que a maioria dos recursos mobilizados para o ensino remoto faziam parte de seus sistemas de recursos para o ensino presencial, portanto muitos dos recursos mobilizados para o ensino remoto haviam sido apropriados antes do contexto pandêmico. Essa constatação reforça, dentro do quadro da ADD, a importância que os recursos digitais têm na atividade profissional e na documentação dos professores.

Entretanto, novos recursos tiveram que ser apropriados por P1 e por P2 por meio dos processos de instrumentação e instrumentalização para o desenvolvimento das suas aulas remotas, portanto, podemos afirmar que os eles criaram novos documentos por meio de suas gêneses documentais.

Os esquemas de utilização que inferimos, ressaltamos que esses devem ser vistos como interpretações possíveis (GUEUDET; TROUCHE, 2008), pois esses esquemas precisam ser comprovados por meio de novos estudos e de outras pesquisas.

As atividades produtivas de P1 e de P2 podem ser identificadas nos planejamentos e desenvolvimentos de suas aulas remotas para o ensino de limites.

Nesse sentido, quando selecionaram, adaptaram e criaram novos recursos para essas aulas remotas, desenvolveram atividades construtivas. Portanto, a migração do ensino presencial para o ensino remoto, contribuiu para a evolução profissional tanto de P1, quanto de P2.

Em sua pesquisa com professores universitários, Gueudet (2017) apontou que o recurso livro didático, além de ser o recurso mais mobilizado pelos professores sujeitos da pesquisa, estruturam as suas aulas. Esses professores também preparam, adaptam e desenvolvem suas aulas com base no grau de conhecimento dos seus respectivos alunos. Ou seja, dois dados que também verificamos em nossas análises.

A autora também destacou que os professores não desenvolviam trabalho coletivo em suas respectivas universidades. Segundo ela, raramente o trabalho de documentação se assemelhava a um trabalho coletivo e que recursos, potencialmente interessantes e projetados pelos próprios professores, não eram compartilhados com os demais colegas. P1 e P2 disseram que também não desenvolvem trabalhos coletivos com seus colegas, outro dado que vai ao encontro do que Gueudet (2017) expôs em seu estudo.

Portanto, podemos perceber que tanto os professores universitários brasileiros quanto os franceses possuem algumas semelhanças quando exercem suas atividades profissionais, mesmo que essas semelhanças sejam bem pontuais.

Na seção 2.3, apresentamos a delimitação do problema, a questão problematizadora que orientou nossos procedimentos de pesquisa e os objetivos. No que segue expressamos as conclusões em que indicamos propriamente os resultados da pesquisa.

5.1 Conclusões

Para respondermos à questão de pesquisa, identificamos nos acompanhamentos das aulas remotas de P1 e de P2 sobre limites, classes de situações, os recursos mobilizados para essas classes e inferimos seus esquemas associados, ou seja, como os professores elaboravam seus documentos.

Conforme descrito na seção 4.4 a primeira classe de situação proposta por P1 foi aquela relacionada à compreensão dos estudantes sobre “aproximação”, em que ele trabalha com a ideia de movimento infinito por meio de um dos Paradoxos de

Zenão e a noção intuitiva do conceito de limite mobilizando como recursos *slides* do *Powerpoint*, a história do desenvolvimento do Cálculo e registros de representação gráfica, tabela e linguagem natural. Esses registros mostram outros conceitos dentro do campo conceitual de limites.

Como vimos, com relação aos significados, ou seja, ao esquema observado, inferimos o seguinte teorema-em-ação “a ideia de aproximação deve estar relacionada ao desenvolvimento da capacidade argumentativa do aluno”. E o conceito em ação “capacidade do aluno argumentar.” Portanto, considerando que na ADD um documento é composto por recursos mais os esquemas de utilização associados, podemos afirmar que P1 criou um documento para essa classe de situação.

Para a classe de situação “registros de representação”, em que P1 também trabalha com a noção intuitiva de limite, ele mobilizou praticamente os mesmos recursos, porém destacando os recursos que englobam os registros de representações linguagem natural e linguagem simbólica e também considerando o escopo do campo conceitual de limite.

Ao usar mais de uma representação para expor a ideia de aproximação a regra de ação identificada constituiu o teorema em ação associado: “usar mais de uma forma de representação permite aos alunos perceberem a ideia de aproximação” e o conceito em ação associado: “diferentes representações contribuem para a noção intuitiva de limites”. Portanto, P1 elaborou outro documento para essa classe de situação.

Uma outra classe de situação de P1 foi identificada e analisada: “limites laterais”. Para essa classe, também identificamos outro documento elaborado por ele ao mobilizar seus recursos, *slides* do *Powerpoint*, registro de representação língua falada e associá-los aos seus esquemas de utilização.

Assim como em outros *slides* anteriores, P1 apresenta limites laterais por meio de um exemplo, a função H de Heaviside, e uma variedade de conceitos relacionados ao campo conceitual de limites. Para essa classe de situação, por meio da fala de P1, inferimos o teorema-em-ação: “apresentar limite aplicado em outras áreas de exatas” relacionado ao seguinte conceito-em-ação: “cálculo aplicado”.

A última classe de situações de P1 que identificamos foi “limites infinitos”. Para essa classe de situação, P1 apresentou limites laterais e limites infinitos buscando um entendimento satisfatório, por parte de seus alunos, antes de defini-los formalmente. Nesse *slide*, o campo conceitual de limite está relacionado, mais uma vez, a outros

conceitos. O teorema-em-ação observado: “tirar o aluno da sua zona de conforto” e o conceito-em-ação: “Quebra do contrato didático”. Portanto, na perspectiva de documento na ADD, P1 também elaborou mais um documento.

Os acompanhamentos remotos das aulas de P2 que abordavam limites, também permitiram a identificação de outras classes de situações.

A primeira classe de situação de P2 que identificamos foi “utilizar registros de representação simbólicos de limites”. Nessa classe, P2 buscou que seus alunos percebessem em notação de limite as frases ditadas por ele, ou seja, traduzir para o registro de representação simbólica dos limites os registros de representação linguagem natural ditados. Novamente, o escopo dos campos que fazem parte do campo conceitual de limite foi englobado.

Nessa classe situação, P2 mobilizou os recursos *slides* do *Powerpoint*, mesa digitalizadora, os registros de representação já mencionados e o registro de representação gráfico. Observamos um esquema em que inferimos o teorema em ação “a visualização, por meio do registro de representação gráfico, contribui para o aluno a perceber o conceito de aproximação” e o conceito em ação associado “desenvolver o conceito de limite por meio do registro de representação gráfico”. E, ao pedir aos seus alunos que utilizassem o registro de representação linguagem natural, com frases ditadas, para representar o conceito de limite, identificamos o teorema-em-ação “realizar a mudança de registro de representação da linguagem natural para o simbólico favorece à aprendizagem”. E o conceito-em-ação relacionado é “representação simbólica”.

Portanto, dentro do aporte teórica da ADD, P2 elaborou um documento para essa classe de situações.

Uma outra classe de situações que identificamos no desenvolvimento das aulas de P2 foi “ponto de acumulação”. Por meio do uso dos recursos *slide* do *Powerpoint* e de sua mesa digitalizadora mobilizados para o conceito de ponto de acumulação de um conjunto de números reais e do seu esquema de utilização associado, P2 elaborou mais um documento, nesse caso, para a classe “ponto de acumulação”. Esse documento foi elaborado enquanto P2 discutia com seus alunos exemplos que mostravam se um ponto, de um determinado conjunto numérico, era ou não ponto acumulação desse conjunto.

Outra classe de situação foi identificada por meio do acompanhamento das aulas remotas de P2: “Vizinhança de pontos na representação gráfica”. Para essa

classe de situações, ele usou os mesmos recursos mobilizados nas classes anteriores e também o recurso digital GeoGebra. Nessa classe de situações, P2 buscou explicar elementos da definição formal de limite por meio do registro de representação gráfico.

Com base no exposto por P2, inferimos um esquema de utilização construído por ele, associado à regra de ação “apresentar os conceitos matemáticos e suas representações no GeoGebra”. O teorema em ação pode ser formulado como “os alunos compreendem melhor objetos matemáticos quando apresentados no GeoGebra” e o conceito em ação associado “compreensão e visualização de objetos matemáticos”. Portanto, P2 criou um documento para essa classe de situações.

Identificamos uma outra classe de situações de P2 : “a definição formal do conceito de limite”. Nessa classe de situações, ele resolve o limite $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ por meio da definição formal do conceito de limite em que busca mostrar a complexidade que é resolver limites por meio de sua definição formal.

P2 mobilizou os recursos *Xournal*, que lembra uma folha de caderno pautado, e a mesa digitalizadora *slides* criados no MS *PowerPoint*, mesa digitalizadora e GeoGebra associando-os aos seus esquemas já construídos, portanto elaborando um novo documento para essa classe.

Com a identificação dos documentos criados por P1 e por P2 para cada uma das classes de situações, identificados pelo acompanhamento das aulas remotas sobre limites, pudemos segundo os ambientes e condições impostas pelo momento pandêmico responder:

Como são elaborados documentos de professores universitários para introduzir o conceito de limite de uma função em um curso de exatas, no ensino remoto?

Respondemos a esta questão tendo a percepção por meio das análises dos dados que expusemos até aqui, do como esses professores P1 e P2 elaboraram, ou seja, criaram seus documentos para o ensino remoto de limites. Isso decorreu da escolha de recursos feitos na preparação de suas aulas esse processo de ensino, os professores interagiram com recursos que já haviam apropriados, tiveram que se apropriar de novos e, para tanto, o fizeram por meio de seus esquemas profissionais que observamos, inferimos e apresentamos em nossas análises. Ressaltamos que foi por meio desses esquemas que conseguimos (GOIGOUX; VERGANUD, 2005).

Os apontamentos até aqui expostos nos identificaram os documentos dos professores universitários, por meio de suas gêneses documentais ao interagirem com recursos para o ensino remoto de limite de funções, que foi o objetivo geral da pesquisa e identificar, também, os objetivos específicos: os recursos que os professores selecionaram, os esquemas de utilização desses professores, ao interagirem com seus recursos para introduzir limites de funções no ensino remoto e avaliar o fenômeno da gênese documental no desenvolvimento de seus documentos para o ensino remoto de limites de função.

No que se refere ao conceito matemático focado, limite de uma função, salientamos que há ainda muito a ser investigado sobre o ensino de limite, devido à importância desse conceito no ensino do cálculo e da matemática. Os obstáculos de aprendizagem, hábitos de professores, mudanças relacionadas ao uso de *softwares* e o impacto dessas mudanças no ambiente de aprendizagem, por exemplo, precisam de mais estudos aprofundados.

Por fim, destacamos que a elaboração de um documento está intimamente atrelada ao seu uso e, considerando que a gênese documental é um processo em que o acompanhamento ocorre por longos períodos de observação, apontamos para a perspectiva de novas investigações no ensino remoto como consequência deste trabalho.

Para finalizar propomos, como pesquisa futura, o acompanhamento de professores universitários em ensino de limite na forma presencial, em que esperamos em outra realidade poder dar conta dos princípios da MIR, e refletir sobre os documentos resultantes de forma cooperativa com os sujeitos de pesquisa. Para nós significaria uma evolução na busca da compreensão das documentações de professores universitários, em condições talvez de se efetivar comparação entre essas documentações em duas modalidades de ensino, presencial e remota, ampliando as contribuições para a educação matemática do ensino superior.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P. Articulações teóricas sobre a abordagem documental do didático. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: v. 21, n. 5, p. 217-229, 2019. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/emp/article/download/45494/pdf>>
- ALMEIDA, M.S.; NASCIMENTO, R.A. Avaliação em Matemática Aliada ao Processo de Ensino e Aprendizagem: do trabalho documental às representações sociais. **Ensino da Matemática em Debate**. PUC - SP. São Paulo: v.7, n.2, p.231 - 262. 2020.
- ALVES, E. S.; ASSIS, C.F.C. A gênese documental na formação de professores de Matemática: interações entre o livro didático e a geometria dinâmica. **Ensino da Matemática em Debate**. PUC - SP. São Paulo: v.5, n.3, p.342 - 366. 2018.
- ARAÚJO, M. M. **A construção do conceito de limite através da resolução de problemas**. Dissertação - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2022.
- ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. **Recherces En Didactique Des Mathématiques**, Grenoble, v. 10 – 2.3, p. 241-286, 1990.
- _____, M. Analysis. In: TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking – Mathematics Education Library**. New York: Kluwer Academic Publisher, 2002.
- ASSIS, C.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. A Metamorfose do Sistema de Recursos de Licenciandos em Matemática na Formação Inicial. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**. [S. l.], v. 6, n. 16, p. 33–47, 2019. DOI: 10.30938/bocehm.v6i16.908. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/908>.
- ASSIS, C. Os Recursos do Professor de Matemática e a Perspectiva Documental do Trabalho Docente. **Revista Educação Matemática em Foco**, UFPB. v.9, n.1, p. 10 – 32, 2018.
- ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. Tradução de Estela dos Santos Abreu.
- BARON, M. E; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Vol 1-5. Trad. de José Raimundo Braga Coelho. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.
- BATISTA, L. A. L. **Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos**. 2019. Dissertação - Mestrado em Educação em Ciências e Matemática – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. In: **I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**. Mato Grosso do Sul, 2016.

BIFANO, F. Institutional resources at university admission: emerging documental identity for the analysis of the professor's work. In V. Gitirana et al, (Eds.). **Proceedings of the Re(s)ources 2018 international conference**, p. 147 a 150. Lyon: ENS de Lyon, 2018. Disponível em: <https://resources-2018.sciencesconf.org/resource/page/id/8>

BKOUICHE, R.; LILLE, I. Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science. **Repères – Irem**, n. 39, p. 35-59, abr. 2000.

BOYER, C. B. **The history of calculus and its conceptual development**. New York: Dover publications, 1959.

_____. **Cálculo - Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. v. 6. São Paulo: Editora Atual, 1992. Trad. de Hygino H. Domingues.

_____. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1996. Tradução de: Elza F. Gomide.

BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques**. Reserches en didactique des mathématiques. n. 4. 2, 165-98.1983.

_____. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2000.

CHARCZUK, S. B. Sustentar a Transferência no Ensino Remoto: docência em tempos de pandemia. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 4, n. 45, p. 01-20, abr. 2020.

CORNU, B. Interférence des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite. **Séminaire de Recherche Pédagogique**, n. 8, Université de Grenoble I, 1980.

_____, B. Limits. In: TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking – Mathematics Education Library**. New York: Kluwer Academic Publisher, 2002.

CRESWELL, J. **Projeto de pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

DÉSIRÉ, M. The importance of documentary and digital resources in the definition of quality of higher education. In V. Gitirana (Eds.). **Proceedings of the Re(s)ources 2018 international conference**, pp. 123 a 124. Lyon: ENS de Lyon, 2018. Disponível em: <https://resources-2018.sciencesconf.org/resource/page/id/8>

ESPÍNDOLA, E.; TRGALOVÁ, J. Trabalho Documental e Decisões Didáticas do Professor de Matemática: um estudo de caso. **Revista Em Teia**. Vol. 6. No 3. 2015.

FERREIRA, R. D. **Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas**. Tese (Doutorado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - SP, São Paulo, 2021.

FONSECA, V. G. Aprendizagem com Compreensão dos Conceitos de Limite e Continuidade: Uma Experiência de Ensino com Recurso ao Geogebra na formação Inicial de Professores de Matemática, no Brasil. **Revista Proquest**, Lisboa, p. 1-27, dez. 2019.

GITIRANA, V.; MIYAKAWA, T.; RAFALSKA, M.; SOURY-LAVERGNE, S.; TROUCHE, L. (Eds.). **Proceedings of the Re(s)ources 2018 international conference**. ENS de Lyon, 2018.

GOIGOUX, R.; VERGNAUD, G. Schèmes professionnels. **Revue de l'association internationale de recherches en didactique du français, AiRDF**, 2005, n. 36, pp. 7-10

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S.; NARDI, E.; BIZA, I. From resource to document: scaffolding content and organising student learning in teachers' documentation work on the teaching of series. **Educational Studies in Mathematics**, v. 98, n. 3, pp. 231-252, 2018.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. **Éducation et didactique**. n. 2(3). p. 7-33. <Disponível em: <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342> >. 2008.

_____. Towards new documentation systems for teachers? **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p.199-218, jul. 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/225160266_Towards_new_documentation_systems_for_mathematics_teachers_Educational_Studies_in_Mathematics_713_199-218.

_____. Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires - pp.43-55 - In Ressources vives- Le travail documentaire des professeurs en mathématiques – **Collection Paideia – Education, Savoir, Société** GUEUDET, G., TROUCHE L. (Orgs). Rennes: Presses universitaires de Rennes, 2010

_____. **Ressources vives. le travail documentaire des professeurs en mathématiques**. Rennes / Lyon: Presses Universitaires de Rennes/INRP, 2010.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Do trabalho documental dos professores: gêneses, coletivos, comunidades: o caso da Matemática. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Vol. 6, n. 3, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2243>.

GUEUDET, G.; BUTEAU, C.; MESA, V.; MISFELDT, M. Instrumental and documentational approaches: from technology use to documents systems in university mathematics education. **Research in Mathematics Education**, v. 16, n. 2, pp. 139–155, 2014.

GUEUDET, G. University Teachers' Resources Systems and Documents. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 3, p.198-224, abril 2017. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0034-1>

_____. Studying Teachers' Documentation Work: Emergence of a Theoretical Approach. In L. Trouche, G. Gueudet, e B. Pepin (Eds.), **The 'resource' approach to Mathematics Education**. Springer series Advances in Mathematics Education (pp. 447-489), 2019.

GUSSO, H. L. *et al* (org.). Ensino Superior em tempos de pandemia: diretrizes à gestão universitária. **Debates e Polêmicas**, Campinas, v. 41, n. 20, p. 1-27, 2020.

HAMMOUD, R. **Le Travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement des connaissances professionnelles. Contribution au développement de l'approche documentaire du didactique**. Tese de doutorado. L'Université Claude Bernard Lyon 1 e L'Université Libanaise. 2012.

IGLIORI, S. TROUCHE, L. (orgs.). **10 Seminários em torno da Abordagem Documental do Didático**. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, 2021.

IGLIORI, S. B. C.; ALMEIDA, M, V. Desenvolvimento de Material para o Ensino de Conceitos do Cálculo Diferencial. **Anais do VI SIPEM**, nov. 2015.

IGNÁCIO, R. S. **Criação de capítulo de livro didático digital no Estágio Curricular Supervisionado: uma análise da documentação na formação inicial do professor de Matemática**. 2018. 1 v. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Centro Universitário Anhanguera, São Paulo, 2018.

LIMA, G. L.; BIANCHINNI, B. L.; GOMES, E. Cálculo e análise: mapeamento das pesquisas do GT04 - educação matemática no ensino superior. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 112- 134, dez. 2019.

LIMA, I.; TRGOLOVÁ, J. Trabalho coletivo de professores de Matemática: um olhar na perspectiva da gênese documental. **Ensino de Matemática em Debate**. PUC - SP. São Paulo: v.5, n.3, p.289-304. 2018.

MACHADO JÚNIOR, S. R. N.; ESPÍNDOLA, E. B. M.; TRGALOVÁ, J.; LUBERIAGA, E. Abordagem Documental do Didático e o ensino de equação do 1º grau na Educação de Jovens e Adultos Ensino Médio. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 270-294, 2018. Disponível em: <[http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article /view/1561](http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/1561)>

MARTINEZ, M.; CRUZ, R.; SOBERANES, A. The mathematical teacher: a case study of instrumental genesis in the UAEM. In V. Gitirana (Eds.). **Proceedings of the Re(s)ources 2018 international conference**, pp. 211 a 214., Lyon: ENS de Lyon, 2018. Disponível em: <https://resources-2018.sciencesconf.org/resource/page/id/8>

MESSAOUI, A. **Développement de l'expertise documentaire des professeurs dans des situations de mutations de leur enseignement: le cas de professeurs de mathématiques et d'anglais**. Tese de Doutorado. L'Ecole Normale Supérieure de Lyon. 2020.

MESSIAS, M. A. V. F. **Teorias cognitivas do pensamento matemático avançado e o processo de construção do conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade**. 2018. 1 v. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Ciências. Universidade Federal do Pará.

MESSIAS, M. A. V. F.; BRANDEMBERG, J. C. Uma decomposição genética para o objeto matemático limite de uma função. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Manaus, v. 17, n. 38, p. 6-23, dez. 2021.

MOGENS, N., ed., **Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education**. IMFUFA, Roskilde University, Roskilde, 2008, 559 p. + CD.

MOURA, D. A. S.; LAUDARES, J. B. Estudo do limite de uma função: análise com um objeto de aprendizagem para cursos de engenharia e matemática. **Revista de Ensino de Engenharia**, Brasília, v. 36, n. 2, p. 35-46, dez. 2018.

MOURA, E. *Students alternative frameworks about the notion of limit*. **Quadrante**, [S. l.], v. 4, n. 1, p. 67–82, 1995. DOI: 10.48489/quadrante.22662. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22662>. Acesso em: 30 jan. 2023.

NEWTON, I. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural** - livro I. São Paulo: EdUSP, 2008.

PANZA, M. Das velocidades às Fluxões. **Scientiæ Zudia**. São Paulo: v. 8, n. 4, p. 509 - 546, 2010.

REZENDE, M. C. *et al* (orgs). **Marcas da educação matemática no ensino superior**. São Paulo: Papirus, 2013.

RIBEIRO, A. J. *et al* (orgs). **Mathematics Education in Brazil: Panorama of Current Research**. Springer-Link, 2018.

ROCHA, K. M.; TROUCHE, L. A Trajetória Documental: uma análise da história da integração de recursos na prática do professor de matemática. **Ensino de Matemática em Debate**. São Paulo: v. 5, n. 3, p. 321-341, 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/issue/view/2015/showToc>

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Ed. Zahar. 3ª ed. Rio de Janeiro. 2012.

SABRA, H. **Contribution à l'étude du travail documentaire des enseignants de mathématiques: les incidents comme révélateurs des rapports entre documentations individuelle et communautaire**. Tese de Doutorado. L'Université Claude Bernard Lyon 1. 2012.

SABRA, H. L'étude des rapports entre documentations individuelle et collective: Incidents, connaissances et ressources mathématiques. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, v. 36, n. 1, pp. 49–95, 2016. <https://revue-rdm.com/2016/l-etude-des-rapports-entre/>

SANTOS, M. B. S.; ALMOULOU, S. A. O estudo do limite de uma função: o que disseram os alunos: o que disseram os alunos?. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 25, p. 350-380, 27 fev. 2019. Biblioteca Central da UNB. <http://dx.doi.org/10.26512/lc.v25.2019.21852>.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. **Recherches en Didactique des Mathématiques** v. 1 n. 6, pp. 5–67, 1985.

SOARES, G. O. **O Conceito de Limite na Formação Inicial de Professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática**. 2018. Dissertação - Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2018.

THIELE, T.; KAMPHORST, E. M.; KAMPHORST, C. H. Atividades de investigação em Cálculo Diferencial e Integral: uma proposta para o ensino do conceito de limite de uma função com o software GeoGebra. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 2, p. e2002, 2020. DOI: 10.35819/remat2020v6i2id3987. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3987>. Acesso em: 30 jan. 2023.

TROUCHE, L. **A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans "un environnement calculatrice"**: étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. 1996. 417 f. Tese (Doutorado), Université Montpellier II, Montpellier, 1996.

_____. Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Environments: Guiding Student Karlson's Command Process Through Instrumental Orchestrations. **International Journal of Computers for Mathematical Education**. n. 281. 2004.

_____. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en didactique des mathématiques**. n. 25. p. 91-138. 2005.

TROUCHE, L.; GUEUDET, G.; PEPIN, B. Documentational Approach to Didactics. In S. Lerman (Ed.). **Encyclopedia of mathematics education**. Cham: Springer. 2018.

_____. **The 'Resources' Approach to Mathematics Education.** Lyon, França: Springer Nature, 2019.

_____. A Abordagem Documental do Didático. **HAL.** Adaptação ao Português: Assis, C. E Rocha K. Revisor: Iglori, S. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02664943v1/document> , 2020.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. **Addition and subtraction. A cognitive perspective.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques. RDM**, v. 10, n. 2-3, p.133-170, 1990.

_____. Toward a cognitive theory of practice. In Sierpinska, A.; Kilpatrick, J. (Eds.), **Mathematics education as a research domain: A search for identity** (pp. 227-241). Dordrecht: Kluwer. 1998.

_____. *A comprehensive theory of representation for Mathematics Education.* **Journal of Mathematical Behavior**, v. 2, n. 17, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, G. et al. *Epistemology and psychology of mathematics education.* In : NESHER, P. ; KILPATRICK, J. (Eds.) **Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

WOLLINGER, C.; Gruber O.; Allain P. (orgs.). **Didática Profissional: princípios e referências para a educação profissional.** Florianópolis: Publicação do IFSC, 2019.

XAVIER NETO, A. L.; SILVA, M. J. F.; TROUCHE, L. A construção de atividades para o ensino de sequências numéricas: Uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático. **Educação Matemática Pesquisa.** PUC - SP. 2019.

ANEXO A – QUESTIONÁRIOS

Questionário 1: Perfil profissional do professor.

(01) Descreva seu perfil como professor participante desse estudo: sua formação, sua experiência profissional, o perfil da sua turma de alunos e a unidade de ensino em que trabalha.

(02) Com relação à sua atividade profissional, descreva o conjunto de restrições e regras institucionais e sociais que influenciam sua prática docente.

(03) Com relação ao seu trabalho coletivo, você trabalha com colegas na preparação das suas aulas, materiais e recursos? Se sim, que tipo de trabalho coletivo vocês desenvolvem? Já desenvolveram algum recurso coletivamente?

Questionário 2: Sistema de Recursos do professor.

(01) Durante a preparação de sua aula, você segue um roteiro próprio e específico? Onde e como elas são preparadas? Quais recursos você usa para prepará-las?

(02) Observando diretamente sua aula virtual, verifiquei que sua atividade profissional como professor compreende um conjunto de recursos (materiais e digitais):

(a) Você já os utilizava antes de seu trabalho remoto? Por quê? Se sim, como eles contribuíram para suas aulas?

(b) Quais motivos o levaram a escolher esses recursos?

(c) Você teve que produzir (ou criar), modificar e adequar algum recurso? Por quê?

(d) Você inicialmente optou por usar algum recurso em suas aulas, mas depois desistiu de seu uso? Por quê?

Questionário 3: Experiência do professor no ensino remoto.

(01) Qual sua opinião sobre aulas presenciais? E virtuais? Pode descrever os prós e contras de cada uma delas? Você considera que existem dicotomias entre essas duas modalidades? Por quê?

(02) Você já havia lecionado por meio de aulas virtuais e/ou remotas anteriormente? Ou foi uma consequência da pandemia?

(03) Você pode descrever as suas percepções sobre os benefícios e as dificuldades de se trabalhar remotamente (organização e preparação da aula, ausência de lousa física, interações naturais ausentes com seus alunos, problemas de conectividade,

dificuldades inerentes ao ensino virtual remoto, alunos com as respectivas câmeras do dispositivo desligadas e outras percepções inerentes à sua prática profissional)?

(04) Considerando que a maioria dos seus alunos interage prioritariamente por meio do *Chat*, ao invés da câmera e/ou áudio do dispositivo eletrônico, você considera que existe um motivo explícito para os alunos interagirem com você dessa forma ou foi um acordo entre vocês (professor e alunos)?

(05) Você considera que a gravação das aulas virtuais é um recurso que proporciona uma melhora em relação às aulas presenciais? Por quê?

ANEXO B – PLANO PEDAGÓGICO DE CÁLCULO 1 – PROFESSOR P1**PROJETO PEDAGÓGICO****CÁLCULO 1****OBJETIVOS:**

Geral: Desenvolver competências e habilidades para a aplicação dos conceitos do Cálculo.

Específicos: Explorar as diferentes representações dos conceitos; propor situações problemas que envolva conceitos da disciplina, utilizar diferentes contextos, apresentar modelos matemáticos que expressem fenômenos do curso

Estratégias de ensino

Aulas expositivas, trabalhos em grupo, modelação, situações problema

Ementa

Estudo dos conceitos fundamentais do cálculo diferencial e integral de funções reais a uma variável real. Aplicações dos conceitos, exploração de situações problema e modelação de fenômenos relativos ao curso.

Programação

Números Reais: conjuntos numéricos; desigualdades, valor absoluto e intervalos.

Função: definição, representações, funções especiais, funções pares e ímpares, funções periódicas, função inversa e funções elementares.

Limite e continuidade: noção intuitiva, definição, propriedades de limites, limites laterais, cálculo de limite, limites no infinito, limites infinitos, limites fundamentais e continuidade.

Derivada: a reta tangente, velocidade e aceleração, a derivada de uma função em um ponto, a derivada de uma função, continuidade de funções deriváveis, regras de derivação, derivada de função composta (regra da cadeia), derivada da função inversa, derivadas das funções elementares, derivadas sucessivas, taxa de variação, análise marginal, máximos e mínimos, funções monotônicas, extremos de uma função, concavidade e pontos de inflexão, análise geral do comportamento de uma função.

Integrais: integral definida, método de substituição ou mudança de variável, método de integração por partes, área, distâncias, integral definida, teorema fundamental do cálculo, cálculo de áreas, extensões do conceito de integral

Bibliografia

Básica:

ANTON, H, et al. Cálculo. vol I. Tradução 10ª edição, Bookman. 2014

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração. 6ª edição ampliada, São Paulo: Pearson Prentice Hall Books, 2006.

STEWART, J. Cálculo. volume. 1. tradução da 8ª ed. São Paulo, SP, Cengage Learning, 2017.

Complementar:

GUIDORIZZI, H. L. – Um Curso de Cálculo. 5ª ed. vol I – LTC, 2012

LARSON, R.E. et al Cálculo – v. 1 8ª ed, McGraw-Hill, 2006

LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. 3.ed. vol. 1. Harbra, 2002.

SIMMONS, George F. – Cálculo com Geometria Analítica, v.1. Markon Books do Brasil Editora Ltda, 2014.

SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo com Geometria Analítica, v.1. São Paulo: Makron Books, 1994.

Cronograma

Data	Conteúdos
04/03	Conjuntos numéricos; desigualdades, valor absoluto e intervalos.
05/03	Função: definição, representações, funções especiais,
11/03	Funções pares e ímpares
12/03	Funções elementares: afim e quadrática- polinomiais-
17/03	Funções elementares: racionais e transcendentess
18/03	Funções exponenciais.
25/03	Funções logarítmicas.
26/03	Funções periódicas
26/03	Funções trigonométricas
01/04	Exercícios de aplicação
02/04	modelagem
08/04	Investigação em classe
09/04	A noção intuitiva de limite: tabela de números e paradoxos de Zenão
15/04	Propriedades dos limites- limites laterais
16/04	Limites fundamentais
22/04	Limites no infinito
23/04	Limites infinitos
29/04	Teoremas sobre limites
30/04	Derivada: a reta tangente, velocidade e aceleração, a derivada de uma função em um ponto
06/05	A derivada de uma função, continuidade de funções deriváveis.
07/05	Regras de derivação, derivada de função composta (regra da cadeia) derivada da função inversa.
13/05	Derivadas das funções elementares, derivadas sucessivas, taxa de variação, análise marginal
14/05	Máximos e mínimos, funções monotônicas, extremos de uma função
20/05	Concavidade e pontos de inflexão, análise geral do comportamento de uma função..
20/05	Integrais: integral indefinida, métodos de integração
21/05	Exercícios de Aplicação
27/05	Avaliação
28/05	Introdução à noção de integral definida
04/06	Teorema fundamental do Cálculo.
10/06	Cálculo de áreas e de distâncias,
11/06	Exercícios de aplicação

17/06	Extensões do conceito de integral
24/06	Avaliação
25/06	Retorno das avaliações

ANEXO C – PLANO PEDAGÓGICO DE CÁLCULO 1 – PROFESSOR P2

PLANO DE ENSINO				
1. IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA				
CURSO: Licenciatura Plena em Matemática	PERÍODO LETIVO: Especial - 2020	TURMA: 01		
DISCIPLINA: CÁLCULO I	SIGLA: IEM011			
CARGA HORÁRIA: 90	CRÉDITOS: 6			
TEÓRICA: 90	PRÁTICA:	PRÉ-REQUISITO:		
PROFESSOR(ES):				
EMAIL(S):				
Horário das aulas teóricas	Horário das aulas Práticas	Horário e local de atendimento de alunos		
Segunda-feira - 10:00/12:00		Segunda-feira - 14:00/16:00;Google Meet		
Quarta-feira - 10:00/12:00		Quarta-feira - 14:00/16:00;Google Meet		
Sexta-feira - 10:00/12:00		Sexta-feira - 14:00/16:00;Google Meet		
2. EMENTA (conforme o PPC do curso)				
Funções. Gráficos e Curvas. Limite e Continuidade. A Derivada. A Regra da Cadeia. O Teorema do Valor Médio. Funções Inversas. Integração. Teorema Fundamental do Cálculo. Integrais Impróprias. Técnicas de Integração. Aplicação de Integrais.				
3. OBJETIVOS				
3.1 GERAL (conforme o PPC do curso)				
Compreender e utilizar os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável. Aplicar o Cálculo em problemas práticos.				
3.2 ESPECÍFICOS (se houver)				
-Familiarizar o aluno com os conceitos de limites e suas aplicações. -Definir o coeficiente angular de uma curva como o limite dos coeficientes angulares das secantes. Esse limite, chamado derivada, mede a taxa de variação de uma função e é um dos conceitos mais importantes do cálculo. -Desenvolver técnicas para o cálculo de derivadas. -Usar as derivadas para determinar os valores máximo e mínimo de uma função, para prever e analisar a forma de um gráfico e também tirar conclusões sobre o comportamento das funções. - Estudar o Teorema do Valor Médio, cujos corolários fornecem o caminho para o Cálculo Integral, que será visto na próxima unidade. -Apresentar as integrais indefinidas, ressaltando sua importância na resolução de equações diferenciais elementares e a seguir, as regras para antiderivadas e os métodos de integração por substituição e por partes. As estimativas feitas com somas finitas em várias aplicações levam às idéias de somas.				
4. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO/CRONOGRAMA				
Datas	Carga	Aulas Tipo (T,P)*	Conteúdo	Professor
09/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Quatro Maneiras de Representar uma Função.	
11/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais.	
12/09/2020	2	Teórica	Atividade assíncrona: Revisão de conteúdo e resolução de listas de exercícios.	
14/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Novas Funções a Partir de Conhecidas.	

16/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Funções Exponenciais, Funções Inversas e Logaritmos.
18/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: O Limite de uma Função.
19/09/2020	2	Teórica	Atividade Assíncrona - Avaliação de aprendizagem (EE1).
21/09/2020	2	Teórica	Atividade assíncrona: O Limite de uma Função.
23/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Cálculos Usando Propriedades dos Limites.
25/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: A Definição Precisa de um Limite.
26/09/2020	2	Teórica	Atividade assíncrona: Revisão de conteúdo e resolução de listas de exercícios.
28/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Continuidade.
30/09/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais.
02/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Resolução de exercícios.
03/10/2020	2	Teórica	Atividade Assíncrona - Avaliação de aprendizagem (EE2).
05/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Derivadas e Taxas de Variação.
07/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: A Derivada como uma Função.
09/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Quatro Maneiras de Representar uma Função. Derivadas de Funções Polinomiais e Exponenciais.
10/10/2020	2	Teórica	Atividade assíncrona: Revisão de conteúdo e resolução de listas de exercícios.
14/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: As Regras do Produto e do Quociente.
16/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Derivadas de Funções Trigonométricas.
17/10/2020	2	Teórica	Atividade assíncrona: Revisão de conteúdo e resolução de listas de exercícios.
19/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: A Regra da Cadeia.
21/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Derivação Implícita.
23/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Taxas Relacionadas.
24/10/2020	2	Teórica	Atividade Assíncrona - Avaliação de aprendizagem (EE3).
26/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Valores Máximo e Mínimo. O Teorema do Valor Médio.
28/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico.
30/10/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôpital.
04/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Problemas de Otimização.
06/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Problemas de Otimização.
07/11/2020	2	Teórica	Atividade Assíncrona - Avaliação de aprendizagem (EE4).

11/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: O Teorema Fundamental do Cálculo.
13/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total.
16/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: A Regra da Substituição.
18/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Integração por Partes.
20/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Integrais Trigonométricas.
21/11/2020	2	Teórica	Atividade assíncrona: Revisão de conteúdo e resolução de listas de exercícios.
23/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Substituição Trigonométrica.
25/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Integração de Funções Racionais por Frações Parciais.
27/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Áreas entre as Curvas.
30/11/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Volumes.
02/12/2020	2	Teórica	Atividade síncrona: Trabalho e Seção. Valor Médio de uma Função.
04/12/2020	2	Teórica	Atividade Assíncrona - Avaliação de aprendizagem (EE5).

*Aula teórica ou prática

**Em caso de disciplinas compartilhadas

5. PROCEDIMENTOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

O ERE será desenvolvido com recursos educacionais mediados por Tecnologias de Informação e Comunicação, podendo ocorrer por meio de atividades síncronas ou assíncronas.

de salas aulas virtuais; Google Meet para videoconferências, seminários, grupos dirigidos de discussão, debates, dentre outros; Lives das redes sociais para interação em tempo real com os discentes alunos e possibilidade de registro de participações, produção de conteúdo e materiais digitais; Jamboard para exposição de ideias e participação interativa dos discentes, simulando o quadro branco; Google Drive para utilização dos arquivos na nuvem, com possibilidade de interação com discentes na produção de materiais ou organização de conteúdos e ideias, com registro de participação dos discentes.

6. PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO

A avaliação da aprendizagem dos discentes será feita de forma assíncrona, e resultará do aproveitamento nas atividades remotas, a ser conferida pelo docente responsável.

Serão realizadas 5 (cinco) avaliações feitas de forma assíncrona. As atividades pós aula deverão ser entregues até 24 horas após a respectiva aula e ao final, comporão uma nota.

EE1: 19/09/2020

EE2: 03/10/2020

EE3: 24/10/2020

EE4: 04/11/2020

EE5: 28/11/2020

PF: 16/12/2020

Os discentes terão de 8h às 16h para o envio da avaliação. Qualquer imprevisto que impeça o envio da avaliação dentro deste tempo, deverá ser comunicado ao professor para que uma nova avaliação em uma nova data sejam definidas.

discente que obtiver o mínimo de 75% (setenta e cinco por cento) de frequência e Média dos Exercícios Escolares (MEE) igual ou superior a 8,0 (oito vírgula zero) será considerado aprovado na disciplina e dispensado da prova final (PF), resguardado o direito de realizá-la."

$$MF = \frac{(MEE \times 2) + PF}{3}$$

Legenda:

MF: Média Final

MEE: Média dos Exercícios Escolares

O discente que obtiver o mínimo de 75% (setenta e cinco por cento) de frequência e Média dos Exercícios Escolares (MEE) igual ou superior a 8,0 (oito vírgula zero) será considerado aprovado na disciplina e dispensado da prova final (PF), resguardado o direito de realizá-la.*

7. REFERÊNCIAS (conforme o PPC do curso)

7.1 BÁSICA (mínimo de 03 indicações, conforme o PPC do curso)

ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. L.: Cálculo, - Vol. 1, 10ª edição. Ed. Bookman, 2014.

GUIDORIZZI, H. L.: Um Curso de Cálculo – Vol. 1.5ª edição. Ed. LTC, 2011.

LEITHOLD, L.: O Cálculo com Geometria Analítica – Vol. 1, 3ª. edição. Ed. Harbra, 1994.

STEWART, J.: Cálculo - Vol. 1, 8ª edição. Ed. Cengage Learning, 2017.

THOMAS, G. B., WEIR, D. M., HASS, J.: Cálculo – Vol. 1, 12a edição. Ed. Pearson, 2012.

7.2 COMPLEMENTAR (mínimo de 05 indicações, conforme o PPC do curso)

ÁVILA, G.: Cálculo das Funções de Uma Variável – Vol. 2, 7ª. edição, Ed. LTC, 2011.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, David E. Cálculo com Geometria Analítica - Vol. 1, 4a. Edição, Ed. Prentice Hall do Brasil, 1997.

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B.: Cálculo A, 6a. edição, Ed. Pearson, 2007.

PISKUNOV, N.: Cálculo Diferencial e Integral – Vol. 1, 1ª edição. Ed. Lopes da Silva Editora, 1993.

SIMMONS, G. F.: Cálculo com geometria Analítica – Vol. 1, 1ª. edição, Ed. Makron Books, 1987.

SPIVAK, M.: Calculus. 3ª edição. Ed. Cambridge, 1994.

SWOKOWSKI, W.: Cálculo com Geometria Analítica, V. 1, 2a edição, Ed. Makron Books, 1995.