PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

CARLOS ALBERTO FERNANDES DE SIQUEIRA

CÔNICAS: uma abordagem em termos de Registros de Representação Semiótica

ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2014

CARLOS ALBERTO FERNANDES DE SIQUEIRA

CÔNICAS: uma abordagem em termos de Registros de Representação Semiótica

Monografia apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de **ESPECIALISTA EM EDUCAÇÃO MATEMATICA** à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

PUC-SP
2014

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família com todo carinho pelo apoio e incentivo em todos os projetos da minha vida e a minha namorada Gleiciele pelo amor, compreensão e dedicação em todos os momentos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar o dom da vida e nela estar presente em todos os momentos.

Aos professores, doutores, do programa de especialização da PUC-SP, COGEAE, Renata Rossini, Saddo Ag Aulmouloud, Fumikazu Saito, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho pelos momentos de intenso aprendizado.

Em especial, agradeço a professora doutora Maria José Ferreira da Silva, minha orientadora, pelo acolhimento, companheirismo, paciência, orientação e incansável vontade de ajudar.

Aos meus colegas da especialização pelo tempo que passamos juntos.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

RESUMO

A presente pesquisa refere-se a um estudo didático de cônicas na geometria e na geometria analítica. Para isso, realizamos uma revisão bibliográfica onde constam dissertações relacionadas ao nosso tema de investigação. Neste contexto, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: quais registros de representação semiótica podem ser mobilizados para estudar as cônicas? O quadro teórico constituiu-se pelos registros de representação semiótica de Raymond Duval com o objetivo de entender quais registros estão envolvidos neste objeto matemático. Neste sentido, a pesquisa revelou que estão envolvidos no estudo dessas curvas os registros material, figural, gráfico e algébrico.

Palavras-Chave: Cônicas. Geometria. Geometria analítica. Registros de Representação Semiótica. Transformações Geométricas no Plano.

ÍNDICE DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por finalidade fazer um estudo didático do tema das cônicas à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A escolha deste tema deve-se ao fato de ele ser apresentado no ensino médio sem articulações entre a geometria e a geometria analítica e por entendermos que este seja um bom caminho para estudá-lo.

Esta pesquisa está dividida em dois capítulos. No primeiro é abordada a problemática da pesquisa com o intuito de nortear nossas ações. Nele está contida a revisão bibliográfica, as justificativas da pesquisa, o quadro teórico, a delimitação do problema e a metodologia de pesquisa.

A revisão bibliográfica tem como objetivo sustentar nossas afirmações, uma vez que ela traz uma noção do que se produziu em relação a este tema em alguns trabalhos científicos. Nas justificativas da pesquisa comentamos nossa experiência como aluno e como professor frente ao ensino das cônicas ao mesmo tempo em que apresentamos as informações pertinentes ao trabalho a partir da análise feita na revisão bibliográfica. O quadro teórico constituiu-se pela utilização dos registros de representação semiótica de Raymond Duval com o intuito de apresentar os diferentes registros de representação mobilizados para estudar este objeto matemático. A delimitação do problema foi desenvolvida a partir das leituras feitas na revisão bibliográfica, onde foi possível pontuar alguns problemas referentes ao ensino deste tema e a metodologia utilizada é a de uma pesquisa bibliográfica.

No capítulo dois, apresentamos as cônicas na geometria e seus registros, as cônicas na geometria analítica e seus registros e as transformações geométricas no plano, transportando os objetos da geometria para um referencial cartesiano. Neste capítulo desenvolvemos um estudo didático baseado na teoria de Duval a partir dos registros material, figural, gráfico e algébrico, explicitando os tratamentos e as conversões.

CAPÍTULO 1 – PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a revisão bibliográfica, a justificativa da pesquisa, a fundamentação teórica, a delimitação do problema, a questão da pesquisa e a metodologia que direcionarão nosso trabalho.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta secção fizemos uma revisão bibliográfica de trabalhos que tratam do tema Cônicas para situar nossa pesquisa e fazer um estudo didático que evidencie os principais tipos de registros de representação semiótica utilizado para abordar esse tema.

Lopes (2011, p. 25) constrói seu trabalho a partir de dois grandes motivos: "estudar algumas aplicações importantes das Cônicas que não são abordadas pelos livros didáticos" e "utilizar recursos computacionais para a exploração deste assunto".

Após analisar os livros didáticos que tratam das Cônicas, o autor observou que a maior parte deles discute este assunto sob o ponto de vista das equações algébricas e afirma que sua dissertação preocupa-se em explorar o ponto de vista geométrico com a intenção de motivar e preparar o leitor para a exploração algébrica do tema.

Sua obra explicita cada uma das Cônicas separadamente a partir de dois enfoques, o geométrico e o analítico e as propriedades geométricas são contempladas nas duas abordagens. As construções na abordagem geométrica são feitas de duas maneiras, uma que permite traçar o lugar geométrico por elas determinadas, utilizando instrumentos e fios inextensíveis, permitindo explorar os principais elementos geométricos e as propriedades de simetria das cônicas. Segundo o autor, este método é descrito na obra de Kepler Ad Vitellionem Paralipomena. Outra construção geométrica é feita com régua e compasso cuja relevância consiste na obtenção dos resultados relacionados à reta tangente a cada uma das Cônicas, sendo importante no estudo das propriedades de reflexão de cada curva.

Na abordagem analítica é obtida a equação reduzida das curvas, usando um sistema ortogonal de coordenadas e o conceito de lugar geométrico. Neste enfoque as cônicas estão centradas na origem, ou seja, não há nenhuma menção às transformações geométricas. Neste trabalho o autor estuda uma definição unificada para as Cônicas, considerando o conceito de excentricidade. A partir deste conceito é possível definir as curvas pelo foco e pela diretriz e analiticamente, uma expressão é construída, usando o foco a diretriz e o plano cartesiano. Os limites de validade de cada figura são obtidos a partir da análise dos valores que a excentricidade pode assumir, não sendo contemplados valores negativos.

Outro aspecto abordado no enfoque analítico é a utilização do sistema de coordenadas polares que simplifica as equações, o estudo das curvas determinadas pelos lugares geométricos, além de facilitar o estudo e a aplicabilidade na mecânica celeste. Usando sistemas de coordenadas polares e cartesianas com origem coincidentes, o autor realiza uma conversão no sentido de Duval (1999).

O trabalho de Macena (2007) analisa as possibilidades didáticas do uso de investigação em sala de aula, a partir de experiências com alunos, no estudo das seções cônicas. Para alcançar seus objetivos a autora buscou como aporte teórico as teorias da aprendizagem significativa e da etnomatemática interligadas à história que envolve o tema em estudo. O autor busca desenvolver uma atividade de investigação que abarca a visualização, a representação, as propriedades, as relações das cônicas com o cotidiano, os conceitos e as construções de cada curva com o intuito de melhorar o ensino de geometria, buscando explorar o aspecto lúdico de um tabuleiro de bilhar que os próprios alunos construíram.

Em termos de registros de representação semiótica os alunos trabalharam com o registro geométrico e o registro analítico. No registro geométrico, eles construíram as cônicas a partir do conceito de lugares geométricos, utilizando instrumentos mecânicos. No registro analítico, as cônicas foram construídas centradas na origem do sistema cartesiano e fora dela com o eixo real paralelo ao eixo das ordenadas ou das abscissas, para que os alunos obtivessem as equações para as cônicas em várias posições e em diferentes quadrantes do plano cartesiano.

No trabalho de Costa (2013) é realizada uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio com a intenção de promover uma reflexão sobre o estudo destas curvas pelo uso da definição de lugar geométrico seguindo um enfoque analítico. Nas construções foi utilizado o software Geogebra em atividades de construção geométrica a partir de um estudo das cônicas por sua definição de lugar geométrico e de uma abordagem de suas propriedades onde é necessário, segundo o autor, que os alunos apresentem conhecimentos básicos de geometria euclidiana e analítica e que já possuam uma familiaridade com o software Geogebra.

No tocante às atividades o trabalho apresenta as curvas estudadas em capítulos separados. Para a elipse são propostas atividades com o intuito de abordá-la como lugar geométrico, sua forma canônica, sua simetria, a elipse com centro na origem do sistema cartesiano, a construção de uma reta tangente à elipse, sua propriedade bissetora e uma relação entre a área da superfície elíptica com a área do círculo. A hipérbole é estudada como lugar geométrico, sua forma canônica, sua simetria, a hipérbole com centro na origem do plano cartesiano, a construção de uma reta tangente à hipérbole e a construção das assíntotas da hipérbole. A parábola é abordada como lugar geométrico, sua forma canônica, sua simetria, a parábola com centro na origem do plano cartesiano, a construção de uma reta tangente à parábola e a construção da reta diretriz e do foco a partir da própria parábola.

Garcia (2013) explora as definições mais usadas para tratar o tema das cônicas em uma investigação em que é estudada a equivalência entre tais definições e estabelece propriedades das figuras então determinadas. De acordo com estas definições, a parábola é definida via foco e diretriz e via secção em cone, a elipse é definida via foco e diretriz, via distância entre focos e via secção em cone e a hipérbole é definida via foco e diretriz, via distância em focos e via secção em cones. Neste contexto, em se tratando de registros de representação semiótica, o trabalho valoriza o pensamento geométrico.

O trabalho de Moraes (2012) objetiva um estudo das cônicas e suas propriedades por meio da geometria projetiva. Além de uma apresentação histórica do desenvolvimento da projeção a pesquisa apresenta um embasamento teórico para o estudo das cônicas e suas propriedades e expõe algumas construções feitas no Geogebra com a finalidade de mostrar uma alternativa para a visualização de teoremas e propriedades relacionadas a este tema. O autor faz uma abordagem de duas definições para as cônicas, uma dada por Von Staudt e a outra por Steiner e apresenta uma compatibilidade entre estas definições, mostrando que ambas conduzem à mesma construção. Em termos de registros de representação semiótica, esta obra faz um estudo das cônicas privilegiando o enfoque geométrico.

Na dissertação de Neto (2008) é apresentada uma história das cônicas desde a Grécia antiga até o século XVII, uma biografia de Phillipp De La Hire, uma tradução para o português da obra de La Hire “Novos elementos das Seções Cônicas”, os comentários desta tradução e da tradução para o inglês realizado por Brian Robinson, uma reflexão das proposições, ressaltando os aspectos relevantes que merecem críticas e comparações com a abordagem atual do tema.

Segundo Neto (2008), atualmente o ensino de matemática no Brasil não dedica grande atenção ao tema das cônicas e faz um relato de como é tratado nos dias atuais desde o ensino fundamental até o ensino superior. No ensino fundamental a parábola é ensinada como representação de uma função de “segundo grau”. No primeiro ano do ensino médio há um aprofundamento no estudo dessa função, restringindo-se, objetivamente, na manipulação da equação analítica. No terceiro ano as cônicas são objetos de estudos, entretanto, é um tópico, pouco discutido devido às escolhas dos professores. Quando é reservado algum tempo para estudá-las, geralmente ele é muito curto, concentrando a atenção na abordagem analítica das equações e as demonstrações são feitas tomando como base a propriedade bifocal. De acordo com o autor, poucos professores trabalham com as cônicas não centradas na origem ou usam as noções de rotação e translação. A partir do estudo dado a essas curvas no plano cartesiano suas representações gráficas são apresentadas e é enfatizada a manipulação das equações analíticas.

No ensino superior a pesquisa menciona que as cônicas, no cálculo, são estudadas a partir das funções reais de duas variáveis reais, na geometria analítica, com foco nas equações analíticas, e na álgebra linear onde há uma conexão entre as equações com vetores e matrizes. De acordo com Neto (2008) as cônicas foram desenvolvidas ao longo da história de 24 séculos, existindo, portanto, várias maneiras de se abordar este tema, contudo foi a caracterização bifocal quem se destacou e sobreviveu até os dias atuais. Essa caracterização bifocal é creditada a Phillipp De La Hire em “Novos Elementos das Seções Cônicas” onde ele utiliza a geometria euclidiana sintética sem contemplar a geometria analítica. Embora essa caracterização tenha recebido muitas críticas relativas à unificação das cônicas, sua facilidade de compreensão a fez sobreviver até os nossos dias, influenciando a abordagem deste tópico na maioria dos livros didáticos utilizados.

Sato (2004) fez um estudo das seções cônicas a partir de duas noções: uma delas leva em consideração o trabalho do matemático G. P. Dandelin em que discute as propriedades focais utilizando a geometria euclidiana de forma sintética; a outra faz um estudo dessas curvas com ênfase para a geometria analítica a partir das contribuições de Pierre de Fermat.

Segundo esta pesquisa existe uma diversidade de definições para as cônicas cuja equivalência é apresentada no campo da geometria, contudo, hoje em dia, usualmente, se utiliza da propriedade foco – diretriz que não aparece nos trabalhos de Apolônio, mas foi concebida por Pierre de Fermat. Apolônio, em seu trabalho, considera as interseções entre as superfícies do cone reto de duas folhas com um plano. De acordo com a inclinação do plano em relação ao eixo do cone é possível abstrair que a interseção entre essas duas superfícies representa as cônicas: parábola, elipse e hipérbole. Com o trabalho de Dandelin, segundo Sato (2004, p. 5) é possível definir as seções cônicas de outra maneira:

> Suas construções usam a existência de superfícies esféricas S1 e S2 que se inscrevem no cone K, ao longo de círculos $\lambda 1$ e $\lambda 2$, e são tangentes ao plano π nos pontos F1 e F2. Se a cônica é uma elipse ou uma hipérbole, então duas superfícies esféricas inscritas são tangentes à π, mas se a cônica é uma

> parábola, uma única superfície esférica tem esta propriedade (SATO, 2004 p. 5).

A contribuição de Pierre de Fermat, de acordo com o autor, mostrou ser possível um estudo analítico das cônicas, aonde elas podem ser expressas por uma equação de segundo grau nas coordenadas (x, y). Sendo assim, é possível reconhecer um objeto geométrico a partir de sua equação cartesiana. Nesta pesquisa são feitas algumas construções para as cônicas utilizando o software de geometria dinâmica Cabri Géomètre II e observados alguns efeitos relativos às transformações geométricas no plano baseadas nas equações cartesianas. Outras construções são feitas com procedimentos mecânicos. O trabalho apresenta uma relação entre essas duas construções simulando cada uma delas no Cabri Géomètre. O trabalho apresenta, também, as propriedades refletoras e algumas aplicações destas propriedades em várias áreas do conhecimento humano, desde uma simples construção como espelhos refletores, até construções sofisticadas como as que aparecem na construção civil, em navegação e em comunicação.

Silva (2011) busca como apoio o currículo do estado de São Paulo para sugerir atividades complementares ao material utilizado em sala de aula, desde 2008, fornecido pela secretaria do estado de São Paulo – SEE- SP, com o intuito de contemplar aspectos menos abordados sobre as secções cônicas. Neste material está sugerido o uso de tecnologias digitais em sala de aula e por isso, o trabalho apresenta uma série de atividades desenvolvidas em ambiente de geometria dinâmica para o estudo dessas curvas.

Estas atividades foram propostas para professores da rede estadual de ensino em um curso de formação continuada na PUC-SP em 2011 a partir de dobradura de papel e do software de geometria dinâmica Geogebra. O autor afirma que um dos aspectos não explorados ou explorados de forma tímida é a abordagem das secções cônicas enquanto lugar geométrico. Diante desta e de outras situações foram elaboradas as seguintes questões: “Que atividades poderiam ser recomendadas para o trabalho do professor com base no atual currículo do estado de São Paulo? E quais aspectos seriam levados em conta pelos professores da rede pública do estado de são Paulo diante do desafio de criar atividades complementares à proposta pedagógica do caderno do professor? De posse das análises das oficinas com base nos relatos do professor o autor pôde responder essas questões. Suas observações o levaram a concluir que os professores tiveram muitas dificuldades em todos os aspectos, mesmo naqueles em que o ensino tende a privilegiar como o uso mecânico de equações algébricas. Entretanto os professores que persistiram conseguiram superar algumas deficiências. A partir da interatividade entre professores e professores formadores de modo a dar condições para que o trabalho efetivamente aconteça em sala de aula.

Lima (1999) propõe, em sua pesquisa, a resolução de equações de terceiro grau por meio das cônicas, ressaltando os aspectos geométricos e algébricos, sendo observadas as vantagens e desvantagens de cada método em estudo.

Em seu trabalho é apresentada uma sequência didática aplicada a duas turmas, uma com alunos da ciência da computação da PUC – SP e outra do Colégio Vera Cruz, em que é destacado o método geométrico do matemático Árabe Omar khayyam, o algoritmo de Briot-Ruffini e a fórmula de Cardano. Segundo a autora, o quadro geométrico dificilmente é utilizado pelos alunos na resolução de problemas, entretanto o método de Omar Khayyam possui vantagens por ser aplicado em qualquer equação cúbica. Para a fórmula de Cardano é necessário que os alunos tenham estudados números complexos e para o dispositivo de Briot-Ruffini é preciso que se tenha uma raiz inteira. Além disso, a pesquisa mostra que os alunos apresentam dificuldades na resolução de equações de terceiro grau, utilizando os métodos contidos na maior parte dos livros didáticos e em construir representações gráficas destas equações, desconhecendo inclusive, sua forma.

Segundo Lima (1999) os registros de representação predominante entre os alunos é o algébrico e sua pesquisa apresenta também, o enfoque geométrico e a importância fundamental da conversão entre registros como uma maneira de dar subsídios aos alunos para resolver situações problema.

1.2 JUSTIFICATIVAS DA PESQUISA

Na época em que eu era estudante do ensino médio o tema cônicas não foi contemplado. Hoje, após ter me tornado professor, ainda que, trabalhando mais com a disciplina de física do que com a de matemática, percebo que este tópico está cada vez mais esquecido por colegas e por vestibulares de várias instituições do Brasil, ainda que seja um tema importante em diversas áreas do conhecimento.

Além disso, nossa revisão bibliográfica nos faz entender que a maior parte dos livros e o material fornecido pela secretaria do estado da educação de São Paulo privilegiam as manipulações algébricas. Sendo assim, acreditamos ser relevante o estudo destas curvas em termos de registros de representação semiótica, pois Almouloud afirma que:

> Falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível à compreensão da matemática. A noção de registro permite salientar a importância da mudança de registros e considerar a necessidade de uma coordenação de registros. Uma mudança de registro tem vantagens do ponto de vista do tratamento, podendo facilitar a compreensão e a descoberta (ALMOULOUD, 2007, p.72).

Neste sentido analisaremos o conteúdo das cônicas a partir de seus registros de representação semiótica, tanto da geometria quanto da geometria analítica, como uma maneira de não buscar nas sistematizações e memorizações, que as escolas tendem a privilegiar, as soluções dos problemas.

1.3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Segundo Duval (2008, apud ALMEIDA 2010, p. 66) não podemos buscar a compreensão das dificuldades dos alunos apenas no campo da matemática, sendo necessário estabelecer uma estrutura epistemológica específica para a atividade matemática e entender que as funções cognitivas do pensamento que a envolve não podem ser dissociadas. Neste sentido:

> A originalidade de uma abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em situação de ensino Duval (2008, p. 12, apud ALMEIDA, 2010, p. 67).

De acordo com Santaella (2006, apud ALMEIDA, p. 68) semiótica é a ciência de todas as linguagens e a representação semiótica de acordo com Henriques é: “Uma representação construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótico e de outro lado, pela referência ao objeto representado” (Henriques, 2006, p. 17 apud ALMEIDA, 2010, p. 69).

De acordo com Almouloud (2007) os registros de representação semiótica possuem funções cognitivas de comunicação, objetivação e tratamento. Eles fazem referência a um objeto: o que é observado por um sujeito é sempre determinado semanticamente, (relativo a significado) e topologicamente (relativo a lugar). A idéia de registros é muito importante sob dois aspectos, o primeiro faz referência à mudança interna dos registros e o segundo faz referência à coordenação entre registros, potencializando a compreensão e a descoberta. No tocante à transformação de representações semióticas é necessário distinguir as transformações internas em todos os registros e próprias de cada um deles e as transformações externas onde há coordenação entre registros. Essas transformações são denominadas de tratamento e conversão respectivamente.

O tratamento é, de acordo Duval (1999, p.30 apud ALMOULOUD, 2007, p. 72), a transformação de uma representação em outra dentro do mesmo registro, isto é, uma transformação estritamente interna a um registro, pois são específicos a cada registro sem qualquer interferência externa.

Segundo o esquema de Duval (1999, p.21 apud ALMOULOUD, 2007, p. 73) um tratamento pode se desdobrar em duas vertentes, podendo ser algoritmizável, registros mono funcionais, ou não algoritmizável, registros multifuncionais. Quando falamos de tratamento algoritmizável, estamos tratando de regras operatórias como solução de equações, sistema de equações, operações na escrita decimal, operações na escrita fracionária, etc. Portanto, apoia-se em rotinas para a resolução de problemas. Este procedimento algoritmizável é o preferido no ciclo básico nas escolas. No tratamento não algoritmizável temos os tratamentos figurais, quando são discutidas figuras geométricas, e suas diferentes apreensões e as representações gráficas elementares. É no tratamento não algoritmizável que discutimos as operações relativas à função de expansão discursiva, desencadeada no raciocínio dedutivo em linguagem natural e na argumentação. O tratamento não algoritmizável é ignorado na escola, tornando alguns tópicos de matemática incompreendidos, o que leva os alunos a uma defasagem de entendimento de um objeto em estudo.

Uma conversão é, de acordo com Duval (1999, p.30 apud ALMOULOUD, 2007, p. 72), a transformação de uma representação em um registro D em outra representação em um registro A, conservando, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou a mesma situação apresentada, mas mudando de fato o conteúdo da representação. O objeto matemático função, por exemplo, pode ser representados por tabelas, por gráficos, por equações algébricas e por símbolos. Podemos converter um registro em outro mudando o conteúdo, mas sempre fazendo referência ao objeto função.

Segundo Almouloud (2007) uma conversão pode ser feita de duas maneiras:

- Entre registros outros que não aquele da língua natural onde pode ser encontrado uma regra de codificação como suporte à conversão, tendo como exemplos os gráficos e as equações.
- Com uma língua natural, onde não se encontra uma regra e sim as funções discursivas como meio de explicação de gráficos, textos, compreensão de um

enunciado, conjunto de enunciado de problemas, a linguagem formal e a linguagem natural.

Esquematicamente o quadro 1 apresenta uma classificação para os registros multifuncionais e monofuncionais associados à representação discursiva e não discursiva. De acordo com Duval (2010, p. 14 apud CARDOSO, 2012, p. 10) a especificidade do conhecimento matemático acontece pela possibilidade de mobilizar ao menos dois registros de representação.

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros de representação

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS (não-algoritmizáveis)	Língua Natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • argumentos a partir de observações, de crenças; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS (algoritmizáveis)	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesiano. • mudanças de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval, 2010, p. 14 apud CARDOSO, 2012, p. 10

No contexto escolar o professor deve oferecer condições para que o aluno se aproprie desse conhecimento matemático sem privilegiar um ou outro registro de representação, pois segundo Almoulould (2007) uma mudança de registro pode facilitar o tratamento e favorecer a compreensão do objeto matemático em estudo.

1.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

As leituras feitas na revisão bibliográfica nos permitem pontuar alguns problemas no ensino das cônicas. Elas não têm recebido a devida atenção por parte de professores, pois geralmente, são deixadas de lado no ensino da geometria, inclusive não é um tema que aparece nos exames de seleção em várias partes do país.

O tema das cônicas aparece pela primeira vez na vida do estudante no nono ano quando é estudada a parábola, entretanto, segundo Neto (2008), ela é vista como representação de função polinomial de segundo grau, ou seja, com ênfase no conceito de função, em seguida no primeiro ano do ensino médio a parábola recebe a mesma atenção que no ano anterior. No terceiro são apresentadas aos alunos as cônicas, parábola, elipse e hipérbole, com o enfoque na geometria analítica e, de acordo com este autor, o curto período de tempo para tratar o assunto direciona os trabalhos apenas para o caminho das manipulações de suas equações analíticas.

Outro problema apontado por Lopes (2011) e que corrobora com o escrito no parágrafo anterior, é o fato de, ao analisar os livros didáticos, perceber que a maior parte deles trata as cônicas com foco nas manipulações algébricas, deixando de explorar o enfoque geométrico.

Embora muitas pesquisas façam um estudo sobre o ensino das cônicas, poucas dão ênfase aos registros de representação semiótica, explicitando tratamentos e conversões envolvidos neste processo. Nesta direção, Almouloud (2007) afirma que:

> A mudança de registros constitui um dos pontos delicados e decisivos da aprendizagem da matemática no Ensino Básico, fundamental e Médio, e as dificuldades relacionadas podem persistir até o início da universidade, caso esse aprendizado não tenha sido adequadamente tratado (ALMOULOUD, 2007, p. 79).

Desta forma, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: **quais registros de representação semiótica podem ser mobilizados para estudar as cônicas?** Para respondê-la, pretendemos fazer um estudo didático baseado na geometria e na geometria analítica, com o objetivo de apresentar uma abordagem diferente da usual no ensino. Especificamente, pretendemos estudar as cônicas na geometria a partir das construções por pontos, por dobradura de papel, pelo software e pela régua francesa para em seguida trazer estas construções para a geometria analítica, utilizando o plano cartesiano, enfatizando os tratamento e conversões envolvidas em cada caso.

Diante do que analisamos na revisão bibliográfica, percebemos que há poucos trabalhos enfatizando, explicitamente, os registros de representação e por entendermos ser este um bom caminho para um aprendizado da matemática, uma vez que todas as citações neste trabalho estão neste sentido, faremos um estudo didático buscando identificar os registros de representação semiótica utilizados para tratar as cônicas, tanto na geometria quanto na geometria analítica.

1.5 METODOLOGIA

Este trabalho é bibliográfico por entendermos ser uma maneira de averiguar os estudos disponíveis, analisar e mensurar sua contribuição de modo a compreender o objeto de investigação. Este comportamento, referente ao tema de estudo, é importante no sentido de situar a pesquisa e evitar chegar a conclusões já conhecidas pela comunidade científica.

Este tipo de pesquisa é importante por orientar vários trabalhos a partir de fontes bibliográficas e ainda:

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Essa vantagem torna-se particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispostos pelo espaço Gil (2009, p. 45 apud ALMEIDA, p. 60).

Na fonte bibliográfica constam livros que abordam o tema das cônicas e também dissertações de mestrado por representarem documentos importantes que de uma maneira ou de outra passaram por uma banca examinadora, podendo, portanto fundamentar e subsidiar este trabalho.

Capítulo 2 – A PESQUISA

Este capítulo tem o intuito de apresentar alguns caminhos pelos quais pode ser abordado o tema das cônicas e suas diferentes representações. Apresentaremos as cônicas na geometria e seus registros e as cônicas na geometria analítica e seus registros.

2.1 AS CÔNICAS NA GEOMETRIA E SEUS REGISTROS

Na geometria, em termos de registros de representação semiótica, as cônicas podem ser estudadas a partir do registro figural. Neste contexto, pretendemos destacar os tratamentos, assim como articular estes registros a um registro discursivo. Segundo Almeida (2010) este diálogo é indispensável em toda linguagem geométrica.

O registro de representação material se apoia na abordagem feita de cônicas a partir da manipulação de alguns materiais fáceis de serem encontrados no mercado, possibilitando a construção e trabalhar com suas definições. O método de Kepler ou do fio esticado é muito importante, pois permite a visualização e a exploração de propriedades geométricas que facilitam as definições. Além deste método, mas no mesmo registro, estudaremos as construções das cônicas por dobradura de papel.

Estudaremos, ainda, as cônicas definidas como lugar geométrico de pontos contidos em um plano, que satisfazem determinadas condições, agora no registro figural em lápis e papel e com o auxílio de um software de geometria dinâmica.

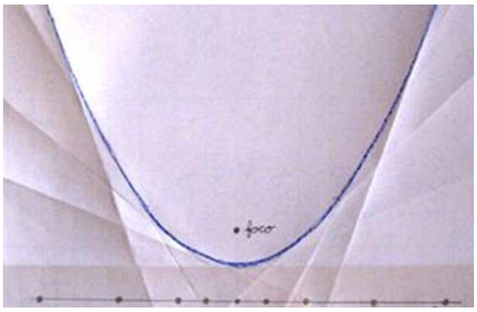
Existem várias maneiras de se construir as cônicas com o enfoque geométrico, como escrito anteriormente, entretanto, nossa atenção não está nos procedimentos de construção, mas, na figura, contudo, os roteiros estão disponíveis nos anexos e nos apêndices que acompanham este trabalho. A seguir estão dispostas algumas construções para cônicas no registro material e figural associado a um registro discursivo. Nestas construções, podemos perceber que o registro material se constitui por suas retas tangentes e seu tratamento se constitui no processo de dobrar o papel onde cada vinco representa uma destas retas. Além disso, podemos perceber que o registro figural se constitui quando um objeto matemático é representado por uma figura e seu tratamento se dá por um processo de reconfiguração.

2.1.1 A PARÁBOLA

A parábola é definida como o conjunto dos pontos no plano, equidistantes de um ponto e de uma reta fixos, o ponto é denominado foco e a reta, diretriz, todavia para levar o aluno a se apropriar desta definição podemos partir de uma situação de construção por dobradura de papel em que podemos solicitar a ele que construa, em uma folha de papel vegetal, uma reta r e um ponto, F, fora dela, como apresentado no anexo A.

Sobre esta reta é necessário construir vários pontos e em seguida dobrar o papel de modo a sobrepor os pontos da reta com o ponto F. O resultado deste procedimento é um registro material da parábola construída por suas tangentes como aparece na figura 1.

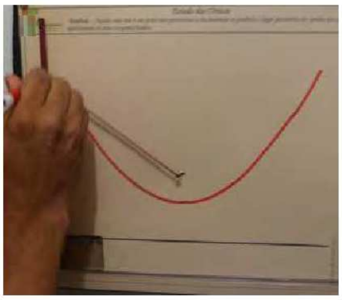
Figura 1. Parábola pela dobradura de papel



FONTE: portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em 22/08/2014

Neste processo o aluno terá a percepção da distância de ponto a ponto e da distância de ponto a reta e podem concluir que elas são iguais. De posse desta informação podemos construir a parábola com materiais manipulativos, pedindo aos alunos que construam uma reta e um ponto F, não pertencente a ela, em uma folha de papel em branco, fixar um prego neste ponto e amarrar a ele um barbante cuja outra ponta esteja na extremidade de uma régua no formato T de acordo com a figura 2, cujos passos de construção estão no anexo B.

Figura 2. Parábola via materiais manipulativos

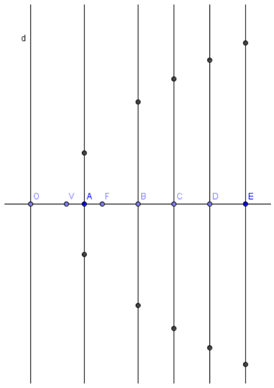


FONTE: CLAME, 2013, P. 1057

Após movimentar a régua para a direita e para a esquerda, mantendo o barbante fixo, a caneta descreverá o registro figural da parábola. Por este processo o aluno perceberá que a ponta da caneta que descreve a curva está equidistante do ponto e da reta fixos.

Podemos também construir as cônicas por pontos utilizando régua e compasso a partir da medida da distância entre o foco e a reta diretriz. Primeiro traçamos pelo ponto F uma reta perpendicular à reta diretriz e denominamos o ponto interseção O, em seguida, escolhendo pontos aleatórios nesta reta e sobre eles traçamos paralelas à reta diretriz. Com o compasso deve ser traçado raios, com centro em F, cuja medida é a distância destes pontos ao ponto O. As interseções entre as paralelas e os arcos pertencem à parábola, como a da figura 3.

Figura 3. Parábola construída por pontos

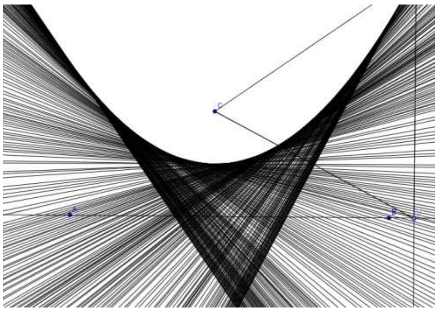


FONTE: Produção do autor

Na construção por pontos, presentes no apêndice C, o fato de essas figuras possuírem simetria favorece sua construção, além disso, quando se tem um número razoável de pontos, é possível, por sobreposição, estimar a qual curva eles pertence utilizando uma régua francesa.

Com o advento de tecnologias voltadas à educação o processo de construção de uma curva se tornou mais fácil e mais dinâmico. Pelo software Geogebra, por exemplo, podemos construir a parábola pela ferramenta “rastro”, de acordo com o apêndice A, produzindo um resultado semelhante ao da construção por dobradura de papel, ou seja, o registro figural da parábola é feito por suas retas tangentes.

Figura 4. Parábola pela ferramenta "rastro" do Geogebra

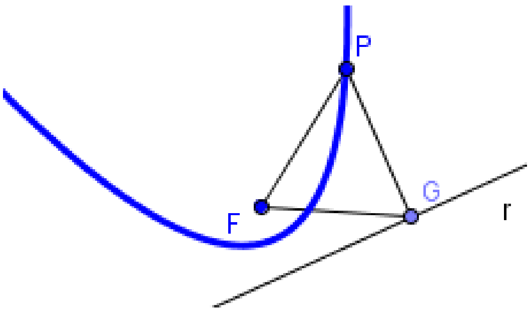


FONTE: produção do autor

Na construção da figura 4 pode ser solicitado ao aluno que crie no software um ponto e uma reta, como feitos nas situações anteriores e solicitar que determinem um ponto da parábola. Como na construção por pontos, esperamos que tomem um ponto na reta e por ele determine uma reta perpendicular. Em seguida, que percebam que a mediatriz entre o ponto fora da reta e o da reta determina a equidistância do ponto e da reta. Por fim habilitamos o rastro da mediatriz, movimentando o ponto da reta para a imagem da parábola surgir como na dobradura de papel.

Ainda com este software é possível construir a parábola usando a ferramenta "lugar geométrico", de acordo com o apêndice B, utilizando o mesmo processo anterior para obter a figura 5. A interseção entre a reta mediatriz e a reta perpendicular à reta diretriz determina um ponto da parábola. Ao usar a ferramenta "lugar geométrico" selecionando o ponto de interseção e o ponto da reta a figura surgirá e ao mover o ponto sobre a reta o aluno percebe que o ponto de interseção percorre a parábola.

Figura 5. Parábola construída pela ferramenta "lugar geométrico" do Geogebra



FONTE: produção do autor

Por este método o aluno compreende que um conjunto de pontos do plano que estejam equidistantes de um ponto e de uma reta fixa forma uma representação figural da parábola.

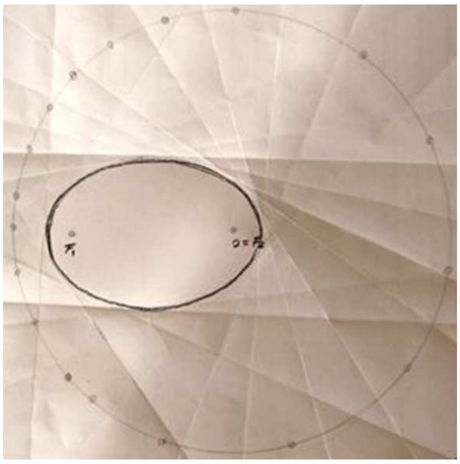
Nestas construções é possível perceber a ligação de uma com a outra, por exemplo, o método de Kepler e por pontos está ligada a ideia de lugar geométrico e o método da dobradura está ligada à construção feita pela ferramenta “rastro” com o registro figural construído por suas retas tangentes. Quanto a isso, segundo Sato (2004, p. 31) se conhecermos a reta tangente em cada ponto da curva é possível dizer que curva é essa. De acordo com o mesmo autor, esta afirmação pode ser confirmada em um curso de geometria diferencial.

A partir dessas construções podemos então explicitar a definição e nomear os elementos da parábola e concluir que para essa curva vale a seguinte relação entre as distâncias de ponto a ponto e ponto a reta, $d(F,P) = d(F,r)$, onde F é o ponto chamado de foco, r é a reta dada, denominada diretriz e P é um ponto da curva.

2.1.2 A ELIPSE

A elipse é definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante, entretanto, da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos estudar a elipse de tal maneira que o aluno se aproprie desta definição. A começar pela dobradura de papel, como no anexo A, podemos solicitar a ele que, em uma folha de papel vegetal e no centro dela, marque um ponto para chamar de F1 e que use o compasso para construir duas circunferências concêntricas, tendo F1 como centro. Em seguida, deve-se construir uma semirreta com origem em F1 e tomar como F2 a interseção entre esta semirreta e a circunferência de raio menor, por fim, escolhe-se um ponto qualquer na circunferência de raio maior e dobre o papel de modo a sobrepor este ponto ao ponto F2. Após escolher um número suficiente de pontos na circunferência maior e dobrar o papel será possível visualizar uma representação figural da elipse formada pelas suas tangentes como na figura 6.

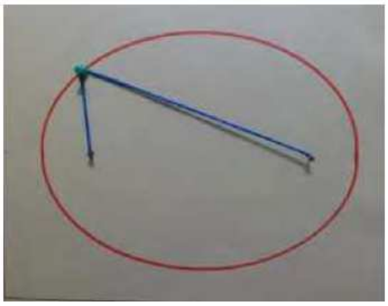
Figura 6. Elipse por dobradura de papel



FONTE: portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em 22/08/2014

Esta construção por dobradura possibilita a percepção do aluno de que a soma das distâncias dos focos, F1 e F2 ao ponto de tangencia é constante e igual à medida do raio da maior circunferência construída. Com esta informação podemos construir uma representação figural da elipse, como no anexo B, pelo método de Kepler, escolhendo dois pontos, F1 e F2, que denominaremos focos e podemos escolher o tamanho do barbante coincidente com a medida do círculo maior da construção em dobradura feita anteriormente. Após amarrar as extremidades do barbante em cada foco podemos usar um pincel, mantendo o fio sempre esticado para descrever a elipse da figura 7 a seguir.

Figura 7. Elipse construída por materiais manipulativos

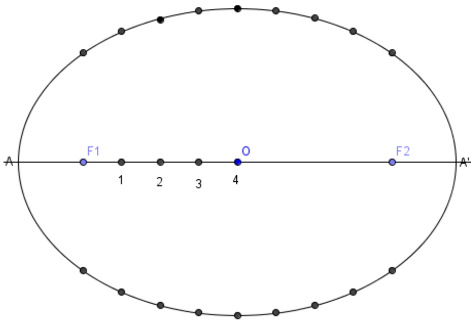


FONTE: CLAME, 2013, p. 1052

Por este processo o aluno percebe que a soma da medida das distâncias de um ponto qualquer da curva aos focos é constante e igual à medida do comprimento do barbante.

Outra representação figural da elipse pode ser construída por meio de pontos em um plano com o auxílio de régua e compasso e alguns procedimentos, como no apêndice C. Em uma folha branca constrói-se um ponto para que denominaremos de centro da figura, dois focos F1 e F2 e dois vértices A e A' equidistantes e simétricos a este centro, entre um dos focos e o centro O marcamos os pontos, 1, 2, 3 ou mais. A seguir usamos o compasso com abertura da mesma medida dos segmentos $\overline{A1}$ e $\overline{A'1}$ com a ponta seca nos focos. As interseções entre os arcos construídos exibem os pontos pertencentes à curva. Após um número suficiente de interseções podermos traçar a curva como na figura 8.

Figura 8. Elipse por pontos

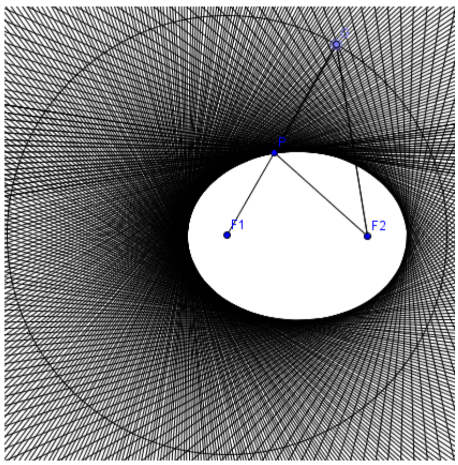


FONTE: Produção do autor

Este caminho permite notar que a soma das medidas dos raios descritos pelo compasso, para cada interseção, é constante e que a simetria tem um papel relevante, além disso, podemos estimar a qual curva os pontos pertencem sobrepondo-os com uma régua francesa.

Com o software Geogebra podemos construir a figura da elipse pela ferramenta “rastro”, como no apêndice A, a partir de suas tangentes em um processo semelhante ao da dobradura de papel. Sendo assim, precisamos construir dois focos F1 e F2, uma circunferência com raio definido e maior que a distância entre os focos com centro em F1 e um ponto qualquer na circunferência, aqui denominamos este ponto de G. Em seguida construímos os segmentos $\overline{F1G}$, $\overline{F2G}$ e sua mediatriz, e denominamos de P o ponto de interseção entre ela e o segmento $\overline{F1G}$. Por fim habilitamos o rastro na mediatriz e deslizamos o ponto G na circunferência para a figura 9 surgir.

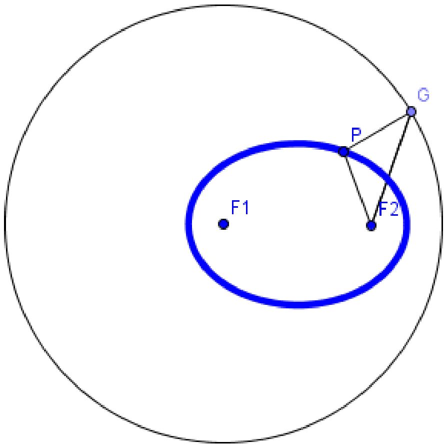
Figura 9. Elipse pela ferramenta "rastro"



FONTE: Produção do autor

Esta construção permite ao aluno compreender que a soma da medida das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos é constante. Ainda por este mesmo software, podemos construir a elipse pela ferramenta “lugar geométrico”, de acordo com o apêndice B, em que podemos usar o mesmo procedimento da figura anterior, exceto pelo fato de habilitarmos o rastro na reta mediatriz, pois nesta ferramenta são necessários apenas dois pontos, um para percorrer a curva e o outro é definido a partir do primeiro. Neste exemplo é necessário escolher os pontos P e G para a figura 10 surgir.

Figura 10. Elipse pela ferramenta "lugar geométrico"



FONTE: Produção do autor

Por este método o aluno compreende que o conjunto de pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante representa uma curva denominada de elipse, onde P é um ponto do “lugar geométrico” e G um ponto sobre a circunferência como apresentado na figura anterior. A constante mencionada tem a mesma medida do raio da circunferência centrada em F1.

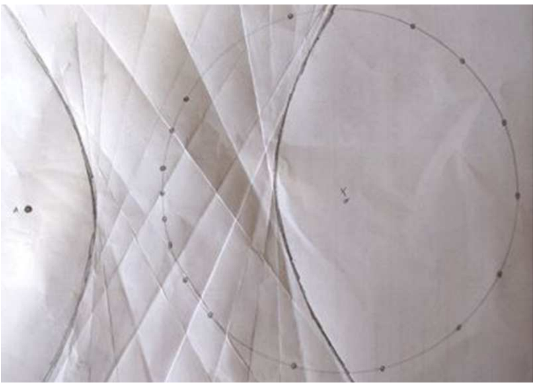
A partir dessas construções podemos então explicitar a definição e nomear os elementos da elipse e concluir que para essa curva vale a seguinte relação entre as distâncias de ponto a ponto, $d(F1,\ P) +\ d(F2, P) = k,$ onde F1 e F2 são denominados focos da elipse, P um ponto qualquer desta curva e K uma constante positiva. Nesta equação se lê: a medida da distância entre o foco F1 e um ponto qualquer da elipse somada à medida da distância deste mesmo ponto ao foco F2 é uma constante. A seguir apresentamos um estudo para a hipérbole.

2.1.3 A HIPÉRBOLE

A hipérbole é definida como sendo o conjunto de pontos de um plano, tal que a diferença das distâncias a dois pontos distintos fixados é um valor absoluto igual a uma constante, não nula e menor que a distância entre os pontos fixos. Contudo para que o aluno, efetivamente, entenda esta definição podemos proceder como anteriormente para a parábola e elipse, começando nossas reflexões a respeito da hipérbole pela dobradura de papel.

Para a construção da hipérbole em dobradura, descrita no anexo A, é preciso marcar um ponto, foco F1, centralizado na folha de papel vegetal e desenhar duas circunferências concêntricas com F1 no centro, em seguida construir uma semirreta com origem em F1 e denominar a interseção dela com a circunferência de raio maior de foco, F2, por fim devem-se escolher pontos sobre a circunferência de raio menor e fazer a dobradura sobrepondo estes pontos ao foco F2. Após um número razoável de vincos será possível visualizar uma hipérbole construída pelas retas que a tangenciam como na figura 11.

Figura 11. Hipérbole pela dobradura de papel

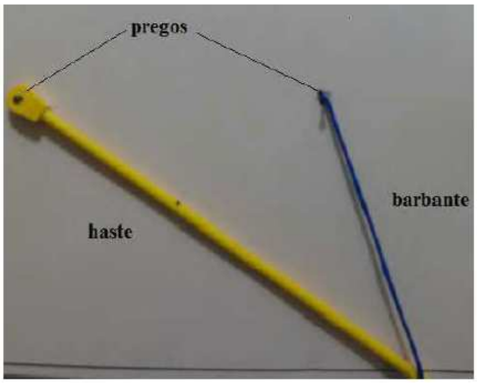


FONTE: portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em 22/08/2014

Esta construção possibilita a percepção de que a diferença, em módulo, das medidas das distâncias entre qualquer ponto na curva aos focos da hipérbole é constante e igual à medida do raio da menor circunferência e igual à medida da distância entre o que denominaremos, futuramente, de vértices da hipérbole.

Para construirmos a hipérbole por materiais manipulativos, de acordo com o anexo B, precisamos de dois pontos para nomear de focos, mais ou menos centralizados em uma folha branca de papel, a medida da distância entre estes pontos deve ser maior que a diferença, em módulo, entre o comprimento da haste e do barbante. Fixamos dois pregos nos focos da futura curva onde, em um deles, é colocada a haste e no outro, o barbante de acordo com a figura 12.

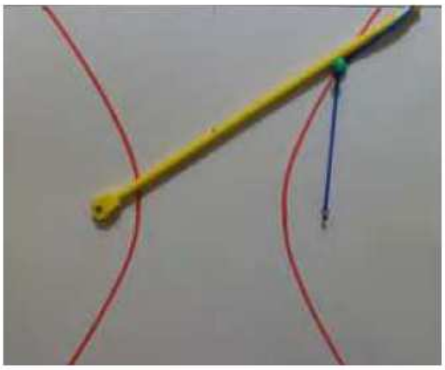
Figura 12. Materiais manipulativos para construir uma hipérbole



FONTE: CLAME, 2013, P. 1054

Nesta disposição puxa-se o fio com um pincel de forma a girar a haste em torno do ponto onde foi fixada para construir a parte direita da hipérbole, em seguida devemos realizar o mesmo procedimento para o outro prego e construir a parte da esquerda. A seguir, na figura 13, pode ser visto uma representação figural da hipérbole por materiais manipulativos.

Figura 13. Hipérbole por materiais manipulativos

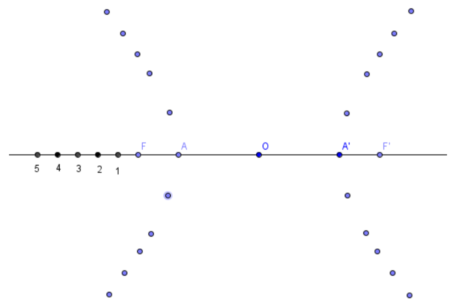


FONTE: CLAME, 2013, P. 1055

Esta construção possibilita ao aluno perceber que a diferença de um ponto P qualquer da curva é sempre igual ao comprimento da haste menos o comprimento do barbante, sendo, portanto uma constante.

Por meio de pontos no plano a hipérbole pode ser construída com régua e compasso, de acordo com o apêndice C, a partir da definição do eixo real, AA', da distância focal FF' e do centro O. Em seguida devem-se marcar uns pontos à esquerda de F ou à direita de F' e, com o centro em F e F', traçar arcos usando o compasso de aberturas iguais aos segmentos $\overline{A1}$, $\overline{A2}$, $\overline{A3}$..., $\overline{A'1}$, $\overline{A'2}$, $\overline{A'3}$ ou mais. Estes arcos se interceptarão nos pontos pertencentes à curva. Após um número suficiente deles podemos traçar uma hipérbole como na figura 14.

Figura 14. Hipérbole por pontos



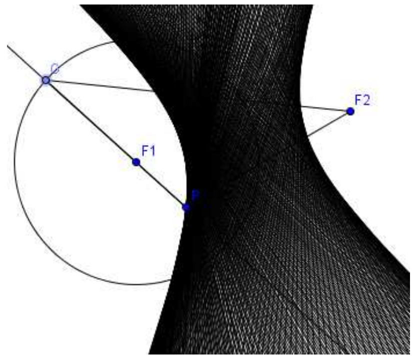
FONTE: Produção do autor

Este processo permite notar que o módulo das diferenças das medidas dos raios descritos pelo compasso para cada interseção é constante e igual à medida da distância entre A e A’, vértices da hipérbole. Nesta construção, assim como para a parábola e elipse, a simetria tem um papel relevante e ainda, podemos estimar a qual curva pertence os pontos usando uma régua francesa.

No Geogebra, pela ferramenta rastro, como no apêndice A, construímos uma representação figural da hipérbole por suas tangentes, utilizando uma ideia semelhante ao da construção em dobradura de papel, com a vantagem da rapidez e da dinâmica que o software proporciona.

Construímos dois focos, F1 e F2, uma circunferência com centro em F1, de raio menor que a distância focal e um ponto qualquer, denominado aqui de G, pertencente a ela. Em seguida, traçamos o segmento, $\overline{F2G}$ e sua mediatriz, uma reta que contém os pontos F1 e G e nomeamos de P o ponto de interseção entre ela e a mediatriz. Por último, habilitamos a ferramenta “rastro” nesta última e deslizamos o ponto G sobre a circunferência para formar a figura 15.

Figura 15. Hipérbole pela ferramenta "rastro"

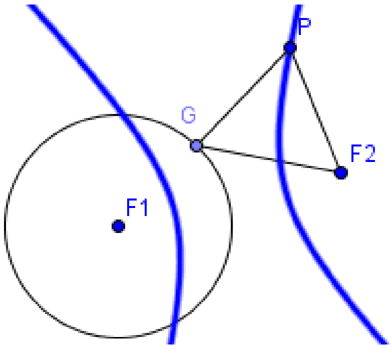


FONTE: Produção do autor

Esta construção permite ao aluno perceber que a diferença, em módulo, das distâncias de um ponto qualquer na hipérbole e seus focos é uma constante. Por este mesmo software construímos a hipérbole pela ferramenta “lugar geométrico”, como no apêndice B, em que podemos usar o mesmo procedimento da figura anterior, exceto pelo fato de habilitarmos o rastro na reta mediatriz, pois, agora são necessários dois pontos, um para percorrer a curva e o outro é definido a partir do primeiro. Precisamos, apenas, escolher com a ferramenta “lugar geométrico” os pontos P e G para surgir a figura 16.

Do mesmo jeito que foi feito anteriormente, podemos perceber para a hipérbole que há uma ligação entre estas construções, ou seja, uma leva a outra. A partir dessas construções podemos então explicitar a definição e nomear os elementos da hipérbole e concluir que para essa curva vale a seguinte relação entre as distâncias de ponto a ponto $d(F1,\ P) - d\ (F2, P) = k$, onde F1, F2 são os focos da hipérbole, P um ponto qualquer desta curva e k uma constante. Nesta equação se lê: a medida da distância entre o foco F1 e um ponto qualquer da hipérbole somada à medida da distância deste mesmo ponto ao foco F2 é uma constante.

Figura 16. Hipérbole pela ferramenta "lugar geométrico"



FONTE: Produção do autor

Por esta construção aluno percebe que o conjunto de pontos no plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante representa uma curva denominada de hipérbole, onde P é um ponto do “lugar geométrico” e G um ponto sobre a circunferência. O raio desta circunferência e a medida da distância entre os vértices da hipérbole são iguais à constante mencionada.

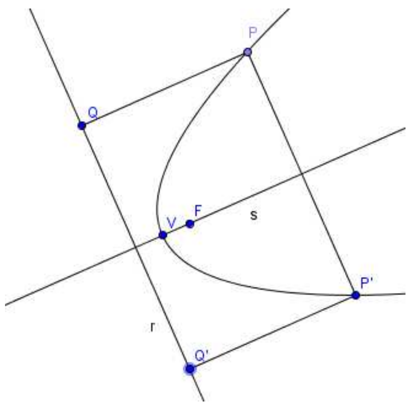
Para o registro figural, Duval (1995, p. 181 apud SILVA, 2012, p. 7) esclarece que “a possibilidade de tratamentos figurais está ligada à possibilidade de modificações mereológicas, óticas e posicionais de uma figura, modificações que podem ser feitas fisicamente ou mentalmente, e, independente de todo conhecimento matemático”. Este tratamento é uma transformação interna e própria do registro. Segundo Silva (2012), os eles estão ligados à forma e não ao conteúdo matemático. Para as cônicas, no registro figural, evidenciamos os tratamentos associados à simetria das figuras e à reconfiguração. Esta última é explicada por Flores (2005):

> A operação de reconfiguração consiste, basicamente, na complementaridade de formas, ou seja, das partes obtidas por um fracionamento que podem ser reagrupadas em subfiguras incluídas na figura inicial. Portanto, o fracionamento de uma figura, ou o exame desta a partir de suas partes elementares, permite a aplicação da operação de reconfiguração Moretti e Flores (2005, p. 8 apud Silva, 2012, p. 8).

Além destes tratamentos evidenciamos no registro material, por dobraduras de papel, o tratamento associado ao processo de construir vincos que representam as retas tangentes às curvas estudadas como aparecem nas figuras 1, 6 e 11.

A parábola é uma figura geométrica que possui simetria em relação a uma reta, denominada aqui de s, que passa pelo foco e é perpendicular à reta diretriz (figura 17). Com esta informação, podemos construir uma figura, pela definição, e associá-la a um registro discursivo que será responsável por fornecer as informações de seus elementos.

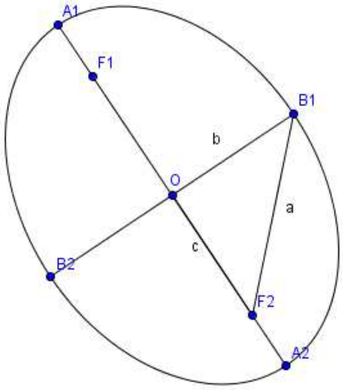
Figura 17. Simetria da parábola

Parábola	**Registro discursivo**
	P: ponto qualquer da curva P’: ponto simétrico ao ponto P F: foco da parábola r: reta diretriz S: reta de simetria da parábola $\overline{rF}$ = parâmetro da curva V: vértice da parábola e ponto médio do parâmetro $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ $\overline{FP} = \overline{FP'}$ $\overline{FP} = \overline{PQ}$ $\overline{FP'} = \overline{P'Q'}$

FONTE: Produção do autor

A elipse possui simetria em relação aos seus eixos, menor e maior. A figura 18 apresenta uma construção, pela definição, e um registro discursivo associado a esta curva explicitando seus elementos.

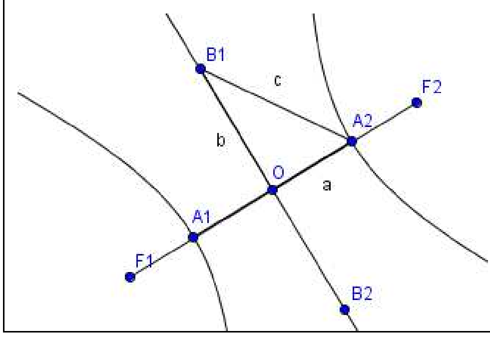
Figura 18. Simetria da elipse

Elipse	Registro discursivo
	O: centro F1 e F2: focos A1, A2, B1 e B2: vértices $\overline{B1B2}$ = 2b: eixo menor $\overline{A1A2}$ = 2a: eixo maior $a^2 = b^2 + c^2$: pelo teorema de Pitágoras P: qualquer ponto da curva $\overline{PF1}$ + $\overline{PF2}$ = 2a (lugar geométrico)

FONTE: Produção do autor

A hipérbole é uma figura geométrica que possui simetria em relação aos seus eixos, maior e menor, e assim como feito anteriormente, podemos associar a figura a um registro discursivo como na figura 19.

Figura 19. Simetria da Hipérbole

Hipérbole	Registro discursivo
	O: centro F1 e F2: focos A1 e A2: vértices $\overline{B1B2}$ = 2b: eixo conjugado $\overline{A1A2}$ = 2a: eixo transverso $\overline{F1F2}$ = 2c P: qualquer ponto da curva $\lvert\overline{PF1} - \overline{PF2}\rvert$ = 2a (lugar geométrico)

FONTE: Produção do autor

Além do registro figural, com enfoque na geometria, as cônicas podem ser estudadas com ênfase na geometria analítica, no referencial cartesiano, onde abordamos o registro gráfico e algébrico apresentados na próxima secção.

2.2 AS CÔNICAS NA GEOMETRIA ANALÍTIA E SEUS REGISTROS

O que fizemos no item anterior nada mais é do que uma preparação para transportar os objetos da geometria para um referencial cartesiano, base da geometria analítica. Neste contexto faremos um estudo dos registros gráficos, algébricos e das conversões envolvidas. Em termos de conversão Almouloud (2007) afirma que:

> Uma mudança de registro apresenta vantagens do ponto de vista do tratamento, porque facilita a compreensão e a descoberta de novos conteúdos, principalmente para os sujeitos que estão se iniciando em tarefas que envolvem coordenação de registros (ALMOULOUD, 2007, p. 79).

Segundo Silva (2012) "não são regras de correspondência para passar de um registro a outro ou simplesmente codificações que caracterizam uma conversão, mas sim, a apreensão global e qualitativa que a conversão permite embutir nas mudanças de registros". Em relação ao que está inerente a uma conversão Duval (2003) explica:

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são especificas do funcionamento de cada um dos registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais são as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos registros Duval (2003, p. 17 apud SILVA, p. 13).

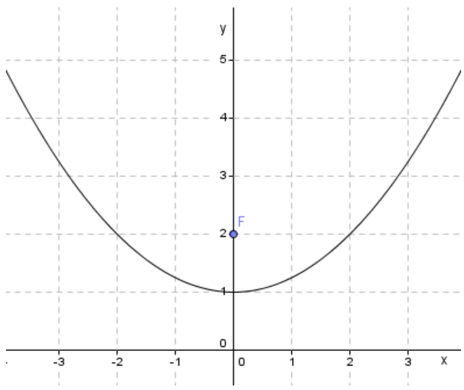
O registro gráfico, no estudo de cônicas, baseia-se na abordagem da geometria analítica em que cada ponto no plano pode ser associado a duas coordenadas x e y a partir de um referencial. Como, as cônicas são definidas como lugar geométrico dos pontos que satisfazem determinadas condições, é possível representar essas curvas no plano cartesiano. Portanto, este registro gráfico se constitui quando os objetos da geometria são trazidos para um referencial cartesiano, onde cada ponto deste objeto pode ser representado por coordenadas (x, y) e seu tratamento se constitui com movimentos no plano como nas transformações geométricas.

O transporte dos objetos da geometria para um referencial cartesiano caracteriza-se com uma primeira conversão do registro material para o registro figural, posteriormente uma segunda conversão do registro figural para o registro gráfico e uma terceira conversão do registro gráfico para o registro algébrico como apresentaremos a seguir.

2.2.1 A PARÁBOLA NA GEOMETRIA ANALÍTICA

Na figura 20, consideramos um ponto sobre o eixo y, denominado de eixo das ordenadas, F(0,2), e a reta diretriz, coincidindo com o eixo x, conhecido como eixo das abscissas, e efetuamos uma conversão do registro geométrico para o registro gráfico a partir da definição de lugar geométrico estudado na seção anterior.

Figura 20. Parábola em coordenadas cartesianas

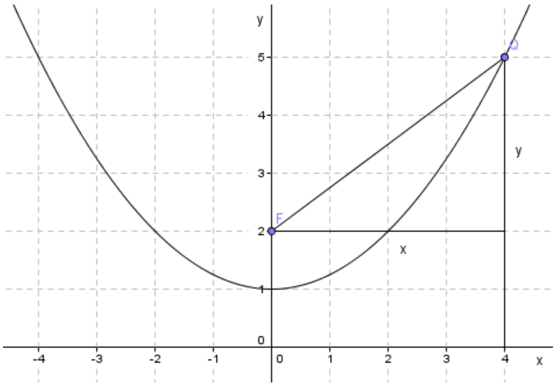


FONTE: Produção do autor

Outra conversão é realizada quando passamos do registro gráfico para o registro algébrico com o intuito de representar as curvas por uma equação a partir do gráfico. Lopes (2011) analisa alguns livros didáticos em relação ao estudo de cônicas e observa que a maior parte deles discute o tema com enfoque nas equações algébricas, reforçando a afirmação de Neto (2008) ao se referir que as cônicas são pouco discutidas devido às escolhas dos professores e, quando é reservado algum tempo para estudá-las, o foco da abordagem se concentra na manipulação algébrica das equações, ou seja, a maior parte das escolas privilegia o registro algébrico.

Esta conversão pode ser feita analisando as características do gráfico (figura 21) pela equação $d(Q,F) = d(Q,r)$, em que o foco possui as coordenadas F(0, 2), a reta r é representada por $y = 0$, coincidindo com o eixo x, e o ponto da curva tem coordenadas Q(4, 5). Assim podemos escrever $|y| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ e após um processo de simplificação chegamos à equação algébrica $x^2 - 4y^2 = -4$, concluindo, portanto, a conversão.

Figura 21. Um exemplo numérico

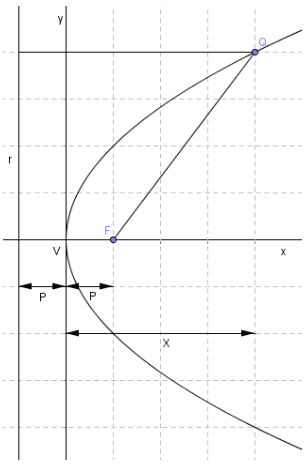


FONTE: Produção do autor

É útil, ainda, usarmos este procedimento para construir a equação reduzida para a parábola onde o vértice coincide com a origem do sistema ortogonal em que, P, um número positivo, é chamado parâmetro desta curva tal que $d(F, r) = 2p$ e d é a distância euclidiana.

Na parábola da figura 22, o foco pertence ao semieixo positivo de x, ou seja, suas coordenadas são F(P, 0) e a reta diretriz tem a equação $x = -p$.

Figura 22. Parábola: conversão do registro geométrico para o registro gráfico



FONTE: Produção do autor

Como Q é um ponto de coordenadas cartesianas (x, y) que pertence a uma parábola, pela definição desta curva podemos escrever que $d(Q, F) = d(Q, r)$, ou seja, $|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtém-se $x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$ que, simplificando, fica:

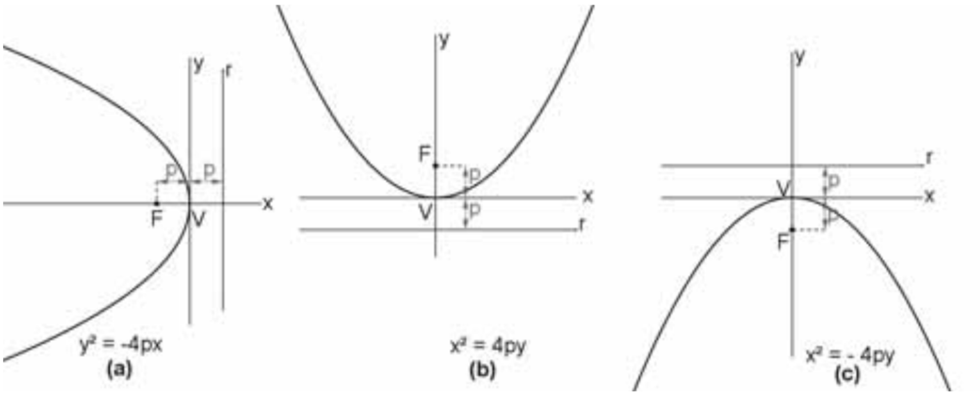
$$y^2 = 4px \tag{2.1}$$

Esta é uma equação reduzida para a parábola, mas existem várias outras deste tipo, a depender da posição do foco e da reta diretriz. A seguir segue alguns exemplos de equações e seus respectivos registros gráficos. Considerando o vértice na origem, as coordenadas dos focos F (-p, 0), F (0, p) e F (0, - p) com suas respectivas retas diretrizes $x = -p$, $y = p$ e $y = -p$, podemos escrever suas equações algébricas:

$$y^2 = -4px,\ x^2 = 4py \text{ e } x^2 = -4py, \text{ respectivamente} \qquad (2.2)$$

A figura 23 representa algumas configurações para a parábola de acordo com as equações de 2.2.

Figura 23. Algumas configurações para a parábola



FONTE: Lopes (2011, p. 102)

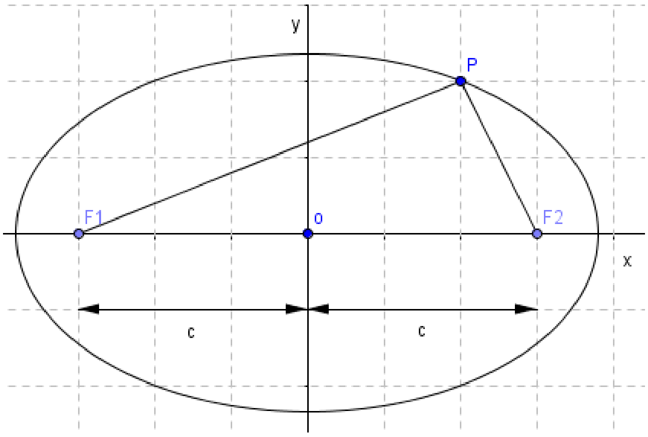
A propósito da conversão que utilizou o gráfico apresentado na figura 20 como base, o parâmetro tem a medida igual a 1, pois sua medida é metade da distância entre o foco da parábola e a reta diretriz.

2.2.2 A ELIPSE NA GEOMETRIA ANALÍTICA

A elipse é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano de coordenadas cartesianas (x, y) que satisfazem a condição $d(P, F1) + d(P, F2) = 2a$, onde F1 e F2 são denominados focos, $\overline{F1F2}$ o segmento focal, 2c a distância entre os focos e a um número real tal que a > c.

Por essa definição é possível fazermos uma primeira conversão do registro geométrico para o registro gráfico, tendo como base o sistema de coordenadas cartesianas como mostra a figura 23.

Figura 24. Elipse: Conversão do registro geométrico para o registro gráfico



FONTE: Produção do autor

A partir desta definição e do gráfico da figura 24 podemos realizar, assim como feito para a parábola, uma segunda conversão, do registro gráfico para o registro algébrico, e construir a conhecida equação reduzida para a elipse, ou seja, podemos escrever

$$\sqrt{(x+c)^2+\ y^2}+\ \sqrt{(x-c)^2+\ y^{\,2}}=2a. \tag{2.3}$$

Onde, elevando ambos os membros ao quadrado, expandindo os quadrados e simplificando encontraremos

$$a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}=a^2-cx. \tag{2.4}$$

Elevando ao quadrado os membros, expandindo novamente e agrupando os termos em x^2 e y^2 obtém-se

$$(a^2-\ c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-\ c^2). \tag{2.5}$$

Definindo como b^2 a expressão $(a^2-\ c^2)$ e dividindo ambos os membros por a^2b^2 obtemos a equação reduzida da elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\ \frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.6}$$

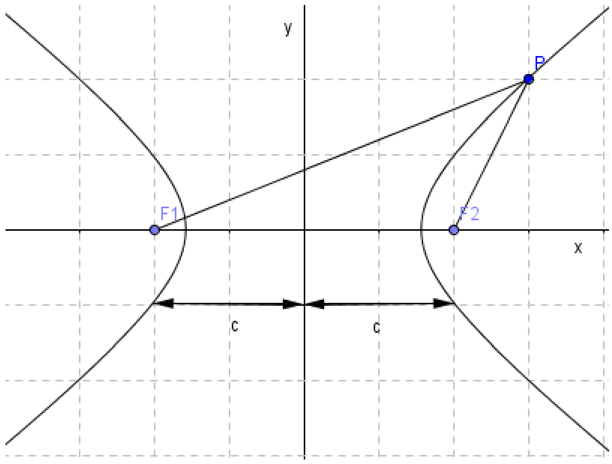
Note que os focos da elipse estão sobre o eixo das abscissas, caso eles estivessem sobre o eixo das ordenadas a equação teria a forma

$$\frac{x^2}{b^2}+\ \frac{y^2}{a^2}=1. \tag{2.7}$$

2.2.3 A HIPÉRBOLE NA GEOMETRIA ANALÍTICA

A hipérbole é definida como o lugar geométrico dos pontos no plano de coordenadas cartesianas (x, y) que satisfazem a condição $|d(P,F1) - d(P,F2)| = 2a$ em que, F1 e F2, representam os focos, P, um ponto qualquer da curva, $\overline{F1F2}$, o segmento focal, d, a distância entre o ponto P e os focos e 2c a distância entre os focos. Portanto, assim como feito para as duas curvas estudadas anteriormente, realizamos uma primeira conversão do registro geométrico para o registro gráfico, conforme a figura 25 a seguir.

Figura 25. Hipérbole: Conversão do registro geométrico para o registro gráfico



FONTE: Produção do autor

A partir desta definição e do gráfico da figura 25 podemos realizar, assim como feito anteriormente, uma segunda conversão, do registro gráfico para o registro algébrico, e construir a conhecida equação reduzida para a hipérbole, ou seja, podemos escrever

$$\sqrt{(x^2+c)^2+\ y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a. \tag{2.8}$$

Onde, elevando ao quadrado ambos os membros, expandindo as potências e simplificando obtém-se

$$xc - a^2 =\ \pm a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}. \tag{2.9}$$

Ao realizar o mesmo processo anterior na equação 2.8, agrupar os termos x^2 e y^2 e definir $c^2 - a^2 = b^2$ chegamos a

$$b^2x^2 -\ a^2y^2 = a^2b^2. \tag{2.10}$$

O que resulta, após dividir a equação por a^2b^2, em

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.11}$$

Para a situação em que os focos estejam no eixo das ordenadas, a equação reduzida da hipérbole toma a forma de 2.12

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (2.12)$$

É importante ressaltar que as equações até aqui apresentadas não são as únicas representantes dessas curvas, existe uma infinidade delas, pois as cônicas podem não estar centralizadas na origem do sistema cartesiano e ainda, há possibilidades de rotações no plano. No que segue faremos um estudo didático das transformações geométricas no plano.

2.3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

A representação gráfica é muito importante no estudo deste tópico da matemática e permite, em alguns casos, facilitar a solução de um problema, uma vez que propicia a visão e visualização. Que de acordo com Duval (1999):

> A percepção visual precisa de exploração por meio de movimentos físicos, porque ela nunca dá uma apreensão completa do objeto. Ao contrário, a visualização pode dar pelo menos uma apreensão completa de qualquer organização de relações. Nós podemos dizer “pode dar” e “não pode dar” porque visualização requer um longo treinamento [...] Entretanto, o que a visualização apreende pode ser o início de uma série de transformações, o que faz o seu poder inventivo (DUVAL 1999, p.7 apud OLIVEIRA, 2010, p. 81).

Nos registros de representação semiótica gráfico e algébrico alguns tratamentos serão possíveis a partir de transformações geométricas no plano. Segundo Lage (2008, p. 42) essas transformações “podem atuar como articuladoras entre diversos conteúdos e ideias matemáticas, dando significado à linguagem ao generalizar procedimentos de cálculos”. Ainda, de acordo com a autora:

> Incorporando o estudo das transformações geométricas no plano ao currículo de matemática, utilizando uma concepção de resolução de problemas e/ou atividade investigativa, temos uma ferramenta poderosa para a compreensão das propriedades e relações. Bem como a possibilidade de mobilização de formas gerais de pensamentos matemáticos como: visualização, experimentação, dedução, levantamento de conjecturas, exploração de regularidades, registro e comunicação de ideias e argumentos sobre o conteúdo matemático estudado. Os alunos podem ser incentivados a adotar estratégias e formas de pensamento específicas dos matemáticos como: observação dos variantes e invariantes, sistematização de resultados, uso de raciocínio proporcional, exploração de uma situação por meio de múltiplos pontos de vista, ou raciocínio por continuidade (LAGE, 2008, p.43).

Além do tratamento envolvido em cada transformação, explicitamos as conversões realizadas entre o registro algébrico e gráfico em translações e rotações. Segundo Wagner

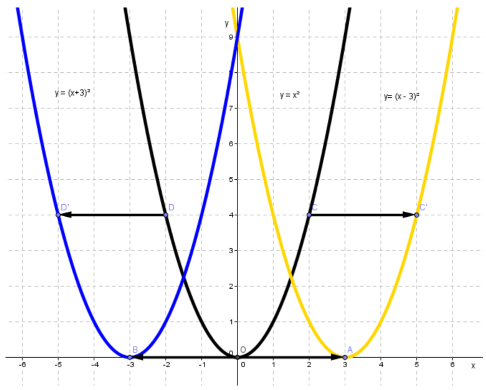
(1993, p. 20 apud LAGE, 2008, p. 46) “a noção de translação está intimamente relacionada ao conceito de vetor”, ou seja, para cada transformação está associado módulo, direção e sentido de um vetor deslocamento. Uma maneira de construir um gráfico e realizar translações estão presentes no apêndice D deste trabalho.

O conceito de transformação geométrica é explicado por Wagner (1993):

> Transformações geométricas são funções que associam a cada ponto do plano um outro ponto também do plano através de certas regras. [...] Uma transformação T, no plano Π, é uma função T: Π → Π, que associa a cada ponto A do plano outro ponto A’ = T(A) do plano, chamado sua imagem de A por T. Se F é uma figura (ou conjunto de pontos) F’ = T(F) é o conjunto das imagens dos pontos de F. (WAGNE, 1993, p. 70 apud LAGE, 2008, p. 44).

Em uma translação o vetor $\vec{v}$ define a direção, o sentido e a medida da distância entre um ponto e sua imagem. A partir do conceito de transformação apresentada na citação anterior, a transformação geométrica de translação pode ser representada por T (P) = P + $\vec{v}$.

Figura 26. Translação paralela ao eixo das abscissas para a parábola



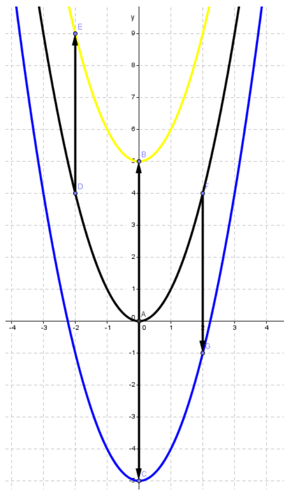
FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 26 a equação que representa a parábola original em estudo é $y = x^2$ representada pela curva em cor preta e cada ponto do gráfico da figura original sofreu uma translação de três unidades na direção do eixo x conforme é apresentado, com os vetores representativos. O ponto C tem sua imagem representada pelo ponto C’ e o ponto D tem sua imagem representada pelo ponto D’.

A figura amarela representa a figura original que foi transladada no sentido positivo de x, sua equação característica é $y = (x - 3)^2$ e as coordenadas do vértice O (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto A (3,0). O gráfico da figura azul representa o gráfico da figura original transladada no sentido negativo de x, sua equação característica é $y = (x+3)^2$ e as coordenadas do vértice O (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (-3,0).

A conversão do registro gráfico para o registro algébrico referentes às imagens da parábola pode ser feita analisando as informações no gráfico. A equação da parábola é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, neste caso, $c = 9$ e estas parábolas possuem duas raízes reais e iguais, portanto, $\Delta = 0$. O vértice da parábola em amarelo tem abscissa 3, ou seja, $3 = -\frac{b}{2a}$, desta forma podemos usar estas informações e substituir na equação para obter os valores $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$. Sendo assim, a figura amarela no gráfico representa a equação $y = x^2 - 6x + 9$ ou, ainda, $y = (x-3)^2$. Para a figura azul o procedimento é idêntico, porém no sentido oposto e a equação assume a forma $y = (x+3)^2$. Por estas equações o aluno pode perceber que para uma translação no sentido positivo do eixo x, entre parentes deve-se acrescentar o sinal menos e no sentido negativo do eixo x deve-se acrescentar o sinal positivo.

Figura 27. Translação paralela ao eixo das ordenadas para a parábola

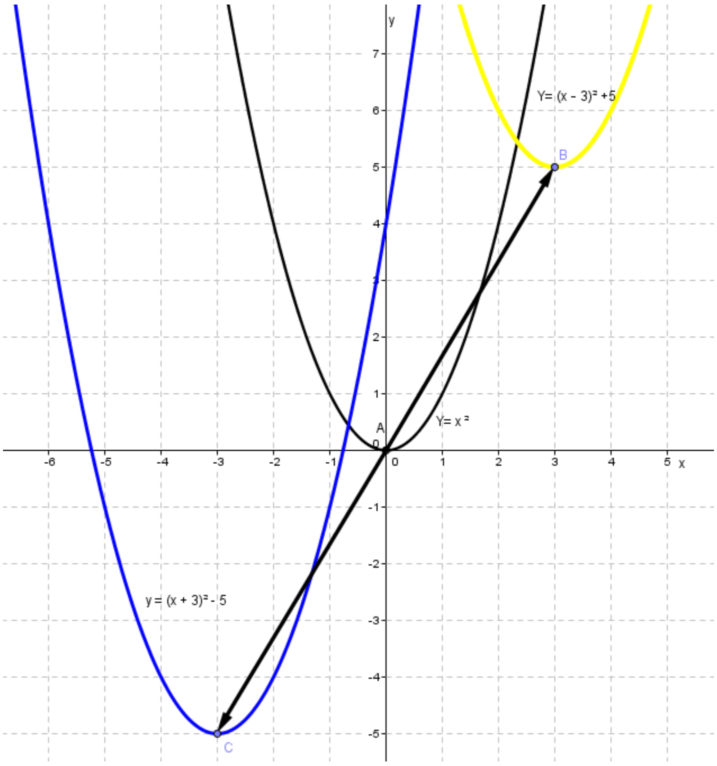


FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 27 a equação que representa a parábola original em estudo é $y = x^2$ representado pela curva em cor preta. Cada ponto do gráfico da figura original sofreu uma translação na direção do eixo y de cinco unidades conforme é apresentado, com os vetores representativos. O ponto D tem sua imagem representada pelo ponto E e o ponto F tem sua imagem representada pelo ponto G.

sse gráfico sofreu translações na direção do eixo y, o gráfico da figura amarela representa o gráfico da figura original transladada no sentido positivo de y, sua equação característica é $y = x^2 + 5$, as coordenadas do vértice O (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto A (0,5). O gráfico da figura azul representa o gráfico da figura original transladada no sentido negativo de y e sua equação característica é $y = x^2 - 5$. As coordenadas do vértice O (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (0,-5). Na direção do eixo y, para este caso, a translação é realizada acrescentando ou diminuindo a quantidade de unidades definidas pelo vetor deslocamento.

Figura 28. Combinação de translações paralelas aos eixos cartesianos para a parábola



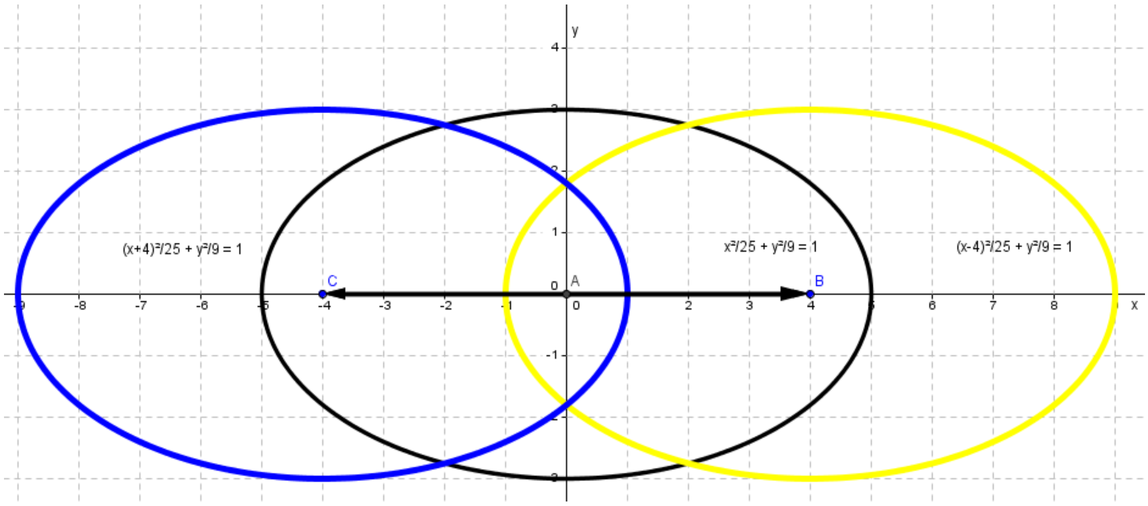
FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 28 a equação que representa a parábola original em estudo é $y = x^2$, representado pela curva de cor preta. Cada ponto do gráfico da figura original sofreu uma translação na direção do eixo y de cinco unidades combinada com uma translação na direção do eixo x de três unidades conforme é mostrado, com os vetores representativos.

A equação característica do gráfico da figura amarela é $y = (x - 3)^2 + 5$ e as coordenadas originais do vértice A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (3, 5). A equação característica do gráfico da figura azul é $y = (x - 3)^2 - 5$ e as coordenadas do vértice A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto C (-3, -5). Para o gráfico da figura 28, a conversão entre do registro gráfico para o registro algébrico se dá pela combinação de dois movimentos, um paralelo ao eixo das abscissas e o outro paralelo ao eixo das ordenadas, valendo, portanto o que foi feito para os gráficos das figuras 26 e 27.

No gráfico da figura 29 a equação que representa a elipse original em estudo é $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}$ = 1, representado pelo gráfico da figura em cor preta, pois a curva da elipse está centralizada na origem e, de acordo com a conversão do registro gráfico para o algébrico, a equação deste tipo é representada por $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, onde, neste caso, $a=5$ e $b=3$. Cada ponto do gráfico da figura original foi transladado quatro unidades na direção do eixo x conforme é mostrado, com os vetores representativos. O ponto A tem sua imagem representada pelo ponto B, na translação feita no sentido positivo do eixo x, e pelo ponto C, na translação feita no sentido negativo de x. O que foi feito para a parábola, nas conversões, vale também para a elipse, ou seja, a curva da elipse em amarelo foi transladada quatro unidades no sentido positivo do eixo x, portanto a equação da elipse original admitirá uma mudança apenas na parcela referente a este eixo, ou seja, $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Para a figura de cor azul o procedimento é o mesmo, porém a translação ocorre no sentido contrário e a equação representada passa a ser $\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Figura 29. Translação paralela ao eixo das abscissas para a elipse

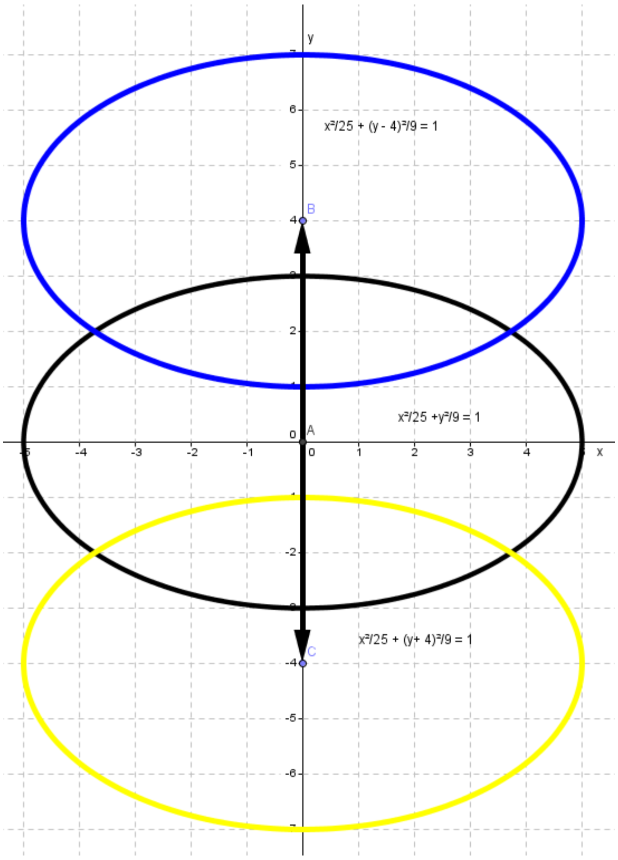


FONTE: Produção do autor

As coordenadas do centro A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (4,0) e as coordenadas do centro A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (-4,0).

No gráfico da figura 30 equação que representa a elipse original em estudo é $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}$ = 1 representado pelo gráfico da figura de cor preta, cada ponto do gráfico da figura original sofreu uma translação de quatro unidades na direção do eixo y conforme é apresentado com os vetores representativos.

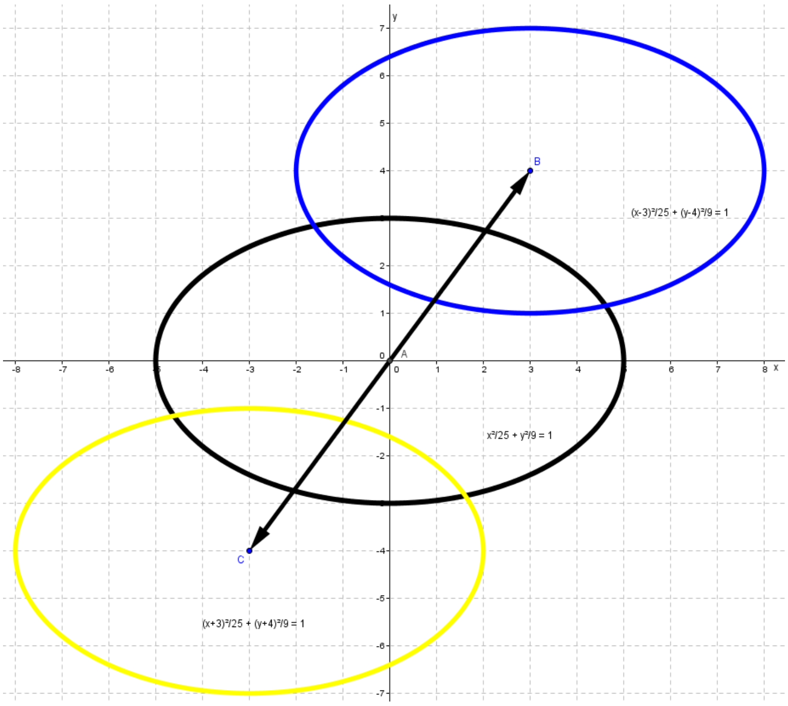
Figura 30. Translação paralela ao eixo das ordenadas para a elipse



FONTE: Produção do autor

O gráfico da figura amarela representa o gráfico da figura original transladada no sentido negativo de y, portanto a equação da figura original terá uma mudança referente apenas a este eixo e passará a ser $\frac{x^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$. As coordenadas do centro A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto C (0,-4), o gráfico da figura azul representa o gráfico da figura original transladada no sentido positivo de y e sua equação característica é $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$, como feito anteriormente, e as coordenadas do centro A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (0,4).

Figura 31. Combinação entre translações paralelas aos eixos cartesianos para a elipse

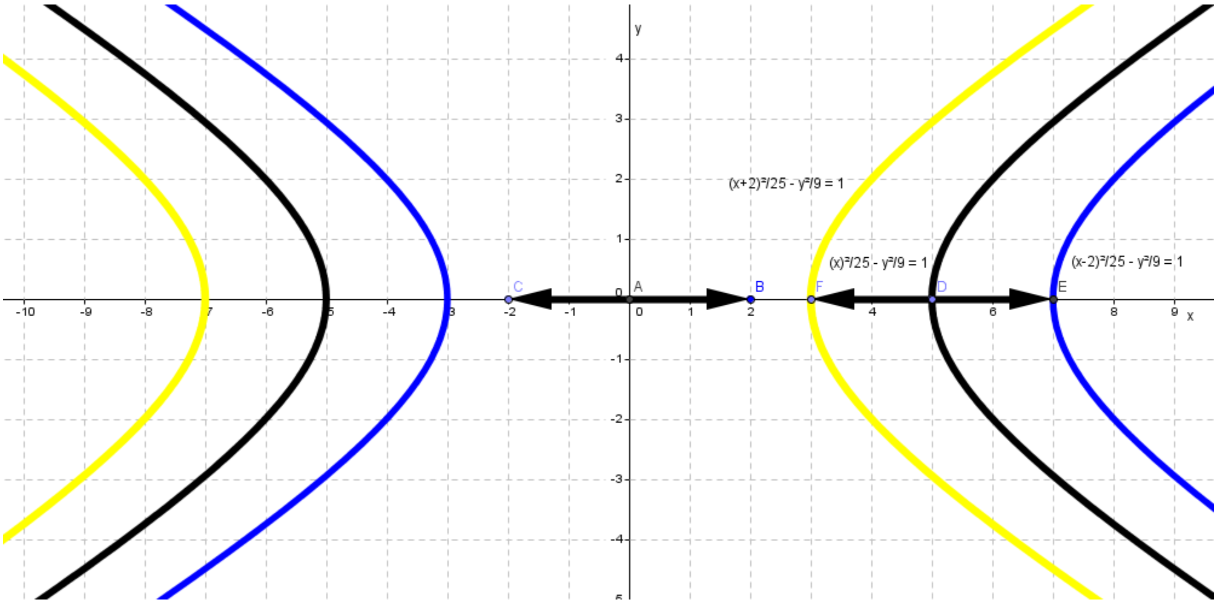


FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 31 a equação que representa a elipse original em estudo é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ está representado pelo gráfico da figura de cor preta. Cada ponto do gráfico da figura original sofreu uma translação de quatro unidades na direção do eixo y combinado com uma translação de três unidades na direção do eixo x conforme é mostrado, com os vetores representativos.

A conversão do registro gráfico para o registro algébrico, nesta situação, deve levar em consideração o movimento nas duas direções do eixo cartesiano e proceder como anteriormente. Portanto a equação característica do gráfico da figura amarela é $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$, as coordenadas originais do centro A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto C (- 3, -4), a equação característica do gráfico da figura azul é $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ e as coordenadas do centro A (0,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (3, 4).

Figura 32. Translação paralela ao eixo das abscissas para a hipérbole

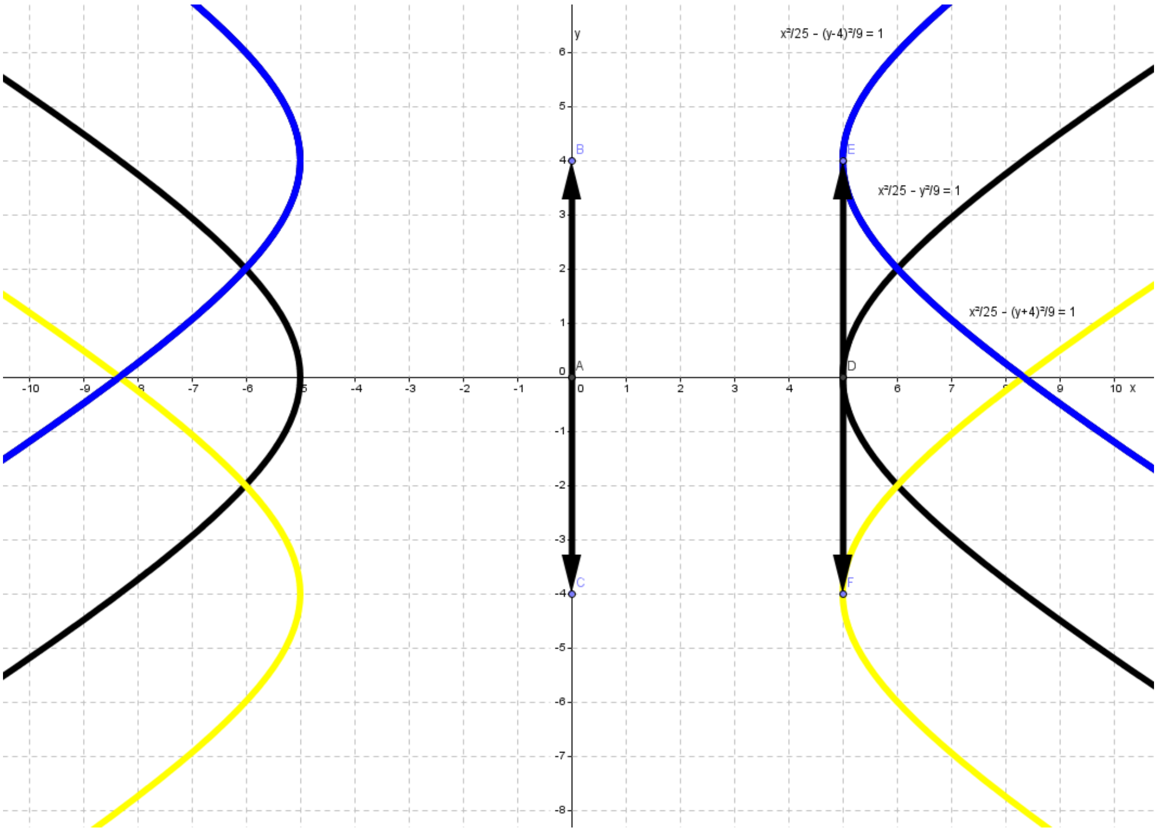


FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 32 equação que representa a hipérbole original em estudo é $\frac{x^2}{25}$ - $\frac{y^2}{9}$ = 1, centrada na origem dos eixos cartesianos, representado pelo gráfico da figura de cor preta, cada ponto do gráfico original sofreu uma translação de duas unidades na direção do eixo x conforme é apresentado, com os vetores representativos. O ponto D tem sua imagem representada pelo ponto E na figura azul e pelo ponto F na da figura amarela.

A figura amarela representa a figura original transladada no sentido negativo do eixo x, ou seja, a equação original sofrerá uma mudança apenas na parcela referente a este eixo conforme fizemos para as outras curvas quando convertemos do registro gráfico para o registro algébrico. Portanto, sua equação característica é $\frac{(x+2)^2}{25}$ - $\frac{y^2}{9}$ = 1 e as coordenadas do ponto D (5,0) tem suas imagens representadas pelo ponto F (3,0). Para a figura azul o procedimento é o mesmo, ele azul representa a figura original transladada no sentido positivo do eixo x, sua equação característica é $\frac{(x-2)^2}{25}$ - $\frac{y^2}{9}$ = 1 e as coordenadas do ponto D (5,0) tem sua imagem representada pelo ponto E (7,0).

Figura 33. Translação paralela ao eixo das ordenadas para a hipérbole

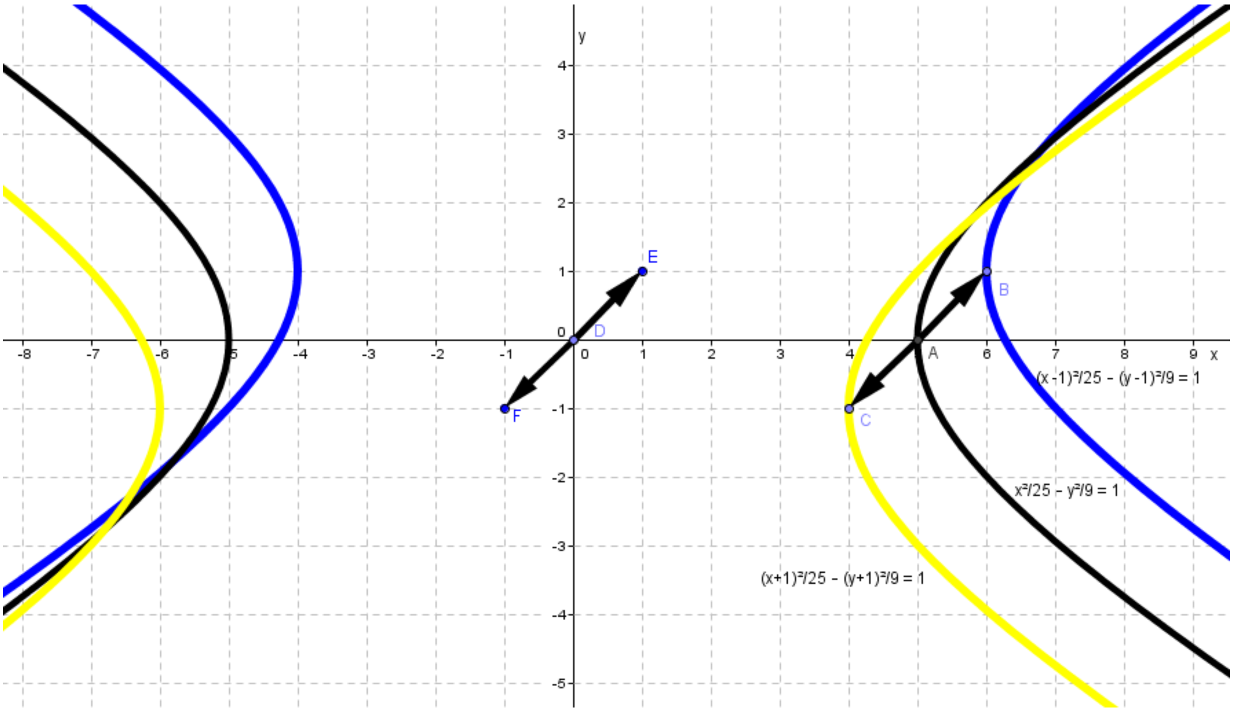


FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 33 a equação que representa a hipérbole original em estudo é $\frac{x^2}{25}$ - $\frac{y^2}{9}$ = 1 representado pela figura de cor preta, centrada na origem do sistema cartesiano, cada ponto da figura original sofreu uma translação de quatro unidades na direção do eixo y conforme é mostrado com os vetores representativos.

A figura amarela representa a da figura original transladada no sentido negativo de y, ou seja, a equação original sofrerá uma mudança apenas na parcela referente a este eixo conforme fizemos para as outras curvas quando convertemos do registro gráfico para o registro algébrico. Portanto, sua equação característica é $\frac{x^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$, as coordenadas do ponto D (5,0) tem sua imagem representada pelo ponto F (5,- 4) e a figura azul representa figura original transladada no sentido positivo de y, sua equação característica é $\frac{x^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ e as coordenadas do ponto D (5,0) tem sua imagem representada pelo ponto E (5,4).

Figura 34. Combinação entre translações paralelas aos eixos cartesianos para a hipérbole



FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 34 a equação que representa a figura original em estudo é $\frac{x^2}{25}$ - $\frac{y^2}{9}$ = 1 representado pelo gráfico da figura de cor preta, cada ponto do gráfico da figura original sofreu uma translação de uma unidade na direção do eixo y combinado com uma translação de uma unidade na direção do eixo x conforme é apresentado à cima, com os vetores representativos.

A conversão do registro gráfico para o registro algébrico, nesta situação, deve levar em consideração o movimento nas duas direções do eixo cartesiano e proceder como anteriormente. A equação característica da figura amarela é $\frac{(x+1)^2}{25}$ + $\frac{(y+1)^2}{9}$ = 1, as coordenadas originais do ponto A (5,0) tem sua imagem representada pelo ponto C (4, -1), a equação característica da figura azul é $\frac{(x-1)^2}{25}$ + $\frac{(y-1)^2}{9}$ = 1 e as coordenadas do vértice A (5,0) tem sua imagem representada pelo ponto B (6, 1).

Toda translação está associada ao um vetor deslocamento que pode estar na direção do eixo x, na direção do eixo y ou ser uma combinação destas duas direções. Em todos os exemplos apresentados, a distância entre cada ponto do gráfico da figura original e sua respectiva imagem corresponde ao módulo do vetor deslocamento.

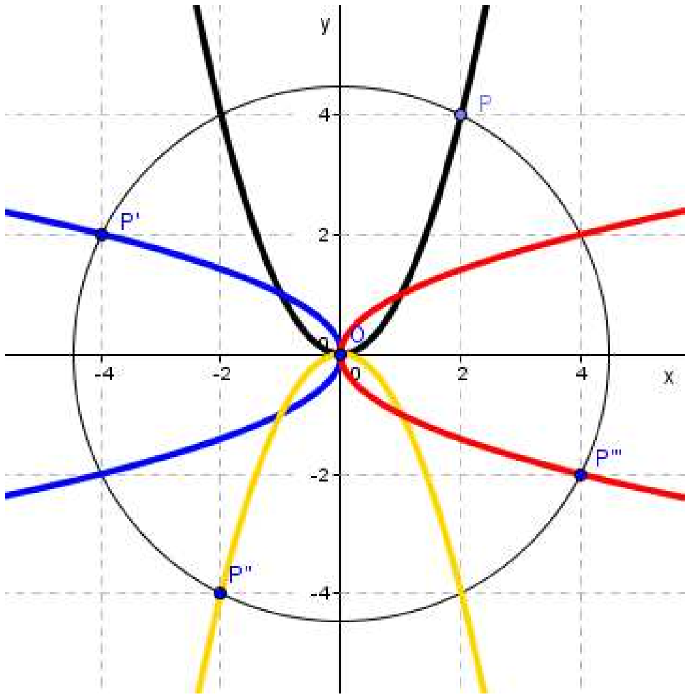
Em uma rotação é preservado a forma do objeto, a distância entre cada ponto original e suas respectivas imagens e a medida dos ângulos formados pelos pontos da figura original, pelos da imagem e por um ponto fixo. A transformação de rotação pode ser representada por T (x, y) = (xcos α - ysin α, xsin α +ycos α) onde T simboliza a transformação e α representa o ângulo de rotação. Uma maneira de realizar rotações no plano, com o uso do Geogebra, é apresentada no apêndice E que acompanha este trabalho.

Nos livros didáticos esta transformação não é abordada, entretanto, seu estudo é importante no sentido de explorar diferentes aspectos da figura, assim sendo, a computação representa uma ferramenta valiosa para esta tarefa, pois de acordo com Lage (2008):

> Se a definição acima e a informação acerca dos invariantes quando a transformação é aplicada a pontos do plano são apenas repassadas aos alunos, dificilmente serão entendidas ou serão facilmente esquecidas. As explorações com figuras são fundamentais no entendimento das transformações geométricas; em ambiente de lápis e papel apresentam a limitação de lidar com objetos estáticos e em ambiente computacional trazem a vantagem de permitir a movimentação das figuras LAGE (2008, p. 49).

Construímos a parábola, a elipse e a hipérbole no software, onde elas sofreram rotações de acordo com os ângulos de 90°, 180° e 270°, em seguida, apresentamos alguns comentários relevantes nestas rotações. O passo a passo das construções está disposto no anexo que acompanha este trabalho.

Figura 35. Rotação da parábola de acordo com os ângulos 90°, 180° e 270° no sentido anti-horário

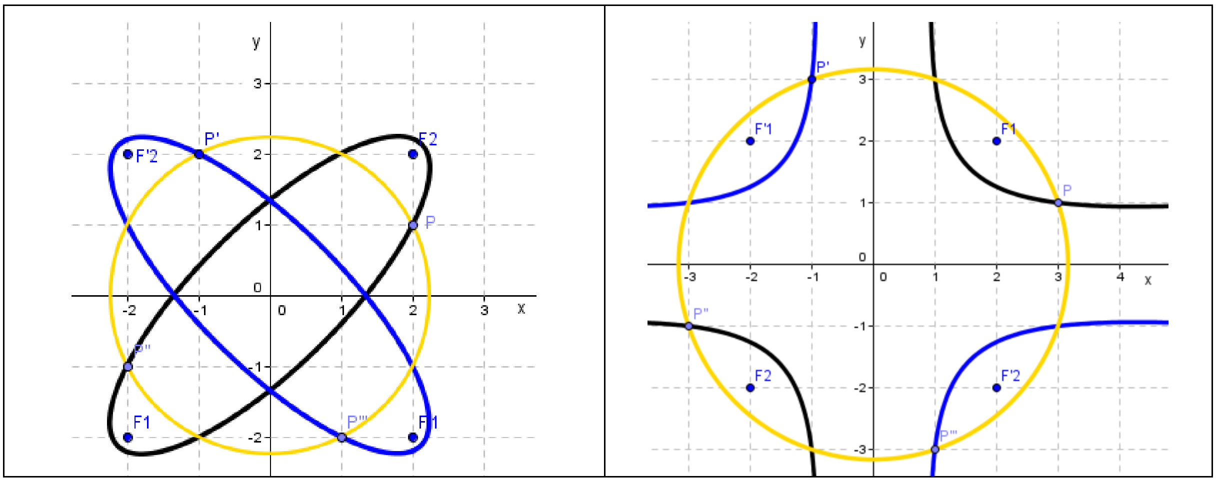


FONTE: Produção do autor

No gráfico da figura 35 a parábola de cor preta representa a figura original de equação $y = x^2$ que sofreu rotações no sentido anti-horário de acordo com os ângulos descritos anteriormente. Para uma rotação de 90°, cada ponto P (x, y) da curva possui uma imagem P' (-y, x), no nosso exemplo, o ponto P (2, 4) tem como imagem o ponto P' (-4, 2) e sua equação passa a ser $x = -y^2$ como na curva de cor azul. Para uma rotação de 180° cada ponto P (x, y) terá como imagem o ponto P''(-x, -y), ou seja, da figura a imagem de P é representada por P' (-2, -4) e a equação passa a ser $y = -x^2$ como na curva de cor amarela. Para uma rotação de 270°, cada ponto (x, y) possui como imagem o ponto P''' (y, -x), neste caso o ponto P tem como imagem o ponto P''' (4, - 2) e a equação passa a ser $x = y^2$ apresentada na figura de cor vermelha. Os vetores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OP''}$ e $\overrightarrow{OP'''}$ possuem o mesmo módulo, cuja medida é igual ao raio da circunferência que contém os pontos P, P', P'' e P''', como na figura, e pode ser calculado pela equação $|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2 + y^2$.

Para a elipse e hipérbole as considerações levantadas acerca da parábola são as mesmas exceto pelas expressões de suas curvas.

Figura 36. Rotação da Elipse e da Hipérbole



FONTE: produção do autor

Na figura 36 apresentamos uma configuração para a elipse e para a hipérbole e estudamos suas rotações pelos ângulos de 90°, 180° e 270°. As figuras originais estão representadas pelas curvas de cor preta e sofreu rotações cuja representação aparece na cor azul. Observamos que a equação da figura original deve ser idêntica à da figura após a rotação de 180°, uma vez que, no gráfico estas curvas ficam sobrepostas. Nestes exemplos foram feitas as rotações por três ângulos diferentes, entretanto, poderiam ser vários outros, por isso apresentamos a circunferência como o lugar geométrico onde as imagens do ponto P devem estar após sofrer qualquer rotação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa iniciou-se com uma análise bibliográfica com o intuito de selecionarmos trabalhos acadêmicos, na área de Educação Matemática, desenvolvidos em relação ao tema: Cônicas. De acordo com esta análise, percebemos que a maior parte das pesquisas não desenvolve seu estudo com base nos registros de representação semiótica, explicitamente. De acordo com Neto (2008), no nono e primeiro ano a parábola é vista com o conceito de função e no terceiro ano, as cônicas são tratadas apenas com enfoque nas manipulações de suas equações analíticas. Ao analisar livros didáticos, Lopes (2011) percebe que a maior parte deles trata as cônicas com enfoque na manipulação de suas equações algébricas, deixando de explorar o enfoque geométrico.

Neste contexto, compreendemos ser enriquecedor estudar as cônicas via registros de representação para que o aluno se aproprie desse conhecimento matemático sem privilegiar um ou outro registro de representação, neste sentido Almoulould (2007) afirma que uma mudança de registro pode facilitar o tratamento e favorecer a compreensão do objeto matemático em estudo.

A partir deste ponto, desenvolvemos nosso trabalho, iniciando pela geometria e por registros de representação que lhes são inerentes, em seguida transportamos os objetos da geometria para um referencial cartesiano para estudar as cônicas na geometria analítica com seus registros associados, pensando em responder a questão de pesquisa. Portanto, retomamos aqui nossa questão central: **quais registros de representação semiótica podem ser mobilizados para estudar as cônicas?**

Ao longo do trabalho, percebemos que este tema pode ser estudado a partir da mobilização do registro material, constituído por suas retas tangentes, cujo tratamento consiste no processo de dobrar o papel para construir os vincos e formar as retas tangentes, Em seguida, pelo registro figural, constituído quando um objeto é representado por uma figura e seu tratamento se dá por reconfiguração. Estudamos ainda, o registro gráfico constituído quando transportamos os objetos da geometria para um referencial cartesiano onde cada ponto deste objeto pode ser estudado por suas coordenadas (x, y) e seu tratamento se constitui por movimentações no plano como nas transformações geométricas. Por fim, estudamos o registro algébrico constituído por equações cujo tratamento ocorre pela manipulação das mesmas. Pela revisão bibliográfica, podemos afirmar que este último registro é o que a escola tende a privilegiar.

Para finalizar, consideramos importante que este tema volte a ser estudado em pesquisas futuras, como em um mestrado acadêmico, a fim de organizar um estudo e observar como os alunos se comportam frente a este objeto matemático. Com isso, acreditamos que os resultados aqui apresentados contribuem para que identifiquemos e entendamos as cônicas via registros de representação semiótica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Talita Carvalho Silva de. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D:** um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP. São Paulo, 2010.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba. Ed UFPR, 2007.

CARDOSO, Franciele Catelan. **O ensino da geometria e os registros de representação sob um enfoque epstemológico.** Disponível em: ucs.br/etc/conferencias/índex.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/831/270. Acesso em 26/07/2014.

COSTA, Marcelo de Moura. **Uma abordagem introdutória de Cônicas para o ensino médio através do Geogebra**. Dissertação (Mestrado) – UFJF – MG. Juiz de Fora, 2013.

GARCIA, João Calixto. **Explorando as definições das cônicas**. Dissertação (Mestrado) – UNESP – SP. Rio Claro, 2013.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Cônicas e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) – UNESP – SP. Rio Claro, 2011.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Utilização de Ferramentas do desenho Geométrico para o ensino de Cônicas.** Disponível em: funes.uniandes.edu.co/4201/1FerreirautilizaçãoALME2013.pdf. Acesso em 20/07/2014

LAGE, Maria Auxiliadora. **Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo das transformações geométricas no plano**. Dissertação (Mestrado) – PUC-MG. Belo Horizonte, 2008.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** Volume 1 ; São Paulo: Harbra, 1994. MAIA, L. P. M. Mecânica Vetorial. Rio, UFRJ, 1984.

LIMA, Rosana Nogueira de. **Resolução de equações de terceiro grau através das cônicas**. Dissertação (Mestrado) – PUC – SP. São Paulo, 1999.

MACENA, Marta Maria Mauricio. **Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das seções cônicas com significado**. Dissertação (Mestrado) – UFRN – RN. Natal, 2007.

MORAES, José Galhardo Leite de. **Um estudo das cônicas na perspectiva da geometria projetiva**. Dissertação (Mestrado) – UNESP - SP. Campinas, 2012.

NETO, Francisco Quaranta. **Tradução comentada da obra "Novos elementos das seções Cônicas" (PHILIPPE de LA HIRE – 1679) e sua relevância para o ensino médio de matemática**. Dissertação (Mestrado) – UFRJ – RJ. Rio de Janeiro, 2008.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. Números Complexos: **Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP. São Paulo, 2010.

SATO, J. **As Cônicas e suas Aplicações**. Disponível em <http ://www.sato.prof. ufu.br/ Cônicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf>. Acesso em 19/06/2013.

SILVA, José Roberto Damasceno da. **Um estudo dos registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções**. Dissertação (Mestrado) – UFMS- MS. Campo Grande, 2005.

SILVA, Marcelo Balduino. **Secções Cônicas: atividades com geometria dinâmica com base no Currículo do Estado de São Paulo**. Dissertação (Mestrado) – PUC – SP. São Paulo, 2011.

APÊNDICE A. Cônicas construídas pela ferramenta rastro do geogebra

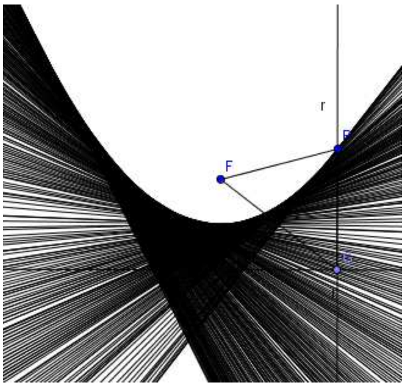
As construções feitas no Geogebra são idênticas as da dobradura de papel. Para construir a parábola é preciso:

1. Construir uma reta diretriz (r), um ponto fixo (foco), um ponto G pertencente à reta diretriz e um reta perpendicular (s) a ela passando por esse ponto.

2. Construir um segmento entre os pontos F e G e uma reta mediatriz desse segmento. Na interseção entre as retas r e s deve se criar um ponto P.

3. Deve-se habilitar o rastro na mediatriz e animar o ponto G ou simplesmente deslizá-lo na reta diretriz, como na figura 37.

Figura 37. Parábola pela ferramenta "rastro" do Geogebra



FONTE: Produção do autor

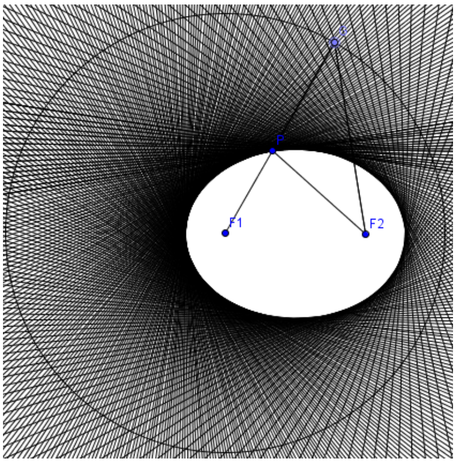
Para construir uma elipse devemos:

1. Construir dois pontos (F1 e F2), uma circunferência em um dos focos com raio definido e maior que a distância entre estes pontos e um ponto G pertencente a esta circunferência.

2. Um segmento entre o foco F2 e o ponto G e sua mediatriz, um segmento entre os pontos F1 e G e nomear de P o ponto de interseção entre a mediatriz e o segmento F1G.

3. Habilitar o rastro na mediatriz e animar ou deslizar o ponto G sobre a circunferência para a elipse da figura 38 aparecer.

Figura 38. Elipse pela ferramenta “rastro” do geogebra



FONTE: Produção do autor

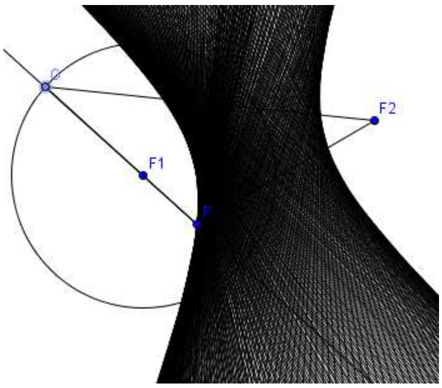
Para construir a hipérbole são necessários:

1. Construir dois pontos, (F1 e F2), uma circunferência em um dos focos com raio definido e menor que a distância entre estes pontos e um ponto G pertencente à circunferência.

2. Um segmento entre o foco F2 e o ponto G e sua mediatriz, uma reta que contém os pontos F1 e G e nomear de P o ponto de interseção entre esta reta e a mediatriz.

3. Habilitar o rastro na mediatriz e animar ou deslizar o ponto G sobre a circunferência para a figura 39 surgir.

Figura 39. Hipérbole pela ferramenta “rastro" do Geogebra

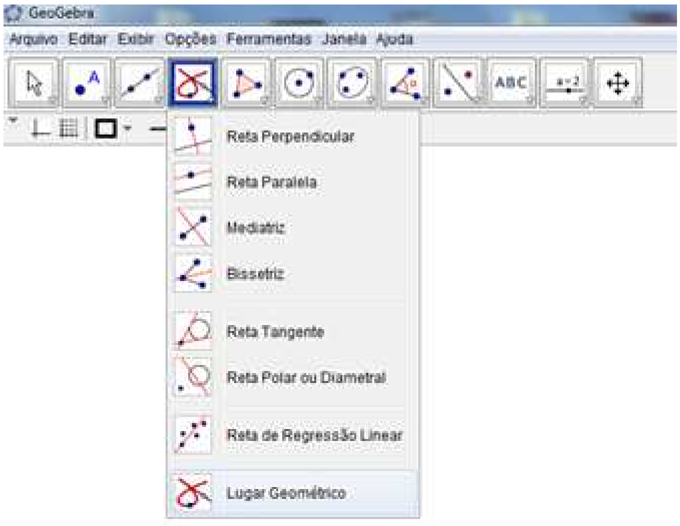


FONTE: Produção do autor

APÊNDICE B. Cônicas pela ferramenta “lugar geométrico”

A ferramenta do Geogebra “lugar geométrico” recebe como entrada dois pontos onde um percorrerá uma curva e o outro é definido a partir do primeiro. A figura 40 destaca esta ferramenta.

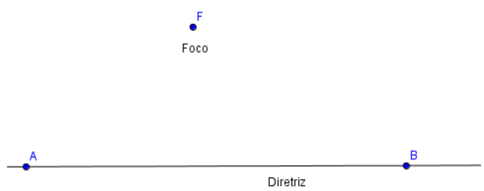
Figura 40. Ferramenta “lugar geométrico”



FONTE: Produção do autor

A parábola é definida como sendo um conjunto de pontos pertencentes a um plano que estão equidistantes do foco e da reta diretriz. Portanto construiremos uma reta a partir de dois pontos e um foco que denominaremos como F como na figura 41.

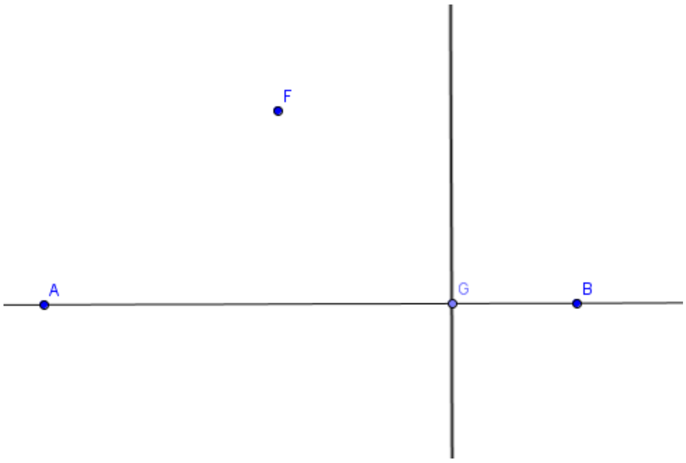
Figura 41. Foco e Diretriz



FONTE: Produção do autor

Em seguida construiremos um ponto sobre a reta e uma perpendicular a ela passando por este ponto que será denominado de ponto G de, acordo com a figura 42. Ele será responsável por deslizar sobre a reta, contribuindo para que outro ponto faça o rastro da figura da parábola posteriormente.

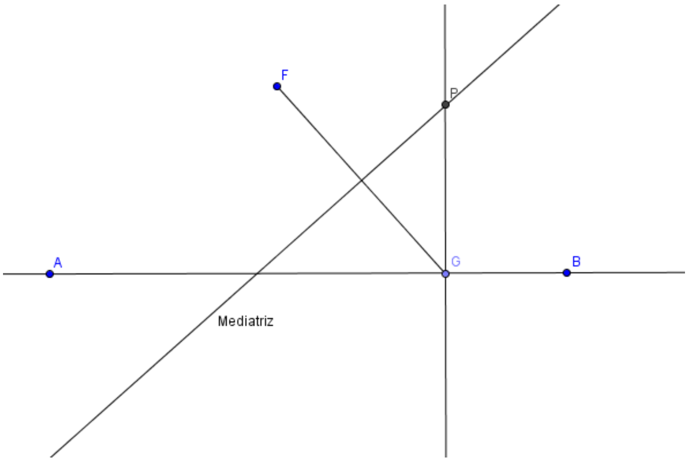
Figura 42. Ponto de deslizamento "G"



FONTE: Produção do autor

Construiremos um segmento que liga o foco ao ponto G, a mediatriz deste segmento e criaremos um ponto denominado P na interseção da mediatriz com a reta perpendicular à reta diretriz, passando por G conforme a figura 43.

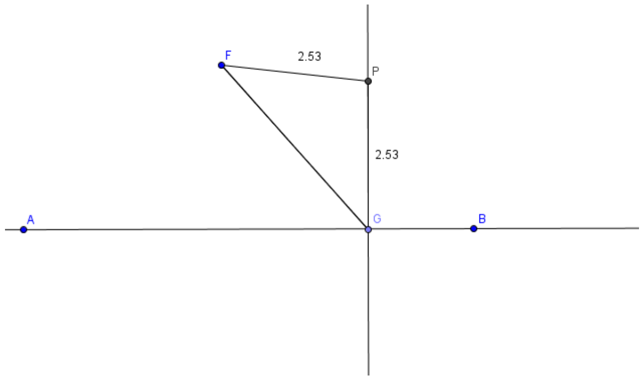
Figura 43. Parábola, construindo a mediatriz



FONTE: Produção do autor

Construiremos um segmento que liga o ponto G ao ponto P e outro que liga o foco ao ponto P como na figura 44.

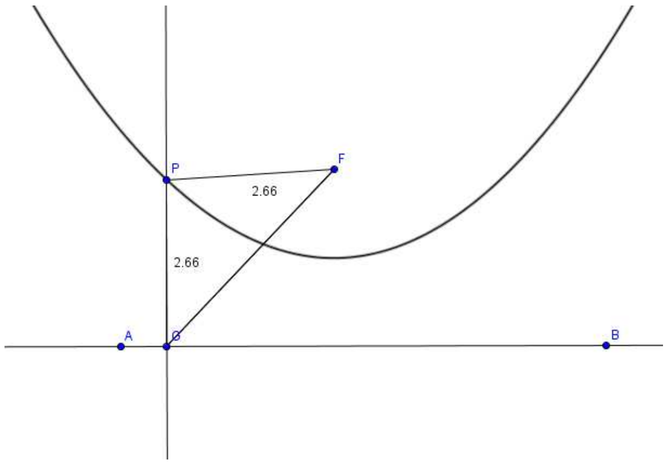
Figura 44. Segmentos construídos



FONTE: Produção do autor

Por fim esconderemos o rastro feito pelo ponto P e escolheremos a ferramenta “lugar geométrico”, selecionando os pontos G e P e observaremos a figura 45 da parábola.

Figura 45. Parábola construída pela ferramenta "lugar geométrico"

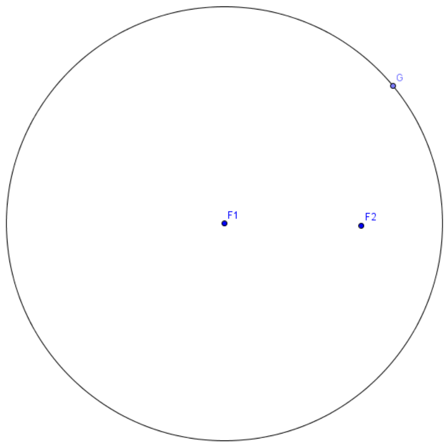


FONTE: Produção do autor

A elipse é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos pertencentes ao plano de tal forma que a soma de suas distâncias aos focos F1 e F2, seja constante e maior que a distância entre os focos. É comum nos livros denominar a distância entre os focos de 2c e a soma das distâncias de um ponto pertencente à elipse aos focos de 2a, ou seja, 2a > 2c.

Construiremos a elipse a partir de seus focos e de um círculo diretor centrado em um dos focos, neste caso usaremos o F1 como centro. É necessário que o círculo tenha um raio fixo da mesma medida do segmento maior da elipse. Aqui usaremos raio igual a 7 unidades de comprimento e criaremos um ponto G pertencente ao círculo, de acordo com a figura 46.

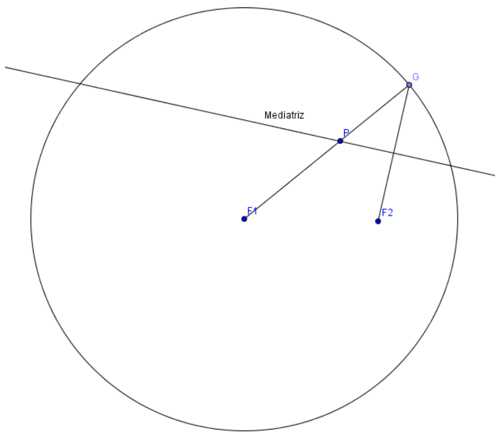
Figura 46. Determinando os focos da elipse



FONTE: Produção do autor

Criamos dois segmentos ligando os focos F1 e F2 ao ponto G, traçamos a mediatriz do segmento definido pelos pontos F2 e G e denominamos a interseção entre a mediatriz e o segmento definido por F1 e G de ponto P mostrado na figura 47.

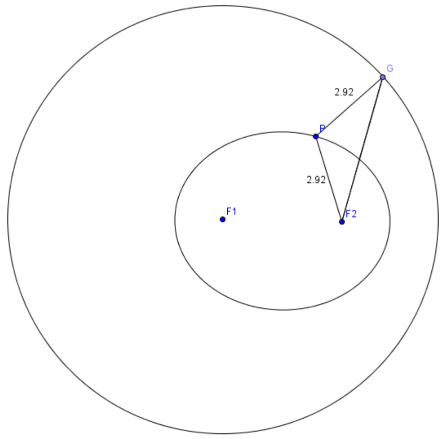
Figura 47. Elipse, construindo a mediatriz



FONTE: Produção do autor

Construímos dois segmentos definidos pelos pontos P e F2 e por P e G, Ocultamos a mediatriz e o segmento definido pelos pontos F1 e G e, usamos a ferramenta do geogebra “lugar geométrico”, escolhendo os pontos P e G e para a elipse da figura 48 surgir na janela de visualização.

Figura 48. Elipse construída pela ferramenta "lugar geométrico"



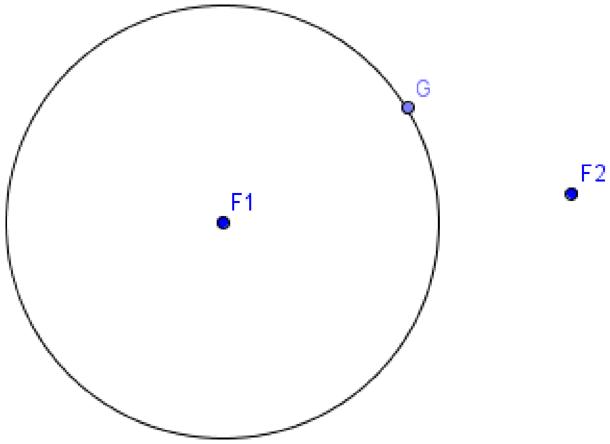
FONTE: Produção do autor

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos pertencentes a um plano de tal maneira que a diferença, em módulo, de suas distâncias aos pontos fixos, focos F1 e F2, seja constante. Alguns livros definem por 2c a medida do segmento que liga os focos e por 2a a diferença anteriormente mencionada.

Qualquer ponto pertencente à hipérbole é equidistante a um dos focos e ao círculo diretor com centro no outro foco. O raio do círculo tem a mesma medida da distância entre os vértices da hipérbole.

Definimos os focos da hipérbole, F1 e F2, e um círculo diretor com centro em f1, escolhemos 3 a medida do seu raio e construímos um ponto G sobre este círculo como mostra a figura 49.

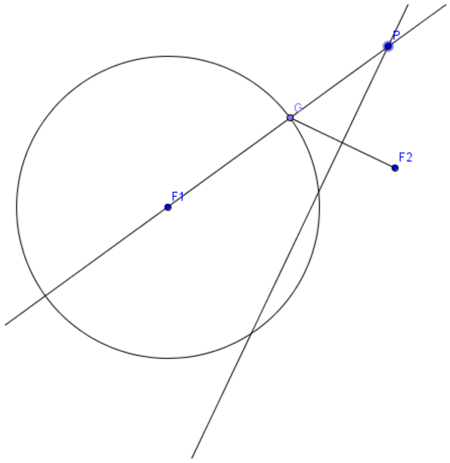
Figura 49. Hipérbole: Círculo diretor



FONTE: Produção do autor

Construímos uma reta definida pelos pontos F1 e G, um segmento de reta definido pelos pontos F2 e G, uma mediatriz deste segmento e criamos um ponto P na interseção da mediatriz com a reta anterior de acordo com a figura 50.

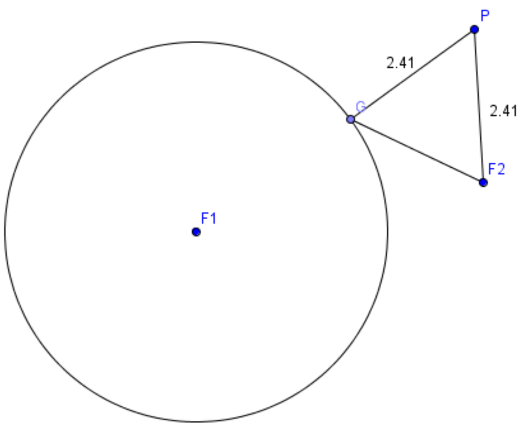
Figura 50. Hipérbole, construindo a mediatriz



FONTE: Produção do autor

Construímos um segmento definido pelos pontos F2 e P e outro definido pelos pontos P e G. estes segmentos possuem a mesma medida de comprimento. Escondemos os objetos, reta e reta mediatriz como na figura 51.

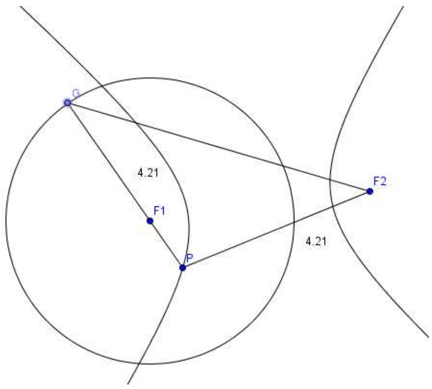
Figura 51. Segmentos formados pelos pontos P, G e F2



FONTE: Produção do autor

Por fim usamos a ferramenta do Geogebra “lugar geométrico”, escolhendo os pontos P e G e a hipérbole da figura 52 surgir na janela de visualização.

Figura 52. Hipérbole construída pela ferramenta "lugar geométrico"



FONTE: Produção do autor

APÊNDICE C. Cônicas construídas por pontos

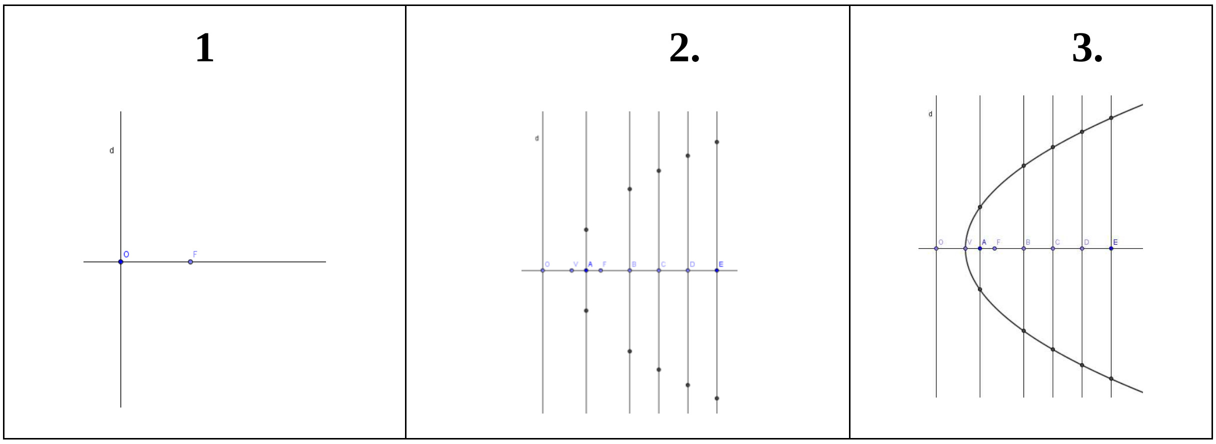
Para construir a parábola por pontos é necessário conhecer o parâmetro da curva OF e seguir os procedimentos

1. Sobre uma reta traçar uma reta perpendicular e na intersecção entre as duas, denominar o ponto O. A partir deste ponto e com o valor do parâmetro, marcar o foco (F). Determinar o vértice (V), ponto médio do segmento OF

2. A partir do vértice devem-se traçar retas paralelas à diretriz pelos pontos arbitrários 1, 2, 3 ou mais pontos e traçar arcos com centro no foco (F) e: Raio O1, cortar a paralela que passa pelo ponto 1, Raio O2, cortar a paralela que passa pelo ponto 2, Raio O3, cortar a paralela que passa pelo ponto 3 e assim por diante. Os pontos de intersecção dos arcos com as paralelas pertencem à curva.

3. Após obter um número suficiente é possível traçar a curva que aparece na figura 53.

Figura 53. Parábola construída por pontos



FONTE: Produção do autor

Para construir a elipse por pontos é necessário conhecer algumas informações sobre o eixo maior ou menor associado à distância focal, e o eixo menor. Esta construção será feita partido do eixo maior e da distância focal.

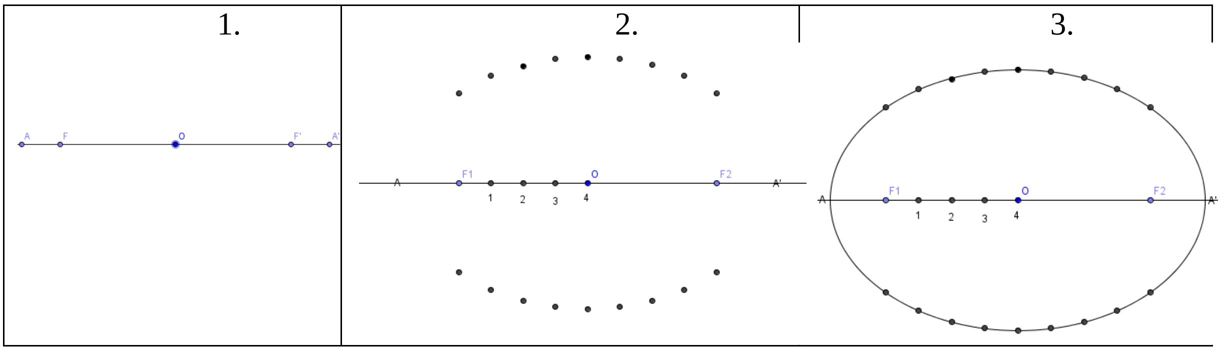
Sobre uma reta marcar um ponto O, centro da curva e seguir os procedimentos:

1. Marcar sobre esta reta e a partir do ponto O a metade da distância focal e a metade do eixo maior para cada lado de O.

2. Marcar os pontos 1, 2, 3 ou mais entre F e O Com centro em F e F´ e raio A1 traçar arcos Com os mesmos centros e raio A´1 traçar arcos que cortarão os primeiros em quatro pontos. Estes quatro pontos são da curva. Repetir a operação com os mesmos centros e raios A2 e A´2 encontrando mais 4 pontos da curva.

3. Após obter um número suficiente é possível traçar a curva como na figura 54.

Figura 54. Elipse construída por pontos



FONTE: Produção do autor

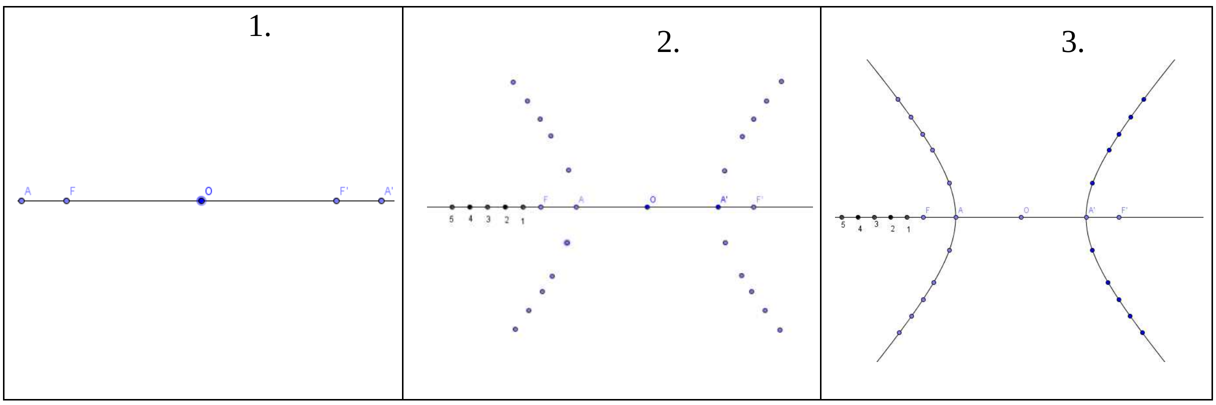
Para construir uma hipérbole por pontos é necessário conhecer o eixo real (AA´) e a distância focal (FF´). A partir disso, realizar alguns procedimentos:

1: Sobre uma reta marcar o centro da curva (ponto O), marcar sobre esta reta e a partir do ponto O a metade da distância focal (FF´) e a metade do eixo real (AA´), determinando A, A´, F e F´.

2: Marcar os pontos 1, 2, 3 ou mais à esquerda de F ou à direita de F´ e, com centro em F e F´, e raio A1, traçar arcos. Repetir o procedimento com o raio A’1. Os arcos devido a A1 e a A’1 se interceptarão em pontos que pertencem a curva. Esta operação deve ser repetida para A2 e A’ 2 para encontrar mais pontos.

3. Após obter um número suficiente é possível traçar a curva como na figura 55.

Figura 55. Hipérbole construída por pontos

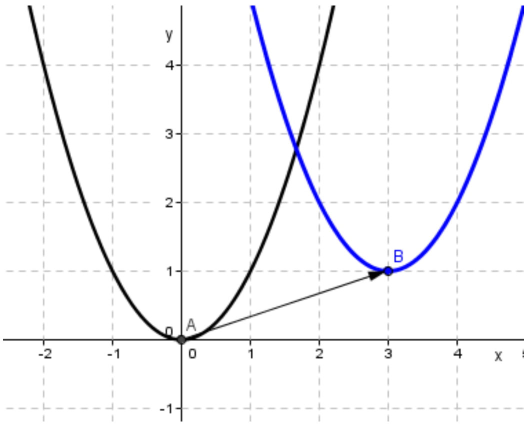


FONTE: Produção do autor

APÊNDICE D. Translação de cônicas

Na translação é necessário criar um vetor na origem do sistema de coordenadas cartesianas e uma figura geométrica, em seguida usar a ferramenta do Geogebra “translação por um vetor” e selecionar a figura e o vetor como exemplo, a parábola que representa $y = x^2$ sofreu translação vertical de uma unidade e horizontal de 3 unidades de acordo com a figura 56.

Figura 56. Translação da parábola

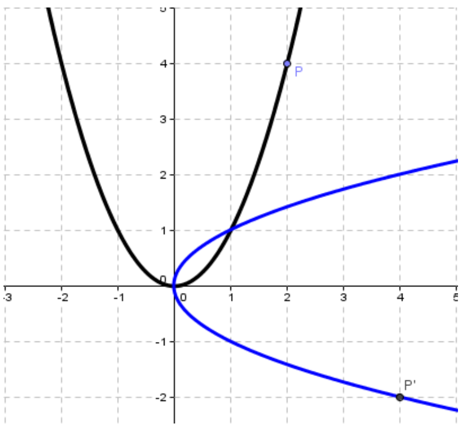


Fonte: Produção do autor

APÊNDICE E. Rotação de cônicas

A receita das construções a seguir é válida para qualquer equação, entretanto como este trabalho faz referência às cônicas vamos apresentar as rotações para a parábola, a elipse e a hipérbole. Devemos criar uma equação de uma parábola qualquer no campo de entrada do Geogebra. Por exemplo, $y = x^2$, e depois, construir um ponto P em qualquer parte da curva. Em seguida devemos criar um controle deslizante para o ângulo de rotação com variação de 0° até 360° e uma matriz de rotação, digitando no campo de entrada, R = {{cos(α), - sin(α)}, {sin(α), cos(α)}}. Por fim, relacionamos o ponto P com sua imagem P' e a matriz de rotação, inserindo como entrada, P'= R*P. Neste trabalho as rotações foram feitas pelos ângulos de 90°, 180° e 270° graus e na figura 57 o ângulo é de 270°. Para a elipse e hipérbole o procedimento é o mesmo.

Figura 57. Rotação da parábola



FONTE: Produção do autor

ANEXO A. Cônicas construídas em dobradura de papel

O registro material consiste em utilizar alguns aparatos mecânicos para construir e explorar a construção de modo a discutir as propriedades envolvidas. O método da dobradura esta relacionado justamente a construir, usando alguns instrumentos e conhecimentos básicos em matemática, sucessivas dobras no papel que, a partir de um número suficientes delas surgirá a figura de uma cônica.

Para construir a parábola são necessários: régua e formato de T, lápis e papel – manteiga e seguir alguns procedimentos.

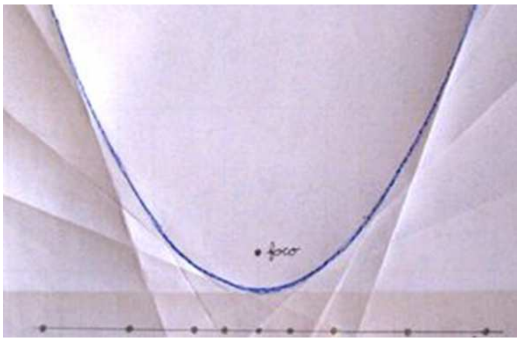
1. Usar a régua para desenhar uma reta para fazer o papel da reta diretriz da parábola na folha de papel;

2. Marque um ponto F (foco da parábola) fora da reta diretriz;

3. Crie um ponto D sobre a reta diretriz e dobre a folha de papel de modo a coincidir os pontos D e F;

4. Repetir a operação anterior escolhendo vários pontos diferentes sobre a reta diretriz e observe que as dobraduras tangenciam uma curva denominada de parábola como na figura 58.

Figura 58. Parábola em dobradura



FONTE: portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em 22/08/2014

Para construir a elipse são necessários: régua, lápis, compasso e folha de papel – manteiga e seguir alguns procedimentos.

1. Marcar um ponto F1 (foco 1) mais ou menos centralizado na folha;

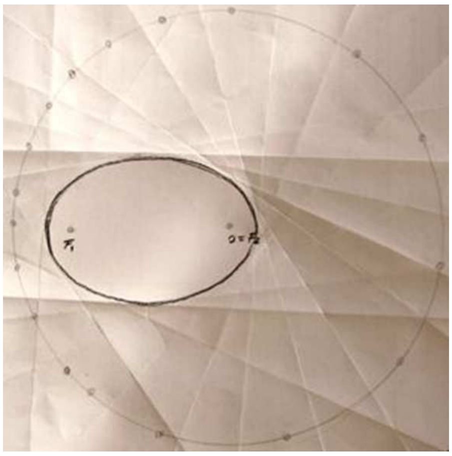
2. Usar o compasso pára desenhar dois círculos concêntricos em F1;

3. Construir uma semi-reta com origem em F1 e tomar como F2 (foco 2) o ponto de interseção entre a semi – reta e o circulo de raio menor;

4. Escolher um ponto D qualquer sobre o circulo de raio maior e dobrar o papel de maneira a coincidir o ponto D com o ponto F2;

5. Repetir a operação anterior escolhendo vários pontos diferentes no circulo de raio maior e observe que as dobras tangenciam uma curva denominada de elipse, como mostra a figura 59.

Figura 59. Elipse em dobradura



FONTE: portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em 22/08/2014

A construção da hipérbole pela dobradura é semelhante à da elipse, sendo, portanto, necessário utilizar os mesmos matérias e os procedimentos a seguir.

1. Marcar um ponto F1 (foco 1) mais ou menos centralizado na folha;

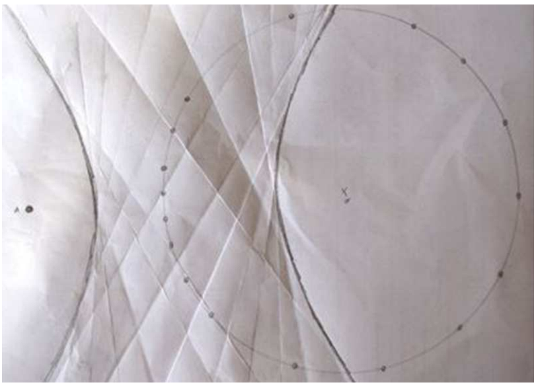
2. Usar o compasso pára desenhar dois círculos concêntricos em F1;

3. Construir uma semi-reta com origem em F1 e tomar como F2 (foco 2) o ponto de interseção entre a semi – reta e o circulo de raio menor;

4. Escolher um ponto D qualquer sobre o círculo de raio menor e dobrar o papel de maneira a coincidir o ponto D com o ponto F2;

5. Repetir a operação anterior escolhendo vários pontos diferentes no círculo de raio menor e observe que as dobras tangenciam uma curva denominada de hipérbole, figura 60.

Figura 60. Elipse em dobradura



FONTE: portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em 22/08/2014

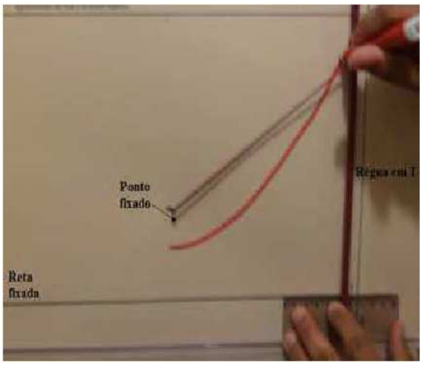
ANEXO B. Cônicas construídas com materiais manipulativos

Para construirmos uma parábola partiremos de sua definição e seguiremos alguns procedimentos:

1) Cole a cartolina na madeira e com a régua, construa uma reta para representar a diretriz e um ponto fora dela denominado de foco;

2) Ponha um prego no foco da parábola e prenda o barbante. Com a ponta do pincel, mantenha o fio esticado e fixado na extremidade da régua em T conforme a figura 61;

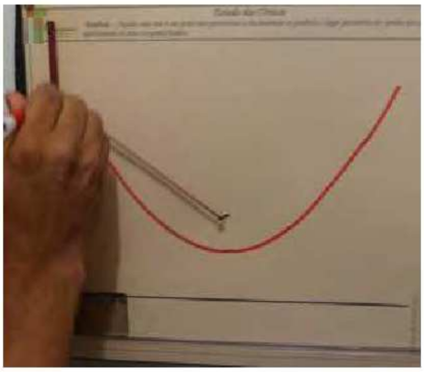
Figura 61. Construindo a parte direita da parábola



FONTE: CLAME, 2013, p. 1057

3) Movimente a régua T para a esquerda e para a direita para surgir a figura 62 da parábola.

Figura 62. Construindo a parte esquerda da parábola



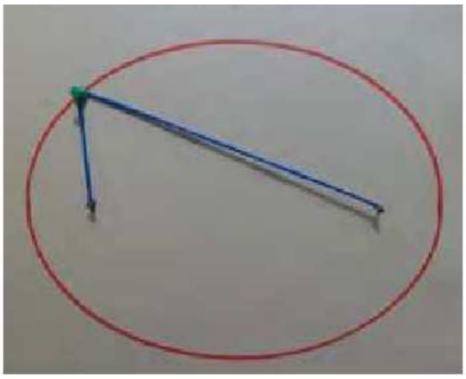
FONTE: CLAME, 2013, p. 1057

O procedimento, para construir uma elipse, esta apresentado na seguinte sequência:

1) Cole a cartolina na madeira e ponha dois pregos em pontos distintos para representar os focos da elipse. Para um melhor aproveitamento do espaço do papel é recomendável que esses pregos estejam simétricos em relação ao centro da folha. A medida da distancia entre os dois pregos deve ser menor que o tamanho do barbante.

2) Amarre as extremidades do barbante nos pregos e use um pincel para descrever a curva. É importante deixar o fio bem esticado como mostra a figura 63.

Figura 63. Esboço da elipse



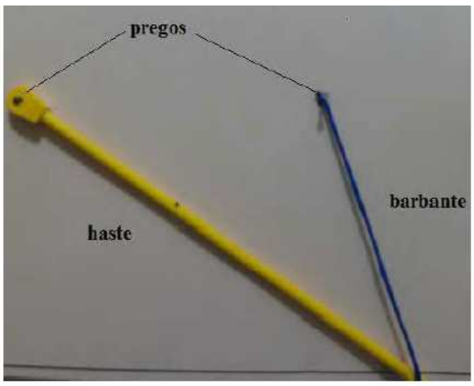
FONTE: CLAME, 2013, p. 1053

Usando a definição de hipérbole é possível construir uma figura com os seguintes procedimentos:

1) Cole a cartolina na madeira e em seguida ponha dois pregos mais ou menos simétricos ao centro do papel. A medida da distância entre os pregos deve ser maior que a diferença entre a haste e o barbante.

2) Ponha uma extremidade da haste presa a um dos pregos e a outra presa ao barbante. Amarre a extremidade livre do barbante no outro prego conforme a figura 64.

Figura 64. Materiais para construir uma hipérbole

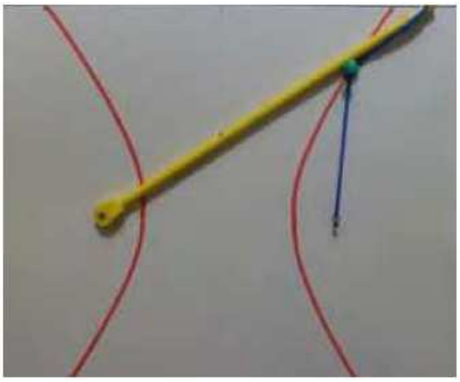


FONTE: CLAME, 2013, p. 1054

3) Puxe o fio com o pincel de forma a girar a haste em torno do ponto onde foi fixada. Com este procedimento será construído a parte direita da hipérbole.

4) Mude a posição do fio e da haste para o outro prego e construa a parte esquerda da hipérbole executando o mesmo procedimento. A seguir podemos visualizar a figura 65.

Figura 65. Esboço da hipérbole



FONTE: CLAME, 2013, p. 1055