

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

LUIS CARLOS BARBOSA OLIVEIRA

**ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DA
DERIVADA DE UMA FUNÇÃO**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2022**

LUIS CARLOS BARBOSA OLIVEIRA

**ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DA
DERIVADA DE UMA FUNÇÃO**

Tese apresentada à banca examinadora da Pontifícia universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Doutor em Educação Matemática**, sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

**São Paulo
2022**

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura_____

Data_____

e-mail: oliveira.lcb50@gmail.com

FICHA CATALOGRÁFICA

Luis Carlos Barbosa Oliveira

ESTUDO DAS TRÊS DIMENÇÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo, como exigência parcial para obtenção
do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

Dr. Francisco Ugarte Guerra – PUC-P

Dr. Saddo Ag Almouloud – UFPA

Dr. Gabriel Loureiro de Lima – PUC-SP

Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho – PUC-SP

DEDICATÓRIA

A minha família, de maneira especial à minha mãe Florinda (em memória), a minha esposa Monica e minha filha Beatriz, pela motivação e a meus irmãos Marcelo e Rosangela pelo incentivo.

AGRADECIMENTOS À CAPES

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – **CAPES** pela bolsa cedida – Código de Financiamento 001 e processo número 88887.370550/2019-00 que foi de extrema importância para a realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva por sua orientação, paciência, e apoio em todo este trabalho e ao professor Doutor Saddo Ag Almouloud, que iniciou comigo esta pesquisa, o meu muito obrigado por insistir que eu continuasse a realizar e concluir esta pesquisa.

Aos professores doutores Francisco Ugarte Guerra, Fumikazu Saito, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Gabriel Loureiro de Lima, pela participação na banca e sugestões essenciais para o bom andamento desta pesquisa.

Aos professores do programa e colegas pela amizade, companheirismo e pelos ensinamentos e orientações nas disciplinas do programa de doutorado da PUC-SP.

À minha Família pela paciência e apoio durante esta trajetória.

Aos meus queridos amigos e familiares de Calca, Cusco, Arequipa, Lima e São Paulo por sempre se preocuparem comigo.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação, endereço meus sinceros agradecimentos.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

A todos, meu muito obrigado

OLIVEIRA, Luis Carlos Barbosa de. **Estudo das três dimensões do problema didático da derivada de uma função**. 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021. .120....p.

RESUMO

O problema de pesquisa desta tese versa sobre a noção de derivada, do Cálculo Diferencial e Integral por considerá-la um objeto matemático que tem contribuído para o desenvolvimento científico e tecnológico, mas que tem apresentado dificuldades em seu aprendizado. Desta maneira, decidimos nos encarregar desta pesquisa, a fim de entender de que maneira os aspectos ligados às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo à derivada podem contribuir com o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência como base para a proposição de Percursos de Estudo e Pesquisa para o ensino/aprendizagem da derivada no nível Superior de ensino. Para atingir tal objetivo, iremos nos guiar pela questão “Quais as contribuições que os estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico podem dar para o desenvolvimento de um modelo didático de referência amparado por Atividades de Estudo e Pesquisa voltadas ao ensino de derivada na Educação Superior? , que nos ajudou a desenhar nosso objetivo geral, que consiste em realizar estudos que nos permitam compreender aspectos ligados às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático associado a derivada, capazes de contribuir com o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência-MDR, como base para a proposição de Atividades de Ensino e Pesquisa voltadas ao ensino de derivada no Ensino Superior. Para nos orientar nas análises dos estudos obtidos, vamos utilizar como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático

Palavras-chave: Cálculo Diferencial. Derivada. Modelo Epistemológico de Referência. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

The research problem of this thesis deals with the notion of derivative, of the Differential and Integral Calculus, considering it a mathematical object that has contributed to scientific and technological development, but which has presented difficulties in its learning. Thus, we decided to undertake this research in order to understand how the aspects linked to the epistemological, economic-institutional and ecological dimensions of the didactic problem related to the derivative can contribute to the development of a Reference's Didactic Model as a basis for the proposition of Study and Research Rout for the teaching/learning of the derivative at the Higher level of education. To achieve this goal, we will be guided by the question "What contributions can epistemological, economic-institutional and ecological studies make to the development of a Reference's Didactic Model supported by Study and Research Activities aimed at teaching secondary education in Higher Education ? , which helped us to design our general objective, which consists of conducting studies that allow us to understand aspects related to the epistemological, economic-institutional and ecological dimensions of the didactic problem associated with the derivative, capable of contributing to the development of a Didactic Reference Model- MDR, as a basis for proposing Teaching and Research Activities aimed at teaching derivatives in Higher Education. To guide us in the analysis of the studies obtained, we will use the Anthropological Theory of Didactics as a theoretical framework.

Keywords: Differential Calculus. Derivative. Reference's Didactic Model. Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - ESCALA DOS NÍVEIS DE CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA	50
FIGURA 2 - ESCALA DOS NÍVEIS DE CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA AMPLIADA	50
FIGURA 3 – O QUE ACONTECE COM $B \rightarrow A$?	55
FIGURA 4 - RELAÇÃO ENTRE ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS, ECONÔMICO-INSTITUCIONAIS E ECOLÓGICOS.....	61
FIGURA 5 - REPRESENTAÇÃO DE VELOCIDADE DE ORESME.....	70
FIGURA 6 – DIAGRAMA PARA REPRESENTAR MOVIMENTO DE GALILEU.....	72
FIGURA 7 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA RETA POR FERMAT	74
FIGURA 8 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MÉTODO DE FERMAT PARA RETA TANGENTE A UMA CURVA	78
FIGURA 9 - REPRESENTAÇÃO DO TRAÇADO DA TANGENTE À CURVA	81
FIGURA 10 - TRIÂNGULO CARACTERÍSTICO DE LEIBNIZ.....	86
FIGURA 11 - EXERCÍCIO PARA REPRESENTAR O TESTE DE VERIFICAÇÃO: GEOMETRIA ANALÍTICA	94
FIGURA 12 - EXERCÍCIO PARA REPRESENTAR QUOCIENTE $\Delta f \Delta x$	95
FIGURA 13 - EXEMPLO UTILIZADO PARA REPRESENTAR OS LIMITES	95
FIGURA 14 - ABORDAGEM GEOMÉTRICA DA DERIVADA	97
FIGURA 15 - FORMALIZAÇÃO DO COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE A UMA FUNÇÃO.....	98
FIGURA 16 - SIMPLIFICAÇÃO DE QUOCIENTE.....	102
FIGURA 17 - LIMITE DO QUOCIENTE $\Delta y \Delta x$	103
FIGURA 18 - GRÁFICO QUE APRESENTA $f(x) - f(p)$ E $x - p$, VISTO NO CÁLCULO DO QUOCIENTE DA RETA SECANTE	105

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – DISTRIBUIÇÃO DAS DISSERTAÇÕES E TESES OBTIDAS NA BUSCA	17
QUADRO 2 - QUANTIDADE DOS CONTEÚDOS ABORDADOS NAS PESQUISAS	20
QUADRO 3 - QUANTIDADE DOS TRABALHOS EM CATEGORIAS E SUBCATEGORIAS.....	21
QUADRO 4 - TRABALHOS ANALISADOS QUE TRATAM DE DERIVADA	24
QUADRO 5 - QUANTIDADE DE TRABALHOS EM CADA CATEGORIAS E SUBCATEGORIA	27
QUADRO 6 – CONTEÚDOS A RESPEITO DE DERIVADA EM PLANOS DE ENSINO	91
QUADRO 7 - LIVROS DE CDI SUGERIDOS PARA OS CURSOS DE ENGENHARIA E TECNOLOGIA	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEP – Atividade de Estudo e Pesquisa

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

MDD –Modelo didático dominante

MDR –Modelo didático de referência

MED –Modelo epistemológico dominante

MER – Modelo epistemológico de referência

PEP - Percurso de Estudo e Pesquisa

TAD – Teoria Antropológica do Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 PROBLEMATICA	17
2.1 REVISÃO DE LITERATURA.....	17
2.2 REFERENCIAL TEÓRICO	38
2.2.1 Teoria Antropológica do Didático (TAD).....	38
2.2.2 Visita às obras.....	44
2.2.3 Dimensões de um Problema Didático	47
2.2.4 Atividades de Ensino e Pesquisa	51
2.2.5 Os objetos ostensivos e não ostensivos.....	51
2.3. JUSTIFICATIVA	53
2.4. DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	58
2.5. METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	61
3 ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES	66
3.1 A DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA PARA O ENSINO DA DERIVADA	66
3.1.1 Um Estudo Histórico da Gênese e Desenvolvimento da Derivada.....	66
3.1.2 O Modelo Epistemológico de Referência.....	88
3.2 A DIMENSÃO ECONÔMICO-INSTITUCIONAL DA DERIVADA.....	89
3.2.1 Análise de planos de ensino das instituições pesquisadas.....	90
3.2.2 A derivada nos livros de CDI	91
3.3 A DIMENSÃO ECOLÓGICA DA DERIVADA.....	106
4 UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE DERIVADA.....	108
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
REFERÊNCIAS	112
ANEXO A – PLANO DE ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1 - MACKENZIE	116
ANEXO B – – PLANO DE ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1 - UNINOVE.....	118
ANEXO C – – PLANO DE ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1 - FATEC	120

1 INTRODUÇÃO

Iniciamos nossa carreira acadêmica no ensino superior, em fevereiro de 2000, lecionando as disciplinas de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral, nos cursos de Engenharia de uma Universidade privada da cidade de São Paulo. Já no primeiro ano, como professor dessa Universidade, percebemos que alguns de nossos alunos apresentavam dificuldades em aprender alguns dos conceitos abordados em sala de aula. Não conseguíamos entender o motivo dessas dificuldades, uma vez que nos esforçávamos para abordar os conteúdos pausadamente e de diferentes maneiras para facilitar o aprendizado deles. Conversando com alguns colegas, professores dessa instituição, percebemos que a dificuldade dos alunos poderia ser oriunda da carência de conhecimentos ensinados no ciclo básico, entre eles os de matemática.

Para entender essas dificuldades dos alunos ingressamos, em 2003, no programa de mestrado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, instituição em que também me formei como Bacharel em Matemática. No decorrer de nossos estudos, optamos por realizar uma pesquisa, que tratava do conceito de Base de um Espaço Vetorial, apoiada no referencial teórico "Alavanca Meta" de Jean Luc Dorrier e concluímos que todos os alunos entrevistados, de uma maneira ou de outra, construíram o conceito de base. Concluída essa pesquisa, passamos a lecionar com outras formas de abordar os conteúdos em sala de aula e com outras expectativas para os alunos.

Em pouco tempo nos convidaram a coordenar o curso de Licenciatura em Matemática da instituição onde lecionávamos o que nos permitiu compreender o curso como um todo e conhecer as dificuldades dos alunos de todos os semestres do curso.

Em uma ocasião, propusemos uma atividade de Cálculo Diferencial e Integral – CDI, aos alunos do último semestre do curso, para analisar que conhecimentos tinham sido adquiridos por esses alunos a respeito de derivada. Ao avaliar tal atividade, verificamos que grande parte desses alunos sabia apenas resolver tarefas algorítmicas, tais como obter a derivada de uma função real dada. Eles não relacionavam adequadamente a taxa de variação com o coeficiente angular da reta tangente a uma curva, em um dado ponto do domínio da função.

Para alguns desses alunos, a derivada de uma função deveria ser a equação da reta tangente à curva do gráfico dessa função. Um deles ficou surpreso quando ao obter a equação da reta tangente de uma função polinomial de grau 3, em um certo ponto, obteve como derivada, uma função polinomial de grau 2 e afirmou: "[...] mas o gráfico dessa derivada não é uma reta!"

Esse conflito também foi verificado em alguns experimentos de ensino como na tese de Villarreal (1999) em que para alguns sujeitos do experimento, o conflito estava em suas concepções de reta tangente e suas representações gráficas. Em uma das questões dessa pesquisa foi solicitado que traçassem os gráficos de $y = x^2$ e de sua derivada. Em algumas das respostas apareceu que a reta da função derivada, $y = 2x$, não era tangente ao gráfico da função $y = x^2$, pois seus gráficos não são tangentes.

Também nos apropriamos do artigo de Godino et al (2011), que apresenta uma síntese de conhecimentos de derivada, relativos ao componente epistêmico do conhecimento didático-matemático, para apresentar uma reconstrução do significado da noção de derivada, como um aspecto essencial do conhecimento didático-matemático do professor de matemática. Para os autores, a formação matemática e didática dos futuros professores é um campo de investigação que merece a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática, pois o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos depende da formação de seus professores.

Os autores apontam que tem ocorrido um aumento nas pesquisas que tratam da formação de professores de matemática e que um dos problemas que mais apresenta interesse é o de determinar qual o conhecimento didático-matemático requerido para ensinar matemática. Acrescentam que o professor deve ter mais do que conhecimentos matemáticos para desenvolver sua prática com eficiência e melhorar o aprendizado dos alunos.

Para Godino et al. (2011) as questões relativas ao ensino e à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão sendo investigadas intensamente por pesquisadores em Educação Matemática, em especial, as questões que tratam de derivada, considerada uma noção chave no ensino do CDI, desde questões a respeito de abordagens teóricas, como as que tratam de concepções dos estudantes e dos tipos de seus erros, além das que tratam de seu ensino.

Esses e outros fatos observados ao longo da nossa carreira, nos motivaram a procurar por pesquisas relacionadas ao tema derivada, que explicassem essas dificuldades e confusões que os alunos apresentam ao longo de sua jornada acadêmica o que nos conduziu a ingressar no grupo de pesquisa Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática – PEAMAT que tem como um de seus objetivos investigar a construção de conceitos segundo os paradigmas da Educação Matemática.

Desta forma, passamos questionar a maneira que os aspectos associados às questões que levaram à gênese e ao desenvolvimento da derivada e aos agentes que interferem em sua transposição para as salas de aula, concorrem para favorecer, permitir ou dificultar que habitem e se desenvolvam no ensino superior. Nesse sentido, encontramos apoio no referencial teórico proporcionado pela Teoria Antropológica do Didático - TAD, elaborada por Yves Chevallard, que considera que toda atividade humana e, em especial, aquelas que se relacionam à criação, à comunicação e à aquisição de conhecimentos, é composta tanto por ações práticas, quanto por justificativas racionais capazes de possibilitar a compreensão dessas práticas no centro de um grupo social, que chama de instituição.

Entendemos que os problemas didáticos de pesquisa, geralmente, se desenvolvem a partir de uma proposição inicial ligada às preocupações com a prática docente, por exemplo, como ensinar derivada, entretanto, é necessário que se juntem, a essa proposição inicial, outras dimensões do problema de pesquisa, tais como a dimensão epistemológica que se relaciona às questões que demandaram a criação e o desenvolvimento dos saberes relacionados à derivada; a dimensão econômico-institucional relacionada às organizações matemáticas que se desenvolvem para o estudo da derivada no âmbito de uma instituição e a dimensão ecológica que se relaciona às condições e restrições que afetam o estudo da derivada nessa instituição.

Diante destes fatos, elaboramos nossa questão de pesquisa de modo a verificar que contribuições podem ser levantadas dos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico para o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência - MDR, que dê suporte à criação e ao desenvolvimento de Atividades de Estudo e Pesquisa - AEP para o ensino de derivada na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, na Educação Superior.

Para atingir nosso objetivo, organizamos nosso trabalho iniciando com esta introdução, em seguida seis capítulos com o desenvolvimento da pesquisa, e outro, dedicado às considerações finais.

No segundo capítulo apresentamos a problemática de nossa pesquisa, que é composta por uma revisão de literatura, por nossas justificativas pessoais e científicas, fundamentadas na revisão de literatura, o referencial teórico em que nos apoiamos, a delimitação do problema e a metodologia e os procedimentos metodológicos.

No terceiro capítulo apresentamos o estudo epistemológico da derivada, em que procuramos identificar e compreender quais foram as questões que levaram à gênese e ao desenvolvimento dos saberes associados a este conceito. Apoiados nesse estudo, desenvolvemos um Modelo Epistemológico de Referência - MER.

No quarto capítulo apresentamos um estudo econômico-institucional, fundamentado nas leituras e análise de propostas curriculares, manuais e livros didáticos, nos quais buscamos, baseados no Modelo Epistemológico de Referência - MER que desenvolvemos, identificar algumas das características que compõem o Modelo Epistemológico Dominante - MED e de seu subjacente Modelo Didático Dominante - MDD, que orienta as organizações matemáticas utilizadas para o estudo da derivada na Educação Superior.

No quinto capítulo apresentaremos as contribuições de nosso estudo ecológico, no qual procuramos levantar as condições e restrições, em diferentes níveis hierárquicos da escala de codeterminação didática proposta por Chevalard (2001), de modo a verificar se tais condições e restrições podem ser alteradas pelo professor, ou, nos casos em que isso não seja possível, obter meios para alcançar os níveis hierarquicamente mais elevados a fim de propor modificações.

No sexto capítulo, apresentaremos nosso Modelo Didático de Referência - MDR, apoiados nos estudos realizados, que utilizaremos como uma base para a proposição de Percursos de Estudo e Pesquisa - PEPs voltados ao ensino de derivada na Educação Superior.

No capítulo das Considerações finais, faremos nossas considerações sobre a pesquisa e apresentaremos sugestões para futuras investigações.

2 PROBLEMATICA

Neste capítulo, apresentamos as ações que nos levaram a delimitar a problemática da pesquisa apresentando de primeiro, a revisão bibliográfica, em seguida o referencial teórico, a justificativa, a delimitação do problema de pesquisa e a metodologia utilizada.

Neste capítulo apresentaremos o resultado do levantamento que fizemos, das pesquisas relacionadas ao CDI e em especial à derivada, realizadas entre 1999 a 2017, por nossas justificativas pessoais e científicas para a realização deste trabalho, o referencial teórico em que nos apoiamos, a delimitação do problema, nossa questão de pesquisa, os objetivos de pesquisa e a metodologia e os procedimentos metodológicos utilizados.

2.1 Revisão de literatura

Iniciamos nossa revisão procurando, no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, por trabalhos que tivessem como palavra-chave os termos “derivada” ou “derivadas” e obtivemos como resultado 10242 títulos. Após uma avaliação dos resultados obtidos verificamos que as palavras-chave utilizadas eram insuficientes, uma vez que encontramos pesquisas de áreas do conhecimento não compatíveis com o tema de nossa pesquisa.

Para melhorar a abrangência de nossa pesquisa no Catálogo, incluímos as palavras "cálculo diferencial e integral" em nossa busca e obtivemos 43 resultados, distribuídos em 8 teses e 35 dissertações, apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 – Distribuição das dissertações e teses obtidas na busca

Área de Avaliação - CAPES	Dissertações	Teses
Ciência da Computação	1	0
Educação	1	2
Engenharias	1	1
Ensino	14	4
Ensino De Ciências e Matemática	3	0
Interdisciplinar	0	1
Matemática / Probabilidade e Estatística	15	0
TOTAL	35	8

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando esses resultados, verificamos que em 21 dos trabalhos encontrados, 17 eram dissertações entre mestrados acadêmicos e profissionalizantes e 4 eram teses de doutorado, nos quais o esforço de pesquisa concentrou-se em problemas referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de derivada em CDI, nas áreas de Educação Matemática, Ensino, Ensino de Ciências e Matemática.

Além desses trabalhos, encontramos uma dissertação da área de Ciência da Computação; três trabalhos na área de Educação, uma tese e uma dissertação na área de Engenharia; uma tese na área Interdisciplinar; 15 dissertações na área de Matemática e de Probabilidade e Estatística.

Essa diversidade de trabalhos, distribuídos em várias áreas da Avaliação da CAPES, indica a preocupação com o ensino e a aprendizagem de derivada em diversas áreas do Conhecimento, o que mostra que o objeto matemático não é exclusivo daqueles que se dedicam ao estudo e desenvolvimento de Matemática ou ao seu ensino.

Para nos familiarizar com as pesquisas encontradas, iniciamos nossa análise realizando a leitura de seus resumos, procurando por pesquisas que tivessem realizado um mapeamento da produção acadêmica da área de Educação Matemática voltadas ao ensino e à aprendizagem de derivada de uma função e encontramos o artigo de Pagani; Allevato (2014).

As autoras realizaram uma pesquisa, do tipo estado do conhecimento, para mapear dissertações e teses realizadas no Brasil, que abordam o ensino de CDI, em especial, o de derivada. A coleta foi feita em repositórios digitais de instituições de Ensino Superior com programas de pós-graduação, públicas ou privadas, que contemplam mestrado e/ou doutorado em Educação Matemática ou Ensino de Matemática. Explicaram que não utilizaram o serviço do banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) porque não estava disponível quando realizaram a busca (outubro e novembro de 2013) e não havia previsão de retorno.

As autoras escolheram trabalhos produzidos no período de 1999 a 2013 e selecionaram 28 dissertações e teses que abordam o ensino de CDI, mais especificamente os de derivada. Baseadas na leitura dos resumos desses trabalhos

e, às vezes, da integra de alguns dos trabalhos, criaram categorias e subcategorias para agrupá-los de acordo com a identificação de características semelhantes. Segundo as autoras, essas categorias e subcategorias revelaram os tipos de pesquisas, o nível de ensino em que foram realizadas, bem como os conteúdos específicos abordados.

O mapeamento permitiu às autoras verificar que os altos índices de reprovação nos cursos iniciais de CDI constituíram a principal motivação para realização dos trabalhos analisados e que seu ensino e aprendizagem têm sido objeto de estudo e debate, há alguns anos. Relatam ainda que a dificuldade de construção de seus conceitos reflete em altos índices de reprovação no componente curricular que impulsionam propostas pedagógicas para minimizar as dificuldades encontradas no processo de seu ensino e aprendizagem, como a utilização de programas computacionais de Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas, entre outros.

A experiência no ensino de derivada de funções reais de uma variável real, no Ensino Técnico Integrado ao Médio (Ensino Médio Integrado) e alguns anos no Ensino Superior, levou as autoras a observar a dificuldade de seu ensino e a questionar o que poderia ser feito para favorecer essa aprendizagem, o papel do ensino da derivada no Ensino Médio de uma escola técnica e que metodologias poderiam favorecer seu ensino e sua aprendizagem. De acordo com as autoras, Geraldo Ávila, um dos pesquisadores que defende o ensino de derivada no ensino médio, afirmou, em um de seus artigos, que a dificuldade no aprendizado da derivada se deve ao fato de seu ensino ser precedido de um capítulo de limites, caracterizado por atividades com muita manipulação algébrica, pouco significativas para os alunos.

Pagani; Allevato (2014) também observaram que algumas instituições de grande expressão na área de Educação Matemática não apresentaram nenhum trabalho relacionado ao ensino de CDI, apesar de saberem que essas instituições contribuem com grande parte das teses e dissertações em Educação Matemática, produzidas no Brasil. Para as autoras, esse fato pode ter ocorrido por conta da fragilidade dos repositórios digitais dessas universidades que poderiam não estar devidamente atualizados.

Essa pesquisa permitiu que as autoras distribuíssem a produção acadêmica, por tipo de curso de pós-graduação em que os trabalhos foram produzidos para apontar que dos 28 trabalhos selecionados, nove eram de Mestrado Acadêmico, 12

de Mestrado Profissional e sete de Doutorado. Observaram ainda que ocorreu um aumento da produção acadêmica no triênio 2010-2012, por conta do número elevado de dissertações apresentadas em mestrados profissionais, provocado pela abertura de novos cursos dessa modalidade nesse período. Para as autoras, apesar de o ensino de limites, derivadas e integrais ocorrer, na maior parte das vezes, em cursos de nível superior, muitos professores desse nível têm recorrido aos cursos de mestrado profissional em busca de qualificação, embora tenham sido concebidos, originalmente, para atender a professores da Educação Básica.

Com relação aos conteúdos de CDI abordados e discutidos nos trabalhos desse mapeamento, as autoras identificaram alguns que apresentam novas propostas para ensino e aprendizagem dos seus conceitos, outros que discutem os problemas relacionados ao ensino desses conteúdos e ainda, trabalhos que utilizam novas metodologias para o ensino de Cálculo associadas ao uso de recursos computacionais. As autoras apresentam, no Quadro 2, a quantidade e os conteúdos abordados nos trabalhos.

Quadro 2 - Quantidade dos conteúdos abordados nas pesquisas

Conteúdo abordado/total absoluto e percentual de trabalhos	Nº de trabalhos
Limites e continuidade	04
Derivadas	09
Integrais Indefinidas	02
Integrais Definidas	02
Integrais de funções de duas variáveis	01
Elementos do Cálculo de maneira geral	10
Total	28

Fonte: Pagani e Allevato (2014, p. 66)

De acordo com os dados do Quadro 2, percebe-se que o conteúdo específico de derivadas foi tratado no maior número de trabalhos, o que indica que o tema provoca maior preocupação por parte dos pesquisadores.

Para agrupar os trabalhos analisados em categorias, as autoras exploraram os textos das teses e dissertações, considerando pontos relevantes e significativos, para se aproximarem da compreensão do assunto pesquisado, observando os conteúdos de CDI abordados, o nível de ensino, o contexto e a natureza das pesquisas. Perceberam que quatro trabalhos: André (2008); Pereira (2009); Pinto (2010a); Spina (2002) abordavam, de alguma forma, o CDI no Ensino Médio,

integrado ou não ao Ensino Técnico. As demais teses e dissertações discutem o CDI na Educação Superior, uma vez que os componentes curriculares que abordam esses conteúdos são ministrados em cursos superiores de Engenharia, Tecnologias, Bacharelados e Licenciaturas de Física, Química e Matemática, entre outros.

As autoras relatam que como muitos aspectos não puderam ser compreendidos a partir dos resumos precisaram recorrer às considerações finais dos trabalhos, o que permitiu identificar dois tipos de pesquisas, as empíricas e as teóricas, além de características comuns que possibilitou agrupar os trabalhos em categorias e subcategorias apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3 - Quantidade dos trabalhos em categorias e subcategorias

CATEGORIA	SUBCATEGORIA/ DESCRIÇÃO	Número de trabalhos
A - Trabalhos de natureza empírica	A₁ -Trabalhos que implementam e analisam uma prática de ensino	18
	A₂ -Trabalhos que resultam em uma proposta de ensino com abordagens baseadas na teoria cognitiva e na aprendizagem significativa	05
	A₃ -Trabalhos que discutem e analisam concepções apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem	02
B- Trabalhos de natureza teórica	Trabalhos que abordam as dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo	03
TOTAL		28

Fonte: Pagani e Allevato (2014, p. 67)

Para as autoras, a categoria A é constituída de trabalhos que apresentam algum tipo de investigação empírica, ou seja, trabalhos que apresentam alguma experiência de ensino realizada com alunos e/ou professores, que foi subdividida em três subcategorias A1, A2, A3. Em A1 foram reunidos os trabalhos cujo objetivo foi implementar e analisar metodologias e/ou estratégias de ensino, tais como Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para investigar suas contribuições para a aprendizagem de CDI, nos níveis Médio e Superior. Em algumas pesquisas dessa subcategoria, tais como Abdelmalack (2011); Luz (2011); Pinto (2010b); Ribeiro (2010); Rossi (2012); Sangoi (2010), as autoras observaram que a Resolução de Problemas é utilizada como metodologia de ensino.

Com relação à estratégia da Modelagem Matemática, as autoras destacaram as pesquisas de Beltrão (2009); Rilho (2005); Spina (2002) nas quais o aluno estuda conceitos matemáticos relevantes durante a busca de solução para um problema real, o que viabiliza uma análise mais profunda do problema e de suas possíveis soluções para favorecer o aprendizado.

Para as autoras, os trabalhos cujo principal objetivo era investigar o ensino e a aprendizagem de Cálculo, em ambientes informatizados, para analisar as contribuições que programas computacionais ou aplicativos educacionais podem trazer para esses processos, foram: Alves (2010), Amorim (2011a), Barbosa (2009), Gonçalves (2012), Machado (2008) e Villarreal (1999). Nesta subcategoria ainda foram reunidos dois trabalhos que tinham como proposta para o ensino a utilização da história do Cálculo: Ribeiro (2010) e Oliveira (2011) e outros dois trabalhos: Pereira (2009) e Pinto (2010a) que desenvolveram suas propostas de ensino baseados na Engenharia Didática.

Com relação à subcategoria A2, as autoras agruparam trabalhos de natureza empírica cujas propostas para o ensino de Cálculo foram conduzidas e analisadas sob a ótica do Pensamento Avançado: Abreu (2011), Amorim (2011b), André (2008) e Escalarte (2008), em que os referenciais estão apoiados em pressupostos da Teoria Cognitiva do Pensamento Matemático Avançado de Tall e Vinner. Outro trabalho foi o de Miranda (2010) que apresentou uma proposta de ensino baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Na subcategoria A3, as autoras agruparam as pesquisas de Mescolin (2010) e Pinto (2008) que analisaram e discutiram as concepções apresentadas pelos alunos a respeito de derivadas e/ou limites, a fim de identificar nelas elementos que podem ajudar a elaborar propostas de ensino para esses conteúdos.

Segundo as autoras, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) são vistas como facilitadoras dos processos de ensino e de aprendizagem e apesar de terem sido o tema central, os autores de algumas pesquisas concordam que favorecem a visualização e permitem ao aluno enriquecer sua compreensão a respeito do tema, ao relacionar o tratamento algébrico ao geométrico.

Na categoria B, Pagani; Allevato (2014) reuniram os trabalhos de natureza teórica que abordam e discutem dificuldades no ensino e na aprendizagem de CDI: Barufi (1999), Rezende (2003) e Vieira (2013). Segundo as autoras, a tese de Vieira pesquisou os limites e as potencialidades do uso de novas Tecnologias da Informação para o ensino de CDI porque acredita que o novo desafio para o docente será o de construir novas estratégias de ensino que utilizem as possibilidades disponíveis nas novas tecnologias. Por outro lado, para as autoras, a tese de Barufi analisou as dificuldades de estudantes em construir significados para os conteúdos de CDI, pois

os professores precisam ter muita clareza das características desses conteúdos e das diferentes relações que podem ser estabelecidas que possibilitariam aos alunos articulações mais ou menos estáveis e a construção de significados importantes. Em outra direção, em sua tese Resende realizou um mapeamento e analisou as dificuldades de natureza epistemológica, próprias do ensino de CDI, e as agrupou em cinco macro espaços, denominados: eixo discreto/contínuo, eixo variabilidade/permanência, eixo finito/infinito, eixo local/global e eixo sistematização/construção. As autoras observaram que dos trabalhos analisados e categorizados, apenas nove abordavam somente o ensino de derivadas, seja na Educação Superior, seja no Ensino Médio e que, nos demais trabalhos, havia aqueles em que o assunto da pesquisa era exclusivamente o ensino de limites ou o de integrais. Outros abordaram o ensino e a aprendizagem de elementos do Cálculo (limites, derivadas e integrais) para discutir as dificuldades encontradas e detalhar instrumentos didático-pedagógicos que poderiam auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem.

Pagani; Allevato (2014) relataram que não encontraram trabalhos que investigassem o ensino de CDI no contexto do Ensino Técnico, o que mostra carência de investigações a respeito do ensino de CDI na Educação Básica e que esse seria um campo fértil para pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de derivadas. Além disso, alertaram que Barufi e Rezende trouxeram dados alarmantes a respeito das reprovações nas disciplinas de CDI na Universidade de São Paulo (USP) e na Universidade Federal Fluminense (UFF), respectivamente.

As autoras concluíram que os trabalhos analisados nessa categoria eram todos de natureza qualitativa e os procedimentos metodológicos empregados foram, em sua maioria, questionários, entrevistas, análise documental e aplicação de sequências de atividades. Verificaram ainda que os pesquisadores concordaram que, no ensino de Cálculo, a discussão da técnica prevalece em relação à discussão do significado e que apesar da evidência de grande preocupação em torno do estudo de CDI, o número de trabalhos que investigam seu ensino ainda é pequeno.

Pagani; Allevato (2014) constataram que vários dos trabalhos analisados apresentaram uma revisão histórica do desenvolvimento do Cálculo e que em alguns deles, como os de Barufi (1999), Mescolin (2010) e Amorim (2011b), os autores

analisaram e criticaram os livros didáticos de Cálculo adotados com maior frequência nas instituições de Ensino Superior do Brasil.

As autoras destacaram que metade das pesquisas empíricas que analisaram foram realizadas em cursos de Licenciatura em Matemática e mostraram:

[...] uma preocupação a mais por parte dos pesquisadores em contribuir, via estudo do Cálculo, para formação de um professor que seja capaz de repensar sua prática pedagógica, que possa assumir a posição de mediador em sala de aula, que seja flexível frente a novas abordagens didáticas; e, capaz de romper com contratos didáticos estabelecidos ao longo de sua trajetória como aluno e professor. (PAGANI; ALLEVATO, 2014, p. 70).

Para as autoras, o mapeamento revelou que ainda há uma grande quantidade de questões a serem investigadas que implica na necessidade de trabalhos que considerem o ensino e a aprendizagem de elementos do CDI no Ensino Médio, pois a principal motivação para a realização dos trabalhos analisados foi a dificuldade na aprendizagem de CDI, evidenciadas pelos altos índices de reprovação em cursos iniciais de Cálculo.

Para ampliar esta pesquisa, acrescentamos os trabalhos que levantamos no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, a partir de 2014, baseados nos mesmos procedimentos e categorias de Pagani; Allevato (2014). No quadro xx apresentamos as pesquisas que envolvem estudo de derivada, pois contribuem com nossa pesquisa indicando por apontarem problemas que envolvem a derivada como ferramenta para sua resolução. Nesse quadro indicamos com DO as pesquisas de doutorado e com ME as de mestrado.

Quadro 4 - Trabalhos analisados que tratam de Derivada

Autor	Tese / Dissertação	Ano	Curso	Instituição	País
LIMA, Airlan Arnaldo Nascimento	Introduzindo o conceito de derivada a partir da ideia de variação	2012	ME	Universidade Estadual da Paraíba	Brasil
Ferrão, Naíma Soltau	Mapas conceituais digitais como elemento sinalizador da aprendizagem do	2013	ME	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil

	cálculo diferencial e integral				
Almeida, Marcio Vieira	Um panorama de artigos sobre aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall	2013	ME	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil
Mação, Douglas Paes	Uma proposta de ensino para o conceito de derivada	2014	ME	Universidade Anhanguera de São Paulo	Brasil
Junqueira, Sonia Maria da Silva	Experiência de estudantes na construção do conhecimento de derivada em aulas de cálculo 1	2014	DO	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil
MEIRA, SAMUEL SOUZA.	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E ASSIMILAÇÃO OBLITERADORA- UM ESTUDO COM CONCEITOS DE CÁLCULO	2015	DO	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil
Leme, Jayme do Carmo Macedo	Aprendizagem da derivada: Uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento	2016	DO	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil

Ferreira, Allan Silva	DIFERENTES ABORDAGENS DO CONCEITO DE DERIVADA: uma proposta de Investigação Matemática	2017	ME	Universidade Católica de Minas Gerais	Brasil
RACHELLI, JANICE	COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DE DERIVADA CLÁSSICA E DERIVADA FRACA: ANÁLISE SEGUNDO O MODELO COGNITIVO APOS	2017	DO	Centro Universitário Franciscano	Brasil
Lobo , Rogério dos Santos	A abordagem dada à taxa de variação no livro didático do ensino médio e sua relação como o conceito da derivada no livro didático do ensino superior.	2017	DO	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil
Silva, Edson Rodrigues	Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica	2017	DO	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil

Refizemos o quadro das categorias, acrescentando a subcategoria “Trabalhos que abordam contribuições teóricas para o ensino e a aprendizagem de cálculo” como mostra o Quadro 4. De acordo com nossa avaliação, para os trabalhos da categoria A – trabalhos de natureza empírica, foram agrupadas sete pesquisas, três da subcategoria A1, duas da subcategoria A2 e outras duas da subcategoria A3.

Quadro 5 - Quantidade de trabalhos em cada categorias e subcategoria

CATEGORIA	SUBCATEGORIA/DESCRIÇÃO	Número de Trabalhos
A - Trabalhos de natureza empírica	A1 - Trabalhos que implementam e analisam uma prática de ensino	3
	A2 - Trabalhos que resultam em uma proposta de ensino com abordagens baseadas na teoria cognitiva e aprendizagem significativa	2
	A3 - Trabalhos que discutem e analisam concepções apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem	2
B - Trabalhos de natureza Teórica	B1 - Trabalhos que abordam as dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo	1
	B2 - Trabalhos que abordam contribuições teóricas para o ensino e aprendizagem de cálculo	3
TOTAL		11

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na subcategoria A1 foram agrupados os trabalhos de Mação (2014), Ferreira (2017) e Lima (2012), o último incluído porque achamos pertinente e não constava da pesquisa de Pagani e Allevato (2014).

O objetivo de pesquisa de Mação (2014) era apresentar abordagens para o ensino de derivada e, levantar as abordagens que aparecem em Livros didáticos de Cálculo usados em algumas Universidades do Estado de São Paulo, estudar as características dos Três Mundos da Matemática, que aparecem nessas abordagens e verificar a possibilidade de elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção Geométrica, pela concepção da Taxa e pela concepção da Aproximação.

Com relação ao referencial teórico, o autor escolheu as ideias de Thurston sobre o entendimento da derivada; os pontos do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, que consideramos importantes para nosso estudo; a ideia de “já-encontrado” de David Tall; as características envolvidas com o ensino de Derivada e que permeiam os Três Mundos da Matemática, no caso das abordagens: Geométrica, Taxa de variação e Aproximação; os principais procedimentos metodológicos

adotados para a elaboração da forma de abordagem desenvolvido a partir da pesquisa.

Para Mação (2014), segundo a teoria, o desenvolvimento cognitivo de um sujeito pode se desenvolver de três formas diferentes. Nesta teoria, para cada forma diferente do desenvolvimento, essas premissas chamadas de “set-befores”, ou seja, uma estrutura mental com a qual nascemos e que amadurece em pouco tempo com as conexões mentais que realizamos no início da vida.

O desenvolvimento cognitivo de um sujeito, existe um mundo distinto, que se apresentam da seguinte forma: mundo conceitual corporificado, mundo operacional simbólico e mundo formal axiomático. Os Três Mundos da Matemática também foram utilizados para analisar que características encontramos presentes nas abordagens propostas em livros didáticos previamente escolhidos e quais pré-requisitos, ou “já encontrados”, são trabalhados antes da introdução da derivada e são enfatizados em seu desenvolvimento.

Mação (2014) escolheu três maneiras de abordar o conteúdo de derivada, a geométrica, a taxa de variação e a aproximação, para elaborar atividades que podem ser utilizadas em sala de aula da disciplina CDI em Cursos de nível Superior, para introduzir o conceito de derivada. Em cada abordagem, o autor procurou que o aluno participasse da construção de novos conhecimentos baseados em seus conhecimentos anteriores durante a realização das atividades, de forma autônoma e menos dependente do professor. O autor utilizou o quadro teórico Três Mundos da Matemática que propõe entender e explicar o desenvolvimento cognitivo de um sujeito, em Matemática, ao longo da vida.

Como resultados, observamos que o autor criou propostas de abordagens de derivada com ênfase em algumas das maneiras de entender este conceito segundo Thurston (1994). Dentre estas, foram escolhidas as abordagens Geométrica, Taxa e Aproximação.

Na abordagem Geométrica, elaboramos uma sequência de exercícios para apresentar a um sujeito o cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2))$, para posteriormente generalizar para um ponto $(2, f(p))$ qualquer. Segundo Mação (2014), para atingir este objetivo foi necessário utilizar

alguns "já-encontrados" como o conhecimento de função, o cálculo do coeficiente angular de uma reta dada por dois pontos, o cálculo da equação da reta secante por meio de dois pontos e o limite de funções.

Na abordagem Taxa, propusemos uma atividade para apresentar a um sujeito o cálculo da velocidade instantânea no instante t qualquer. Para realiza-la, foi necessário fazer uso de alguns "já-encontrados", como conhecimento de função, do cálculo da velocidade média e limite de funções. Por meio de uma sequência de 10 itens, apresentamos o cálculo da velocidade instantânea no instante p qualquer pelo limite $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(p+\Delta t) - f(p)}{\Delta t}$. Segundo o autor, ficou a cargo do professor a definição de uma nova função que possui notação $f'(t)$ e que pode ser aplicada no instante p qualquer.

Na abordagem Aproximação, foi elaborada uma sequência de questões para apresentar a um sujeito a reta que proporciona a melhor aproximação linear para a função, para valores de x próximos a 2. Para atingir este objetivo, foram necessários alguns "já-encontrados", como o conhecimento de função, o de calcular a equação da reta por meio de um ponto e o do coeficiente angular, e limite de funções.

Por meio de oito tarefas, foi desenvolvido o cálculo da reta que proporciona a melhor aproximação linear para valores próximos de $x = 2$ e iniciou-se um processo de generalização para valores próximos de $x = p$ qualquer. Enfatizamos que para determinar esta reta, é necessário apenas definir seu coeficiente angular e quando isto é feito, é realizado o cálculo do coeficiente angular da reta tangente. Também ficou a cargo do professor, institucionalizar este algoritmo com uma notação própria e que pode ser visto como uma nova função, que possui a notação $f'(x)$.

O trabalho de Ferreira (2017) tinha como objetivo elaborar um material de apoio para o professor utilizar na introdução ao estudo da Derivada com a finalidade de propor ao aluno melhor compreensão na construção do conceito de Derivada. Aplicou duas atividades e um questionário de opinião, utilizando ferramentas da Tecnologias da Informação e Comunicação, em um curso de extensão, ministrado a alunos de graduação em Ciências Exatas e verificou que o material contribuiu para que o entendimento de derivada fosse mais efetivo.

O objetivo do trabalho de Lima (2012) era elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que possibilitasse a construção de conhecimentos de derivada a

partir da noção de variação, utilizando como referencial teórico “imagem de conceito e definição de conceito” estabelecida por Tall e Vinner. Os resultados indicaram que a maior parte dos alunos conseguiu compreender a derivada como uma medida de variação, além de alguns dos seus significados: velocidade instantânea, taxa de variação instantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.

Nesses trabalhos percebemos a preocupação com a construção do conceito de derivada e seus significados, como a taxa de variação e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.

Para a subcategoria A2, que agrupa os trabalhos que resultam em uma proposta de ensino com abordagens baseadas na teoria cognitiva e aprendizagem significativa, reunimos os trabalhos de Meira (2015) e Ferrão (2013), ambos com uma abordagem qualitativa e realizaram observação em sala de aula. O trabalho de Meira (2015) teve como objetivo estudar a aquisição e a retenção do significado de conceitos no processo de aprendizagem, os níveis de sua formação e a avaliação das contribuições das transformações de representações semióticas para a aprendizagem de conteúdos do Cálculo, em especial, a derivada. Como Referencial teórico o autor utilizou as teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica. Participaram da pesquisa, 15 estudantes de Cálculo I, que realizaram seis testes de conhecimento de conteúdos de Cálculo e participaram da elaboração de mapas conceituais correspondentes a esses conteúdos.

Segundo o autor, os resultados indicam que os estudantes estavam em processo de construção do conceito de derivada, evidenciando uma aprendizagem de conteúdos por recepção e revelaram esquecimento. Os resultados dos testes, sobretudo, confirmam a hipótese de que as transformações de representação semiótica, como o tratamento e a conversão, contribuem para o processo de aprendizagem significativa dos conteúdos.

A pesquisa de Ferrão (2013), teve como objetivo analisar o uso de mapas conceituais digitais, como elemento sinalizador da aprendizagem significativa de estudantes que já cursaram Cálculo Diferencial e Integral em relação ao objeto matemático derivada.

Trata-se de uma abordagem qualitativa, utilizando observações de sala de aula, questionário misto e mapas conceituais digitais, produzidos por licenciados de um curso de Física.

Como resultados obtidos, o autor identificou nos mapas conceituais digitais, instrumentos eficazes para avaliar a aprendizagem significativa dos estudantes em conteúdos específicos do Cálculo Diferencial e Integral a partir dos conceitos de hierarquização, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, definidos na Teoria da Aprendizagem Significativa.

De acordo com o autor, os mapas conceituais podem se constituir em instrumentos efetivos para avaliação, conforme abaixo:

[...] mapas conceituais podem constituir-se num instrumento avaliativo efetivo, capaz de explicitar a organização cognitiva dos estudantes e possibilitar a concretização daquilo que Ausubel propõe: que o professor parta do que o estudante já sabe para iniciar o processo de ensino. (FERRÃO, 2013, p. 87).

Nos dois trabalhos anteriores, podemos observar a inclusão dos mapas conceituais nos procedimentos metodológicos de cada pesquisa, como uma maneira de auxiliar o pesquisador na interpretação da produção dos participantes da pesquisa.

Na subcategoria A3, que reúne os “trabalhos que discutem e analisam concepções apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem”, agrupamos os trabalhos de Rachelli (2017) e Junqueira (2014).

A pesquisa de Rachelli (2017), tem como objetivo investigar como se dá a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em Ensino de Matemática de uma instituição comunitária do Rio Grande do Sul. A autora utilizou teoria APOS como referencial teórico, a qual elaborou uma decomposição genética, em que foram descritas as possíveis construções mentais utilizadas pelos estudantes para a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca. Foram organizadas situações de ensino compostas por atividades a respeito das construções históricas do conceito clássico, a derivada nos tempos atuais e a passagem da derivada clássica para a derivada fraca. As situações de ensino foram desenvolvidas em sala de aula, na disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral.

Para a autora, os resultados indicam que os estudantes foram capazes de coordenar ações e processos para obter a derivada e verificar se uma função é

diferenciável, coordenar as interpretações da derivada como inclinação da reta tangente, velocidade instantânea e taxa de variação, além de, utilizar mecanismos de generalização e reversibilidade na análise dos gráficos das funções e suas derivadas e de encapsular os processos necessários para a compreensão do conceito da derivada clássica, de forma satisfatória.

Segundo a autora, há evidências de que houve compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca pelos estudantes, embora tenham apresentado alguns erros nesses processos. Estes evidenciaram desenvolver mecanismos mentais de abstração reflexionante, que possibilitaram a construção das estruturas mentais de ação, processo, objeto e esquema presentes na decomposição genética que lhes permitiu compreender os conceitos. Além do mais, o trato com o contexto histórico da derivada e o trabalho colaborativo dos alunos foram fatores significativos para a obtenção dos resultados da pesquisa.

O trabalho de Junqueira (2014) teve como objetivo apontar possibilidades das experiências nos processos de construção do conhecimento de estudantes em aulas de Cálculo 1, especificamente, em relação ao conteúdo Derivada. É uma pesquisa qualitativa com aspectos interpretativos e descritivos, por meio dos quais se planejou uma análise de conteúdo constituída junto a 186 estudantes de cursos de Engenharias e Licenciaturas, matriculados em uma Universidade Pública Federal. A coleta de dados ocorreu em três abordagens, sendo a primeira e segunda reveladoras de hipóteses subjetivas identificáveis a partir dos relatos dos sujeitos investigados, e a terceira, conduzida por representações exteriorizadas em Mapas Conceituais Iniciais.

Como Referencial teórico, a autora utilizou a relação dialógica de Buber, as escolhas que conduzem a vida humana de Bauman e May e da dimensão da experiência de Larrosa, além da análise de conteúdo de Bardin.

Os resultados da pesquisa apontaram que estudantes com uma base “mais fraca” em Matemática alcançaram resultados positivos quanto negativos, e que buscas pessoais contribuíram em favor da adaptação e desenvolvimento na disciplina, demonstrando aspectos de corresponsabilidades, embora não unânimes entre os sujeitos, revelando também marcas de um processo particular de escolhas. Ainda, evidenciou-se que o fortalecimento de mecanismos de transparência e de comunicação institucionais pode contribuir para o processo de formação desses sujeitos. Para a autora, os estudantes, em relação ao Cálculo 1, revelaram emoções,

sentimentos. Diante da Derivada se mostraram incipientes, entretanto, revelaram marcas de experiências que se consolidam na construção desse conhecimento.

Destacamos que este trabalho de pesquisa também utilizou os Mapas Conceituais para auxiliar o pesquisador no levantamento e análise da produção dos participantes do estudo.

Na continuação apresentamos os trabalhos da categoria B – Trabalhos de natureza teórica. Para esta categoria agrupamos 4 pesquisas. Uma pesquisa da subcategoria B1 e três da subcategoria B2.

Na subcategoria B1, agrupamos a pesquisa de Lobo (2017) que tem como objetivo, investigar os significados de variação, de taxa de variação e de derivada, que podem ser construídos a partir da abordagem de livros didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior. O autor também queria analisar as articulações entre os Registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Derivada para enfatizar a derivada como uma taxa de variação em aplicações de coeficiente angular, de cálculo de velocidades, de funções marginais da Economia, como receita marginal, lucro marginal e custo marginal, as razões diretas e a taxa de variação relativa, isto é, a porcentagem.

O autor realizou uma pesquisa documental baseada na análise de conteúdo de Bardin e utilizou a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e o Sentido Holístico da Derivada além dos critérios de Idoneidade Epistêmica como referencial teórico.

Segundo Lobo (2017) as análises dos livros didáticos do Ensino Médio permitiram concluir que seus autores não exploram as ideias fundamentais de variação e taxa de variação como aplicação, principalmente, as de coeficiente angular, cálculo de velocidade e funções médias da Economia.

Para o autor, o significado de taxa de variação caminha no sentido do coeficiente angular e a organização dos significados é feita na direção da relação entre a taxa de variação e o coeficiente angular. Na introdução da derivada, a abordagem é feita, principalmente, como uma aplicação de coeficiente angular. As demais aplicações, como cálculo de velocidade e funções marginais da Economia, são praticamente inexistentes.

Além disso, os livros abordam o significado da derivada como um limite, o que de acordo com o autor, é pouco representativo para a construção global do conceito. Isto confirma a hipótese do autor que a derivada não é ensinada com ênfase na taxa de variação, nos livros didáticos do ensino superior, mas sim, por meio da concepção do Limite da razão incremental. De acordo com o autor, a variação e a taxa de variação não são enfatizadas no estudo da reta, nos livros didáticos do ensino médio.

Como uma sequência para apresentação da derivada no ensino, o autor propõe o uso de concepções fundamentais de variação e taxa de variação, abordagem dos números reais, limites, continuidade e técnicas de derivação, de modo a contribuir para ampliar o significado global da derivada. O autor relata que os livros analisados seguem uma sequência contraditória a sua proposta. Para ele, os livros seguem a ordem que provavelmente foi proposta por Cauchy, que basicamente inicia o estudo com números reais e funções e em seguida, vai do conceito de limite para o de derivada.

Na subcategoria B2, que reúne trabalhos que abordam contribuições teóricas para o ensino e a aprendizagem de cálculo, agrupamos as pesquisas de Silva (2017), Leme (2016) e Almeida (2013).

A pesquisa de Silva (2017) tem como objetivo construir uma base de conhecimento para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para produzir esta pesquisa o autor considerou realizar um estudo bibliográfico em que as fontes de investigação se constituíram de pesquisas que versam a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica, dos documentos oficiais que direcionam e organizam o ensino de matemática no Brasil e de materiais didáticos utilizados em diferentes períodos da educação básica, por meio de livros, teses, dissertações, artigos científicos e documentos oficiais.

Como referencial teórico, Silva (2017) utilizou a teoria da Base de Conhecimentos para o Ensino, especificamente, nas concepções de Shulman, Mishra e Koehler, de Lima e Silva, de Ball e de Thames e Phelps e a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard. Essas teorias ajudaram a compor um cenário que evidenciasse os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

Para o autor, os conhecimentos referentes a noção de razão, proporção e proporcionalidade fundamentam a construção dos conhecimentos do conteúdo de taxa de variação. Além desses conhecimentos, a noção de função em consonância com as noções de crescimento e decrescimento de uma função f qualquer, também são imprescindíveis para a construção dos conhecimentos do conteúdo referentes à noção de taxa de variação.

De acordo com Silva (2017), a construção dos conhecimentos referentes a variação de funções de primeiro grau, por exemplo, consiste em estudar os saberes referentes a dois tipos de taxa de variação, a saber, a taxa de variação média, que corresponde a variação de uma função $f(x)$ em relação a variável x , em média, em um determinado intervalo do domínio de f , e a taxa de variação instantânea, que corresponde à rapidez com que a função $f(x)$ varia em relação a x , em um ponto específico de seu domínio. Para o autor, essa taxa de variação instantânea corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f em um ponto específico de seu gráfico. Além disso, o ato de se obter a reta tangente à curva que representa graficamente a função em um ponto específico $(x_0, f(x_0))$ está fundamentado no conceito de limite, quando este existe, uma vez que é possível aproximar x de x_0 quanto se queira, desde que x e x_0 nunca coincidam. Desta maneira, os conhecimentos do conteúdo acerca da noção de limite, também são fundamentais para a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na educação básica.

Na pesquisa de Leme (2016), o objetivo era investigar os fluxos de pensamento na formação do pensamento matemático na aprendizagem do conceito de derivada, tendo por base a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, com vistas a identificação dos meios que potencializem a aprendizagem desse conceito matemático.

A sua metodologia de pesquisa é uma proposta teórica exploratória, pois se trata de uma pesquisa que utiliza apenas documentos para construir os próprios conceitos e argumentos, utilizando o rigor e a coerência lógica, para produzir um material de base para novos estudos.

Como um primeiro resultado da pesquisa, na perspectiva dos fluxos de pensamento, destacou-se os fluxos que permitem observar elementos de aprendizagem da derivada, como no mundo corporificado, que apresenta aspectos

sensíveis e perceptíveis aos sentidos, ocasião em que é tratado como a inclinação da reta tangente, a retidão local de uma curva ou a taxa de variação instantânea; no mundo simbólico, são observadas rotinas e processos tácitos a esse conceito, que são executados a fim de se criar simbologias próprias; e no mundo formal, observou-se a estrutura axiomática que a derivada pode ser concebida.

Para o autor, outro resultado observado, que conduziu a um avanço dentre as teorias discutidas, refere-se a característica perceptível da derivada, pertencente ao mundo corporificado, pois esta desvincula-se de características processuais, propiciando dessa forma, oferecer um referencial-base, para novas investigações nos processos de ensino e de aprendizagem da derivada.

A pesquisa de Almeida (2013) teve como objetivo a realização de um panorama de artigos de autoria de David Tall relacionados a aprendizagem e o ensino do CDI. É um estudo teórico de caráter bibliográfico, na modalidade panorama, cuja organização se pautou também em elementos da Análise de Conteúdo, segundo Bardin. São apresentados dados a respeito da biografia do pesquisador inglês e a relação dele com a comunidade de pesquisa nacional. Foi realizado um levantamento, no banco de dissertações e teses da CAPES, com a intenção de identificar a utilização dos elementos teóricos desenvolvidos por Tall, em pesquisas nacionais.

O material utilizado para o desenvolvimento do panorama se constituiu de 14 artigos, retirados da seção Limits, Infinity & Infinitesimals do sítio acadêmico do pesquisador. Destaca-se nesse material, os elementos teóricos e as abordagens para o ensino de CDI, formuladas para os conhecimentos: números reais, infinito, limites, continuidade, derivada, integral e equações diferenciais. O panorama traz sínteses e análises de elementos teóricos, além de colocar em evidência dados importantes a respeito da aprendizagem e do ensino do CDI, na perspectiva de Tall.

De acordo com o autor, Tall utiliza um ambiente de programação e os elementos da Análise Não-Standard, para auxiliar os estudantes a desenvolver o conceito de limite, com o objetivo de propiciar uma base lógica adequada aos infinitesimais intuitivos. Também utiliza o ambiente computacional para abordar as séries e sequências com objetivo de desenvolver o conceito formal desses conhecimentos. O conceito de derivada, de acordo com o pesquisador, foi abordado por meio da raiz cognitiva da retidão local e por exemplos de funções não usuais.

Diante da análise, que discorreremos acima, percebemos que a dificuldade de aprendizagem dos conceitos do CDI reflete em altos índices de reprovação no componente curricular e como consequência, propostas pedagógicas têm surgido para minimizar as dificuldades encontradas nos processos de seu ensino e de sua aprendizagem.

Verificamos algumas pesquisas que apresentaram novas propostas para ensino e aprendizagem de seus conceitos, outras que discutiram os problemas relacionados ao ensino desses conteúdos e avaliamos trabalhos que utilizaram novas metodologias para o ensino de CDI, associadas ao uso de recursos computacionais.

Percebemos que alguns poucos trabalhos abordavam, de alguma forma, o CDI no Ensino Médio, mas que a maior parte deles discutiram o CDI na Educação Superior, uma vez que os componentes curriculares que abordam esses conteúdos são ministrados em cursos superiores de Engenharia, Tecnologias, Bacharelados e de formação de professores (Licenciaturas) de Física, Química e Matemática, entre outros.

Também observamos propostas cujo ensino é baseado na Resolução de Problemas, outros baseados na Engenharia Didática e propostas de ensino sob olhar da Teoria da Aprendizagem Significativa. Essas contribuições podem ajudar professores a elaborar melhores propostas de ensino do CDI que possibilitem aos alunos, articulações mais ou menos estáveis e a construção de significados importantes.

Analizamos trabalhos de natureza teórica, que discutiam as dificuldades no ensino e na aprendizagem de CDI e a realização de um mapeamento das dificuldades de natureza epistemológica.

Com relação os referenciais teóricos, observamos a utilização de uma variedade de teorias, como a teoria dos Três Mundos da Matemática, a Informática na Educação; a Análise Textual Discursiva, a Imagem de conceito e Definição de conceito, Aprendizagem Significativa, Registros de Representação Semiótica, APOS, os Critérios de Idoneidade Epistêmica e a Teoria Antropológica do Didático.

No entanto, não verificamos trabalhos que realizassem estudos a respeito das dimensões epistemológica, econômica e ecológica do problema didático da derivada de uma função.

Na continuação, apresentaremos as justificativas e a delimitação do problema de pesquisa que nos inquieta e que nos debruçaremos em busca de contribuições que possam apontar novas perspectivas para o ensino da Derivada.

2.2 Referencial Teórico

Nesta investigação pretendemos identificar as contribuições que podem ser levantadas nos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico para o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência - MDR, que possibilitem a criação e o desenvolvimento de um Percorso de Estudo e Pesquisa (PEP) e de Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) para o ensino de derivada na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Para dar suporte às análises produzidas, pretendemos utilizar a Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard, que aborda as organizações didáticas e matemáticas inseridas no conjunto das atividades humanas e institucionais.

2.2.1 Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Segundo Almouloud (2010) a TAD estuda as condições e o funcionamento de sistemas didáticos, isto é, as relações instituição-sujeito-saber. Ela estuda o homem se relacionando com o saber matemático, especialmente diante de situações matemáticas. Desta forma, ela é um instrumento poderoso para analisar as práticas docentes. A teoria foi elaborada por Yves Chevallard e resultou da problemática da Transposição Didática entre instituições, proposta por Chevallard (1991) e está apoiada nas linhas de pesquisa do Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática, originada pelos trabalhos de Guy Brousseau que conduziram à elaboração da Teoria das Situações Didáticas.

Para Matheron; Noirfalise e Combelles (2006) a transposição didática consiste em dizer que as práticas relativas a um objeto matemático ou outro objeto qualquer, muda de acordo com as instituições, no sentido de organizações sociais, dentro das quais se observam tais práticas.

A razão para o uso do termo antropológico, de acordo com Chevallard (1999, p. 221), é que a TAD situa a atividade matemática e, como consequência, o estudo da Matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

Para ele, falar de Matemática supõe falar de alguns objetos distintos, dentre eles, a Matemática em primeiro lugar, e em seguida, do aluno, do professor, dos livros didáticos etc., separadamente, excluindo quase todos os outros objetos considerados irrelevantes cientificamente.

Chevallard (2009) chama atenção para algumas noções fundamentais da TAD. A primeira delas é a noção de *objeto*, que é qualquer entidade que exista para pelos menos um indivíduo. Para o autor, tudo é objeto. Assim, o número sete é um objeto, assim como o símbolo 7, e as pessoas são objetos, da mesma forma como a noção de pai. O conceito de derivada de uma função f é um objeto e o símbolo f' . Desta forma, todo produto intencional da atividade humana é um objeto.

A segunda noção fundamental é a de *relação pessoal* de um indivíduo x para com um objeto o . Para o autor, ela é o sistema de todas as interações, tais como falar, manipular, utilizar, que um indivíduo x possa ter com o objeto o .

O par formado por um indivíduo x e o sistema de relações pessoais deste mesmo x para com um objeto o , em um dado momento da história de x , é a terceira noção fundamental e é chamada de *pessoa*. O sistema de relações pessoais de x evolui com o passar do tempo. Assim, um objeto que não existe para um indivíduo x passa a existir, enquanto outros deixam de existir, alterando a relação pessoal de x . Nesta evolução, para o autor, o indivíduo é o invariante e o que muda é a pessoa.

Outra noção fundamental, para o autor, é a de universo cognitivo da *pessoa* x , que é o conjunto formado por um objeto o , que existe para uma pessoa x , e por uma relação pessoal de x com o objeto o , tal que a relação pessoal exista, isto é, a relação pessoal não é vazia. Como exemplo, podemos falar da relação de um indivíduo x com a sua escova de dentes, com o pedal de freio de seu carro, assim como com uma equação quadrática ou com a derivada de uma função f .

O termo instituição é outra noção fundamental para a TAD. Uma instituição I é um dispositivo social completo, mas que permite para as pessoas x que vivem e ocupam diferentes posições p oferecidas na instituição I , executar modos de pensar e fazer próprios, chamados de praxeologias. Para o autor, uma sala de aula é uma instituição, cujas posições p nessa instituição são as de professor e de aluno.

A relação pessoal de x para com um objeto o muda, ou é criada, pelo encontro de x com o nas instituições I onde tal objeto o vive e onde a pessoa x vem ocupar

uma dada posição **p**, que o coloca em contato com o objeto **o** e é desta forma que se constitui ou muda o universo cognitivo de um indivíduo **x**. Para o autor, cada indivíduo é condicionado por várias instituições, tais como a família, da qual ele se torna sujeito. Desta forma, na medida em que é sujeito de uma variedade de instituições e condicionamentos é que um indivíduo **x** se constitui em uma pessoa.

Para Chevallard (2009), o que foi discutido acima sobre os indivíduos pode ser transferido para as instituições. Desta maneira, dado um objeto **o**, uma instituição **I** e uma posição **p** em **I**, ele chama de relação institucional ao objeto **o** na posição **p**, a relação ao objeto **o** que deve ser ideal aos sujeitos de **I** na posição **p**. E do mesmo modo, o universo cognitivo institucional para a posição **p** de **I** é o conjunto formado por um objeto **o** e uma relação institucional ao objeto **o** na posição **p**, de modo que essa relação institucional não seja vazia. Quando ocorre o oposto, diz-se que os sujeitos de **I** na posição **p**, não tem conhecimento do objeto **o**.

Segundo o autor, um indivíduo **x** que se torna um sujeito de uma instituição **I** em uma posição **p**, com um certo universo cognitivo, se condiciona às relações institucionais ao objeto **o** na posição **p**, o que poderá reformular suas relações pessoais com respeito ao objeto **o**. Assim, nossas relações pessoais são frutos de nossa história de submissões institucionais passadas e presentes.

Portanto, uma instituição **I** possui uma diversidade de estruturas por causa das relações que ocorrem entre as pessoas e os objetos pertencentes a ela, ou seja, dentro de uma instituição podemos encontrar diversas relações entre objetos e pessoas.

A TAD, segundo Almouloud (2010), está centrada no estudo de organizações praxeológicas didáticas que são pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas. A palavra praxeologia vem da língua grega e é formada pelos termos práxis e logos que querem dizer respectivamente, prática e razão. Ela sugere que uma prática humana é sempre envolvida de um discurso mais ou menos desenvolvido, ou seja, um logos, que o acompanha e que lhe dá razão. Ela é resumida por Chevallard (1999) como sendo toda atividade humana realizada regularmente, que pode ser descrita como um modelo único. O autor relata que toda a prática institucional pode ser analisada de diferentes maneiras por diferentes pontos de vista de acordo com um sistema de tarefas bem circunscritas, que se desenvolvem no fluxo da prática. Para ele, ao realizar qualquer tarefa se coloca em ação uma técnica.

As condições para produção e utilização de tarefas e técnicas em uma instituição, implicam na existência de um discurso que descreve e justifica as tarefas e as técnicas, que se chama tecnologia da técnica. Da mesma forma, toda a tecnologia precisa ser justificada por uma teoria.

As noções de tarefa t e tipo de tarefas T estão na raiz da noção de praxeologia. Para Chevallard (1999), uma tarefa e o tipo de tarefa associado à tarefa, se expressam por meio de um verbo como, por exemplo, varrer um quarto, desenvolver a expressão literal dada, dividir um inteiro por outro, cumprimentar um vizinho, ou derivar a função $f(x) = x^2 - 2x$, são tipos de tarefas. Para ele, a noção de tarefa empregada na TAD é mais ampla que a noção de tarefa da linguagem corrente e a noção de tipo de tarefa supõe um objeto preciso, isto é, subir uma escada é um tipo de tarefa, mas somente subir, não é. Em Matemática, calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, no entanto calcular, simplesmente, não é um tipo de tarefa, mas sim um gênero de tarefas.

Para realizar uma dada tarefa t , de um tipo de tarefa T é necessária uma maneira de fazer, τ , que o autor dá o nome de técnica, do grego *tekhnê*, que quer dizer, saber fazer. Uma praxeologia relativa a um tipo de tarefas T contém, a princípio, pelo menos uma técnica τ , relativa ao tipo de tarefa T , formando um bloco $[T, \tau]$, denominado pelo autor de bloco prático/técnico ou saber-fazer. Desta forma, podemos dizer que uma tarefa demanda uma ação, por exemplo, calcular a derivada de uma função polinomial de segundo grau, por exemplo $f(x) = x^2$, para a qual se tem uma técnica, a regra da potência da derivada, isto é, se a função $f(x) = x^n$ então temos a derivada $f'(x) = n x^{n-1}$ e que resultaria em $f'(x) = 2x$, para a função dada acima.

Para Matheron; Noirfalise e Combelles (2006) é importante especificar as tarefas de um tipo, porque dificilmente podemos treinar o aluno em um tipo muito geral de tarefas. Não é porque um aluno foi capaz de realizar uma tarefa em um contexto particular que ele realizará em toda a generalidade. Um erro didático seria pensar que um aluno de uma determinada classe, tendo aprendido a realizar tarefas de um determinado tipo, seria capaz de realizar qualquer tarefa do mesmo tipo.

Uma técnica, para Chevallard (1999), deve ser compreensível, legível e justificada, de modo a garantir a eficácia das tarefas realizadas. Além disso, uma técnica pode ser bem-sucedida em uma parte de tarefas do tipo T à qual ela é

destinada, ou seja, a técnica apresenta certo alcance. Quando a técnica fracassar em outra parte das tarefas do tipo T, dizemos que não se sabe, em geral, realizar tarefas do tipo T.

Para justificar racionalmente uma determinada técnica τ é necessário utilizar um discurso lógico (logos) a respeito da técnica (tekhnê) τ , que o autor denominou de tecnologia e denotou por θ . Para Chevallard (1999), o estilo de racionalidade desempenhado varia no espaço institucional e o discurso tecnológico contém afirmações que podem demandar uma razão, o que faz passar para o nível da teoria, Θ , de justificação-explicação-produção, que cumpre, em relação à tecnologia, o papel que a tecnologia cumpre em relação à técnica. Desta forma, uma tecnologia θ e uma teoria Θ , que justifica essa tecnologia, constitui um bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$, que, normalmente, é identificado como saber.

Como exemplo, seja um tipo de tarefas T, derivar uma função. Podemos ter um número elevado de tarefas t do tipo T, por exemplo, derivar uma função polinomial de grau n, derivar uma função exponencial, derivar uma função logarítmica etc. Para cada uma destas tarefas, do mesmo tipo de tarefa T, temos uma técnica específica de resolução, que pode ser justificada por uma tecnologia e que é sustentada por uma teoria.

Assim, dado o tipo de tarefas T, derivar uma função. Seja agora uma tarefa t_1 do tipo T, derivar uma função polinomial de grau 3, isto é, $f(x) = x^3$. Para derivar esta função podemos utilizar a técnica da regra da potência das derivadas, ou seja, para τ_1 , se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$, o que irá resultar que $f'(x) = 3x^2$. Para justificar esta técnica, utilizamos como discurso tecnológico, o limite da razão incremental da variação da função, isto é, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Esta tecnologia é justificada pela teoria do Cálculo Diferencial e Integral, isto é, conhecimentos a respeito de número real, de função, limite, entre outros.

Para ampliar nosso estudo, podemos estudar outra tarefa t_2 , do mesmo tipo T anterior. Seja t_2 , derivar uma função exponencial, $f(x) = 2^x$. Para realizar esta tarefa podemos utilizar a técnica da derivada da função exponencial, isto é, para τ_2 , se $f(x) = a^x$ então $f'(x) = a^x \ln(a)$. Desta forma, a resolução da tarefa fica $f'(x) = 2^x \ln(2)$. Esta técnica também é justificada com o discurso tecnológico do limite da

razão incremental da variação da função, isto é, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Esta tecnologia é justificada pela teoria do Cálculo Diferencial e Integral, isto é, conhecimentos a respeito de número real, de função, limite, entre outros.

Assim, em torno de um mesmo tipo de tarefas T , se encontra um trio formado por uma técnica, uma tecnologia e uma teoria, denotado por $[T/\tau/\theta/\Theta]$ e que constitui o que se chama de praxeologia pontual.

Para Chevallard (1999), em uma dada instituição I , uma teoria Θ promove várias tecnologias θ_i , cada uma das quais, por sua vez, justifica e torna inteligíveis várias técnicas τ_{ij} correspondentes a tantos outros tipos de tarefas T_{ij} . As organizações pontuais, vão assim se agregando, a princípio, em organizações locais, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centradas em uma tecnologia θ determinada, em seguida, organizações regionais, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ .

A reunião de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k , em uma determinada instituição I , forma o complexo praxeológico $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$, que será denominado de organização global.

Além disso, é preciso destacar que um mesmo discurso sobre uma tarefa do tipo T pode assumir duplamente a função de técnica e de tecnologia. Isto permite de um lado encontrar o resultado pedido (função técnica) e por outro, justificar que é correto o resultado esperado (função tecnológica).

Para Chevallard (1999), a tecnologia é um discurso racional a respeito da técnica, com a função de justificar “racionalmente” a técnica τ , explicar porque ela é correta e ainda, produzir novas técnicas. De acordo com o autor o fato de existir em uma instituição I , uma técnica canônica, isto é, uma técnica conforme às regras existentes, que é em princípio, a única reconhecida e empregada, atribui-se a esta técnica o estatuto de “autotecnológica”, o que quer dizer que ao atuar dessa maneira na instituição I , não exige justificação porque é a boa maneira de atuar (em I). Podemos dizer que a respeito dela se tem toda crença.

Em CDI, nas tarefas do tipo medir a variação instantânea de uma grandeza N , se utiliza a técnica $N'(t) = \lambda N(t)$, que é definida e justificada pelo discurso teórico-tecnológico do limite da razão incremental da variação da função N , ou seja,

$N'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t)$. Esta técnica adquire o estatuto de “autotecnológica”, pois é uma técnica inquestionável, portanto, natural no processo do cálculo da derivada de uma função. Assim, proceder de acordo com esta técnica é uma boa maneira de calcular a taxa de variação instantânea da grandeza N .

Acima das funções de justificação-explicação-produção, segundo Chevallard (1999) e Bosch et al (2004), está a teoria que retoma, em relação à tecnologia, o papel que esta tem em relação à técnica. Para eles, a descrição dos três níveis acima, isto é, (técnica/tecnologia/teoria), é suficiente para dar conta da análise matemática que se quer produzir.

De acordo com os autores acima, as noções de “tarefa”, “técnica”, “tecnologia” e “teoria”, são relativas à função que elas desempenham em uma determinada atividade matemática. Dessa maneira, um objeto matemático (por exemplo, o $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$) pode ser considerada uma técnica para realizar um tipo de tarefas (por exemplo, para calcular a velocidade instantânea de um objeto O , é a derivada da função $s(t)$, do espaço percorrido pelo objeto O , em um determinado instante t), ou servir como um elemento tecnológico comum a um conjunto do tipo de tarefas e técnicas (por exemplo, calcular as taxas de variação instantânea).

Para segundo Chevallard (1999), este modelo de praxeologia é como um bloco de construção em que blocos pontuais se fundem para formar praxeologias locais, que proporcionam mais “*know-how*” suportado pelo mesmo conhecimento; blocos locais se fundem para formar praxeologias regionais quando a mesma teoria justifica várias tecnologias que, por sua vez, justificam várias técnicas que se fundem em praxeologias globais quando compreendem várias teorias.

2.2.2 Visita às obras

CHEVALLARD; BOSCH e GASCÓN (2001) descrevem a sociedade em que vivemos como uma obra ou uma construção humana repleta de obras. Para eles, obra (ou *oeuvre* em francês) são os frutos de ações e de decisões humanas, ou da ausência de decisões, realizadas diante de necessidades colocadas a uma determinada sociedade em um determinado tempo e sob certas condições e restrições. Desta forma, uma obra pode ser uma escola, na qual se colocam alunos em contato com outras obras. Pode ser também uma obra de arte, produzida por um

artesão em sua oficina ou ainda, uma obra pode ser um saber matemático desenvolvido em instituições produtoras de saberes.

Aprofundando ainda mais a reflexão, vamos considerar que a obra “escola”, foi construída em uma dada época a partir da decisão de um grupo de pessoas com o objetivo de atender as necessidades de ensino e aprendizagem de uma população de uma dada região. Para os autores, as obras humanas evoluem, mas não acabam sendo exatamente como seus autores as propuseram, ou seja, podemos decidir construir uma ponte ou instituir uma igreja, mas com o passar do tempo, pode ser que a ponte se desgaste e que a igreja se distancie de seus objetivos iniciais, pois ambas são “obras abertas”, ou seja, em permanente reconstrução.

Também a escola e o que é ensinado nela, o seu currículo, são obras abertas e inacabadas, que evoluem com a sociedade. Para os autores, embora o fato de se ensinar, na escola, o Teorema de Pitágoras e não a elasticidade, é um resultado de decisões humanas, e isso é consequência das leis que regem o desenvolvimento do currículo interno de matemática, o que significa que o currículo de matemática não é arbitrário, assim como também não é a forma como se transforma a matemática em uma instituição escolar.

É importante perceber que aqueles que em algum momento tomaram uma decisão (ou deixaram de tomar a decisão) a respeito de se produzir uma obra, podem deixar de existir com o tempo. Esse fato não faz com que a razão de ser de uma obra também deixe de existir. No entanto, pode ocorrer que os motivos que levaram pessoas a decidir pela produção de tal obra também desapareçam.

Olhando do ponto de vista do desenvolvimento de saberes, parece que algo parecido também acontece. Cada saber matemático foi desenvolvido a partir da vontade humana, para responder a questões que dependiam desses saberes. Desta forma, podemos percebê-los como obras, produtos de decisões de algumas pessoas, para responder às necessidades que se apresentavam para uma certa sociedade em um dado tempo. No entanto, o que acontece com um ou outro saber é que algumas vezes as necessidades deles deixam de existir, e assim também deixam de existir as razões de ser desses saberes.

Para Chevallard (2013), isso não significa que tal saber deixe de fazer parte do currículo de matemática. Eventualmente esse saber é revisitado, não para

responder questões não resolvidas, mas para um tipo de abordagem que o autor chama de “monumentalista”, uma vez que os apresenta como monumentos a serem apreciados pelos estudantes, pois continuam fazendo parte do conjunto de saberes a ser estudados.

Da mesma maneira, algumas razões de ser caem em decadência, desuso, ou ainda, podem se extinguir com o tempo, e se as pessoas não perceberem tal situação, elas continuaram realizando automaticamente, as mesmas ações de quando essas razões ainda eram vivas, sem haver necessidade e sentido de realizá-las dessa maneira, sem considerar as mudanças nas novas maneiras de realizar tais ações.

Segundo Bosch e Gascón (2014), em didática, analisar as praxeologias é um gesto importante para encontrar as possíveis razões de ser, antigas ou atuais, e estudar as condições que as podem fazer aparecer, dando-lhes sentido em diferentes composições institucionais.

Desta maneira, é importante que se questionem os motivos de se requisitar o estudo da derivada no Ensino Superior, de modo a verificar se esta obra é visitada como um monumento ou se existem razões para sua manutenção, continuidade e prosseguimento nesse nível de ensino. Importante realçar que não pretendemos buscar “a razão” de ser, mas as razões de ser de sua permanência.

De acordo com Lucas (2015 apud MINEIRO, 2019, p. 22), “a razão de ser não tem por que ser única, posto que, entre outros motivos, diferentes razões de ser de um mesmo campo podem situar-se em diferentes áreas ou setores da matemática escolar”. Além disso, segundo Mineiro (2019), e de acordo com os pressupostos teóricos da TAD, observar as interações entre alunos, professor e saber que ocorrem em sala de aula, não são suficientes para compreender as condições e restrições que se desenvolvem nos processos de ensino e de aprendizagem. É preciso compreender de alguma forma, todas as instituições que influenciam a transposição do saber sábio, desenvolvido pelos pesquisadores matemáticos, no saber a ser ensino e no saber efetivamente aprendido pelos estudantes, passando pela noosfera e pela escola, até chegar à sala de aula. Para ele, é preciso questionar o saber a ser ensinado, que é aceito pelas instituições de ensino como se ele fosse natural ou não-problemático, uma vez que não tem nada de natural no conjunto de conteúdos que compõe esse saber.

Com base na discussão realizada acima e de acordo com o âmbito da TAD, queremos construir um Modelo Epistemológico de Referência – MER para analisar o Modelo Didático Dominante – MDD que reside de certa forma, nas escolas, nos livros didáticos e em alguns documentos oficiais de modo a estabelecer as condições mínimas para desenvolver um estudo para a derivada no âmbito da Educação Superior.

Na continuação vamos dissertar sobre as dimensões de um problema didático, ou seja, a dimensão epistemológica, a econômico-institucional e a ecológica e sua relação com o Modelo Didático de referência

2.2.3 Dimensões de um Problema Didático

Segundo Gascón (2011), um problema docente é aquele que um professor coloca quando tem que ensinar algum tema da matemática para seus alunos ou por uma inquietação. Esses problemas são elaborados com as noções disponíveis na cultura escolar, que às vezes é importada dos documentos curriculares e que não é questionada. Para o autor, tais problemas se expressam com questões do tipo: o que preciso ensinar a meus alunos? Como posso ensinar? Ou ainda, como posso motivá-los a aumentar seu interesse?

Para o autor, atualmente muitos dos problemas didáticos que aparecem na bibliografia continuam sendo formulados de um modo relativamente próximo aos problemas docentes. Para que um problema didático possa ser considerado como tal, devemos começar explicitando sua dimensão epistemológica.

Desta forma, se considerarmos que P_0 é o problema docente, P_1 , P_2 e P_3 representam as dimensões fundamentais de um problema didático, Gascón (2011) relata que um problema didático pode ser representado pela expressão:

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

Para o autor, P_0 é uma formulação inicial de um problema didático e apesar de ser visível nas primeiras etapas do desenvolvimento da Didática da Matemática, não é considerada uma dimensão que está presente nos problemas didáticos, pois é um problema incompleto e necessita que se acrescente aos menos a dimensão epistemológica P_1 para ser considerado um problema didático. Na expressão esse acréscimo é representado pelo símbolo $\oplus$. O símbolo $\hookrightarrow$ indica que cada uma das

outras dimensões P_i , no caso P_2 e P_3 , precisam ser logicamente anteriores a P_{i+1} . Finalmente, a dimensão P_8 , para o autor, é o problema didático e pode ser considerada como a formulação em que estão contidas as três dimensões fundamentais do problema, as relações entre elas e algumas questões novas que não apareciam antes.

De acordo com Gascón (2011), para formular um problema é preciso utilizar uma descrição e uma interpretação da área da matemática que se está estudando, que chamamos de um Modelo Epistemológico de Referência – MER, que tem sempre um caráter provisório e que possibilita o pesquisador construir e desconstruir as praxeologias que pretende analisar. O MER também é necessário para se estudar o saber sábio antes que seja transformado em saber ensinado, isto é, a transposição didática do saber, de modo que se possa interpretar tal saber, a derivada por exemplo, dentro do sistema de ensino e o porquê é possível encontrar em tal sistema de ensino uns objetos matemáticos e outros não.

Para o autor, o MER irá condicionar a extensão da área matemática mais adequada para se criar o problema didático, os fenômenos didáticos que serão visíveis para o pesquisador, os tipos de problemas que se podem criar e os tipos de explicações provisórias que se pode admitir. Desta forma, o MER é uma dimensão nuclear, pois condiciona fortemente as outras dimensões e deve se descrever conforme a gênese e o desenvolvimento das praxeologias matemáticas envolvidas no problema.

De acordo com Bosch e Gascón (2010) tais Modelos Epistemológicos de Referência são modelos “epistemológico – didáticos”, uma vez que requerem a necessidade de ampliar substancialmente a epistemologia, a fim de integrar o seu objeto de estudo, à gênese e ao desenvolvimento do saber, o seu ensino e utilização e a transposição institucional do mesmo. Desta maneira, a didática da matemática precisa elaborar seus próprios Modelos Didáticos de Referência - MDR, considerados pelos autores como uma ampliação do MER.

A dimensão econômico-institucional de um problema didático, de acordo com Gascón (2001), vai responder à questão de como são as Organizações Matemáticas (OM) e as Organizações Didáticas (OD) na contingência institucional. Para responder a essa pergunta é preciso se apoiar em um MER e em um Modelo Didático de Referência (MDR) apoiado por esse MER. Para o autor, essa questão só aparece

quando tentamos mudar as coisas para uma determinada direção. Ele afirma que a atividade que tem que ser feita para responder as perguntas desta dimensão está ligada a análise clínica da didática que inclui a observação e a descrição detalhada das OM e OD que existem efetivamente em determinadas instituições, utilizando como referência determinado MER e MDR.

Para Gascón (2001), a dimensão ecológica de um problema didático, aborda questões que giram em torno da pergunta, por que as OM e OD são como são nas instituições e que condições se requer para que sejam diferentes dentro do universo do possível?

Além disso, todo problema didático é em certa medida, um problema em que a didática se preocupa com o estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas, e assim, é preciso dar conta das restrições e condições impostas para as praxeologias em todos os níveis de codeterminação didática, desde os mais genéricos, como a sociedade e a civilização, aos mais específicos, como pedagogia e disciplina.

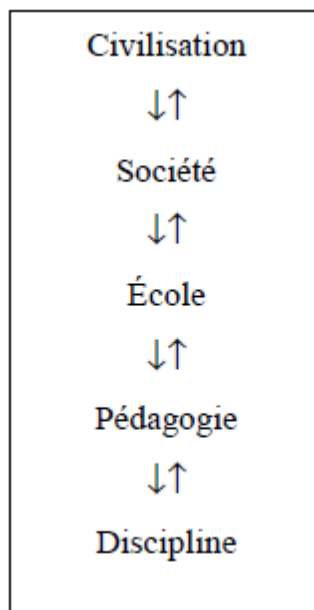
De acordo com Chevallard (2009), restrição é uma condição vista como imutável, de certa posição institucional em um determinado momento. Uma condição é uma restrição que pode ser modificada. Para o autor, a Didática da Matemática estuda em primeiro lugar, as condições e restrições criadas pelos gestos e fatos pessoais ou institucionais, inspiradas por uma intensão didática, que faz com que uma pessoa ou instituição incorpore em seus equipamentos praxeológicos, certos conteúdos.

De acordo com Mineiro (2019), algumas dessas restrições e condições se apresentam no âmbito escolar, e parecem ser bastante visíveis, tais como os saberes prévios dos alunos e dos professores, o material didático disponível na instituição, os recursos tecnológicos e o tempo disponível para o estudo. Por outro lado, parte dessas condições e restrições tem origem em níveis hierárquicos acima de onde são observados, como a escolha dos temas a serem estudados, que é determinada por diretrizes curriculares, ou no direcionamento do orçamento previsto para implantação de laboratórios, de competência dos órgãos governamentais.

Segundo Gascón (2001), a didática se concentrou inicialmente no ensino criado pelo professor. Este enfoque levou a propor condições ativas não criadas pelo

professor, condições que muitas vezes são para ele constrangedoras e criadas em outros níveis do que é chamada de escala de níveis de codeterminação didática esquematicamente mostrados na Figura 2.

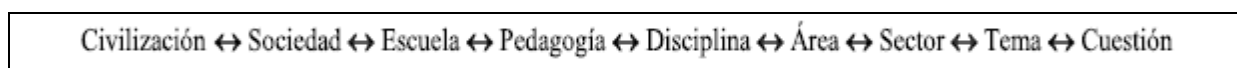
Figura 1 - Escala dos níveis de codeterminação didática



Fonte: Chevallard (2009, p. 6)

Como podemos observar, a hierarquia dos níveis de codeterminação, do mais alto para o mais baixo, são o de Civilização, Sociedade, Escola, Pedagogia e Disciplina. Mais tarde, a TAD ampliou alguns níveis abaixo de disciplina, para ampliar a análise da hierarquia e incluiu os níveis Área, Setor, Tema e Questão, como podemos observar na Figura 3.

Figura 2 - Escala dos níveis de codeterminação didática ampliada



Fonte: Gascón (2011, p. 217)

Desta maneira, questões que desencadeiam um processo de estudo em uma instituição, fazem parte de um tema, que por sua vez está inserido em um setor, que por sua vez se insere em uma área e que pertence a uma disciplina. Se a questão que levou à realização de tal estudo é uma questão matemática então estamos nos referindo à disciplina matemática e seus níveis subjacentes.

Na continuação traremos para a discussão o Percorso de Ensino e Pesquisa - PEP e as Atividade de Estudo e Pesquisa - AEP, que farão parte do desenvolvimento do nosso Modelo Didático de Referência.

2.2.4 Atividades de Ensino e Pesquisa

De acordo com Bosch e Gascón (2010) os Modelos Epistemológicos de Referência não são puramente epistemológicos, mas “epistemológico – didático” uma vez que necessitam ampliar significativamente a epistemologia, de modo a integrar o seu objeto de estudo à gênese e ao desenvolvimento do saber, de seu ensino, e de sua transposição institucional. Assim, a didática da matemática precisa elaborar seus próprios Modelos Didáticos de Referência - MDR, considerados pelos autores como uma ampliação do MER.

Para eles, o MDR é um instrumento que permite autonomia com relação às diferentes instituições que fazem parte do seu objeto de estudo, isto é, a sociedade, a escola, a sala de aula e disciplina. Desta maneira, o professor poderá utilizar o MDR para se apoiar em suas intervenções acerca do problema de ensinar um tal conteúdo e estabelecer as Organizações Matemáticas Locais (OML), para ser capaz de ensinar tal assunto.

Segundo os autores, tais OML podem ser implementadas por Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) e devem contribuir com respostas para o problema do professor e resolver o problema das organizações matemáticas escolares.

Para Chevallard (2009), o desenvolvimento de uma AEP é realizado em um sistema didático $S(X; Y; Q)$, em que X é um aluno ou um grupo de alunos, Y é um professor e Q representa a questão a ser respondida. A finalidade da AEP é produzir uma resposta $R♥$, que o autor apresenta esquematicamente como $[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R♥$, em que M é o milieu, ou seja, um ambiente de trabalho. Segundo ele, para resolver $R♥$ é necessário reunir e organizar um ambiente de trabalho M que reúna recursos novos e antigos que X utilizará.

De acordo com Chevallard (2009), a noção de AEP se concentra em reformar os saberes e suas razões de ser, ela responde à necessidade de fazer viver, isto é, uma análise ecológica, em um ensino baseado no estudo de questões dadas aos alunos.

2.2.5 Os objetos ostensivos e não ostensivos

Os problemas com a “natureza” dos objetos matemáticos e com o seu funcionamento em uma atividade matemática, levaram Bosh; Chevallard (1999 apud ALMOULOU, 2010), a instituir uma dicotomia fundamental que os diferencia em dois tipos: objetos ostensivos e objetos não-ostensivos.

A atividade matemática, segundo a TAD, se realiza mediante uma variedade de registros (escrito, gráfico, verbal, gestual e material). Devido à Matemática ser uma ciência essencialmente abstrata, seus conceitos, não são manipuláveis senão pela mediação de signos. A TAD não atribui valor aos signos e não os classifica em mais ou menos apropriados. Uma figura, uma descrição verbal ou símbolo pode desempenhar o mesmo papel ou possuir o mesmo significado.

Os objetos ostensivos são todos os objetos que têm uma certa materialidade e desta forma, transmitem para uma pessoa uma realidade perceptível: as palavras, os símbolos e os gestos. Podemos dizer que os objetos ostensivos são objetos que podem ser manipulados na realização de uma atividade matemática.

Os objetos não-ostensivos são todos os “objetos” que, como as ideias, as intuições e os conceitos, existem institucionalmente, mas que não podem ser vistos, percebidos ou mostrados por si mesmos. Eles só podem ser invocados ou evocados por uma manipulação adequada de determinados objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um símbolo, um gesto ou todo um discurso).

Por exemplo, o conceito de “derivada” é um objeto não-ostensivo que é identificado e ativado, por meio da escrita “ $f'(x)$ ” ou “ y' ” ou ainda “ dy/dx ”, ou da palavra (escrita ou falada) derivada, ou por meio de gráficos, que são objetos ostensivos. Efetivamente, ninguém, em tempo algum, colocou a mão no objeto função. O desenvolvimento de uma técnica se traduz pela manipulação de objetos ostensivos regulados pelos objetos não-ostensivos.

Para Almouloud (2010), em toda atividade matemática existe a coativação de objetos ostensivos e de objetos não-ostensivos. Em uma abordagem antropológica, a realização de toda tarefa envolve necessariamente a manipulação de objetos ostensivos regulados pelos objetos não-ostensivos, fazendo com que os ostensivos se tornem a parte perceptível da atividade.

Dessa forma, os objetos ostensivos: fórmulas, gráficos, tabelas, expressões verbais e outros são os ingredientes básicos e sua manipulação faz emergir o saber-fazer e o saber a respeito da derivada.

Segundo Sales (2010 apud Costa, 2015), nessa teoria é fundamental admitir que a “apropriação” de um objeto não-ostensivo não se encontra diretamente ligada a um ostensivo. A “apropriação” de um conceito matemático é resultado de diversos fatores, projetados em uma organização didática ou de uma atividade matemática complexa em que múltiplos recursos são mobilizados.

Neste trabalho utilizaremos como objetos não-ostensivos as funções, os limites, a derivada e a integral e os seus respectivos objetos ostensivos, representados pelos signos $f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$, $\int f(x)dx$.

2.3. justificativa

A experiência na coordenação e na sala de aula do curso de Licenciatura em Matemática, como já mencionamos na introdução, nos permitiu conhecer algumas das dificuldades dos alunos a respeito da noção de derivada.

Em uma ocasião, propusemos uma atividade evidenciando os conhecimentos do CDI, para os alunos do último semestre do curso, para analisar o aprendizado desses alunos, a respeito de derivada. Ao desenvolver a atividade, verificamos que grande parte desses alunos apenas sabia resolver tarefas algorítmicas, tais como obter a derivada de uma função real dada. Eles não relacionavam adequadamente a taxa de variação e o coeficiente angular da reta tangente a uma curva, em um dado ponto do domínio da função com a sua derivada.

Para alguns desses alunos, a derivada de uma função deveria ser a equação da reta tangente à curva do gráfico dessa função. Um deles ficou surpreso quando ao obter a equação da reta tangente de uma função polinomial de grau 3, em um certo ponto, obteve como derivada da função, uma função polinomial de grau 2, e afirmou: “[...] mas o gráfico dessa derivada não é uma reta!”

Esse conflito também foi verificado em alguns experimentos de ensino, na tese de Villarreal (1999). Para alguns sujeitos do experimento da autora, o conflito estava nas suas concepções de reta tangente e suas imagens gráficas. Numa das questões da pesquisa foi solicitado que se traçasse os gráficos de $y = x^2$ e de sua derivada $y = 2x$. Em algumas das respostas apareceu que a reta do gráfico da função derivada $y = 2x$ não era tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, pois seus gráficos não são tangentes.

Esse e outros fatos observados ao longo da nossa carreira, nos motivaram a procurar por pesquisas que explicassem as dificuldades e confusões que os alunos apresentam ao longo de sua jornada acadêmica, em que a derivada de uma função está presente.

No artigo de Tall (1985), cujo objetivo era de discutir algumas das dificuldades encontradas ao estudar o Cálculo Diferencial e Integral e delinear uma abordagem alternativa para especialistas e estudantes de matemática, ele relata que a linguagem informal do CDI pode causar dificuldades imprevistas, ou seja, os alunos têm problemas na interpretação em frases como "tende a um limite" ou ainda, "tão perto quanto quisermos."

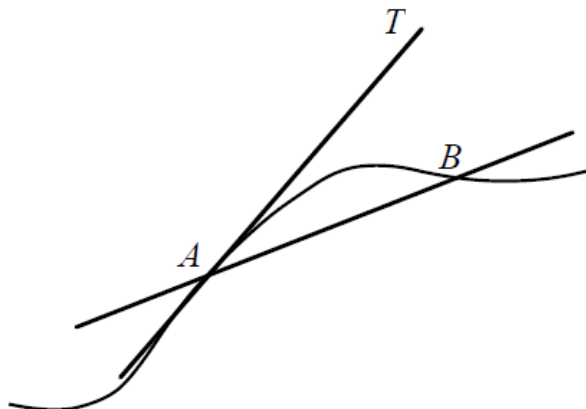
O autor reconhece, que: "[...] o primeiro encontro com o Cálculo geralmente é por meio da ação de considerar dois pontos A e B, em um gráfico e ver como a corda AB tende à tangente em A, com B aproximando-se de A" (TALL, 1985, p. 1). Ele exemplifica essa situação citando Bernard Cornu, que relata que os alunos dizem que a sequência: 0,9; 0,99; 0,999; ..., tem limite 1, mesmo que a quantidade de noves que se coloca após a virgula seja muito grande, o número nunca chegará a um.

De acordo com o autor, ao ver uma corda se aproximar de uma posição tangencial, pode ser que os alunos tenham o sentimento de ver a corda quase chegando lá, mas não completamente, como alegou um desses alunos: "a corda não fica perto da tangente, porque a reta é infinita, mesmo se as linhas parecerem estar perto, no infinito elas ainda estão muito longe " (TALL, 1985, p. 02).

O autor quer alertar que os professores de matemática devem ter cuidado com as explicações dadas aos alunos, pois eles podem ter as suas próprias interpretações, que podem diferir das dos matemáticos.

Ele relata que alguns alunos ao avaliar a Figura 1, veem uma imagem estática, sem movimento, outros veem movimento de B para A. Assim, com essa variedade de interpretações, a afirmação "como $B \rightarrow A$, a linha através de AB tende à tangente em A" é considerada falsa por uma minoria significativa de alunos.

Figura 3 – O que acontece com $B \rightarrow A$?



Fonte: Tall (1985, p. 1)

Segundo o autor, os alunos sentem-se aliviados quando eles passam dos "princípios básicos" para o algoritmo formal de derivar polinômios. Mas quando são apresentados a notação $\frac{dy}{dx}$, um número significativo de alunos pensa que dy e dx são números muito pequenos, mas diferentes de zero. Mas os alunos também disseram que $\frac{dy}{dx}$ é somente um símbolo e não uma razão. Esse significado pode gerar conflitos e contradições quando eles se depararem com a "regra de cadeia" na derivação de funções compostas, ao serem informados que na expressão $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$, eles não podem cancelar o dx.

O autor também discute o uso do computador como recurso de sala de aula de matemática, pois permite uma abordagem cognitiva para o CDI, sem a necessidade do uso dos limites, com base no fato de que a derivada não é apenas a inclinação da tangente, mas é também a inclinação do próprio gráfico.

Em Godino et al (2011), os autores apresentam uma síntese de conhecimentos acerca da derivada, relativos ao componente epistêmico do conhecimento didático-matemático, para apresentar uma reconstrução do significado da noção de derivada. Segundo os autores, esse significado constitui um aspecto essencial do conhecimento didático-matemático do professor de matemática. Para eles, a formação matemática e didática dos futuros professores é um campo de

investigação que merece a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática, pois o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos depende da formação de seus professores.

Os autores relatam que tem ocorrido um aumento nas pesquisas a respeito da formação de professores de matemática e que um dos problemas que mais apresenta interesse é o de determinar qual o conhecimento didático-matemático requerido para ensinar matemática. Para eles, o professor deveria ter mais do que conhecimentos matemáticos para desenvolver sua prática com eficiência, de modo a facilitar a aprendizagem dos alunos.

Para os autores, as questões relativas ao ensino e à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão sendo investigadas intensamente por pesquisadores da Educação Matemática. Em especial, questões a respeito da derivada, que é considerada uma noção chave no ensino do CDI, estão sendo objeto de maior atenção, desde questões acerca das abordagens teóricas, como questões que tratam das concepções dos estudantes e dos tipos de erros deles, até questões de seu ensino.

De acordo com a discussão acima e com os dados apresentados na revisão bibliográfica, percebemos que o ensino da derivada, tanto no ensino médio como no superior, apresenta problemas que merecem a dedicação e aproximação daqueles que estão inquietos com a dificuldade na compreensão desses conhecimentos.

Verificamos na revisão bibliográfica que a utilização da derivada está presente em muitas situações da Matemática, assim como nas outras ciências. O cálculo da velocidade instantânea de um objeto, o cálculo de taxas de variação de grandezas, o cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma dada curva, e a obtenção de valores mínimos e máximos de uma função são alguns exemplos. Nas outras ciências, podemos citar por exemplo, a utilizações da derivada para obter as funções marginais da Economia, como receita marginal, lucro marginal e custo marginal, as razões diretas e a taxa de variação relativa, entre outras.

Diante do exposto, nos interessa verificar se a derivada, em algum momento, ganha o estatuto de objeto matemático, ou se ela se resume ao exercício algorítmico de transformar funções em outras funções ou ainda, ser uma ferramenta útil para resolver problemas de variabilidade.

Problemas docentes são formulados, assumindo-se as noções que se quer ensinar como também as ideias dominantes de uma dada cultura escolar. Para Farras (2013) na formulação de um problema docente geralmente se assume da maneira crítica a forma como se interpreta na cultura escolar a matemática envolvida no problema em questão. Já para Gascón (2011) problemas docentes são formulados com as noções disponíveis na cultura escolar, que em muitas ocasiões são obtidos de documentos curriculares. Tanto as noções como as ideias dominantes da cultura escolar não se questionam.

Em particular, um problema docente, com relação à derivada, pode inicialmente apresentar questões como “o que tenho que ensinar a meus alunos a respeito de derivada?” ou ainda, “como devo ensinar derivada?”. De modo a transformar as questões acima em um problema de investigação didática, na área da TAD, é preciso questionar a forma de interpretar a derivada, isto é, construir um Modelo Epistemológico Dominante para a derivada, não só nas instituições escolares, mas também na noosfera e em muitas pesquisas em Educação Matemática.

No entanto, embora esse tipo de preocupação se encontre na formulação inicial de algumas pesquisas em Educação Matemática, ela se mostra insuficiente, devido à sua incompletude, para a elaboração de um problema didático, ou seja, é necessário que se acrescente e ela pelo menos a dimensão epistemológica do problema didático de pesquisa, mas é sugerido que se acrescente também outras dimensões, como a econômico-institucional e a ecológica.

Segundo aponta nossa revisão de literatura, ainda faltam estudos que se preocupem com as organizações matemáticas e didáticas da derivada no ensino superior. A nosso ver, essa tarefa implica tomar como foco de investigação o modo como o estudo da derivada se apresenta organizado, seja nas propostas curriculares, seja nos livros didáticos e manuais adotados para esse nível de ensino.

Além disso, ainda falta questionar o saber a ser ensinado, ou seja, desviar os olhos na direção das instituições de ensino, a fim de compreender como as condições e restrições que elas apresentam, de acordo com a TAD, afetam o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da derivada, nesse nível de ensino. Assim, no que segue apresentamos nosso referencial teórico.

2.4. Delimitação do Problema

Para realizar esta investigação pretendemos, construiremos um MER a respeito da deriva, as três dimensões do problema didático para o ensino de derivada e explicitaremos o modelo didático dominante de modo a apontar as condições e restrições para o ensino deste objeto. De posse destas ferramentas, trataremos de construir um MDR e as AEP para o primeiro ano do ensino superior de cursos de Tecnologia voltados para a área das Engenharias.

Conforme apontamos em nossa justificativa, esse trabalho se origina a partir de uma inquietação, que surgiu em nossas aulas de CDI e em atividades desenvolvidas com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, que tem nos acompanhado desde então, que se refere à falta de compreensão do conceito de derivada.

Em nossa prática docente e em nossa trajetória de pesquisa em Educação Matemática essa inquietação ganhou força, ao ser confrontada com outro tipo de preocupação, que o professor carrega ao ter que abordar o tema junto a seus alunos, ao se questionar a respeito do que deve ensinar, por que ensinar e como ensinar derivada.

Para nos inspirar na elaboração nesta parte do trabalho, analisamos a pesquisa de Mineiro (2019), que se preocupou com o ensino de inequações e cujas escolhas teóricas e forma de buscar respostas, são semelhantes às nossas.

Para o autor, embora esse tipo de preocupação se encontre na formulação inicial de algumas pesquisas na área da Educação Matemática, ela se mostra insuficiente para a elaboração de um problema didático. Assim, é necessário que se acrescente à formulação do problema, além da dimensão epistemológica do problema didático de pesquisa, outras dimensões, como a econômico-institucional e a ecológica, já abordados anteriormente. Acrescenta que ao adicionar outras dimensões, é necessário que se investigue no que consiste a obra (o objeto de estudo, o saber, que em nosso caso corresponde à noção de derivada) que se pretende estudar em uma instituição, isto é, o ensino superior, levando em consideração o modo como é interpretada pelos membros que compõem essa instituição, de acordo com um conjunto de condições e restrições institucionais que afetam o acesso à essa obra por um conjunto de indivíduos.

Desta maneira, nos deparamos com pelo menos três dos componentes ligados ao problema didático associado aos processos de ensino e de aprendizagem de derivada, que de acordo com os pressupostos da TAD, são fundamentais:

- ✓ O saber associado à derivada e a procura pelas razões que levaram à sua gênese e desenvolvimento.
- ✓ As organizações matemáticas e didáticas que se desenvolvem na Ensino Superior para o estudo de Derivada.
- ✓ As condições e restrições que afetam o desenvolvimento dessas organizações.

Cada um desses componentes se refere a uma dimensão específica do problema didático relativo a derivada: o saber matemático em questão, que associamos à dimensão epistemológica; a identificação de características do Modelo Epistemológico Dominante – MED e seu consequente Modelo Didático Dominante – MDD, feita por meio da observação e análise das organizações que se desenvolvem no meio institucional considerado e que associamos à dimensão econômico-institucional; e o levantamento das condições e restrições que afetam essas organizações nas instituições, associada à dimensão ecológica.

Assim, sustentados pela revisão de literatura que fizemos e incomodados por não encontrar trabalhos que apresentem um Modelo Epistemológico de Referência (MER) da derivada, assim como seu Modelo Didático associado, nosso problema de pesquisa é apresentar um Modelo Didático de Referência (MDR), e algumas Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), a partir da análise das três dimensões do problema didático, à luz da TAD, que podem vir a se tornar um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) para algum pesquisador que queira dar continuidade a este estudo.

Para resolver nosso problema de pesquisa e nos guiarmos pela trajetória de sua realização, definimos a seguinte questão de pesquisa que direcionou nosso esforço de investigação: **Quais as contribuições que os estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico podem dar para o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência amparado por Atividades de Estudo e Pesquisa voltadas ao ensino de derivada na Educação Superior?**

Tal questão nos permite definir o nosso objetivo geral, que consiste em realizar estudos que nos permitam compreender aspectos ligados às dimensões

epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático associado a derivada, capazes de contribuir com o desenvolvimento de um MDR, como base para a proposição de AEP voltadas ao ensino de derivada no Ensino Superior. Ao considerar a abrangência dos estudos que serão desenvolvidos, pensamos em destacar cinco objetivos específicos, que delimitarão o foco de nossa investigação no sentido de alcançar o objetivo geral e que se relacionam a cada um desses estudos, conforme segue:

1) Identificar os conhecimentos e as razões que, em um dado tempo, tornaram possível e necessário o desenvolvimento do conceito de derivada.

2) Criar um MER associado à derivada.

3) Identificar em que consiste o MED que orienta o estudo de derivada na Educação Superior e o seu consequente MDD, por meio da análise das propostas curriculares oficiais, de manuais e de livros didáticos, avaliando seu alcance e seu limite quanto a possíveis articulações com outros ramos da matemática e/ou das outras ciências.

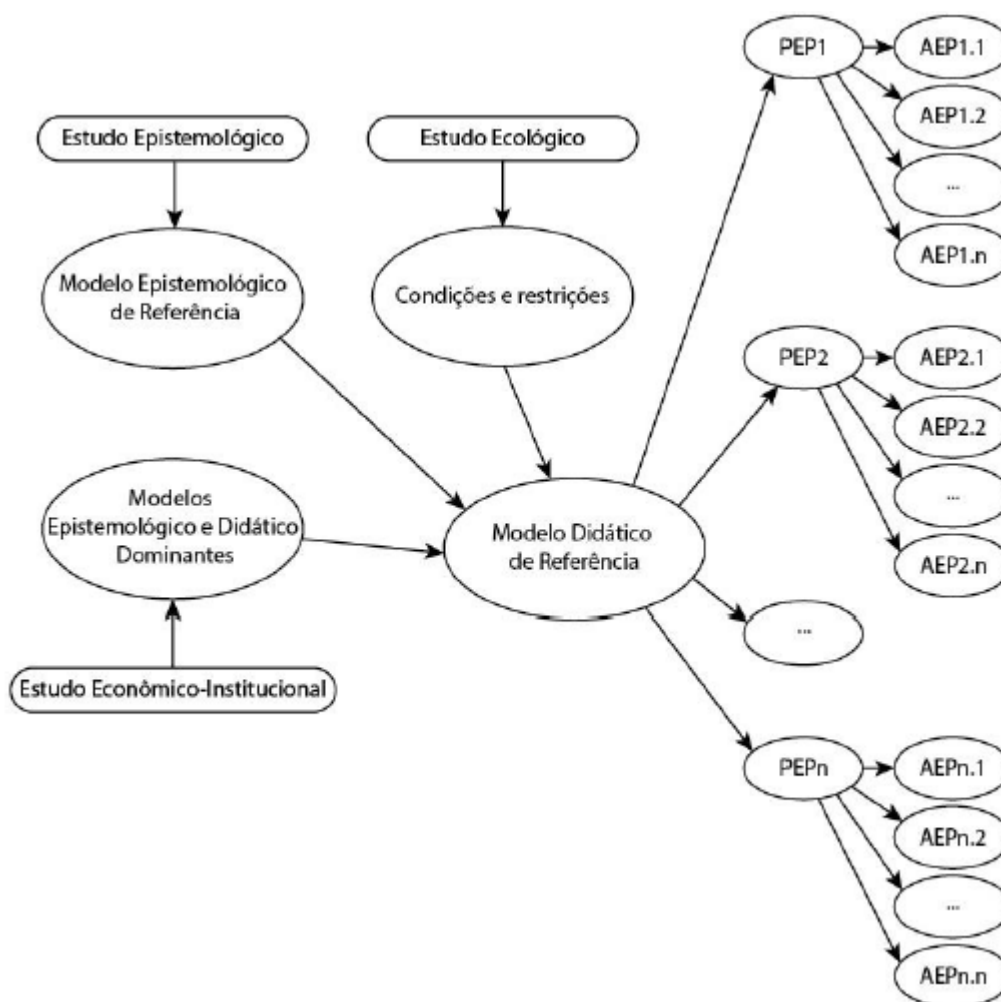
4) Identificar que condições e restrições regulam as organizações matemática e didáticas para o ensino do Derivada na Educação Superior.

5) Propor um MDR, fundamentado nas possíveis contribuições advindas dos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico, capaz de nortear a criação de AEP para o estudo de derivada.

De acordo com os resultados encontrados na revisão de literatura que indicou a ausência de trabalhos que investigaram, de forma simultânea, possíveis contribuições de aspectos epistemológicos, econômico-institucionais e ecológicos para o estudo da derivada no Ensino Superior, desenvolveremos um estudo epistemológico, que nos possibilite a criação de um MER.

Também desenvolveremos um estudo econômico-institucional, baseado no MER, que permitirá elaborar um MED e seu consequente MDD e um estudo ecológico, que nos permitirá verificar que condições e restrições, em diferentes níveis de codeterminação didática, afetam o aprendizado dos alunos da derivada. Esses estudos permitirão, como mostra a Figura 4 a elaboração de um MDR, capaz de fundamentar a criação de PEPs constituídos, por sua vez, por AEP, para o ensino de derivada no Ensino Superior.

Figura 4 - Relação entre aspectos epistemológicos, econômico-institucionais e ecológicos



Fonte: Mineiro (2017, p. 53)

A fim de mostrar como desenvolveremos nosso trabalho nesse sentido, passamos a apresentar a metodologia e os procedimentos metodológicos que guiaram nossa pesquisa.

2.5. Metodologia e Procedimentos metodológicos

A pesquisa, seja ela realizada na academia, no espaço da escola básica ou no espaço de formação inicial ou continuada, está ligada ao questionamento que se faz da realidade e da discussão dos problemas sociais. Lüdke e André (1986, p.1) relatam que para realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas a respeito de determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado acerca dele. Esse confronto emerge de um problema que intriga o pesquisador ou um grupo de pesquisadores. O problema surge

de inquietações, curiosidades, questionamentos em relação à realidade como ela se apresenta.

Normalmente os tipos de pesquisa são classificados de acordo com os objetivos elencados pelo pesquisador, de modo a se responder à questão de pesquisa e a qual método para a coleta de dados utilizar. Para Kothari (2004 apud MINEIRO, 2019), de acordo com seus objetivos, as pesquisas podem ser classificadas quanto ao tipo em qualitativas, descritivas, aplicadas ou exploratórias.

Pesquisas Qualitativas, em que os objetivos se referem a fenômenos que envolvem alguma qualidade ou tipificação, ou Pesquisas Quantitativas, baseadas na utilização de métricas para estudar fenômenos que podem ser expressos em termos de quantidade.

Pesquisas Descritivas, nos casos em que o objetivo está relacionado à descrição de uma realidade, sem que o pesquisador tenha controle acerca das variáveis do problema; ou Pesquisas Analíticas, nas situações em que o pesquisador usa fatos ou informações disponíveis e os analisa, a fim de elaborar a avaliação crítica dos dados coletados.

Pesquisas Aplicadas, em que o objetivo consiste em encontrar uma solução para um problema imediato enfrentado por um grupo de indivíduos ou organização; ou Pesquisa Fundamental (ou Pesquisa Básica) em que o esforço de investigação se dá principalmente na observação de generalizações e na busca por uma teoria que explique o fenômeno estudado (como ocorre, por exemplo, com pesquisas em matemática pura).

Pesquisa Exploratória, em que as hipóteses não existem de antemão e são desenvolvidas ao longo do percurso da pesquisa. Nesse tipo de pesquisa busca-se aprofundar as particularidades de um fenômeno de forma a compreendê-lo melhor; ou Pesquisa Formalizada, substancialmente estruturadas e com hipóteses específicas a serem testadas.

Nesses termos, ao tentar situar nossa pesquisa de acordo com essa classificação, entendemos que se trata de uma pesquisa qualitativa (pois nosso interesse vem dos tipos de contribuições advindas dos estudos epistemológico, econômico e ecológico), analítica (uma vez que não apenas descrevemos uma situação, mas a avaliamos de forma crítica), aplicada (pois ao procurar soluções para

a falta de significado do conceito de derivada, como foi relatado anteriormente) e exploratória (ao verificar que as hipóteses que levantamos foram desenvolvidas a partir de nossas análises iniciais, e não definidas previamente, e ao procurarmos nos familiarizar com as especificidades do saber relativo à derivada de uma função e na forma como condições e restrições institucionais afetam a sua transformação com relação ao saber a ser ensinado).

Como foi apontado ao delimitar nosso problema de pesquisa, um de nossos objetivos específicos consiste em desenvolver um MER, que por sua vez, torna indispensável a realização de um estudo epistemológico, em busca dos saberes e das razões que, em um dado tempo, levaram à criação e ao desenvolvimento do conceito de derivada. Esse estudo foi levado a cabo por meio da análise de livros-texto, documentos históricos e livros de história da matemática. Ao procurarmos identificar aspectos e características do MED que orienta o estudo de derivada no Ensino Superior, desenvolvemos um estudo econômico-institucional, tomando como fonte de pesquisa a análise de documentos oficiais que regulam a educação no Brasil, como propostas curriculares nacionais, Planos de Ensino de diferentes instituições, a respeito do Cálculo Diferencial e Integral, leis, decretos, livros e manuais didáticos.

Para desenvolver o estudo ecológico, recorreremos mais uma vez às propostas curriculares nacionais, além de consultas à documentação oficial que regula os cursos de Engenharia e de Tecnologia no Brasil, que nos possibilitou identificar que condições e restrições regulam as praxeologias que se desenvolvem para o estudo de derivada na Educação Superior.

Desta forma, consideramos que a nossa pesquisa se apoia na leitura e análise de livros e documentos históricos, propostas curriculares, documentos oficiais, livros e manuais didáticos que possam ser usados como fonte de informação a respeito do comportamento. Desta forma, podemos afirmar que nosso trabalho é classificado como uma análise documental.

A Análise Documental pode se tornar uma técnica de abordagem de dados qualitativos valiosa, seja expondo aspectos novos de um problema, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas. Ela busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões de interesse

De acordo com Phillips (1974 apud LUDKE e ANDRÉ, 1986), documentos são materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação a respeito do comportamento humano, tais como leis e regulamentos, normas, cartas, diários pessoais, jornais, revistas, livros, estatísticas, arquivos escolares e outros. Os documentos representam uma fonte natural de informação dos quais podemos retirar evidências que fundamentem afirmações e declarações do pesquisador. Eles oferecem como vantagem um baixo custo e permitem a obtenção de dados quando o acesso aos sujeitos é impraticável, ou ainda, quando a interação com os sujeitos pode alterar seu comportamento ou seu ponto de vista.

Para Hosti (1969 apud LUDKE e ANDRÉ, 1986), existe pelo menos três situações em que o uso da análise documental é apropriado. A primeira é quando o acesso aos dados é problemático, ou seja, ou o pesquisador tem limitações de tempo ou deslocamento, ou o sujeito de investigação não está mais vivo. A segunda é para quando se pretende ratificar e validar informações obtidas por outras técnicas de coleta, como, por exemplo, observação, questionários ou entrevistas. E a terceira, quando o interesse do pesquisador é estudar o problema a partir da expressão dos indivíduos, ou seja, quando a linguagem dos sujeitos é fundamental para a investigação.

Guba; Lincoln (1981 apud LUDKE e ANDRÉ, 1986) apontam algumas vantagens quanto ao uso de documentos como fonte de pesquisa, como por exemplo o fato de que os documentos persistem ao longo do tempo, sendo uma fonte rica e estável de informação, que podem trazer evidências que reforçam as afirmações e conclusões do pesquisador, além de permitir a obtenção de dados, até mesmo nos casos em que o acesso ao sujeito é impossível, como no caso de morte.

Quanto às críticas apontadas por esses autores, podemos destacar entre as principais o fato de que os documentos podem consistir em uma amostra não representativa, visto que nem tudo é registrado, além do fato de que a escolha dos documentos pode ser feita de forma arbitrária pelo pesquisador.

Argumentamos, em oposição, que não definimos o MER para a derivada como único, mas um MER, entre tantos outros possíveis e que podem ser diferentes entre si, conforme as escolhas feitas pelo pesquisador. Além disso, é importante considerar que os próprios documentos não são neutros, pois refletem valores, crenças, preferências, sentimentos e a ideologia de seus autores. Desta forma, a

escolha realizada pelo pesquisador nada mais é do que uma variável a mais, entre tantas outras.

Nos próximos capítulos discutiremos nossa investigação acerca das dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático associado ao estudo da derivada.

3 ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES

Neste capítulo vamos iniciar o estudo das três dimensões do problema didático, começando pela dimensão epistemológica. Nesta primeira parte, vamos elaborar um estudo histórico da gênese e desenvolvimento da derivada e a partir deste estudo, vamos construir o seu respectivo MER.

3.1 A Dimensão Epistemológica para o ensino da Derivada

Considerando que toda atividade humana pode ser compreendida por meio da noção de praxeologia, de um ponto de vista antropológico, procuramos nesse estudo identificar as razões que levaram ao desenvolvimento dos saberes associados à derivada. Verificamos que, de acordo com época e com as questões que se apresentavam, existem diferentes formas de interpretar a matemática, isto é, diferentes modelos epistemológicos, que apresentam diferentes tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Para Mineiro (2019), um modelo epistemológico,

... comporta um conjunto de praxeologias, organizadas por uma rede de questões e respostas, por outro lado, pode apresentar limitações ou tornar-se obsoleto, ou simplesmente ineficaz, quando a questão, ou as questões, que demandam resposta não podem mais ser respondidas pelas praxeologias que compõem esse modelo. Nesses casos, diante de tarefas que não podem ser resolvidas pelas técnicas já conhecidas, torna-se necessário o desenvolvimento de novas técnicas que desencadeiam por vezes o surgimento de novos modelos epistemológicos, mais adequados às especificidades da situação. (MINEIRO, 2019, p.57)

3.1.1 Um Estudo Histórico da Gênese e Desenvolvimento da Derivada

3.1.1.1 Um prenuncio do Cálculo da antiguidade à idade média (excluir. Há erros)

O Cálculo Diferencial e Integral foi um desenvolvimento que ocorreu gradualmente e com muita dificuldade, cuja manifestação de suas ideias começou com os gregos, que analisaram sistematicamente os conceitos de grandezas.

Tentando buscar uma unidade para a geometria e para a natureza, os pitagóricos desenvolveram a teoria da comparação de grandezas, que mais tarde

levou Arquimedes a elaborar o método da exaustão, muito parecido com o moderno método de integração.

Para Boyer (1949), o método da exaustão corresponde a um conceito intuitivo, descrito em termos de imagens mentais do mundo. A noção de limite era considerada um conceito verbal, isto é, uma explicação que era dada em termos de palavras e símbolos como números, sequências infinitas, sem qualquer visualização mental.

As ideias de indivisíveis, infinito e contínuo que os gregos utilizavam estavam apoiadas na percepção intuitiva, tendo a geometria como seu instrumento de análise das situações. Além disso, a dificuldade de distinguir o abstrato do concreto e a dificuldade de produzir definições adequadas, com uma elaboração lógica do conceito, era um ponto fraco dos gregos.

Segundo Boyer (1949), diante dessas dificuldades, Aristóteles adotou o método científico indutivo e como consequência disso, ele utilizou somente o infinito potencial e recusou o uso do infinito atual, embora ele distinguísse esses dois tipos de infinito. Aristóteles afirmou que "qualquer coisa além do poder da compreensão, está além do reino da realidade". Esta afirmação o conduziu ao seu princípio fundamental de que o desconhecido existia apenas como potencial. Desta maneira, de acordo com o autor, Aristóteles se opôs à ideia fundamental do Cálculo, a de taxa de variação instantânea, pois como tinha tomado a posição de adotar o infinito potencial, a extrapolação do pensamento matemático na direção da derivação e da integração ficaria reduzida. Isso o levou a afirmar que "nada pode estar em movimento num presente, ... nem pode esta coisa estar em repouso num presente".

Ao recusar a noção de velocidade instantânea, Aristóteles estava de acordo com as limitações da percepção sensorial. Para ele, apenas a velocidade média, ou seja, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, era compreensível. Muito mais tarde, por meio do uso da noção de limite, definiu-se mais rigorosamente a noção de velocidade instantânea, com a expressão $v = \frac{ds}{dt}$. Aqui, podemos perceber que a discussão em torno da velocidade instantânea indica uma razão de ser do desenvolvimento da Cálculo Diferencial e integral.

Segundo o autor, para que houvesse um avanço no método geométrico grego, outros avanços em outras áreas do conhecimento matemático precisariam ser efetivados, como o desenvolvimento de uma álgebra abstrata simbólica mais elaborada e a introdução da noção de variação (variável e função) tanto na álgebra

quanto na geometria. Os conceitos de variabilidade e funcionalidade, isto é, função e variável, constituem um eixo fundamental para o desenvolvimento do Cálculo.

Resende (2003) corrobora a afirmação e ainda contribui, informando que na filosofia grega se percebe a ideia de movimento, no entanto na matemática grega percebe-se uma ausência do conceito de variabilidade e de funcionalidade, exceto, entretanto, no método da tangente de Arquimedes.

A dificuldade de se apropriar e desenvolver a noção de variabilidade não foi característica exclusiva dos gregos. Os matemáticos da Europa medieval também tiveram as mesmas dificuldades. Segundo Boyer (1949), durante o período medieval, o desenvolvimento da matemática dos árabes e dos hindus apresentava pouco interesse a respeito de questões que levassem ao desenvolvimento do CDI. Para ele, o interesse dos hindus e árabes pelo desenvolvimento algébrico e dos filósofos escolásticos pelos problemas do contínuo foram a base necessária para o processo de transformação no paradigma da matemática.

Para Boyer (1949), os hindus se interessaram mais pelos aspectos aritméticos e computacionais da matemática, do que pelas características geométrica e racional da matemática grega. Eles ignoraram a distinção grega entre a discretude do número e a continuidade da grandeza geométrica. No entanto, apesar do grande interesse pelos números, os hindus tiveram dificuldades operacionais com o número zero, pois apesar de eles não considerarem as formas indeterminadas e os procedimentos que envolviam a noção de limite e infinitesimais, a construção do sistema de numeração foi a principal contribuição dos hindus para o cálculo e para a própria matemática.

No entanto, foram os árabes que preservaram e transmitiram para a Europa a produção matemática dos gregos. Sem eles essa produção poderia ter sido perdida. Além disso, os números dos hindus foram levados à Europa por seu intermédio. Os árabes tinham interesses pela álgebra e aritmética dos hindus e pela geometria estética e formal de Euclides, Arquimedes e seus pares. No entanto, os árabes pouco contribuíram com o desenvolvimento das ideias básicas do CDI.

Do outro lado do mar Mediterrâneo, na Europa, no período medieval, discussões a respeito do estudo quantitativo das variações começavam a ser realizadas e admitidas como um conceito matemático. As discussões em que a variação de quantidades, chamadas de latitude das formas, ganhavam espaço.

Segundo Resende (2003), a palavra “forma” aqui empregada está associada à ideia de “intensidade”, e esta não é propriedade apenas da velocidade, mas pode estar associada a outras grandezas como, por exemplo, aceleração, densidade etc. A latitude de uma forma era a taxa de variação da forma, e a discussão se dava em termos do crescimento (intensão) ou decrescimento (remissão) da forma, isto é, em termos das alterações pelas quais a qualidade é adquirida ou perdida.

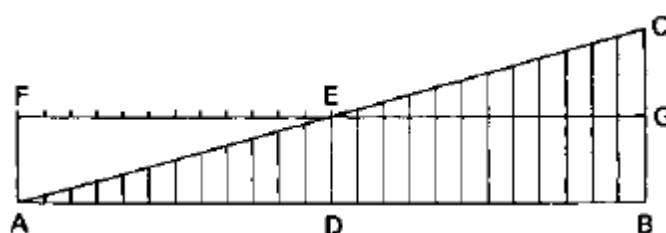
Para BOYER (1992), a matemática na Europa Medieval estava com um nível muito abaixo daquele da civilização grega antiga. No entanto, por volta do século XIV, uma certa originalidade resultou em um avanço em relação a matemática e a física arquimediana, que era essencialmente estática, uma vez que o estudo das mudanças dinâmicas era mais adequado à discussão filosófica e qualitativa do que uma formulação quantitativa. Nesse período começou-se a se questionar se um objeto se move com velocidade variável, até que ponto ele se moverá em um dado tempo? E ainda, se a temperatura de um corpo varia de uma parte do corpo para outra, quanto calor existe no corpo todo? Podemos perceber aqui questões que são tratadas com o CDI, mas que os contemporâneos deste período não herdaram da antiguidade, de modo que os sacerdotes das universidades francesas, inglesas e italianas desenvolveram sozinhos um cálculo integral primitivo.

Esses questionamentos já trazem indícios da razão de ser do Cálculo Diferencial e Integral, tanto para a utilização da noção de integração como para a de derivação. Na continuação, podemos perceber um rudimento da interpretação da integração, por meio do cálculo de áreas. No entanto, apesar de a discussão tratar da velocidade média e instantânea, ainda não vemos indícios da noção de derivada.

Segundo o autor, Nicole Oresme foi um dos representantes desses sacerdotes e estudando a distância percorrida por um objeto em movimento com velocidade variável, ele associava os instantes de tempo dentro de um intervalo aos pontos de um segmento de reta horizontal, que ele chamava linha de longitudes, e para cada um desses pontos ele traçava um segmento de reta vertical, chamado latitude, cujo comprimento era a velocidade do objeto no tempo correspondente, e conectando as extremidades dessas latitudes ele obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo, que hoje chamaríamos de gráfico de uma função. Oresme tinha a clareza que a área sob esse gráfico representava a distância percorrida, uma vez que é a soma de todos os incrementos

de distancias correspondentes às velocidades instantâneas. Ele classificava essas variações como uniformes (constantes) e diformes (não constantes) e ainda dividia esta última em outros dois tipos, variações uniformemente diforme e diformemente diforme. Oresme afirmava que se um corpo se move com velocidade uniformemente diforme, isto é, com taxa de variação uniforme, a partir do repouso em A, na figura 5, então o seu gráfico será uma linha reta, formando um triângulo retângulo com a base AB (longitudes) e a altura BC (latitude), e concluiu corretamente que a distância percorrida pelo objeto é a mesma que percorreria um outro corpo movendo-se pelo mesmo espaço de tempo com velocidade uniforme igual a DE, ou seja, velocidade do primeiro objeto no ponto médio do intervalo de tempo.

Figura 5 - Representação de velocidade de Oresme



Fonte: Boyer (1992, p. 09),

Para Boyer (1992), Oresme argumentava que a representação de um objeto em movimento durante o tempo AB com velocidade DE é igual ao retângulo ABGF, e a distância percorrida é a sua área, que é igual à área do triângulo ABC. Para o autor, tal argumento hoje equivale ao resultado da: $S = \int_0^T Kt \, dt = \frac{KT^2}{2}$ e que foi incontestavelmente expresso por Galileu dois séculos e meio mais tarde. Eles imaginavam que as áreas do triângulo e do retângulo eram formadas por uma quantidade de segmentos de reta verticais, indefinidamente grande, pois estavam fazendo uso da antiga noção de elementos geométricos. Segundo o autor, no estudo de Oresme não havia nenhum conceito equivalente ao da atual derivação. Podemos imaginar a declividade da curva da velocidade-tempo como uma medida de aceleração, isto é, a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo. E ainda, nos cursos de CDI, hoje em dia, o conceito de derivada é apresentado antes do conceito de integral. No entanto, cópias dos manuscritos das representações gráficos de Oresme contém fortes indícios do triângulo diferencial, porém nenhum método sistemático ou terminologia foi desenvolvido para tratar desses conceitos.

Para Boyer (1949), o trabalho realizado por Oresme, a respeito do tema, marcou um avanço notável para o CDI. Ele tinha uma percepção clara da aceleração

uniforme e foi o primeiro a dar um passo importante na representação da taxa de variação em uma reta. Para o autor, mesmo que Oresme não tenha definido a velocidade instantânea satisfatoriamente, ele esclareceu a questão de quanto maior for a velocidade maior será a distância percorrida, se o movimento continuar a uma mesma taxa.

Além dos resultados de Oresme, por volta de 1500, as equações cúbicas já tinham sido resolvidas por Tartaglia e Cardano e as equações quárticas, por Ferrari. Segundo Boyer (1949), tais resultados permitiram um uso mais livre dos números negativos, irracionais e imaginários. A generalização de número, ainda não baseada por definições satisfatórias, influenciou na elaboração do conceito de limite e na aritmética da matemática. Além disso, permitiu a introdução sistemática de símbolos para as quantidades de expressões algébricas em que Viète se destaca quando usou consoantes para representar as quantidades conhecidas e vogais para representar quantidades desconhecidas.

Para o autor, esse simbolismo foi imprescindível para o rápido desenvolvimento da Geometria Analítica e do CDI nos séculos seguintes, pois permitiu que o conceito de variabilidade e de funcionalidade fizesse parte do pensamento algébrico.

Galileu também foi um filósofo que contribui muito com a ciência de modo geral e com o cálculo, especificamente. Segundo Roque (2012), Galileu publicou o tratado “Discursos e demonstrações matemáticas sobre duas novas ciências” a respeito de cinemática e a dinâmica dos movimentos nas proximidades da superfície da Terra. O livro foi elaborado na forma de diálogos e seus três interlocutores são: Salviati, que representa o próprio Galileu, Simplicio, que defende a filosofia e a física de Aristóteles e Sagredo, que é um personagem prático, de mentalidade aberta, que atua como uma espécie de árbitro entre as duas posições em confronto. O livro está dividido em 4 partes. A primeira apresentava uma introdução a duas novas ciências, a saber, a resistência dos materiais e o estudo do movimento. A segunda tratava da estática e desenvolvia ideias e os modelos da resistência dos materiais. Nas outras duas partes, discutem-se o movimento acelerado e as leis que regem o movimento dos projéteis.

Para a autora, a ligação entre a queda livre e o movimento dos projéteis pode ter apresentado uma influência da arte da guerra. Parece que muitos dos

desenvolvimentos teóricos de Galileu tiveram suas origens no conhecimento de artesãos, arquitetos e engenheiros do século XVI, cuja reputação foi obtida por atenderem às necessidades da arte da guerra, que apresentava avanços consideráveis. Para a autora, é difícil negar que haja alguma relação entre os dois domínios de interesse. Assim, a razão de ser do desenvolvimento desses conhecimentos, movimento, variação e queda livre, vem da necessidade de se produzir artefatos para a guerra.

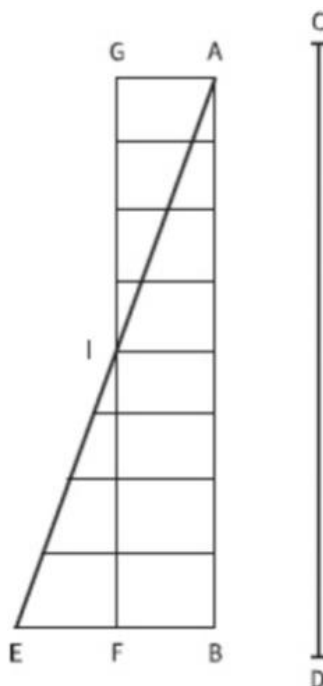
No modelo de queda livre analisado por Galileu, a distância de um corpo em relação ao ponto inicial aumenta com o quadrado do tempo transcorrido e se o movimento é sobreposto a um movimento uniforme horizontal, obtemos a trajetória parabólica de um projétil. Para Roque (2012), nesse tipo de estudo não importava saber por que um corpo cai, mas como ele cai. Por ser uma descrição puramente geométrica, era preciso utilizar proporções matemáticas para relacionar as grandezas e para responder como as grandezas variavam umas em relação às outras. Além disso, as leis naturais eram escritas em linguagem geométrica e não apresentavam as expressões algébricas que conhecemos hoje.

Segundo a autora, Galileu utilizava diagramas para representar o movimento e para demonstrar proposições. Para demonstrar a proposição:

O tempo no qual qualquer espaço é atravessado por um corpo inicialmente em repouso e uniformemente acelerado é igual ao tempo no qual o mesmo espaço é atravessado pelo mesmo corpo movendo-se com velocidade uniforme, cujo valor é a média entre a maior velocidade e a velocidade imediatamente anterior à aceleração ter começado. (ROQUE, 2012, p. 276)

Para isso Galileu utiliza o diagrama da figura 6.

Figura 6 – Diagrama para representar movimento de Galileu



Fonte: Roque (2012, p. 278)

Segundo Roque (2012), Galileu associa a reta AB ao tempo que um corpo utiliza para atravessar um espaço representado pela reta CD, iniciando seu movimento uniformemente acelerado, do repouso, no ponto C. Ele supõe que a reta BE, perpendicular a AB, seja a maior velocidade adquirida no intervalo AB. Ele traça a seguir a reta AE e várias retas paralelas a BE, por pontos equidistantes de AB. Essas retas paralelas a EB, em relação a reta AE representam valores cada vez maiores da velocidade que iniciou no instante A. Ele bissecta a reta EB em F e traça a reta FG paralela a AB e a reta GA paralela a FB, obtendo o retângulo ABFG, cuja área é igual à do triângulo AEB, porque o lado FG bissecta o lado AE no ponto I, de tal modo que se as retas paralelas a EB no triângulo AEB se estenderem até GI, a soma das paralelas do triângulo AEB é igual a soma das paralelas do retângulo AGFB.

Para a autora, como as velocidades do movimento acelerado são representadas pelas paralelas no triângulo AEB e as velocidades do movimento uniforme pelas paralelas no retângulo AGFB, conclui-se que o que se perde no momento na primeira parte do movimento acelerado, representado pelas paralelas do triângulo IAG é compensado pelo momento representado pelas paralelas no triângulo IEF. Assim, o espaço percorrido no intervalo de tempo AB é dado, em cada um dos casos, pelas áreas do quadrado e do triângulo. E como essas áreas são iguais, conclui-se que espaços iguais são atravessados em tempos iguais, nos dois casos, movimento uniforme e movimento acelerado, o que significa que a distância percorrida

é proporcional ao tempo utilizado. A autora quer destacar aqui que as leis do movimento eram expressas por relações de proporção entre grandezas geométricas representadas em diagramas

Segundo a autora, a aplicação da álgebra a problemas geométricos tinha se tornado uma prática habitual no início do século XVII no estudo de problemas que levavam a equações determinadas. Além disso, a solução de equações de 3º e 4º graus estavam se popularizando e os problemas indeterminados, que expressam lugares geométricos com duas quantidades desconhecidas variáveis, passaram a despertar interesse.

3.1.1.2 O desenvolvimento do Pré-Cálculo

Para a autora, os trabalhos de Descartes e Fermat levaram ao interesse crescente sobre tipos variados de curvas e o uso da álgebra nos problemas geométricos que envolviam tratamento de equações indeterminadas. O objetivo de Fermat nos seus trabalhos iniciais era expressar os problemas geométricos de Apolônio em linguagem algébrica e desta forma, sua geometria analítica atingiu uma forma final por volta de 1635.

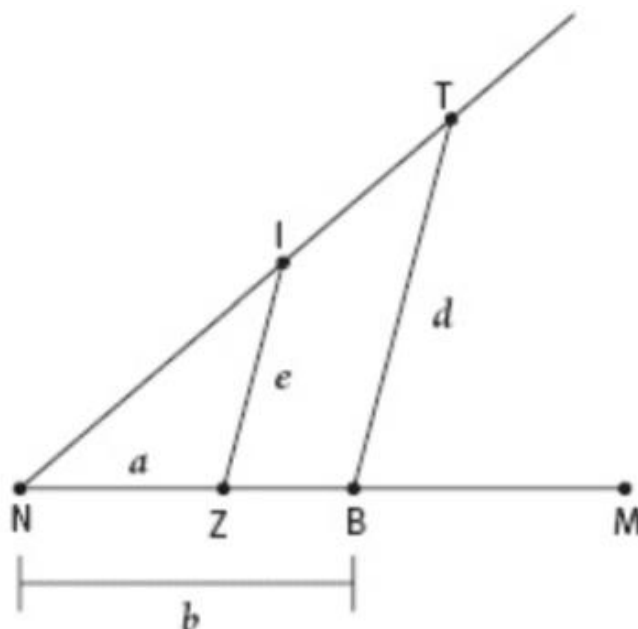
Segundo a autora, apesar de Fermat ainda não conhecer a geometria de Descartes, sua obra estabelecia uma correspondência entre lugares geométricos e equações indeterminadas. Ele propôs, no início da obra Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos, que sempre que em uma equação final duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva.

Segundo a autora, Fermat mostrava que uma equação do primeiro grau é satisfeita por pontos que estão em linha reta, da seguinte maneira:

Seja NM uma reta, com um ponto N fixo, e seja NZ igual à quantidade desconhecida a , e ZI (a reta desenhada para formar o ângulo $N\hat{Z}I$) a outra quantidade desconhecida e . Considere ainda NB e BT (BT forma o ângulo $N\hat{B}I$ igual ao ângulo $N\hat{Z}I$) quantidades conhecidas b e d (respectivamente). Se $d \times a$ é igual a $b \times e$, o ponto I descreve uma reta. Para chegar a essa conclusão, basta observar que $d \times a = b \times e$ implica que $b:d :: a:e$. Mas a razão $b:d$ é conhecida, pois só envolve quantidades conhecidas. Logo, a razão $a:e$ entre as quantidades desconhecidas também será determinada, assim como o triângulo NZI. Sendo assim, NI é uma reta. (ROQUE, 2012, p. 300)

A figura 7 ilustra a proposição de Fermat.

Figura 7 - Representação gráfica da reta por Fermat



Fonte: Roque (2012, p.300)

Para Roque (2012), Fermat utiliza apenas um eixo coordenado e a reta é gerada pela extremidade I do segmento variável ZI quando Z se move ao longo do eixo. As coordenadas NZ e ZI são soluções da equação $d \times a = b \times e$. Fermat também passou a estudar as equações de 2º grau, para mostrar que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica. A autora conclui que se os eixos coordenados e os coeficientes da equação forem dados, os parâmetros que definem a cônica ficam determinados.

Para Boyer (1992), Fermat teve grande participação no desenvolvimento da geometria analítica quanto em suas contribuições ao CDI. O método dele de integrar x^n era o mais refinado entre os que havia na época e, para o autor, está mais próximo da integral de Riemann do que outro anterior a XIX. Por exemplo, para Fermat calcular $\int_0^T x^2 dx$, ele determinava ordenadas à curva de $y = x^2$ nos pontos cujas abscissas eram, respectivamente, T, ET, E2T, E3T etc., de modo que $0 < E < 1$ e com essas coordenadas como altura, formava uma sequência de retângulos que somados se aproximam da área sob a curva. Segundo o autor, a soma das áreas dos retângulos é dada pela progressão geométrica infinita:

$$T^3(1 - E)(1 + E^3 + E^6 + E^9 + \dots) = T^3(1 - E) \left(\frac{1}{1 - E^3} \right) = \frac{T^3}{1 + E + E^2}$$

e fazendo E se aproximar de 1 as larguras dos retângulos tendem a zero, e a soma das áreas dos retângulos tende à área sob a curva, que é $\frac{T^3}{3}$. E com um raciocínio semelhante, Fermat estabeleceu que para todos os valores racionais n , exceto para $n = -1$, $\int_0^T x^n dx = \frac{T^{n+1}}{n+1}$.

De acordo com Eves (1995), os primeiros passos para a derivada foram dados por Fermat e se originaram de questões cujo objetivo era a determinação de máximos e mínimos de funções e de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas. Para ele, apesar de que essas considerações parecerem estar relacionadas com os gregos antigos, é mais razoável atribuir a Fermat as primeiras manifestações do método da derivada.

Segundo Boyer (1992), durante o tempo em que ele e Descartes criavam a geometria analítica, Fermat descobriu um método simples para determinar máximos e mínimos de curvas polinomiais. Este método foi baseado numa ideia de Kepler inserida na sua obra intitulada "*Nova steriometria doloriom vinariorum*", em 1615. Aqui o autor ao estudar a melhor forma a dar aos tonéis de vinho, afirma o seguinte: "[...] perto do máximo qualquer variação parece insensível". (PIRES, 2004, p.....).

Segundo o autor, Kepler verificou que a variação do valor de uma função na vizinhança de um ponto de máximo ou de mínimo torna-se infinitesimal e Fermat utilizou esse fato para desenvolver um processo para determinar esses pontos de máximo ou de mínimo. Então, se uma função f possui um máximo ou um mínimo comum em x , o método consiste em tomar um valor " e " muito pequeno e comparar se o valor de $f(x - e)$ é quase igual ao valor de $f(x)$, isto é, $f(x - e) = f(x)$ e impor " $e=0$ " para tornar a igualdade correta. As raízes da equação que resulta da operação de comparação, na igualdade, serão os valores de x para os quais a função f assume um valor máximo ou mínimo.

Para exemplificar o processo, vamos utilizar o primeiro exemplo de Fermat, que é o de dividir uma quantidade em duas partes tais que o seu produto seja máximo. De acordo com Eves (1995), Fermat usava a notação de Viète em que as vogais maiúsculas representavam variáveis e as consoantes maiúsculas representavam as constantes. Assim, se B é uma quantidade dada e se denotarmos por A e $B - A$ as partes procuradas, se E é a constante muito pequena, o processo de Fermat a realizar

é: $A(B - A) = (A - E)(B - (A - E))$ e realizando as operações algébricas indicadas, obtemos: $2AE - BE - E^2 = 0$.

Dividindo ambos os lados por E, chegamos a $2A - B - E = 0$ em que fazendo $E = 0$, pois seu valor é muito pequeno, conclui-se que $B = 2A$, obtendo assim a divisão desejada.

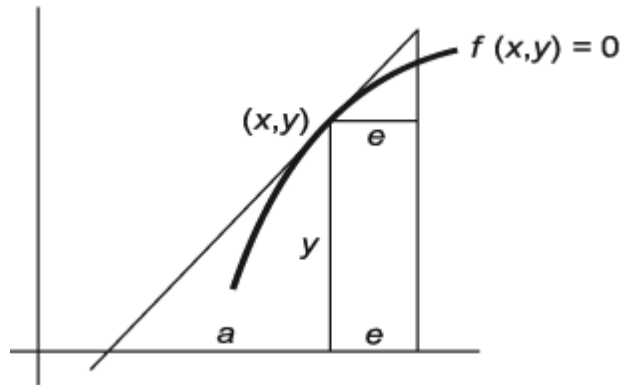
Para o autor, embora a lógica do procedimento não seja adequada, podemos verificar que o processo de Fermat equivale ao que fazemos atualmente para obter o valor máximo ou mínimo de uma função f , que é o de impor que a derivada da função f , em x , seja nula, isto é, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$. Além disso, o método de Fermat não distinguia entre valor mínimo ou máximo e também ignorava que a condição de a derivada de f se anular não é suficiente para se ter um máximo ou mínimo, mas apenas necessária.

Além disso, segundo Eves (1995), Fermat também descobriu um procedimento para obter a tangente de uma curva em um ponto dessa curva, dada sua equação cartesiana. O método consistia em obter a subtangente relativa ao ponto dado, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangencia sobre o eixo X e a intersecção da tangente com tal eixo. Para o autor, a ideia que está por traz do método é a de posição limite de uma secante quando os dois pontos de intersecção da curva tendem a coincidir.

Tem que focar na velocidade instantânea, este é o ponto. A tangente artificial geométrico Decartes e Leibnitz e outro caminho por Newton. Importante concentrar a análise aqui. A ideia de variação e função vem depois para fundamentar o cálculo. A ordem da exposição não é a ordem da descoberta histórica. O ensino inverteu a ordem. (Cuidado que a função derivada não é a tangente). Cálculo surge em um estudo geométrico que inclui o algébrico estudando curvas (como conjunto de pontos ideia cartesiana herdada por Leibnitz a outra, cálculo de fluxões é de Newton, o ponto é que define a curva). Matemática mixtas e físico matemática (estudando curvas). (Tem um texto do Chevallard que fala da mat mixta).

Segundo o autor, em notação moderna, dada $f(x, y) = 0$ a equação da curva, temos que procurar sua subtangente a relativa ao ponto (x, y) , como na Figura 8.

Figura 8 - Representação gráfica do método de Fermat para reta tangente a uma curva



Fonte: Eves (1995, p. 430)

Utilizando a noção de semelhança de triângulos, podemos estabelecer as coordenadas de um ponto da tangente, por exemplo, $\left(x + e, y \left(1 + \frac{e}{a}\right)\right)$, tão próximo ao ponto de tangência entre a curva e a reta, quanto queremos, de tal sorte que podemos considerá-lo como se fosse da curva.

Tratando o ponto como se fosse da curva, obtemos $f\left(x + e, y \left(1 + \frac{e}{a}\right)\right) = 0$ e para que seja correta essa igualdade, fazemos que e assumo valor zero. Assim, a partir da equação resultante, determinamos a subtangente a , em função de x e y do ponto de tangência. Para Eves (1995) esse método equivale a fazer: $a = -y \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$, e desta maneira, Fermat determinou tangentes a curvas tais como elipse, cicloide, quadratriz, *folium* de Descartes, entre outras. Para exemplificar o método vamos determinar a subtangente relativa a um ponto qualquer da curva *folium* de Descartes, cuja equação é $x^3 + y^3 = nxy$.

Utilizando o método neste caso, temos:

$$(x + e)^3 + y^3 \left(1 + \frac{e}{a}\right)^3 - n(x + e)y \left(1 + \frac{e}{a}\right) = 0$$

e realizando as operações algébricas indicadas, obtemos:

$$e \left(3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{nxy}{a} - ny\right) + e^2 \left(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{ny}{a}\right) + e^3 \left(1 + \frac{y^3}{a^3}\right) = 0$$

Agora, vamos dividir ambos os lados por e e fazer com que e se torne 0, obtemos: $a = \frac{ny^3 - nxy}{3x^2 - ny}$.

Para executar seu método para determinar máximos e mínimos de uma expressão $f(A)$, usando a notação funcional moderna, mas usando uma letra maiúscula para a variável, Fermat substituía o A por $A+E$, em que E era, para Fermat, uma incógnita com valor muito pequeno em relação a A . Ele assumia que os valores $f(A)$ e $f(A+E)$ eram aproximadamente iguais e igualava-as. Realizava as operações indicadas e cancelava os termos possíveis em ambos os lados da igualdade. Após esse cancelamento, ele dividia ambos os termos da igualdade por E e desprezava todos os termos que ainda contivessem a incógnita E . Para o autor, utilizando símbolos modernos e usando o fato que a equação $f(A+E) = f(A)$ é equivalente a $f(A+E) - f(A) = 0$, podemos associar este método ao que hoje realizamos como $f'(x) = 0$

Para Boyer (1992), um aluno de cálculo de hoje reconhece neste método a condição necessária para que uma função diferenciável tenha um máximo ou um mínimo num intervalo aberto, ou seja, que a derivada da função seja nula.

Como um exemplo pontual deste método, seja uma ordenada da curva dada pela expressão $2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, o método supunha um ponto vizinho de abscissa $x+E$, então sua ordenada será $2(x+E)^3 - 5(x+E)^2 + 4(x+E) - 7$. Fermat argumentava que num ponto de máximo ou de mínimo a variação da ordenada é virtualmente desprezível, desde que a variação E na abscissa seja pequena e assim, impunha que os dois valores das ordenadas vizinhas fossem iguais entre si. Como resultado, depois de realizar as operações algébricas indicadas, tinha-se:

$$(6x^2 - 10x + 4)E + (6x - 5)E^2 + 2E^3 = 0$$

Após obter esse resultado, ele dividia a igualdade por E e fazia o E restante igual a zero, uma vez que o valor de E deve ser indefinidamente pequeno para que se aplique a regra, para obter a equação $(6x^2 - 10x + 4) = 0$. A resolução dessa equação resulta nos valores 1 e $2/3$ como abcissas dos pontos de máximo ou de mínimo da curva dada. Para o autor, esse procedimento é usado ainda hoje quando se obtém a derivada de uma função que representa a curva e se impõe que ela seja igual a zero. Além disso, o uso de E no lugar de h ou Δx , neste caso, é desnecessário, uma vez que se admite que Fermat não explicava precisamente por que fazia o E ser igual a zero, nem mesmo seus sucessores, durante dois séculos. Além disso, apesar de ele conhecer bem as regras da integração e da derivação, ele não percebeu a

relação entre esses métodos. Ele sabia que para derivar multiplicava o coeficiente da função pelo expoente e subtraía uma unidade deste último e para integrar adicionava uma unidade ao expoente e dividia o coeficiente pelo novo expoente. No entanto, Fermat não viu nada de significativo na relação recíproca dos métodos e nem seus contemporâneos, entre eles Barrow.

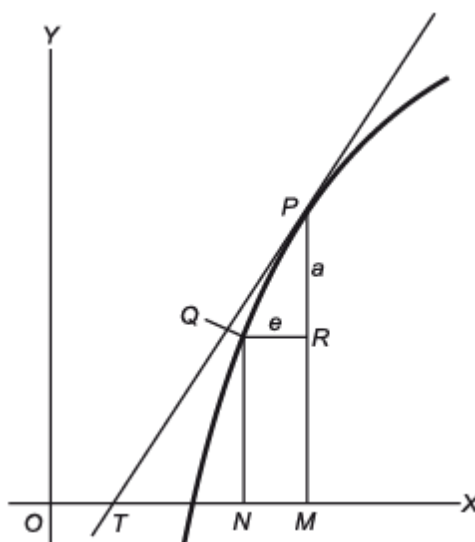
Outro problema que preocupou os matemáticos, desde os gregos, foi o de determinar retas tangentes a curvas em um ponto dado. Essa classe de problemas, assim como a de pontos de máximo e mínimo e a dos movimentos conduziram aos conceitos do Cálculo Diferencial.

Fermat e Descartes estavam envolvidos com a introdução de métodos algébricos na Geometria. Eles estavam interessados em combinar a geometria e a álgebra. Dessa combinação, foram obtidos novos métodos que foram expressos em notação algébrica. Essa combinação conduziu à formulação correta do cálculo.

Outra contribuição importante e contemporânea aos Fermat e Descartes foi a publicação do livro *Lectiones opticae et geometricae* do matemático Barrow, que em seu prefácio agradece a Newton por parte do material do livro, provavelmente aquela que se ocupa da óptica. É nesse livro que se encontra uma abordagem muito próxima do processo moderno de derivação usando o triângulo diferencial, que ainda se encontra nos textos atuais de cálculo. De acordo com Eves (1995), suponha, que se pretenda obter a tangente à curva da Figura 9, no ponto P, e seja Q um ponto da curva, próximo de P. Então os triângulos PTM e PQR são semelhantes entre si e, considerando o triângulo menor indefinidamente pequeno, vale a relação:

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$$

Figura 9 - Representação do traçado da tangente à curva



Fonte: Eves (1995, p. 435)

Fazendo $QR = e$ e $RP = a$ e se as coordenadas de P são (x, y) , então as de Q são $(x - e, y - a)$. Substituindo esses valores na equação da curva e desprezando as potências de e e de a obtemos a razão $\frac{a}{e}$. Assim, resulta:

$OT = OM - TM = OM - MP \left(\frac{QR}{RP} \right) = x - y \left(\frac{e}{a} \right)$, de modo que a tangente fica determinada.

Segundo Eves (1995), Barrow aplicou seu método para construir tangentes às curvas $x^2(x^2 + y^2) = r^2 y^2$ (curva kappa), $(x^3 + y^3) = r^3$ (uma particular curva de Lamé), $(x^3 + y^3) = rxy$ (folium de Descartes), entre outras. Para exemplificar o método, vamos aplicá-lo à curva $(x^3 + y^3) = r^3$, que neste caso, fica:

$(x - e)^3 + (y - a)^3 = r^3$ e realizando as operações algébricas indicadas, obtemos:

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3$$

Vamos agora desprezar os as potências de e e de a maiores que 1 e vamos usar o fato que $(x^3 + y^3) = r^3$, para obter: $3x^2e + 3y^2a = 0$ o que resulta: $\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$.

Para o autor, a razão $\frac{a}{e}$ é o que hoje denotamos por $\frac{dy}{dx}$ e com o uso da teoria dos limites este método pode se tronar facilmente rigoroso.

De acordo com Boyer (1992), Barrow publicou uma regra para obtenção de tangentes muito parecida com o método de Fermat para obter máximos e mínimos.

Segundo ele, dada uma curva como por exemplo $3x^2y - 5xy^3 - 7x + 6y = 0$, primeiro Barrow subtraía os membros desta equação dos membros correspondentes da equação obtida pela substituição da variável x por $x + e$ e de y por $y + a$, então ele desprezava todos os termos com e e a da equação resultante e formava a razão:

$$\frac{a}{e} = \frac{-6x+5y^3+7}{3x^2-15xy^2+6}$$

que para ele é a inclinação da tangente à curva no ponto (x, y) .

Para o autor, os métodos de Fermat e Barrow não foram os únicos instrumentos e fórmulas inventados para esses temas. Outros filósofos da época perceberam o papel dos coeficientes e expoentes na determinação de tangentes e extremos de polinômios e pode ser que Torricelli e Gregory tivessem conhecimento da natureza recíproca dos problemas de tangente e quadratura. Estes métodos também eram usados em aplicações na ciência daquela época, como na dinâmica de Huygens e no princípio do tempo mínimo da refração da luz de Fermat.

Para Baron (1974 apud MATEUS, 2005, p.76), o problema de quadratura e das construções pelo método da tangente para curvas do tipo $y = x^n$, (com n inteiro positivo) foi gradualmente estabelecido, por um método ou por outro, durante a primeira metade do século XVII.

Já para Boyer (1992), perto do final do segundo terço do século XVII, já se contava com todas as regras necessárias para lidar com problemas de áreas, de taxas de variação, máximos e mínimos e tangentes. Para o autor, a época estava madura para se construir o que hoje chamamos de Cálculo Diferencial e Integral, a partir de uma análise infinitesimal, pois não era necessária nenhuma invenção nova, uma vez que as técnicas já estavam à mão. Faltava apenas um senso de universalidade das regras.

Mas diante disto, qual a razão de ser da derivada? De acordo com o estudo apresentado até aqui, podemos perceber que os dois métodos utilizados por Fermat e Wallis, para obter pontos de máximo e de mínimo de figuras representadas por equações do tipo $f(x, y) = 0$, utilizam processos matemáticos que atualmente chamamos de derivada. Desta maneira, fica claro que a razão de ser da derivada, neste período, é o meio de se obter a inclinação da reta tangente a uma curva por um ponto dado e a obtenção de valores máximo e/ou mínimo de uma função

3.1.1.3 Noção de derivada de Newton e Leibniz

Segundo Boyer (1992), no final do século XVII já havia regras necessárias para se resolver problemas de áreas e taxas de variação, de máximos e mínimos e de tangentes. Para ele, essa época já estava pronta para construir o CDI a partir da análise infinitesimal e estabelecer um senso de universalidade das regras que estavam à mão. Quem primeiro percebeu isso foi Newton por volta de 1665 e em seguida e independente, foi Leibniz por volta de 1676. Os antecessores destes só utilizavam tais regras em problemas que envolviam polinômios, ou problemas não polinomiais que podiam ser transformados em polinômios. A mudança para a nova análise se deu pela descoberta das expansões em series infinitas, por meio do teorema do binômio, e que Newton insistia que fosse uma parte essencial desta nova análise, que o permitiu chegar a quadraturas que seus predecessores não tinham conseguido, como por exemplo, integrar $(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Esse método também podia ser usado para obter integrais, que Newton chamava de fluentes, de funções transcendententes.

Para o autor, Newton argumentava que os algoritmos matemáticos que tratam de processos infinitos são tão respeitáveis quanto aqueles que se aplicam à álgebra e que sua contribuição não foi somente o estabelecimento de leis para a derivação e integração, mas o reconhecimento que tudo isso constitui parte de uma nova análise, ou seja, a aplicação de processos infinitos ao estudo de funções de qualquer tipo.

Em um de seus manuscritos, Newton dá a descrição completa de seu método para resolver problemas de movimento, isto é, determinar áreas, tangentes e centros de gravidade de linhas curvas, considerando a maneira que as coordenadas variam com o tempo, em que usou p e q como símbolos de taxas de variação, ou seja, velocidades, de x e y , respectivamente, e que mais tarde substituiu o p e q por $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e a palavra velocidade por fluxo, motivo pela qual sua análise ficou conhecida como método dos fluxos. Neste manuscrito Newton determinou a inclinação da curva $x^3 - abx + a^3 - cyy = 0$ substituindo x por $x + po$ e y por $y + qo$. Ele subtraía da equação original a equação obtida pela substituição e dividia a igualdade por o . Depois ele desprezava os termos que ainda tinham o , pois eles eram infinitamente pequenos. Como resultado Newton obtinha a expressão $3pxx - abp - 2cyy = 0$, que com facilidade pode obter a razão $\frac{q}{p} = \frac{2cy}{3xx - ab}$ que hoje chamamos de inclinação.

Posteriormente, ele escreve *De Quadratura*, onde evita a frase infinitamente pequeno, na qual primeiro determina $\frac{q}{p}$, a razão dos fluxos, que logo substitui a notação por $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ e então faz desaparecer o o , ou evanescer, para determinar o que ele passou a chamar de “primeira e última razões” dos fluxos, e que hoje chamaríamos de limite da razão. Para o autor, essa abordagem estava próxima do atual cálculo moderno, mas a forma como ele publicou em Principia, em 1687, carregava as rudes ideias de incrementos infinitamente pequenos, que ele chamava de momentos, e que dessa forma seu cálculo se parecia muito com o de Leibniz, que em seu primeiro artigo, justifica as regras simples de derivação, mas em uma linguagem que lembra as quantidades infinitamente pequenas de Newton. Para calcular a diferencial de xy , Leibniz substitui o x por $x + dx$ e o y por $y + dy$, em que dx e dy são as diferenças infinitamente pequenas de x e y . A diferença $(x + dx)(y + dy) - xy$ representa a diferença infinitamente pequena no produto, correspondente às diferenças infinitamente pequenas de x e y . O termo $dx dy$ era considerado muito pequeno em relação aos outros termos e era desprezado, de maneira a obter $d(xy) = xdy + ydx$. Deste resultado, Leibniz deduziu a diferenciação de potências inteiras de x , por meio de uma indução começando com $x \cdot x$, que decorreram em formulas semelhantes para inversos e quocientes.

Para Boyer (1992), se na fórmula do produto os dois termos fossem divididos por dx , teríamos a moderna derivada em relação a x , do produto xy , com y em função de x , mas Leibniz não pensava em termos de variáveis dependentes e independentes ou da derivada de uma em relação à outra, deixando uma falta de precisão nesse raciocínio.

Boyer (1992), também relata que para Newton, as quantidades geométricas eram geradas por movimentos contínuos, de modo que um ponto móvel gera uma reta. Newton chamava uma quantidade x , gerada dessa maneira, de fluente e sua taxa de variação, de fluxo de x denotada por $\dot{x}$, que hoje denotamos por $\frac{dx}{dt}$. E ainda, chamava de momento, um pequeno incremento sofrido pelo fluente x , em um pequeno intervalo de tempo, o , que ele denotava por $\dot{x}o$. Para ele, os momentos de quantidades que fluem (os fluentes) estão entre si, como as velocidades dos fluentes ou crescimentos, isto é: $\frac{\dot{x}o}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ que hoje escrevemos $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$.

Eves (2011) acrescenta que Newton de mais evidencia a dois tipos de problemas. No primeiro, dada uma relação ligando alguns fluentes, estabelecer uma relação que envolvia esses fluentes e seus fluxos, que hoje equivale à diferenciação. No segundo, dada uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, determinar uma relação que relacionava apenas os fluentes, que hoje equivale à integração, ou seja, trata do problema inverso, que equivale a resolver uma equação diferencial. Segundo o autor, Newton fez numerosas aplicações com seu método dos fluxos para determinar máximo e mínimos de uma função, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e concavidade, além de muitas quadraturas e retificações de curvas.

Por outro ponto de vista, de acordo com Boyer (1992), a notação de Leibniz foi desenvolvida para determinar diferenciais de expressões como xy , que foi bem ilustrada no texto da carta que enviou para John Wallis em 1699. Nesse texto, explica que é importante considerar quantidades infinitamente pequenas, que ao se procurar sua razão, não sejam consideradas nulas, mas desprezíveis quando aparecerem com quantidades incomparavelmente maiores. Desta maneira, quando se tem $x + dx$, dx é desprezada o que é diferente de quando se procura a diferença entre $x + dx$ e x , pois as quantidades finitas desaparecem. Do mesmo modo não podemos ter xdx e $dx dx$ juntos.

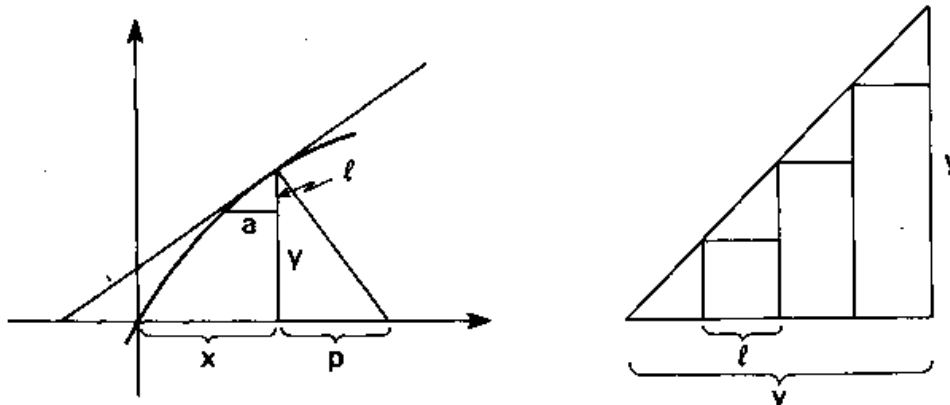
Então, ao diferenciar xy , escreve-se: $(x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dx dy$, em que $dx dy$ deve ser rejeitado, uma vez que é incomparavelmente menor que $xdy + ydx$, pois o erro é menor que qualquer quantidade finita. Boyer (1992) conclui que para o fluxo $\dot{x}$ de Newton, Leibniz escrevia $\frac{dx}{dt}$.

O desenvolvimento dos conceitos do Cálculo, por Leibniz se deu, segundo Boyer (1992), em uma missão diplomática a Paris em 1672 quando teve um encontro com Huygens, e este lhe presenteou com uma cópia de seu trabalho a respeito da oscilação do pêndulo. Além disso, além de iniciar o jovem diplomata na carreira da matemática, Huygens concordou em dar aulas a Leibniz e as iniciou com os trabalhos de Barrow, Cavalieri, Pascal, Descartes e outros. Ao ler o trabalho de Pascal, Leibniz percebeu que a tangente a uma dada curva, ou dito de outra maneira, a inclinação de uma curva, podia ser determinada por uma razão entre as diferenças das ordenadas

e das abscissas de dois pontos vizinhos da curva, conforme essas diferenças se tornassem cada vez menores.

Leibniz percebeu também que a quadratura da curva, isto é, a quadratura da área sob uma curva, podia ser tomada como a soma das ordenadas ou de uma infinidade de retângulos estreitos. Além disso, observou que os processos de diferenciar e de somar (que hoje chamamos derivar e integrar) eram inversos um ao outro. De acordo com Boyer (1992) em um manuscrito, Leibniz obteve o que chamou de "triângulo característico", conforme Figura 10, e procedeu da seguinte maneira: $\frac{l}{a} = \frac{p}{y}$ porque, provavelmente, imaginava esses segmentos como lados de triângulos semelhantes em um sentido intuitivo e aproximado.

Figura 10 - Triângulo característico de Leibniz



Fonte: Boyer (1992, p. 45)

Diante do que foi explanado nas linhas acima, com reação ao desenvolvimento do cálculo na época de Newton e Leibniz, com relação aos métodos de Newton e Leibniz, a razão de ser da derivada, que é o equivalente desses métodos hoje, constitui uma técnica para se obter taxas de variação de grandezas, o coeficiente da reta tangente a uma curva, obter os valores de máximo e mínimos de uma função, as curvaturas de uma curva, seus pontos de inflexão e concavidade.

3.1.1.4 A introdução de rigor no conceito de derivada

No começo do século XIX teve início o movimento de busca por maior rigor à análise encabeçado por Lagrange e Gauss que foi, posteriormente, ampliado e aprofundado por Cauchy, considerado o mais importante analista da primeira metade do século XIX.

Segundo Eves (2011) Cauchy escreveu extensiva e profundamente a respeito da matemática pura e aplicada, no entanto a qualidade desses trabalhos era irregular, o que lhe rendeu críticas tanto para sua produção excessiva, quanto para sua redação apressada. Dentre suas contribuições à matemática, destacamos a convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, probabilidade e física-matemática. Para o autor, grande parte da abordagem do Cálculo apresentada nos textos universitários, como os conceitos básicos de limite e continuidade, deve-se a Cauchy que definiu a derivada de $y = f(x)$, em relação a x , como o limite da razão: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, quando $\Delta x \rightarrow 0$, isto é, $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Desta maneira, ele combinou o conceito de limite com o conceito de função, isto é, para um x fixo, $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ é uma função em relação a i , não uma mera variável, em que na medida que i se aproxima de zero, $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ move-se de uma maneira determinada no seu domínio e o seu limite é um conceito bem definido.

Segundo Boss (1974 apud MATEUS, 2006, p. .90), Cauchy apresentou a derivada rigorosamente, sem ter recorrido a diferenciais e assim elabora uma interpretação para as diferenciais que o capacita a manipulá-las em fórmulas, como já era feito antes, porém sem considerá-las infinitamente pequenas a definindo da seguinte maneira:

Seja $y = f(x)$ uma função de variável independente x . Seja i uma quantidade infinitamente pequena e h uma quantidade finita. Se dissermos que $i = \alpha h$, α será novamente uma quantidade infinitamente pequena e teremos a identidade $\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$ da qual deduzimos $\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h$ (1) O limite para o qual converge o lado esquerdo da equação (1) à medida que α se aproxima infinitamente de zero e h permanece constante é chamado "diferencial" da função $y = f(x)$. A diferencial é indicada pelo d característico: dx ou $df(x)$. Seu valor pode ser facilmente determinado se soubermos o valor da função derivada y' ou $f'(x)$. De fato, se tomarmos os limites de ambos os lados da equação (1), acharemos o resultado geral: $df(x) = hf'(x)$ (2). No caso especial de $f(x) = x$ a equação (2), reduz-se a $dx = h$. Assim, a diferencial da variável independente x é precisamente a constante finita h . Dado isso, a equação (2) torna-se $df(x) = f'(x)dx$ ou equivalente $dy = y'dx$. Estas últimas equações mostram que a derivada $y' = f'(x)$ de qualquer função $y = f(x)$ é precisamente igual $\frac{dy}{dx}$, isto é, a razão entre a diferencial da função e a diferencial da variável ou, se quisermos, ao coeficiente pelo qual devemos multiplicar a segunda diferencial a fim de obtermos a primeira. É por

isso que a derivada é chamada às vezes de "coeficiente diferencial." (Bos, 1974 apud MATEUS, 2006, p. .90).

Apesar de Cauchy ter ciência da facilidade operacional das diferenciais, ele as deixou em segundo plano quando definiu dy para $y = f(x)$, simplesmente como $f'(x)dx$, se dx fosse uma quantidade finita. Além disso, preferiu definir a integral definida como o limite da soma de um conjunto infinitamente crescente de partes pequenas tendendo a zero, ou seja, de maneira muito parecida ao que fazemos hoje.

Para Eves (2011) o trabalho de Cauchy mostra grande preocupação com o rigor e como tal, serviu para inspirar grandemente outros matemáticos, a eliminar da análise a manipulação formal cega e as demonstrações intuitivas.

3.1.2 O Modelo Epistemológico de Referência

O desenvolvimento da derivada, conforme os apontamentos relatados acima, ocorreu mais intensamente a partir de aproximadamente 1600, com a preocupação de se obter valores máximos e mínimos e tangentes de curvas equações que representavam lugares geométricos estudados pelos matemáticos dessa época.

Verificamos que o método que matemáticos como Fermat, Wallis, Newton, Leibniz, entre outros, utilizaram para resolver esses problemas é o que atualmente chamamos de Derivada.

Diante disso, podemos dizer que a razão de ser da derivada é o processo que devemos utilizar para obter o coeficiente da reta tangente a uma curva, máximo e mínimos de uma função, as tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e concavidade, conforme Boyer(1992) e Eves(2011).

Precisamos agora estabelecer os Modelos epistemológicos de Referência para cada uma dessas praxeologias estabelecidas desde os anos de 1600 e que ainda hoje são utilizadas.

3.2 A Dimensão Econômico-Institucional Da Derivada

Neste capítulo vamos realizar o estudo econômico-institucional da derivada para investigar as características que compõe o MDR que orienta o estudo da derivada no ensino superior e seu subjacente MDD, tendo como referência cursos de Tecnologia voltados para a área das ciências exatas. O estudo que realizamos constitui-se de leituras e análise de Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) e de manuais e livros didáticos, novos e antigos, sugeridos nesses PPCs.

Segundo Gascón (2011), a dimensão econômico-institucional de um problema didático inclui questões que rodeiam a pergunta, como são as coisas (OM e OD) na contingência (casualidade) institucional, de modo a abranger o sistema de regras e princípios que regulam a organização e o funcionamento das OM e das OD envolvidas no problema didático, em uma dada instituição. Para ele, quaisquer respostas que vamos dar à pergunta acima precisa se apoiar num MER e MDR. Não podemos esquecer que quando nos perguntamos como são as coisas?, aparecem questões que só podem ser respondidas investigando o que acontece quando tentamos mudar as coisas para uma determinada direção.

Para o autor, esta dimensão constitui questões sobre o resultado, que em um dado período histórico, produziu tal transposição didática nas praxeologias matemáticas e didáticas. Os tipos de problemas que fazem parte de tal dimensão são os seguintes:

- a) Qual é a área institucional que temos que considerar para estudar o problema didático em questão?
- b) Que características apresentam determinadas OM, e as OD associadas em uma instituição em um dado período histórico?
- c) Como se considera em cada instituição uma tal área da atividade matemática, isto é, como se descreve e como os sujeitos da instituição a interpretam?
- d) Que tipo de práticas matemáticas pode ser realizadas em uma dada instituição com relação a uma certa área da atividade matemática?
- e) Qual é o modelo epistemológico da matemática –específico de uma área – e o modelo didático associado, dominantes em uma instituição dada?
- f) Que dificuldades aparecem quando se pretende modificar as OD em uma direção determinada dentro de uma instituição? (GASCON, 2011, p. 216, tradução nossa)

Nesta dimensão, “todo o problema didático tem que fazer referência, de forma mais ou menos explicita, a todas as etapas da transposição didática e deve conter

uma praxeologia matemática suficientemente ampla” (GÁSCON, 2011, p. 2014, tradução nossa).

Para este estudo, cujo objetivo é estudar a noção de derivada no ensino superior, analisamos estas questões e elaboramos as questões a seguir, para nos guiar em sua realização: Como se descreve e interpreta as OM e OD nas instituições consideradas, ou seja, como é o MDD? Quais atividades matemáticas, inseridas na instituição analisada, considerado o MER proposto, vivem normalmente nos sistemas de ensino?

Para tal, analisamos como a derivada é tratada em algumas instituições de ensino, de modo a entendermos os motivos das restrições que estão presentes no ensino nos tempos atuais e verificar se algo que já existiu possa novamente voltar a fazer parte do currículo escolar para dar maior sustentação ao ensino deste objeto.

3.2.1 Análise de planos de ensino das instituições pesquisadas

Para analisar como a noção de derivada é tratada por algumas instituições, procurei pelos Projetos Pedagógicos de Curso, de cursos de Engenharia e Tecnologia na área de exatas. Procurei nas páginas da internet de algumas instituições que poderiam oferecer tais cursos. Também procurei com coordenadores de curso da instituição em que eu leciono.

Verifiquei que não são muitas as instituições que publicam seus PPCs nas páginas de seus sites da internet. Encontrei nas páginas da Universidade Mackenzie, o plano de aula de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Engenharia (todos), no site da Universidade Nove de Julho-Uninove, o plano de aula de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica e Produção Mecânica. Na instituição onde leciono, a FATEC, obtive o plano de aula de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Tecnologia em Fabricação Mecânica, da área da Engenharia Mecânica.

Estudei os documentos obtidos, procurando pela descrição dos conteúdos que abordam a noção de derivada nesses documentos. Em seguida, comparei os conteúdos de cada plano de ensino para verificar se havia nesses planos, conteúdos semelhantes e os relatei no Quadro 5. No quadro, o M representa a Universidade Mackenzie, o N a Universidade Uninove e o F, a Faculdade FATEC. Nesse Quadro

verifiquei, de acordo com minha seleção, que os conteúdos que predominam são: derivada de uma função em um ponto, derivada de uma função, regras de derivação, estudo de variação de funções, interpretação geométrica e cinemática e derivadas sucessivas.

Quadro 6 – Conteúdos a respeito de derivada em planos de ensino

Conteúdos de Derivada / Instituições	Instituição M	Instituição N	Instituição F
Taxa Média de Variação		✓	
Derivada de uma Função num Ponto	✓	✓	
Derivada de uma Função	✓	✓	
Regras de Derivação	✓	✓	
Regra de L'Hospital		✓	
Estudo da Variação das Funções	✓	✓	
Diferencial e Aplicações	✓		
Interpretação Geométrica e Cinemática (retas tangentes a um gráfico)	✓	✓	
Derivadas de Ordem Superior (sucessivas)		✓	
Derivação Implícita			

Fonte: Elaborado pelo autor

No Quadro 5 verifiquei, de acordo com minha seleção, que os conteúdos que predominam são: derivada de uma função em um ponto, derivada de uma função, regras de derivação, estudo de variação de funções, interpretação geométrica e cinemática e derivadas sucessivas.

3.2.2 A derivada nos livros de CDI

Nesta parte do capítulo, propusemos destacar os resultados das análises dos livros didáticos selecionados por meio da predominância nos planos de ensino analisados, para comparar com os modelos epistemológicos de Referência elaborados do Capítulo 3, que consiste em analisar a abordagem do conteúdo, os exercícios resolvidos, exercícios propostos e os comentários dos autores dos referidos livros.

O Quadro 6 apresenta os livros didáticos sugeridos na bibliografia básica dos planos de ensino dos cursos de Engenharia e Tecnologia por instituição de ensino onde se verifica que os livros didáticos que predominam são: Stewart (2010), Thomas et al (2009), Flemming; Gonçalves (2007) e Guidorizzi (2001).

Quadro 7 - Livros de CDI sugeridos para os Cursos de Engenharia e Tecnologia

Livros / Instituições	Instituição M	Instituição N	Instituição F
GUIDORIZZI, H.L. <i>Um Curso de Cálculo. Vol. 1.</i> Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos	✓	✓	

FLEMMING, D.M. Cálculo A. 6ª ed. São Paulo: Editora Pearson Education do Brasil		✓	✓
STEWART, J. Cálculo. 5ª ed. V1. São Paulo: Editora Thomson Learning	✓	✓	✓
THOMAS JUNIOR, G. B. et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Addison-Wesley	✓		
BOULOS, P. Cálculo Diferencial e Integral. São Paulo: Pearson Education do Brasil			
SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill			✓

Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir faremos uma descrição dos conteúdos a respeito de derivada contido nos livros em destaque no quadro 6, relacionando com os Modelos Epistemológicos de Referência apontados no capítulo 3.

O livro LD1

Na apresentação de livro, Stewart (2010) relata que seu objetivo na elaboração desta edição, foi o de mostrar ao estudante a utilidade do cálculo e de desenvolver nele uma competência técnica. Além disso, o autor afirma que a ênfase foi focada na compreensão dos conceitos. Ele alega que o atual movimento de reforma do ensino de cálculo vem da conferência de Tulane, de 1986, que teve como principal recomendação a concentração na compreensão de conceitos.

Ele também informa que tentou tornar mais internacional a natureza dos exercícios e dos exemplos de modo a envolver dados do mundo real, além de adaptar alguns exercícios para o sistema internacional de unidades.

Este livro contém os seguintes capítulos:

Teste de verificação

Uma apresentação do cálculo

Capítulo 1 Funções e Modelos

Capítulo 2 Limites e Derivadas

Capítulo 3 Regras de Derivação

Capítulo 4 Aplicações de Derivação

Capítulo 5 Integrais

Capítulo 6 Aplicações de Integração

Capítulo 7 Técnicas de Integração

Capítulo 8 Mais Aplicações de Integração

Apêndices

83

Neste livro, a derivada é introduzida depois dos limites e antes das integrais de Riemann, como outros autores também fazem.

O autor inicia seu livro propondo alguns exercícios de múltipla escolha, que ele chamou de testes de verificação, em que os conteúdos de Álgebra, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria. Ao final de cada série de exercícios ele disponibilizou a resposta dos testes.

No primeiro capítulo, Stewart (2010) aborda as Funções e os modelos, a utilização das calculadoras gráficos e do computador para fazer gráficos de funções e resolver problemas mais complexos, além de abordar com mais profundidade as funções exponencial e logarítmica.

O capítulo 2 foi utilizado para abordar os limites, a derivada e taxas de variação e a derivada como uma função. No capítulo 3, o autor abordou as regras de derivação, a regra da cadeia, a derivada implícita, a taxa de variação nas ciências naturais e sociais, o crescimento e decrescimento exponencial e aproximações lineares e diferencial.

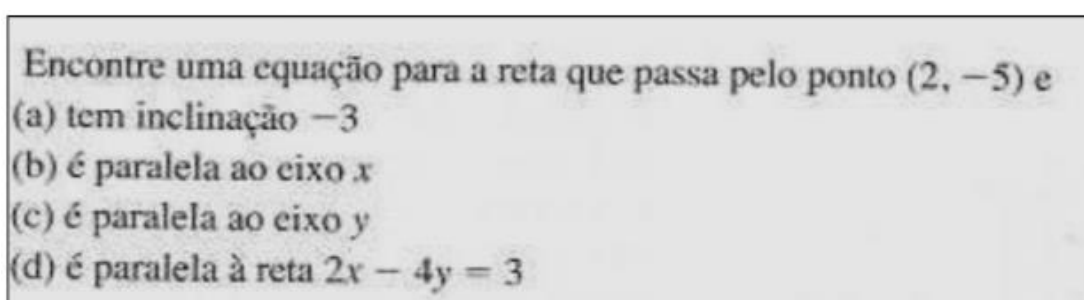
No capítulo 4, o autor aborda as aplicações da derivada. Ele trata dos valores máximos e mínimos, do teorema do valor médio, como a derivada afeta a forma de um gráfico e problemas de otimização. Os outros 4 capítulos tratam das integrais.

Stewart (2010) menciona quais ferramentas o sujeito, ao estudar o cálculo, precisa ter pois "O sucesso no cálculo depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria" (STEWART, 2010, p.XVII).

Quando o autor elaborou este teste de verificação para "diagnosticar" os conhecimentos prévios do sujeito, é possível que os tenha considerado como pré-requisitos para o Cálculo em geral. Escolhemos um exercício de cada teste, que representasse sua necessidade no desenvolvimento da derivada, para associar o pré-requisito envolvido nesse exercício como "já-encontrado" na introdução da derivada.

Para o autor, na apresentação da derivada é importante tratar da abordagem geométrica, da taxa de variação e da simbólica, pois o sujeito precisa conhecer argumentações algébricas como simplificação de expressões, fatoração, racionalização, completar quadrados e algumas identidades. Também precisa possuir características do mundo simbólico, pois o sujeito ao se deparar com necessidade do uso deste no desenvolvimento da derivada, trabalhando apenas com argumentações algébricas.

Figura 11 - Exercício para representar o Teste de Verificação: Geometria Analítica



Fonte: Stewart (2010, p.XIX)

A importância deste é verificar o conhecimento do aluno para determinar a equação da reta em geometria analítica, já que esta ferramenta é essencial para o desenvolvimento da derivada como reta tangente ao gráfico, pois o estudante tem que entender o que é o coeficiente angular de uma reta, para conseguir entender a derivada da forma geométrica.

A noção a seguir tem grande importância para as maneiras de entender a derivada como: geométrica, taxa e simbólica, pois a derivada será definida por meio deste quociente, logo o estudante já deve começar a se familiarizar com este processo de simplificação para o uso em problemas de derivada por meio do quociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

Figura 12 - Exercício para representar quociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

EXEMPLO 3 Se $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ e $h \neq 0$, calcule $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

SOLUÇÃO Primeiro calculamos $f(a+h)$ substituindo x por $a+h$ na expressão para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

A seguir, substituímos isso na expressão dada e simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$

Fonte: Stewart (2010, p.2)

Destacamos um exemplo do capítulo de limites, utilizado para representar a importância deste saber que o autor utiliza como ferramenta para o cálculo da derivada de uma função, então, para o estudante entender a definição formal que é apresentada, precisa conhecer o conceito, de limite, bem como os processos para o cálculo dele.

Figura 13 - Exemplo utilizado para representar os limites

$$\text{Calcule } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

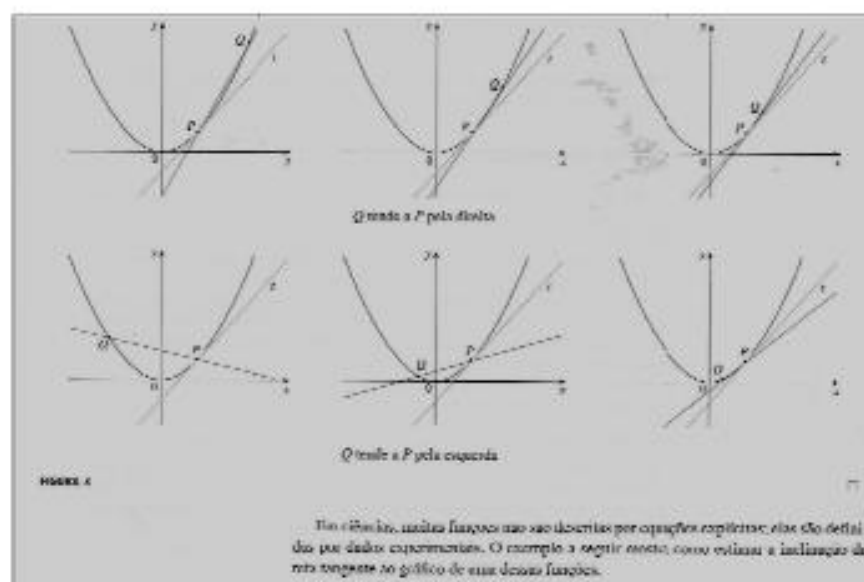
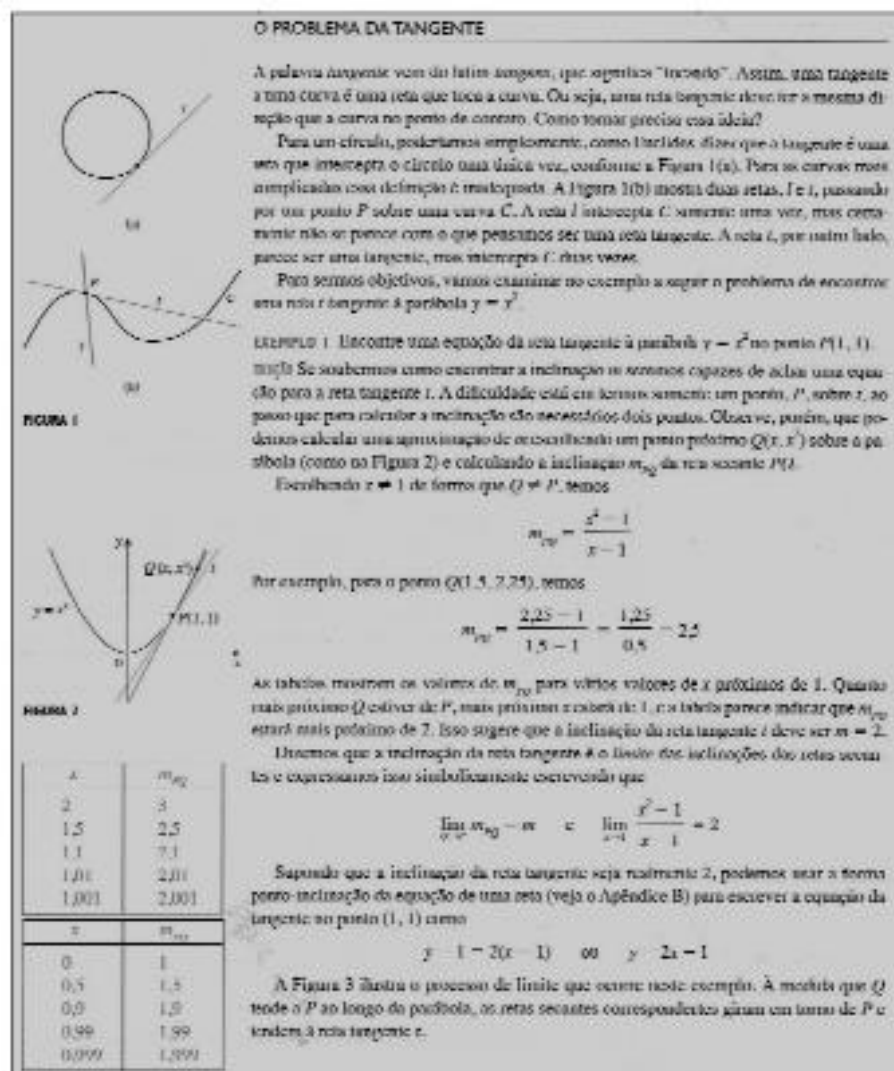
Fonte: Stewart (2010, p.78-117)

Este saber tem características simbólicas, devido à própria simbologia e a interpretação, relacionadas com o processo do cálculo deste limite, com suas propriedades, e pode ser relacionado com o coeficiente angular da reta tangente, que vai resultar na derivada da função e que será simbolizada por f' .

Analisamos o livro do Stewart (2010) com o objetivo de verificar quais maneiras de se entender a derivada que foram utilizadas como abordagem para o conceito, e de verificar que características aparecem na obra.

Vamos analisar pelo ponto de vista da representação Geometria, onde o autor nos traz o problema da tangente:

Figura 14 - Abordagem Geométrica da derivada



Nesta apresentação, o autor faz uso de alguns saberes utilizados anteriormente, como a inclinação da reta, o quociente das diferenças utilizado para o cálculo do coeficiente angular da reta secante; o limite do quociente das diferenças, utilizado para resolver o limite que determina a inclinação da reta tangente; simplificações que foram utilizadas para realizar o cálculo do limite, mas não foram destacadas no texto.

Desta forma, o estudante pode desenvolver características do concreto, ao apresentar o gráfico da função com a reta tangente; ao apresentar as retas secantes que interceptam pontos à direita e apresentação da tabela de valores para cada reta secante, do simbólico, quando o autor apresenta o cálculo da inclinação da reta secante PQ, definida por $m_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$ e que caracteriza o quociente entre a diferença entre dois pontos, e do axiomático, cujas características estão presentes nas definições feitas pelo autor como por exemplo: .

Figura 15 - Formalização do coeficiente angular da reta tangente a uma função

Dizemos que a inclinação da reta tangente é o *limite* das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo que

$$\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Fonte: **Stewart (2010, p.73)**

O livro LD2

No prefácio do livro de Thomas et al (2009), o autor argumenta que o livro foi escrito da maneira mais clara e possível. Além disso, o seu conteúdo foi reestruturado, de modo que se torne mais lógico e adequado ao currículo universitário padrão.

O autor discute que ao terminar de estudar o livro, os alunos estarão suficientemente familiarizados com a linguagem matemática, de maneira que poderão aplicar os conceitos do cálculo em inúmeros problemas da ciência e da Engenharia.

O autor inicia seu livro com um capítulo que aborda as funções e seus gráficos. Nele, o autor também, aborda a combinação de funções, a translação e a mudança de escala nos gráficos e a construção de gráficos utilizando a calculadora e o computador. Aborda ainda e em especial, as funções exponencial, inversa e logarítmica, nesta ordem.

O segundo capítulo inicia com a abordagem da taxa de variação e dos limites. Além disso, o autor trata da definição precisa de limite, dos limites laterais e infinitos, e da continuidade das funções. A última parte do capítulo foi utilizada para tratar das retas tangentes e da derivada da função em um ponto.

No terceiro capítulo, o autor discute a derivada como função, as regras de derivação, a derivada como taxa de variação instantânea, a derivada das funções logarítmicas e trigonométricas. O capítulo termina com o estudo de problemas de taxas de variação relacionadas e com a linearização e as diferenciais.

No quarto capítulo são tratadas as aplicações das derivadas. O autor aborda os extremos de funções, o Teorema do Valor Médio, concavidade e esboço de curvas e os problemas de otimização. Além desses temas, também são discutidos a regra de l'Hospital e o método de Newton para solução de $f(x) = 0$.

O livro LD3

No prefácio do livro de Guidorizzi (2001) o autor informa que o livro foi baseado nos cursos de Cálculo que ele ministrou aos alunos da Escola Politécnica da USP, do Instituto de Matemática e Estatística da USP e do Instituto de Ensino de Engenharia Paulista – IEEP.

Ele discute que o livro foi desenvolvido de forma que os conceitos e teoremas sejam acompanhados, sempre que possível, de uma interpretação Geométrica ou Física. Além disso, o autor alega que deixou as demonstrações de alguns teoremas para o final da sessão ou em apêndice, de modo que o estudante possa omiti-las em uma primeira leitura.

A respeito dos exemplos e exercícios, Guidorizzi (2001) argumenta que disponibilizou um número suficiente deles, para a compreensão da matéria. Ele

procurou dispor os exercícios em ordem crescente de dificuldade. Existem exercícios que apresentam algumas sutilizações e que demandam um melhor domínio do assunto, para sua resolução.

Este livro contém os seguintes capítulos

Capítulo 1 Números reais

Capítulo 2 Funções

Capítulo 3 Limite e continuidade

Capítulo 4 Extensões do conceito de limite

Capítulo 5 Teoremas do anulamento, do valor intermediário e de Weierstrass

Capítulo 6 Funções exponencial e logarítmica

Capítulo 7 Derivadas

Capítulo 8 Funções inversas

Capítulo 9 Estudo da variação de funções

Capítulo 10 Primitivas

Capítulo 11 Integral de Riemann

Capítulo 12 Técnicas de primitivação

Capítulo 13 Mais algumas aplicações da integral. Coordenadas polares

Capítulo 14 Equações diferenciais de 1ª ordem de variáveis separáveis e lineares

Capítulo 15 Teoremas de Rolle, do valor médio e de Cauchy

Capítulo 16 Fórmula de Taylor

Capítulo 17 Arquimedes, Pascal, Fermat e o cálculo de áreas

Apêndice 1 Propriedade do supremo

Apêndice 2 Demonstrações dos teoremas do Cap. 5

Apêndice 3 Demonstrações do teorema da Seção 6.1 e da Propriedade (7) da Seção 2.2

Apêndice 4 Funções integráveis segundo Riemann

Apêndice 5 Demonstração do teorema da Secção 13.4

Apêndice 6 Construção do corpo ordenado dos números reais Como pôde ser observado, a derivada é introduzida posteriormente aos limites e as funções contínuas e previamente às integrais de Riemann.

Como pôde ser observado, a derivada é introduzida posteriormente aos limites e as funções contínuas e previamente às integrais de Riemann.

O autor Identifica a necessidade de simplificar quocientes do tipo $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, as identidades apresentadas pelo livro que podem auxiliar alguns tipos de simplificação como, por exemplo, quando $f(x) = x^2$, pois $f(x) - f(a) = x^2 - a^2$, logo

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = x + a, \text{ para } x \neq a$$

Em seguida o autor oferece alguns exercícios para treinamento, como os disponíveis na figura 16:.

Figura 16 - Simplificação de Quociente

6. Simplifique.

a) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

d) $\frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

e) $\frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1}$

f) $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}}{x - 3}$

g) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x - 5}$

h) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p}$

i) $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}}{x - p}$

j) $\frac{x^4 - p^4}{x - p}$

l) $\frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

m) $\frac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h}$

n) $\frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

o) $\frac{(x + h)^2 - (x - h)^2}{h}$

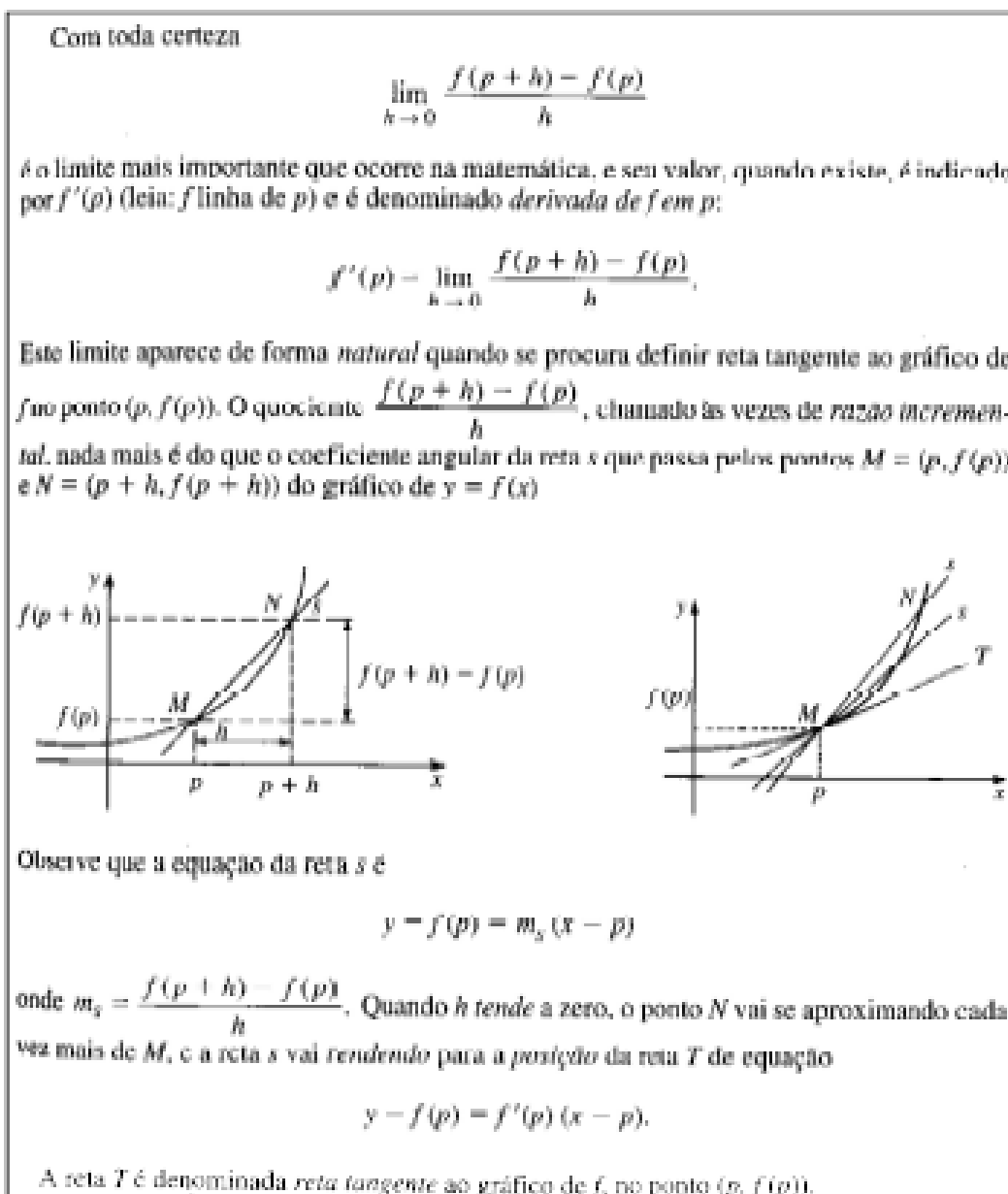
Fonte: Guidorizzi (2001, p.11)

A importância desta ferramenta está no fato de $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ ou $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ serem a base para o desenvolvimento do conceito de derivada ao entender o conceito da derivada da forma: Geométrica ou Taxa, ou seja, como o quociente de duas variações $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Não encontramos funções definidas neste exercício, mas as simplificações oferecidas no exercício a), e nos exercícios de d) até n), podem ser entendidas como um preparação para essas simplificações com as funções, como exemplo, no exercício a) $f(x) = x^2$ e $p = 1$, no exercício d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $p = 1$, no exercício e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $p = 1$.

Neste exercício, o aluno que se depara com esta simplificação não precisa identificar que existe uma função envolvida, mas no momento que se depara com esta situação com funções, esperamos que o desenvolvido seja útil.

O autor apresenta características simbólicas, pois contém a apresentação da função e a aplicação do quociente da diferença de seus valores.

Figura 17 - Limite do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



O autor apresenta, pela primeira vez, o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, o intitula de “derivada de uma função” e, devido à importância deste limite, define um novo conceito, f' , em que $f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$.

Apresenta características simbólicas, ao apresentar de forma direta o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$.

Também apresenta características formais, ao definir $f'(p)$ como simbologia para o limite, quando o mesmo existe, também o denomina de derivada de f em p .

Existem características corporificadas, ao relacionar o quociente $m_s = \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$

com o coeficiente angular da reta s , que passa pelo gráfico de f nos pontos

$(p+h, f(p+h))$ e $(p, f(p))$ e também ao relacionar a reta tangente T ao

gráfico no ponto $(p, f(p))$, com a reta que tem coeficiente angular $f'(p) =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ dada pela equação $y - f(p) = f'(p)(x - p)$.

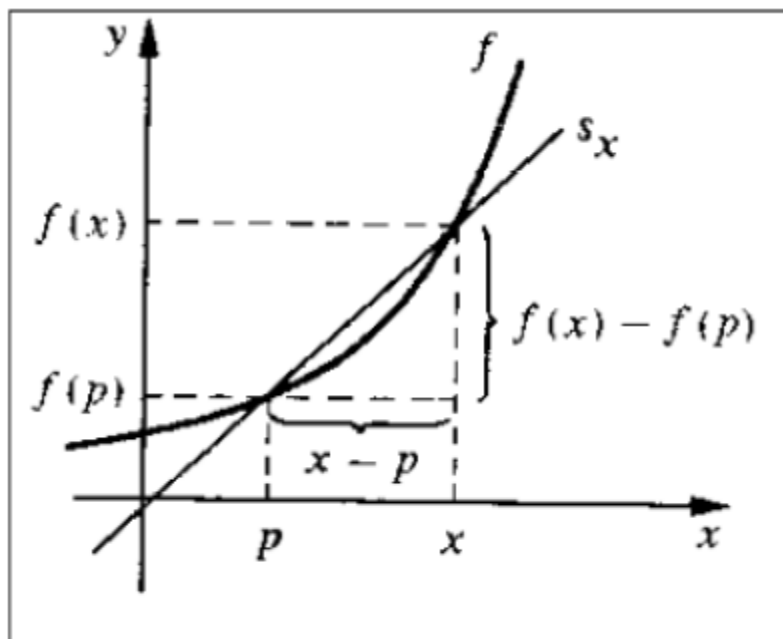
Apresentamos na continuação a análise do capítulo sobre derivada, na qual foram destacadas as abordagens feitas dentre os descritos na etapa acima, que podem ou devem ser utilizados.

A maneira escolhida foi a abordagem Geométrica seguida da Taxa. Ao iniciar sua abordagem, o autor salienta a importância do limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, que é a ferramenta limite aplicado ao quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; e no quociente da variação aplicado a função f (ver p.76).

O sujeito pode desenvolver características concretas, simbólicas e axiomáticas, conforme detalhamos no que segue.

Concretas - ao apresentar a reta secante ao gráfico de f , o autor apresenta o coeficiente angular de $S_x = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, para corporificá-lo por meio de um gráfico.

Figura 18 - Gráfico que apresenta $f(x) - f(p)$ e $x - p$, visto no cálculo do quociente da reta Secante



Fonte: Guidorizzi (2001, p.76)

O simbólico: inicia a abordagem pela apresentação do limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ para depois destacar sua importância. Apresenta a velocidade média como quociente $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ e a velocidade instantânea como $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$.

O axiomático: quando o autor argumenta: se x tende a p , então o coeficiente angular da reta secante tende a $f'(p)$ e por sua vez $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$; ao definir a velocidade instantânea como $f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$.

Observa-se que o autor apresenta a derivada da forma: Simbólica, Infinitesimal e, novamente, como Taxa.

3.3 A Dimensão Ecológica da Derivada

Para Gascón (2011), a dimensão ecológica de um problema didático, de forma simplificada, contém questões que permeiam a seguinte pergunta: “por que as coisas, isto é, as OM e as OD são como são, na contingência institucional e quais são as condições que se quer para vir a ser diferentes dentro do possível?”

Segundo o autor, a dimensão ecológica inclui de certa maneira, as outras duas dimensões e em certa medida, é um problema em que a didática se preocupa com o estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas, desata forma, é preciso considerar as condições e as restrições impostas sobre tais praxeologias em todos os níveis de codeterminação didática, que a TAD propõe uma hierarquia entre cada um deles.

Tal hierarquia, para Gascón, (2011), é construída por meio de organizações matemáticas e suas correspondentes organizações didáticas, bem como suas interações presentes nestes diferentes níveis: Civilização ↔ sociedade ↔ Escola ↔ Pedagogia ↔ Disciplina ↔ Área ↔ Setor ↔ Tema ↔ Questão.

Cada nível contribui para determinar a ecologia institucional das OM e das OD, tanto pelos pontos de apoio que oferece como pelas restrições que impõe. Em cada nível se produzem restrições entre as OM e as OD que tem caráter recíproco: a interpretação e a estruturação das OM em cada nível de hierarquia condicionam as formas possíveis de organizar seu estudo, ainda que reciprocamente, a natureza e as funções dos dispositivos didáticos existentes em cada nível determinam, em grande medida, o tipo de OM que será possível reconstruir.

Desta forma, de acordo com Gascón (2011), qualquer questão que provoca um estudo em uma instituição didática, seja ela a matemática ou não, faz parte de um tema que pertence a um setor e que, por sua vez, está inserido em uma área de uma tal disciplina. Para o autor, se a matemática for a disciplina em evidência, estes níveis serão denominados níveis matemáticos e os outros, além destes, são considerados níveis não matemáticos, ou pedagógicos, mas que possuem restrições com forte influência na matemática escolar, sendo então parte do objeto de estudo da didática da matemática.

Construir tal hierarquia disciplinar não caracteriza a qualidade do estudo do problema didático. Para que se possa estudar uma questão matemática significativa na escola, é necessário que ela venha de questões que a sociedade propõe para que se estudem na escola, que apareça em certas situações profundas da matemática e ainda, que conduza a algum lugar, isto é, que seja relacionada com outras questões que se estudam na escola.

Para Gascón (2011), a dimensão ecológica de um problema didático abrange questões que discutem os tipos de restrições, e de que nível eles vêm, são cruciais para a ecologia das praxeologias da matemática e da didática. Sendo mais preciso:

- a) Quais são as condições que permitem dar conta do estado atual –ou um período histórico determinado – das OM e das OD associadas a uma determinada instituição.?
- b) Que restrições dificultam ou impedem que determinadas características das OM e OD se desenvolvam em uma instituição? Em que níveis de hierarquia surgem essas restrições?
- c) Que condições deveriam se estabelecer e em que níveis de hierarquia, para que fosse possível a vida de certas OM e OD com características determinadas?
- d) O modelo epistemológico específico de uma área da atividade matemática dominante em uma instituição I, como condiciona a forma de organizar o ensino (mais geral, o estudo) de tal área em I? (GASCÓN, 2011, p. 219, tradução nossa)

Assim, o estudo da dimensão ecológica revela restrições que determinam as características das praxeologias institucionais, independente da vontade dos sujeitos que participam nelas. Existem restrições que podem ser modificadas em certa posição institucional, como a do professor e a do diretor de uma escola.

Como fizemos nas dimensões anteriores, transcrevemos esses questionamentos direcionando para o foco de nossa pesquisa e reescrevemos as seguintes questões: quais são as principais restrições que dificultam ou impedem a vida da derivada no ensino considerando os sistemas escolares atuais? e Como o ensino de derivada, inserido em uma pedagogia dominante, afeta a vida deste conteúdo?

4 UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE DERIVADA

Neste tópico iremos construir um Modelo Didático de Referência – MDR de acordo Bosch; Gascón (2010), de modo a ampliar o Modelo Epistemológico de Referência, apresentado no capítulo 3, estabelecendo Organizações Matemáticas Locais – OML para dar conta de ensinar a noção de derivada no ensino superior. Este modelo servirá de subsídios para desenvolvermos AEP para alunos do primeiro ano de cursos de Engenharia e Tecnologia.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para concluir, retornamos ao ponto de partida desta pesquisa, que foram as questões que com o problema do ensino e da aprendizagem da derivada no primeiro ano do ensino superior. Verificamos que os estudantes apresentavam problemas na aprendizagem e interpretação da noção de derivada. Realizamos algumas leituras e verificamos que a Teoria Antropológica do Didático mais se aproximava de nossas inquietações e da maneira de resolvê-las.

Por conta de nossa experiência no ensino de Cálculo Diferencial e Integral para os primeiros anos do ensino superior de cursos que contém esses conhecimentos em seus Projetos Pedagógicos de Curso, pudemos delimitar com mais facilidade nosso problema de pesquisa. Assim, sustentados pela revisão de literatura que fizemos e incomodados por não encontrar trabalhos que apresentem um Modelo Epistemológico de Referência (MER) da derivada, assim como seu Modelo Didático associado, nosso problema de pesquisa foi o de apresentar um Modelo Didático de Referência (MDR), e algumas Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), a partir da análise das três dimensões do problema didático, à luz da TAD, que podem vir a se tornar um Percorso de Estudo e Pesquisa (PEP) para algum pesquisador que queira dar continuidade a este estudo.

Para nos guiar pelos caminhos da realização e conclusão deste estudo, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: **Quais as contribuições que os estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico podem dar para o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência amparado por Atividades de Estudo e Pesquisa voltadas ao ensino de derivada na Educação Superior?**

Para responder essa questão e de modo a verificar que contribuições podem ser levantadas dos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico para o desenvolvimento de um Modelo Didático de Referência - MDR, que dê suporte à criação e ao desenvolvimento de Atividades de Estudo e Pesquisa - AEP para o ensino de derivada, aprofundamos nosso objetivo, considerando a abrangência dos estudos que serão desenvolvidos, pensamos em destacar cinco objetivos específicos, que delimitarão o foco de nossa investigação no sentido de alcançar o objetivo geral e que

se relacionam a cada um desses estudos. O primeiro deles foi o de identificar os conhecimentos e as razões que, em um dado tempo, tornaram possível e necessário o desenvolvimento do conceito de derivada, fazendo um estudo de sua gênese. A partir dessa gênese, e em segundo lugar, os segundo deles era criar um Modelo Epistemológico de Referência, para em um outro momento, elaborar o terceiro deles, que era identificar em que consiste o Modelo Epistemológico Dominante que orienta o estudo de derivada na Educação Superior e o seu consequente Modelo Didático Dominante, por meio da análise das propostas curriculares oficiais, de manuais e de livros didáticos, avaliando seu alcance e seu limite quanto a possíveis articulações com outros ramos da matemática e/ou das outras ciências. O quarto dos objetivos específicos foi identificar que condições e restrições regulam as organizações matemática e didáticas para o ensino do Derivada na Educação Superior.

O último dos objetivos específicos foi propor um Modelo Didático de Referência, fundamentado nas possíveis contribuições advindas dos estudos epistemológico, econômico-institucional e ecológico, capaz de nortear a criação de AEP para o estudo de derivada.

Apoiados pelas leituras que fizemos, constatamos, em concordância com uma das hipóteses que enunciamos na delimitação de nosso problema de pesquisa, que as razões de ser das derivadas são relativas aos estudos das curvas dadas por equações algébricas de modo a se obter as equações das retas tangentes a essas curvas, além da necessidade de calcular a velocidade instantânea que os pontos dessas curvas se deslocavam nas mesmas.

Verificamos também que o desenvolvimento da noção de derivada ocorreu de maneira oposta a maneira que os livros didáticos e os documentos acadêmicos atualmente defendem, isto é, primeiro se deu o desenvolvimento da noção de taxa de variação e de quadratura, em seguida e devido a sua necessidade foi definida a noção de função e de variação. O próximo desenvolvimento foi a noção de limites e por último a definição de número real.

Para finalizar, identificamos, nas maneiras diferentes de entender a derivada, a possibilidade de contribuir para a expansão desse tópico nos processos de ensino, o que poderia resultar num entendimento mais abrangente da ideia de derivada. Assim, é preciso explorar mais essas maneiras, que focam outras formas de entender a derivada, para possibilitar aos estudantes mais interpretações possíveis, que podem

tornar o ensino da derivada menos formal, mais intuitivo e mais voltado para o contexto em que vai ser aplicado.

Como sugestão para pesquisas posteriores, defendemos a realização de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) para o desenvolvimento de um Modelo Didático de referência para o ensino de Derivada, utilizando os resultados obtidos com esta pesquisa, para algum pesquisador que queira dar continuidade a este estudo, uma vez que apenas conseguimos alcançar o desenvolvimento de Atividades de Estudo e Pesquisa, pela limitação de tempo que tivemos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Atualizada ed. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

AVILA, G. **Limites e derivadas no Ensino Médio?** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 60, p. 30-38, 2006.

BARON, M. E. **Curso de história da matemática—Origens e desenvolvimento do cálculo**: Unidade 1, Trad. José Raimundo B. Coelho, Editora Universidade de Brasília, 1985a.

_____. **Curso de história da matemática—Origens e desenvolvimento do cálculo**: Unidade 2, Trad. José Raimundo B. Coelho, Editora Universidade de Brasília, 1985b.

_____. **Curso de história da matemática—Origens e desenvolvimento do cálculo**: Unidade 3, Trad. José Raimundo B. Coelho, Editora Universidade de Brasília, 1985c.

_____. **Curso de história da matemática—Origens e desenvolvimento do cálculo**: Unidade 4, Trad. José Raimundo B. Coelho, Editora Universidade de Brasília, 1985d.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. **Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares**. Recherches en didactique des mathématiques, v. 24, n. 2-3, p. 205–250, 2004. France: La Pensée Sauvage.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación"**. In: BRONNER, A.; et al. (Ed.). Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: Université de Montpellier, 2010. p. 55-91.

_____. Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. (Eds.) Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Switzerland: Springer, 2014, p.67- 83.

BOYER, C. B. ; MERZBACH, U. C. **History of mathematics**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.

BRASIL. CNE. Resolução nº 02/2015 de 1º de julho de 2015. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior e para a formação continuada**. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 02 jul. 2015. Seção 1, p. 8-12.

_____. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei, p. 96, 1996.

_____. Ministério da Educação e Cultura. CAPES. Disponível em <<http://www.capes.gov.br/duvidas-frequentes/62-posgraduacao/2376-qual-e-a-diferenca-entre-o-mestrado-academico-e-o-mestrado-profissional>>. Acesso em: 30 jun. 2014.

CAUCHY, A. L. **Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique**. Ire partie. Analyse algébrique. Paris, 1821.

CHAACHOUA, H. L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. Grenoble: Grenoble Université Alpes. 2014a, 21 f. Atelier., 2014.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1997.

_____. **L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique**. Recherches en didactique des mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221–265, 1999. France: La Pensée Sauvage.

_____. **Pourquoi la transposition didactique?** Communication au. Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques, p.1981-1982, 1982.

_____. La TAD face au professeur de mathématiques. Toulouse, UMR ADEF. Disponível:
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf, 2009.

_____. **La notion de PER: problèmes et avancées**. 2009. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr>, 2012. Acessado em : 14/05/2018

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

COSTA, A. C. **Geometria Analítica no Espaço: Análise das Organizações Matemática e Didática em Materiais Didáticos**, 2015. Tese de doutorado – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa - métodos qualitativo, quantitativo e misto**; tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2nd ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DOMENICO, L. C. A. DE. **Aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de tecnologias de informação e comunicação**, 2006. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013

FERREIRA, N. S. A. **As pesquisas denominadas “Estado da Arte”**. Educação & Sociedade, Campinas, ano 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. São Paulo: Makron Books, 2007.

FONT, V. **Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada**. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Anais... . p.111–128, 2005.

GASCÓN, J. **Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas**. In: Actas del III Simposio de la SEIEM, p. 129-150, Valladolid. 1999.

_____. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 14, n. 2, p. 203-231, 2011.

GODINO, J. D.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. **Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada**. Educ. Matemática Pesquisa, v. 13, p. 141–178, 2011.

GUBA, E. G.; LINCOLN, Y. S. **Effective Evaluation**. San Francisco: Jossey-Bass, 1981

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, vol. 1**. 5th ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001.

HOUAISS, J. **Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

KOTHARI, C.R. **Research Methodology. Methods and Techniques**. New Delhi, New Age International (P) Ltd., Publishers, 2004.

LUCAS, C. O. **Una posible “razón de ser” del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional**. 2015. Tese (Doutorado). Universidad de Vigo. Vigo, 2015.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

_____. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MATHERON, Y.; NOIRFALISE, R.; COMBELLES, C. **Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques: quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique**. *Petit x*, v. 70, p. 30-47, 2006.

MINEIRO, R. M. **Estudo das três dimensões do problema didático de inequações**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

OLIMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro Ano de Matemática—uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática**, 2008. Tese (Doutorado). UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Rio Claro.

PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S.G. **Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil**. *VIDYA*, Santa Maria: v. 34, n. 2, p. 61-74. jul./dez. 2014.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 450 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão Crítica. Desfazendo Mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

STEWART, J. **Cálculo, vol. 1**. 5th ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learnin, 2010.

TALL, D. **Understanding the calculus**. *Mathematics teaching*, v. 110, p. 49– 53, 1985. Association of Teachers of Mathematics.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. **Cálculo, vol. 1**. 11th ed. Pearson Educación, 2009.

VIEIRA, A. F. **Ensino do Cálculo Diferencial e Integral: das técnicas ao *humans-with-media***. 2013. 204 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

VILLARREAL, M. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**, 1999. Tese de Doutorado – UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Rio Claro.

ANEXO A – PLANO DE ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1 - MACKENZIE



UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
Decanato Acadêmico



Unidade Universitária: ESCOLA DE ENGENHARIA		
Curso: ENGENHARIA (TODAS)		Núcleo Temático: Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I		Código da Disciplina: ENEC00278
Professor(es): Célia Mendes Carvalho Lopes; Plácido de Jesus da Silva Leitão Jr; Karl Friehe; Roberta Nunes Attili Franzin; Samuel Xavier; Adilson de Morais.	DRT: 111708-3; 113188-6; 114256-0; 114686-8; 108135-4; 112717-3	Etapas: 1ª
Carga horária: 6	(6) Teórica (0) Prática	Semestre Letivo: 1º semestre de 2015
Ementa: Estudo das funções reais de uma variável real, limites, continuidade, derivadas e suas aplicações, integrais, primitivas, Integral de Riemann, técnicas de Integração (substituição) e aplicações.		
Objetivos:		
Conceitos	Procedimentos e Habilidades	Atitudes e Valores
Conhecer os fundamentos elementares da matemática continua aplicada à engenharia; fundamentar as bases necessárias às disciplinas de conteúdo profissionalizante e específico; compreender os conceitos e técnicas do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável.	Utilizar a matemática como principal linguagem de comunicação e formação de modelos; utilizar análise crítica, raciocínio lógico, intuição e criatividade na resolução de problemas, integrando conhecimentos de outras disciplinas e viabilizando o estudo de modelos abstratos e suas extensões genéricas a novos padrões e técnicas de resolução; identificar e resolver problemas práticos de engenharia.	Ponderar sobre a utilização da matemática como linguagem e principal ferramenta para a resolução de problemas de engenharia; agir com ética na tomada de decisões que envolvam aspectos financeiros, econômicos, sociais etc.; ter iniciativa, independência e responsabilidade no aprendizado; realizar, com consciência e de forma ética, trabalhos e listas de exercícios propostos, cumprindo os prazos determinados; conscientizar-se de um estudo contínuo e sistemático da disciplina durante o curso, para o aproveitamento do mesmo, com o auxílio dos livros indicados na bibliografia; manter uma postura correta quanto à frequência, participação e atenção às aulas, evitando conversas paralelas e mantendo o foco no conteúdo; respeitar os horários de início e fim de aula.



UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
Decanato Acadêmico



Conteúdo Programático:

1. Números reais, variáveis e funções reais;
2. Limites e continuidade para funções reais; derivadas para funções reais;
3. diferencial e regras de diferenciação para funções reais e aplicações;
4. Integral para funções reais e aplicações;
5. técnicas de Integração para funções reais.

Metodologia:

Durante as 6 aulas semanais, os alunos terão não somente aulas expositivas mas também terão a oportunidade de desenvolver atividades, individuais ou em pequenos grupos, de resolução de exercícios. Como atividade extra sala de aula serão propostos aos alunos, no decorrer do semestre letivo, exercícios retirados ou não do livro texto.

Critério de Avaliação:

O processo de avaliação deverá incluir no mínimo dois instrumentos de avaliação intermediária, conforme o Regulamento Acadêmico. O aluno poderá efetuar uma Prova Substitutiva com o intuito de substituir a menor nota que compõe a Média das Avaliações Intermediárias.

MI (média das avaliações Intermediárias)

PAF (avaliação final)

MF (média final)

Primeira possibilidade:

$MI \geq 7,5$ (sete e meio) e frequência $\geq 75\% \Rightarrow$ aluno aprovado na disciplina.

$$MF = MI$$

Segunda possibilidade:

$2,0 \leq MI < 7,5$ e frequência $\geq 75\% \Rightarrow$ obrigatoriedade da realização da PAF.

$$MF = (MI + PAF) / 2$$

Bibliografia Básica:

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. v. 1.

STEWART, J. Cálculo. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. v. 1.

WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. Cálculo [de] George B. Thomas. 11. ed. São Paulo: Pearson/Addison-Wesley, 2010. v. 1.

Bibliografia Complementar:

ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 1.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A. São Paulo: Pearson/Prentice Hall, 2006.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

PISKUNOV, N. Cálculo diferencial e Integral. 18. ed. Porto: Lopes da Silva, 2000. v. 1.

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. v. 1.

ANEXO B – PLANO DE ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1 - UNINOVE



Diretoria de Ciências Exatas
Cursos: Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica e Produção Mecânica
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Plano de Ensino - 2º Semestre 2014 - Terça - feria

Aula	Data	Conteúdo	Aulas Dadas	Exercícios de referência	Objetivo
1	05/ago	Apresentação da disciplina: conteúdo programático, formas de avaliação, bibliografia. Explicar funcionamento da monitoria. Função composta. Introdução a Limites de uma função: noção intuitiva, definição, propriedades. Exercícios.	4	[2] Seção 3.6 - Exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 7. [3] Seção 2.2 - Exercícios 1 a 7 e 12. Seção 2.3 - Exercícios 1 a 8.	Revisar as funções compostas. Introdução do conceito de limite de uma função utilizando a noção intuitiva.
2	12/ago	Limites determinados. Limites laterais. Continuidade de funções. Exercícios.	4	[2] Seção 3.6 - Exercícios 21, 22, 24, 25, 30, 32 e 34. Seção 3.8 - Exercícios 1, 2 e 9. Seção 3.18 - Exercícios 1 e 4. [3] Seção 2.3 - Exercícios 1 a 8, 45, 46 e 48. Seção 2.5 - Exercícios 3, 4, 7; 10 a 12.	Exercitar técnicas de cálculo de limites determinados (polinomiais). Discutir conceitos de limites laterais e verificação de continuidade de funções.
3	19/ago	Limites indeterminados (função polinomial). Limite infinito e Limite no infinito. Exercícios.	4	[2] Seção 3.10 - Exercícios 1, 4, 5, 9, 12. [3] Seção 2.3 - Exercícios 11 a 20.	Exercitar técnicas de cálculo de limites indeterminados (funções polinomiais), limites infinitos e limites no infinito.
4	26/ago	Taxa média de variação (reta secante): definição e interpretação geométrica. Taxa instantânea de variação (reta tangente). Definir derivada pelo conceito de Limite. Derivada no ponto. Exercícios.	4	[2] Seção 4.7 - Exercícios 1, 5, 7a, 7b, 8a e 8b. [3] Seção 2.7 - Exercícios 16, 25, 26, 41, 42 e 43. Seção 2.8 - Exercícios 19 a 23.	Apresentar taxa média de variação e taxa de variação instantânea. Interpretação geométrica. Introdução do conceito de derivada a partir do conceito de limite. Derivada no ponto.
5	02/set	Taxa média de variação (reta secante): definição e interpretação geométrica. Taxa instantânea de variação (reta tangente). Definir derivada pelo conceito de Limite. Derivada no ponto. Exercícios.	4	[2] Seção 4.7 - Exercícios 1, 5, 7a, 7b, 8a e 8b. [3] Seção 2.7 - Exercícios 16, 25, 26, 41, 42 e 43. Seção 2.8 - Exercícios 19 a 23.	Apresentar taxa média de variação e taxa de variação instantânea. Interpretação geométrica. Introdução do conceito de derivada a partir do conceito de limite. Derivada no ponto.
6	09/set	Regras de derivação de funções elementares. Regras da potência, da soma e da diferença. Exercícios.	4	[2] Seção 4.12 - Exercícios 1 a 6; 21 e 22. [3] Seção 3.1 - Exercícios 3 a 26. Seção 3.3 - Exercícios 1, 2, 3, 4 e 6.	Introduzir as primeiras regras de derivação das funções elementares. Regra da potência, soma e diferença.
7	16/set	Regras do produto e do quociente. Exercícios.	4	[2] Seção 4.12 - Exercícios 7 a 20. [3] Seção 3.2 - Exercícios 3 a 17. Seção 3.3 - Exercícios 5; 7 a 16.	Ensinar regra do produto e quociente.
8	23/set	Problemas de aplicação. AV1	4		

9	30/set	Derivação de funções compostas (regra da cadeia). Exercícios.	4	[2] Seção 4.16 - Exercícios de 5 a 31. [3] Seção 3.4 - Exercícios 1 a 36. Seção 3.6 - Exercícios 1 a 22.	Retomar funções compostas para tratar da derivação pela Regra da Cadeia. Explorar exercícios de derivação de funções compostas pelas logarítmicas, trigonométricas, exponenciais, algébricas e inversas das trigonométricas.
10	07/out	Derivação de funções compostas (regra da cadeia). Exercícios.	4	[2] Seção 4.16 - Exercícios de 5 a 31. [3] Seção 3.4 - Exercícios 1 a 36. Seção 3.6 - Exercícios 1 a 22.	Explorar exercícios de derivação de funções compostas pelas logarítmicas, trigonométricas, exponenciais, algébricas e inversas das trigonométricas.
11	14/out	Derivação de funções compostas (regra da cadeia). Exercícios.	4	[2] Seção 4.16 - Exercícios de 5 a 31. [3] Seção 3.4 - Exercícios 1 a 36. Seção 3.6 - Exercícios 1 a 22.	Explorar exercícios de derivação de funções compostas pelas logarítmicas, trigonométricas, exponenciais, algébricas e inversas das trigonométricas.
12	21/out	Derivadas sucessivas. Cálculo de limite pela regra de L'Hospital. Exercícios.	4	[2] Seção 4.21 - Exercícios de 1 a 12. Seção 5.14 - Exercícios de 1 a 10. [3] Seção 3.4 - Exercícios 47 a 50. Seção 3.6 - Exercícios 23 a 26. Seção 4.4 - Exercícios 5, 7, 9, 11, 15, 19, 23, 27, 29, 37 e 41.	Ensinar derivadas sucessivas e regra de L'Hospital.
13	28/out	Problemas de aplicação. AV2			
14	04/nov	Pontos críticos. Extremos absolutos. Estudo da variação do sinal da primeira derivada: crescimento e decréscimo de uma função. Exercícios	4	[2] Seção 5.10 - Exercícios 5, 7 e 8. [3] Seção 4.1 - Exercícios 47, 49, 51, 53, 55, 57, 61. Seção 4.3 - Exercícios 5, 6, de 9 a 12 item a, de 33 a 39 item a.	Explorar a primeira derivada para determinar pontos críticos e intervalos de crescimento e decréscimo. Exercícios envolvendo o conceito de extremos absolutos.
15	11/nov	Pontos críticos. Extremos absolutos. Estudo da variação do sinal da primeira derivada: crescimento e decréscimo de uma função. Exercícios	4	[2] Seção 5.10 - Exercícios 5, 7 e 8. [3] Seção 4.1 - Exercícios 47, 49, 51, 53, 55, 57, 61. Seção 4.3 - Exercícios 5, 6, de 9 a 12 item a, de 33 a 39 item a.	Explorar a primeira derivada para determinar pontos críticos e intervalos de crescimento e decréscimo. Exercícios envolvendo o conceito de extremos absolutos.
16	18/nov	Estudo da variação do sinal da segunda derivada: concavidade, ponto de inflexão. Extremos relativos. Problemas de otimização. Exercícios.	4	[2] Seção 5.10 - Exercícios 8 e 14. [3] Seção 4.3 - Exercícios de 9 a 12 itens b e c, de 33 a 39 itens b e c.	Explorar a segunda derivada para determinar o ponto de inflexão e a concavidade. Introduzir os testes da primeira e segunda derivada para determinar extremos relativos. Aplicar conceitos discutidos anteriormente na resolução de problemas de otimização.
17	25/nov	Problemas de otimização	4	[2] Seção 5.10 - Exercícios 8 e 14. [3] Seção 4.3 - Exercícios de 9 a 12 itens b e c, de 33 a 39 itens b e c.	Explorar a segunda derivada para determinar o ponto de inflexão e a concavidade. Introduzir os testes da primeira e segunda derivada para determinar extremos relativos. Aplicar conceitos discutidos anteriormente na resolução de problemas de otimização.
18	02/dez	Problemas de otimização. AV3			

19	09/dez	Integração: definição e propriedades. Regra simples da potência. Integral indefinida elementares. Exercícios.	4	[2] Seção 6.2 - Exercícios: 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 17, 21 e 32. [3] Seção 5.4 - Exercícios de 5 até 12.	Introdução do conceito de integração e apresentação da regra simples potência.
20	16/dez	Integral definida, teorema fundamental do cálculo e propriedades. Integração por substituição de variável (regra geral da potência). Exercícios.	4	[2] Seção 6.11 - Exercícios 12, 13, 14, 15, 16, 31, 33 e 36. Seção 6.4 - Exercícios 1, 2, 3, 4, 6, 7, 13, 14, 21, 31, 35, 37, 42, 48. [3] Seção 5.4 - Exercícios de 17 a 28, 31, 35, 38, 57 e 61. Seção 5.5 - Exercícios 7, 11, 21, 28, 29, 32, 45, 50, 51, 61 e 78.	Introdução do conceito de integral definida e apresentação da técnica de integração por substituição de variável.

Bibliografia básica

- [1] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. v. 1. RJ: LTC, 2000.
 [2] FLEMMING, D.M. Cálculo A. 6ª ed. São Paulo: Editora Pearson Education do Brasil, 2007
 [3] STEWART, J. Cálculo. 6ª ed.V1. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2009

Bibliografia complementar

- [4] BOULOS, P. Cálculo diferencial e integral. SP: Makron Books, 1999.
 [5] SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com geometria analítica. v. 1. SP: Makron Books, 1995.
 [6] TAN, S.T. Matemática Aplicada à Administração e Economia. São Paulo: Editora Thomson Learning, 2001

ANEXO C - – PLANO DE ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1 - FATEC

TECNOLOGIA EM FABRICAÇÃO MECÂNICA - EMENTÁRIO

PRIMEIRO SEMESTRE

ATIVIDADES	Semanal	CARGA DIDÁTICA SEMESTRAL Tipo de atividade			
		Teoria	Exercícios	Laboratório	Total
Cálculo Diferencial e Integral I	4	40	40		80
Comunicação e Expressão	4	40	40		80
Desenho Técnico Mecânico I	4	40	40		80
Eleticidade Aplicada	4	40	20	20	80
Física I	4	40	20	20	80
Geometria Analítica	2	20	20		40
Inglês Técnico I	2	40			40
Total do semestre					480

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Objetivos: Desenvolver no aluno a capacidade de analisar problemas de matemática de uma maneira lógica, aplicando alguns princípios básicos, tendo como ferramentas tópicos de Cálculo Integral.

Ementa: Funções reais; Trigonometria; Limites; Derivadas; Estudo das funções: Monotonicidade, concavidade, máximos e mínimos, pontos de inflexão, assíntotas; construção de gráfico.

Bibliografia Básica:

FLEMMING, D M; GONÇALVES, M B. Cálculo A. Prentice Hall, 2006.

STEWART, J; MORETTI, A C; MARTINS, A C G. Calculo, V.1 Cengage, 2009.

STEWART, J; CASTRO, H. Calculo, V.2. Cengage, 2009.

Bibliografia Complementar:

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de Cálculo, V 1 e 2. LTC, 2001.

COMUNICAÇÃO E EXPRESSÃO

Objetivos: Identificar os processos lingüísticos específicos e estabelecer relações entre os diversos gêneros discursivos para elaboração de textos escritos que circulam no âmbito empresarial; desenvolver hábitos de análise crítica de produção textual para poder assegurar sua coerência e coesão.

Ementa: Visão geral da noção de texto. Diferenças entre oralidade e escrita, leitura, análise e produção de textos de interesse geral e da administração: cartas, relatórios, correios eletrônicos e outras formas de comunicação escrita e oral nas organizações. Coesão e coerência do texto e diferentes gêneros discursivos.

Bibliografia Básica:

CINTRA; CUNHA. Nova gramática do Português contemporâneo de acordo com a nova ortografia. Lexikon, 2009.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa. Positivo, 2009.

MARTINS; ZILBERKNOP. Português Instrumental: de acordo com as atuais normas da ABNT. Atlas, 2009.

Bibliografia Complementar:

MEDEIROS, J B; TOMASI, C. Comunicação Empresarial. Atlas, 2009.