PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

MARIO ALBERTO ZAMBRANA VERNIZZI

O ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2021

MARIO ALBERTO ZAMBRANA VERNIZZI

O ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

São Paulo
2021

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação de Mestrado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____

Data: ____________

Email: mario.vernizzi01@etec.sp.gov.br

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

V538 Vernizzi, Mario Alberto Zambrana
O ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES / Mario AlbertoZambrana Vernizzi. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Dissertação (Mestrado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós Graduados em Educação matemática.

1. Operações com números fracionários. 2. Formação docente. 3. Ensino e aprendizagem. I. Silva, Maria José Ferreira da . II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

MARIO ALBERTO ZAMBRANA VERNIZZI

Formação de docentes para o ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

____

Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

____

Dr. Ricardo Nicasso Benito – UFS

____

Dr. Gerson Pastre de Oliveira – PUC-SP

DEDICATÓRIA

À minha mãe Vera Lúcia Zambrana Vernizzi, pelo carinho, amor e dedicação que empenhou em minha formação.

À minha esposa Patricia Souza da Cruz Vernizzi por ter me apoiado e me dado força para seguir meu objetivo.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- CAPES pela bolsa concedida, 88887.466800/2019-00, que foi fundamental para a realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

A minha esposa, mulher, companheira, amiga, Patrícia por ter me ensinado o que é o amor. Por estar sempre ao meu lado e fazer eu querer buscar o meu melhor a cada dia.

As minhas filhas e enteados Ana Carolina, Giovanna, Julia e Vinicius por serem minha alegria. Todo meu amor, por toda a vida.

A minha irmã Juliana por sempre ter acreditado em mim.

A minha Orientadora, Zezé, que acreditou, apoiou mostrou caminhos, não me deixou desanimar e me inspirou a buscar sempre ser um profissional melhor

Aos meus cunhados por todo apoio.

Aos meus colegas de turma da PUC pela união, pelos conhecimentos compartilhados e pelas trocas de experiências.

Aos meus amigos da ETEC de Cidade Tiradentes e do Colégio Drummond Alvorada, com os quais aprendo todos os dias.

Aos meus alunos com os quais estou em eterno aprendizado.

RESUMO

Esta dissertação apresenta quatro sequências didáticas, para o ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária, para ser discutida com docentes que trabalham com as séries iniciais do Ensino Fundamental II, haja vista que por meio da revisão bibliográfica encontramos um número pequeno de pesquisas que tratam dessas operações. Além disso observamos a falta de autonomia de professores para elaborar atividades desse tipo, o que nos leva a ideia de investigar para responder a seguinte questão: *quais conhecimentos professores de matemática mobilizam a respeito do ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária durante a discussão de uma sequência de ensino para o sexto ano do Ensino Fundamental?* Focaremos as operações na concepção parte-todo, partindo das representações de figuras geométricas planas, por ser a mais comum tanto nos livros didáticos quanto na prática dos professores, embora as demais concepções possam aparecer durante as soluções. Apresentaremos uma breve descrição a respeito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009), bem como a respeito da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1977) por acreditar que a junção destas teorias pode auxiliar no ensino de tais operações. Sugerimos novas pesquisas no âmbito a fim de contribuir para a Educação Matemática

.

Palavras-chave: Frações; Números Fracionários; Operações; Formação

ABSTRACT

This dissertation presents four didactic sequences, for the teaching of operations with rational numbers in their fractional representation, to be discussed with teachers who work with the initial grades of Elementary School II, considering that through the bibliographic review we found a small number of researches dealing with these operations. In addition, we observed the lack of autonomy of teachers to develop activities of this type, which leads us to the idea of investigating to answer the following question: what knowledge teachers of mathematics mobilize regarding the teaching of operations with rational numbers in their fractional representation during the discussion of a teaching sequence for the sixth year of elementary school? We will focus the operations on the part-whole conception, starting from the representations of flat geometric figures, as it is the most common both in textbooks and in teachers' practice, although the other conceptions may appear during the solutions. We will present a brief description about the Theory of Registers of Semiotic Representation (DUVAL, 2009), as well as about the Theory of Conceptual Fields (VERGNAUD, 1977) for believing that the junction of these theories can help in the teaching of such operations. We suggest further research in the field in order to contribute to Mathematics Education

.

Keywords: Fractions; Fractional Numbers; Operations; Training

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse estudo é capacitar professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental II, em uma formação continuada, por meio da análise de uma sequência didática para o ensino das operações fundamentais com números racionais em sua representação fracionária de modo a buscar discutir novos caminhos para o ensino e, em decorrência, minimizar as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem dessas operações.

A aprendizagem de números racionais em sua representação fracionária e, consequentemente, suas operações são comumente apontadas por alunos e professores como fatores de grande dificuldade, motivo pelo qual muitas são as pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem voltadas a esse tema, assim como apontado pelo levantamento feito por Dias (2018). De acordo com Valera (2003) o SARESP (1997) apontou

> No que diz respeito à resolução das questões que envolviam números racionais (especialmente na prova aplicada para a 4ª série (5º ano) do Ensino Fundamental), observou-se a facilidade de resolução das questões que abordavam números naturais, em detrimento daquelas que abordavam números racionais”. (VALERA, 2003 apud DIAS, 2018, p. 11)

Com a experiência de sala de aula notamos que mesmo após passarem mais de 20 anos desse apontamento as dificuldades dos alunos nas resoluções referentes a questões que abordam números racionais ainda são preocupante e se iniciam desde o primeiro contato com estes no Ensino Fundamental I.

Entendemos, neste trabalho, as frações como elementos do registro de representação fracionária dos números racionais, no sentido de Duval (2009), cuja construção ocorre nas séries iniciais (primeiro ao quinto ano) do Ensino Fundamental a partir de situações que envolvam os significados parte-todo, medida, quociente, razão e operador de acordo com Silva (2005). As operações, como tratamentos nesse registro, podem ser introduzidas a partir desses significados, para serem descontextualizadas no quinto ano e institucionalizadas como operações com números racionais em sua representação fracionária, com seus respectivos algoritmos.

Moreira e David (2004) acreditam que os saberes fundamentais à prática pedagógica escolar não são devidamente discutidos no processo de formação e que a prática docente escolar não é capaz de produzir os saberes associados à ação pedagógica do professor. Nesse mesmo sentido, Silva (2005) mostra que, em formação continuada, os professores não escolheriam estudar números fracionários, por não questionarem o modo como ensinam, nem o domínio de validade de seus conhecimentos. Mas, ao constatarem que não dominavam plenamente o assunto e, dele, possuíam uma visão limitada, alguns resistiram a uma reelaboração de seus próprios significados para números fracionários.

A respeito do aprendizado de operações com números fracionários, cujos algoritmos serão utilizados para a representação fracionária em outros conjuntos numéricos, que doravante denominaremos de Frações, os docentes têm que fazer com que os alunos consigam entender seus procedimentos e não simplesmente tentar decorar fórmulas e regras que para eles, geralmente, não fazem o menor sentido.

> É necessário descontextualizar as situações para que as habilidades com o cálculo se desenvolvam independente de representações figurais, pois o aluno deve aprender significativamente tais regras e não memorizá-las. Atualmente, o que se observa é a impotência do aluno frente a cálculos simples com números fracionários, mostrando que não entende o assunto e não domina as regras. (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p.76)

A representação fracionária dos números racionais é alvo de inúmeras pesquisas conforma apresentado por Dias (2018) no âmbito da Educação Matemática, contudo é notória a necessidade de novas pesquisas, haja vista a dificuldade de compreensão de alunos e professores no tocante como pode ser observado nos resultados de avaliações externas.

Assim, após esta introdução apresentamos no capítulo 2 a construção de nossa problemática apresentando a revisão bibliográfica, a justificativa da pesquisa, a delimitação de nosso problema e a metodologia de pesquisa utilizada. No capítulo 3 apresentamos nossa fundamentação teórica baseada na teoria dos campos conceituais e na teoria dos registros de representação semiótica. No capítulo 4 apresentamos nossas análises prévias, de acordo com nossa metodologia de pesquisa, com o estudo dos números racionais na BNCC e o estudo das operações com racionais em sua forma fracionária. No capítulo 5 apresentamos nossa pesquisa descrevendo seus sujeitos e a aplicação seguido da análise dos resultados encerrando com nossas considerações finais e apresentação das referências.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo trataremos de nossa problemática, apresentando a revisão bibliográfica, a justificativa da pesquisa, a delimitação do problema e a metodologia que utilizamos.

2.1 Revisão Bibliográfica

Iniciando nossa revisão bibliográfica encontramos diversas pesquisas que tratam de ensino de números fracionários, mas não são tantas as que tratam das operações com esses números.

Para o desenvolvimento do projeto, selecionamos materiais de pesquisas sobre o tema a partir de 2005, para assim, verificar o andamento das pesquisas e contribuições científicas sobre o ensino e a aprendizagem de operações com números racionais em sua representação fracionária.

Iniciaremos este estudo com a dissertação de Dias (2018) que fez o mapeamento de trinta e nove pesquisas produzidas por universidades do estado de São Paulo, entre os anos de 2000 e 2016 e as dividiu em três categorias de análises: “abordagem dos números fracionários em documentos oficiais ou em materiais didáticos”, na qual encontrou cinco pesquisas; “saberes docentes, formação inicial e formação continuada”, composta por treze pesquisas e “ensino e aprendizagem dos números fracionários e de suas operações”, composta por vinte e uma pesquisas. Para Dias (2018, p. 98):

> Ainda que os pesquisadores tenham evidenciado a constante utilização da concepção parte-todo, por esses materiais, é notória a tentativa de articular as demais concepções (quociente, medida, operador e razão) na abordagem dos números fracionários, seja para introduzi-los ou para propor atividades relacionadas a eles.

A segunda categoria analisada por Dias (2018) a respeito de *saberes docentes, formação inicial e formação continuada*, foi a que mais nos interessou. A autora destaca que o interesse e a disponibilidade de professores que participaram de programas de formação continuada, revelando suas angústias e dificuldades quanto ao ensino dos números fracionários, espelham um novo modelo de professor, empenhado em sanar suas dúvidas, em prol de mudanças em sua prática pedagógica.

Quando ao ensino, Dias (2018, p.77) constatou que:

> [...] o uso exacerbado da concepção parte-todo, pelos professores, seja para introduzir o conteúdo, para resolver questões, ou ainda, para elaborá-las, mesmo que tal concepção seja alvo de tantas críticas, pela comunidade científica e estudiosos do tema. [...] em décadas de estudos, o modelo ainda parece fundido nas práticas docentes, o que demonstra que as experiências escolares, vividas pelos professores, podem acarretar influências tão presentes, capazes de interferências em sua prática profissional, mesmo diante de tantas evidências acadêmicas, apresentadas pelas pesquisas científicas.

Igualmente, temos como hipótese de que as dificuldades dos alunos, podem ser provenientes das estratégias de ensino escolhidas por professores com base nos estudos de Silva (1997, 2005), Silva e Almouloud (2008) e Dias (2018).

Dias (2018) aponta que na categoria 2, que trata de formação inicial e continuada de professores a respeito do ensino de frações, nenhuma apresentou propostas de formação docente a respeito de operações com números racionais em sua representação fracionária, pois focavam nos significados das frações. Das vinte e uma pesquisas relacionadas na categoria 3, que trata de ensino e aprendizagem dos números fracionários e de suas operações, apenas Gois (2014) e Oliveira (2015) trouxeram contribuições a esse respeito.

Segundo Dias (2018) com relação aos sujeitos investigados pelas pesquisas da categoria 2, identificou que apenas o estudo de Damico (2007) investigou futuros professores, ou seja, teve enfoque na licenciatura em Matemática, no que diz respeito aos números fracionários. Essa investigação foi, portanto, a *única* que tratou da formação inicial do professor de Matemática, no que concerne ao ensino e à aprendizagem dos números fracionários. Tal fato já demonstra um desafio nesse campo acadêmico, visto que há fragilidade na formação inicial dos professores e, portanto, necessidade de novos estudos correlatos à licenciatura.

Outro aspecto observado dor Dias (2018) é quanto à falta de pesquisas na licenciatura em Pedagogia, com relação a esses números. Não observamos, nas pesquisas que compõem nosso mapeamento, nenhum estudo que tivesse como sujeito esses estudantes. Reiteramos a importância desse tipo de estudo, em virtude de ser o pedagogo, o profissional responsável por colocar os alunos do Ensino Fundamental I em contato inicial com os números fracionários.

Outro dado relevante constatao por Dias (2018) foi com relação ao quadro teórico, onde destaca as contribuições de Gérard Vergnaud, na Teoria dos Campos

Conceituais, presente em nove das treze pesquisas que compõem a categoria sobre *saberes docentes, formação inicial e formação continuada.*

Na intenção de entender melhor como estão as pesquisas que tratam das relações entre os processos de ensino e de aprendizagem de frações e suas operações complementamos o trabalho de Dias (2018).

Silva e Almouloud (2008, p.57) destacam, em pesquisas realizadas em cursos de formação continuada de professores, que a maioria privilegia a ideia de fração como parte-todo e não se sentem à vontade para tratar com situações que abordam a fração como medida, quociente, razão e operador. Para Kieren (1988):

> O modelo parte-todo auxilia, convenientemente, na produção da linguagem fracionária, quando os textos de matemática escolares e o discurso do professor tendem a orientar o estudante a uma imagem de dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar as partes que serão consideradas (numerador). (KIEREN, 1988 apud SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 57),

Os autores ainda apontam que privilegiar ou usar exclusivamente o modelo parte-todo para o ensino de frações, pode ser eficiente em algumas situações, mas que possivelmente criará obstáculos para a aprendizagem em outras situações. Para Dias (2018) um aspecto positivo a ser destacado em sua pesquisa é com relação à conscientização dos professores quanto à necessidade de abordagem dos números fracionários, a partir das diferentes concepções, ressalta que muitos criticam o modelo parte-todo, ainda que o privilegiem em sua prática docente; enquanto outros conseguem modificar sua abordagem e passam a utilizar as concepções de quociente e medida para iniciarem o estudo desses números, com seus alunos.

Camilo (2009), em sua monografia de especialização, investigou se alunos do sexto ano do Ensino Fundamental conseguiam entender as operações fundamentais de adição e subtração de números fracionários utilizando a equivalência entre esses números, figuras e a reta numérica. De forma geral, os alunos compreenderam bem essas operações, embora tenham apresentado algumas dificuldades em conhecimentos que deveriam ser mobilizados e não o foram. De maneira semelhante, Pereira (2011) investigou se alunos do sexto ano construíam, de forma significativa, as regras para as operações fundamentais de multiplicação e divisão de números fracionários, mobilizando o significado parte-todo e, mostrou, que os alunos as compreenderam e explicitaram suas regras operatórias em registro discursivo.

Tal revisão de pesquisas nos ajuda a justificar nosso interesse em discutir tais operações com professores e, no que segue apresentamos nossas justificativas.

2.2 Justificativa da pesquisa

Diante de minhas experiências como docente, sempre me incomodou o porquê de tantas dificuldades dos alunos no entendimento de operações com números em sua representação fracionária, não importando se fossem operações de multiplicação ou divisão, ou tão pouco de adição ou subtração. Sempre me vinha o questionamento de onde poderia estar a causa de tantas dificuldades.

Mesmo trabalhando, em maior parte de meu percurso docente, com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II, Ensino Médio e alunos de Cursos Técnicos de Nível médio, sempre detectei a “repulsa” dos alunos quando em meio a algum cálculo aparecem números em representação fracionária, que trataremos no decorrer do trabalho apenas como frações

Essa percepção de “repulsa” dos alunos, quanto a cálculos com frações, me fez tentar entender seus motivos e a discutir se esse é um problema oriundo de seu ensino, haja vista que esse conteúdo começa a ser trabalhado nas séries finais do Ensino Fundamental I e aprofundado durante todo o Ensino Fundamental II.

Relembrando minha formação acadêmica, na licenciatura em Matemática, as referidas operações não foram retomadas por se tratar de conteúdo considerado como básico o que me faz refletir que os docentes ensinam da forma como aprenderam em sua formação básica. Tais percepções foram essenciais para que. ao ingressar no Mestrado em Educação Matemática. fosse em busca de respostas aos questionamentos que me incomodavam. Nesse sentido, Dias (2018, p.16) ressalta que:

> Ao analisarmos alguns comportamentos de alunos de 6º e 7º anos, por meio de nossa prática docente, observamos que as dificuldades, que antes eram referentes às concepções[1] dos números fracionários, agora, eram estendidas às operações, especialmente, pelo fato de os alunos esperarem uma “receita” para realizá-las, e não perceberem que tais operações são facilitadas quando há a utilização de frações equivalentes.

[1] Referimo-nos às concepções defendidas por Silva (2005)

Optamos assim por abordar as relações de ensino e a responsabilidade dos professores com base nos estudos de Silva (1997, 2005) considerando a hipótese de que a maior parte das dificuldades apresentadas pelos alunos, são consequência de estratégias de ensino mal elaboradas ou aplicadas de maneira ineficiente. Silva (1997) em formação inicial realizada com futuros professores das séries iniciais do Ensino Fundamental constatou que as concepções espontâneas equivocadas que os futuros professores apresentaram durante a formação, na realidade eram obstáculos, já apresentados em outros estudos, de origem didática ou epistemológica. No entanto, a autora verificou uma evolução na criatividade para a elaboração de atividades desses alunos.

Em 2005 a autora refaz a afirmação destacando a fragilidade das licenciaturas, especificamente, quanto aos processos de ensino de números racionais, pois:

> [...] não preparam os professores para trabalhar com essa conceituação; pelo contrário, quando isso acontece, o conjunto dos números racionais é visto como uma construção formal com base nos inteiros, ou ainda, como um representante da estrutura algébrica de corpo com regras operatórias e propriedades bem definidas (SILVA, 2005, p. 18)

Ou seja, na licenciatura se amplia o conhecimento matemático a respeito da representação fracionária e decimal dos números racionais, entendendo que a conceituação já foi realizada no Ensino Básico, o que, de fato, não ocorre. Assim, esse processo produz um ciclo de aprendizagem inadequado que reforça padrões que geram dificuldades futuras.

2.3 Delimitação do Problema

A partir do que apresentamos definimos a seguinte questão de pesquisa: ***quais conhecimentos professores de matemática mobilizam a respeito do ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária durante a discussão de uma sequência de ensino para o sexto ano do Ensino Fundamental?***

Para responder tal questão temos como objetivo geral analisar os conhecimentos que professores de matemática mobilizam a respeito do ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária durante a discussão de uma sequência didática para o sexto ano do Ensino Fundamental.

Nosso objetivo específico é um estudo a respeito de capacitação de professores apresentando a eles uma sequência didática que mobilize nos alunos seus conhecimentos prévios para enfim chegarem à construção de um novo conhecimento significativo.

Para tal pretendemos desenvolver a sequência, apresentá-la aos professores e discutir os possíveis encaminhamentos que fariam em situação de ensino.

2.4 Metodologia de pesquisa

Para respondermos nossa questão e atingir os objetivos optamos pela Engenharia Didática de segunda geração como metodologia de pesquisa que, Para Almouloud (2011, s.p.) esse tipo de engenharia tem como objetivo principal:

> reutilizar o produto da primeira geração ou criar um produto novo que envolva um professor e que possa ser usado pelo mesmo em sua atuação em sala de aula. A ideia é pegar as pesquisas e produtos da Primeira Geração e transformar em algo que possa ser usado no tempo didático do professor.

Além disso, segundo Silva e Almouloud (2012, p.29)

> [...] tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores. O que, consequentemente, necessita de vários níveis de construção. Podem-se distinguir dois tipos de engenharias didáticas em função da pergunta inicial da investigação, sendo a Engenharia Didática para a Investigação (IDR) e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD). (SILVA; ALMOULOUD, 2012, p.29)

Para os autores os recursos desenvolvidos em uma engenharia didática de segunda geração podem ser usados em sala de aula ou fazer “com que os professores apreendam a matemática ou a matemática para ensinar a matemática (p. 47).” Acrescentam que agrega algumas características da pesquisa-ação, já que nela se desenvolvem situações de sala de aula que o pesquisador é levado a descrever e analisar os resultados de sua aplicação, tomando os devidos cuidados em relação ao grau de generalidade dos resultados.

Para o autor a sequência didática analisada na primeira geração passa por adequações para se adaptar às necessidades do professor, no sentido de apontar soluções para resolver os problemas verificados pela análise da aplicação realizada com os alunos.

A engenharia de desenvolvimento está fortemente ligada às investigações nos saberes matemáticos necessários aos professores para ensinar a matemática. É neste sentido que ela está ligada à formação.

> Na engenharia didática da segunda geração, o objetivo é a produção de recursos que podem ser utilizados pelo professor na sua aula, ou para a formação continuada ou inicial de professores, fazendo com que os professores apreendam a matemática, ou a matemática para ensinar a matemática. (SILVA e ALMOULOUD, 2012, p.47)

Embasados em nossa pesquisa elaboraremos e aplicaremos uma sequência didática a um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental II elaborada com base nas sequências apresentadas por Camilo (2009) e Pereira (2011), já aplicadas com alunos.

Para melhor organizar a sequência que será discutida com os professores nos basearemos na teoria dos Campos Conceituais, tendo em vista que trataremos do campo aditivo e multiplicativo, além da teoria dos Registros de Representações Semióticas, pois o registro das representações fracionárias tem sua construção iniciada nas séries iniciais do ensino fundamental, que apresentamos no que segue.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nossa escolha por Vergnaud e Duval deveu-se a considerarmos que essa articulação se adequa bem ao objetivo deste trabalho, de refletir sobre como se desenvolve a construção das operações com frações pelos estudantes. Observar os conhecimentos que os professores mobilizam para conduzir os alunos a construir o registro de representação fracionária de números racionais.

3.1 Teoria dos Campos Conceituais

Psicólogo de formação e doutor em Educação Matemática, Vergnaud foi orientado por Piaget e estudou o desenvolvimento da criança, como elas pensam, como elas realizam operações. Em 1977 elaborou a Teoria dos Campos Conceituais para auxiliar no entendimento de como as crianças constroem seu conhecimento matemático. Para Vergnaud (2017a) o conhecimento é adaptação, ou seja, quando alguém é submetido a novas situações e se adapta a elas por uma evolução na organização de suas atividades é que se produz o conhecimento, este processo pode ser longo.

A Teoria dos Campos Conceituais surgiu a partir do estudo de processos cognitivos que envolvem a conceituação das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações espaço-número e da álgebra. Contudo, Vergnaud (1990) destaca que a teoria não se destina apenas ao estudo de Matemática, pois sua principal finalidade é "fornecer uma estrutura que permita compreender as afiliações e as rupturas no conhecimento em crianças e adolescentes” (VERGNAUD, 1990, p. 1 *apud* Fischer, 2020, p. 24).

De acordo com Vergnaud (1990 *apud* Fischer, 2020, p. 24), as bases de nossas competências estão implícitas ou explícitas e, muitas vezes, as crianças não sabem descrever o que estão pondo em prática, por isso ele considera importante observá-las e tentar reconhecer/identificar seus raciocínios identificados como conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Por exemplo, quando utilizamos as quatro operações fundamentais, em geral, vamos muito além das estruturas dos números porque podemos utilizar conhecimentos implícitos como suas propriedades. Nesse sentido, para o autor, o professor tende a considerar tudo muito simples o que, na maioria das vezes, diverge da realidade.

Assim, “um conceito não pode ser reduzido a sua definição, pelo menos, se estivermos interessados em seu aprendizado e ensino. Por meio de situações e problemas que se pretende resolver é que um conceito adquire sentido para a criança.” Vergnaud (1990, p. 1 *apud* Fischer, 2020, p. 24) Segundo Vergnaud (2017a), um conceito não se forma sozinho e, para que isso ocorra, são necessárias várias situações para serem expostas à criança que, por sua vez, precisa mobilizar vários conceitos para poder processar uma situação. Assim, a noção de Campo Conceitual:

> surge com a necessidade de se compreender melhor a aquisição e o desenvolvimento do conhecimento e de capacidades especificas relativas às situações e aos problemas. [...] identifica duas vantagens cientificas: (i) a possibilidade de identificação de semelhanças e diferenças entre situações, sua estrutura hierárquica, continuidades e descontinuidades que organizam o repertório dos esquemas que é desenvolvido progressivamente para dominar estas situações; e (ii) a possibilidade direta de descrever a representação implícita dos esquemas subjacentes do mundo em termos de invariantes operacionais. (VERGNAUD, 1983 *apud* FISCHER, 2020, p. 25).

Moreira (2002, p. 19) reitera que: “a teoria dos campos conceituais destaca que a aquisição de conhecimento é moldada pelas situações e problemas previamente dominados e que esse conhecimento tem, portanto, muitas características contextuais. ” Dessa forma, para Fischer (2020, p. 25), os conhecimentos prévios que podem ser mobilizados, para uma certa situação, interferem no processo de construção de um novo conceito, pois, como já mencionado, em uma situação diversos conceitos são envolvidos e, para construir um novo conceito, é preciso que o sujeito seja confrontado com uma variedade de situações. Vergnaud (2017a) afirma que ao enfrentarem novas situações, os alunos preparam-se para o futuro e, ao aprenderem a lidar com elas, já estarão se acostumando a resolver situações da vida pessoal e profissional que os desestabilizem.

Para o autor há várias formas de organizar uma situação em que alguns conceitos são mais acessíveis que outros, e as crianças podem utilizar várias formas de resolver uma mesma questão. Porém, ressalta que é importante que o professor explore essa equivalência, tendo sempre o cuidado para não sobrecarregar, não exigir demais das crianças, embora seja necessário desestabilizá-las.

Na escola, quando buscamos que as crianças construam um novo conceito é necessário refletir a respeito das situações que lhes vamos apresentar, para que estas possam da desestabilização chegar à adaptação, descobrindo novos objetos, novas propriedades e, assim, proceder a uma mudança de esquema. Além disso, deve-se propor questões da realidade da criança. De acordo com Vergnaud (1993 *apud* Fischer, 2020, p. 24) afirma que: “os esquemas organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dada, mas também organizam, ao mesmo tempo, sua ação e a atividade de representação simbólica, sobretudo linguística, que acompanha essa ação. ” Para o autor, é por meio dos esquemas que os alunos põem em ação seus conhecimentos, por isso os denomina de “invariantes operatórios” que incluem os "conceito-em-ação" e "teorema em ação". Segundo Fischer (2020, p. 25) a chave para o desenvolvimento de cognitivo se encontra na noção de esquema, porque:

> relaciona o comportamento (ação, competência, regras) com as representações (invariantes operacionais, expectativa, significado, significante), conduzindo à tese de que não existe conhecimento processual sem algum conhecimento conceptual ou pré-conceitual (invariantes operacionais). Embora considere diferentes tipos de invariantes operacionais, enfatiza o conceito-em-ação (que permite ao sujeito escolher, selecionar e categorizar informação relevante de acordo com as situações e esquemas envolvidos) e o teorema-em-ação (que permite ao sujeito fazer inferências e cálculos com base na informação disponível).

A conceituação está vinculada ao conjunto de situações que constituem as referências de suas diferentes propriedades e ao conjunto de esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações (VERGNAUD, 1996a, p. 166). Assim,

> A ação operatória envolve a utilização de significantes explícitos (palavras, enunciados, símbolos e signos) e isso é indispensável à conceitualização o que, segundo Vergnaud (1996a) conduz a considerar que a formação de um conceito está apoiada em um tripé de conjuntos (S, I, R), no qual S é um conjunto de situações, que dão sentido ao conceito (a referência); I é um conjunto de invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas (o significado); e R é um conjunto de formas, que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).(ETCHEVERRIA; CAMPOS; SILVA, 2015)

O desenvolvimento do conhecimento, na perspectiva dessa teoria, ocorre por meio de campos conceituais. Vergnaud se dedicou, a princípio, ao campo aditivo e ao multiplicativo que apresentamos no que segue.

Segundo Etcheverria, Campos e Silva (2015), Vergnaud define campo conceitual como um conjunto de situações cujo domínio requer o domínio de outros conceitos de naturezas distintas. No caso deste estudo, entendemos que a conceituação de adição e subtração não ocorre a partir de uma única situação, pois “os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações, e cada situação normalmente não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito" (MAGINA et al., 2008, p. 8).

Para Etcheverria, Campos e Silva (2015) cabe ao professor propor uma ação planejada que oportunize a vivência de um conjunto de situações que envolvam conceitos de naturezas distintas para evitar o insucesso de seus alunos em suas resoluções.

De acordo com Rasi (2009) para Vergnaud o desenvolvimento de um conceito e de seu funcionamento, em matemática, depende do estabelecimento de relações e de sua organização em esquemas, pois o conhecimento matemático se caracteriza por noções, relações e sistemas relacionais apoiados uns nos outros. Nesse sentido, as categoriza de acordo com o número de elementos que se relacionam, ou seja, as binárias, relacionam dois elementos; as ternárias, três elementos e as quaternárias, quatro elementos. No entanto, diferencia o cálculo numérico que envolve as operações, do cálculo relacional que promove a análise de relações e de propriedades e pode ser aplicado a todas as classes de relações.

As relações binárias satisfazem as propriedades simétrica (a relação entre um elemento x e um elemento y é a mesma que entre o elemento y e o elemento x); a transitiva (quando existe uma relação entre um elemento x e um elemento y, e entre o elemento y e um elemento z, então existe a relação entre o elemento x e o elemento z; reflexiva (todo elemento x está em relação consigo mesmo). As relações de ordem, de igualdade e de equivalência são relações binárias porque satisfazem essas três propriedades.

Por outro lado, uma operação é uma relação ternária porque a composição de dois elementos dá origem a um terceiro, por exemplo, no campo aditivo $a + b = c$ ou no campo multiplicativo $a \times b = c$ em que o sinal de operação e de igualdade indicam a composição. Para Vergnaud as operações têm as propriedades associativa, comutativa e elemento neutro. Mas Vergnaud, de acordo com Rasi (2009), apresenta um outro modelo de relação ternária considerando os elementos como estados iniciais e finais e uma transformação que permite transitar entre esses estados que expressam um cálculo relacional. Para o caso mais simples, em que ocorre apenas uma transformação estabelece três categorias de problemas: são dados o estado inicial e a relação e pede-se o estado final; são dados o estado final e a relação e pede-se o estado inicial e são dados o estado inicial e o final e pede-se a relação. Mas esses problemas podem ficar mais complexos com a composição de transformações.

Para Vergnaud, de acordo com Rasi (2009), uma relação quaternária, em geral, é apresentada por: “a está para b, assim como c está para d” e que são representadas por uma igualdade de duas razões, ou seja, uma proporção.

Entendemos que as relações binárias, ordem, igualdade e equivalência, dão suporte as relações ternárias (que envolvem as operações) e ambas são bases para as relações quaternárias, que envolvem a proporcionalidade no campo conceitual multiplicativo.

3.1.1 Campos Conceituais Aditivos

De acordo com o exposto a operação de adição matemática se caracteriza por uma relação ternária que têm sua regra operatória dependente do conjunto em que é realizada, ou melhor, de acordo com o registro de representação numérica são definidos seus tratamentos ou regras operatórias. No caso de nosso trabalho os alunos do sexto ano já conhecem a operação de adição de números naturais, mas precisam aprender as regras para essa operação para os números representados na forma fracionária. Entendemos que as relações binárias de ordem, de equivalência e de igualdade também já sejam conhecidas dos alunos.

De acordo com Jenske (2011) o campo conceitual das estruturas aditivas possui seis categorias:

> Primeira categoria – duas medidas se compõem para resultar em uma terceira.
> Segunda categoria – uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.
> Terceira categoria – uma relação liga duas medidas.
> Quarta categoria - duas transformações se compõem para resultar em uma transformação.
> Quinta categoria – uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo.
> Sexta categoria – dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo. (JENSKE, 2011, p. 42)

A seguir a autora, da mesma forma que Vergnaud, apresenta essas categorias por esquemas em que os retângulos representam números sem sinal; as transformações ou relações são representadas nas elipses por números com sinais; as flechas horizontais transformações (mudança de estado) e as verticais relação entre estados, isto é, composição de elementos de natureza diferentes; já as chaves representam a composição de elementos de mesma natureza. Vemos nessas categorias que tratam de situações tanto de cálculo numérico, quanto de cálculo relacional e para cada uma delas apresenta os seguintes esquemas:

Para Vergnaud (1990, 2019) há seis relações aditivas principais:

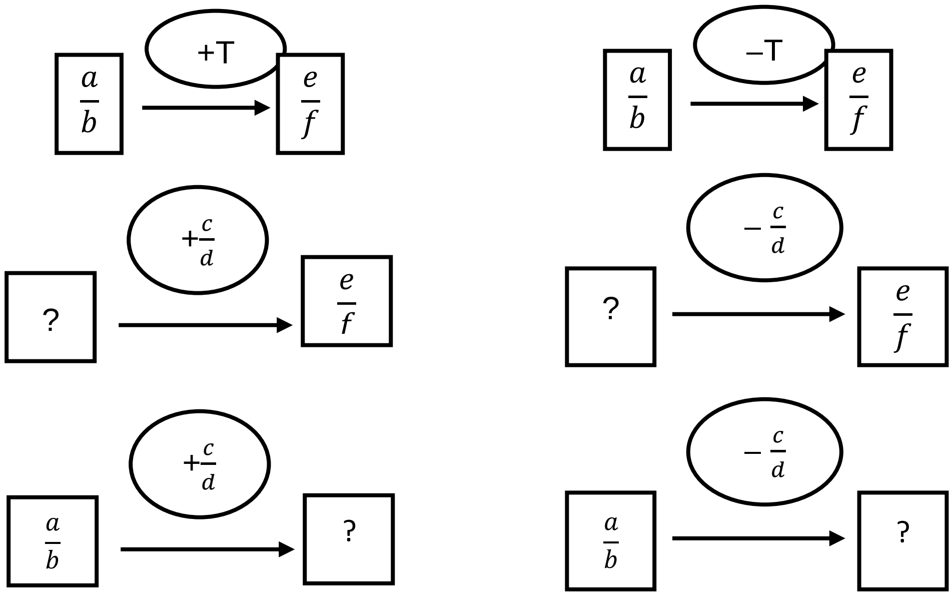
A **primeira categoria**, composição de duas medidas em uma terceira, parte/parte/todo, em que dadas duas medidas elementares conhecidas temos que encontrar uma terceira. Duas classes de situações podem ser desenvolvidas nesta categoria: dadas duas partes buscar o todo e dados o todo e uma parte buscar a outra parte, que podem ser representados pelos seguintes esquemas.

$$\left.\begin{matrix}\boxed{\frac{a}{b}}\\ \\ \boxed{\frac{c}{d}}\end{matrix}\right\}\ \boxed{?} \qquad \left.\begin{matrix}\boxed{?}\\ \\ \boxed{\frac{c}{d}}\end{matrix}\right\}\ \boxed{\frac{a}{b}} \qquad \left.\begin{matrix}\boxed{\frac{a}{b}}\\ \\ \boxed{?}\end{matrix}\right\}\ \boxed{\frac{c}{d}}$$

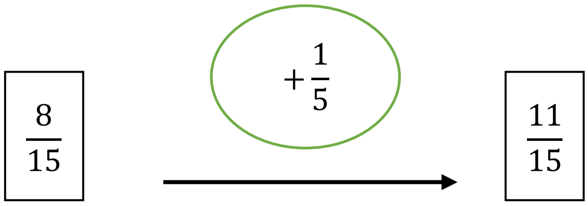
No caso do ensino de fracionários, um problema poderia ser: João decidiu fazer um jardim em uma área determinada de seu quintal. Plantou rosas em 1/5 e margaridas em 1/3 que parte do jardim já está florido?

Esquematicamente: $\left.\begin{matrix}\boxed{\frac{1}{3}}\\ \\ \boxed{\frac{1}{5}}\end{matrix}\right\}\ \boxed{\frac{8}{15}}$ No registro fracionário: $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$

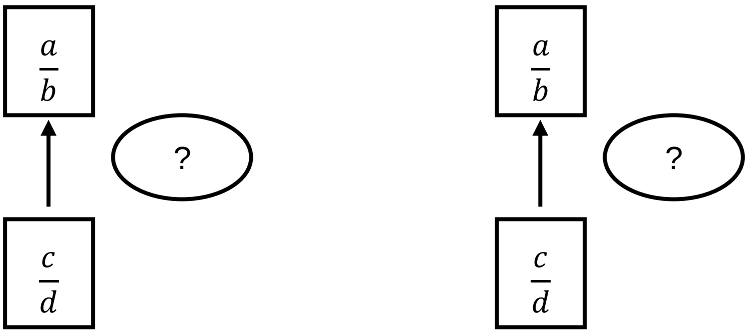
A **segunda categoria**, transformação de estados ou transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final, estado/transformação/estado, em que uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra, é temporal. Nesta categoria podemos determinar seis classes de situações, três para transformações positivas e três para transformações negativas de acordo com a situação dar o estado inicial e a transformação para solicitar o estado final; dar o estado inicial e o estado final para solicitar a transformação e dar o estado final e a transformação para solicitar o estado inicial.

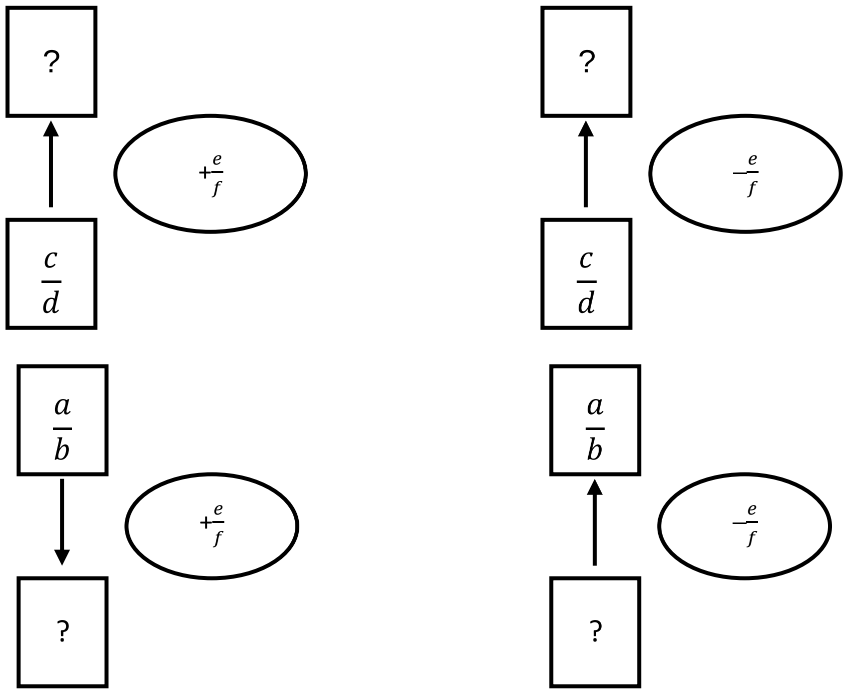


João ganhou de um amigo vários pés de azaleias que daria para plantar em 1/5 de seu jardim. Quanto de seu jardim agora está plantado?



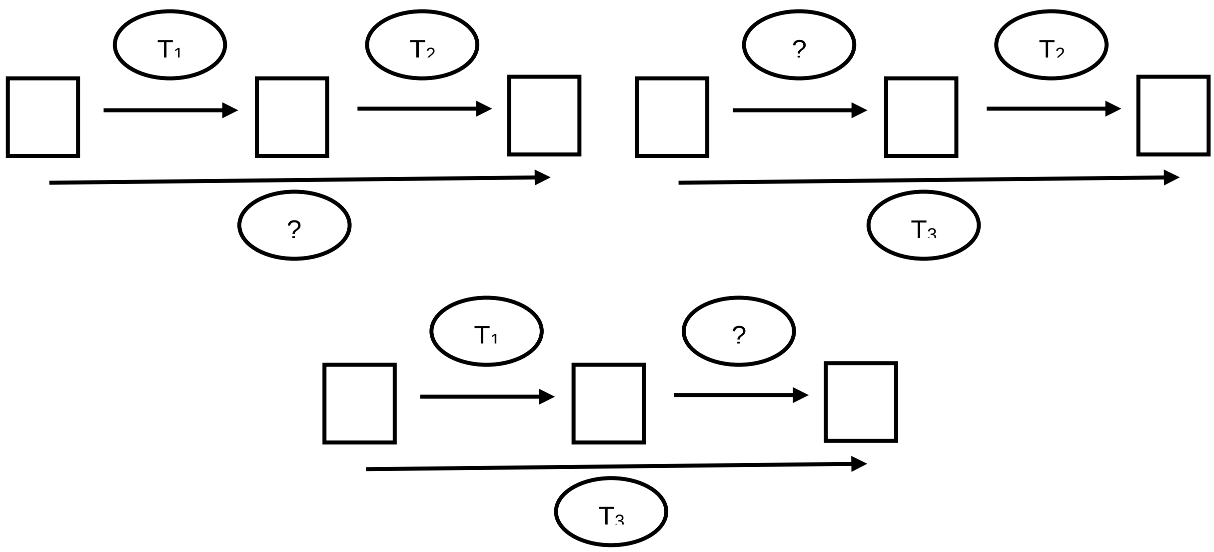
Para a **terceira categoria**, a relação (quantificada) de comparação entre duas medidas (ter a mais ou ter a menos), conduz à seis classes de situações de acordo com os dados e a pergunta.





A **quarta categoria**, a composição de duas transformações, ou seja, duas transformações são compostas para resultar em uma outra transformação. As situações desta categoria podem explicitar apenas as categorias, sem explicitar qualquer estado.

Nesta categoria também podemos determinar várias classes de situações dependendo das transformações iniciais serem aditivas ou subtrativas e, ainda com relação à sua questão solicitar a transformação composta ou solicitar uma das transformações iniciais.



De acordo com Vergnaud, segundo Jenske (2011), há as seguintes possibilidades (Figura 1), considerando que T_1 e T_2 representam as transformações iniciais e T_3 a transformação composta.

Figura 1 – Casos possíveis para a primeira classe de problemas

	$T_1 > 0$ $T_2 > 0$	$T_1 < 0$ $T_2 < 0$	$T_1 > 0$ $T_2 < 0$	$T_1 < 0$ $T_2 > 0$
$\lvert T_1 \rvert > \lvert T_2 \rvert$	$T_3 > 0$	$T_3 < 0$	$T_3 > 0$	$T_3 < 0$
$\lvert T_1 \rvert < \lvert T_2 \rvert$	$T_3 > 0$	$T_3 < 0$	$T_3 < 0$	$T_3 > 0$

Fonte: Jenske (2011, p. 44)

Para a segunda classe de problemas:

Figura 2 – Casos possíveis para a segunda classe de problemas

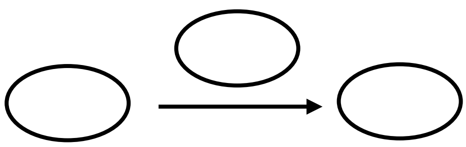
	$T_1 > 0$ $T_3 > 0$	$T_1 < 0$ $T_3 < 0$	$T_1 > 0$ $T_3 < 0$	$T_1 < 0$ $T_3 > 0$
$\lvert T_1 \rvert > \lvert T_3 \rvert$	$T_2 > 0$	$T_2 < 0$	$T_2 > 0$	$T_2 < 0$
$\lvert T_1 \rvert < \lvert T_3 \rvert$	$T_2 > 0$	$T_2 < 0$	$T_2 < 0$	$T_2 > 0$

Fonte: Jenske (2011, p. 45)

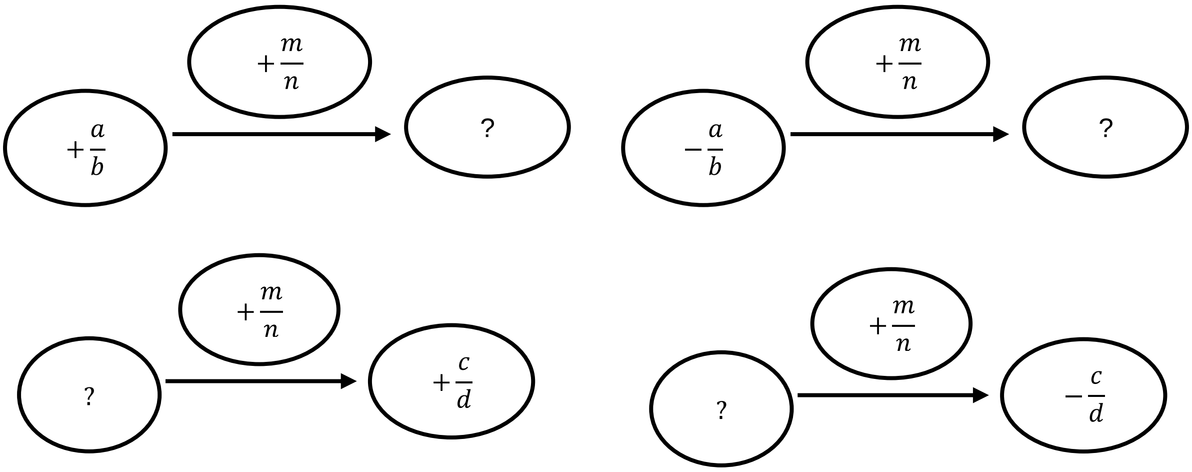
De acordo com Jenske (2011, p. 45) “esta categoria se assemelha a primeira categoria. Porém, em lugar de transformações, não possuem ordem temporal, justificando porque são categorias distintas.”

Para o sexto ano do Ensino Fundamental não podemos considerar resultados negativos, pois os alunos ainda não estudaram os números inteiros relativos.

A **quinta categoria**, transformação de uma relação, uma transformação opera sobre uma relação para resultar em uma outra relação.

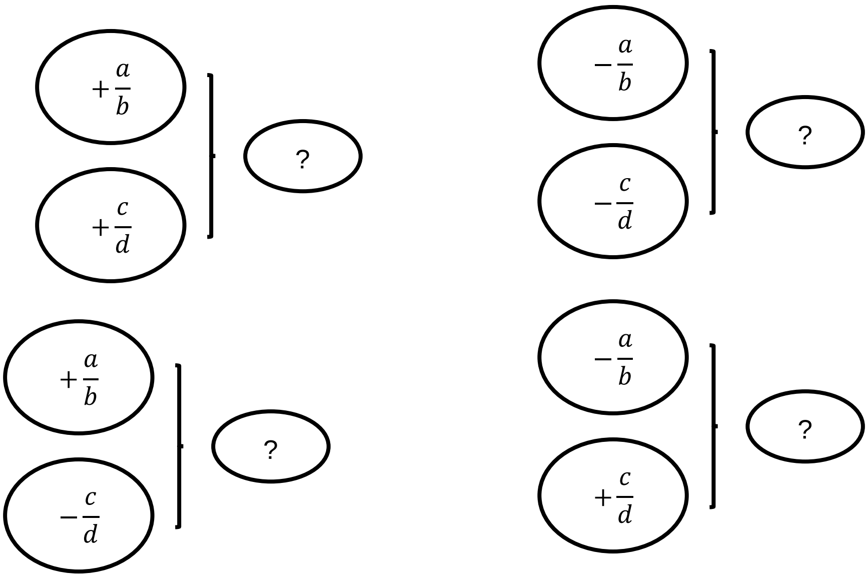


Para Jenske (2011, p. 45) “aqui são reencontradas as classes da segunda categoria, porém com subclasses mais numerosas, devido às várias possibilidades que existem para o sinal e o valor absoluto.”



Há outras quatro classes de situações, para essa categoria, para o caso da transformação $-\frac{m}{n}$.

Na **sexta categoria**, composição de relações, em que duas relações se compõem para resultar em uma terceira em que se pode decompor ou compor relações de comparação.

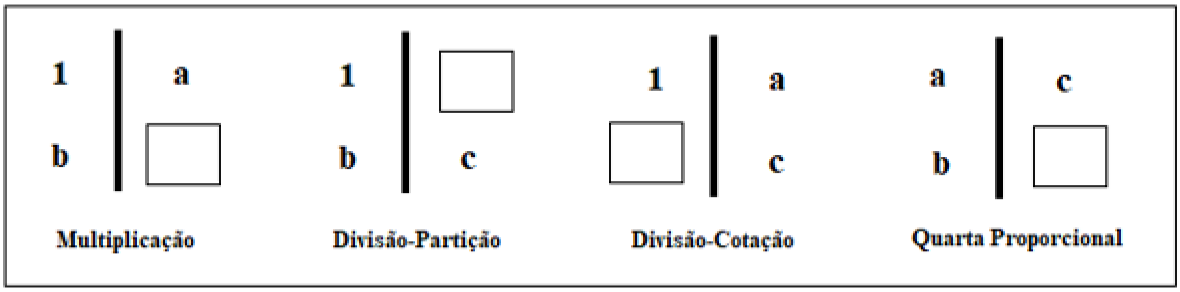


3.1.2 Campos Conceituais Multiplicativos

Campo Conceitual Multiplicativo baseia-se num conjunto de situações que envolvem o conceito de multiplicação, de divisão, de proporcionalidade (simples e múltipla), de função (linear e n-linear), de razão escalar (direta e inversa), de quociente e produtos de grandezas variadas, de combinação linear e homotetia, de fração (interpretada, por nós aqui, como operador), de número racional, de múltiplo e divisor, entre outros. (VERGNAUD, 1993). Existe uma diferença cognitiva entre esses dois campos conceituais, enquanto no Campo Aditivo as situações envolvem relações ternárias que mobilizam apenas grandezas de mesma espécie e com o mesmo papel, por isso ambas são chamadas de parcelas, no Campo Multiplicativo, a maioria das situações envolve relações quaternárias em que os termos envolvidos nas operações têm papéis diferentes, por isso recebem nomes diferentes, em um primeiro momento: multiplicando e multiplicador que podem representar ou não grandezas de espécies diferentes.

De acordo com Vergnaud (2014), as situações que envolvem multiplicação e divisão se distribuem em duas categorias: isomorfismo de medidas e produto de medidas. O **isomorfismo de medidas** se caracteriza por uma relação quaternária em que os pares de elementos se referem a uma mesma grandeza e a uma mesma unidade de medida, mas a proporção direta relaciona grandezas diferentes. Nessa categoria podem ser gerados quatro classes de situações, denominadas multiplicação, divisão-partição, divisão-cotação e quarta proporcional todas dependentes da medida a ser determinada.

Figura 3 - Tipos da relação quaternária de proporção simples



Fonte: Adaptado de Vergnaud (1990, p. 12)

De acordo com Vergnaud (2014), as classes de situações denominadas multiplicação, divisão-partição (determinar o valor de uma parte) e Divisão-Cotação (determinar a quantidade de unidades de cada cota) constam de situações mais simples, pois uma das medidas é igual a 1, ou seja, trabalha-se a partir da unidade (de contagem ou de medida). Já na classe de situações denominada quarta proporcional, incluem-se situações em que nenhuma das três medidas conhecidas é igual a 1, o que constitui “ilustrações mais complexas da relação quaternária”, por exigirem, em sua resolução, um passo a mais de raciocínio, cabendo ao leitor avaliar se isso é mais difícil ou não. (VERGNAUD, 2014, p. 246). De acordo com Vergnaud (2019) “as primeiras situações compreendidas pelos são alunos são *situações de proporção simples*, nas quais é preciso efetuar uma multiplicação [...].” (p. 13).

Cabe ainda ressaltar que, em todas as classes de situações dos tipos apresentados na Figura 3, o raciocínio para determinar a medida desconhecida pode ser desenvolvido a partir de uma análise vertical (relação escalar) ou de uma análise horizontal (relação entre variáveis). Para Vergnaud (2011) na análise vertical, a constante de proporcionalidade é apenas um escalar, uma vez que relaciona (por meio de uma função f) valores de uma mesma grandeza: $f(nx) = nf(x)$ e $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$; já na análise horizontal, os operadores relacionam (por meio de uma função f) duas grandezas diferentes, portanto, $f(x) = kx$ e $x = \frac{f(x)}{k}$.

O autor explica as relações escalares, para cada tipo de classes de problemas da Figura 3: para encontrar $f(b)$, nas situações de multiplicação, multiplica-se por b o valor $f(1)$, isto é $f(b) = bf(1)$; para encontrar $f(1)$,usando que $f(nx) = nf(x)$ usando f(1) nas situações de divisão-partição, divide-se o valor $f(b)$ por b, ou seja, $f(1) = \frac{f(b)}{b}$; para encontrar *b* tal que $f(b) = c$, nas situações de divisão-cotação, multiplica-se a unidade por $\frac{c}{a}$, ou seja, $b = \frac{f(b)}{f(1)}$ e, finalmente, nas situações de quarta proporcional, multiplica-se o valor de $f(a)$ por $\frac{b}{a}$, ou seja, $f(b) = \frac{b}{a}f(a)$.

No caso dos números fracionários podemos esquematizar essas classes de situações. No caso da multiplicação um esquema envolvendo números fracionários pode ser representado pelo esquema abaixo e por: $f\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{c}{d}f(1)$ ou seja, $d = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \boldsymbol{\frac{a}{b}} \\ \boldsymbol{\frac{c}{d}} & \mathbf{d} \end{array}$$

Para o autor, no caso da divisão há duas estruturas a partição e a cotação. No primeiro caso, $f(1) = \frac{f(\frac{c}{d})}{\frac{c}{d}b}$, isto é, $c = \frac{e}{f} \div \frac{c}{d}$ com o seguinte esquema:

1	**c**
$\boldsymbol{\frac{c}{d}}$	$\boldsymbol{\frac{e}{f}}$

No segundo caso, divisão por cotação, para encontrar o valor desconhecido, b, tal que $f(b) = \frac{e}{f}$, temos que $b = \frac{f(b)}{f(1)}$ ou $b = \frac{e}{f} \div \frac{a}{b}$, de acordo com o seguinte esquema.

1	$\boldsymbol{\frac{a}{b}}$
b	$\boldsymbol{\frac{e}{f}}$

Para o caso da quarta proporcional, multiplica-se o valor de $f\left(\frac{c}{d}\right)$ por $\frac{\frac{c}{d}}{\frac{g}{h}}$, ou seja, $f\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{g}{h}} f\left(\frac{g}{h}\right)$ ou $d = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{g}{h}} \times \frac{a}{b} f(a)$, cujo esquema é:

$\boldsymbol{\frac{g}{h}}$	$\boldsymbol{\frac{a}{b}}$
$\boldsymbol{\frac{c}{d}}$	**d**

O **produto de medidas**, segunda categoria de situações multiplicativas, é caracterizado por uma relação ternária, em que uma quantidade é resultado da multiplicação das outras duas, tanto numérico, como dimensional. Duas classes de situações são destacadas por Vergnaud (2014) a configuração retangular e a combinatória.

Tendo em vista o que apresentamos, entendemos que para o ensino das operações com frações os professores devem estar atentos ao tipo de situações que proporá a seus alunos e, nesse sentido, a teoria dos campos conceituais auxilia na escolha dessas situações e na previsão das dificuldades que podem surgir, nas habilidades que os alunos precisam mobilizar e nas inferências que o professor pode oportunizar, sem coibir e nem interferir na criatividade e no desenvolvimento reflexivo do aluno.

Deve, também, em seu planejamento prever as dificuldades que poderão surgir, quais habilidades precisam mobilizar para desenvolver a atividade e as inferências que o professor pode oportunizar, a fim de não coibir e nem interferir na criatividade e no desenvolvimento reflexivo da criança.

3.2 Teoria de Registros de Representação Semiótica

De acordo com Silva (2012, p.185) a teoria de Registros de Representação Semiótica enfatiza a importância da diversidade de registros de representação, da articulação entre os mesmos nas diversas atividades matemáticas e fornece um referencial teórico estruturado de análise do funcionamento cognitivo e epistemológico da compreensão em Matemática.

Para Silva e Almouloud (2018) as questões de representação estão no seio da Educação Matemática por ser um componente essencial para a construção de conhecimento.

> Partindo do pressuposto que os objetos matemáticos não são fisicamente determinados e que a língua natural, falada e escrita, se mostra insuficiente para as discussões a respeito de tais objetos, outros sistemas de expressão e representação se fazem necessários; por exemplo, os sistemas variados de escrita para os números, as notações simbólicas, as escritas algébricas etc., que assumem um status de linguagens paralelas à linguagem natural. (SILVA e ALMOULOUD, 2018, p.87)

Para Duval (2009) é fundamental a utilização de representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, pois todo pensamento matemático concretiza-se por meio de registros que possibilitam o estudo e, consequentemente, a construção do conhecimento matemático.

A teoria de Registros de Representação Semiótica é uma ferramenta importante para planejar e investigar o ensino e a aprendizagem de operações com frações, pois, para Duval (2009), é importante representar um mesmo objeto em mais de um registro para possibilitar a construção gradativa do conhecimento em matemática.

Para Duval (2009, p. 29), "[...] não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação". O autor denomina **objeto matemático** os diferentes objetos relacionados aos conteúdos da Matemática, que são inteiramente conceituais e denomina **representação** as diferentes formas de se visualizar ou de representar semioticamente esse objeto. Portanto, diversos registros de representação são necessários para que se promova o ensino e o domínio desses registros pelo aluno que vem evidenciar sua aprendizagem.

Para o autor um sistema semiótico de representação se caracteriza como um registro de representação semiótica se permitir três atividades cognitivas:

“primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como *uma representação de alguma* coisa em um sistema determinado” (p. 36). As outras duas tratam de transformação de representações, os tratamentos e as conversões. O tratamento, que transforma as representações no interior de registro, para o caso dos números fracionários pode ser identificado por suas operações, por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Já a conversão é a transformação de uma representação em um registro em outra representação em outro registro, como por exemplo associar à figura  o número $\frac{1}{2}$, ou seja, realizar a conversão da representação no registro figural para uma representação equivalente no registro numérico.

Para Duval (2009), a capacidade de compreender os conteúdos associados a um objeto matemático está diretamente ligada ao desenvolvimento de conversões entre representações de um objeto em registros de representação diferentes. É essa coordenação entre diferentes registros que possibilita a construção do conhecimento matemático.

Segundo o autor é a diversidade de representações para um mesmo objeto matemático que possibilita a aprendizagem, pois ao decidir qual a representação que melhor condiz ao objeto de estudo e ao proceder uma ou mais conversões, o indivíduo comprova mais ainda seus conhecimentos. É essa aprendizagem que contribui para a construção gradativa do conhecimento matemático.

> Na Teoria de Registros de Representação Semiótica, a análise da construção de conhecimentos e dos diversos obstáculos defrontados no estudo de objetos matemáticos por meio de diferentes registros de representação confronta três fenômenos intrinsecamente ligados: o da diversificação dos registros de representação semiótica, que refere-se a pluralidade de registros de representação que um mesmo objeto matemático possa ter, o da diferenciação entre representante e representado, que remete à necessidade de compreender o que está sendo representado por determinado registro e a possibilidade de associá-lo a outro registro de representação e de integrá-lo em procedimentos de tratamento e o da coordenação entre diferentes registros de representação semiótica disponíveis. (SILVA, 2018, p.186)

Assim, segundo Silva e Almouloud (2018), Duval enfatiza a necessidade da diversidade de registros para o funcionamento do pensamento humano por três motivos. O primeiro é a possibilidade de tratamentos de uma maneira mais econômica e poderosa a partir da mudança de registro. O segundo supõe a comparação entre diferentes modos de representar um mesmo objeto a partir da análise dos aspectos que são ou não considerados em cada registro, pois uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama, porque a mudança de registros para outro não garante a representação dos mesmos aspectos do conteúdo. O terceiro supõe um desenvolvimento da atividade cognitiva por meio da coordenação de registros de representação que, por sua vez, ajuda a desenvolver a conceituação de um objeto matemático e a evitar a confusão entre a representação e o próprio objeto.

> Os sistemas de escritas dos números são considerados como registros de representação semiótica porque permitem a coordenação das três atividades essenciais: a designação, ou seja, a produção de representações, o tratamento e a conversão, quer dizer a transformação das representações produzidas em novas representações, no primeiro caso internamente ao registro e no segundo para um outro registro de representação. (SILVA e ALMOULOUD, 2018, p.89)

Vergnaud (1996a, *apud* FISCHER, 2020, p. 38):

> enfatiza as representações simbólicas na ajuda da resolução de um problema, sobretudo quando os dados são numerosos e várias etapas necessárias para se chegar à solução. Porém, salienta que a função das representações simbólicas não se esgota na ajuda à resolução de problemas complexos, dado que também desempenham um papel importante na identificação clara de objetos matemáticos, decisiva à conceitualização.

Acreditamos que esta articulação entre Vergnaud e Duval enriquece o processo de aprendizagem da multiplicação de frações, pois Vergnaud busca dar sentido ao conceito, preocupando-se com a forma como se desenvolve um campo conceitual a partir da significação das situações, enquanto Duval foca nos diferentes registros de representação semiótica, utilizando tratamentos e conversões a fim de promover a aprendizagem mobilizando o domínio deste conceito. Vergnaud mesmo aponta para essa articulação ao afirmar: “Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.”. (VERGNAUD, 1986, p. 84).

4 ESTUDOS PRELIMINARES

Nesse capítulo apresentamos algumas observações da Base Nacional Comum no que trata do ensino de frações e suas operações fundamentais trazendo as habilidades que se espera que os alunos desenvolvam referente ao tema, ligando esse contexto a um breve estudo a respeito das engenharias didáticas de primeira geração que embasam nossa pesquisa.

4.1 Os números racionais em sua forma fracionária na BNCC

Ao recorrer a Base Nacional Curricular Comum - BNCC (BRASIL, 2018, p.291), observamos que o início dos estudos de frações é tratado como objeto de conhecimento no quarto ano do Ensino Fundamental I quando sugere que o aluno desenvolva a habilidade "(EF04MA09): reconhecer as frações unitárias mais usuais $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \text{ e } \frac{1}{100}\right)$ como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso." Esse ensino é aprofundado no quinto ano do Ensino Fundamental I e prevê que sejam desenvolvidas as seguintes habilidades:

> (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
> (EF05MA04) Identificar frações equivalentes.
> (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. (BRASIL, 2018, p. 295)

Podemos observar que sugerem, para o quarto ano a localização de frações unitárias na reta numérica e não sugerem quaisquer outras situações para a compreensão desse novo campo numérico. Para o quinto ano sugerem o trabalho apenas com os significados parte-todo e quociente e a imediata descontextualização para o trabalho com os números racionais, bem como com a conversão de representações fracionárias para representações decimais.

As frações como objetos de conhecimento na BNCC aparecem também no sexto ano para quando o trabalho com as operações deve ocorrer a partir do desenvolvimento das seguintes habilidades:

> (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
> (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas

> representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
> (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
> (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária (BRASIL, 2018, p. 301).

Em termos de conteúdo identificamos nessas habilidades a necessidade de tratar os significados parte/todo, quociente e operador; das noções de equivalência e comparação de frações, além das operações fundamentais de adição e subtração e a fração como operador que atua sobre uma quantidade representada por número natural.

Essas habilidades relacionadas ao sexto ano do Ensino Fundamental serão a parte inicial e nossa pesquisa, pois são desejáveis aos alunos e, portanto, essenciais na discussão a respeito do ensino de números racionais com professores, pois são os responsáveis por elaborarem estratégias eficientes para provocar aprendizagem.

O nosso objeto de pesquisa se estende ao sétimo ano que, segundo a BNCC (2020, p.307), permanece como objeto de conhecimento para o desenvolvimento das habilidades:

> (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
> (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura e podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
> (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
> (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
> (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza. (BRASIL, 2018, p. 307)

Podemos observar que sugerem, para o sétimo ano, situações que envolvam, além dos anteriormente trabalhados, o significado de razão sugerindo sua representação fracionária, embora, em muitos casos a razão não possa ser associada a um número racional, porque sugere apenas uma comparação, no exemplo apresentado, uma relação de “dois para três” e não o racional “dois terços”.

Este último rol de habilidades fecha nosso objeto de pesquisa, ressaltando que essas orientações nos conduzem a entender as possíveis intervenções dos professores para tornar o ensino de frações mais significativo para os alunos.

4.2 Análise a priori das engenharias didáticas de primeira geração

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC, edição 2018) nos traz em que momento da formação discente deve ser implementada o estudo das operações com números fracionários nos apresentando em sua página 300 “6º ano - Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações” onde devem ser trabalhadas e desenvolvidas as seguintes competências:

> (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
> (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária. (BNCC 2018, pag. 301)

Ainda na BNCC temos a complementação “7º ano - Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” onde devem ser trabalhadas e desenvolvidas as seguintes competências: “EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias”. (BRASIL, 2018, p. 307)

Silva e Almouloud (2008), observando a utilização do ensino de frações a partir da concepção parte-todo, dominante no ensino, a partir de figuras que, em geral, representam grandezas contínuas sugeriram o ensino das operações baseando-se nessas representações.

> [...] o ensino utiliza e prioriza o trabalho com a concepção parte-todo baseado, principalmente, em figuras que representam grandezas contínuas, tais como segmentos, polígonos e círculos, sendo, por isso, natural o uso dessas figuras para a compreensão das regras operatórias com números fracionários. (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 59).

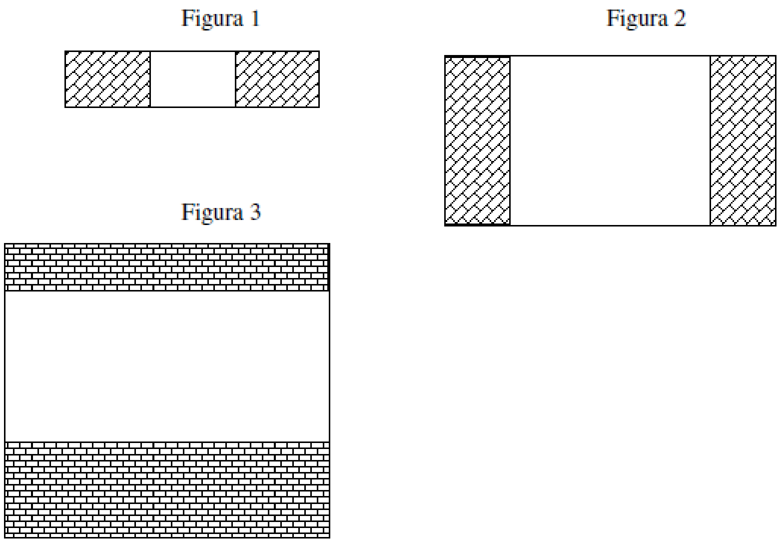
De acordo com os autores, geralmente, a adição de números fracionários de mesmo denominador não apresenta complicadores para a compreensão dos alunos. A questão está em fazê-los entender que quando os denominadores são diferentes, as partes consideradas têm nomes diferentes, tais como meios, terços, quartos, dentre outras e, nesse caso, é necessário transformar as frações em questão, em outras equivalentes, que tenham mesmo nome, ou seja, que apresentem mesmo denominador. O próprio termo já mostra sua função, o denominador denomina, dá nome às partes em que o inteiro foi dividido. Nas frações de denominadores diferentes é comum os professores focarem o ensino na utilização do mínimo múltiplo comum

(MMC) para a transformação das frações em outras equivalentes de mesmo denominador, contudo, acreditamos, assim como Silva e Almouloud (2008) que esse procedimento de ensino prejudica a compreensão da definição da operação de adição. Nesse sentido, Camilo (2009) apresenta uma atividade para esse tipo de situação na Figura 4.

Figura 4 – Adição de frações no registro figural

Atividade 1

a) Que parte do inteiro está pintada em cada figura?



b) Represente a parte pintada de cada figura como soma de frações que representam cada parte pintada.

Fonte: Camilo (2009, p. 32)

A multiplicação de frações é de fácil aprendizagem aos alunos, pois pode ser compreendida de forma análoga a multiplicação de números inteiros já estudadas pelos alunos. Conforme Behr *et al* (1992 apud SILVA, ALMOULOUD, 2008, p. 56) a multiplicação de números racionais pode ser introduzida como uma extensão da multiplicação de números inteiros, a partir de situações que pedem para que seja encontrada a parte de uma parte como, por exemplo, a metade de um quinto ou como a atividade sugerida por Pereira (2011) apresentada na Figura 5.

Figura 5 – Multiplicação de frações no registro figural

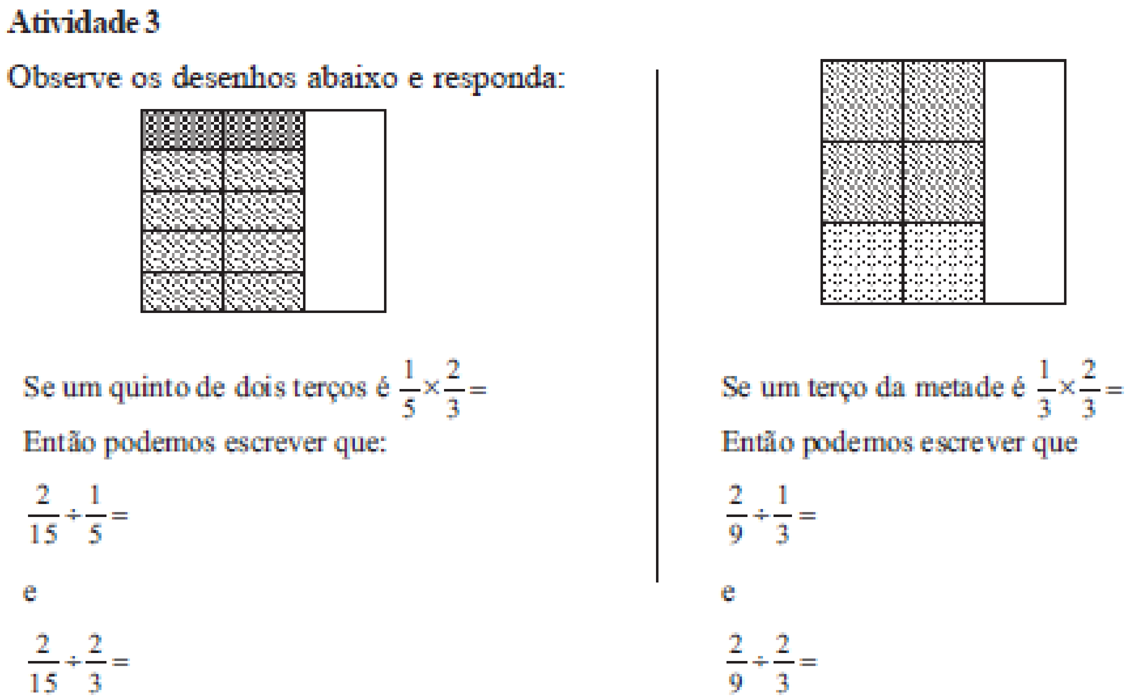
Atividade 4

Pinte a metade de um quinto do segmento abaixo e determine a fração que representa a parte pintada do segmento.

Fonte: Pereira (2011, p. 45)

Dentre as quatro operações fundamentais com frações a divisão é a que os professores mais têm dificuldade para conseguir dar significado aos alunos, pois, geralmente, são ensinadas por meio de uma regra que pede a multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda que, para o aluno, não faz sentido algum. Cabe então ao professor apresentar situações aos alunos de sexto ano para que percebam uma regra operatória significativa que se relaciona com as regras para as outras operações. Ou seja, uma situação como a sugerida por Silva e Almouloud (2008, p. 75) apresentada na Figura 6, que conduz a uma regra semelhante à de multiplicação que permite a divisão dos numeradores e a divisão dos denominadores que é justificada matematicamente pelos autores. No caso em que os denominadores não sejam múltiplos basta transformar as frações em equivalentes de mesmo denominador: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{3}{2}$.

Figura 6 – Divisão de frações no registro figural



Fonte: Silva e Almouloud (2008, p. 73)

Assim apresentaremos os resultados obtidos pelas engenharias didáticas de primeira geração aplicadas por Camilo (2009) e Pereira (2011) para justificar a definição das sequências didáticas para serem discutidas com os professores.

Sequência de adição

Segundo Camilo (2009) os alunos vivenciaram as dialéticas de ação, formulação e validação propostas por Brousseau (1986), produziram um bom diálogo entre eles, colocaram no papel suas idéias e chegaram até rejeitar formalizações que não aceitaram como corretas, mostraram insegurança em alguns momentos e nesta atividade o professor não foi solicitado em nenhum momento pelos alunos para alguma intervenção.

Camilo destaca que com relação a Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel (1968), percebeu com bastante clareza que o aluno se apoia em conhecimentos anteriores, ele usa conceitos já adquiridos para criar novas situações de conhecimento, tudo depende de como é conduzido esses saberes.

Durante a realização pelos alunos da sequencia percubeu-se que apesar deles mesmo com a utilização da régua não se preocuparem com a divisão das figuras em partes com áreas proporcionais, mas cpncluíram com sucesso as atividades, atendendo aos objetivos de registrar numericamente a parte demarcada de cada figura e ainda mostrar através da adição de frações um resultado numérico satisfazendo o enunciado do problema.

Percebeu-se que a forma diferenciada da figura da atividade 4 fez com que os alunos buscassem estratégias de resolução apoiadas nas atividades anteriores e que esta situação provocou nos alunos questionamentos interessantes.

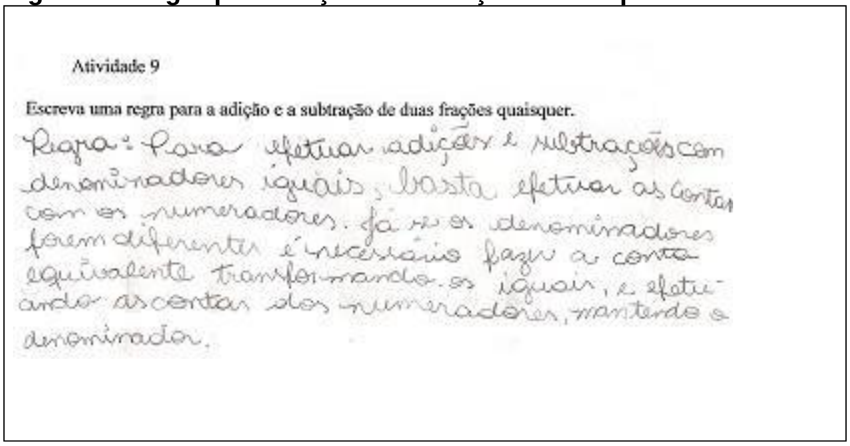
Durante essas cinco primeiras atividades observou-se que houve interação entre os alunos, o professor que fez o papel de mediador e as situações apresentadas. Essas atividades foram importantes no sentido de fazer o aluno compreender que a adição e a subtração de frações de números fracionários podem ser obtidos trabalhando a equivalência desses números.

Os alunos agiram, trocaram informações, argumentaram, se mostraram solícitos e motivados para participar, contribuindo com sua aprendizagem. Camilo (2009) acredita que por meio dessas situações, pôde mostrar aos alunos momentos de ação, formulação, validação e institucionalização, de acordo com as fases do processo de aprendizagem descritas por Brousseau (1986), os alunos puderam também ancorar novos conhecimentos apoiados em conhecimentos anteriores vivenciando a Aprendizagem Significativa de Ausubel (1968).

A fração na forma mista (número inteiro acompanhado de um número fracionário) em contextos de medida surge de forma natural quando o aluno manuseia tais atividades e por isso são facilitadoras para a compreensão dos alunos.

A figura 7 mostra que os alunos conseguiram chegar a uma regra para a adição e subtração de frações, masmo com a não utilização dos termos corretos percebe-se que a sequancia foi, de fato, importante para a construção do conhecimento deles.

Figura 7 - Regra para adição e subtração escrita por alunos


Atividade 9

Escreva uma regra para a adição e a subtração de duas frações quaisquer.

Regra: Para efetuar adição e subtrações com denominadores iguais, basta efetuar as contas com os numeradores. Já se os denominadores forem diferentes é necessário fazer a conta equivalente transformando os iguais, e efetuando as contas dos numeradores, mantendo o denominador.

Fonte: Camilo (2009)

Nesta sequência sobre adição e subtração de frações entendeu-se que os objetivos foram alcançados e, portanto, pode ser concluída com um saldo positivo de aprendizagem e com um bom índice de aproveitamento pelos alunos.

Sequência de multiplicação

Segundo Pereira (2011) as atividades da sequencia de multiplicação tiveram seus objetivos atingidos, nas representações das figuras que solicita a mobilização da concepção parte-todo e medida auxiliaram os alunos na realização das atividades, porém, ainda que numericamente os alunos tenham respondido corretamente algumas questões.

Assim como relatado por Camilo (2009), Pereira (2011) relata que a divisão em partes congruentes das figuras não foi realizada com êxito, mesmo os alunos estando utilizando réguas.

Apesar de os alunos não realizarem o registro simbólico para a ação da divisão nas primeiras atividades, Pereira (2011) entendeu que a falta do registro ocorreu, provavelmente, pelo enunciado não solicitá-lo, além disso, esperou-se que a utilização do registro acontecesse gradualmente, na resolução das próximas atividades.

Pereira (2011) ressaltou também que a falta de interpretação de termos “hachurada” e “sentença matemática”, podem estar relacionadas com a falta de hábito, por parte dos alunos, em lidar com situações que exigem atenção ao enunciado e interpretações relacionadas ao saber matemático.

De um modo geral, os estudantes demostraram nesta sequencia ter compreendido a regra operatória da multiplicação dos números fracionários, dessa maneira Pereira (2011) acredita que os objetivos foram atingidos satisfatoriamente.

Sendo assim, ao final da aplicação para a construção e compreensão da regra operatória da multiplicação dos números fracionários, realizamos a institucionalização e, a partir dos argumentos levantados durante todas as discussões, foram organizadas as conclusões no sentindo de dar “acabamento” ao conhecimento elaborado pelo aluno. Pereira entende que essa fase é de suma importância, pois a sistematização feita pelo professor possibilita ao aluno reinvestir estas sínteses em outras situações.

Sequência de atividades de divisão

Segundo Pereira (2011) apesar de não terem percebido que poderiam utilizar as frações equivalentes na divisão, todos os participantes iniciaram respondendo corretamente a situação proposta.

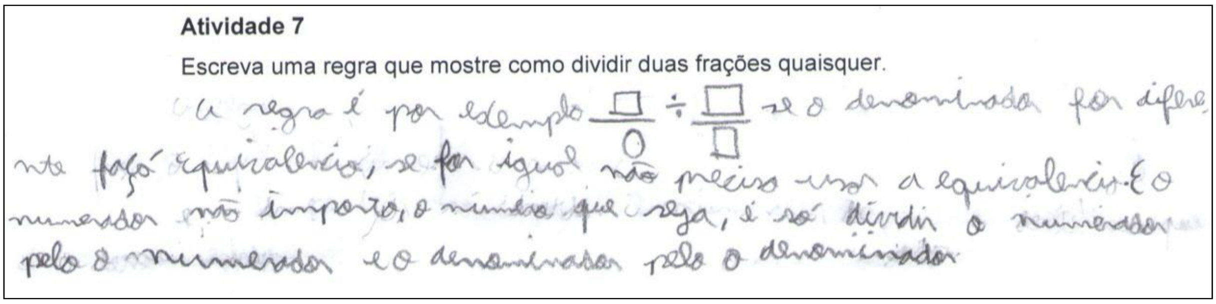
Após a aplicação das cinco primeiras atividades da sequência, Pereira (2011) entendeu que seria necessário mais atividades que mobilizasse os conhecimentos anteriores para compreensão da regra operatória. Com o propósito de que os alunos percebam e compreenda que a regra anterior pode ser utilizada encontrando as frações equivalentes de mesmo denominador, sendo assim acrescentou em sua sequência didática mais algumas atividades.

Assim como as atividades anteriores, Pereira (2011) teve a oportunidade de observar as fases da ação, formulação e validação. Na fase da ação os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Analisam a situação proposta. De inicio, entenderam que se tratava da divisão de fração. Observamos nesta fase que os grupos procuram estabelecer uma estratégia que lhes possibilite encontrar a solução.

Houve várias tentativas. Na fase da formulação perceberam a necessidade de encontrar frações equivalentes de mesmo denominador e as propõem para encontrar a solução. Na fase da validação os grupos comunicam suas estratégias uns aos outros e também ao pesquisador. Neste caso definiram que as frações equivalentes seria o melhor caminho, aplicaram na resolução e a consideraram valida.

Pereira (2011) acredita que os objetivos para esta sequência didática foram atingidos com sucesso, pois os grupos fizeram a leitura e interpretação do enunciado, formularam, definiram suas estratégias e por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento, respondendo corretamente a situação proposta. Entendemos que esta atividade mostrou-se propícia para a percepção da regra operatória da divisão.

Figura 8 - Regra da divisão escrita por um dos alunos



Atividade 7

Escreva uma regra que mostre como dividir duas frações quaisquer.

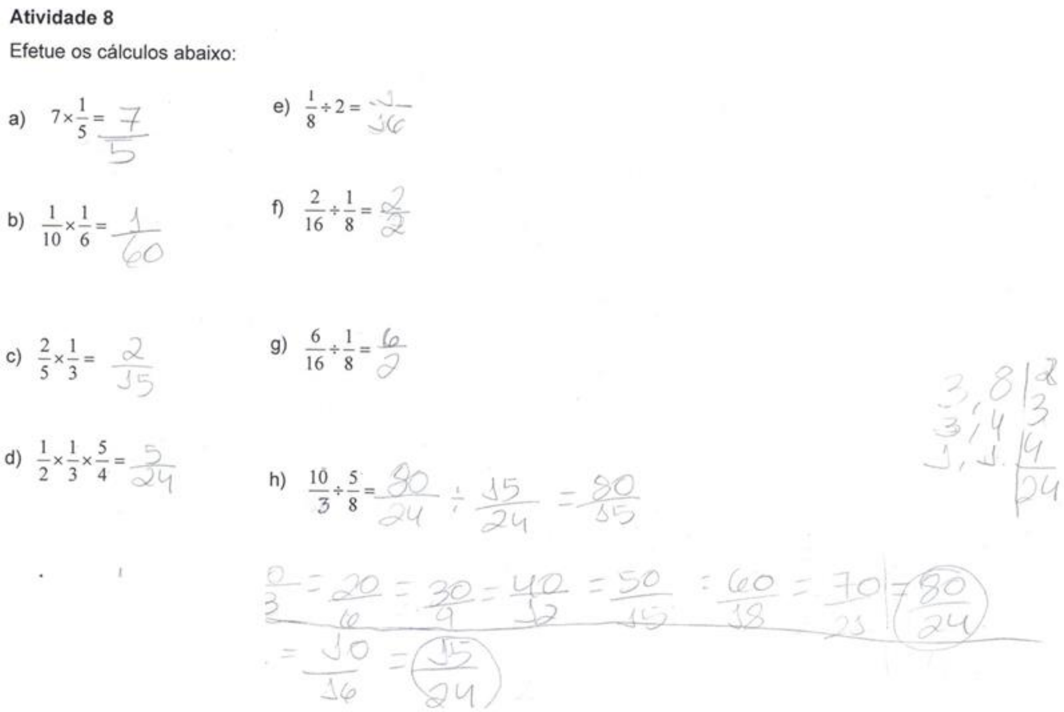
a regra é por exemplo $\frac{\square}{\bigcirc} \div \frac{\square}{\square}$ se o denominador for diferente faço equivalência, se for igual não preciso usar a equivalência. E o numerador não importa o número que seja, é só dividir o numerador pelo o numerador e o denominador pelo o denominador

Fonte: Pereira (2011)

Perreira (2011) nos mostra que como na regra operatória da multiplicação dos fracionários os alunos tentarem fazer a generalização para a regra operatória da divisão. Observando a figura 8 podemos perceber que ele utilizou símbolos (neste caso *quadrilátero* e *bolinha*) para indicar que poderia ser qualquer número. Pereira (2011) entende que o estudante por ainda não ter o conhecimento suficiente para realizar a generalização, buscou por meio de símbolos fazer a representação da regra. A autora salienta que nas gravações é possível identificar que o aluno fala corretamente a regra com os demais integrantes, porém a descreve de maneira equivocada. Na frase "*se o denominador for diferente faça a equivalência"* na verdade o aluno quis dizer "*se não for divisível faça a equivalência"* e na frase "*se for igual não precisa usar a equivalência*" ele quis dizer que "*se for divisível (numerador e denominado) não precisa usar a equivalência".* Acredita a autora que essa dificuldade de descrição da regra ocorre por não ser uma prática usual dos alunos serem solicitados a descrever situações que envolvam registros discursivos.

Observaremos na figura 9 que o aluno resolve corretamente tanto os casos da regra operatória da multiplicação, quanto os casos da regra operatória da divisão. Os cálculos foram realizados sem maiores problemas, nos itens em que os numeradores e denominadores são divisíveis e para o último item, embora tenha esboçado o cálculo do mínimo múltiplo comum a estratégia adotada foi a de encontrar frações equivalentes de mesmo denominador.

Figura 9 - Cálculos realizados por alunos



Fonte: Pereira (2011)

Analisando os resultados gerais, Pereira (2011) verifica que durante as interações ocorridas entre os estudantes e o pesquisador, ficou bastante evidente a importância de o professor ter clareza do assunto que está sendo ensinado, pois dependendo da atuação do professor e de suas devolutivas, o diálogo poderá ou não conduzir o aluno a refletir e compreender realmente o conteúdo que está sendo ensinado.

Silva (2005, p. 243) acredita que “a possibilidade na prática de ensino de fracionários de professores em exercício pode ser conquistada com ações formativas planejadas, para que os professores possam refletir profundamente não só sobre as práticas, mas também sobre conhecimentos desse conteúdo”.

Em relação às dialéticas da ação e formulação, por vezes estas estiveram presentes, sendo posteriormente ampliadas no intuito de que com as discussões obter-se a validação. Após a incorporação desses conhecimentos, ou seja, ao final da conclusão das regras operatórias ocorreu o momento da institucionalização, que consolidava o conhecimento matemático de cada situação.

Pereira (2011) constatou que as atividades realizadas em grupos foi um ponto positivo. Muitas das concepções foram expostas pelas conversas entre alunos durante a resolução das atividades. Em muitos casos foi possível, por meio do diálogo, observar a etapa da validação, em que o aluno mostra a validade do modelo por ele criado (saber socializado).

Um aspecto negativo a ser levantado está relacionado à dificuldade de interpretação do enunciado e os argumentos que justificassem a resolução da atividade. Por não se atentarem ao que se pedia no enunciado, algumas vezes, iniciaram a atividade sem um planejamento, esquecendo-se do objetivo da questão. A autora entende que estas questões podem estar relacionadas com a falta de hábito, por parte dos alunos, em lidar com situações que exigem atenção ao enunciado e interpretações relacionadas ao saber matemático.

Na análise da autora as situações em que se pedia a apresentação das regras, os resultados apontaram que apesar dos alunos relatarem corretamente as regras operatórias, a maior parte deles apresentavam dificuldades em descrevê-las. Pereira (2011) acredita que isso ocorra por não ser uma prática usual dos alunos serem solicitados a descrever situações que envolvam registros discursivos, por esta razão, a autora entende que essas situações devem ser inseridas no contexto escolar, pois se mostraram importantes na construção do conhecimento.

Outra evidência para essas dificuldades refere-se ao fato dos alunos não estarem acostumados a desenvolver atividades com autonomia, ou até mesmo, pela falta de situações em que o desenvolvimento de suas capacidades estivesse presentes.

Para Silva (2005, p.239) as dificuldades apresentadas no tratamento e na produção para o ensino baseado em regras prontas, localizadas em desenvolvimento históricos mais recentes, devem-se à crença na aprendizagem por memorização. Entendemos que nossa sequência didática vai de encontro a essa aprendizagem por memorização, uma vez que possibilitou ao aluno construir significado as regras operatórias de multiplicação e divisão dos números fracionários.

Sumariamente Pereira (2011) afirma que, para essa amostra de sujeitos, a aplicação desta sequência permitiu observar mudanças, por parte dos alunos, na compreensão do conteúdo e das regras operatórias dos números fracionários.

5 A PESQUISA

A formação de docentes foi planejada de maneira a possibilitar discussões a respeito de como os docentes ensinam as operações dom números Racionais em sua forma fracionária e apresentação e discussão sobre uma proposta de ensino.

A fase de seleção dos docentes participantes teve início no dia 07 de setembro de 2021 e se estendeu até 10 de setembro de 2021, objetivando selecionar o grupo de participantes. Procedeu-se, inicialmente, à inscrição dos participantes concomitante com o levantamento de informações de cada um. Decidimos pela utilização do ambiente virtual *Microsoft Forms* para o preenchimento das inscrições e dos questionários informativos assim como apresentação das datas dos encontros.

O objetivo dessa fase foi que as informações obtidas por meio do emprego de questionários que proporcionassem a elaboração de um perfil pessoal e profissional dos participantes.

A fase de execução da formação transcorreu entre os meses de setembro e outubro de 2021 quando ocorreram encontros à distância através da plataforma *Microsoft Teams*, devido aos protocolos sanitários impostos pela pandemia do COVID-19.

A organização das sequencias aplicadas foi pensada de modo a proporcionar aos participantes apropriação e crítica de uma sequência de ensino para introduzir o ensino de operações com números Racionais em sua representação fracionária com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental II.

5.1 Os sujeitos da pesquisa

A seleção dos participantes da pesquisa se deu por meio de um questionário *online* via *Microsoft Teams* objetivando traçar o perfil pessoal e profissional dos inscritos conforme segue.

Tivemos inicialmente vinte docentes inscritos para participação da formação, contudo seis destes os quais demonimaremos por P1, P2, P3, P4, P5 e P6 foram os participantes com os quais trabalhamos.

Após o levantamento dos dados pessoais dos participantes traçamos a formação desde o ensino médio para poder entender um pouco da trajetória, sendo que destes apenas um cursou o Ensino Médio em instituição particular e todos possuíam formação superior de Licenciatura em Matemática.

Verificamos também que os participantes P5 e P6, possuíam apenas a formação superior, P1 e P2 possuía Pós-graduação Lato Sensu e ainda P2, P3 e P4 alunos cursando Pós-Graduação Stricto Sensu de nível Mestrado em Educação Matemática.

Por fim, buscamos traçar o perfil profissional fazendo um levantamento em que tipo de instituição leciona e o tempo de experiência docente, sendo que três possuíam experiência em instituições públicas e também em instituições particulares e os outros três apenas em instituições particulares.

5.2 Descrição da aplicação

A aplicação da sequência se deu em quatro encontros, nos dias dezoito de setembro, dois, nove e dezesseis de outubro do ano corrente de dois mil e vinte um, de forma remota via plataforma Microsoft Teams com seis professores participantes os quais conforme citamos denominaremos de P1, P2, P3, P4, P5 e P6.

Para aplicação das sequências estiveram presentes o pesquisador juntamente com a orientadora, onde durante toda a aplicação a pesquisador atuou como observador.

Iniciamos nosso primeiro encontro as nove horas do dia dezoito de setembro solicitando aos participantes um breve histórico de sua formação acadêmica e experiência profissional, seguida dos relatos de suas vivências sobre o ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária o qual já havíamos solicitado que nos enviassem por escrito, relatos estes que nos evidenciam que os participantes utilizam para o ensino sempre os mesmos métodos de fixação de regras as quais os alunos acabam por ter inúmeras dificuldades pois não conseguem compreender o porquê que os cálculos ocorrem de determinadas formas.

Após este breve bate papo com os participantes explanamos a eles como planejamos nossa formação, onde informamos que dividiríamos os participantes em dois grupos de trabalho que prosseguiriam juntos em todos os encontros.

Sendo assim fizemos a divisão em dois grupos com três participantes em cada, grupo 1 formado por P1, P2 e P4 e o grupo 2 formado por P3, P5 e P6, apresentamos então a sequência atividades de adição e subtração de frações, composta por nove atividades para o início da nossa formação onde logados em dois computadores pudemos acompanhar as discussões dos grupos simultaneamente.

Os participantes de ambos os grupos se organizaram entre eles ficando um dos participantes de cada grupo responsável por compartilhar sua tela utilizando uma lousa digitalizadora para facilitar a resolução das atividades e suas devidas discussões.

Os demais encontros também foram iniciados as nove horas com o término das atividades ao meio-dia, sendo que no segundo encontro ocorrido no dia dois de outubro aplicamos a sequência didática contendo atividades de multiplicação de frações, composta por 8 atividades, em nosso terceiro encontro no dia nove de outubro aplicamos a sequência didática contendo atividades de divisão de frações composta por o atividades e em nosso último encontro no dia dezesseis de outubro aplicamos a sequência didática contendo problemas que mobilizam operações com frações, composta por nove atividades.

Ressaltamos todas as sessões foram áudiogravadas, pois entendemos que nos auxiliará nas análises posteriores.

5.3 Análise dos dados da pesquisa

As sequências são instrumentos para analisar os conhecimentos dos professores quanto o ensino de operações com frações, para tanto vamos analisar as resoluções apresentadas pelos participantes observando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Para iniciarmos nossa formação alguns dias antes do nosso primeiro encontro solicitamos que os participantes nos enviassem como ensinam as operações com frações para seus alunos, para ao final observarmos quais conhecimentos referentes as teorias apresentadas os participantes haviam adquiridos.

Algumas das descrições dos participantes de como ensinam as operações com Frações.

Figura 10 - Relato do participante P6 sobre ensino de Adição e Subtração

Começo apresentando para os alunos os conceitos sobre tipos de fração, representações e equivalência após sentir que esse conteúdo foi fixado passo para as 4 operações básicas.

Eu começo ensinando primeira a soma e subtração de fações de mesmo denominador, falo para eles manter o denominador e somar os numerados como no exemplo abaixo:

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5} \qquad \frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8-2}{5} = \frac{6}{5}$$

Depois passo para a soma e subtrações de frações de denominadores diferentes, como encontrei muitas dificuldades dos alunos com a realização do MMC, mostrei para ele que eles podiam usar o conceito de múltiplos de um número inteiro como no exemplo abaixo:

1º Passo apresento a fração para eles

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4}$$

2º Passo peço para eles listarem os múltiplos de 3 e 4 e ver qual múltiplo eles têm em comum.

M (3) = {3,6,9,12,15,18}

M (4) = {4,8,12,16,20, 24}

3º Passo pelo para eles pegarem o valor em comum e transformar em um novo denominador e dividir pelo de baixo e o resultado multiplicar pelo de cima

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{8+15}{12}$$

$$= \frac{23}{12}$$

Fonte: Atividade de pesquisa

A figura 10 nos evidência que no ensino de adição e subtração os professores priorizam a aplicação de regras como a da utilização do M.M.C. (Mínimo Múltiplo Comum) dos denominadores para terem denominadores comuns nas Frações.

Figura 11 - Relato do participante P6 sobre ensino de Multiplicação e Divisão

Na multiplicação eu peço para eles multiplicarem em linha, ou seja, numerador com numerador, denominador com denominador. Quando cai numa fração que não está em sua forma irredutível peço para eles simplificarem a respo

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2.5}{3.4} = \frac{10:2}{12:2} = \frac{5}{6}$$

Na divisão eu peço a eles que eles conservem a primeira fração e multipliquem pelo inverso da segunda fração.

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2.4}{3.5} = \frac{8}{15}$$

Fonte: Atividade de pesquisa

Vemos tanto na figura 11 quanto na figura 12 que no ensino da divisão de frações ambos os professores ensinam aos alunos um método de resolução da “manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda” sem efetuar de fato a divisão.

Figura 12 - Relato do participante P2 sobre ensino das operações com Frações

Ao lecionar para alunos do 6º ano em uma turma de apoio, as operações de números decimais em sua forma fracionária iniciaram-se pela Soma e subtração, por meio de frações equivalentes. Pois acredito que está forma é a mais assimilada pelos alunos. Após isso, costumo mostrar outra forma de resolver na qual eles podem utilizarem se preferirem. Essa outra forma, eles podem multiplicar os denominadores e depois somar/subtrair o produto dos extremos.

Exemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=$$

2 x 3 = 6 (denominadores)

1 x 3 = 3 (extremos)

2 x 2 = 4 (extremos)

Logo, $\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$

Para multiplicação de números decimais em sua forma fracionária, dificilmente encontro dificuldades, pois mostro a eles que devem apenas multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

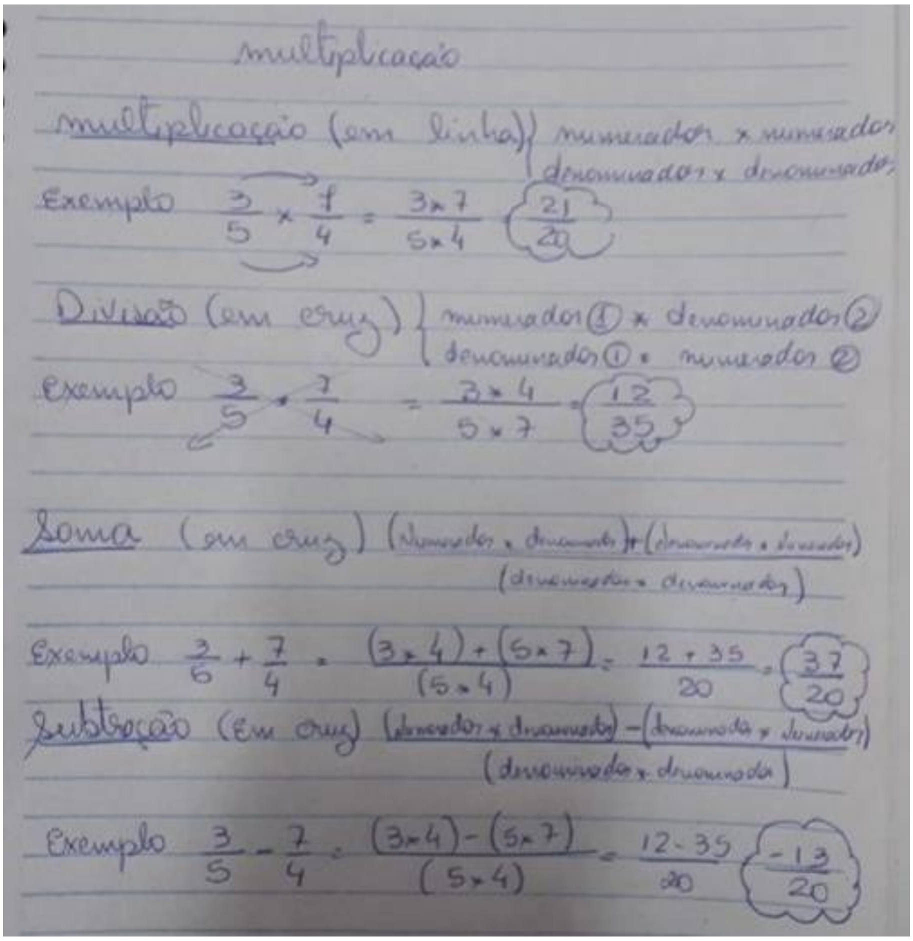
Para divisão de números decimais em sua forma fracionária, utilizo a famosa regra “copie a primeira fração e multiplica pela inversa da segunda”.

Fonte: Atividade de pesquisa

Na figura 12 vemos que o professor apresenta a soma e subtração por frações equivalentes, e depois apresenta um outro método de resolução não citando o método da utilização do M.M.C dos denominadores como o anterior. Contudo vemos tanto na figura 11 quanto na figura 12 que no ensino da divisão de frações ambos os professores ensinam aos alunos um método de resolução da “manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda” sem efetuar de fato a divisão.

Já na figura 13, o método de adição é o mesmo apresentado na figura 12, mas o professor apresenta, na divisão, o mesmo método, porém multiplicando “em cruz”, o que aparente ficar ainda mais confuso para os alunos, pois eles precisam “decorar” qual das multiplicações de numerador por denominador que será o denominador e qual será o numerador do quociente.

Figura 13 - Relato do participante P5 sobre ensino de Adição e Subtração


multiplicação

multiplicação (em linha) { numerador x numerador / denominador x denominador

Exemplo $\frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{3\times 7}{5\times 4} = \frac{21}{20}$

Divisão (em cruz) { numerador ① x denominador ② / denominador ① x numerador ②

Exemplo $\frac{3}{5} : \frac{7}{4} = \frac{3\times 4}{5\times 7} = \frac{12}{35}$

Soma (em cruz) (numerador x denominador) + (denominador x numerador) / (denominador x denominador)

Exemplo $\frac{3}{5} + \frac{7}{4} = \frac{(3\times 4)+(5\times 7)}{(5\times 4)} = \frac{12+35}{20} = \frac{37}{20}$

Subtração (Em cruz) (numerador x denominador) − (denominador x numerador) / (denominador x denominador)

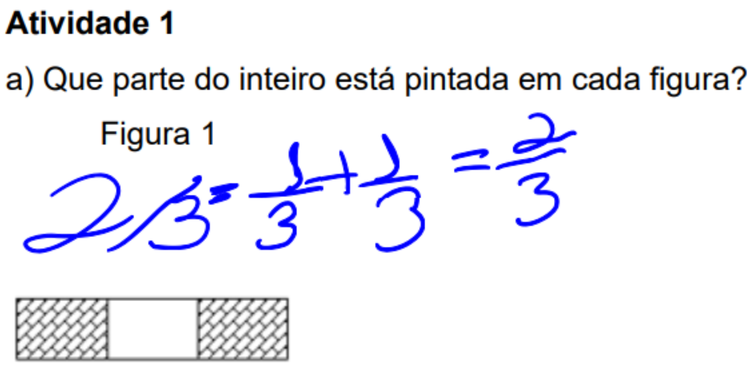
Exemplo $\frac{3}{5} - \frac{7}{4} = \frac{(3\times 4)-(5\times 7)}{(5\times 4)} = \frac{12-35}{20} = \frac{-13}{20}$

Fonte: Atividade de pesquisa

Analisando os relatos de como os participantes ensinam as operações com frações aos seus alunos, percebemos que se utilizam apenas de técnicas para a realização dos cálculos o que faz com que o aluno apenas decore como resolver sem dar sentido ao que fazem, assim esperamos que após trabalharmos as sequências didáticas com os participantes eles percebam como o aluno pode dar sentido as operações e assim conseguir realizá-las de uma forma mais natural.

Dessa forma iniciamos as análises dos encontros, onde na primeira sequência didática onde nosso objetivo na atividade 1, item (a) é fazer com que os participantes representem o valor numérico observando as figuras dadas, assim iniciaram a leitura e em ambos os grupos chegaram de imediato na resolução da figura (1) do item (a) da atividade 1 sem nenhuma dificuldade (Figura 10) porém, na figura (2) houve uma breve discussão no grupo 1 para chegarem à resolução.

Figura 14 - Resolução apresentada pelo grupo 2 – Figura (1) (adição)

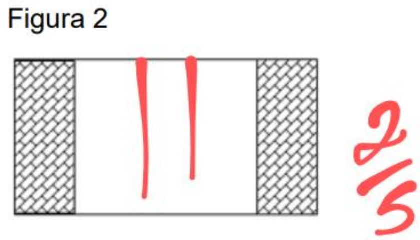


Fonte: Atividade de pesquisa

Na figura (2) os participantes do grupo 1 discordaram de início da resolução, ondo o participante P1 entendeu de uma forma a figura enquanto os demais participantes entenderam de outra, conforme transcrição.

P2 – E a segunda figura?
P1 – A segunda também é dois terços. A primeira e a segunda são dois terços.
P4 – A segunda é dois quintos, né?
P1 – A segunda está parecendo para mim dois terços.
P2 – E ai gente, vamos lá e a segunda?
P1 – Dois terços também, não é?
P2 – Dois terços?
P1 – Não é a segunda dois terços?
P2 – Está vendo a tela aí?
P1 – Estou sim, estou vendo a figura na tela pintado os dois extremos e branco no meio.
P2 – Branco no meio?
P1 – É para mim parece dois terços a primeira e a segunda.
P2 – Certo.
P1 – E o que aparece para você? Porque para mim aparece pintado as duas pontas e um retângulo no meio.
P2 – É, mas como é para representar qual a parte do inteiro, como parte do inteiro eu acho que o que P4 falou tem todo sentido, a gente tem que dividir a figura em partes proporcionais de mesma área.
P1 – Então, mas não está dividido, será que tem que dividir então?
P2 –Sim, como é parte em relação ao inteiro as partes têm que ser proporcionais.
P1 – Entendi, está certo, isso que está no enunciado então o certo é dois quintos.

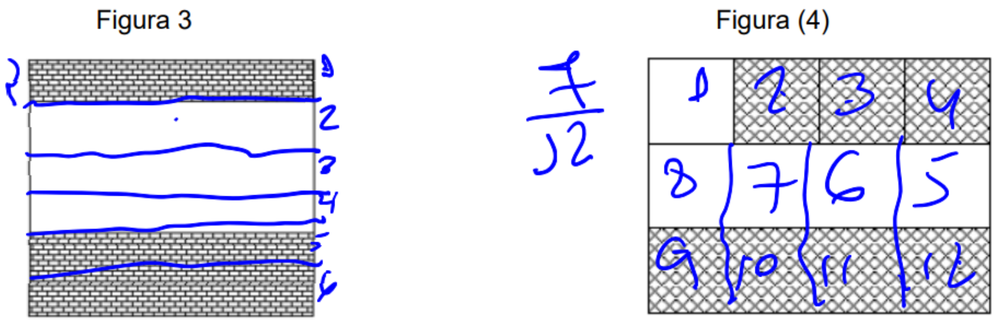
Figura 15 - Resolução apresentada pelo grupo 1 – Figura (2) (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

Após essa discussão, não tiveram maiores problemas na resolução das figuras (3) e (4) desta atividade.

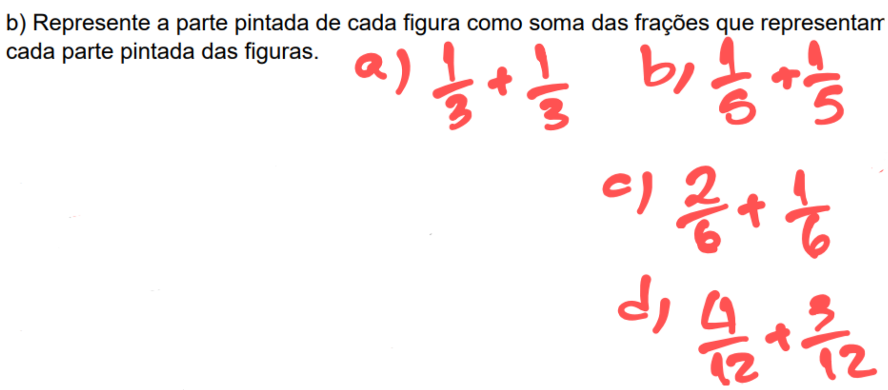
Figura 16 - Resolução apresentada pelo grupo 2 – Figuras (3) e (4) (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

No item (b) da atividade ambos os grupos encontraram as soluções sem dificuldades.

Figura 17 - Resolução apresentada pelo grupo 1 – Item (b) (adição)



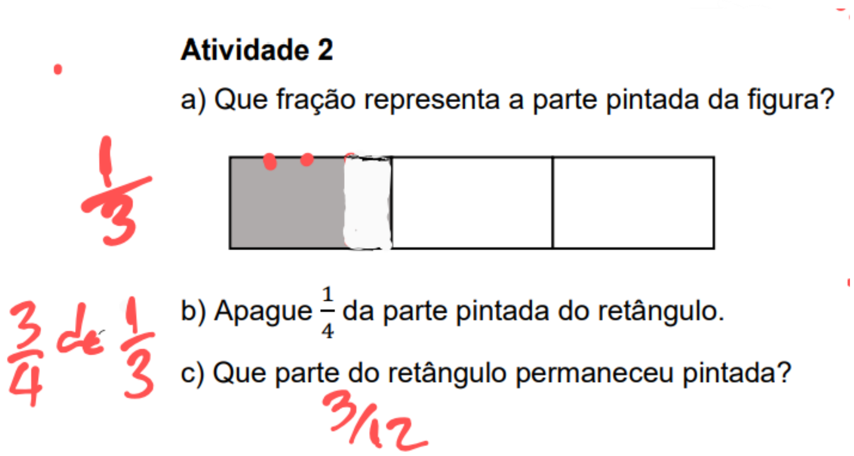
Fonte: Atividade de pesquisa

Observando e refletindo sobre a aplicação da primeira atividade da sequência e analisando o nosso referencial teórico é possível perceber as conversões de registros da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS). Converteram uma situação representada no registro figural para a sua representação no registro numérico, segundo Almouloud (2007, p. 79) as representações “[...] facilita a compreensão ou a descoberta de novos conteúdos, principalmente para os sujeitos que estão se iniciando em tarefas que envolvem coordenação de registros.”

Percebemos também a presença da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), mais precisamente referente aos campos conceituais aditivos de **primeira categoria**, onde temos composição de duas medidas em uma terceira, parte/parte/todo, em que dadas duas medidas elementares conhecidas encontramos uma terceira.

Na atividade 2 o grupo 1 não teve muitas dificuldades na resolução, no item (b) o participante P1 descreveu para o grupo a resposta, “sobraram três quartos de um terço, então sobraram três doze avos” (transcrição do participante P1).

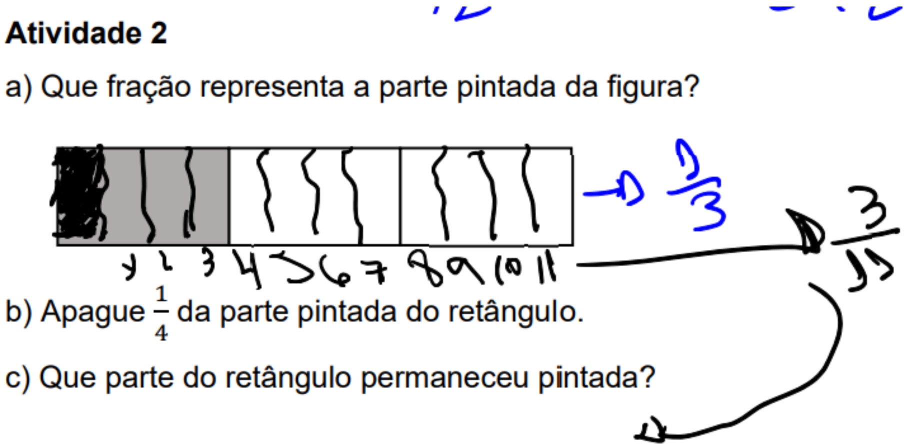
Figura 18 - Resolução apresentada pelo grupo 1 – Itens (a, b e c) (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

Os participantes do grupo 2 não chegaram a mesma resolução do grupo 1 fazendo uma interpretação diferente do enunciado proposto.

Figura 19 - Resolução apresentada pelo grupo 2 – Itens (a, b e c) (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

Ao chegar no item (d) os participantes dos dois grupos tiveram dificuldades para escrever a sentença matemática que representava do que haviam feito, os participantes do grupo 1 deixaram o item em branco pois não conseguiram chegar ao mesmo resultado do item (c), conforme transcrição, enquanto o grupo 2 apresentou como solução a mesma sentença a qual o outro grupo chegou, o que não condiz ao resultado que haviam obtido no item (c).

P1 – Na b, apague é menos, então é menos um quarto, então vai fazer um terço menos um quarto, o que acha ai?

P2 – É, pensando dessa forma, se a gente dividiu ali em doze.

P1 – A figura original estava um terço, apagou um quarto, então seria um terço menos um quarto, vai achar o MMC entre três e quatro que vai dar doze, acha as frações equivalentes e faz a conta.

P2 – Mas aí vai ficar um doze avos.

P4 – Mas não precisa resolver, pediu só a sentença matemática.

P1 – Faz sentido, não tem que resolver.

P4 – É, não pediu para resolver, pediu a sentença e a sentença é essa. Acabou!

P2 – Mas aí não foi o que a gente fez, isso.

P1 – Mas P2 por que está dizendo que não foi isso que a gente fez?

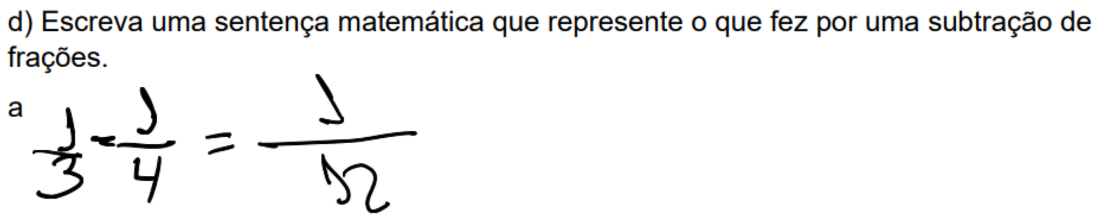
P2 – Porque a parte que permaneceu pintada foi três doze avos.

P1 – Sim essa é a resposta da questão.

P2 – Mas essa sentença não dá a mesma resposta, dá um doze avos, entendeu?

P1 – Entendi! Teria que dar três doze avos. Vamos ver essa depois, então.

Figura 20 - Resolução apresentada pelo grupo 2– Item (d)



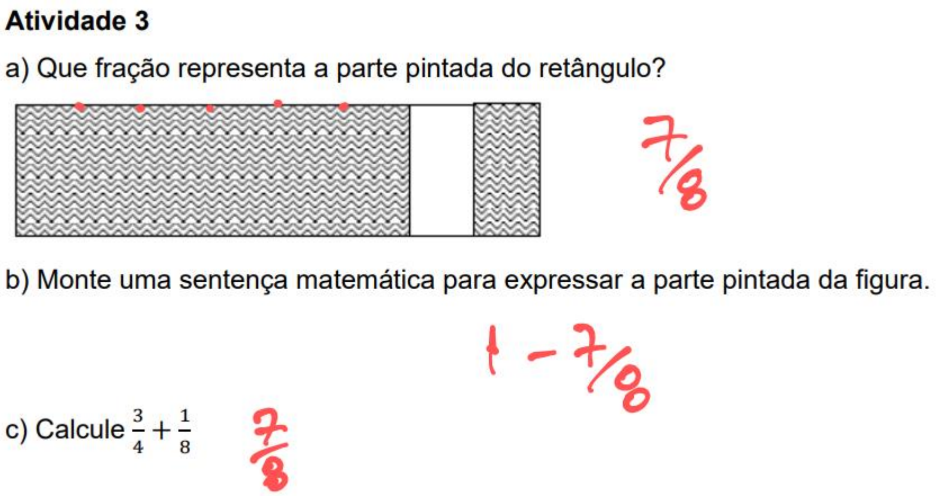
d) Escreva uma sentença matemática que represente o que fez por uma subtração de frações.

a $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

Fonte: Atividade de pesquisa

Partindo para a atividade 3 os participantes do grupo 1 conseguiram fazer a divisão da figura em partes proporcionais, respondendo corretamente o item (a), porém ao montar a sentença matemática solicitada no item (b) a fizeram utilizando na sentença a fração que foi obtida como resultado.

Figura 21 - Resolução apresentada pelo grupo 1 – Atividade 3 (adição)



Atividade 3

a) Que fração representa a parte pintada do retângulo?

$7/8$

b) Monte uma sentença matemática para expressar a parte pintada da figura.

$1 - 7/8$

c) Calcule $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ $\frac{7}{8}$

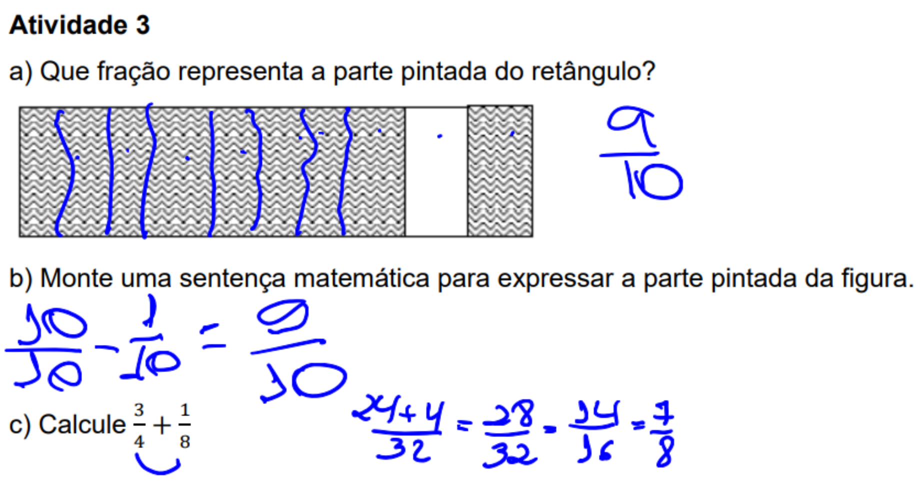
Fonte: Atividade de pesquisa

Ainda na atividade 3, o grupo 2 não trabalhou corretamente com a divisão da figura em partes proporcionais, obtendo resultado divergentes do que seria o exercício, contudo no item (b) que pedia a sentença matemática, fizeram a sentença correta, de acordo com o resultado do item (a), e na resolução da sentença apresentada no item (c) os participantes discutiram sobre o método de resolução, conforme descrição, obtendo o resultado da sentença.

P3 – Nessa temos que fazer a soma das frações.
P6 – Tem que fazer o MMC (Mínimo Múltiplo Comum).
P3 – Podemos fazer multiplicando os denominadores entre si, e multiplicar numerador por denominador “em cruz”.

P6 – Nunca resolvi dessa forma.
P5 – Ensino meus alunos com essa “técnica”.

Figura 22 - Resolução apresentada pelo grupo 2 – Atividade 3 (adição)



Atividade 3

a) Que fração representa a parte pintada do retângulo?

$\frac{9}{10}$

b) Monte uma sentença matemática para expressar a parte pintada da figura.

$\frac{10}{10} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

c) Calcule $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$

$\frac{24+4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

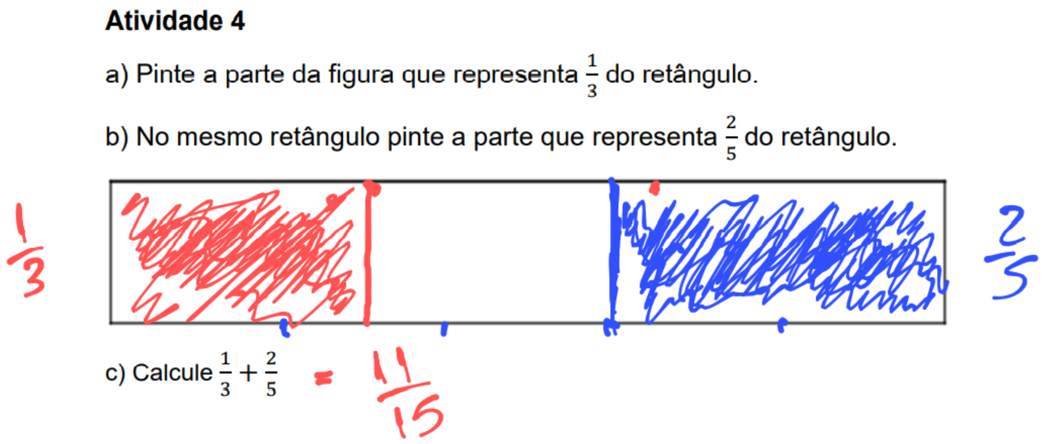
Fonte: Atividade de pesquisa

Observando e refletindo sobre as atividades 2 e 3 da sequência e analisando o nosso referencial teórico é possível perceber as conversões de registros da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS). Converteram uma situação representada no registro figural para a sua representação no registro numérico, assim como percebemos na atividade 1.

Percebemos também a presença da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), mais precisamente referente aos campos conceituais aditivos de **primeira categoria**, onde temos composição de duas medidas em uma terceira, parte/parte/todo, em que dadas duas medidas elementares conhecidas encontramos uma terceira.

Na atividade 4 os participantes dos dois grupos apresentaram uma resolução sem problemas, apenas no grupo 1 tiveram uma breve discussão sobre o entendimento do enunciado, chegando brevemente a um consenso.

Figura 23 - Resolução apresentada pelo grupo 1 – Atividade 4 (adição)

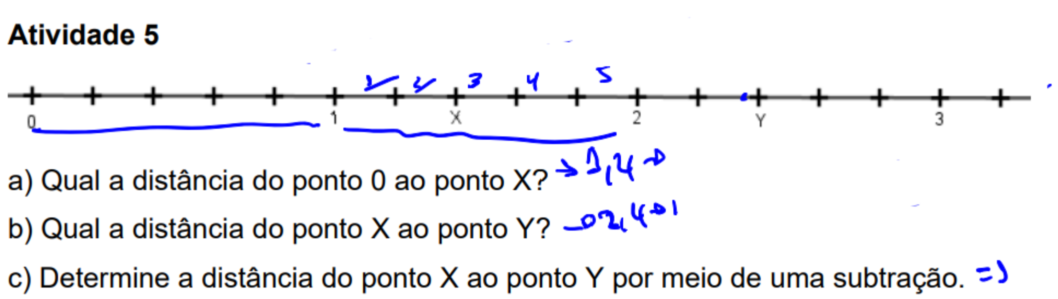


Fonte: Atividade de pesquisa

Observando a atividade 4 da sequência à luz o nosso referencial teórico é possível perceber as conversões de registros da Teoria de Registros de Representação Semiótica. Converteram uma situação representada no registro numérico para a sua representação no registro figural, já no que trata da Teoria dos Campos Conceituais continuamos com a mesma categoria das atividades anteriores.

A atividade 5 propomos trabalhar com frações maiores que um inteiro através de uma reta numérica. Os participantes do grupo 2, acreditamos que por conta da falta de hábito te trabalhar com as frações dessa forma fizeram a resolução do exercício fazendo a conversão do registro figural para o registro numérico decimal, o que fugiu do objetivo da atividade que é trabalhar com a forma fracionária.

Figura 24 - Resolução apresentada pelo grupo 2 - Atividade 5 (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

Os participantes do grupo 1, fizeram uma breve discussão sobre o tipo de registro que deveriam utilizar, conforme transcrição, e resolveram a atividade corretamente fazendo a conversão do registro figural para o registro numérico fracionário e operando os conceitos do campo aditivo corretamente.

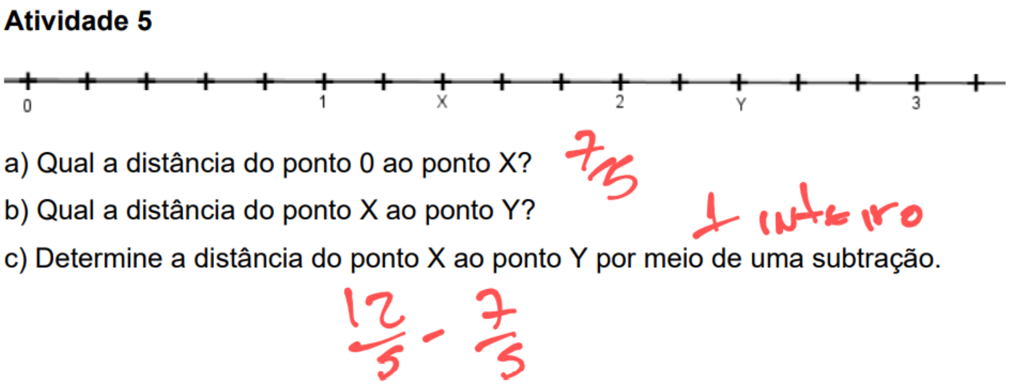
P2 – Qual a distância do ponto zero ao ponto X?

P1 – Bom, do 0 ao 1 está dividido em 5 partes, então é 0,2 cada pedaço, é 1,4.

P2 – P1, acho que tem q ser em fração.

P1 – Mas ele não falou que quer em fração e a escala aí é de 0,2. Então o X está no 1,4, mas como estamos trabalhando até agora com fração 1,4 = $\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$.

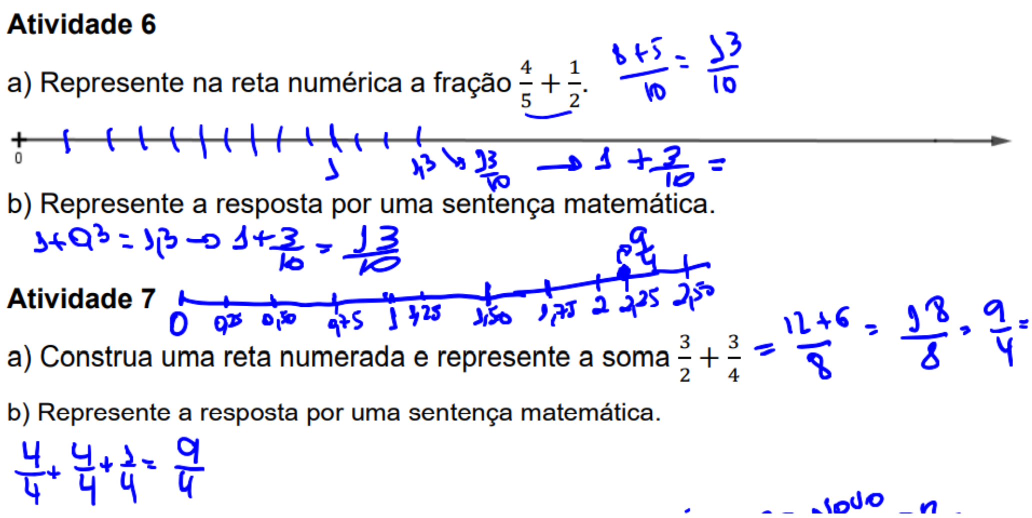
Figura 25 - Resolução apresentada pelo grupo 1 - Atividade 5 (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

Nas atividades 6 e 7 também apresentamos uma reta, porém sem nenhuma escala para que os participantes realizassem as conversões dos registros numéricos para o registro figural e após realizadas as conversões efetuassem os cálculos solicitados, porém os participantes do grupo 2 não lograram êxito nessas duas atividades não conseguindo fazer a conversão de forma a facilitar as resoluções criando escalas decimais.

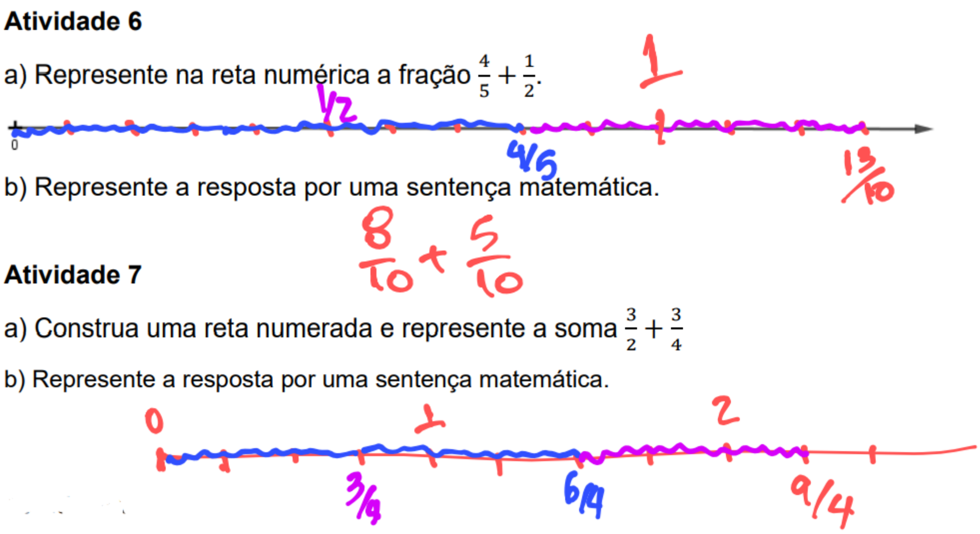
Figura 26 - Resoluções apresentadas pelo grupo 2 - Atividades 6 e 7 (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

O grupo 1 conseguiu trabalhar de forma correta as conversões o que facilitou o trabalho dos participantes na resolução. Apresentaram as operações representando-as na reta e depois apresentaram uma sequência matemática.

Figura 27 - Resoluções apresentadas pelo grupo 1 - Atividades 6 e 7 (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

Na atividade 8 pede para os participantes escreverem uma regra para a adição e subtração de duas frações quaisquer. Nessa atividade o grupo 1 colocou como regra a utilização do M.M.C. (Mínimo múltiplo comum) entre os denominadores para igualá-los.

Figura 28 - Regra para adição e subtração escrita pelo grupo 1

Atividade 8

Escreva uma regra para a adição e subtração de duas frações quaisquer.

Frações com denominadores iguais: Conserva o denominador e soma ou subtrai os numeradores.

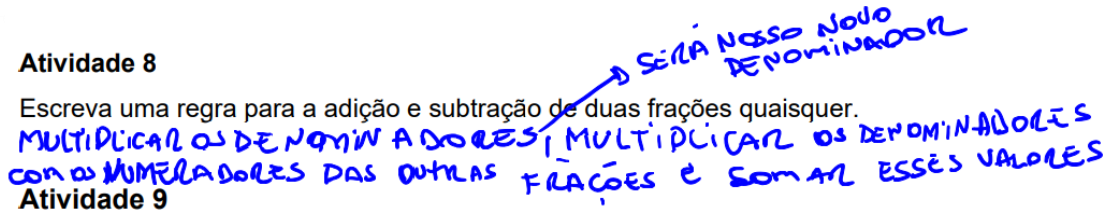
Frações com denominadores diferentes: Para igualar os denominadores utiliza a regra do mmc

Fonte: Atividade de pesquisa

O grupo 2 escreveu com regra, a mesma apresentada por P3 antes da atividade, sugerindo que se multiplique os denominadores obtendo um nove denominador e após isso multiplique o denominador anterior pelo numerador da outra fração, para assim efetuar a adição ou subtração do resultado desses produtos. Tal regra enunciada pode facilitar o cálculo quando temos uma operação de adição ou subtração entre duas frações, porém quando a sentença dispuser de três ou mais frações, a regra já se torna de mais difícil execução.

Percebemos ao término da sequência didática, que os professores participantes não pensarem na regra de cálculo através de frações equivalentes, transformando as parcelas em frações de denominadores iguais assim como esperávamos que acontecesse após finalizarem as atividades, pois todas as atividades da sequência utilizam esse método.

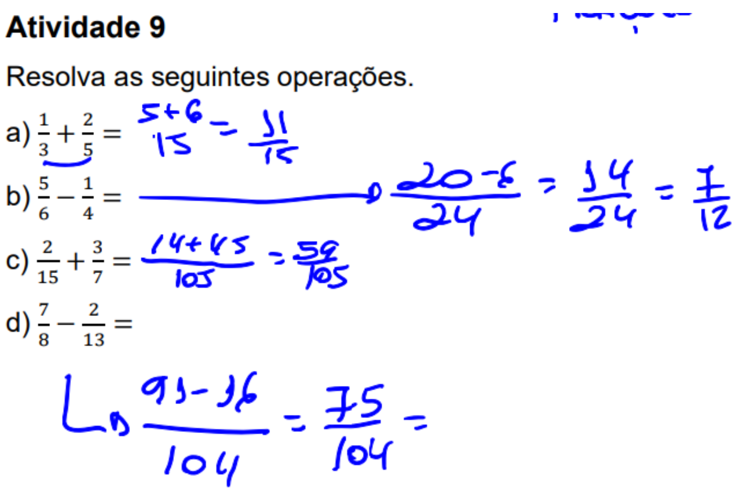
Figura 29 - Regra para adição e subtração escrita pelo grupo 2



Fonte: Atividade de pesquisa

A última atividade desta primeira sequência apresentava apenas algumas sentenças matemáticas para que fossem resolvidas através da regra obtida e assim fizeram os participantes do grupo 2.

Figura 30 - Resolução apresentada pelo grupo 2 - Atividade 9 (adição)



Fonte: Atividade de pesquisa

O grupo 1 realizou a atividade 9, porém apresentou apenas os resultados.

Observando e refletindo sobre as atividades da sequência didática sobre adição e subtração de fraçoes e analisando o nosso referencial teórico é possível perceber que os participantes trabalharam bem com as conversões de registros da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS). Converteram diversas situações representadas no registro figural para a sua representação no registro numéricoe também o inverso de conversões de registros no registro numérico para p registro figural.

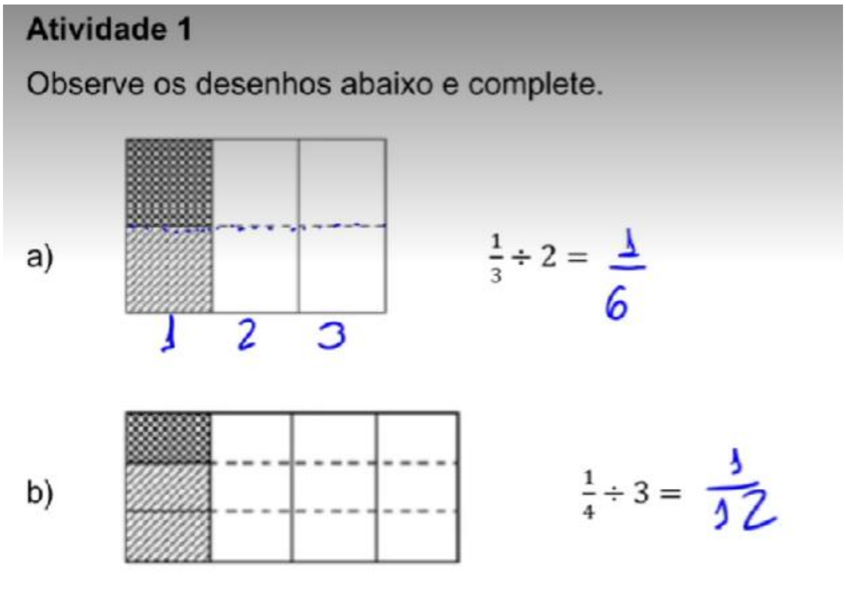
Percebemos também a presença da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), mais precisamente referente aos campos conceituais aditivos de **primeira categoria**, onde temos composição de duas medidas em uma terceira, parte/parte/todo, em que dadas duas medidas elementares conhecidas encontramos uma terceira e também de **segunda categoria**, onde temos a transformação de estados ou transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final, estado/transformação/estado, em que uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra.

Em nosso segundo encontro no dia dois de outubro, apresentamos aos participantes a sequência didática com atividades de multiplicação de frações. As operações com multiplicação são as de mais fácil compreensão entre os alunos quando estamos ensinando, pois basta calcular o produto entre os numeradores e entre os denominadores.

No dia nove de outubro tivemos nosso terceiro encontro, onde apresentamos aos participantes a sequência didática com atividades de divisão de frações, operações essas que são as de maior dificuldade de entendimento dos alunos, pois geralmente é ensinada apenas através do uso de uma técnica, o que acaba por não fazer sentido para os alunos.

A primeira atividade apresentava uma divisão de fração por número inteiro onde o registro figural foi de grande importância para a resolução, fazendo com que os participantes respondessem a sentença matemática apenas através da observação da figura, fazendo a transformação do registro figural da solução apresentada para o registro numérico.

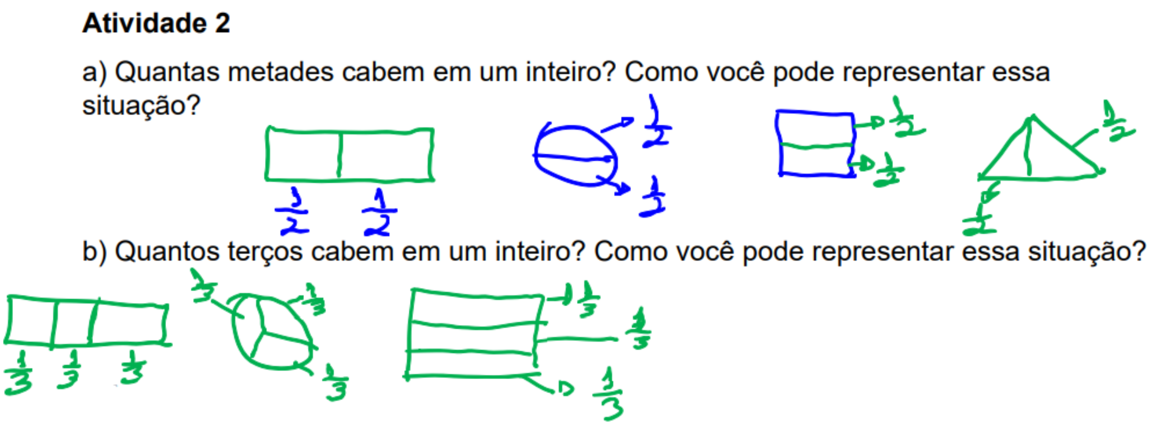
Figura 31 - Resolução apresentada na atividade 1 (divisão)



Fonte: Atividade de pesquisa

Analisando a partir da Teoria dos Campos Conceituais, esse tipo de exercício aparece dentre os que tratam dos campos conceituais multiplicativos, na categoria de **isomorfismo de medidas** que se caracteriza por uma relação quaternária em que os pares de elementos se referem a uma mesma grandeza e a uma mesma unidade de medida, mas a proporção direta relaciona grandezas diferentes. Dentro dessa a atividade se enquadra na classe de situações denominada divisão-partição.

Figura 32 - Resolução apresentada na atividade 2 (divisão)



Fonte: Atividade de pesquisa

Apesar de na segunda atividade os participantes não terem a preocupação de fazer as divisões das figuras em partes proporcionais a resolução esteve de acordo com o solicitado, onde nesse caso pudemos verificar as conversões dos registros de representação semiótica da representação em língua materna para a transformação figural e posteriormente a conversão da representação figural para a representação numérica.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste estudo teve como objetivo investigar, por meio de sequências didáticas envolvendo as quatro operações com frações e também problemas que mobilizam operações com frações, os conhecimentos dos professores participantes quanto a abordagem com seus alunos quanto as operações com números fracionários. Foram propostas diversas situações problemas, em que professores, mobilizando a concepção parte-todo, buscassem a solução de cada atividade apresentando ao final uma regra operatória.

Para alcançar nosso objetivo, trabalhamos na delimitação do problema, etapa muito importante na construção do trabalho. Na revisão bibliográfica, analisamos a dissertação de Dias (2018) qua fez um mapeamento sobre os trabaçlhos que tratavam de opereções com números fracionários e buscamos suporte nas monografias de Pereira (2009) e Camilo (2011) das quais retiramos as sequências didáticas após analisar as análises a priori e posteriori das atividades. Essas leituras foram fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, pois nos apoiaram nas reflexões sobre as principais dificuldades no ensino e aprendizagem dos números fracionários.

Nossa delimitação do problema foi organizada visando responder a seguinte questão de pesquisa: ***quais conhecimentos professores de matemática mobilizam a respeito do ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária durante a discussão de uma sequência de ensino para o sexto ano do Ensino Fundamental?*** A metodologia escolhida seguiu alguns pressupostos da Engenharia Didática de segunda Geração.

Na sequência, buscamos subsídios teóricos que pudessem auxiliar no desenvolvimento do estudo. Para tanto, apoiamo-nos, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1977) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009).

Na última etapa apresentamos um sequência didática tratando a adição e subtração, outra tratando de multiplicação, uma terceira tratando de divisão e por fim uma trazendo problemas que mobilizam operações com frações das quais apresentamos o desempenho e as estratégias que os participantes utilizaram em cada atividade.

As análises dos dados foram obtidas por meio do instrumento diagnóstico pelas quatro sequâncias que foram respondidas por seis professores participantes.

Analisando os resultados gerais, verificamos que durante as interações ocorridas entre os participantes e o pesquisador, ficou bastante evidente a importância de o professor ter clareza do assunto que está sendo ensinado, pois dependendo da atuação do professor e de suas devolutivas, o diálogo poderá ou não conduzir o aluno a refletir e compreender realmente o conteúdo que está sendo ensinado.

Silva (2005, p. 243) acredita que "a possibilidade na prática de ensino de fracionários de professores em exercício pode ser conquistada com ações formativas planejadas, para que os professores possam refletir profundamente não só sobre as práticas, mas também sobre conhecimentos desse conteúdo".

Constatamos que as atividades realizadas em grupos foi um ponto positivo. Muitas das concepções foram expostas pelas conversas entre os participantes durante a resolução das atividades.

Um aspecto negativo a ser levantado está relacionado à formaçlão ter sido feita de forma remota, devido ao atendimento aos protocolos do COVID19, entendemos que na forma presencial poderiamos ter captado com mais requesa de detalhes as discussões.

Retomando a nossa questão de pesquisa: ***quais conhecimentos professores de matemática mobilizam a respeito do ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária durante a discussão de uma sequência de ensino para o sexto ano do Ensino Fundamental?***

Outra evidência para essas dificuldades refere-se ao fato dos professores não conhecerem as teorias, tanto a TRRS quanto a TCC, mesmo trabalhando de forma implícita com as teorias, pois fazem as conversões de registros e enquadram as categorias dos campoe conceituais. Acreditamos que após a apresentação e execussão das sequancias didáticasficam mais evidentes para os professores como tais teorias devem ser utilizadas para o ensino das operações com frações.

Para Silva (2005, p.239) as dificuldades apresentadas no tratamento e na produção para o ensino baseado em regras prontas, localizadas em desenvolvimento históricos mais recentes, devem-se à crença na aprendizagem por memorização. Entendemos que nossa sequência didática vai de encontro a essa aprendizagem por memorização, uma vez que possibilitou mostrar aos professores participantes que os alunos podem construir significado as regras operatórias de multiplicação e divisão dos números fracionários.

Podemos afirmar que, para essa amostra de sujeitos, a aplicação desta sequência nos permitiu observar mudanças, por parte dos professores, na forma de ensinar regras operatórias dos números fracionários.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: UFPR. 2007

ALMOULOUD, S. A.; **Debate: Engenharia Didática de segunda geração.** <http://www.jornal.uem.br/2011/index.php/edicoes-2011/88-jornal-102-outubro-2011/781-pcm-debate-engenharia-didatica-de-segunda-geracao>. Acesso em: 04 de ago. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 05 de janeiro de 2020.

CAMILO, C. R. **Operações com números fracionários:** adição e subtração por meio da concepção parte-todo. (Especialização em Educação Matemática). PUC-SP, 2009.

DIAS, M. L. D.; **Mapeamento das pesquisas produzidas em São Paulo acerca de números fracionários, entre os anos de 2000 e 2016**. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2018.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa R. Abreu da Silvaira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

Etcheverria, T. C., Campos, T. M. M e Silva, A. F. G**.; Campo Conceitual Aditivo: um estudo com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Bolema: Boletim de Educação Matemática** [online]. 2015, v. 29, n. 53 [Acessado 23 Junho 2021], pp. 1181-1200. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a19>. Epub Dez 2015. ISSN 1980-4415. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a19.

FISCHER, D. S. O.; **Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações: um estudo com alunos do 6º.** 350f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). UFRGS, Rio Grande do Sul, Brasil, 2020.

JENSKE, G.; **A Teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdos básicos da matemática: um estudo**

de caso. 131f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). PUCRGS, Porto Alegre, Brasil, 2011

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. **A estrutura multiplicativa sob ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem.** VII CIBEM, 2013, Montevidéu, Uruguai. p. 2756-2763

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V.; **Repensando adição e subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 3ª ed - São Paulo: PROEM, 2008.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Investigações em Ensino de Ciências. v. 7, n.1, 2002. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf?sequence=1>. Acesso em: 19 jul. 2021.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica**. In: Bolema, Rio Claro (SP), ano 17, n. 21, 2004, p. 1-19.

PEREIRA, J. V. A. **As operações de multiplicação e divisão de números fracionários: um estudo com alunos do sexto ano.** Monografia (Especialização em Educação Matemática). PUC-SP, 2011.

RASI, G. C.; **Estruturas multiplicativas: concepções de alunos de Ensino Fundamental.** 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2009.

SILVA, E. R.; **Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.** 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2017.

SILVA, M. J. F.; **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 245 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil.1997.

______. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A.; **As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo**. In: Bolema, Rio Claro (SP), ano 21, n. 31, 2008, p. 55-78.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A.; **Engenharia didática: evolução e diversidade.** In: REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática. Florianópolis/SC, Brasil, v. 7, n. 2, 2012, p. 22-52.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A.; **Números Racionais: concepções, representações e situações.** *In:* OLIVEIRA, G. P. (Org.). Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018, p. 81-142.

VALERA, A. R.; **Uso social e escolar dos números racionais: representação fracionária e decimal**. 2003. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) UNESP – Marília, São Paulo, 2003.

VERGNAUD, G.; **A Teoria dos Campos Conceituais**. In: BRUN, Jean (Org.). Didáctica das Matemáticas. (Trad.) Lisboa: Instituto Piaget, 1996a, p.155 – 191.

______. **A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos**. Revista do GEEMPA, Porto Alegre, N.4, Julho de 1996b, pp. 9-20.

______. **A formação de competências profissionais**. Revista do GEEMPA, Porto Alegre, N.4, Julho de 1996c, pp. 63-76.

______. **O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. Educar em Revista**, v. 27, n. Especial 1/2011, p. 15-27, Curitiba: UFPR, 2011. Editora UFPR.

Disponível em: https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/22592/14831. Acesso em: 10 set. 2018.

______. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução Maria Lucia Faria Moro. ed. rev. Curitiba: UFPR, 2014.

______. **A Teoria dos Campos Conceituais: O Ensino de Matemática e a pesquisa nesta área** - Aula 1. Curso da Escola de Altos Estudos - EAE. Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática - UNIBAN BRASIL. In: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 30 nov. 2017a.(2h04min50s). Disponível em:

<https://youtu.be/vU31uTXe9TU>. Acesso em: 18 set. 2018.

______. **A Teoria dos Campos Conceituais: O Estudo das Estruturas Multiplicativas - Aula 3**. Curso da Escola de Altos Estudos - EAE. Programa de Pós-Graduação em

Educação Matemática - UNIBAN BRASIL. In: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 30 nov.

2017b. (1h55min16s). Disponível em: <https://youtu.be/LSmHssoc_1U>. Acesso em: 18 set. 2018.

Anexo A - Sequência Didática 1 – adição e subtração

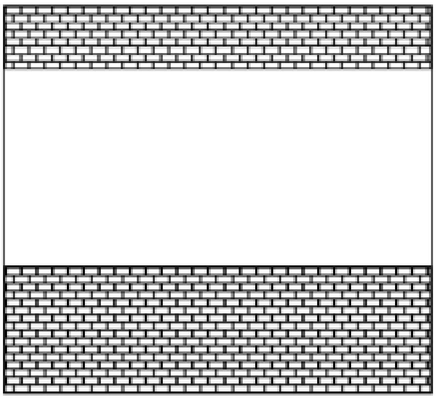
Atividade 01

a) Represente em forma de fração a parte do inteiro pintada em cada figura?

Figura 1

Figura 2

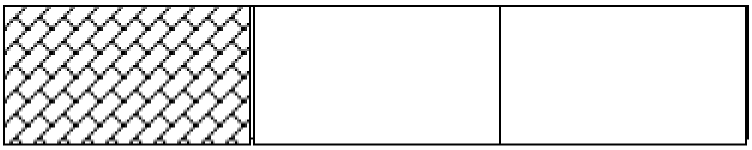
Figura 3



b) Represente a parte pintada de cada figura como soma de frações.

Atividade 02

a) Que fração representa a parte pintada da figura?



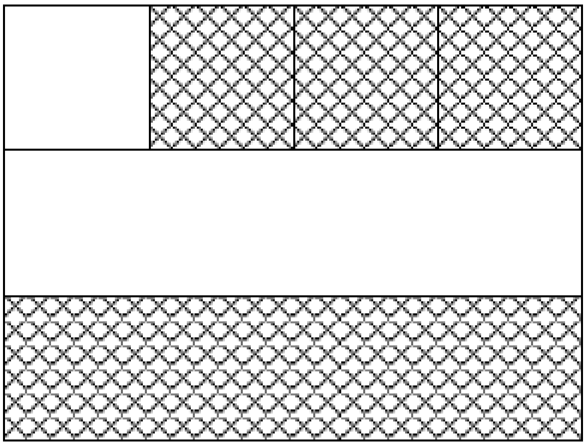
b) Apague $\frac{1}{4}$ da parte pintada do retângulo. Faça um novo desenho mostrando sua conclusão.

c) Observando a figura anterior que parte do retângulo inicial permaneceu pintada?

d) Escreva uma sentença matemática que represente o que você fez através de uma subtração de frações.

Atividade 03

a) Determine as frações que representam as duas partes pintadas do retângulo?

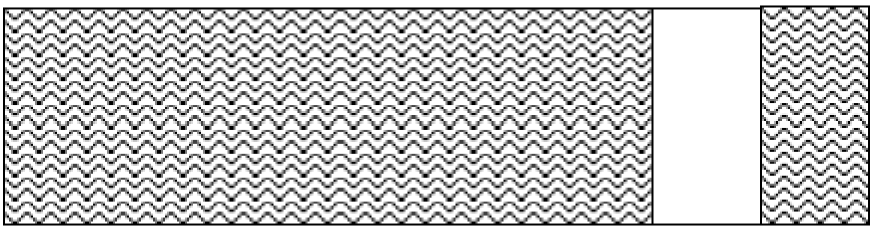


b) Determine a fração que representa toda a parte pintada do retângulo?

c) Escreva uma sentença matemática que represente o que você fez através de uma adição de frações.

Atividade 04

a) Represente a fração que corresponda a parte não pintada do retângulo.



b) Que fração representa a parte pintada do retângulo?

c) Monte uma sentença matemática que expressa a figura como um todo.

d) Calcule $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$.

Atividade 05

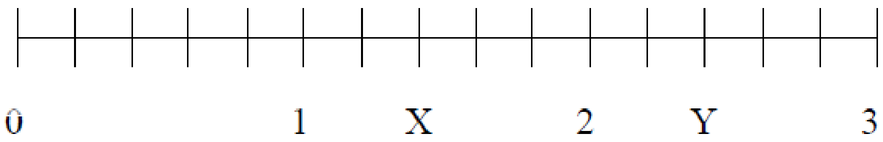
a) Pinte a parte da figura que representa $\frac{1}{4}$ do retângulo.

b) No mesmo retângulo pinte de cor diferente a parte que representa $\frac{3}{5}$ do retângulo.

c) Que fração representa a parte pintada do retângulo?

d) Calcule $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$

Atividade 06



a) Qual é a distância do ponto 0 à X? Justifique sua resposta.

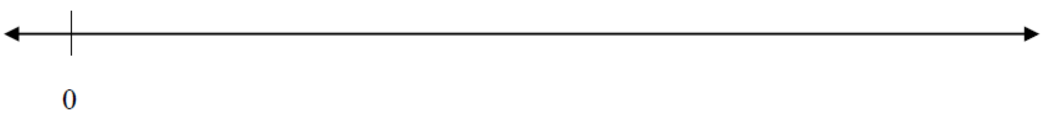
b) Qual é a distância do ponto 0 à Y? Justifique sua resposta.

c) Determine a distância de X à Y por meio de uma subtração de frações.

Atividade 07

a) Represente na reta numérica a fração $\frac{4}{5}$. Na mesma reta represente a fração $\frac{1}{2}$.

b) Represente na reta a resposta da sentença $\frac{4}{5} + \frac{1}{2}$.



c) Dê a sentença matemática apresentando a resposta da expressão acima.

Atividade 08

a) Construa uma reta numerada e represente a soma $\frac{3}{4} + \frac{3}{2}$.

b) Dê a resposta por meio de uma sentença matemática.

Atividade 09

Escreva uma regra para a adição e a subtração de duas frações quaisquer.

Atividade 10

Resolva os exercícios a seguir utilizando a regra descrita acima:

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

b) $\frac{5}{9} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{7}{15} + \frac{5}{7}$

d) $\frac{7}{8} - \frac{11}{13}$

Anexo B - Sequência didática 2 – Multiplicação

Atividade 1

Represente na reta numerada cada situação abaixo e represente o resultado por uma expressão matemática.

a) o dobro de $\frac{1}{3}$

c) o triplo de $\frac{2}{5}$

c) o quádruplo de $\frac{1}{5}$

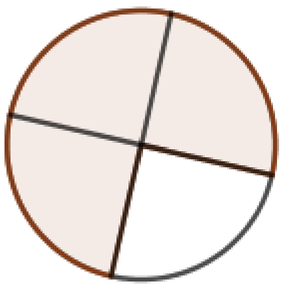
d) o quíntuplo de $\frac{3}{7}$

Atividade 2

Represente por uma figura a expressão $2 \times \frac{1}{5}$ e por uma sentença matemática seu resultado.

Atividade 3

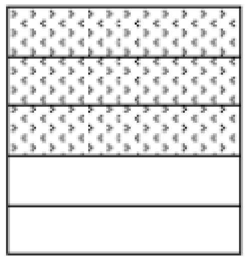
Pinte a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ da parte colorida do disco. Que fração do disco você pintou?



Atividade 4

Pinte a metade de um quinto do segmento abaixo e determine a fração que representa a parte pintada do segmento. Escreva uma sentença matemática para o que fez.

Atividade 5



a) Pinte três quartos da parte que está hachurada na figura.

b) Que parte da figura você pintou?

c) Qual a sentença matemática que representa essa situação?

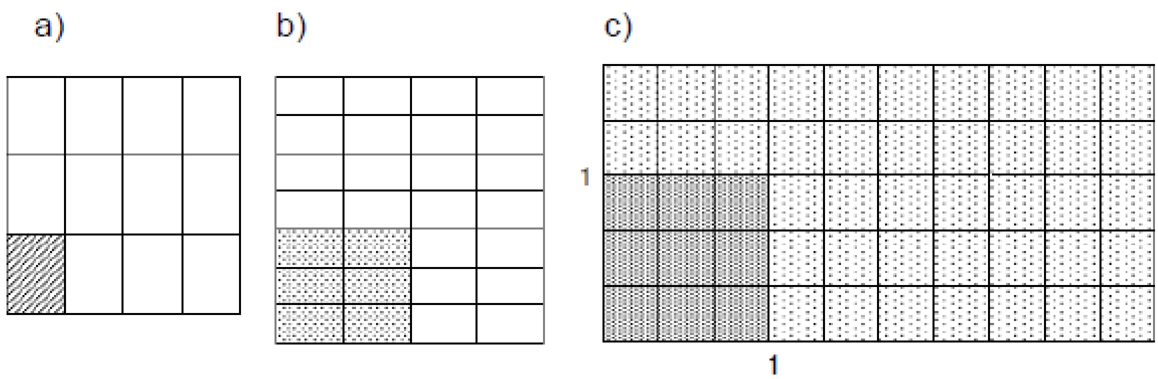
Atividade 6

a) Pinte três quartos de quatro quintos do retângulo desenhado abaixo. Que parte do retângulo você pintou?

b) Dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou.

Atividade 7

Sabendo que a medida da área de um retângulo é dada pela multiplicação das medidas de seus lados, calcule a medida da área da parte pintada das figuras abaixo.



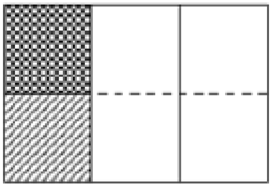
Atividade 8

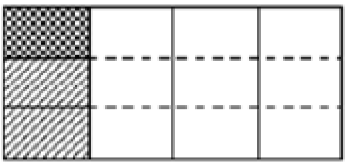
Escreva uma regra para a multiplicação de frações.

Anexo C - Sequência Didática 3 - Divisão

Atividade 1

Observe os desenhos abaixo e complete.

a)  $\frac{1}{3} \div 2 =$

b)  $\frac{1}{4} \div 3 =$

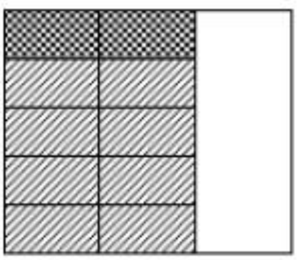
Atividade 2

a) Quantas metades cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?

b) Quantos terços cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?

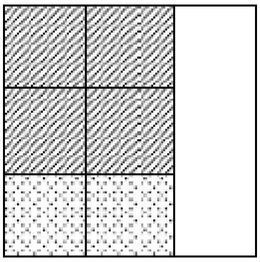
Atividade 3

Observe as figuras abaixo e responda.

a) 

Se um quinto de dois terços é $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que $\frac{2}{15} \div \frac{1}{5} =$ e $\frac{2}{15} \div \frac{2}{3} =$

b) 

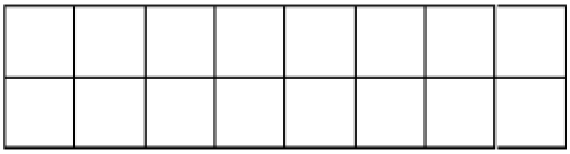
Se um terço de dois terços é $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} =$

Então podemos escrever que $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} =$ e $\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} =$

Atividade 4

Quantos oitavos cabem em $\frac{1}{16}$? Dê a expressão matemática que representa a situação.

Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.



Atividade 5

Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} =$

Atividade 6

a) Quantos quartos cabem em um quinto? Escreva a expressão matemática;

b) Quantos terços cabem em três quintos? Escreva a expressão matemática.

Atividade 7

Escreva uma regra que mostre como dividir duas frações quaisquer.

Atividade 8

Efetue os cálculos.

a) $7 \times \frac{1}{5} =$

b) $\frac{1}{10} \times \frac{1}{6} =$

c) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} =$

d) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} =$

e) $\frac{1}{8} \div 2 =$

f) $\frac{2}{16} \div \frac{1}{8} =$

g) $\frac{6}{16} \div \frac{1}{8} =$

h) $\frac{10}{3} \div \frac{5}{8} =$

Anexo D - Sequência Didática 4 – Problemas que mobilizam operações com frações

Problemas que mobilizam operações com frações

Temos três tortas iguais e queremos distribuir de forma que cada criança receba $\frac{3}{5}$.

Para quantas crianças podemos distribuir as tortas? Dê a sentença matemática que representa a solução do problema.

Carlos iniciou uma viajem de automóvel e no primeiro dia conseguiu percorrer $\frac{2}{9}$ do percurso. No segundo dia percorreu $\frac{1}{3}$ e viu que já havia percorrido 300 km. Qual a medida do percurso que pretende fazer?

Um sitiante pretende construir um muro para cercar seu sítio e gastou 4.800,00 reais para murar $\frac{2}{3}$ do muro. Qual o preço do muro inteiro?

Um ciclista já percorreu $\frac{1}{4}$ do percurso entre duas cidades e parou. Depois percorreu mais $\frac{3}{8}$ da estrada e ainda faltam 7.200 m para percorrer. Qual a distância entre as duas cidades.

Um negociante vende $\frac{1}{3}$ de uma peça de tecido e, depois, $\frac{2}{5}$ da mesma peça. Sobrou ainda 36m da peça. Quantos metros tinha a peça?

Uma pessoa gastou $\frac{1}{3}$ da quantia que possuía e, em seguida, $\frac{3}{5}$ do resto ficando com 80,00. Quanto possuía?

Em certo país, os trabalhadores recebem dois salários-mínimos em dezembro: o salário normal e o 13º salário. Se a pessoa trabalhou os 12 meses do ano, os dois salários serão iguais. Se a pessoa trabalhou uma fração do ano, o 13º salário corresponderá a essa fração do salário normal. Se o salário normal de uma pessoa é 516 reais e ela trabalhou 7 meses nesse ano, quanto ela vai receber de 13º salário?

Uma piscina retangular ocupa $\frac{2}{15}$ de uma área de lazer de 300 m^2. A parte restante da área de lazer equivale a quantos metros quadrados?

Tradicionalmente, os paulistas costumam comer pizza nos finais de semana. A família de João, composta por ele, sua esposa e seus filhos, comprou uma pizza gigante cortada em 20 pedaços iguais. Sabe-se que João comeu $\frac{3}{12}$ da pizza, sua esposa comeu $\frac{2}{5}$ e sobraram ***n*** pedaços para seus filhos. Qual a fração da pizza que ***n*** representa?