Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC-SP

André Benito Fentanes Alvarez Marques

Introdução ao conceito de probabilidade e o jogo franc carreau: uma abordagem pelo enfoque frequentista

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2021

André Benito Fentanes Alvarez Marques

Introdução ao conceito de probabilidade e o jogo franc carreau: uma abordagem pelo enfoque frequentista

Dissertação apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Prof.(a) Dra. Cileda de Queiroz Silva Coutinho.

SÃO PAULO
2021

M357

Marques, André Benito Fentanes Alvarez

Introdução ao conceito de probabilidade e o jogo franc carreau: uma abordagem pelo enfoque frequentista. – São Paulo: [s.n.], 2022.

64 f.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, 2022.

Orientadora: Profa. Dra. Cileda de Queiroz Silva Coutinho.

1. Serviço Social. 2. Vale do Ribeira-SP. 3. Condições de Trabalho. I. Coutinho, Cileda de Queiroz Silva. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. III. Título.

CDD 510

André Benito Fentanes Alvarez Marques

Introdução ao conceito de probabilidade e o jogo franc carreau: uma abordagem pelo enfoque frequentista

Dissertação apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Prof.(a) Dra. Cileda de Queiroz Silva Coutinho.

Aprovado em: ____/____/____

Banca Examinadora

____
Cileda de Queiroz Silva Coutinho
(PUC-SP)

____
Maria José Ferreira da Silva
(PUC-SP)

____
Vagner Donizeti Tavares Ferreira
(FATEC SEBRAE e Bragança Paulista)

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- CAPES pela bolsa concedida, fundamental para a realização desta pesquisa. Número do processo: 88887.369448/2019-00

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Dorinda Marques por todo exemplo e amor a mim doado.

A minha Avó Lola por todo amor e carinho desde a época de vestibular até hoje.

Ao meu avó Fernando que está comemorando comigo de onde que quer que ele esteja.

Ao meu irmão Fernando por estar sempre ao meu lado nos momentos mais difíceis e felizes da minha vida.

Aos meu sobrinhos Bianca, Carolina e Gabriel que são verdadeiros raios de luz em minha vida.

Em especial a minha orientadora, Professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, que foi um exemplo de dedicação, carinho e paciência que carregarei para vida.

À Banca Examinadora, pelo interesse e sugestões.

Ao programa de Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, e aos professores e funcionários. Em especial a Rosana Silva Portela por toda ajuda.

Aos meus amigos de curso, Rogério Joaquim, Jorge Zeferino, Mario Vernizzi, Clederson Alves, pelo total apoio durante todo o curso.

Aos amigos Agnaldo e Silas por toda ajuda no trabalho e na aplicação da atividade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pela bolsa concedida que permitiu dedicar-me aos meus estudos.

A Fernanda Ferrador por toda paciência e ajuda nas leituras e observações em todo o trabalho.

O autor

MARQUES, A. B. F. A. **Introdução ao conceito de probabilidade e o jogo Franc Carreau: uma abordagem pelo enfoque frequentista.** 2021. 64 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2022.

RESUMO

Alunos do ensino fundamental tem contato com situações de caráter aleatório, independente da formação escolar. Por isso quando queremos introduzir o conceito de probabilidade não podemos descartar tais situações. Pensando deste modo nosso trabalho tem como objetivo geral: Analisar os elementos de letramento probabilístico mobilizados pela abordagem da visão frequentista com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, observar possíveis articulações entre estes elementos. Para isso utilizamos uma atividade baseada nos pressupostos da Engenharia Didática, que constituiu em uma simulação do jogo Franc Carreau. Esse jogo consiste em lançar uma moeda em um piso de azulejos de forma quadrada. Os jogadores então apostam na posição final de tal moeda: onde ela pode ficar completamente sobre um único azulejo (posição chamada “Franc-Carreau”), sobre uma junta entre dois azulejos ou sobre mais juntas. Para a execução do jogo foi criado um arquivo manipulativo no Geogebra afim de simular o lançamento da moeda no piso quadriculado. Junto com atividade os alunos preencheram uma tabela no Excel gerando um gráfico de convergência com a frequência acumulado, assim auxiliando na aprendizagem da probabilidade frequentista.

A atividade demonstrou que alguns dos letramentos probabilísticos foram mobilizados durante sua aplicação. Demonstrando a importância de trabalhar a probabilidade frequentista com alunos do Ensino Fundamental. Ainda foi possível observar que a presença do fator crença ainda esta muito presente nos alunos do sexto ano.

MARQUES, A. B. F. A. **Introdução ao Conceito de Probabilidade e o Jogo Franc Carreau: Uma Abordagem Pelo Enfoque Frequentista.** 2021. 64 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2022.

ABSTRACT

Elementary school students have contact with random situations, regardless of their educational background. Therefore, when we want to introduce the concept of probability, we cannot rule out such situations. Thinking in this way, our work has as general objective: To analyze the elements of probabilistic literacy mobilized by the approach of the frequentist vision with students of the sixth year of Elementary School, to observe possible articulations between these elements. For this, we used an activity based on the assumptions of Didactic Engineering, which constituted a simulation of the Franc Carreau game. This game consists of throwing a coin on a square-shaped tile floor. Players then bet on the final position of such a coin: where it can lie completely on a single tile (a position called “Franc-Carreau”), on a joint between two tiles, or on more joints. For the execution of the game, a manipulative file was created in Geogebra in order to simulate the coin toss on the checkered floor. Along with the activity, the students filled in a table in Excel generating a convergence graph with the accumulated frequency, thus helping to learn frequentist probability.

The activity demonstrated that some of the probabilistic literacies were mobilized during its application. Demonstrating the importance of working with frequentist probability with elementary school students. It was still possible to observe that the presence of the belief factor is still very present in the sixth year students.

LISTA TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Formado em Bacharelado e Licenciatura em matemática, o campo da pesquisa sempre me chamou a atenção, principalmente quando comecei a lecionar matemática a alunos entre 15 e 17 anos no ensino médio. Em 2016 comecei a trabalhar com alunos do ensino fundamental e a dificuldade dos alunos na compreensão do conceito de probabilidade, já percebida por mim anteriormente, ficou ainda mais clara. A probabilidade tem conceito abstrato e é dificultada por não se tratar de um experimento determinístico, mas sim de natureza aleatória, o que provavelmente explica a complexidade de entendimento dos discentes.

Em minhas reflexões e mediante a importância do aprendizado deste tema para formação de cidadãos mais conscientes em suas escolhas, buscava uma forma mais efetiva e palpável para transmitir conceitos de probabilidade, algo que despertasse o interesse dos alunos e os auxiliasse na compreensão. Ao integrar o programa de mestrado em educação matemática da PUC -SP, pude compartilhar minhas inquietações e observar que mais colegas tinham as mesmas percepções.

Os indícios de aprendizagem da Probabilidade serão estudados com alunos do sexto ano com idades entre 10 e 11 anos do Ensino Fundamental. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC vincula as habilidades, "cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável" e "cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)" (BRASIL, 2018, p. 302) ao sexto ano do Ensino Fundamental.

Podemos observar que a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) não contempla eventos não equiprováveis. Segundo Coutinho (1994, 2001), estudos que consideram somente espaços equiprováveis, tendem a limitar a construção do conceito de probabilidade pelo aluno, esta abordagem segundo a autora, pode favorecer o aparecimento de obstáculo epistemológico da equiprobabilidade.

Após a constatação desta problemática (precisa ampliar), esta pesquisa tem intenção de estudar uma proposta para abordar o ensino de probabilidade utilizando uma simulação computacional do jogo Franc Carreau desenvolvida através do software

Geogebra, como recurso de ensino e de aprendizagem mais flexível e dinâmico. O uso de tecnologia por si só já cativa os alunos, além disso, a visualização das simulações do experimento aleatório e a interação dos alunos contribuem para a construção dos conceitos.

Neste trabalho defendemos a abordagem frequentista da probabilidade para introdução do conceito por meio de uma simulação computacional de fácil manuseio a fim de contribuir com a aprendizagem.

A atividade foi desenvolvida baseada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau e utilizamos como metodologia os pressupostos da Engenharia Didática. Nossa hipótese é que esta atividade possa contribuir para o letramento probabilístico segundo GAL (2005).

Nossa pesquisa vincula-se a um projeto maior, desenvolvido pelo grupo de pesquisa Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática (PEA-MAT) atrelado ao programa de pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

2. PROBLEMATIZAÇÃO

Temos como objetivo neste capítulo apresentar a revisão bibliográfica, o problema de pesquisa e justificativa, os procedimentos metodológicos e por último o referencial teórico.

2.1 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo algumas teses e dissertações que ajudaram na composição do nosso trabalho, além de trabalhos que fizeram uma abordagem da probabilidade no ensino básico. Juntamente aos trabalhos, que muito contribuíram para nossa pesquisa, é importante salientar as disciplinas do curso de mestrado da PUC SP.

Os estudos foram selecionados por buscas realizadas na plataforma da CAPES – Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, como descritor foi utilizado “Probabilidade Frequentista” para obtermos uma amostra dos trabalhos que estão de acordo com a BNCC e obtivemos 28.379 pesquisas dívidas em 16.866 mestrados e 6.583 teses. Para filtrar melhor a pesquisa usamos “Probabilidade Frequentista Fundamental”, selecionamos os operadores lógicos e refinamos por área de conhecimento (Matemática), área de avaliação (Probabilidade e Educação) que retornou com 475 trabalhos.

Selecionamos os trabalhos que tratavam do Ensino Fundamental anos finais e descartamos os trabalhos que não utilizaram alunos como sujeito de pesquisa o que resultou em 8 trabalhos. Um trabalho muito importante para nossa pesquisa foi o de Coutinho que obtive no grupo de pesquisa da PUC-SP, com isso temos os trabalhos identificados no Quadro 1.

Tabela 1 - Trabalho Selecionados

Título	Autor	Ano	Universidade	Tema
Dissertação. Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista	Cileda de Queiroz e Silva Coutinho	1994	PUC – SP	Probabilidade
Tese. *Introduction aux Situation Aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d' experiences de Bernoulli dans l'environnement in formatique Cabri*	Cileda de Queiroz e Silva Coutinho	2001	Université Joseph Fourier	Probabilidade
Dissertação. A probabilidade e a	Celi Aparecida Espasandin Lopes	1998	UNICAMP	Estatística e Probabilidade

estatística no ensino fundamental: uma análise curricular”.				
Artigo. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?	Cileda de Queiroz e Silva Coutinho	2007	PUC-SP	História da probabilidade
Dissertação. Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos	Cristiane Candido Luz Caberlim	2015	PUC-SP	Probabilidade
Dissertação. Letramento estocástico: uma possível articulação entre os letramentos estatísticos e probabilísticos	Danilo Saes Corrêa da Silva	2018	PUC-SP	Probabilidade
Tese. A Educação Estatística: Uma investigação acerca dos aspectos relevantes a didática da Estatística em cursos de graduação	Celso Ribeiro Campos	2007	UNESP	Educação Estatística

Fonte: Produção do pesquisador

A primeira leitura foi a dissertação de mestrado defendida por Coutinho (1994) da PUC-SP, que teve como objetivo analisar a aquisição dos primeiros conceitos de probabilidade baseada na visão frequentista com a metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática.

A autora utilizou dois grupos para sua pesquisa, um primeiro grupo formado por alunos da segunda série do segundo grau francês com idades entre 15 e 18 anos, em uma escola pública de Besançon, outro grupo de alunos da cidade de Santos que cursavam o curso de Bacharelado em Fonoaudiologia, com idades entre 17 e 19 anos. Segundo Coutinho (1994) nenhuma diferença entre os grupos foi constatada.

Foi aplicado um questionário para os alunos antes da atividade, para identificar quais os conceitos que os alunos tinham sobre probabilidade. A seguir desenvolveram uma sequência didática baseada na visão frequentista para abordar o conceito de probabilidade. Após a aplicação dessa sequência, foi aplicado um teste em forma de questões dissertativas para observar se as concepções errôneas haviam sido modificadas.

Em sua pesquisa a autora pôde confirmar sua análise a priori ao constatar constatando que concepções errôneas de equiprobabilidade poderiam ser um obstáculo para aprendizagem de probabilidade por meio de uma visão frequentista. Na maioria das situações práticas, os eventos não são equiprováveis e impossibilitam o cálculo usando a definição clássica. No caso da frequentista, para calcular a probidade é considerada a frequência relativa de um evento.

Sua pesquisa foi de extrema importância para nosso trabalho, pois desenvolveu uma atividade para estabilizar a frequência através do uso do Excel.

O próximo trabalho é a tese de doutorado de Coutinho (2001) em que a autora elaborou uma engenharia didática organizada com três situações: Experiência de Bernoulli; Urna de Pixels e Jogo do Franc-Carreau.

A autora desenvolveu uma sequência didática, com objetivo de confrontar o aluno com situações de aleatoriedade por meio de experimentos, sempre visando a construção de conhecimento por meio de situações problema que envolviam a modelização de experimentos aleatórios simples.

Sua questão de pesquisa foi: “Quais as condições didáticas necessárias para que os alunos possam se familiarizar com situações aleatórias em contexto escolar? Quais as condições para que eles se engajem em uma apreensão probabilista em termos de modelo de tais situações desde o Ensino Fundamental?” (COUTINHO, 2001, p.17, tradução nossa).

Seu trabalho tem muita relevância para o nosso, pois a autora desenvolveu uma articulação entra a probabilidade frequentista, a probabilidade clássica e a geométrica por meio do jogo Franc-Carreau, base para nossa pesquisa.

A modelização é definida por Coutinho (2001) como um processo desenvolvido pelo aluno frente à solicitação da apresentação de um modelo probabilístico que represente e intérprete da melhor forma a situação da realidade a ser estudada.

Em sua conclusão, a autora observa a importância das atividades que permitem a construção de conhecimentos por meio de simulações de experimentos aleatórios que relacionem as ideias de probabilidade e frequência relativa estabilizada como aproximação da probabilidade. Esta pesquisa é considerada o ponto inicial para o desenvolvimento do presente trabalho, porque a partir das conclusões descritas pela autora, desenvolvemos uma sequência didática a ser trabalhada com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

O próximo trabalho é a dissertação de Lopes (1998) que trata, investiga e analisa o ensino de Probabilidade e Estatística dentro do no currículo de matemática do ensino fundamental. A questão da investigação foi a seguinte: ”como são tratados e quais os objetivos do ensino da Probabilidade e da Estatística nas propostas curriculares de Matemática dos estados de Minas Gerais, São Paulo, Santa Catarina e nos Parâmetros Curriculares Nacionais, tendo como referencial alguns currículos internacionais?” LOPES (1998).

Seu trabalho foi uma pesquisa bibliográfica e documental para mostrar como a Estatística e Probabilidade são propostas no currículo escolar. Para nortear a pesquisa a autora utilizou quatro critérios.

> a concepção de Estatística e Probabilidade subjacentes a essas propostas;
> a seleção de noções estatísticas e probabilísticas feita por essas propostas para serem "transpostas" para o plano escolar;
> o modo como as propostas sugerem o tratamento dessas noções junto aos estudantes;
> as finalidades da abordagem de tais noções, junto aos estudantes, explicitadas ou não pelas propostas. (LOPES, 1998).

Em seu trabalho Lopes (1998) acredita que trabalhar com probabilidade, somente no ensino médio, pode criar um obstáculo na compreensão, visto que problemas do cotidiano e de suas vidas poderiam ser tratados bem antes, no ensino fundamental.

A autora acredita e defende que o ensino de probabilidade deve se dar no ensino fundamental. Além disso, a autora salienta a importância do ensino para a formação da cidadania criando pessoas com um desenvolvimento mais crítico na sociedade.

> A utilidade refere-se à necessidade de que todos os indivíduos têm de dominar alguns conhecimentos de Estatística e Probabilidade para atuarem na sociedade. São conhecimentos fundamentais para analisar índices de custo de vida, para realizar sondagens, escolher amostras e outras situações do cotidiano. (LOPES 1998, p.11).

Tal pesquisa foi essencial para apoiar os temas condutores de nosso trabalho, pois investiga o modo como a estatística e a probabilidade devem ser tratadas, de forma inerente no ensino fundamental.

O próximo trabalho é de Carbelim (2015), uma dissertação que teve como objetivo de pesquisa "diagnosticar invariantes operatórios mobilizados pelos alunos em situação de resolução de problemas, para que busquemos elementos que permitam uma proposta de modelo de construção de conceito". (CARBELIM, 2015, p. 51).

A pesquisa de Carbelim (2015) é baseada na seguinte questão: "Que elementos do letramento probabilístico identificamos na mobilização de invariantes operatórios por alunos do 3 ano do Ensino Médio, ao resolver problemas que articulam o enfoque clássico e frequentista do conceito de probabilidade?" (CABERLIM, 2015)

Para responder sua questão de pesquisa a autora utilizou Teoria dos Campos Conceituais e os pressupostos do letramento probabilístico proposto por Gal (2005), articulando-a com os princípios do letramento probabilístico. Como metodologia a autora escolheu o estudo de caso, o que tornou possível a análise, a interpretação e relação das respostas obtidas com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, mas propriamente detectando os invariantes operatórios relacionando-os aos dados de conhecimento do letramento probabilístico apresentado por Gal (2005).

Sua pesquisa ainda traz de que forma o conceito de probabilidade aparece ou não nos livros didáticos.

> Destacamos que, neste caso, a coleção aborda tanto a ação do acaso como a explicitação do espaço amostral, mas sem fazer referência à reprodutibilidade. Para Coutinho (2001), a percepção desse elemento é fundamental para a distinção entre experiências aleatórias (reprodutíveis) e fenômenos “acidentais” (nos termos de Poincaré, citado no item 1.1 deste capítulo).Caberlim e Coutinho (2013) identificaram que a abordagem da noção de experiência aleatória feita nesta coleção se dá por meio de exemplos, sem orientação ao professor para discutir as características que permitem seu reconhecimento, podendo gerar uma apreensão determinista por parte do aluno (possibilidade de criação de um obstáculo didático3, nos termos de Coutinho (1994) (CARBELIM 2015, p.24)

Carbelim (2015) constatou que os livros didáticos apresentam exercícios repetidos, muitas vezes visando um operacional. Além de conter exemplos ineficientes como o lançamento de uma moeda em que um único lançamento já define a probabilidade de sair coroa como 0,5.

> Observe-se que o exemplo apresentado na figura 6 associa o valor 0,5 à probabilidade P({K}), a partir de uma única repetição do lançamento da moeda, sem citar a associação à simetria perfeita da figura geométrica que representa uma moeda (um cilindro) em relação ao seu centro. Ou seja, ao discutir a atribuição do valor 0,5 para a probabilidade dos dois eventos possíveis, não discute tal valor atribuído a priori a partir da consideração da simetria perfeita do objeto, nem apresenta ao aluno a essência do enfoque frequentista, que é a necessidade de um grande número de repetições do experimento aleatório exatamente nas mesmas condições.” (CARBELIM 2015, p. 33)

Sua pesquisa contribuiu para nossas considerações, a respeito do ensino e da aprendizagem de probabilidade, bem como a importância de sua abordagem de ocorrer por meio da associação dos enfoques clássico e frequentista.

O próximo texto foi o artigo de Coutinho (2007), que fala sobre o papel da história para apresentar o conceito de probabilidade no ensino fundamental, tratando da equiprobabilidade e suas limitações. O artigo apresenta a contextualização do acaso e suas várias interpretações ao longo da história.

> Limitaremos - nos neste texto a descrever a apreensão do acaso em relação ao contexto no qual está inserido. Assim, se a realidade traduz a percepção do real

> pelo sujeito, estudaremos as situações da realidade nas quais o acaso pode intervir (contextualização do acaso). (COUTINHO 2007, p. 51)

A autora ainda descreve um primeiro indício de probabilidade baseado em lazer e crenças como os jogos de azar tinham uma visão mística ou psicológica do acaso.

> Estes jogos eram praticados desde a Antiguidade. As ferramentas matemáticas necessárias ao desenvolvimento deste ramo do conhecimento, tais como o raciocínio combinatório e o cálculo de proporções, já eram conhecidos há muitos séculos. No entanto, é surpreendente observar que encontraremos os primeiros estudos de combinatória aplicada à análise destes jogos somente no séc. XVI, principalmente com G. Cardano e, no início do séc. XVII, com Galileu. Segundo J. F. Pichard esta lacuna pode ser explicada da seguinte forma (COUTINHO 2007, p. 52)

O texto de Coutinho (2007) discorre sobre probabilidade em suas visões frequentista, combinatória e geométrica.

> Citaremos aqui, neste breve percurso histórico sobre a evolução da noção de probabilidade, a utilização de elementos geométricos para o cálculo efetivo das chances em um contexto de jogos de azar. A noção de probabilidade geométrica foi introduzida por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, matemático e naturalista francês do séc. XVIII. Em um contexto social no qual os jogos de azar proliferavam muito, após a morte de Luiz XIV, Buffon apresenta na França o jogo de Franc Carreau em um trabalho endereçado à Academia Real de Ciências, em 1733. Este jogo consiste em lançar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais em uma forma qualquer. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda: ficará ela inteiramente sobre uma única lajota (franc-carreau), ou sobre uma ou mais juntas entre lajotas? (COUTINHO 2007, p. 63)

O artigo apresenta algumas considerações, como a existência de certa dualidade na compreensão da ideia de probabilidade, por conta da coexistência dos enfoques frequentista e laplaciano o que pode gerar obstáculos epistemológicos no aprendizado escolar. Portanto, é essencial o reconhecimento do contexto em que o acaso é notado para então, conceber o significado do valor de probabilidade atribuído ao evento em estudo. Esse artigo foi fundamental para esta dissertação, pois juntamente com outros textos pudemos entender e compreender melhor o contexto histórico que envolve a probabilidade.

O próximo trabalho é de Silva (2018) uma dissertação que tem como questão de pesquisa: “Que conhecimentos são mobilizados quando se resolve problemas que visem a articulação entre letramento estatístico e letramento probabilístico por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental?” Seu grupo de estudo foi constituído por crianças de um 6º ano. com idades entre 10 e 11 anos, de uma escola particular da cidade de Guarulhos.

A autora elaborou uma atividade baseada em pressupostos da engenharia didática, que consistia no lançamento de dois dados cúbicos com faces numeradas de 1 a 6, e a elaboração de gráficos para a constatação da frequência relativa associada a cada uma das faces para, com isso, contribuir na aprendizagem de probabilidade frequentista. Dados viciados foram inseridos na atividade, a fim de incentivar a postura crítica dos alunos, tornando os resultados não equiprováveis.

Sua atividade contou com a utilização do software excel, para a elaboração de uma planilha para o cálculo da frequência relativa e observação da estabilização das frequências. Mostrando que um número pequeno de lançamentos não é suficiente para de obter a probabilidade através do enfoque frequentista.

> Quando realizamos a simulação de 3000 escolhas de números de 1 a 10, os valores se aproximam mais do 10%, o que indica que 3000 lançamentos ou eventos é o suficiente para se realizar a articulação da probabilidade clássica e frequentista. (SILVA 2018, p. 68)

Silva (2018) evidenciou que, a respeito do Letramento probabilístico apareceu como uma ideia de aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza durante a atividade nos diversos lançamentos de dados.

> Comparando os outros pontos levantados por Gal (2002, 2005), constatamos a presença de levantamentos concomitantes nos dois Letramentos, no Estatístico e no Probabilístico, como questionamentos críticos e a presença de crenças e atitudes. (SILVA 2018, p. 95)

O trabalho de SILVA (2018) tem alta contribuição para o nosso, pois sua atividade utiliza engenharia didática elaborada para o aluno, além de usar o software Excel para analisar a estabilização da frequência relativa, estratégia similar a que utilizamos.

O próximo trabalho é de Campos (2007) cujos dois objetivos principais consistiam no estudo teórico a respeito dos fundamentos da didática da Educação Estatística e sua assimilação com a Educação Crítica e Modelagem Matemática, e a aplicação dessa assimilação em sala de aula, com o desenvolvimento e realização de projetos didáticos. Sua questão central na possibilidade de que os preceitos da Educação Crítica e da Educação Matemática Crítica podem estar relacionados aos Fundamentos Teóricos da Didática da Estatística, estudando assim, a integração da Educação Matemática Crítica com a Educação Estatística.

O autor inseriu em seu trabalho princípios da Educação Crítica, e afirma que a Estatística está presente em nossa sociedade, na política, nos meios de comunicação, no esporte. Importantes para a reflexão sobre os aspectos relacionados à disciplina Estatística.

Ressalta e explica as distinções entre pensamento estatístico, literacia estatística e raciocínio estatístico, além de citar as dificuldades em desenvolvê-los com os discentes, visto que nas aulas de matemática, a estatística é quase sempre restrita aos cálculos.

Concordamos com o autor no que diz respeito à importância das aulas de estatística em quaisquer níveis, inferências podem ser realizadas pelos distintos níveis de escolaridade, e o entendimento das informações é imprescindível a um trabalho estatístico.

A triangulação de Campos (2017) é citada como a possibilidade de promover a aprendizagem simultânea do Raciocínio, Pensamento e Letramento Estatístico. Para ajudar o professor a proporcionar aos alunos o desenvolvimento das três capacidades, indica ações:

> I) Sempre que possível, trabalhar com dados reais.
> II) Sempre relacionar os dados ao contexto em que estão inseridos.
> III) Sempre orientar os alunos para que interpretem seus resultados.
> IV) Permitir que os estudantes trabalhem juntos (em grupo) e que uns critiquem as interpretações de outros, ou seja, favorecer o debate de ideias entre os alunos.
> V) Promover julgamentos sobre a validade das conclusões, ou seja, compartilhar com a classe as conclusões e as justificativas apresentadas.
> VI) Avaliar constantemente o desenvolvimento das três capacidades em cada domínio da Estatística.
> VII) Para cada conteúdo, promover a triangulação. (CAMPOS, 2007, p.70).

Com esta pesquisa é possível compreender que para a obtenção de um letramento probabilístico mais qualificado, o mais importante é que os alunos possam assimilar os conceitos estatísticos e não apenas aprender a calculá-los.

Em seu trabalho, Campos (2007, p. 91) diz que a educação crítica comunica a um caráter social, a procura de significados aos conteúdos estatísticos deve ser feita de forma democrática, de modo que proporcione o desenvolvimento do espírito crítico nos alunos. Além disso, Campos (2007) cita que as escolas não deveriam atuar no sentido de desenvolver os jovens a fim de adaptarem-se à sociedade atual, mas sim contribuir para a formação de jovens que intencionarão aperfeiçoar a sociedade.

Seu trabalho foi importante para o nosso por mostrar como a modelagem matemática pode provocar uma reflexão sobre a realidade. Falando sobre a forma que isso pode despertar interesse pela disciplina por poder estudar por meio de aplicações concretas.

2.2 Delimitação do Problema e Justificativa

Tendo como referência nossa revisão bibliográfica e as alterações feitas no ensino de probabilidade no Ensino Fundamental mais especificamente no sexto ano e discussões com nosso grupo de pesquisa. Compomos nossa problemática de pesquisa e objetivo. Durante todo o processo buscamos definir o referencial teórico e metodológico.

Nossa pesquisa pretende estudar uma proposta para apresentar o conceito de probabilidade, se baseando no estudo apresentado por Coutinho (1994), A autora desenvolveu uma sequência didática, visando a construção de conhecimento por meio de situações problema que envolviam experimentos aleatórios simples um deles o jogo Franc Carreau. Esse jogo consiste em lançar uma moeda em um piso de azulejos de forma quadrada. Os jogadores então apostam na posição final de tal moeda: onde ela pode ficar completamente sobre um único azulejo (posição chamada “Franc-Carreau”), sobre uma junta entre dois azulejos ou sobre mais juntas.

A importância do aprendizado da probabilidade vem sendo discutida por muitos autores. Citamos Euler (1707-1783) matemático e físico suíço, e d’Alembert (1717-1783), filosofo, matemático e físico francês que escreveram sobre problemas de expectativa de vida, valor de uma anuidade, loterias, entre outros, em tempos remotos. Na atualidade Lopes (1998), Campos (2007) e Batanero (2013) concordam que aprendizagem da probabilidade está diretamente correlacionada ao exercício da cidadania.

Entendemos que a probabilidade ampara a formação de cidadãos críticos, que tomam melhores decisões, organizam de maneira mais eficiente suas vidas financeiras e, por conseguinte se tornam mais responsáveis em seus consumos e prestação de serviços, contribuindo assim para o bem de sua sociedade.

> Estamos vivendo na era das informações, e a escola deve proporcionar a seus alunos condições para formar conceito que o auxiliem no exercício de sua cidadania e para desenvolver sua capacidade de atuação reflexiva, ponderada e crítica em seu gripo social. Desse modo, ampliam-se suas chances de êxito na vida pessoal e profissional e de atuação em diferentes áreas científicas. Nesse sentido concordamos com Lopes (2008) sobre a importância do ensino de conteúdos como a Estatística, a Probabilidade e a Análise Combinatória. (COUTINHO 2013, p.23

A influência direta da probabilidade no cotidiano humano incentiva a pesquisa sobre seus métodos de ensino. Jogos como auxiliares de aprendizado ativo e interativo são relevantes, pois auxiliam na transmissão do conhecimento de forma dinâmica, interessante e não formal. O aluno então atua como protagonista na aquisição de seu conhecimento.

Como acordam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)[2]:

> Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, (...), dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação, (...), criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes. (PCNEM, 2000, p.52)

Espera-se que os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, público alvo desta pesquisa, tenham como conhecimento prévio adquirido, noções de probabilidade, que sejam capazes de resolver questões-problema, segundo determina a Base Comum Curricular (2018) como objetivo de conhecimento competente ao sexto ano: "Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)."

Vamos analisar quais os conhecimentos do letramento probabilísticos são mobilizados pela visão frequentista, para essa análise vamos utilizar as definições de Gal (2005). Que será tratado no mais adiante.

Assim definimos nossa questão de pesquisa:

Quais conhecimentos são mobilizados por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental quando resolvem um problema de simulação com a visão frequentista utilizando o jogo Franc Carreau.

E assim dessa forma definimos como objetivo geral:

Analisar os elementos de letramento probabilístico mobilizados pela abordagem da visão frequentista com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, observar possíveis articulações entre estes elementos.

Nossos objetivos específicos foram definidos como:

1) Levantar os conteúdos de probabilidade propostos em documentos oficiais.
2) Diagnosticar quais os elementos de letramento probabilísticos foram mobilizados utilizando a visão de Gal (2005).
3) Aplicar uma sequência didática para a construção do conceito de probabilidade no sexto ano do ensino fundamental.
4) Analisar a sequência visando a construção do conhecimento de probabilidade.

2.3 Procedimentos Metodológicos

Nosso trabalha utilizada os pressupostos da Engenharia Didática como metodologia, essa metodologia aparece no início de 1980.

Surgiu na didática matemática (didática francesa como enfoque) a percepção de engenharia didática. Artigue (1988) compara a forma de trabalho didático ao trabalho do engenheiro que, a fim de realizar um determinado projeto, baseia-se em conhecimentos científicos dominados, submete-se a um controle científico, mas depara-se com objetos mais complexos ainda não explicados pela ciência.

Encarada como metodologia de investigação, a engenharia didática é caracterizada por um esquema experimental, baseado nas relações didáticas em sala de aula que incluem concepção, realização, observação e análise de ensino. Pelo registro em que se estabelece e pelas formas de validação associadas é caracterizada também, como pesquisa experimental: confronto entre análises a priori e a posteriori. Esta metodologia tem sua validação realizada internamente e dispensa aplicação de pré-teste ou pós-testes.

> A engenharia didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daqueles que são transversais os conteúdos, mesmo que o suporte seja o ensino de um certo objeto matemático um saber ou um saber-fazer. (ALMOULOUD 2007, p. 171)

Em uma metodologia de pesquisa baseada em pressupostos da engenharia didática, é possível identificar fases de desenvolvimento apoiadas em um quadro teórico geral da didática: análises prévias, a priori e a posteriori.

As análises prévias permitem reconhecer os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e demarcar de forma legítima questões, hipóteses, fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. Análises preliminares devem possibilitar ao pesquisador a constatação dos potenciais variáveis didáticas que serão especificadas e trabalhadas nas fases seguintes: a construção da sequência e a análise a priori.

Segundo Artigue (1988) as fases são visitadas durante todo o trabalho de pesquisa, de acordo com as necessidades que surgem. As análises preliminares podem ser retomadas mesmo após o início fase seguinte, conferindo relatividade aos termos "preliminar" ou "prévia", referidos apenas como um primeiro nível de organização.

O pesquisador deve desenvolver e analisar uma sequência de situações-problema a fim de responder às questões e validar hipóteses emergidas na fase anterior. A situação-problema tem como principal função a utilização implícita e explícita de novos objetos matemáticos, através de questionamentos dos alunos na resolução do problema.

A análise a priori permite determinar como as escolhas realizadas, com as variáveis admitidas como cabíveis, viabilizam o controle dos comportamentos dos alunos e a explicação de seu sentido. Permite também, ao professor o controle da realização das atividades dos alunos, bem como identificar e compreender os fatos observados.

A análise a posteriori baseia-se no conjunto de dados reunidos durante a experimentação, nas observações em sala de aula e nas produções dos alunos. É a análise feita a partir da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa. Depende das ferramentas técnicas ou teóricas aplicadas por meio das quais são reunidos os dados que possibilitarão a elaboração de protocolos de pesquisa. Tais protocolos devem ser analisados minuciosamente e suas informações devem confrontar a análise a priori, como o objetivo de relacionar observações e objetivos determinados e estimar a regularidade e reprodutibilidade dos acontecimentos didáticos notados.

2.4 Referencial Teórico

Nosso intenção é estudar a construção do significado de probabilidade nos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, usando como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), como as propostas de Gal (2005) no que se trata de Letramento Probabilístico.

2.4.1 Teoria Das Situações Didáticas

Segundo Almouloud (2007) a teoria das situações didática desenvolve o modelo de relacionamento entre o aprendiz, o saber e o meio onde o processo de aprendizagem deve se desenvolver. Essa teoria foi desenvolvida por Guy Brousseau, pesquisador francês da Universidade de Bordeaux em 1986. Para o autor essa teoria foi elaborada com o objetivo de modelar procedimentos de ensino e de aquisição de conceitos matemáticos cujo objetivo é que haja:

> um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente a modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos da ocorrência de uma aprendizagem significativa. (SADDO 2007, p.31)

Segundo o autor o objetivo central de aprendizagem da teoria não é o sujeito cognitivo, mas a conjuntura didática onde são identificadas as interações estabelecidas, entre professor, aluno e saber.

Segundo (ALMOULOUD 2007) o aluno interage com o meio enfrentando as dificuldades, contradições, instabilidade muito parecido com o que acontece na sua vida social. Esse saber, decorrente da moldagem do aluno, aparece frente as novas respostas que nada mais são que a prova de aprendizagem.

> Esta hipótese é uma referência à epistemologia construtiva de Piaget, segundo a qual a aprendizagem decorre de processos de adaptação, no sentido biológico do termo, desenvolvidos pelo sujeito diante de situações problemáticas. (ALMOULOUD 2007, p.32)

O autor ainda fala que é preciso munir o meio de intenções didáticas para possibilitar a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aluno. Para isso é papel do professor criar um meio com propósitos didáticos, para que isso ocorra o professor deve desenvolver e estruturar um meio no qual as atividades serão aplicadas de uma maneira que provoque a aprendizagem.

A situação adidática é uma parte essencial da situação didática, nela o desejo de ensinar fica implícito para o aluno, porém ela foi elaborada, traçada e desenvolvida pelo professor para que o aluno tenha condições de absorver o novo conhecimento proposto pelo professor.

Para Brousseau, uma situação adidática tem as seguintes características:

> o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
> o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construidos sem apelo às razões didáticas;
> o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos (BROUSSEAU, 1986 apud ALMOULOUD, 2007).

Em seu livro ALMOULOUD (2007, p. 34) fala como cada conhecimento pode ser caracterizado por, pelo menos, uma situação adidática que protege seu significado e sentido que é chamada de situação fundamental.

Para uma investigação sobre a aprendizagem, a teoria das situações se utiliza de 4 processos diferentes, onde o saber tem funções diferentes e o aprendiz não possui a mesma relação com o saber. São eles ação, formulação, validação e institucionalização.

A dialética de ação corresponde em dar um problema para o aluno onde a melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar. Onde o aluno consiga agir sobre essa dialética e ela retorne informações sobre sua ação. (ALMOULOUD, 2007)

Já a segunda fase a formulação é quando o aluno interage com seus colegas, gerando assim trocas de informação. Essas trocas os alunos discutem de forma oral ou escrita, trazendo uma linguagem matemática ou não. Podendo trazer um modelo de resolução explícito que pode ser formulado com sinais comuns. (ALMOULOUD, 2007)

A terceira fase a validação, o aluno apresenta como resolveu o problema sua estratégia de como chegou a tal resolução, mostrando sua validação do modelo por ele criado. Segundo Almouloud:

> É a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor. De um lado, o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação-semântica e sintática.., O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição. Assim, a teoria funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como milieu de estabelecer provas ou de refutá-las. (ALMOULOUD 2007, p. 39)

A quarta fase a institucionalização ocorre, a partir do momento que o conhecimento é constituído e validado e passa a fazer parte do patrimônio matemático da classe. Embora não tenha o estatuto de saber social a institucionalização ao ser feita pelo professor, o conhecimento passa a ser do domínio do aluno, com isso ele pode utilizar o conhecimento em outros problemas matemáticos. Como descreve Almouloud (2007).

2.4.2 Letramento Probabilístico

Nossa atividade usou de referência as propostas de Gal (2005) no que se trata de Letramento Probabilístico. Como incerteza, aleatoriedade, variação, independência, previsibilidade, como a postura crítica a questionamentos.

Gal (2005) propôs um modelo elaborado por elementos de disposição e cognitivos, a fim de avaliar se o letramento probabilístico foi atingido pelo aluno. Elementos de disposição referem-se às atitudes do aluno diante o conhecimento: criticidade, crenças e atitudes e sentimentos pessoais. Para facilitar o entendimento o autor elaborou um quadro onde ele faz uma breve descrição dos elementos cognitivos.

Quadro 2 – Elementos Cognitivos (Gal) 1

Elemento cognitivo ou blocos	Breve descrição
Grandes Ideias	Aleatoriedade, independência, variação, previsibilidade e incerteza e outras.
Cálculos Probabilísticos	Diferentes formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.
Linguagem	Os termos e os métodos utilizados para expressar os resultados probabilísticos.
Contexto	Compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.
Questões críticas	Reflexões sobre assuntos no contexto de Probabilidade.

Fonte: Traduzido e adaptado de (GAL, 2005, p.51)

Os elementos são relacionados conforme a interpelação exposta na sequência, não havendo hierarquização entre eles.

Conceitos fundamentais à probabilidade, as “Grandes Ideias”, permitem trabalhar ou representar uma declaração probabilística. Símbolos matemáticos ou termos estatísticas podem representar muitos aspectos das Grandes Ideias, mas não podem ser contidas por notações técnicas em sua totalidade. Os aprendizados dessas ideias devem acontecer de forma intuitiva, os alunos devem aprender sua natureza geral sem usar definições matemáticas formais, e sim como bloco de construção para o entendimento das Grandes Ideias. Aleatoriedade, variação, independência, incerteza, e previsibilidade são conceitos principais do elemento cognitivo apontados por Gal (2005).

No nosso trabalho elaboramos uma sequência a fim de apresentar o conceito de probabilidade através do cálculo da frequência acumulada, utilizando uma simulação computacional para facilitar o lançamento de n moedas. Criando assim uma situação problema onde o aluno terá que trabalhar alguns dos conceitos de probabilidades propostos por Gal (2005).

3. ESTUDOS PRÉVIOS

Neste capítulo é apresentado o estudo do objeto, estudo epistemológico assim como a probabilidade aparece nos documentos oficiais.

3.1 Estudo Histórico e Epistemológico

Este subcapítulo tem por objetivo discutir o papel da história no ensino de probabilidade na escolha de contextos para a introdução dos conceitos probabilísticos no Ensino Fundamental.

A noção de acaso recebeu diversas interpretações durante a história, uma noção muito complexa e polissêmica, por se tratar de nossa percepção de mundo. Assim vamos limitar a apreensão do acaso em relação ao contexto em que está inserido. Logo, estudaremos situações da realidade ~~nos quais~~ em que o acaso pode intervir.

É importante observar que temos dois tipos de situações: o primeiro cujas atividades podem ser reproduzidas, ao menos mentalmente, e que podem ser modeladas por uma experiência aleatória e, o segundo por situações não reprodutíveis, que são os contingentes, que não admitem um modelo como representante. Um exemplo de uma situação reprodutível, seria a ação de lançar um dado de seis faces e obter um determinado resultado entre seis. Nesse caso, podemos imaginar que o lançamento do dado será sempre feito em condições análogas para reproduzir assim os mesmos resultados possíveis, um número entre 1 e 6, mas não necessariamente os mesmos resultados (situação aleatória). Um exemplo de situação contingente seria: uma pessoa aleatória caminha em uma calçada quando, ao passar por ~~de~~ baixo de uma escada, percebe um vaso cair em seus pés. Não é possível reproduzir tal evento nas mesmas condições, pois diversos fatores como o vento, a velocidade do caminhar da pessoa e a trajetória do vaso são impossíveis de serem reproduzidos com exatidão.

As civilizações antigas que habitavam a região da mesopotâmia e do Egito concatenavam o conceito de acaso a fatos sobrenaturais ou ações divinas. Na antiga Grécia, uma Pitonisa, sacerdotisa do templo, era reconhecida por suas profecias que previam o futuro e traduziam as vontades celestiais, ~~e~~ para isso fazia a manipulação de materiais que poderíamos entender como geradores de acaso (ossos, conchas, ...). A relação entre o acaso e as vontades sagradas permanece notória no comportamento humano ao longo da história.

Associações ao misticismo e à psicologia do acaso são notadas na prática de jogos de azar, reconhecida desde a Antiguidade como os jogos de astrágalos ou o lançamento de dados confeccionados com barro cozido, que flertavam com o acaso objetivando o lazer, ou seja, tais materiais poderiam ser utilizados em situações religiosas ou em situações de lazer, cada qual com seu conjunto de regras e atitudes.

Segundo J. F. Pichard:

> Uma primeira razão é que um tratado científico sobre os jogos de azar não seria, provavelmente, sério, pois os jogos eram coisas fúteis aos olhos dos sábios. Uma outra razão, certamente mais importante, é que o resultado de um sorteio "ao acaso" é a expressão da vontade divina, e como tal, não deveria ser calculada, pois não devemos desafiar Deus (ou o Diabo) (...)" (Pichard, 1997, p. 107, tradução nossa).

Segundo o autor, o primeiro documento conhecido que trata do cálculo de probabilidade está em um poema intitulado *De Vetula*, que foi escrito na França em meados do século XIII e atribuído a Richard de Fournival (1201 - 1260), um clérigo francês. Segundo Bellhouse (2000) esse poema foi largamente divulgado, lido e citado e que o cálculo de probabilidade elementar foi assentado e conhecido da Europa em meados do ano 1250.

Uma parte importante do poema para a probabilidade é a seção que trata do cálculo das possíveis chances no lançamento de um ou mais dados. O início do poema descreve os resultados de um dado e depois de três dados. Ele observa que certo os números em jogos de dados ocorrem de mais maneiras do que outros números. (confuso) Para ilustrar as possíveis combinações o poeta fornece uma tabela que lista todos os arremessos possíveis para cada soma das suas faces, seguindo a discussão específica sobre as probabilidades atribuídas a cada evento observado.

O cálculo sobre o acaso evolui, então a partir do séc. XVI, na utilização simples de fundamentos do acaso em contextos lúdicos. Geradores do acaso são vistos e utilizados até hoje: manipulação de cartas de baralho, roletas e moedas, por exemplo.

A tomada de decisões assertivas, nas questões de jogos de azar, foi pretensão da obra de Girolamo Cardano (1501-1576), *Líber De Ludo Aleae*, escrita no séc. XVI e publicada bem após a morte do autor matemático, médico e jogador, em 1665.

O início das percepções probabilistas é notado nas correspondências entre Pascal e Fermat, em 1654, baseadas em situações de enumeração de possibilidades que podem ocorrer que apontam para a geometrização do acaso~~.~~ Eles buscavam um modelo matemático que explicasse o fenômeno reprodutível do acaso considerando as regularidades macroscópicas percebidas nos jogos de azar. Bru (1981) identifica na correspondência entre Pascal e Fermat a busca de regularidades por um raciocínio simétrico no tempo: o ritmo é conferido ao acaso pela renovação do jogo ao longo do tempo de forma idêntica e regular.

Jacob Bernoulli (1654-1705), matemático suíço, confronta a probabilidade por uma visão determinista, em sua obra *Ars Conjectandi* (1713), para apresentar um outro contexto para a interpretação do acaso. Em um trecho de sua obra, expressa bem seu ponto de vista e contribui assim para a racionalização do acaso.

> Tudo o que, sob o sol, se beneficia de ser ou de tornar-se, passado, presente ou futuro, possui sempre em si e objetivamente uma certeza total. É evidente do presente e do passado: o que é ou foi não pode não ser ou ter sido. Sobre o futuro nada a discutir; contudo não é pela necessidade de qualquer destino que não pode tornar-se, mas em razão seja da ciência seja da predeterminação divina; porque se não acontecesse com certeza tudo o que é futuro, não vemos como o Criador supremo poderia conservar inteira a glória de sua omniscência e de sua onipotência. (Bernoulli, 1713, apud COUTINHO,2001, p.43).

Nessa obra, Bernoulli introduz a visão frequentista de probabilidade, ou ~~a~~ probabilidade *a posteriori* : fazia sua determinação a partir da observação do que já havia ocorrido, no contexto da epidemia da peste negra. Em uma linguagem atual poderíamos traduzir que ele estudava as chances de uma pessoa ser inoculada pela peste e vir a falecer.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) em sua obra Essai Philosophique sur les Probabilités (1814) introduz sua teoria analítica citando leis da natureza explicitando, mais radicalmente, o determinismo quando comparado a Jacob Bernoulli. No início de sua obra, o autor afirma que “o acaso não é nada além da expressão da nossa ignorância”~~,~~ e traz o princípio leibniziano da razão suficiente:

> Na ignorância das relações que lhes une ao sistema inteiro do universo, o fizemos depender das causas finais, ou do acaso, segundo o que lhes acontece e se sucedem com regularidade, ou sem ordem aparente; mas estas causas imaginárias foram sucessivamente afastadas com os limites de nossos conhecimentos, e desaparecem inteiramente diante da vã filosofia, que vê nelas apenas a expressão da ignorância na qual somos as verdadeiras causas. Os acontecimentos atuais têm com os precedentes uma fraca ligação fundamentada sobre o princípio evidente, que uma coisa não pode começar a ser, sem uma causa que a produza. Este axioma, conhecido sob o nome de “princípio da razão suficiente”, se estende às ações mesmo que julguemos indiferentes (...) Devemos

> então visar o estado presente do universo como o efeito de seu estado anterior, e como a causa daquele que vai seguir. (LAPLACE 1814, p. 32).

Laplace elaborou seu modelo matemático usando como base dez princípios organizados como axiomas e definições para demonstrar assim sua visão "pascaliana", usando os dois primeiros e corrigindo assim o exercício de D' Alembert, "cara e coroa" (ou cruz e face, na linguagem da época).

A fórmula indevidamente dada a Bayes é na verdade o sexto princípio de Laplace e nele discorre sobre as probabilidades condicionais.

Segundo Coutinho (1994) o desenvolvimento do cálculo probabilístico teve impulso com Laplace e sua "Teoria Analítica da Probabilidade", porém o uso do infinito e das passagens ao limite, amplamente utilizados pelos matemáticos sem embasamento suficiente, trouxeram novos paradoxos além dos já existentes. Para Augustin Cournot (1801-1877), matemático francês, cada evento pode ser considerado causa de um outro em uma espécie de cadeia determinada, o acaso, no contexto do determinismo laplaciano, é o encontro de duas séries causais independentes e todos os fenômenos ou eventos têm uma causa.

Assim o evento não pode ser favorecido e em nada predeterminado para ser pertencente ao acaso, não deve haver relação entre as causas que levam a um fim ou a outro. O acaso então é incorporado à igualdade das chances, a equiprobabilidade.

Para Cournot, a elaboração do conceito de acaso não deriva de uma análise empírica que tira da observação do real os elementos necessários à sua construção. Esta elaboração mobiliza uma atitude dedutiva que forja o conceito de acaso a partir da combinação de dois princípios racionais, que são o princípio da causalidade e o princípio da independência das séries causais. (Martin 1996, apud COUTINHO 2001).

Segundo Coutinho (2001), Martin em sua análise sobre a obra de Cournot, evidencia as diferenças entre causa e razão, enquanto as causas têm sentido produtor, as razões têm sentido explicativo. Assim possibilidade de que alguma coisa aconteça ou não, é a ausência de toda razão.

A autora destaca como Martin ressalta a diferença, observada por Cornout, entre causas regulares e acidentais. As causas acidentais variam a cada realização do experimento determinando sua singularidade, já as causas regulares, invariantes, são iguais para todos os acontecimentos e determinam a frequência do evento. Por meio das considerações de Cournot, entendemos que a combinação de causas regulares e acidentais resultam no acaso.

O matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) em sua obra Cálculo de Probabilidades (1912) contribui significativamente às mudanças qualitativas relacionadas às interpretações do acaso, apontando sua racionalização.

> É necessário que o acaso seja outra coisa que não o nome que damos à nossa ignorância, que entre os fenômenos dos quais ignoramos as causas, devemos distinguir os fenômenos fortuitos, sobre os quais o cálculo de probabilidades nos informará provisoriamente, daqueles que não são fortuitos e sobre os quais nada podemos dizer, enquanto não determinarmos as leis que o regem. (Poincaré 1912, apud COUTINHO 2001).

A interpretação do acaso como resultado de micro causas produzindo um efeito na ótica macro é ilustrada na obra de Poincaré por meio da instabilidade no equilíbrio de um cone, que apoiado em sua ponta, cai sem ser possível prever para que lado:

> Se um cone repousa sobre sua ponta, sabemos bem que ele vai cair, mas não sabemos para que lado; nos parece que o acaso sozinho vai decidir. Se o cone fosse perfeitamente simétrico, se seu eixo estivesse perfeitamente vertical, se não estivesse submetido a nenhuma outra força além do peso, ele não cairia de forma alguma. Mas a menor falha de simetria vai fazê-lo tender levemente para um lado ou para outro, e desde que ele o faça, pouco que seja, ele cairá para este lado. Se mesmo a simetria é perfeita, uma trepidação muito leve, um sopro de ar poderá fazê-lo se inclinar alguns segundos de arco; isto será suficiente para determinar sua queda e mesmo o sentido desta queda que será aquele da inclinação inicial. Uma causa muito pequena que nos escapa, determina um efeito considerável que não podemos não ver, e então diremos que este efeito é devido ao acaso. (Poincaré 1912, apud COUTINHO 2001).

Poincaré aponta como causas regulares a simetria perfeita do cone e a posição de seu eixo vertical. Para ele um sopro de ar ou uma trepidação leve são causas acidentais e não devem ser consideradas objeto do cálculo de probabilidades. O acaso então, está vinculado às causas que nos escapam, causas mínimas desproporcionais aos efeitos macroscópicos.

Um outro exemplo, já proposto no séc. VVII por Jacob Bernoulli está na meteorologia e sua noção de ocorrência vulnerável em relação às condições iniciais. De acordo com Poicaré (1912, p.5), "as grandes perturbações se produzem geralmente em regiões nas quais a atmosfera está em equilíbrio instável". Ele aceita como causas acidentais também os equívocos do observador e suas ferramentas, os erros acumulam seus efeitos mesmo sendo mínimos "que nós atribuiremos ao acaso, porque suas causas são muito complicadas e muito numerosas". (Poincaré 1912, p.10).

Segundo Coutinho (2001), há uma abordagem do acaso, sob a ótica determinista, como consequência de um evento aleatório adequado a uma complexidade de causas impercebíveis que fogem à compreensão humana. Nos limitaremos nesse texto às consequências possíveis de manipulações de um gerador de acaso, como os jogos de azar, e os acontecimentos frágeis que explicam o grande efeito das causas mínimas. Vale ressaltar que embora as crenças na manipulação dessas ferramentas estejam presentes nos indivíduos, discutiremos aqui apenas os aspectos científicos dos jogos tratados.

Na Antiguidade, na prática de jogos que poderiam produzir resultados distintos devidos ao acaso, já existia uma forma de avaliação intuitiva das chances de se alcançar um objetivo esperado. Notamos indícios de manipulações de objetos com intenção de obter resultados aleatórios nas civilizações mais antigas (Borovcnik e al., 1991, apud COUTINHO (2001)), (Pichard, 1997, p. 105), (Henry, 1994, p. 15). Jogos com dados feitos a partir de astrágalo (osso dos pés com quatro faces) permitiam apostas sobre as possíveis posições de imobilização após um lançamento. Segundo Borovcnik e al. (1991, p. 28), os diferentes tipos de ossos usados de distintos tipos de animais originavam uma "obscura a regularidade da aparição dos resultados". Uma certa noção de equiprobabilidade é suposta a partir da prática de jogos com dados viciados na época da Roma antiga e sua proibição de prática em diversas épocas, evidenciando a prática comum do acaso.

> Encontramos dados especialmente preparados para jogos viciados nesta época, de onde a noção complementar de dado honesto, e podemos conjecturar que os jogadores tinham empiricamente percebido a frequência de aparição das diferentes faces, isto é, uma concepção intuitiva da lei dos grandes números. (Pichard 1997, p. 106).

As consequências possíveis de um jogo e a hipótese de equiprobabilidade dos resultados foram incentivadas com o desenvolvimento do cálculo de combinações. Os primeiros desdobramentos e enumerações de possibilidades aparecem a partir do séc. XV (BRU, 1981, P.143), com o raciocínio combinatório sendo utilizado para incentivar apostas de jogadores em função de chances de vitória.

"De Vetula" poema escrito pelo francês Richard de Fournival em 1250 é o primeiro documento conhecido que demonstra o raciocínio combinatório para o lançamento de três dados do qual apresentamos alguns trechos:

> Talvez, no entanto, vós afirmaríeis que algumas são melhores 405
> Que outras que os jogadores jogam, pela razão que,
> Uma vez que um dado tem seis faces resultando seis números simples,
> Sobre três dados existem dezoito,
> Entre os quais somente três podem se apresentar.

> Eles variam de diferentes formas, e entre as quais 410
> Dezesseis somas compostas são produzidas. Elas não são, contudo,
> De valores iguais, uma vez que o maior e o menor entre eles
> Acontecem raramente e os intermediários frequentemente,
> E as outras mais estas são próximas dos valores centrais,
> Melhores elas são e mais frequentemente acontecem 415[...]
> Elas variam segundo cinquenta e seis formas
> segundo as configurações da face superior do dado,
> E estas configurações segundo duzentas e dezesseis formas de aparecer.
> Elas devem ser repartidas entre os números compostos interessando aos jogadores, 455 Assim que se deve, Vós conheceis inteiramente o quão grande é seu ganho
> Qualquer que possa ser, ou quão grande é sua perda.
> (BELLHOUSE 2000, p. 134, tradução nossa).

Em 1494 o problema de repartição das apostas foi apresentado por Luca Paccioli como demonstram Pascal e Fermat em sua correspondência de 1654:

> Uma brigada joga um jogo de dados, de tal forma que lhes é requisitado um total de 60 pontos para ganhar. Cada etapa conta 10 pontos. O valor apostado é de 10 ducats. Após um incidente qualquer, os soldados não podem terminar o jogo. Um deles tem 50 pontos e o outro 20. Perguntamos qual parte do valor apostado fica para cada um. (Pacioli 1494, apud COUTINHO 2001).

O nascimento da "Geometria do Acaso" se deu com o problema "das partes" ou "da repartição" considerado como o problema fundador do Cálculo de Probabilidades. Segundo Montucla (1802, apud COUTINHO 2001) o cavaleiro Meré propõem a Pascal o problema das partes que, por sua vez, o propõe para Roberval e para Fermat. Fermat apresenta solução correta empregando o método combinatório para combinar todas as alternativas de perda ou ganho que poderiam acontecer ao longo das seguintes jogadas. O nascimento da ideia de probabilidade foi então resumido por Loève (1978 apud COUTINHO 2001):

Em sua carta de 29 de julho de 1654, Pascal utiliza um método de recursividade do cálculo da esperança sobre os ganhos futuros como solução para o problema das partidas retomando a solução proposta por Fermat, a enumeração dos possíveis casos a favor, para fazer intervir a hipótese segundo a qual a partida será continuada. Para determinar a repartição dos valores apostados pelos jogadores, os dois raciocínios convergem à mesma resposta. Assim então é introduzida por Pascal e Fermat a ideia do que deveria acontecer se "existisse a possibilidade da continuação do jogo e se o jogo fosse equilibrado". (Borovcnik 1991, apud COUTINHO 2001).

No final de 1654, em uma carta destinada à Academia Parisiense, Pascal evidencia a descoberta da "Geometria do Acaso" sem propor uma definição de probabilidade.

Fermat identificou a ideia de probabilidade excluindo-a da enumeração dos casos possíveis (Henry, 1994, p.18) ainda que contextualizado e não teorizado. Este enfoque contribuiu para a aplicação correta da relação favorável e possível:

> O enfoque desenvolvido por Pascal e Fermat lança uma luz sobre a aplicação correta da relação entre favorável e possível, mas não concretiza nenhum progresso definindo um conceito para clarear a natureza própria da probabilidade. Eles empregaram a probabilidade pragmática; a igualdade das chances dos resultados nos jogos de azar lhes pareceu ser intuitivamente evidente. Os jogos de azar serviram de ligação entre a intuição e os conceitos em desenvolvimento como uma ferramenta para estruturar os fenômenos reais. (Borovcnik , apud COUTINHO 2001).

Devido ao conflito entre apreensão perceptiva das chances de acontecimentos de um evento e a relação entre os fins favoráveis e possíveis, notamos indícios de uma dualidade da noção de probabilidade.

A percepção experimental como estimação das chances e como sentido da razão entre números de casos gera conflito desde a criação da noção de probabilidade.

A noção de esperança de ganho proposta por Pascal foi retomada por Huygens anos mais tarde, formalizando o valor da chance, a noção de direito de esperar, contribuição significativa ao desenvolvimento da noção de probabilidade. J.-F. Pichard (1997) interpreta sobre o que Huygens entende por jogo equilibrado e suas propostas para o cálculo das chances é vista nesta citação da obra, publicada em 1657, *De ratiociliis in ludo aleae*:

> Parto da hipótese que em um jogo, a chance que temos de ganhar alguma coisa tem um valor tal que se temos esse valor, podemos procurar ter a mesma chance em um jogo equilibrado, isto é, por um jogo que não visa a derrota de ninguém.
> (...) Ter chances iguais de obter a ou b me vale (a+b) /2.
> (...) Ter p chances de obter a e q chances de obter b, as chances sendo equivalentes, me vale (pa+qb) /(p+q) (Pichard, 1997, p. 113)

A definição clássica para o enfoque combinatório da probabilidade, na hipótese da equiprobabilidade, foi indicada por J. Bernoulli no final do séc. XVII. Apenas um século mais tarde foi consolidado como primeiro princípio, na obra publicada em 1814 por Pierre-Simon Laplace *Essai Philosophique sur les Probabilités,* como: “a probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis”. Supondo a igualdade de chances para cada possibilidade, as chances de realização de um evento são dadas pela enumeração de resultados possíveis.

J.Bernoullui, em sua obra publicada em 1713 *Ars Conjectandi*, evidenciou a dualidade do enfoque deste conceito: razão entre número de casos ou estimativa de seu valor percebida pela verificação da frequência experimental. Na mesma obra ~~Bernoulli~~ encontramos a aplicação de probabilidade em contextos que não os de jogos de azar (Pichard1997, p. 119) e a relação entre frequência e probabilidade que altera ~~mudando~~ o enfoque da noção de probabilidade é observada em:

> O progresso conceitual, no entanto, sustentando a justificação da relação entre as frequências relativas e as probabilidades não foi compreendido antes de Jacob Bernoulli (1713). Ele trabalhou durante mais de 20 anos sobre a lei dos grandes números, a qual ele chamou de "teorema áureo". Este teorema mostra que as frequências relativas, em um certo sentido, convergem para a probabilidade subjacente, o que justifica a utilização da probabilidade em outros contextos além dos jogos de azar. (Borovcnik 1991, apud COUTINHO 2001)

Em *Ars Conjectandi* notamos a limitação da determinação de uma probabilidade por estratégias de contagem, já que há a necessidade de suposição de equiprobabilidade dos eventos elementares. De acordo com Henry (1994), Bernoulli aponta que:

> Esta necessidade exclui a aplicação da doutrina das chances aos fenômenos naturais complexos como: a aparição de uma doença ou os fenômenos meteorológicos, ou ainda a previsão das estratégias escolhidas pelos jogadores cujos comportamentos são imprevisíveis. (Henry, 1994, p. 22)

Neste caso, J. Bernoulli propõe a determinação *posteriori* da probabilidade de um evento, após a observação de várias experiências semelhantes, estimando a probabilidade do evento a partir da frequência estabilizada. O raciocínio frequentista de Bernoulli é percebido no trecho a seguir:

> Mas em verdade aqui nos é oferecido um outro caminho para obter o que procuramos. O que não nos é dado obter a priori o é ao menos a posteriori, isto é, será possível extrair observando os resultados de numerosos exemplos semelhantes; porque devemos presumir que, na sequência, cada fato pode acontecer e não acontecer no mesmo número de casos que foi constatado antes, em um estado de coisas semelhantes, que aconteceria ou não aconteceria.Enfim não pode escapar a ninguém que, para julgar desta forma qualquer evento, não seria suficiente ter escolhido uma ou duas experiências : todo ser mais estúpido, por não sei qual instinto natural, por si mesmo e sem a direção dada por qualquer ensino (coisa absolutamente admirável) tem como evidente que mais observações deste gênero tenhamos recolhido, menor será o perigo de se distanciar do objetivo. (Bernoulli,1713, apud COUTINHO 2001)

A mudança da condição de probabilidade permite segundo Borovcnik et al. (1991) a identificação de uma nova forma de estimativa de chances de realização de um evento: o método experimental. A convergência de sequência das frequências observadas justifica a estimativa, supondo que a probabilidade é um dado objetivo ligado à experiência e ao evento. Rényi (1966) sob este enfoque define:

> A definição de probabilidade como o valor ao redor do qual oscila a frequência relativa não é uma definição matemática, mas uma descrição do substrato concreto do conceito de probabilidade. A lei dos grandes números de Bernoulli, em contrapartida, é fundamentada na definição matemática da probabilidade. (Rényi, 1966, apud COUTINHO 2001).

Para Bernoulli a partir de muitos repetições da experiência, a experimentação conduz a uma probabilidade objetiva. A afirmação pode ser confirmada na citação abaixo, onde a expressão "tratamento formal" refere-se a uma experiência teórica com hipótese de modelo, como ponto de partida para Bernoulli:

> Este enfoque empírico para a determinação das chances não era novo para Bernoulli, e nem ele o considerou como novidade. O que ele teve como original foi a tentativa de Bernoulli de dar um tratamento formal para a noção vaga de que quanto mais dados acumulamos sobre a proporção desconhecida de casos, mais teremos certeza sobre essa proporção. (Stigler 1986, apud COUTINHO 2001).

A noção de probabilidade geométrica foi introduzida no séc. XVIII pelo conde de Buffon, Georges Louis Leclerc, matemático e naturalista francês quando, em 1733, ~~Buffon~~ divulga, em um trabalho endereçado à Academia Real de Ciências, o jogo Franc Carreau. O jogo propõe o lançamento de uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais e os jogadores devem apostar ~~sobre~~ na posição final da moeda, se ela repousará inteiramente sobre uma única lajota ou sobre alguma junta que uma as lajotas.

Publicado por Buffon em 1777, *Essai d'Arithmétique Morale*, demonstra o uso de geometria na Teoria das Probabilidades:

> A análise é o único instrumento do qual nos servimos até o momento, na ciência das probabilidades, para determinar e fixar as relações do acaso; a geometria parecia pouco apropriada para uma obra tão sutil; no entanto se olharmos de perto, será fácil reconhecer que esta vantagem da análise sobre a geometria é verdadeiramente acidental, e que o acaso, segundo as modificações e condicionamentos que sofre, encontra-se no campo da geometria, tanto quanto que no da análise: para nos assegurarmos, será suficiente prestar atenção ao fato que os jogos e as questões de conjectura ocorrem ordinariamente unicamente quando utiliza razão de quantidades discretas; o espírito humano, mais familiar com os números que com as

> medidas de extensão, os preferiu sempre; os jogos são uma prova, porque suas leis ao uma aritmética contínua; para utilizar então a geometria em posse dos seus direitos sobre a ciência do acaso, não se trata de inventar os jogos que se desenrolam sobre a extensão e suas relações, ou calcular o pequeno número daqueles desta natureza que foram já encontrados. O jogo do franc-carreau pode nos servir de exemplo: eis as condições que são muito simples (…) (Buffon 1777 ,citado por Badizé 1996, apud COUTINHO 2001).

De acordo com Badizé et al., 1996 Buffon contribuiu com uma nova luz À noção de probabilidade quando consideram: “de um número de casos tendo potência do contínuo e a primeira experimentação estatística para validar uma hipótese”. (Badizé et al., apud COUTINHO 2001, p 43)

Uma outra abordagem da probabilidade é a probabilidade subjetiva, ela é a trazida por Melo (2015), ele se utiliza do inglês Frank Ramsey e do italiano Bruno de Finetti para defender que probabilidade subjetiva vai de encontro com os pressupostos da interpretação lógica, ressaltando que nas mesmas situações, os seres humanos acreditam que as probabilidades são as mesmas em determinadas hipóteses. Essa afirmação não tem sentido para a probabilidade subjetiva, uma vez que para ela é possível admitir diferentes probabilidades quando se pensa em indivíduos perante as mesmas evidências.

> A interpretação subjetiva da probabilidade abandona o pressuposto da racionalidade que conduz a um consenso. De acordo com a teoria subjetiva, diferentes indivíduos (Sra. A, Sr. B e Sr.C) perante a mesma evidência e, podem ter diferentes graus de crença em h. A probabilidade é, portanto, definida como o grau de crença de um indivíduo em particular, então não deveria se falar sobre a probabilidade, e sim sobre a probabilidade da Sra. A, a probabilidade do Sr. B ou a probabilidade do Sr. C. (GILLIES 2000, 53 apud MELO 2015)

No início do séc. XIX identificamos a primeira apresentação axiomática do cálculo de probabilidades e sua definição dada como primeiro princípio por Laplace m seu Essai Philosophique sur les Probabilités, publicado em 1814. Seu trabalho retoma e desenvolve resultados probabilistas obtidos por seus contemporâneos e por seus precedentes. (Bru, 1981, p. 151). Laplace evidencia a limitação pela hipótese da equiprobabilidade e fornece a definição de base:

> A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, tais que sejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e a determinar o número de casos favoráveis ao evento do qual procuramos a probabilidade. (Laplace, 1814, p. 35).

A definição dada por Laplace, utilizada ainda nos dias de hoje, é notada na citação: “a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.” (Laplace, 1814, p. 35).

Em seu segundo princípio Laplace propõe ampliação desse conceito, abrindo espaço para a concepção moderna em termos de medida:

> Mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o forem, determinaremos primeiramente suas possibilidades respectivas as quais a justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria dos acasos. Então a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável. (Laplace, 1814, p. 38)

Quando não há informações sobre a diversidade dos casos possíveis, a equiprobabilidade deve ser postulada, como posicionamento subjetivo. A atitude a priori neste caso é não conferir maior importância a um caso ou a outro, um raciocínio bayesiano apoiado em um “princípio da indiferença”.

3.2 A Probabilidade em Documentos Curriculares do Ensino Fundamental

Neste capítulo abordamos como a probabilidade aparece nos documentos oficiais que visam organizar o entendimento de probabilidade no ensino fundamental. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) propõe que, no ensino fundamental, a matemática deve articular seus diversos campos: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, articulando com outras áreas do conhecimento, gerando confiança na construção e aplicação do conhecimento matemático.

No estudo da probabilidade no ensino fundamental, anos iniciais, a proposta é conceber o estudo de noções de probabilidade, visando promover a compreensão da ideia de eventos determinísticos. Para isso a proposta tem como início o desenvolvimento da noção de aleatoriedade, fazendo com que os alunos percebam a existência de eventos certos, impossíveis e prováveis.

Já no ensino de probabilidade dos anos finais, a instrução deve ser ampliada e aprofundada, por meio de atividades em que o aluno tenha contato com experimentos aleatórios e simulações para poder confrontar os resultados obtidos, fazendo uso da probabilidade frequentista. No 6 ano a probabilidade segundo a BNCC tem como objetivo:

> Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista) (BNCC 2018, pg 304)

Observamos que a probabilidade frequentista, tema de nosso trabalho, já aparece como objetivo na BNCC. O documento ainda fala das habilidades:

> Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. (BNCC 2018, pg 34)

O documento trata ainda da importância da leitura e interpretação de gráficos, coletas de dados, organização e registro e trata da importância da construção de diferentes gráficos para interpretação das informações coletadas. Essas habilidades vão ao encontro da nossa proposta de atividade, que utiliza gráfico para demonstrar a estabilização da frequência acumulada.

O Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2021) organiza as habilidades do ensino fundamental em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, como proposto pela BNCC. O documento fala da importância da probabilidade na formação do cidadão, trazendo a leitura e compreensão de gráficos e tabelas como fundamental na formação do aluno. Segundo o Currículo Paulista, as noções de probabilidade devem ser abordadas logo nos anos iniciais do ensino fundamental e tratar de eventos aleatórios já nos anos finais do ensino fundamental.

> O estudo das noções de probabilidade abordadas no Ensino Fundamental desde os Anos Iniciais propõe um trabalho centrado na compreensão de que há eventos certos, impossíveis e prováveis, permitindo o desenvolvimento da noção de aleatoriedade e da compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Nos Anos Finais, o estudo é ampliado e aprofundado de forma a aprimorar a capacidade de compreensão dos elementos do espaço amostral, associados aos problemas de contagem, e a permitir a realização, pelos estudantes, de atividades que envolvem os experimentos aleatórios realizados. (SÃO PAULO 2021, 327)

O Currículo Paulista também traz algumas habilidades que o aluno deve desenvolver no ensino fundamental sendo uma delas:

> Apresentar todos os possíveis
> resultados de um experimento aleatório,
> estimando se esses resultados são igualmente
> prováveis ou não, explorando a ideia
> de probabilidade em situações-problema
> simples. (SÃO PAULO 2021,345)

Podemos observar que o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2021) está de acordo com a organização proposta pela BNCC (BRASIL, 2018) para abordar probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.

3.3 Estudo do Objeto

Este capítulo tem por objetivo apresentar um breve estudo a respeito da construção do conceito de probabilidade baseado em seus aspectos específicos e didáticos.

3.3.1 Experimento Aleatório

Durante o dia nos deparamos com diversas decisões que devemos tomar, desde qual o melhor caminho para um compromisso, até mesmo qual prato escolher no almoço. A incerteza faz parte do cotidiano e para tomar decisões, usamos um cálculo instintivo sem mesmo saber o que é probabilidade. Esses experimentos que repetidos diversas vezes e que produzem resultados diferentes são classificados de experimentos aleatórios.

Segundo Coutinho (2001) se for possível, em um experimento, determinar o resultado que será obtido, esse experimento não é aleatório. A característica de um experimento aleatório é justamente a incapacidade de prever o resultado que será observado. Mesmo sabendo todos os possíveis resultados no experimento aleatório.

Em Coutinho (2013) a autora aponta que se tratando em teoria de probabilidade temos os fenômenos que envolvem a aleatoriedade, ou seja, ação do acaso. Um experimento aleatório apresenta algumas características, segundo a autora:

a) A existência de um protocolo experimental que permite a descrição completa das condições de realização do experimento, e consequentemente, sua reprodução nas mesmas condições.

b) A identificação do componente de imprevisibilidade pela impossibilidade de calcular ou de determinar previamente o resultado do experimento.

c) A possibilidade de descrever com precisão o conjunto de resultados possíveis do experimento partindo do protocolo experimental.

Por exemplo, no lançamento de um dado sabemos que a face voltada para cima pode ser um número em uma sequência de 1 a 6, porém não sabemos qual o número que sairá na primeira jogada ou em outra jogada qualquer. Podemos repetir este experimento diversas vezes sempre nas mesmas condições. E mesmo sendo realizado nas mesmas condições será sempre o acaso que vai determinar o número observado na face de cima. Nesse caso não conseguimos determinar o resultado com precisão, mas podemos determinar o grau de incerteza na sua ocorrência. Para isso chamamos de probabilidade, ou seja, a medida de incerteza na ocorrência de um evento resultante de uma experiência aleatória.

A BNCC orienta que, no sexto ano, o aluno deve calcular a probabilidade de um evento aleatório, assim sendo a importância da compreensão de experimento aleatório já aparece como necessidade básica para o cálculo da probabilidade. Para o sexto ano a BNCC orienta que o aluno deve desenvolver a habilidade matemática ~~é~~: calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

3.3.2 Probabilidade

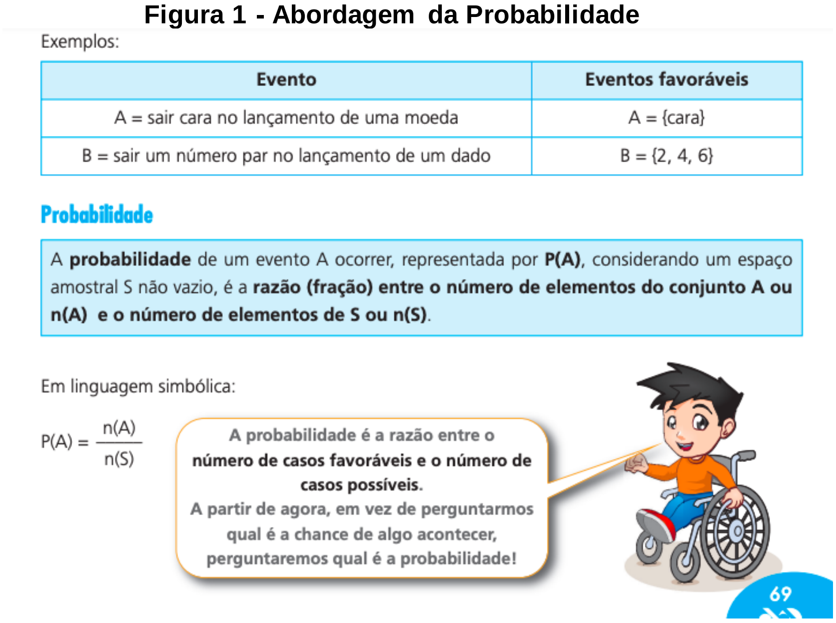
Para determinar a probabilidade, diferentes enfoques podem ser admitidos: o subjetivo, o clássico e o frequentista. O subjetivo é baseado no método conhecido como Bayesiano~~,~~ que, a partir da análise do contexto e de resultados já obtidos por meio de experimentos realizados nas mesmas condições, permite a estimativa de um valor a ser adotado.

A partir da observação da estabilização da frequência relativa temos o enfoque frequentista para probabilidade em que a estimação é feita com base em estudos de frequências acumuladas em experimentos, repetidos por um número infinito de vezes que permite a obtenção da probabilidade frequentista.

A probabilidade combinatória, por sua vez, é conhecida pela razão entre o número de sucessos e o número total de casos, quando se considera cada caso possível igualmente provável, ou seja: $P(A) = \frac{n\,(A)}{n(U)}$. Este é o enunciado do segundo princípio de Pierre-Simon Laplace (1749-1827) em sua obra *Essai Philosophique sur les Probabilités* (1814) que será tratada na parte histórica da probabilidade de nosso trabalho.

No livro didático, a probabilidade é abordada em espaços amostrais equiprováveis sempre reforçada com um número considerável de exercícios que demandam uma mobilização deste enfoque como mostra o exemplo da Figura 1.

Figura 1 - Abordagem da Probabilidade



Exemplos:

Evento	Eventos favoráveis
A = sair cara no lançamento de uma moeda	A = {cara}
B = sair um número par no lançamento de um dado	B = {2, 4, 6}

Probabilidade

A **probabilidade** de um evento A ocorrer, representada por **P(A)**, considerando um espaço amostral S não vazio, é a **razão (fração) entre o número de elementos do conjunto A ou n(A) e o número de elementos de S ou n(S)**.

Em linguagem simbólica:

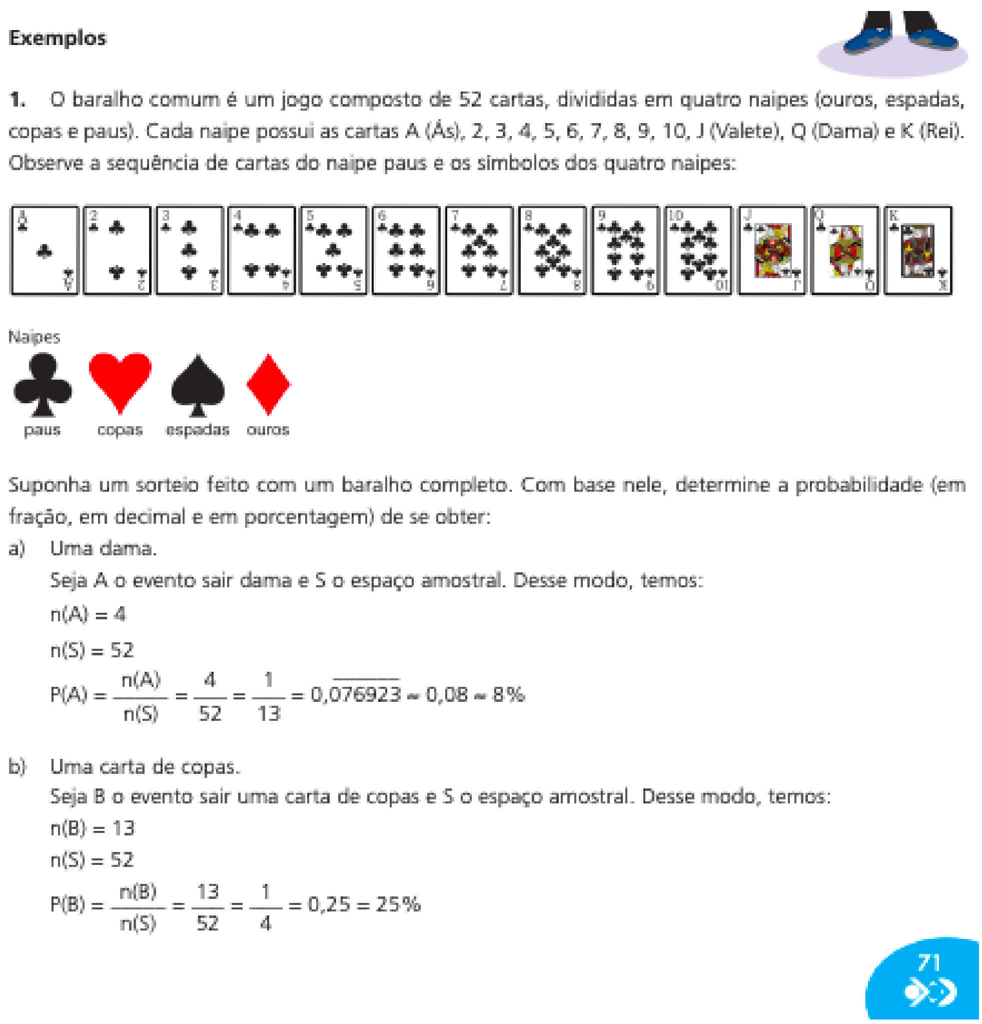
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Fonte: Objetivo Caderno 2021, p.69.

Podemos observar, no exemplo apresentado na Figura 1, que a probabilidade é apresentada como o número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis. O exemplo não cita a simetria perfeita que apresenta uma moeda em relação ao seu centro por se tratar de um cilindro o que reflete a probabilidade ter o valor 0,5 algo importante para ser falado a priori, muito menos faz uma apresentação do enfoque frequentista, que seria mostrar que é preciso muitas repetições do experimento aleatório nas mesmas condições.

Essa discussão da frequência é importante para o aluno, pois ajuda a compreender melhor a proporção entre os valores observados e os valores calculados através de modelos matemáticos. Em seu trabalho SILVA (2018) fala justamente na estabilização da frequência relativa acumulada no lançamento de um dado, no seu trabalho o autor demonstra através do software Excel que é preciso algo em torno de 3000 lançamentos para se obter uma estabilização razoável. O mesmo foi feito por Laplace, Conde de Buffon que lançaram uma moeda mais de 3000 vezes para assim conseguir uma estabilização aproxima do valor cálculo através de modelos matemáticos.

Figura 2 - Exemplo de Exercício



Exemplos

1. O baralho comum é um jogo composto de 52 cartas, divididas em quatro naipes (ouros, espadas, copas e paus). Cada naipe possui as cartas A (Ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (Valete), Q (Dama) e K (Rei). Observe a sequência de cartas do naipe paus e os símbolos dos quatro naipes:

Suponha um sorteio feito com um baralho completo. Com base nele, determine a probabilidade (em fração, em decimal e em porcentagem) de se obter:

a) Uma dama.
Seja A o evento sair dama e S o espaço amostral. Desse modo, temos:
$n(A) = 4$
$n(S) = 52$
$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0,\overline{076923} \approx 0,08 \approx 8\%$

b) Uma carta de copas.
Seja B o evento sair uma carta de copas e S o espaço amostral. Desse modo, temos:
$n(B) = 13$
$n(S) = 52$
$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

Fonte: Objetivo Caderno 2021, p.71.

Outro exemplo é o apresentado na Figura 2 em que, para o cálculo da probabilidade, é usado o espaço amostral e seus subconjuntos chamados de evento. Com isso o cálculo da probabilidade é feito pelo modelo clássico o que está de acordo com a BNCC, porém não trata da questão frequentista que também está na BNCC para alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Cálculo de probabilidade como a razão entre
o número de resultados favoráveis e o total de
resultados possíveis em um espaço amostral

> equiprovável
> Cálculo de probabilidade por meio de muitas
> repetições de um experimento (frequências de
> ocorrências e probabilidade frequentista) (BNCC 2018, pg. 304)

3.3.3 Probabilidade Frequentista

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2020), o estudo do cálculo de probabilidades no 6° ano do Ensino Fundamental. Esse cálculo é sugerido por meio da probabilidade clássica e frequentista.

> Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista) (BRASIL 2020, p. 306)

Segundo Coutinho (1994) uma grande quantidade de lançamentos é necessária para que a frequência relativa se estabilize. Em seu trabalho a autora mostra que a estabilização da frequência relativa acumulada no lançamento de uma moeda ocorre após 1000 lançamentos.

> Quando da distribuição do documento contendo os resultados obtidos após 1000 lançamentos de duas moedas, pudemos confirmar nossa análise "a priori" quanto às dúvidas sobre a estabilização das frequências obtidas no lançamento das tachinhas, ou seja, pudemos observar que, pelo fato desta estabilização ter ocorrido próxima ao valor 50%, os alunos ficaram questionando a causa de, neste caso, não poderem adotar esta valor tal como o ocorrido no lançamento das moedas. (COUTINHO 1994, p.97)

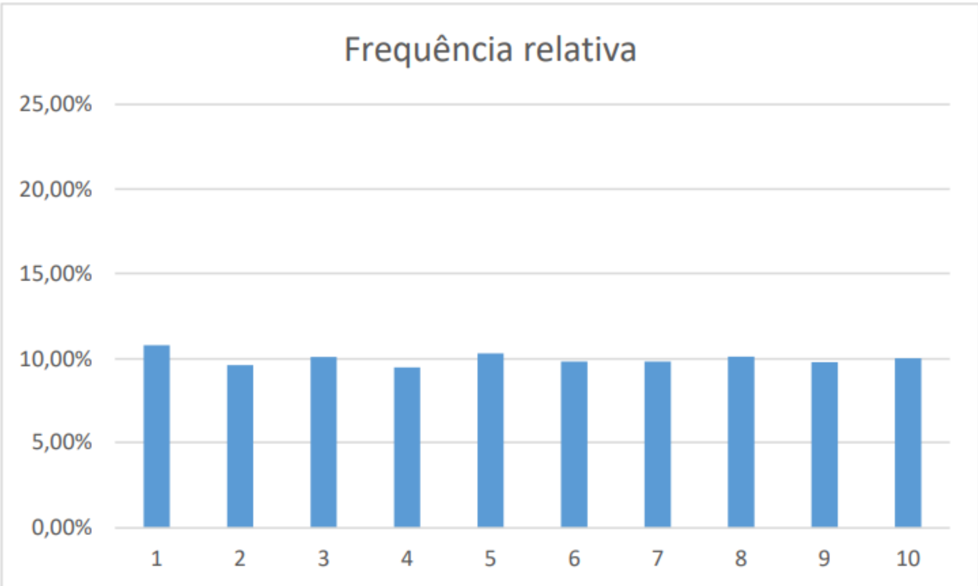
O enfoque frequentista é apresentado em diversos livros com poucos lançamentos, como mostra a pesquisa de Caberlim (2015). As autoras Caberlim e Coutinho (2013) concordam que para a articulação do enfoque clássico com o frequentista este número de lançamentos é insuficiente.

> Destacamos um problema presente em alguns materiais didáticos, identificado por Caberlim e Coutinho (2013), que é o fato de que o livro didático solicita ao aluno apenas um número muito pequeno de repetições do experimento aleatório (por exemplo, é comum encontrarmos a solicitação de 30 repetições) para que, a partir delas, o aluno forneça um valor de probabilidade para o evento estudado. Trata-se aí de um erro conceitual, uma vez que as frequências relativas observadas em um número tão pequeno de repetições podem apenas induzir uma estimativa do valor procurado. (CABERLIM 2015, p. 36)

Como aponta SILVA (2018) o envolvimento dos alunos com o enfoque frequentista é melhor quando próximos aos dez anos de idade, onde o cálculo, através do enfoque clássico, torna-se insuficiente. A realização dos experimentos ou sua simulação em ambiente computacional, ocasiona o envolvimento dos alunos, de acordo com Coutinho (2001).

Como feito em sua pesquisa (SILVA 2018) elabora uma simulação por meio do Microsoft Excel, onde demonstra a probabilidade de um número sorteado entre 1 a 10 ser 10%. Por meio de tabelas de frequência fica claro que o número de lançamentos precisa ser grande, pois com apenas 30 lançamentos a probabilidade relativa fica muito distante da estabilização. Apenas quando o número de lançamentos fica próximo a 3000 que as probabilidades clássica e relativa ficam próximas.

Figura 3 - Gráfico de Frequência



Fonte: SILVA 2018, p.69.

Analisando o gráfico fica evidente que o número de lançamentos não é suficiente para se ter uma convergência do valor da probabilidade.

4. ATIVIDADE

Neste capítulo de nossa pesquisa serão apresentados os sujeitos da pesquisa, a descrição da aplicação e a sequência de ensino.

4.1 Os Sujeitos da Pesquisa

A atividade será aplicada com 4 alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, com idades entre 10 e 11 anos, em uma escola da rede privada na cidade de São Paulo. O número reduzido de alunos deve-se ao fato da necessidade de distanciamento social frente a pandemia do Covid-19.

4.2 Descrição da Aplicação

Duas atividades serão realizadas em duplas pelos alunos que deverão manipular um arquivo elaborado no Geogebra. Para tal atividade será realizado um encontro com os alunos de forma presencial e duração de 3 horas.

4.3 Sequência de Ensino

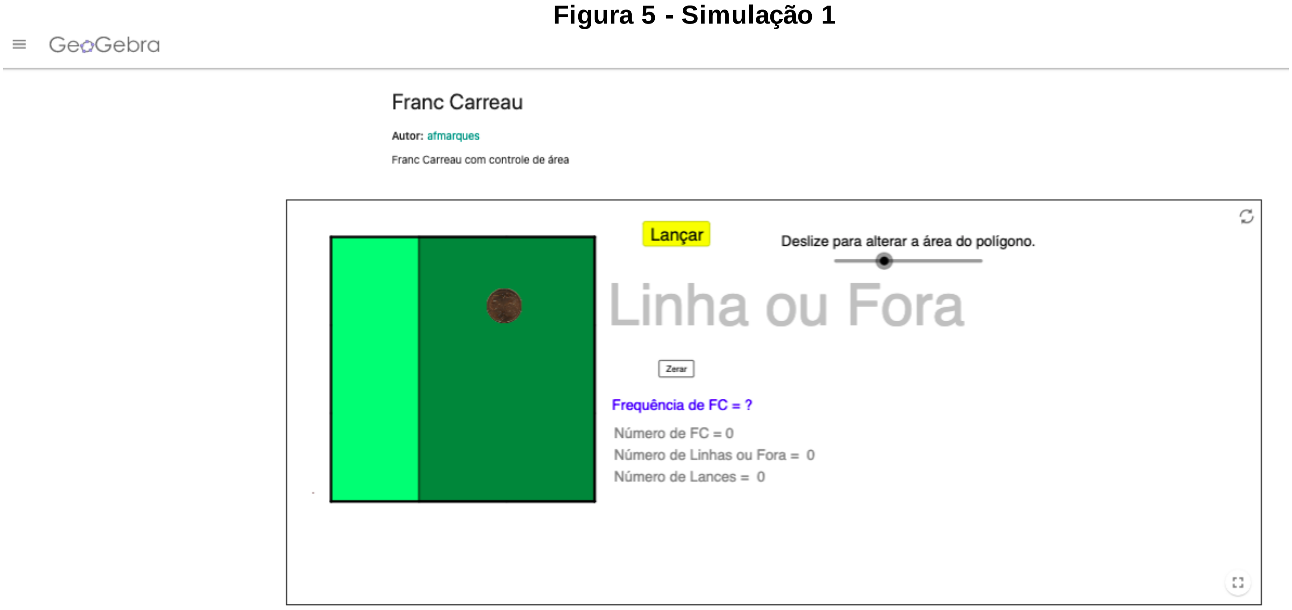
A atividade será dividida em duas partes. Na primeira parte usamos um arquivo computacional desenvolvido por nós no programa Geogebra. O arquivo representa a simulação do lançamento de uma moeda sobre um quadrado, a posição final da moeda pode ser na linha que delimita o quadrado ou dentro dele.

Figura 4 - Simulação 1

Fonte: Geogebra 2021

Uma barra deslizante pode ser utilizada para reduzir a área do quadrado, mudando a sua cor e gerando assim um retângulo de menor área. A área verde clara se torna a nova área da figura.

Figura 5 - Simulação 1



Fonte: Geogebra 2021

Os alunos devem responder questões a respeito da atividade concomitante com a utilização da aplicação.

Logo no início os alunos serão separados em duplas e cada uma receberá um notebook e uma folha com questões sobre a atividade. Cada dupla terá que responder quatro perguntas referentes à chance de uma moeda cair dentro ou na linha limitante de um quadrado. As duas primeiras perguntas serão feitas antes dos alunos usarem a simulação, já que segundo a BNCC esses alunos já devem ter tido algum contato com o conceito de probabilidade. As demais perguntas devem ser respondidas no momento da utilização da simulação, permitindo observar as diferentes percepções dos alunos após lançar a moeda algumas vezes.

As perguntas a serem respondidas nessa primeira atividade são:

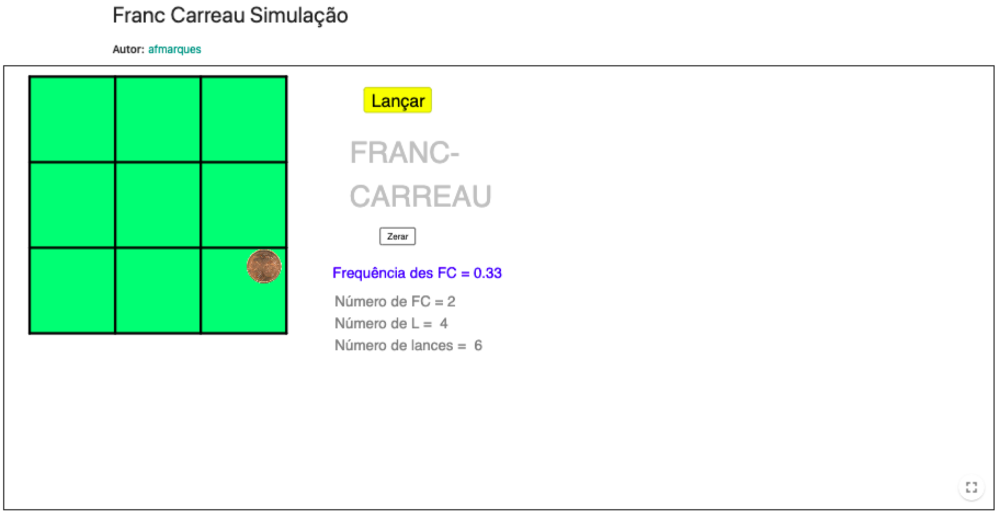
1. Com a área totalmente verde você apostaria que a moeda vai cair dentro do quadrado ou sobre as linhas limitantes?
2. Se diminuirmos a área da figura a chance da moeda cair dentro do quadrado muda?
3. Deslizando a barra lateral você acredita que a moeda vai cair mais dentro ou fora do quadrado de cor mais clara?
4. Existe uma forma na qual a moeda sempre vai cair na linha limitante ou fora do quadrado? Se sim como?

Após responderem as questões e realizarem mais lançamentos, os alunos devem discutir sobre suas respostas e os possíveis resultados. A discussão será promovida pelo pesquisador, e tem como objetivo colher informações e percepções dos alunos a respeito dos lançamentos.

Na segunda parte da atividade a simulação representará um piso quadriculado para as simulações de lançamentos. Essa situação é uma maneira de simular o jogo Franc Carreau no ambiente computacional, por meio de arquivo manipulativo (Geogebra) que substitui a simulação mecânica e viabiliza maior quantidade de lançamentos.

Na segunda parte da atividade os alunos lançarão a moeda em 27 sequências de 20 lançamentos, a fim de analisar a frequência obtida. Simultaneamente os alunos alimentarão uma tabela em Excel, que permitirá a construção de um gráfico com a frequência acumulada, podendo assim analisar a convergência da probabilidade em questão.

Figura 6 - Simulação 2



Fonte: Geogebra 2021

Na segunda parte os alunos responderão as seguintes questões :

1. Agora em um piso quadriculado, você apostaria que a moeda vai cair em algum rejunte ou cairá totalmente dentro de um quadrado?
2. Após 20 lançamentos você apostaria em qual situação?
3. Após o cálculo da frequência acumulada você apostaria em qual situação?

Depois de cumpridas as atividades o professor fará a demonstração do cálculo da probabilidade através da geometria, demonstrando que o cálculo obtido pelos alunos deve estar de acordo com o cálculo através das áreas.

4.4 Análise a Priori

O uso do arquivo manipulativo, realizado no programa Geogebra, foi escolhido como variável didática na intenção de simulação do jogo Franc Carreau, substituindo uma simulação mecânica e permitindo assim a possibilidade de grande número de lançamentos.

Os alunos simularão o lançamento de uma moeda, em um quadrilátero e observarão a posição final da moeda, se dentro do quadrado ou se sobre as linhas limitantes dele. Posteriormente os alunos serão orientados a reduzir a área total do quadrilátero (através da barra deslizante), requerendo desta vez, a observação da posição final da moeda, se dentro do quadrado ou se sobre as linhas limitantes do quadrado ou fora da nova área delimitada.

Na segunda atividade os alunos simularão o lançamento de uma moeda sobre um piso quadriculado formado por 9 quadrados iguais. E observarão a posição final da moeda se dentro de um quadrado ou sobre as linhas limitantes dos quadrados.

Serão utilizadas variáveis didáticas como a utilização de espaços não equiprováveis, importantes para a compreensão de probabilidade, e a utilização de um software para construção das tabelas e do gráfico (Microsoft Excel) que auxiliará os alunos a organizarem os dados obtidos nos lançamentos para a construção de tabelas e gráficos. O gráfico permitirá aos alunos, após grande número de lançamentos, a percepção da estabilização das frequências.

Como conhecimentos prévios espera-se dos alunos que conheçam as operações matemáticas simples como adição, divisão e porcentagem. O cálculo das frequências será realizado via software, por meio de fórmulas do Excel, os alunos apenas precisarão digitar as frequências relativas geradas na atividade.

Intencionamos na atividade observar alguns dos conhecimentos apontados por Gal (2005) a respeito do letramento probabilístico, conceitos fundamentais à probabilidade que permitem representar ou trabalhar uma declaração probabilística, como os conceitos de previsibilidade, aleatoriedade, variação, além de questionamentos críticos e possíveis previsões quanto ao posicionamento final da moeda após um lançamento.

A variação da posição final da moeda deverá ser notada, bem como a impossibilidade de prever os lançamentos futuros, fatos que permitirão a constatação da aleatoriedade.

A independência deverá ser percebida pelos alunos a partir da observação de que os eventos são desconectados em termos de ocorrência, impossibilitando a previsão da posição final da moeda no próximo lançamento. Logo a falta de previsibilidade também será notada e a incerteza estará presente em toda a atividade.

O estudo da equiprobabilidade não ocorre nos anos iniciais do Ensino Fundamental como vimos na BNCC (2018), logo a dificuldade de sua percepção poder ser um obstáculo epistemológico esperado.

Outro obstáculo possível seria relativo ao manuseio do software visto a pouca interação prévia dos alunos com computadores. O uso do Excel também poderá ser um obstáculo, pois pode ser que seja o primeiro contato com o software para a maioria dos alunos.

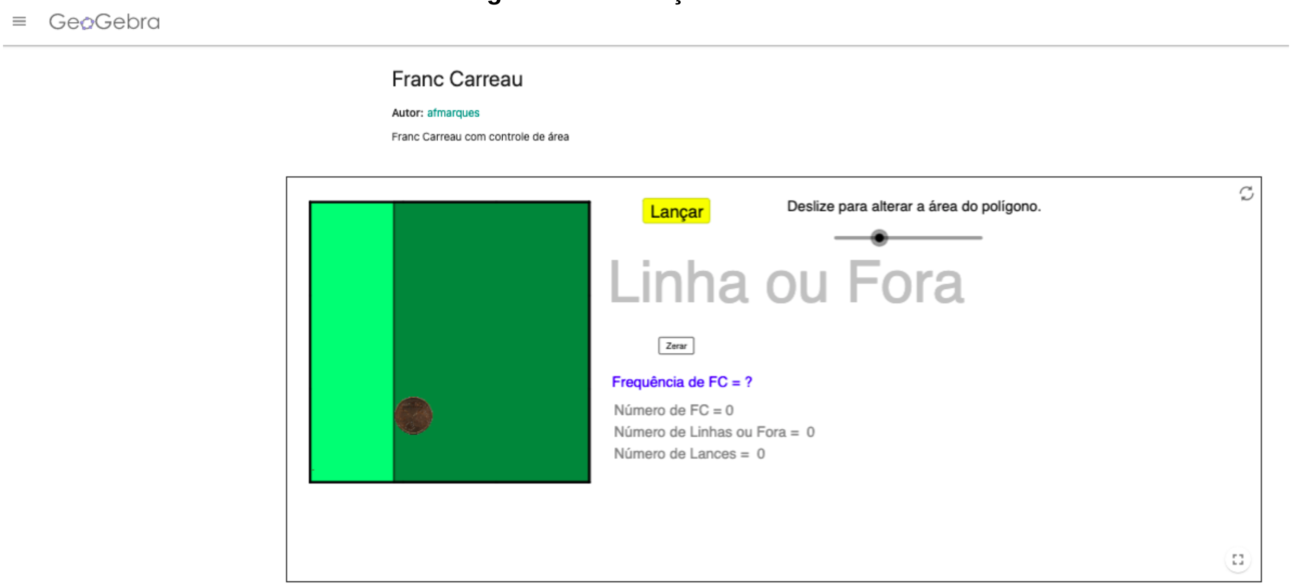
4.5 Análise Posteriori

Um ponto inicial que formulamos na nossa análise a *priori* foi a percepção da não-equiprobabilidade, visto que esse assunto está presente na BNCC. Como pode ser observado a partir das respostas da primeira pergunta (sobre a chance de a moeda cair dentro do quadrado ou sobre suas linhas limitantes), os alunos responderam que a moeda deveria cair dentro do quadrado, baseados no fato de que o tamanho do quadrado era bem superior ao tamanho da moeda. Percebemos então, que para os alunos o tamanho da área seria importante para a posição final da moeda.

Na segunda pergunta, ainda sobre a primeira simulação, perguntamos para os alunos se a diminuição da área do quadrado influenciaria na posição final da moeda. Para essa pergunta todos os alunos responderam que sim, que a chance da moeda cair dentro do quadrado diminuiria. Demonstrando uma percepção sobre a mudança do espaço amostral. Com isso temos a percepção que os alunos entenderam o que é a variação, uma das Grandes Ideais proposta por Gal (2005).

Na próxima etapa foi dada a opção de os alunos trabalharem com uma barra deslizante, alterando o tamanho da área do quadrilátero.

Figura 7- Simulação 1



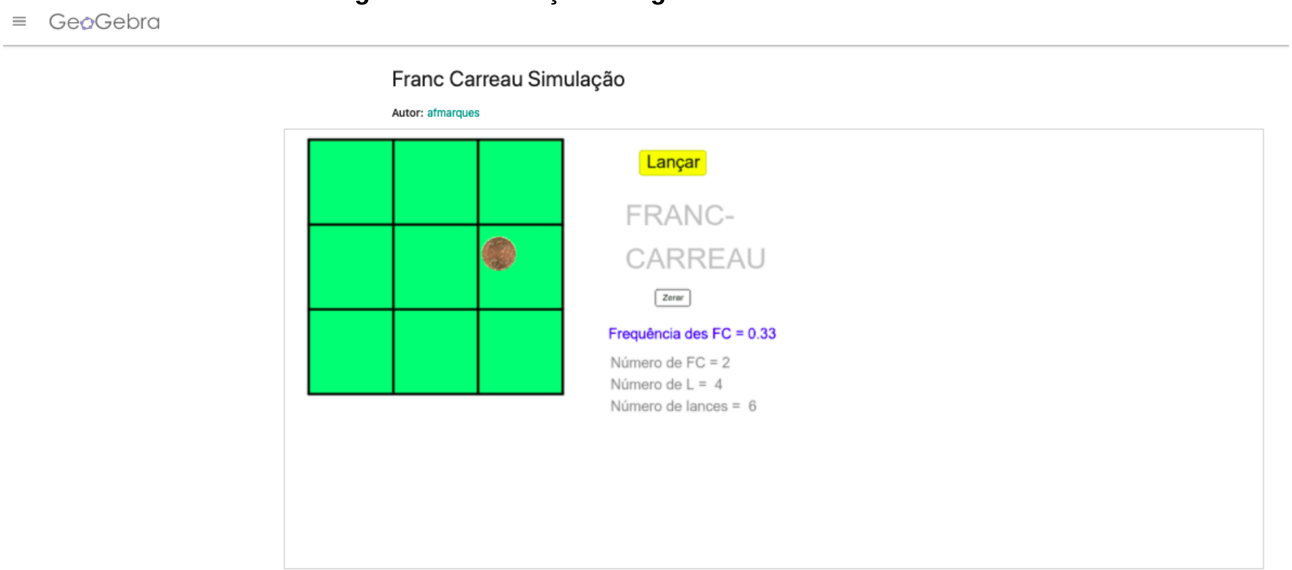
Fonte: Geogebra 2021

Nesta etapa os alunos responderam que a chances da moeda cair dentro da nova área (criada a partir do deslizamento da barra) dependem do tamanho da moeda, mesmo a moeda não alterando seu tamanho. Outra resposta a destacar é a posição fina da moeda depende de quanto a área seria reduzida. Isso demonstra a percepção dos alunos sobre a importância da área no conhecimento da probabilidade de resultados esperados no jogo.

Na última questão foi perguntado se existiria uma forma na qual a moeda sempre caísse na linha limitante ou fora da área verde clara. Todos os alunos responderam que dependia do tamanho da área verde clara e do tamanho da moeda, se a área verde fosse muito pequena, ou a moeda muito grande, a posição final da moeda seria sempre sobre as linhas limitantes da área mais clara. Um aluno questionou se a altura, caso fosse um experimento mecânico, influenciaria na posição final da moeda, neste caso o aluno pode não ter acreditado totalmente na simulação ou simplesmente estava procurando outras formas de resolver a questão.

A segunda simulação trata-se do jogo Franc Carreau, nela os alunos responderam logo a primeira questão: Agora em um piso quadriculado você apostaria que a moeda vai cair em algum rejunte ou cairá totalmente dentro de um quadrado.

Figura 8 - Simulação 2 Jogo Franc Carreau



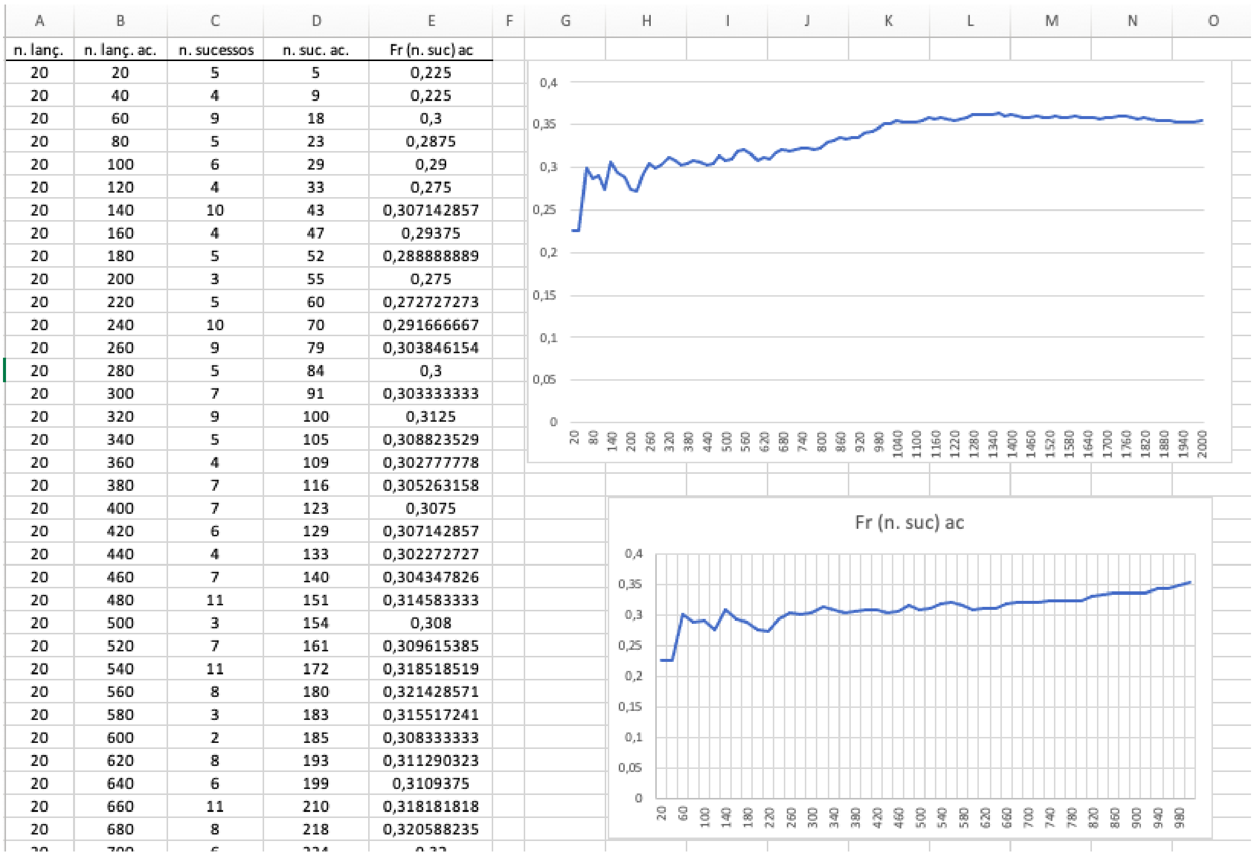
Fonte: Geogebra 2021

Nessa pergunta obtivemos respostas distintas, alguns alunos acharam que a posição final seria no rejunte, outros acharam que seria dentro de um quadrado. O pesquisador questionou o porquê de uma resposta ou outra, os alunos responderam que o tamanho da moeda era muito menor que o quadrado por isso iria cair dentro, por sua vez outros alunos responderam que a quantidade de rejunte era muito grande aumentando as chances da posição final ser sobre ele.

Fazendo uso da simulação os alunos realizaram 20 lançamentos e observaram as posições finais das moedas. A pergunta: Após 20 lançamentos você apostaria em qual situação? Foi respondida pela grande maioria dos alunos que a moeda cairia sobre o rejunte, somente um aluno respondeu que “na vida real cairia no quadrado”. Notamos que esse aluno (o mesmo que questionou a primeira simulação) tem uma percepção de que a simulação computacional não reflete uma simulação mecânica. Conversando com o aluno o pesquisador percebeu a dificuldade dele no entendimento do acaso, pois ele associa a probabilidade de acontecimentos às intervenções divinas.

Somando os lançamentos de todos os alunos foram 100 sequências de 20 lançamentos compilados em uma tabela do Excel.

Figura 9 - Gráfico de Convergência



n. lanç.	n. lanç. ac.	n. sucessos	n. suc. ac.	Fr (n. suc) ac
20	20	5	5	0,225
20	40	4	9	0,225
20	60	9	18	0,3
20	80	5	23	0,2875
20	100	6	29	0,29
20	120	4	33	0,275
20	140	10	43	0,307142857
20	160	4	47	0,29375
20	180	5	52	0,288888889
20	200	3	55	0,275
20	220	5	60	0,272727273
20	240	10	70	0,291666667
20	260	9	79	0,303846154
20	280	5	84	0,3
20	300	7	91	0,303333333
20	320	9	100	0,3125
20	340	5	105	0,308823529
20	360	4	109	0,302777778
20	380	7	116	0,305263158
20	400	7	123	0,3075
20	420	6	129	0,307142857
20	440	4	133	0,302272727
20	460	7	140	0,304347826
20	480	11	151	0,314583333
20	500	3	154	0,308
20	520	7	161	0,309615385
20	540	11	172	0,318518519
20	560	8	180	0,321428571
20	580	3	183	0,315517241
20	600	2	185	0,308333333
20	620	8	193	0,311290323
20	640	6	199	0,3109375
20	660	11	210	0,318181818
20	680	8	218	0,320588235

Fonte: Excel 2021

Após analisarem o gráfico que traz a convergência da probabilidade os alunos responderam a seguinte pergunta: Após o cálculo da frequência acumulada você apostaria em qual situação?

Todos os alunos responderam “no rejunte” demonstrando que a visualização do gráfico após grande número de lançamentos contribuiu para a aposta de que a probabilidade de cair sobre o rejunte seria maior.

Após isso os alunos ficaram discutindo sobre a simulação e indagaram se toda probabilidade poderia ser calculada através da frequência, isso foi um ponto importante pois vai ao encontro do que propomos na pesquisa, que a probabilidade frequentista pode e deve ser inserida logo no início da aprendizagem de probabilidade.

Depois da discussão o professor da classe demonstrou o cálculo da probabilidade através da geometria. Utilizando área da moeda e área do quadrado, demonstrou que a probabilidade observada na simulação era a mesma quando calculada através da área.

5. CONSIDERAÇÕES

Os conhecimentos probabilísticos têm grande relevância na formação dos cidadãos, contribuindo para tomadas de decisões nos âmbitos sócias políticos e econômicos. Por esse motivo o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade vem sendo discutidos na área da Educação Matemática e em seus documentos oficiais.

Quando analisamos os letramentos probabilísticos propostos por Gal (2005), observamos que alguns foram mobilizados na atividade, como: variação, cálculo de probabilidade, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza ao realizar os diversos lançamentos da moeda no ambiente computacional.

Na nossa sequência didática ficou evidente a importância da primeira simulação, pois através dela os alunos adquiriram confiança no arquivo computacional e entenderam o benefício desta simulação para observarmos uma grande quantidade de lançamentos.

Já na segunda parte da atividade os alunos conseguiram observar a convergência da probabilidade por meio da frequência acumulada, fazendo uso da leitura de um gráfico e da constatação da probabilidade frequentista. Os alunos observaram que algumas probabilidades podem ser mais facilmente calculadas através da visão frequentista, corroborando com o proposto por Coutinho (1994).

As percepções de aleatoriedade desejadas podem não ter sido observadas por todos os alunos, ainda que respaldadas pela BNCC, provavelmente por questões de imaturidade, devido a pouca idade, ou até mesmo por questões religiosas, como no caso do aluno que não considera o acaso como possível, associando todo evento à vontade divina.

As questões propostas na atividade, sendo respondidas simultaneamente à realização de lançamentos contribuíram para a percepção da influência da área em relação à probabilidade.

A interação dos alunos foi prejudicada pelo distanciamento social, pois alguns alunos ficaram mais distantes que outros incentivando, muitas vezes, a intervenção do professor que estava aplicando a atividade.

Ressaltamos o ponto positivo quanto à postura crítica dos alunos, que comparam suas respostas com os colegas e iniciaram uma discussão em torno das possíveis respostas. O debate é fundamental para formação dos cidadãos para sua postura crítica na sociedade.

REFERENCIAIS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba. PR: UFPR. 2007.

ALMOULOUD, S. A; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. Revista Eletrônica de Educação Matemática, *REVEMAT*, v. 3, n. 1, p. 62-77, jan. 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62. Acesso em: 28 out. 2020.

BELL HOUSE, D.R. (2000) "De Vetula: A Medieval Manuscript Containing Probability Calculations". Tradução Joseph Fourier. *International Statistical Review*, Ontario, v.68, n.2, p.123-136, maio., 2000.

BRASIL. M. E. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. 1998. Disponível em: http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 out 2020.

BRASIL. M. E. Base Nacional Comum Curricular. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensinofundamental-anos-finais-unidades-tematicas

BRU, B. Petite Histoire du Calcul des Probabilités. *Fragments d'Histoire des Mathématiques*, 41, Brochure,1981.

BRUN, J. (Org.). *Engenharia didáctica*: Didáctica das matemáticas. Tradução MJF Lisboa: Instituto Piaget, p.193-217. 1996.

CABERLIM, C. C. L. *Letramento Probabilístico no Ensino Médio*: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

CAMPOS, C. R. *A educação estatística*: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

COUTINHO, C. Q. S. *Introdução ao conceito de probabilidade pela visão frequentista*: estudo epistemológico. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, São Paulo 1994.

COUTINHO, C. Q. S. *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège*: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

GAL, I. Towards "Probability Literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. *In*: GRAHAM A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school*: Challenges for teaching and learning. USA: Springer Science and Business Media, 2005.

LOPES, W. S. *A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função*: uma proposta de ensino. 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

LOPES, C. E. A análise exploratória de dados na infância: uma conexão entre a educação estatística e a literatura infantil. *In*: COUTINHO, C. Q. S. *Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica*. Campinas, 2013

LOPES, C. E. *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental*: uma análise curricular. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas,1998.

SILVA, D. S. C. *Letramento estocástico*: uma possível articulação entre os letramentos estatístico e probabilístico. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

Anexo – Atividade 1

Primeira simulação: https://www.geogebra.org/m/gg3bhwnj

1. Com a área totalmente verde você apostaria que a moeda vai cair dentro do quadrado ou sobre um de seus lados?

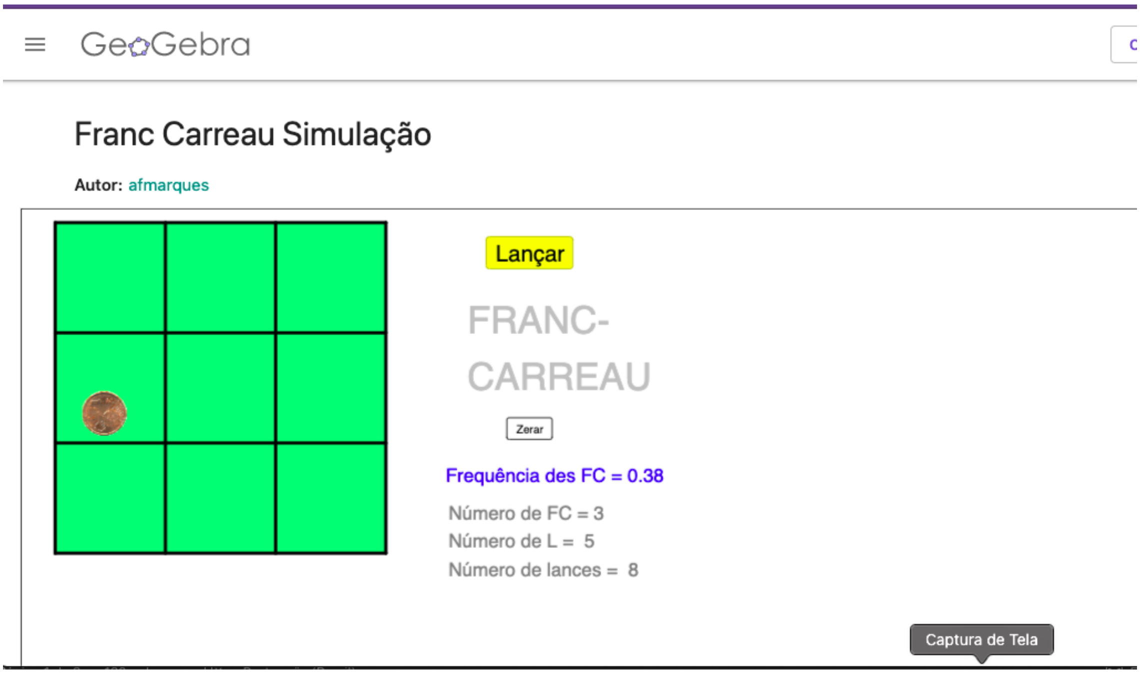
2. Se diminuir o tamanho do quadrado a chance de a moeda cair dentro muda?

3. Deslizando a barra lateral você acredita que a moeda vai cair mais na linha ou fora?

4. Existe uma forma na qual a moeda sempre vai cair na linha ou fora? Se sim como?

Anexo – Atividade 1

Segunda simulação: https://www.geogebra.org/m/vnc9xhs6



1. Agora em um piso quadriculado você apostaria que a moeda vai cair em algum rejunte ou cairá totalmente dentro de um quadrado?

2. Após 20 lançamentos você apostaria em qual situação?

3. Após o cálculo da frequência acumulada você apostaria em qual situação?