

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Julio Silva de Pontes

Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo de Geometria Espacial Elementar:

Uma engenharia didática com professores que ensinam matemática

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2021



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Julio Silva de Pontes

Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo de Geometria Espacial Elementar:

Uma engenharia didática com professores que ensinam matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Celso Ribeiro Campos.

SÃO PAULO

2021

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total e parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____

Data: _____

e-mail _____

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

A757 Pontes, Julio Silva de
Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo de Geometria Espacial Elementar: Uma engenharia didática com os professores que ensinam matemática. / Julio Silva de Pontes. -- São Paulo: [s.n.], 2021. 308p. il. ; 21 cm.

Orientador: Celso Ribeiro Campos.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, (Mestrado Profissional) -- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Geometria Espacial elemental. 2. Conhecimento mobilizado pelo professor. I. Campos, Celso Ribeiro. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

JULIO SILVA DE PONTES

Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo de Geometria Espacial Elementar:

Uma engenharia didática com os professores que ensinam matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Celso Ribeiro Campos.

Aprovada em: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Dr. Celso Ribeiro Campos – PUC-SP

Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar – PUC-SP

Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho – PUC-SP

Dra. Auriluci de Carvalho Figueiredo – UNIMES

Dra. Edda Curi - UNICSUL

SÃO PAULO

2021

DEDICATÓRIA

A todos que acreditam que a educação é um fator importante para tornar o mundo um lugar melhor. Dedico este trabalho e a conclusão desta importante etapa da minha vida:

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim;

Aos meus alunos e colegas que colaboraram e deram forças nos momentos mais difíceis;

E a Deus por me dar sabedoria e força para chegar até aqui.

AGRADECIMENTO (CONDIÇÃO DE BOLSISTA)

Fica aqui meus reais e sinceros agradecimentos,

A CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro, sem isto, não seria possível a conclusão deste trabalho.

Número do Processo:88887.163130/2018-00

Programa CAPES:PROSUC (Programa Suporte à Pós-Graduação IES Comunitárias)

Edital: Edital Regulamento PROSUC (unificado)

Nome do Beneficiário: JULIO SILVA DE PONTES

Documento do Beneficiário:100.539.667-16

Controle de Benefício: Cota

Tipo Vínculo PPG/Área: Discente PPG (Plataforma Sucupira)

Modalidade da Bolsa: Doutorado

Programa PPG Beneficiário:33005010005P4 - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Vigência do Benefício: 01/01/2018 a 30/06/2022 (Prorrogação com ônus)

Prazo do Benefício:54 mes(es)

AGRADECIMENTOS

Fica aqui meus reais e sinceros agradecimentos,

Ao meu orientador Prof. Dr. Celso Ribeiro Campos por apoiar minha ideia e muitas das vezes a minha loucura, e me colocar a vontade sempre disponibilizando apoio, dedicação, disponibilidade e empenho mostrando as possibilidades para poder caminhar em lugares mais prósperos.

Aos professores Dr. Saddo Ag Almouloud e Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini por sempre ter sido atencioso comigo tirando todas as dúvidas durante o decorrer do curso.

Aos professores da banca pelas suas contribuições, observações e questionamentos significativos: a Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar e Profa. Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho pelo carinho, atenção e pelos empréstimos de materiais que foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho, pela Profa. Dra. Edda Curi e Profa. Dra. Auriluci de Carvalho Figueiredo, por ter cedido seu tempo e conhecimento para avaliação desta tese.

A Secretaria de Educação Municipal de Angra dos Reis pela autorização da realização da pesquisa com os docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede.

À Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, em especial ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática pela magnífica formação e competência de me tornar um profissional mais competente e um pesquisador mais acadêmico.

EPÍGRAFE

Quem pode, faz.

Quem não pode, ensina.

[...] é um insulto calamitoso à nossa profissão, ainda que prontamente repetido até pelos professores. Mais preocupante, é sua filosofia que muitas das vezes parece estar subjacente às políticas relativas à ocupação e às atividades de ensino.

(SHULMAN, 1986, p.4, tradução nossa)

RESUMO

Este trabalho discute, descreve e sistematiza as categorias do conhecimento necessárias para o ensino e a aprendizagem da geometria espacial elementar, em uma formação com professores que ensinam matemática no município de Angra dos Reis e com as discussões levantadas no decorrer das atividades realizadas. O objetivo geral da pesquisa é identificar os tipos de conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores dos anos iniciais do ensino fundamental ao trabalhar com figuras espaciais. No sentido de reconhecer quais são esses possíveis conhecimentos, realizamos a análise dos documentos políticos, do currículo de matemática dos professores, do conhecimento matemático dos professores, do currículo de matemática dos alunos, do conhecimento matemático dos alunos e da prática da matemática escolar. Além disso, usamos o estudo de caso para retratar como os professores mobilizam esses conhecimentos, e sendo assim, essas metodologias serviram como base para a investigação da primeira fase da engenharia didática, sendo apoiada nas abordagens de processos de estudo do conhecimento matemático necessário para o ensino. Assim sendo, buscamos organizar os dados coletados por meio do tratamento dos resultados por categorias comuns, além de, no desenvolvimento das atividades propostas na formação, apoiarmos-nos nas fases do modelo de pensamento geométrico, na modelagem do espaço físico da geometria ensinada, nas ideias referentes à contribuição de imagens mentais ao pensamento durante a manipulação de objetos físicos reais ou virtuais, e da utilização do uso de figuras como uma representação de uma situação geométrica. Os resultados evidenciam a importância da resolução de problemas, da etnomatemática e da história da matemática como categorias importantes na mobilização do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de geometria espacial elementar, evidenciando uma carência desses conhecimentos, do uso de tecnologias digitais, da necessidade de fomentar formações nos anos iniciais do ensino fundamental para esses fins, e da criação de tarefas em português de geometria espacial elementar a serem disponibilizadas na comunidade do GeoGebra.

Palavras chaves: Geometria. Figuras Espaciais. Conhecimento. Ensino Fundamental. Anos Iniciais.

ABSTRACT

This dissertation aims to describe and systematize the categories of knowledge needed for the teaching and learning of elementary space geometry during workshops with elementary school educators who teach mathematics in the city of Angra dos Reis. The general objective of this research project is to identify the types of geometric knowledge considered by teachers who work with children in the early years of elementary school when working with spatial figures. To recognize what those possible strategies might be, this paper has performed the analysis of policy documents, mathematics elementary school curriculum, the mathematical knowledge of both teachers and students, and the practice of school mathematics in the elementary school context. The research also contemplates case studies to portray the ways teachers assemble this knowledge. These methodologies served as the basis for the investigation on the first phase of didactic engineering, supported by the approaches on study processes of mathematical knowledge necessary for teaching. Therefore, we seek to organize the collected data through the use of results by regular categories, as well as the development of the activities proposed during the workshops. The study takes in consideration the different phases of geometric thought model, the ideas regarding the contribution of imagery to thought during the manipulation of real or virtual physical objects, and the use of the use of figures as a representation of a geometrical situation. The results prove the importance of problem solving, ethnomathematics and the history of mathematics as important categories in the mobilization of technological and pedagogical knowledge concerning elementary spatial geometry content. It was also observed some shortage of this knowledge, the need for digital technologies, the necessity to promote workshops in the early years of elementary school for these purposes, and the creation of elementary spatial geometry tasks in Portuguese to be made available for the Geogebra community.

Keywords: Geometry. Space Figures. Knowledge. Elementary School. Early Years.

LISTAS DE FIGURAS

FIGURA 1 - CÓDIGO ALFANUMÉRICO DA HABILIDADE DEFINIDA DE PARA CADA ANO ESCOLAR.....	48
FIGURA 2 - CLASSIFICAÇÃO DAS UNIDADES FIGURATIVAS ELEMENTARES	63
FIGURA 3 - INTERPRETAÇÃO DE PARZYSZ PARA OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE.....	74
FIGURA 4 - DOMÍNIOS DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO	79
FIGURA 5 - CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO (TPACK).....	84
FIGURA 6 - DESCRIÇÃO VISUAL DOS NÍVEIS DE INTEGRAÇÃO DA TECNOLOGIA	87
FIGURA 7 - TRIANGULAÇÃO METODOLÓGICA USADA NA PESQUISA	89
FIGURA 8 - UMA ESTRUTURA PARA ESTUDAR O CONHECIMENTO MATEMÁTICO NECESSÁRIO AO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR NECESSÁRIO AO ENSINO	97
FIGURA 9 - CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO EM MATEMÁTICA (TPACK)	101
FIGURA 10 - RESUMO DAS RECOMENDAÇÕES REGISTRADAS NOS DOCUMENTOS OFICIAIS EM RELAÇÃO AO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE FIGURAS ESPACIAIS NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	108
FIGURA 11 - COMO AS FIGURAS ESPACIAIS SÃO EXPOSTAS NOS CURRÍCULOS DOS PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO EF.....	110
FIGURA 12 - OBJETOS USADOS NA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.....	115
FIGURA 13 - RASCUNHO DE UMA PROFESSORA.....	120
FIGURA 14 - O CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA ELEMENTAR DOS PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO EF.....	124
FIGURA 15 - CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA ELEMENTAR DESENVOLVIDOS NO CURRÍCULO DOS ALUNOS.....	128
FIGURA 16 - GRÁFICO REFERENTE À PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DO 5º ANO DO EF DE ANGRA DOS REIS EM 2017.....	133
FIGURA 17 - GRÁFICO DA PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DO 5º ANO DO EF DE ANGRA DOS REIS EM 2013 E 2015.....	134
FIGURA 18 - GRÁFICO DA PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS ALUNOS DO 3º ANO DO EF EM 2016.....	136
FIGURA 19 - GRÁFICO DA PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS ALUNOS DO 3º ANO DO EF DE ANGRA DOS REIS ENTRE 2013 E 2016.....	137
FIGURA 20 - ASPECTOS DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE FIGURAS ESPACIAIS QUE DEVEM SER DESENVOLVIDOS NOS ALUNOS DOS ANOS INICIAIS DO EF SEGUNDO O SAEB	138
FIGURA 21 - MÉDIA SOBRE O CONHECIMENTO DO ENSINO À DISTÂNCIA DAS PROFESSORAS	176
FIGURA 22 - RESPOSTAS DAS DOCENTES SOBRE AS DIFICULDADES ENFRENTADAS NAS AULAS À DISTÂNCIA	177

FIGURA 23 - NUVEM DE PALAVRAS SOBRE OS CONTEÚDOS DE GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR MENCIONADAS PELAS PROFESSORAS NA LIVE1	183
FIGURA 24 - OBJETOS DO DIA A DIA EM FORMATO DE CONE.....	185
FIGURA 25 - NUVEM DE PALAVRAS SOBRE O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO MATEMÁTICO EXPOSTO POR UMA DOCENTE	188
FIGURA 26 - MÉDIA SOBRE O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO MATEMÁTICO MOBILIZADO SEGUNDO AS DOCENTES	189
FIGURA 27 - NUVEM DE PALAVRAS SOBRE OS RECURSOS MOBILIZADO PELAS DOCENTE NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL.....	191
FIGURA 28 - FREQUÊNCIA DE CERTOS RECURSOS SEREM POUCO OU MUITO UTILIZADOS PELOS PROFESSORES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FIGURAS ESPACIAIS	194
FIGURA 29 - INDÍCIOS DE COMO O CONHECIMENTO DE CONTEÚDO E ENSINO É MOBILIZADO PELAS DOCENTES	198
FIGURA 30 - PRINT DA TELA DO FORMADOR DA VISUALIZAÇÃO DA 1ª ATIVIDADE DE S6 EM 17/12/2020 x 25/12/2020.....	199
FIGURA 31 - PIRÂMIDE CONSTRUÍDA PELA 1ª DOCENTE X PIRÂMIDE CONSTRUÍDA PELA 2ª DOCENTE.....	215
FIGURA 32 - INTRODUÇÃO DA ATIVIDADE CRIADA PELA DOCENTE	219
FIGURA 33 - 1ª TAREFA DA ATIVIDADE CRIADA PELA DOCENTE	220
FIGURA 34 - 2ª TAREFA DA ATIVIDADE CRIADA PELA DOCENTE	221
FIGURA 35 - 3ª TAREFA DA ATIVIDADE CRIADA PELA DOCENTE	222
FIGURA 36 - 4ª TAREFA DA ATIVIDADE CRIADA PELA DOCENTE	223
FIGURA 37 - 5ª TAREFA DA ATIVIDADE CRIADA PELA DOCENTE	224
FIGURA 38 - 6ª TAREFA DA ATIVIDADE CRIADA PELA DOCENTE	225
FIGURA 39 - CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR	226

LISTAS DE QUADROS

QUADRO 1 - OBJETOS DE CONHECIMENTO E HABILIDADES DE MATEMÁTICA SEGUNDO A BNCC PARA OS TRÊS PRIMEIROS ANOS INICIAIS DO EF	50
QUADRO 2 - PROCESSOS COGNITIVOS DE APREENSÕES DE UMA FIGURA	62
QUADRO 3 - DESCRIÇÃO DOS NÍVEIS DE VAN HIELE	69
QUADRO 4 - CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE PARZYSZ	74
QUADRO 5 - SEIS ABORDAGENS PARA O ESTUDO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO NECESSÁRIO AO ENSINO	95
QUADRO 6 - CONHECIMENTOS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS QUE O PROFESSOR PRECISA DESENVOLVER SEGUNDO OS DOCUMENTOS OFICIAIS	106
QUADRO 7 - CONHECIMENTOS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS QUE O PROFESSOR PRECISA DESENVOLVER SEGUNDO AS EMENTAS DO CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA	109
QUADRO 8 - RELAÇÃO DA LETRA COM O OBJETO USADO NA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	115
QUADRO 9 - RESPOSTA DE DOIS DOCENTES QUE SE ENCONTRAM NO NÍVEL PRÉ-COGNITVO	116
QUADRO 10 - RECONHECIMENTO DA FIGURA ESPACIAL EM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NO PLANO X NÚMERO DE PROFESSORES QUE DISCERNIU A FIGURA	117
QUADRO 11 - FORMA DE DETERMINAR A FIGURA ESPACIAL COM DESENHO X NÚMERO DE PROFESSORES QUE USAM A REPRESENTAÇÃO	118
QUADRO 12 - CATEGORIAS DO NÍVEL DO DESENHO DAS FIGURAS ESPACIAIS SEGUNDO POTARI E SPILIOTOPOULOU (1992)	119
QUADRO 13 - UNIDADES DE REGISTROS DAS ENTREVISTAS	121
QUADRO 14 - LIVROS ADOTADOS NAS ESCOLAS MUNICIPAIS DE ANGRA DOS REIS NO PNLD 2019	125
QUADRO 15 - INDICAÇÕES DAS HABILIDADES DE GEOMETRIA ESPACIAL NOS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS DO PNLD 2019	126
QUADRO 16 - CONHECIMENTOS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS QUE O PROFESSOR PRECISA DESENVOLVER NOS ALUNOS SEGUNDO OS LIVROS ANALISADOS NO PNLD 2019	127
QUADRO 17 - MATRIZ DE REFERÊNCIA DO SAEB ANOS INICIAIS DO EF EM RELAÇÃO À GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR	130
QUADRO 18 - ESCALA DE PROFICIÊNCIA DE MATEMÁTICA SAEB DO 5º ANO DO EF EM GEOMETRIA ESPACIAL	131
QUADRO 19 - PROFICIÊNCIA EM MATEMÁTICA DO 5º ANO DO EF DO SAEB 2017	132
QUADRO 20 - PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DO 5º ANO DO EF NO SAEB 2017	132
QUADRO 21 - PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DO 5º ANO DO EF EM ANGRA DOS REIS DE 2013 E 2015	134
QUADRO 22 - ESCALA DE PROFICIÊNCIA DE MATEMÁTICA DO 3º ANO DO EF EM GEOMETRIA ESPACIAL	135

QUADRO 23 - PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DO 3º ANO DO EF NO SAEB/ANA 2016.....	135
QUADRO 24 - PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS ALUNOS DO 3º ANO DO EF DE ANGRA DOS REIS	136
QUADRO 25 - RELAÇÃO DAS ESCOLAS DE ANGRA DOS REIS CONVIDADAS PARA A FORMAÇÃO REFERENTE AO ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	140
QUADRO 26 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 1: CONHECIMENTO DO CONTEXTO	146
QUADRO 27 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 1: CONHECIMENTO ESPECÍFICO DO CONTEÚDO	149
QUADRO 28 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 2: CONHECIMENTO PEDAGÓGICO MATEMÁTICO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR.....	153
QUADRO 29 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 2: CONHECIMENTO TECNOLÓGICO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR.....	156
QUADRO 30 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 3: CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR.....	158
QUADRO 31 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 3: CONHECIMENTO TECNOLÓGICO DO CONTEÚDO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR.....	161
QUADRO 32 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 3: CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DA TECNOLOGIA DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR.....	163
QUADRO 33 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA LIVE 4: CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR	166
QUADRO 34 - AVALIAÇÃO DISPONÍVEL NA PLATAFORMA DA GOOGLE CLASSROOM	170
QUADRO 35 - MOBILIZAÇÃO DO CONHECIMENTO DO CONTEXTO NA PRÁTICA DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	181
QUADRO 36 - MOBILIZAÇÃO NA PRÁTICA DO CONHECIMENTO ESPECÍFICO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.	187
QUADRO 37 - MOBILIZAÇÃO NA PRÁTICA DO CONHECIMENTO PEDAGÓGICO MATEMÁTICO DE GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	190
QUADRO 38 - MOBILIZAÇÃO NA PRÁTICA DO CONHECIMENTO TECNOLÓGICO DE GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.	195
QUADRO 39 - MOBILIZAÇÃO NA PRÁTICA DO CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	198
QUADRO 40 - CONSTRUÇÃO DOS PRISMAS REALIZADOS PELAS DOCENTES NA 1ª ATIVIDADE DE S6.....	200
QUADRO 41 - RESPOSTAS PELAS DOCENTES EM S6E1	201
QUADRO 42 - MOBILIZAÇÃO NA PRÁTICA DO CONHECIMENTO TECNOLÓGICO DO CONTEÚDO DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	202
QUADRO 43 - RESPOSTAS PELAS DOCENTES EM S7E3	204
QUADRO 44 - RESPOSTAS PELAS DOCENTES EM S7E4	206

QUADRO 45 - MOBILIZAÇÃO NA PRÁTICA DO CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DA TECNOLOGIA DE GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	209
QUADRO 46 - RESPOSTAS PELAS DOCENTES NA FINALIZAÇÃO DE S8E8.....	215
QUADRO 47 - MOBILIZAÇÃO NA PRÁTICA DO CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO EF.....	217
QUADRO 48 - AVALIAÇÃO DISPONÍVEL POR UMA DOCENTE NA PLATAFORMA DA GOOGLE CLASSROOM.....	218

LISTA DE TABELA

TABELA 1: ORGANIZAÇÃO DOS TRABALHOS SOBRE GEOMETRIA DOS ANOS INICIAIS POR CATEGORIA/ASSUNTO30

LISTA DE ABREVIATURAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal para o Nível Superior
CK	Conhecimento do Conteúdo
CNE	Conselho Nacional de Educação
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EaD	Educação a Distância
EF	Ensino Fundamental
GLP	Gratificação por Lotação Prioritária – horas extra
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação do Brasil
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PCK	Conhecimento Pedagógico de Conteúdo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEF	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental
PISA	Programme for International Student Assessment
PK	Conhecimento Pedagógico
PNAIC	Plano Nacional de Alfabetização na Idade Certa
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPC	Proposta Pedagógica Curricular
Profmat	Mestrado profissional em Matemática em rede nacional
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SEEDUC	Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TCK	Conhecimento Tecnológico do Conteúdo
TK	Conhecimento Tecnológico
TPACK	Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo
TPK	Conhecimento Pedagógico da Tecnologia
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	21
1.1. TRAJETÓRIA PROFISSIONAL E ACADÊMICA	21
1.2. A ESCOLHA DO TEMA	24
1.3. A ATUAL LEGISLAÇÃO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES NO BRASIL	30
1.4. A PROPOSTA DA FORMAÇÃO CONTINUADA EM GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR.....	33
1.5. PROBLEMA DE PESQUISA	34
1.6. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	35
1.7. OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	37
1.8. DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS	38
GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	40
2.1. MOTIVOS DE SE ESTUDAR GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS DO EF	41
2.2. A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA NO BRASIL	42
2.3. A BNCC.....	47
2.3.1. A GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS DO EF NA BNCC.....	49
2.4. O ESTUDO DE POSIÇÕES E DESLOCAMENTO NO ESPAÇO	52
2.5. O ESTUDO DAS FORMAS E RELAÇÕES ENTRE AS FIGURAS GEOMÉTRICAS	54
2.6. O ESTUDO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	55
2.7. DESENVOLVIMENTO DA CONCEPÇÃO ESPACIAL.....	56
QUADRO TEÓRICO	58
3.1. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICA	58
3.1.1. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICA	61
3.1.1.1. APREENSÕES DE UMA FIGURA	62
3.2. AS IDEIAS DE GUTIÉRREZ.....	64
3.3. O MODELO DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE	67
3.4. O MODELO DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE PARZYYS	73
3.5. AS CATEGORIAS DO CONHECIMENTO DO PROFESSOR	76
3.5.1. OS TIPOS DE CONHECIMENTO NECESSÁRIOS AO ENSINO	77
3.6. CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS MOBILIZADOS PELOS PROFESSORES	80
3.7. CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO MATEMÁTICO MOBILIZADOS PELOS PROFESSORES.....	83
QUADRO METODOLÓGICO	89
4.1 O ESTUDO DE CASO.....	90
4.1.1 O ESTUDO DE CASO PILOTO	92
4.2 ENGENHARIA DIDÁTICA	93

4.3 A ANÁLISE DOCUMENTAL	94
4.4 ANÁLISE DE CONTEÚDO	99
ANÁLISES PRELIMINARES	101
5.1. ANÁLISE DOS DOCUMENTOS POLÍTICOS	102
5.2. ANÁLISE DO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DOS PROFESSORES	108
5.3. ANÁLISE DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO DOS PROFESSORES	111
5.3.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO	112
5.3.2 ANÁLISE DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DOCENTE	114
5.3.3 ANÁLISE DA ENTREVISTA	120
5.3.4 TRIANGULAÇÃO DAS FONTES USADAS NO ESTUDO DE CASO	123
5.4. ANÁLISE DO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DOS ALUNOS	125
5.5. ANÁLISE DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO DOS ALUNOS	129
5.6 ANÁLISE DA PRÁTICA DA MATEMÁTICA ESCOLAR	138
CONCEPÇÃO E A ANÁLISE A PRIORI.....	140
6.1. LIVE 1 – NÍVEL 1: RECONHECER O CONHECIMENTO DO CONTEXTO E O CONHECIMENTO ESPECÍFICO DO CONTEÚDO.....	143
6.2. LIVE 2 – NÍVEL 2: ACEITAR O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO MATEMÁTICO E O CONHECIMENTO TECNOLÓGICO.....	151
6.3. LIVE 3 – NÍVEL 3: ADAPTAR O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO, O CONHECIMENTO TECNOLÓGICO DO CONTEÚDO E O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DA TECNOLOGIA.....	157
6.4. LIVE 4 – NÍVEL 4: EXPLORAR O CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO	164
6.5. AVALIAÇÃO – NÍVEL 5: AVANÇAR SOBRE O CONHECIMENTO TECNOLÓGICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO.....	170
EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO.....	171
7.1. ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> DA LIVE 1.....	175
7.2. ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> DA LIVE 2.....	187
7.3. ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> DA LIVE 3.....	196
7.4. ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i> DA LIVE 4.....	210
7.5. AVALIAÇÃO	218
7.6. SÍNTESE DA INVESTIGAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA E VALIDAÇÃO	225
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	236
REFERÊNCIAS	247
APÊNDICES	258
APÊNDICE 1: QUESTIONÁRIO.....	259
APÊNDICE 2: AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DOCENTE	261
APÊNDICE 3: ENTREVISTA DOCENTE	265
APÊNDICE 4: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES.....	266

APÊNDICE 5: COCORRÊNCIA DAS UNIDADES DE REGISTROS NO TRATAMENTO DOS RESULTADOS ORGANIZADO POR CATEGORIAS COMUNS.....	268
APÊNDICE 6: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	272
APÊNDICE 7: RELATÓRIO DAS ESCOLAS MUNICIPAIS DE ANGRA DOS REIS X ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD 2019)	273
APÊNDICE 8: FOLHETO INFORMATIVO SOBRE A PROPOSTA DE FORMAÇÃO.....	275
APÊNDICE 9: DOCUMENTO COM O PASSO A PASSO DE COMO CRIAR UMA CONTA NA COMUNIDADE DO GEOGEBRA	277
APÊNDICE 10: DOCUMENTO COM O PASSO A PASSO EM COMO EXPLORAR E ENCAMINHAR AOS ALUNOS AS ATIVIDADES ESCOLHIDAS NA COMUNIDADE DO GEOGEBRA.....	280
APÊNDICE 11: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO VIRTUAL.....	281
APÊNDICE 12: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 1	284
APÊNDICE 13: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 2	286
APÊNDICE 14: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 3	288
APÊNDICE 15: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 4	290
APÊNDICE 16: TAREFA POSTADA POR UMA DOCENTE NA PLATAFORMA ESCOLAR USADA PELA PREFEITURA DE ANGRA DOS REIS	292
ANEXOS.....	296
ANEXO 1: EMENTA DO CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA DA MODALIDADE PRESENCIAL DA UFF EM 2020.....	297
ANEXO 2: EMENTA DO CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA DA MODALIDADE A DISTÂNCIA DO CONSÓRCIO CEDERJ EM 2020	298
ANEXO 3: FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO EF DE ANGRA DOS REIS INFORMADO PELA GERÊNCIA ADMINISTRATIVA DA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO EM 31 DE MARÇO DE 2020	299
ANEXO 4: MATRIZ DE REFERÊNCIA EM GEOMETRIA DA ANRESC (PROVA BRASIL) /ANEB	300
ANEXO 5: MATRIZ DE REFERÊNCIA EM GEOMETRIA DA PROVA ANA.....	301
ANEXO 6: ESCALA DE PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA UTILIZADA NAS AVALIAÇÕES DO SAEB NO 5º ANO DO EF À PARTIR DE 2017.....	302
ANEXO 7: ESCALA DE PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA UTILIZADA NAS AVALIAÇÕES DO SAEB NO 5º ANO DO EF ANTES DE 2017.....	305
ANEXO 8: ESCALA DE PROFICIÊNCIA EM MATEMÁTICA UTILIZADA NAS AVALIAÇÕES DO SAEB/ANA	307

INTRODUÇÃO

A nossa pesquisa investiga os *conhecimentos geométricos mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental em uma proposta de formação continuada com figuras espaciais*, na qual procurará analisar como seria o trabalho dos professores ao lecionarem figuras espaciais em turmas de terceiro ano.

Para compreender a escolha desse tema, vamos discorrer sobre como alguns dos questionamentos da pesquisa surgiram, apresentando-os por meio da minha trajetória profissional.

1.1. Trajetória profissional e acadêmica

Inicialmente, minha trajetória como discente, sempre tive muito interesse e curiosidade pelo estudo da Geometria, objeto que foi pouco visto em meu percurso no ensino fundamental e médio, geralmente vinculada à aplicação de fórmulas e cálculos. Isso me fez levantar o meu primeiro questionamento: por que a Geometria era pouco explorada nas escolas?

Diante disso, durante minha formação no curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade do Grande Rio, realizei alguns projetos voltados ao ensino da Geometria por meio de estágios supervisionados. Um destes, chamado *projeto UNICOM*, tinha a finalidade de que os universitários realizassem trabalhos comunitários, e eu desenvolvi, juntamente com meu grupo, um projeto intitulado *A Matemática com Origami*, que também foi o tema do meu trabalho de conclusão de curso (TCC). Ele tinha o intuito de explorar a Matemática, especificamente conceitos geométricos, usando o origami. Essa experiência, juntamente com a minha pesquisa do TCC, permitiu que eu observasse que boa parte dos alunos do Ensino Fundamental e Médio tinha dúvidas sobre conceitos básicos da Geometria, conduzindo-me a questionar sobre: como e o quê dessa unidade temática era ensinada em toda educação básica?

Depois de formado em Licenciatura em Matemática em 2007, fiz dois concursos para professor de Matemática, respectivamente para o Estado e Município do Rio de Janeiro. Pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC) fui designado para o cargo em março de 2008, lecionando para três turmas dos anos finais do EF, um sexto ano e dois oitavos em uma escola no município de Duque de Caxias, onde eu residia. Nesse ano também, lecionei para três turmas no mesmo município pela SEEDUC como GPL (Gratificação por Lotação Prioritária – horas extras), atuando em dois sétimos anos e um sexto. Nessas turmas, pude

observar a carência em Matemática, em particular em Geometria, dos alunos que cursavam o sexto ano escolar, e utilizei minha experiência com origami para tentar suprir a deficiência nessa unidade temática, porém, percebi que não era suficiente e precisava buscar mais estudos e pesquisas. Foi então que surgiu outro questionamento: como suprir essa deficiência de conceitos básicos da Geometria nos alunos que chegam no sexto ano do EF?

Para tentar responder esse último questionamento, em 2009 comecei a fazer a especialização na formação do professor de Matemática pela Universidade Federal Fluminense, aprofundando minha pesquisa do TCC, apresentando o trabalho final em 2011, com o tema *O uso do Origami como recurso para desenvolver a visualização geométrica*, no qual eu propunha atividades a serem aplicadas em um sexto ano de uma escola do município do Rio de Janeiro.

Adicionalmente, em 2009, ingressei como professor no município do Rio de Janeiro, assumindo quatro sextos anos em uma escola do complexo do Alemão, e outros três sextos anos como hora extra no complexo da Maré¹. Eram nítidas, as dificuldades que os alunos apresentavam e a carência de conteúdos matemáticos em geral, nessas turmas, tendo muitos alunos semialfabetizados ou analfabetos funcionais. Informe-me em buscar como alfabetizar matematicamente essas crianças, e percebi que a minha formação em Geometria, concomitantemente com a minha pesquisa na área, permitia a exploração dessa unidade temática com mais facilidade para com esses alunos. Esse conhecimento mobilizado por mim é o que Shulman (1986) caracteriza como conhecimento pedagógico de conteúdo. Eu utilizava como ferramenta principal o origami, mas tinha colegas da área que utilizavam outras ferramentas, como softwares, e obtinham também uma melhora de aprendizagem com seus alunos. Surgiu assim outro questionamento: quais são os conhecimentos necessários para que o professor possa dar uma boa aula de Geometria e melhorar a aprendizagem dos seus alunos?

Nos anos de 2010, 2011, 2012, ainda como professor do município do Rio de Janeiro, lecionei para outros sextos anos nos bairros de Pilares, Mangueiras e Vigário Geral, percebendo uma pequena melhora nos conhecimentos matemáticos dos alunos que chegavam nessa fase escolar, porém em Geometria, esse crescimento foi pouco. Por meio de conversas informais com alguns professores dos anos iniciais do EF desse município, me relataram que não lecionavam a Geometria, pois deixavam para os professores de artes explorarem os sólidos geométricos ou para os professores de Matemática dos anos finais do EF, ou quando lecionam focavam apenas no cálculo de área e perímetro. Esse motivo me levou a questionar: por que há pouca abordagem da Geometria nos anos iniciais do EF?

¹ Tanto o Complexo do Alemão como da Maré são comunidades carentes fortemente acometidas por problemas de violência.

Em 2012, iniciei o mestrado profissional em Matemática em rede nacional (Profmat) pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, no qual apresentei em 2014 a Dissertação *Avaliação de diferentes metodologias aplicadas ao ensino da geometria*. Nele, empreguei as metodologias em duas turmas de nono anos do EF, na qual fiz a comparação do estudo do teorema de Pitágoras usando a metodologia de van Hiele em uma turma e com a de Resolução de problemas em outra. O mestrado permitiu que eu me aprofundasse mais no campo da Geometria e conhecer novas metodologias de ensino. Permitiu um aperfeiçoamento, segundo Shulman (1986), das categorias do conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo.

Também em 2012, assumi o cargo de professor de Matemática no município de Angra dos Reis, lecionando para quatro turmas de sextos anos, e desde então, até o momento, constatei à carência matemática e em Geometria que os alunos apresentam, em muitos casos, nem reconhecendo os nomes das principais figuras geométricas. Foi a partir de então que comecei a questionar o ensino da Geometria nos anos iniciais do EF: Como é abordado? O que é ensinado? Qual a metodologia utilizada?

Em 2016, assumi o cargo de coordenador de Matemática do município de Angra dos Reis, e levei minha segunda matrícula para esse município, dedicando-me exclusivamente a minha carreira profissional para essa rede. Nesse cargo pude conhecer um pouco mais sobre o cotidiano dos professores que atuam nos anos iniciais do EF e procurei buscar algumas das respostas sobre meus questionamentos. Percebi, por meio de conversas informais nas coordenações com esses professores, que a escassez no ensino de Geometria não somente estava nos alunos, mas também nos professores, um dos motivos de às vezes optarem em não lecionar essa unidade temática. Além disso, a cada visita que eu fazia nas escolas da rede, sempre havia questionamentos levantados por alguns desses professores que tentavam colher informações sobre a forma de como lecionavam Matemática para seus alunos.

Ainda em 2016, fui designado para lecionar na formação do PNAIC (Programa Nacional pela Alfabetização na Idade Certa) na rede em cinco encontros. Percebi que na parte da formação do PNAIC voltada à Geometria, vários desses professores alegaram nunca ter estudado essa unidade temática, apresentando dúvidas sobre a metodologia e materiais que utilizavam, deixando críticas sobre a formação em pedagogia que tiveram e alegando dificuldades com a Matemática.

Depois de mais de dez anos graduado, percebi que a Geometria continuava a ser deixada em segundo plano, ou explorada de forma equivocada. Essa constatação informal se deu por

conta da minha formação, pesquisa em Geometria, observação da prática de meus colegas dos anos iniciais e finais do EF, e os problemas de aprendizagem dos meus alunos do sexto ano.

Com isso, em 2017, iniciei o doutorado em educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, com o tema focando a formação em Geometria dos professores que atuam nos anos iniciais do EF, pois além de me sentir em dívida com os anseios deixados por esses docentes quando eu era coordenador de Matemática do município de Angra dos Reis, também acreditei que uma mudança na postura do professor e conseqüentemente na melhora em sua formação nessa unidade temática da aprendizagem, permitiriam que fosse mais eficiente a construção do conhecimento em Geometria nos alunos.

1.2.A escolha do tema

Vamos começar a justificar a escolha do tema respondendo alguns dos questionamentos levantados em minha trajetória profissional e acadêmica.

Uma das práticas adotadas por professores em sala de aula é recorrer aos livros didáticos, e repetir a forma tradicional de ensino a qual foram submetidos em sua vida escolar. Isso vai contra o que acredita Dina van Hiele ao afirmar que “o método instrucional do professor não deve ser uma imitação de métodos de ensino de ex-professores” (VAN HIELE, 1957b, p. 178, tradução nossa). Além disso, o professor acaba estabelecendo rótulos aos alunos de serem ou não bons para a Matemática. “Quem não aprendia, dava com toda probabilidade, uma simples ideia de si mesmo de não possuir a famosa ‘predisposição natural’ para a disciplina [...]” (D’AMORE, 2007, p. 28).

O que chamo a atenção aqui é que alguns desses alunos rotulados por não serem bons em Matemática, são hoje professores, os quais têm de encarar essa disciplina, buscando meios e métodos de ensinar essa unidade temática. Porém,

Pensar sobre as práticas docentes, no entanto, nos remete a uma discussão referente à própria formação dos professores que ensinam Matemática. A forma como um professor ensina está implícita na concepção que ele tem de ensino, de aprendizagem e de Matemática (BARRETO; OLIVEIRA, 2014, p.1499).

Além disso, os alunos que optaram por seguir a carreira do magistério e os atuais professores que já estão em sala de aula, principalmente dos anos iniciais, estão enfrentando agora o desafio de ensinar Matemática de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), a qual discrimina a disciplina em cinco unidades temáticas, incluindo a Geometria. Dessa forma,

devemos repensar sobre o currículo de formação desses docentes com o oferecimento de disciplinas que explorem os conteúdos específicos da Matemática e conseqüentemente uma carga horária maior reservada para tais disciplinas, como descrevem Nacarato e Passos:

No que se refere à formação inicial – agora restrita aos cursos de Pedagogia ou Normal Superior – a preocupação maior deveria ser com o oferecimento de disciplinas voltadas aos conteúdos específicos, que serão objetos de trabalho do futuro professor. Não há sentido em se pensar numa Metodologia para o Ensino de Matemática com uma carga horária de 60 horas – como ocorre nos cursos de Pedagogia (e que, de certa forma, podem ser vistos como privilegiados, por terem tal disciplina; como foi visto, anteriormente, em muitos cursos mesmo essa metodologia específica não existe). É necessário levar em consideração que os alunos que ingressam em tais cursos são, em sua maioria, provenientes de processos de escolarização onde a geometria esteve totalmente ausente e em que a matemática foi, em grande parte dos dados, ensinada de forma pouco interessante e desprovida de significados históricos e cotidianos (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 15).

Isso nos leva a crer que a carga horária reservada para a Matemática não é o suficiente para preparar adequadamente os professores em sua formação no magistério. Além disso, segundo Dionízio e Bandt (2020, p. 171) os cursos de formação de professores para Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental “não têm conseguido alcançar plenamente os objetivos de formação para o ensino de matemática e isso tem refletido na prática pedagógica desses profissionais.” Desta forma, o professor que atua nesta etapa e é o principal agente do ensino “se sente incapaz e inseguro para propiciar aos alunos aprendizagem que seja realmente significativa e funcional, resultado da falta de preparo nos cursos de formação inicial” (RAMOS; ROSA, 2008, p. 300). Com isso, temos que:

A fim de preparar suas aulas, o professor iniciante vai depender dos livros-texto, dos quais há dois tipos: aqueles escritos por professores como ele, que não aprenderam bem as coisas que estão ensinando e outros, escritos por bem-intencionados professores universitários, que não sabem usar a linguagem acessível aos alunos nem conseguem dosar o grau de abstração e generalidade aceitáveis ao público-alvo (LIMA, 2007, p. 156).

O peso maior do ensino de Matemática recai no professor, que deve encontrar mecanismos para chamar a atenção do estudante e motivá-los por meio de uma adequada atividade de ensino. Por sua vez, os professores dos anos iniciais, além de não terem tido uma formação matemática adequada para encarar os desafios de sala de aula, sofrem com a falta de estrutura da escola e materiais adequados e/ou suficientes. Quando os têm, eles não se sentem preparados para utilizar os materiais manipulativos em suas aulas, como discorre Kaleff:

[...] muitos professores, principalmente das primeiras séries, declaram ter duas razões para não se sentirem à vontade para aplicar tais materiais em suas salas de aula. A primeira é por não estarem familiarizados com os procedimentos didáticos requeridos por estes tipos de recursos manipulativos, e a segunda, por não terem conhecimento de como reproduzi-los por meio de materiais de baixo custo (KALEFF, 2008, p. 10).

Além disso, como esses professores são polivalentes, isso colabora para a Matemática ficar geralmente em segundo plano, principalmente com os professores que não gostam dessa área, ao darem preferência para conteúdos nos quais se sentem mais seguros e acostumados a ensinar. Ocorre também ao ensinar Matemática que o professor passa aos alunos, muitas vezes sem perceber, a mensagem de que é uma disciplina difícil, cheia de cálculos e problemas.

Uma imagem ruim da Matemática é nociva para o próprio professor. Aulas não concluídas, repetitivas, enfadonhas, cansativas, têm consequências negativas nos alunos e, portanto, sobre todos os outros componentes do mundo da escola, contribuindo em dar, ao próprio professor, uma imagem negativa da Matemática, bem como uma imagem negativa de si mesmo enquanto professor, tomando, portanto, negativo o trabalho didático (D'AMORE, 2007, p. 38).

Esse aspecto negativo sobre o ensino da Geometria vem decorrendo na sala de aula, conforme afirma Veloso (1999), manifestando-se na importância que se dá às definições no início de cada nova abordagem, antes mesmo de qualquer atividade significativa; na decisão de colocar a Geometria em uma posição isolada no ensino, considerando-a como parte diferente da Matemática, sem muita conexão com os outros tópicos dessa área e de outras disciplinas; e no fato de querer apresentar os objetos geométricos numa ordem do mais simples ao mais complexo, sendo que o percurso natural da criança é do todo para a parte.

Somado a tudo isso, Kaleff (2008) coloca ainda que, em formação continuada com professores, foram observadas deficiências na visualização e interpretações de informações gráficas, dificuldades em relacionar materiais concretos com suas diferentes representações e, além disso, vários professores não dominavam o traçado dos desenhos mais elementares e mais frequentes nos livros didáticos. Isso constata a importância de corrigir essa lacuna de sua instrução por meio de formações continuadas nessa unidade temática da Geometria.

Todos esses motivos despertaram nosso interesse na investigação dessa unidade temática nos anos iniciais do EF, pois é responsabilidade do professor que atua nos anos iniciais do EF ensinar Geometria nessa fase escolar, porém “Sua formação acadêmica deixa muito a desejar, em relação aos conteúdos de Matemática, visto que, pouco lhe é ofertado dentro da grade curricular dos cursos de formação superior” (VIEIRA, 2017, p. 23).

Ainda segundo Vieira (2017, p. 24) os professores recém-formados em licenciatura em pedagogia “não saem preparados o suficiente para ensinar as *matérias* relativas ao ensino de Matemática, mesmo nas séries iniciais, pois não tiveram fundamentações teóricas e metodológicas que servissem de suporte fundamental para o domínio de conceitos e/ou procedimentos”.

Esse despreparo em sua formação provoca escolhas sobre o que ensinar em sala de aula conforme podemos perceber na seguinte afirmação:

Sabemos que as professoras das séries iniciais, na maioria das vezes, não trabalham com a geometria em decorrência de deficiências em sua formação matemática, o que acaba por trazer-lhes muita insegurança. Essa situação vem reforçar nossa crença em relação à necessidade de se conferir uma maior prioridade para a geometria na formação docente (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 74).

Veloso et al. (1999) afirma que a Geometria no início deste milênio está no centro das grandes preocupações educativas, carecendo de análise cuidadosa nas suas vertentes de ensino, aprendizagem e formação de professores. Ainda segundo os autores (op. cit.) é dada pouca importância ao estudo da Geometria na formação de professores, inicial ou continuada, o que provoca alguma falta de gosto, pelos professores, de ensinar essa área.

Uma das principais preocupações no ensino da geometria em todo o mundo é o contínuo baixo nível de raciocínio geométrico entre os próprios professores, e até que tal problema seja tratado adequadamente, provavelmente haverá pouco progresso na qualidade do ensino de geometria (DE VILLIERS, 2010, p. 428).

Abrantes (1999) declara que a Geometria tem grande importância na valorização do currículo e nas aulas de Matemática, pois: contata-se com grande variedade de objetos e situações; é uma fonte de problemas; conduz à necessidade de se lidar com diversos aspectos da própria Matemática; pode-se fazer uso de explorações e investigações em todos os níveis de escolaridade.

Porém, na prática, percebemos que muitos professores acabam não valorizando o ensino dessa área, já que:

[...] muitas vezes, talvez (entre outras razões) porque o programa do ensino básico é demasiado longo e muito retalhado, muitos outros professores continuam, neste momento, a sacrificar, mais ou menos conscientemente, o ensino/aprendizagem da Geometria” (FONSECA et al., 1999, p. 66).

Além disso, um agravante fundamental está no raciocínio em Geometria que possuem os professores.

A nossa prática tem nos permitido constatar ser comum professores chegarem à pós-graduação sem um raciocínio geométrico formado. Os próprios professores, em seus depoimentos, admitem não terem vivenciado um ensino de geometria capaz de lhes permitir pensar geometricamente – em toda amplitude discutida anteriormente. A experiência que relatam ter tido com o ensino da geometria reduz-se à geometria métrica e ao reconhecimento de figuras geométricas, sem, no entanto, chegar a distinguir nem mesmo os aspectos figurais dos conceituais (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 69).

De qualquer forma, a unidade temática da Geometria está exposta pela BNCC (BRASIL, 2017) e deverá ser ensinada. A razão de se ensinar Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve-se ao fato de que os recursos geométricos oferecem um caráter mais utilitário na resolução de problemas do dia a dia, em algumas atividades profissionais e em outras áreas do saber, além de apresentar-se importante para o desenvolvimento de habilidades e competências específicas. “Mostra ainda, que a Geometria é possível de ser ensinada pelos professores dos anos iniciais, que é possível de ser aprendida pelas crianças dos anos iniciais, desde o início do ano letivo” (UTIMURA, 2015, p. 158).

Até aqui alguns dos questionamentos foram respondidos, porém faltou refutar o argumento central desta investigação, que conseqüentemente acaba colaborando na resposta de todos os outros: quais são os conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores dos anos iniciais do EF ao lecionarem figuras espaciais em uma turma de terceiro ano?

Para responder esse questionamento, partimos de Shulman (1989) que afirma que estudantes com baixos rendimentos geralmente utilizam qualquer tipo de estratégia para realizar uma tarefa sem se preocupar se o que está fazendo é certo ou errado, e raramente pedem ajuda. Disso, tiramos que o professor precisa conhecer as dificuldades apresentadas pelos alunos, já que nem todas elas serão expostas por eles. Já os alunos que apresentam altos rendimentos, quando surge qualquer dúvida, procuram rapidamente ajuda, por colocar essa situação como algo problemático. Daqui percebemos que o professor também precisa ter o domínio do conteúdo para colaborar nessas situações.

Por isso a importância de conhecer quais são os conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores, pois Shulman (1989) afirma que esse conhecimento é algo de interesse para pesquisadores, professores e os responsáveis pela política educacional, pois “servem para verificar, refinar, confirmar ou elaborar o trabalho conceitual anterior” (1989, p. 68, tradução nossa).

As ideias de Shulman foram corroboradas e aprofundadas por Ball, Thames e Phelps (2008), que avançaram em análises para estabelecer “as bases para uma teoria do conhecimento matemático para o ensino baseada na prática” (op. cit., p. 395). Os autores identificaram dois domínios de conhecimento matemático para o ensino: conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico, para os quais estabeleceram categorias que serão também importantes para esta investigação.

Além disso, Koehler et al. (2014), expõem a importância das ferramentas digitais no processo de ensino e aprendizagem, assim sendo, buscamos também os níveis de desenvolvimento do Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo em Matemática (TPACK) exposto por Mishra e Koehler (2006).

Para dar consistência ao nosso estudo, buscamos no banco de assuntos da Capes em janeiro de 2020 as expressões *conhecimentos matemáticos* e *professores dos anos iniciais*, encontrando doze artigos e dois livros publicados, nos quais nenhum se referiu aos conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores.

Pesquisamos em janeiro de 2020, no banco de catálogo de teses e dissertações da Capes, na busca *conhecimentos geométricos* e encontramos 35.526 trabalhos² entre 2014 e 2018. Refinamos a busca para área de concentração educação matemática e educação matemática, cultura e diversidade, encontramos 279 trabalhos. Analisamos cada um dos títulos, resumos e palavras-chaves para verificar se havia alguma relação sobre os conhecimentos geométricos mobilizados por professores dos anos iniciais. Encontramos sete dissertações, duas com foco em figuras planas, duas com foco no estudo de diversas questões relacionadas à Geometria, uma como o foco no estudo da área e perímetro, uma como o foco sobre o conhecimento tecnológico e, uma com o foco no estudo do quadrilátero; e duas teses, uma com foco no estudo de perímetro, e a outra com foco na apropriação de tecnologia digital no ensino da Geometria Espacial e Plana.

Além disso, a pesquisa levantada por Dionízio e Bandt (2020) em sua revisão de literatura em maio de 2019, a qual procurou saber o que vem sendo investigado em Geometria nos anos iniciais do EF, utilizou-se das fontes da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Os autores fizeram a categorização dos trabalhos encontrados expondo na tabela 1, os resultados encontrados.

² Busca realizada em 28/01/2020 no endereço: <http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

Tabela 1: Organização dos trabalhos sobre geometria dos anos iniciais por categoria/assunto

Assunto	Nº de trabalhos
Contribuições de cursos de formação continuada e de grupos de estudos sobre geometria para a formação dos professores.	24 (sendo 3 teses)
Contribuições de cursos de formação inicial para a formação dos professores.	8 (sendo 1 tese)
Desenvolvimento de atividades de geometria com estudantes dos anos iniciais.	15
Análise de livros didáticos.	4
Estudo de conteúdos desenvolvidos em sala de aula nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	4
Estudo histórico e bibliográfico sobre motivos para o ensino da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	2

Fonte: Dionizio (2019, p. 163).

Diante disto, percebemos trabalhos que exploram a carência no ensino da Geometria nos anos iniciais apresentando algumas propostas para a formação inicial e continuada. Segundo Dionízio e Bandt (2020, p. 175) “essas pesquisas centram-se principalmente nos conteúdos a serem ensinados e nas formas de abordá-los em sala de aula.” Todavia, a tese desenvolvida por Dionízio (2019) foi o primeiro trabalho cujo foco está na aprendizagem do professor com o ensino da Geometria na infância no contexto da formação e da prática pedagógica, concluindo a importância do uso de metodologias consideradas efetivas pelos professores no processo de formação e da necessidade de aplicação aprofundada de processos formativos em Geometria. Dessa forma, verifica-se uma falta de publicações que explore o conhecimento geométrico mobilizado pelos professores dos anos iniciais, principalmente no que tange aos estudos de figuras espaciais, o que justifica a escolha do tema na investigação dessa pesquisa.

1.3.A atual legislação e a formação de professores no Brasil

Procuramos investigar as leis que regem o trabalho e a formação docente, principalmente no que se refere aos anos iniciais do EF. Isso nos ajudará a compreender a importância da formação acadêmica e continuada de professores.

Uma das normas deliberadas são as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) que foram concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), as quais orientam o planejamento curricular na educação básica. Cada etapa e modalidade de ensino possuem suas próprias diretrizes curriculares, que buscam a igualdade de direitos na aprendizagem, para que todos os alunos tenham os conteúdos básicos ensinados, levando em consideração seu contexto social, histórico e cultural. Elas atribuem a responsabilidade ao professor de “[...] criar situações que provoquem nos estudantes a necessidade e o desejo de pesquisar e experimentar situações de aprendizagem como conquista individual e coletiva, [...]” (BRASIL, 2013, p. 39).

As DCN são doutrinas que orientam as escolas na organização, articulação, desenvolvimento e avaliação de suas propostas pedagógicas. Elas preservam a autonomia da escola e do professor a montar seu currículo com os conteúdos que lhe convém para a formação das competências nelas explícitas. “Assim, as diretrizes asseguram a formação básica, com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), definindo competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio” (TODOS PELA EDUCAÇÃO, 2018).

A Educação Básica está dividida em: I – Educação Infantil; II – Ensino Fundamental; e III – Ensino Médio. O Ensino Fundamental tem duração de 9 anos, com matrícula obrigatória a partir dos 6 anos. Essa etapa da educação se subdivide em duas fases sequentes e com características próprias: os Anos Iniciais (foco deste trabalho), com 5 anos de duração para estudantes dos 6 aos 10 anos de idade; e os Anos Finais, com 4 anos de duração para estudantes dos onze aos quatorze anos.

Apesar de existir a educação infantil pública, sabemos que existem alunos que acabam entrando pela primeira vez na escola no EF, fazendo com que os professores dessa fase escolar priorizem a alfabetização e o letramento. Contudo, segundo as DCN:

Desde os seis anos de idade, os conteúdos dos demais componentes curriculares devem também ser trabalhados. São eles que, ao descortinarem às crianças o conhecimento do mundo por meio de novos olhares, lhes oferecem oportunidades de exercitar a leitura e a escrita de um modo mais significativo (BRASIL, 2013, p. 123).

Os anos iniciais do EF configuram uma fase de muita importância no desenvolvimento da criança, pois é um período no qual se deve intensificar a aprendizagem das normas da conduta social, desenvolvendo habilidades que facilitem o processo de ensino e de aprendizagem.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a criança desenvolve a capacidade de representação, indispensável para a aprendizagem da leitura, dos conceitos matemáticos básicos e para a compreensão da realidade que a cerca, conhecimentos que se postulam para esse período da escolarização” (BRASIL, 2013, p. 112).

As DCN recomendam que os sistemas de ensino nas suas redes escolares organizem os três primeiros anos do Ensino Fundamental em um ciclo, mesmo quando optarem pelo regime seriado. Nesse caso, devem considerar como um bloco pedagógico ou um ciclo sequencial não passível de interrupção. Quanto à avaliação nessa fase, deverá se basear na observação e registros gerais, portfólios, acompanhamentos contínuos e de revisão às abordagens adotadas.

Como dissemos, a partir dos 6 anos de idade, o aluno entra no Ensino Fundamental, que por sua vez receberá os alunos da Educação Infantil, e que segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 57) deve nessa etapa “valorizar as situações lúdicas de aprendizagem, aponta para a necessária articulação com as experiências vivenciadas na Educação Infantil”.

O reconhecimento do que os alunos já aprenderam antes da sua entrada no Ensino Fundamental e a recuperação do caráter lúdico do ensino contribuirão para melhor qualificar a ação pedagógica junto às crianças, sobretudo nos anos iniciais dessa etapa da escolarização (BRASIL, 2013, p. 138).

Nos três anos iniciais do Ensino Fundamental é assegurado ao aluno a alfabetização, em suas diversas perspectivas, o letramento, o desenvolvimento das diversas formas de expressão, e a continuidade da aprendizagem, seja o sistema adotado como seriado ou ciclo. Para tal, as DCN no inciso 2º do art. 30 menciona:

Considerando as características de desenvolvimento dos alunos, cabe aos professores adotar formas de trabalho que proporcionem maior mobilidade das crianças nas salas de aula e as levem a explorar mais intensamente as diversas linguagens artísticas, a começar pela literatura, a utilizar materiais que ofereçam oportunidades de raciocinar, manuseando-os e explorando as suas características e propriedades (BRASIL, 2013, p.137).

Em seu artigo 62º, a lei nº 12.796, de 4 de abril de 2013, define que em relação ao profissional que irá atuar nessa fase escolar, estão aptos para lecionarem no Brasil na educação infantil e nos primeiros anos do EF, os portadores de diploma de nível médio na modalidade normal, ou diploma de nível superior em licenciatura em pedagogia.

Segundo Demo (1998), a LDB do Brasil trata o professor como eixo central da qualidade de educação e menciona que o que auxilia o processo de aprendizagem é a motivação moderna e lúdica. Ainda segundo o autor, é preciso mostrar apreço pelos educadores que são a peça-chave das escolas. Assim, entendemos que ofertar uma formação inicial e continuada, que é um dos objetivos desta pesquisa, contribuirá para tal feito.

A LDB, em seu artigo 3º, prevê a valorização do profissional da educação escolar, vinculando-a com a garantia de padrão de qualidade. “Tanto a valorização profissional do professor quanto a da educação escolar são, portanto, exigências de programas de formação inicial e continuada, no contexto do conjunto de múltiplas atribuições definidas para os sistemas educativos” (BRASIL, 2013, p. 58).

O professor deve saber orientar, avaliar e elaborar propostas, além de conhecer e compreender as etapas do desenvolvimento dos estudantes.

[...] Atualmente, mais que antes, ao escolher a metodologia que consiste em buscar a compreensão sobre a lógica mental, a partir da qual se identifica a lógica de determinada área do conhecimento, o docente haverá de definir aquela capaz de desinstalar os sujeitos aprendizes, provocar-lhes curiosidade, despertar-lhes motivos, desejos. Esse é um procedimento que contribui para o desenvolvimento da personalidade do escolar, mas pressupõe chegar aos elementos essenciais do objeto de conhecimento e suas relações gerais e singulares (BRASIL, 2013, p. 59).

Entre os objetivos do plano nacional de educação, instituído no PL 8530/10 pelo poder executivo, está a melhoria da qualidade do ensino a ser incentivada premiando iniciativas para todos os níveis, modalidades e etapas educacionais. Acreditamos que nossa pesquisa poderá contribuir para isso.

1.4.A proposta da formação continuada em Geometria Espacial elementar

Vamos propor a construção de uma formação continuada em Geometria Espacial elementar para os professores dos anos iniciais do EF, levando em consideração as abordagens do estudo do conhecimento matemático necessário ao ensino, apoiado nas ideias de Stylianides e Ball (2004), por meio da análise dos documentos políticos, do currículo de matemática dos professores, do conhecimento matemático dos professores, do currículo de matemática dos alunos e do conhecimento matemático dos alunos.

Além disso, buscaremos por meio de críticas sobre o modelo de pensamento geométrico de van Hiele (1957), feitas por Senk (1989), Clements e Battista (1992), Clements e Sarama (2011), uma articulação com outros autores como Parzysz (2006), Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b), Gutierrez et al. (2004) e Duval (1994, 1995, 1999), no seu uso em relação à Geometria Espacial.

Articularemos ambos os constructos por meio das seguintes etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico:

- Começando com o processo de geração de imagens mentais de Gutiérrez (1996a), no qual o aluno, ao se deparar com a figura espacial, realiza a associação com outras imagens mentais, como ver um paralelepípedo e chamar de caixa, ver um cubo e chamar de dado, etc ou iniciar o processo de construção da imagem mental de um objeto novo cujas representações ainda não foram construídas.
- A existência do pré-reconhecimento proposto por Clements e Battista (1992) ou pré-cognitivo proposto por Clements e Sarama (2011) como um nível que antecede o da

visualização. Nessa etapa, o processo inicial de imagens mentais da figura espacial ainda está sendo construído, por isso, o aluno tem a necessidade de ver e manipular o objeto, e por meio disso perceber apenas algumas características visuais da forma, como ter partes curvilíneas ou retilíneas, mas ainda não consegue reconhecer características comuns entre figuras, nem separá-las em classes.

- Os paradigmas de Parzysz (2006) da Geometria Concreta (G0) e a Geometria Espaço-gráfica (G1) como processo de transição da Geometria não axiomática para a axiomática. Nessa etapa, a observação e manipulação com as figuras espaciais ainda é necessária, e os níveis de van Hiele de visualização e análise serão explorados concomitantemente dentro de cada um dos paradigmas. Esse período, começará pela Geometria Concreta (G0), evidenciando os processos de imagens mentais e pré-reconhecimento nos quais os aspectos perceptíveis do objeto ainda estão sendo explorados. Passaremos para a Geometria Espaço-gráfica (G1), apoiada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), na qual as figuras espaciais começam a ter diferentes representações, como figuras reais ou virtuais, desenho, forma estrutural formada somente pelas faces, ou arestas e vértices.
- Por fim, a passagem das representações das figuras em 3D para 2D, dentro do paradigma Parzysz (2006) da Geometria Proto-axiomática (G2). Apoiadas pelos níveis da visualização, análise e dedução informal de van Hiele (1957), é uma etapa que utilizará o GeoGebra como ferramenta que contribuirá no processo do desenvolvimento do pensamento geométrico e no levantamento de hipóteses. A ideia é trabalhar o processo de ver uma figura espacial (3D) representado em diferentes projeções na tela do computador por exemplo, permitindo ainda a sua manipulação, e planificação.

1.5.Problema de pesquisa

Buscamos identificar o conhecimento geométrico mobilizados pelos professores dos anos iniciais do EF, pois segundo Salazar (2005) ele possibilita uma importante reflexão sobre os conceitos relacionados ao ensino do conteúdo explorado, sobre como o professor participa na construção do conhecimento pelos alunos, por meio de diversos modos de representações do assunto abordado, além de fornecer uma discussão sobre o conhecimento disciplinar exigido aos professores.

Para isso, nosso objetivo principal é identificar os tipos de conhecimentos que são mobilizados por professores dos anos iniciais do EF, ao trabalhar com Geometria Espacial elementar.

Assumiremos também os seguintes objetivos específicos:

- Verificar as recomendações expostas nos documentos políticos sobre as figuras espaciais registradas nos PCN, DCN e BNCC;
- Analisar os conhecimentos de Geometria Espacial inseridos nos currículos dos cursos de formação de professores, ou seja, na Proposta Pedagógica Curricular (PPC) dos cursos de licenciatura/pedagogia;
- Analisar o conhecimento geométrico de figuras espaciais dos professores por meio de uma avaliação diagnóstica;
- Identificar os conhecimentos de Geometria Espacial presentes nos livros didáticos recomendados pelo Plano Nacional de Livro Didático (PNLD);
- Analisar o conhecimento geométrico de figuras espaciais dos alunos baseados nas provas do Saeb;
- Identificar os tipos de conhecimentos de Geometria Espacial mobilizados por professores dos anos iniciais EF na prática de sala de aula;
- Identificar os tipos de conhecimentos de Geometria Espacial estimulados pelos professores dos anos iniciais do EF quanto ao uso de ferramentas tecnológicas;
- Propor uma formação continuada em Geometria Espacial elementar para professores dos anos iniciais do EF.

1.6.Fundamentação teórica

Para buscar o conhecimento sensibilizado pelos professores buscamos nos referenciar a Shulman (1986, 1989, 2001, 2005, 2016) pela sua influência e originalidade ao categorizar o conhecimento do professor, o qual, segundo Vieira e Araújo (2016), vem contribuindo na investigação de pesquisas na área da formação docente. Adicionamos aqui, que o professor que ensinará Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, segundo Curi (2004), precisa entender a Matemática em seus diversos conhecimentos, quais sejam o domínio de conteúdos, de abordagens didáticas pertinentes a esses conteúdos e de sua organização curricular. Para avaliar esses conhecimentos, usaremos as ideias de Shulman L. e Shulman J. (2014), que

esclarecem as dimensões de desenvolvimento pessoal/profissional necessárias ao professor para um bom desempenho pedagógico. Essas dimensões são a base para construção de uma formação docente pois “elas também servem para definir os pontos focais de quaisquer esforços em educação ou formação docente dedicados a preparar os professores para trabalhar com eficácia no ambiente complexo, incerto e muitas vezes imprevisível das escolas” (SHULMAN L.; SHULMAN J., 2014, p. 131).

Assim sendo, usaremos como quadro teórico de análise didática nas categorias de conhecimento do professor identificadas por Shulman, (1986) bem como os tipos de conhecimento matemático necessário para o ensino propostos por Ball, Thames e Phelps (2008), do conhecimento matemático exposto por Ball e Bass (2009), da pedagogia matemática de Ball (1988) e dos três dilemas da prática matemática ao se tentar ensiná-la destacada por Ball (1993), do uso de ferramentas digitais no processo de ensino e aprendizagem que deverão ser consideradas como um dos conhecimentos matemático para o ensino segundo Koehler et al. (2014), e por fim, os níveis de desenvolvimento do Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo em Matemática (TPACK) exposto por Mishra e Koehler (2006, 2008, 2009).

Ainda dentro do quadro teórico, no desenvolvimento das atividades propostas na formação a ser construída, nos apoiaremos na teoria dos registros de representação semióticas de Duval (1995), que investigou a influência das representações dos objetos matemáticos³ nas técnicas usadas no ensino e aprendizagem da matemática.

Na geometria, o registro de representação semiótico formado pelas figuras requer o desenvolvimento de um tipo de pensamento que possibilite a tomada de consciência sobre maneiras de transformar as figuras observadas em outras na resolução de problemas, sobre o processo de desconstrução dimensional e sobre as apreensões e os olhares que caracterizam as atividades geométricas (DIONÍZIO; BANDT, 2020, pp. 172-173).

Além disso, usaremos as críticas levantadas pela metodologia do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (1957), disseminando sua utilização na busca de utilização nas atividades com figuras espaciais. Desse modo, chegamos ao modelo Parzysz (2006), que comparou os níveis iniciais de van Hiele dentro de uma Geometria concreta por meio do uso dos objetos físicos e tendo o processo da validação ocorrendo de forma perceptiva. Esse modelo

³ A apreensão do objeto matemático passa, necessariamente, por intermédio de suas representações. Então, conhecer o objeto só é possível, como já foi dito, mediante a sua materialização; é preciso que ele seja dado ao conhecimento, ou melhor, ao sujeito do conhecimento (FLORES, 2006).

considerou vários paradigmas distintos ao conceituar a evolução da Geometria ensinada por meio da modelagem do espaço físico.

Adicionalmente, nos apoiaremos no processo de produção de imagens mentais de Gutiérrez et al. (2004) durante todo o processo de observação, manipulação, visualização e representação do objeto espacial estudado. Gutiérrez (1996) posiciona que os níveis de van Hiele permitem desenvolver a visualização, o que coloca esse modelo, apesar das críticas, como uma importante metodologia no ensino da Geometria. Assim, a transição da Geometria Espacial elementar para a Geometria Plana, processo que se inicia na exploração da planificação, se baseará nos três primeiros níveis de van Hiele, principalmente por estar trabalhando com representações de figuras espaciais, ou seja, com figuras 3D na forma 2D.

À vista disso, com base sólida nas teorias aqui mencionadas, nos firmaremos nos procedimentos metodológicos relatados a seguir.

1.7.Os procedimentos metodológicos

Utilizaremos diferentes fontes ou objetos de análise e a triangulação entre a metodologia da engenharia didática com o estudo de caso e a análise documental, para investigar o conhecimento dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do EF, no contexto do raciocínio geométrico, ao abordarem o objeto de conhecimento figuras espaciais.

Usamos o método qualitativo em pesquisa do tipo estudo de caso⁴ com professores dos anos iniciais do EF da rede municipal de Angra dos Reis, município onde atualmente eu resido e leciono, e fizemos uma pesquisa do tipo documental para compor uma das fases da engenharia didática. Além disso, para a análise dos dados coletados usamos a análise do conteúdo.

A primeira fase da engenharia didática, chamada de análises preliminares, é o momento para estudar um conteúdo ou assunto a ser ensinado e aprendido, além de ser um momento de levantamento de hipóteses da pesquisa, contestando os resultados da investigação e para tal nos apoiaremos nas abordagens das ideias de Stylianides e Ball (2004).

Na segunda fase da engenharia didática, chamada de análise *a priori*, apresentaremos nossa proposta de uma formação continuada em Geometria Espacial para os professores dos anos iniciais do EF, antecipando os comportamentos, os conhecimentos mobilizáveis e declarando a hipótese investigada.

⁴Um estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos (YIN, 2001, p. 32).

A terceira fase da engenharia didática é chamada de experimentação. É aí que se caracteriza o ambiente da pesquisa, os sujeitos, o desenvolvimento da experiência. A quarta fase, chamada de análise *a posteriori* e validação, é onde investigaremos a produção dos professores, suas observações e comportamentos, assim como os dados construídos no decorrer da experimentação. Trata-se do momento no qual são confrontadas as análises *a priori* e *a posteriori* para criar a validação e o progresso das hipóteses de pesquisa, elaborando novos problemas para a investigação e desenvolvimento do ensino.

1.8. Descrição dos capítulos

Diante de tudo que foi exposto, estruturamos esta tese em sete capítulos, incluindo este, mais as considerações finais, além de anexos e apêndices. A estruturação segue a seguinte forma:

No primeiro capítulo exibiremos a introdução da pesquisa, com uma breve apresentação dos questionamentos que levaram à escolha do tema, a fundamentação da problemática por meio de pesquisas na área, um comentário sobre as legislações atuais da educação e da formação de professores, finalizando com a metodologia adotada na investigação.

No segundo capítulo discorreremos sobre a Geometria nos anos iniciais do EF, dividindo nas seguintes seções: motivos de se estudar Geometria nos anos iniciais do EF; a evolução da Geometria no Brasil; a BNCC; a Geometria nos anos iniciais do EF na BNCC; o estudo de posições e deslocamentos no espaço; o estudo das formas e relações entre as figuras geométricas; o estudo das transformações geométricas; desenvolvimento da concepção espacial.

No terceiro capítulo falaremos sobre os quadros teóricos que norteiam esta tese, dividindo nas seguintes seções: teoria dos registros de representações semiótica; teoria dos registros de representação semiótica em Geometria; apreensões de uma figura; as ideias de Gutiérrez; o modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele; o modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de Parzyzs; as categorias do conhecimento do professor; os tipos de conhecimento necessários ao ensino; conhecimentos matemáticos mobilizados pelos professores; conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo matemático mobilizados pelos professores.

No quarto capítulo falaremos sobre os quadros metodológicos que norteiam esta tese, dividindo-a nas seguintes seções: o estudo de caso; o estudo de caso piloto; engenharia didática; a análise documental; a análise de conteúdo.

No quinto capítulo abordaremos a primeira fase da engenharia didática discutindo a respeito das análises preliminares, dividindo nas seguintes seções: análise dos documentos políticos; análise do currículo de matemática dos professores; análise dos conhecimentos matemáticos dos professores; análise do questionário; análise da avaliação diagnóstica docente; análise da entrevista; triangulação das fontes usadas no estudo de caso; análise do currículo de matemática dos alunos; análise do conhecimento matemática dos alunos; análise da prática da matemática escolar.

No sexto capítulo abordaremos a segunda fase da engenharia didática discutindo a respeito da concepção e a análise *a priori*, dividindo nas seguintes seções: *live 1* – Nível 1: reconhecer o conhecimento do contexto e o conhecimento específico do conteúdo; *live 2* – Nível 2: aceitar o conhecimento pedagógico matemático e o conhecimento tecnológico; *live 3* – Nível 3: adaptar o conhecimento pedagógico do conteúdo, o conhecimento tecnológico do conteúdo e o conhecimento pedagógico da tecnologia; *live 4* – Nível 4: explorar o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo; Avaliação – Nível 5: avançar sobre o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo.

No sétimo capítulo abordaremos a terceira e a quarta fase da engenharia didática discutindo a respeito da experimentação, análise *a posteriori* e validação, dividindo nas seguintes seções: análise *a posteriori* da *live 1*; análise *a posteriori* da *live 2*; análise *a posteriori* da *live 3*; análise *a posteriori* da *live 4*; avaliação; síntese da investigação da engenharia didática e validação.

No capítulo oito faremos as considerações finais, destacando a voz do pesquisador e dos resultados encontrados, colocando-os como importantes dados para a área, regendo novos horizontes referentes a integração na prática dos conhecimentos geométricos necessários no estudo de figuras espaciais nos anos iniciais do EF, e expor as contribuições desses conhecimentos para a formação continuada de professores que atuam nessa fase escolar.

GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Antes de discutirmos sobre a Geometria dos anos iniciais do EF, apresentaremos como essa unidade temática é exposta na Educação Infantil, fase que precede o EF. Segundo a BNCC (BRASIL, 2017) a Educação Infantil não evidencia a competência específica de Matemática como é colocada no EF, ela expressa as competências específicas dentro de uma organização curricular estruturada em cinco campos de experiências, nas quais são definidos os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento. “Os campos de experiências constituem um arranjo curricular que acolhe as situações e as experiências concretas da vida cotidiana das crianças e seus saberes, entrelaçando-os aos conhecimentos que fazem parte do patrimônio cultural” (BRASIL, 2017, p. 40).

Dessa forma, a Matemática é manifestada dentro do campo de experiência *Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações*, nos quais as crianças esbarram com conhecimentos matemáticos, dentre eles a Geometria, por meio do reconhecimento de formas geométricas. De acordo com a BNCC nessa etapa da educação é preciso (...)

(...) promover experiências nas quais as crianças possam fazer observações, manipular objetos, investigar e explorar seu entorno, levantar hipóteses e consultar fontes de informação para buscar respostas às suas curiosidades e indagações. Assim, a instituição escolar está criando oportunidades para que as crianças ampliem seus conhecimentos do mundo físico e sociocultural e possam utilizá-los em seu cotidiano (BRASIL, 2017, p. 43).

Segundo Santos, Oliveira e Ghelle (2017) os conteúdos referentes à Geometria na Educação Infantil são trabalhados de forma restrita, e como justificativa, os autores destacam a falta de uma ênfase para esse eixo nos cursos de formação inicial.

Tal situação decorre, dentre outros motivos, das concepções equivocadas a respeito do papel da Geometria no currículo das instituições escolares, adquiridas muitas vezes pelos professores durante o seu processo de formação inicial para o magistério, em cursos que não conseguiram dar a necessária ênfase na importância que os conhecimentos geométricos têm no desenvolvimento do pensamento das crianças e na aprendizagem de outros saberes vinculados à Matemática (SANTOS; OLIVEIRA; GHELLE, 2017, p.97).

Já em relação aos primeiros anos do EF, Santos e Oliveira (2018, p. 388) afirmam que ela “é trabalhada de forma superficial, sem ligação com o cotidiano dos alunos nas aulas de Matemática”. Ainda segundo os autores, o ensino dessa unidade temática nos anos iniciais do EF é importante, pois permite construir o espaço na interação e interpretação com o ambiente.

Dessa forma “as criações imagéticas constituídas mentalmente por elas, influenciam as suas representações e visualizações geométricas” (SANTOS; OLIVEIRA, 2018, p. 389).

O aprendizado da Geometria envolve investigação, experimentação, exploração, representação de objetos do cotidiano da criança, bem como outros materiais concretos. Assim, à medida que os alunos exploram, também constroem, classificam, descrevem e representam objetos e modelos, desenvolvendo habilidades essenciais do pensamento geométrico (SANTOS; OLIVEIRA, 2018, p. 399).

2.1. Motivos de se estudar Geometria nos anos iniciais do EF

Para entender as razões de se ensinar essa unidade temática desde os anos iniciais do EF, partimos da declaração de Manoel (2014) com a seguinte afirmação:

A Geometria é parte do patrimônio cultural historicamente construído pela humanidade; a Geometria está presente na natureza, nos objetos e no cotidiano das pessoas; a Geometria contribui para o desenvolvimento das habilidades cognitivas (visuais, de desenho e construção, de aplicação ou transferência, de comunicação e de lógica); só a Geometria desenvolve o pensamento geométrico, que não pode ser desenvolvido pelas outras áreas da Matemática (MANOEL, 2014, p. 123).

Segundo Santos e Oliveira (2018, p. 394) dentre os fatores que explicam o porquê de a Geometria ser pouco abordada nos anos iniciais do EF “é o fato de muitos professores não possuírem os conhecimentos necessários sobre Geometria, para que possam, pelo menos, repassá-los aos seus alunos”. Em suas palavras,

[...] os professores quando tentam ensinar Geometria para os alunos, apresentam dificuldade tanto teórica quanto metodológica, que podem comprometer a aprendizagem dos alunos a trabalharem as noções e conceitos iniciais da Geometria nas salas de aulas (SANTOS; OLIVEIRA, 2018, p. 393).

Apesar de o ensino da Geometria ser recomendado em todos os anos da Educação Básica, o que se observa é que ela é pouco explorada, como se nota em *Meu Livro de Matemática: 2º ano* (2018) que apresenta apenas duas habilidades de Geometria; em *A conquista da Matemática: 3º ano* (2018) a primeira unidade é principiada com uma habilidade geométrica e outras exploradas na unidade seis, das nove unidades que constituem o livro; e em *Aprender Juntos Matemática: 3º ano* (2018) as habilidades de Geometria são indagadas apenas no capítulo três dos oito disponíveis no livro. Em outras obras, a Geometria ocorre

ocasionalmente no final do ano letivo, assim como é posicionado em *Aquarela Matemática: 3º ano (2018)*.

Além disso, muitos professores abordam em suas aulas essa unidade temática de ensino como “práticas de ensino de conteúdos de Geometria alicerçadas em memorização de nomes de figuras e propriedades geométricas, sem conexões com outras áreas da Matemática e outros campos do saber” (MANDARINO, 2014, p.16). Uma defesa para o ensino da Geometria é que essa unidade temática,

[...] é considerada importante por pesquisadores e curriculistas⁵ porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problema. No entanto, ainda não dispomos de estudos mais sistematizados sobre as representações do professor a respeito da Geometria e conseqüentemente, de como ele avalia a importância do ensino dessa área (PIRES; CURI; CAMPOS, 2000, p. 15).

Para melhor aproveitamento da Geometria nos anos iniciais, tanto no seu aspecto utilitário quanto formativo, é preciso, segundo Fonseca et al., (2001), planejar metodologias que orientem e colaborem com os professores em sua prática pedagógica. Adicionalmente, muitos professores não têm a clareza sobre o quê ensinar de Geometria nas séries iniciais, nem quais instrumentos e estratégias que melhor deverá usar. Isso posto, é importante confrontar o que é proposto pelos livros didáticos com as orientações que norteiam a BNCC e com as experiências e conteúdos que estão sendo trabalhados em sala de aula. À vista disso

Muitas vezes, os professores ignoram as propostas curriculares oficiais e sua prática pedagógica, em geral, não se identifica com os conteúdos e orientações metodológicas de tais propostas. Isso não ocorre porque, tais professores estejam em desacordo com elas, mas porque não tiveram oportunidade de analisá-las ou sequer conhecê-las (FONSECA et al., 2001, p. 18).

Para compreender como a Geometria é abordada hoje na sala de aula, vamos mencionar a evolução do seu ensino no Brasil a partir do século XX.

2.2. A evolução da Geometria no Brasil

⁵ Expressão utilizada pelas autoras para se referir à comunidade de professores e pesquisadores que estudam, pesquisam e trabalham com o currículo.

Historicamente percebemos uma preocupação quanto à formação, o ensino e aprendizagem da Matemática. No final do século XIX, as universidades europeias promoveram uma formação de professores secundários, contribuindo para o surgimento de especialistas no ensino da Matemática. Nessa época e no início do século XX o Brasil era um país basicamente agrícola com poucas indústrias, e com grande parte da população analfabeta. “O ensino de matemática na escola primária é essencialmente utilitário: busca-se o domínio das técnicas operatórias necessárias à vida prática e às atividades comerciais. Com a mesma orientação trabalham-se algumas noções de geometria” (PAVANELLO, 1993, p. 8).

Com a 1ª guerra mundial, desenvolvem-se no Brasil os setores econômico, social e político, com crescimento industrial, e com a pregação do nacionalismo, refletindo para o combate ao analfabetismo e a disseminação da escola primária, já que pela Constituição da época, o analfabeto não tinha direito ao voto. Instaurou-se nesse período uma preocupação com a qualidade de ensino, evidenciando, dentre outras coisas, aperfeiçoar a formação dos professores. Com a criação do ministério da Educação e Saúde do Brasil em 1930, ocorreu a reorganização do ensino de caráter mais formal, voltado para áreas comerciais.

Em 1934 na Universidade de São Paulo e em 1935 na Universidade Federal do Rio de Janeiro criam-se os primeiros cursos designados para formar professores a atuarem no ensino secundário nas diversas disciplinas, fato que influenciou o ensino da Matemática na época. “Observa-se a tentativa de estabelecer a unidade entre vários ramos da matemática, entregando o ensino da disciplina a um só professor. Este deverá desenvolver, em cada série, o ensino de vários assuntos, procurando integrá-los” (PAVANELLO, 1993, p.10). Ainda segundo a autora, era proposto que o ensino da Geometria se iniciasse “pelas explorações intuitivas, a partir das quais se estabelecerão os conhecimentos indispensáveis à construção de uma sistematização, que deverá atingir a exposição formal” (ibidem).

Em 1942, a lei Orgânica do Ensino Secundário, estruturou o ensino secundário em dois ciclos, primeiro com quatro anos de duração (antigo ginásial), e o segundo com três anos de duração (antigo curso clássico ou científico). A Geometria era abordada, segundo Pavanello (1993), de forma intuitiva nas duas séries iniciais do ginásial, e dedutiva nas outras, incluindo Trigonometria e Geometria Analítica.

Ainda no início do século XX a Educação Matemática (EM) surgiu da preocupação dos próprios matemáticos e professores de Matemática em relação à qualidade das ideias transmitidas para as novas gerações, tentando melhorar as aulas e modernizar o currículo. Segundo Schubring (1999) foi a primeira disciplina a mobilizar um movimento internacional

de reformulação curricular. Desde então, psicólogos norte-americanos e europeus começaram a realizar estudos experimentais sobre o modo como a criança aprendia a matemática.

Na década de 1950 a EM passou a ganhar grande força internacional por meio do Movimento da Matemática Moderna (MMM), motivado pela guerra fria e como resposta a uma constatação de que, após a 2ª Guerra Mundial, havia uma defasagem entre o progresso científico-tecnológico e o currículo escolar. Entre o final da década de 1950 e início de 1960, por conta da aceleração econômica e urbana, sucedeu uma expansão da rede escolar no Brasil. Não obstante, de acordo com Pavanello (1993), não havia professores suficientes para suprir esse crescimento. Na mesma época, o MMM foi difundido no Brasil, ocorrendo o lançamento dos primeiros livros de Matemática com a preocupação direta com o ensino de estruturas algébricas e o uso da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Em Geometria o foco era “nas noções de figura geométrica e de interseção de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos” (ibidem, 1993, p. 13).

De acordo com Pires et al. (2000), entre 1955 a 1965, a aprendizagem da Geometria era baseada na nomenclatura de linhas e figuras, e no cálculo de perímetros, áreas e volumes, com ênfase na memorização de fórmulas. As figuras não eram classificadas de acordo com suas características, e sim, apresentadas como objetos isolados, sempre da mesma maneira. O uso das ferramentas geométricas, tais como régua e compasso, era pouco explorado nos anos iniciais.

Entre 1966 e 1975, o MMM se intensificou no Brasil e no mundo. Era um ensino pautado pela lógica e no Brasil foi fortemente divulgado pelos livros didáticos. Os elementos geométricos eram trabalhados dentro da teoria dos conjuntos, os problemas e construções geométricas eram poucos enfatizados. Segundo Pires et al. (2000) na década de 70 começaram a surgir propostas de trabalho apoiadas em experiências feitas pelos alunos, como a exploração das figuras planas e espaciais, e atividades envolvendo as classificações das figuras, composição e decomposição, simetrias, ampliação e redução.

Entre as décadas de 1970 e 1980 a Geometria passou a ser encarada como uma disciplina à parte, ou como parte de outras disciplinas. A Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus, n. 5692/71, permitiu uma autonomia ao professor ao montar seu programa de ensino de acordo com seu alunado, o que provocou, segundo Pavanello (1993), a priorização do ensino da Aritmética e noções de conjuntos, enquanto a Geometria era abordada apenas no 2º grau.

A datar de 1976 até os dias atuais, com a divulgação crescente das abordagens construtivistas, surgiram projetos baseados nas experiências dos alunos, envolvendo a

exploração de figuras planas e espaciais, e ações dinâmicas, a partir de composição, decomposição, redução, ampliação e estudo de simetrias. No Brasil, a EM deu um salto significativo no final dos anos de 1970 e durante a década de 1980, como surgimento da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em 1988, contribuindo com o fomento e a divulgação de estudos e pesquisas na área.

As reformas curriculares foram fortemente influenciadas, entre 1980 e 1995, pela divulgação pelo *National Council of Teachers of Mathematics*⁶ (NCTM) do documento *Agenda para Ação*⁷, de 1980, nos Estados Unidos, época em que o ensino de Matemática era voltado para a resolução de problemas. Entre 1976 e 1998 houve um resgate do ensino da Geometria e valorização do desenvolvimento do pensamento geométrico. Diversas propostas, entre elas a do modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, foram divulgadas.

Até meados da década de 90 no Brasil, com a ampliação do EF, os estados e municípios eram autônomos para fazerem as propostas de currículos sem parâmetros a seguirem. Contudo, em 1996, com a introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino fundamental e médio, houve uma divulgação de propostas e orientações para elaboração do currículo escolar de Matemática nos estados e municípios. A exploração do espaço e a leitura de mapas ganharam destaque na publicação dos PCN. Mesmo assim, segundo os PCN de Matemática, nesse período “[...] nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com os conjuntos nas séries iniciais, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais, a formalização precoce de conceitos e a pouca vinculação da Matemática às suas aplicações práticas” (BRASIL, 1997b, p.21). Sendo coordenado pelo Ministério da Educação do Brasil (MEC), houve pela primeira vez um debate entre educadores de diferentes níveis do sistema educativo e indicando diretrizes curriculares comuns para a educação básica em nosso país. Esse documento defende o ensino da Geometria justificando que

(...) o pensamento geométrico das séries iniciais desenvolve inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades (BRASIL, 1997b, p. 82).

Apesar de todo movimento em prol da melhoria da qualidade da Educação Matemática, e em especial o da Geometria, o Brasil no Programa Internacional de Avaliação de Alunos

⁶ Fundado em 1920, o NCTM é a maior organização de Educação Matemática do mundo e sedia anualmente conferências nacionais e regionais, além de publicar cinco jornais.

⁷ “*An Agenda for Action*”. Disponível em: [https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/More-NCTM-Standards/An-Agenda-for-Action-\(1980s\)/](https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/More-NCTM-Standards/An-Agenda-for-Action-(1980s)/)

(Pisa⁸) na década de 2000-2009, ocupava os últimos lugares no ranking. Segundo Ciegliniski (2010), entre os 65 países que fizeram o exame em 2009, os alunos brasileiros ficaram em 57º em Matemática.

Com o compromisso de melhorar o ensino, foi lançado no Brasil em novembro de 2012 o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), composto por cursos de formação continuada para os professores que atuam nos anos iniciais do EF, oferecidos pelas universidades e com o apoio do Ministério da Educação. Em 2013, inaugurou o PNAIC em Língua Portuguesa, e em 2014 em Matemática, que apontou a importância da alfabetização matemática. O material do PNAIC de Matemática era composto por oito cadernos⁹, dentre eles, o quinto caderno que trazia Geometria. Os cadernos oferecem uma reflexão sobre o comportamento do professor em sala de aula, assim como a importância de um planejamento e trabalho interdisciplinar, e da necessidade de proporcionar uma autonomia na criança.

Apesar de ser um Programa Nacional, com o objetivo de ofertar uma formação aos professores que atuam nos anos iniciais e, conseqüentemente, melhorar a aprendizagem dos alunos, críticas a esse modelo foram levantadas:

Embora as propostas sejam, em geral, muito relevantes, o material aposta pouco na possibilidade de criação do professor. Investe mais na diversificação de propostas de atividades que na instigação para que outras propostas, criadas pelo professor possam acontecer. [...] algumas metas precisam ser alinhadas. Como se sabe, houve formação em diferentes partes do país para a compreensão e reflexão sobre o uso do material e, provavelmente, instigações para que os professores, de maneira autônoma, produzam propostas de aprendizagem, devem ter sido feitas (MEGID; PEREIRA; TEIXEIRA; 2016, p.6).

Mais recentemente o MEC também promoveu diversas audiências públicas para a discussão e criação de um documento único para todo território nacional que direcionasse o trabalho do professor em relação aos conteúdos a serem abordados em cada ano escolar. Houve contribuições de pessoas e instituições de todo o país, gerando a 1ª versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2015, a 2ª versão em 2016, a 3ª versão em 2017 (BRASIL,

⁸ A prova é aplicada a cada três anos pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e avalia o conhecimento de estudantes de 15 anos de idade em matemática, leitura e ciências. (CIEGLINSKI, 2010)

⁹ Os cadernos do PNAIC de Matemática são organizados da seguinte maneira: os quatro primeiros discutem a organização e planejamento da sala de aula, defendendo sempre um bom planejamento para uma aula bem organizada, aborda a necessidade de uma sala bem estruturada e informativa para a alfabetização matemática, na qual o professor precisa ter uma intencionalidade ao atuar na sala. Os três últimos cadernos são mais específicos quanto às conexões matemáticas, trabalhando as que precisam ser utilizadas em sala de aula, e o último caderno trata de todos os assuntos já trabalhados nos cadernos anteriores, mas de forma conclusiva (MEGID; PEREIRA; TEIXEIRA; 2016, pp. 2-3)

2017), mesmo ano em que foi homologada pelo Ministro da Educação. Nela, a Matemática se divide em EF e EM, em cinco unidades temáticas, dentre elas a Geometria, orientando como os objetos de conhecimento devem ser abordados por meio das habilidades a serem desenvolvidas.

Com a implementação da BNCC (BRASIL, 2017), este passou a ser um novo documento orientador aos professores, o qual foi organizado para aprofundar e ampliar alguns dos objetivos dos PCN. Ocorreram mudanças na organização de conteúdos, como por exemplo, Álgebra e Probabilidade e Estatística desde os anos iniciais do EF, estabelecendo modos de pensar que visam a ajudar os alunos a progredir posteriormente nessas áreas. Além disso, propõe mais reflexão e menos memorização, com objetivo de fazer o aluno a pensar por meio de informações recebidas. Podemos perceber isso nas descrições dos objetivos e habilidades, os quais nos PCN eram caracterizados pelos verbos *reconhecer e identificar* e na BNCC foi alterado para *interpretar, classificar*, colocando o aluno em uma posição mais ativa e o professor como mediador desse processo.

Temos que considerar também como mudança a progressão da aprendizagem dos objetos de conhecimento, respeitando a complexidade do tema, muitas vezes tratado em vários anos escolares. Em relação à Geometria, os PCN abordavam dentro de Espaço e Forma com o foco “na Geometria clássica, axiomática e suas relações internas. Não havia qualquer ênfase às aplicações e relações da Geometria com o espaço vivenciado pelos alunos” (NOVA Escola, 2020). Além disso, nos anos iniciais do EF, a mudança principal da Geometria abordada na BNCC em relação aos PCN é que

Os conteúdos relativos à geometria clássica continuam presentes, mas há uma ênfase na geometria das transformações, desde as séries iniciais até as finais do Ensino Fundamental. Alguns conteúdos passam a ser tratados já nas séries iniciais (plano cartesiano, simetria e semelhança, por exemplo, entram a partir do 5º ano). Além disso, a Base sugere o desenvolvimento de habilidades como “identificar movimentações de pessoas e objetos no espaço e suas representações no plano”, algo que não aparecia nos PCNs (NOVA Escola, 2020)

Em 2018, os livros didáticos já passaram a seguir as orientações previstas pela BNCC, assim como foi indicado aos sistemas de ensino para se enquadrar a esse novo direcionamento do trabalho. Dessa forma, o professor tem a BNCC como um dos parâmetros principais de orientação do seu trabalho em sala de aula.

2.3. A BNCC

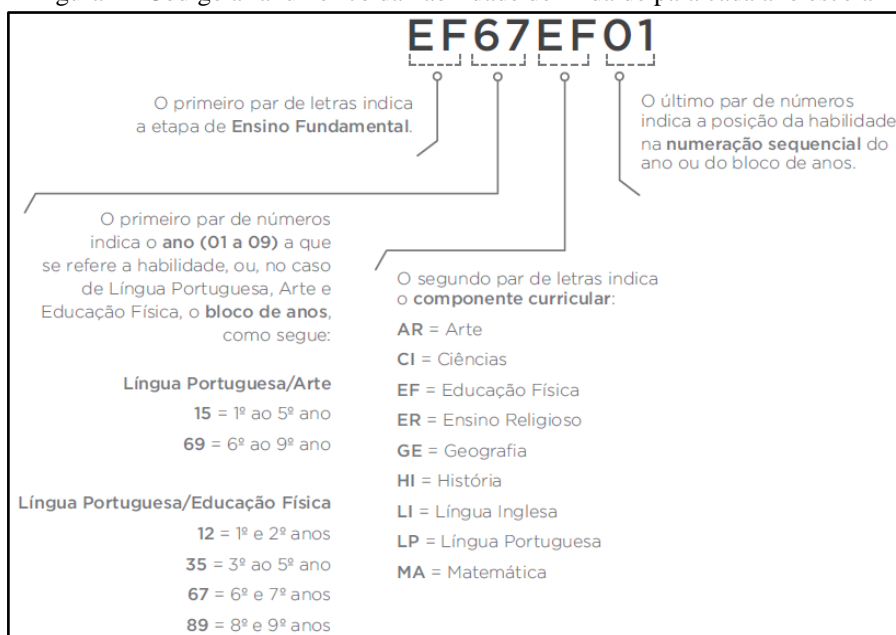
A BNCC é um documento normativo definido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) e orientado pelos princípios das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Foi preparado por especialistas de cada área do conhecimento, sendo homologado em 20 de dezembro de 2017 pelo então Ministro da Educação, Mendonça Filho. Estabelece competências, conhecimentos e habilidades que esperam como os estudantes alcancem no decurso de toda a trajetória acadêmica, norteados o currículo escolar dos diferentes sistemas e redes de ensino.

A BNCC é um documento que deve ser levado em consideração também na formação de professores, pois responde: *O que ensinar? Quais conhecimentos prévios dos professores e alunos?* Segundo este documento, caberá como primeira tarefa da União “[...] a revisão da formação inicial e continuada dos professores para alinhá-las à BNCC” (BRASIL, 2017, p. 21).

À vista disso, o EF foi organizado em cinco áreas de conhecimentos que se interligam para a formação dos alunos, porém mantêm suas especificidades. Esta articulação se dá por meio horizontal, passando junto a todos os componentes curriculares, e por meio vertical, respeitando a progressão escolar. São elas: Linguagens, que engloba os componentes curriculares de Língua Portuguesa, Arte, Educação Física e Língua Inglesa; Matemática; Ciências da Natureza; Ciências Humanas, cujos componentes curriculares são Geografia e História; e Ensino Religioso.

As habilidades são apresentadas por códigos alfanuméricos, cuja composição é evidenciada na figura 1.

Figura 1 - Código alfanumérico da habilidade definida de para cada ano escolar



Fonte: Brasil (2017, p. 30)

Essa organização teve por objetivo manter a clareza, precisão e explicitação das habilidades que se espera que os alunos alcancem, além de orientar os modelos de currículos em todo o país, porém

As diferentes demandas, em termos de implementação de situações didáticas que permitam o desenvolvimento das competências, não vêm acompanhadas de outras políticas que permitam a sua efetivação. Nesse sentido, duas dimensões de ausência podem ser destacadas. A primeira delas é a material, pois a demanda pelo uso de tecnologia, de inovação e de projetos sustenta-se na possibilidade de ter computadores, *tablets* ou outras plataformas digitais, bem como do acesso a conexões de internet ou mesmo energia elétrica, ainda ausente ou de uso limitado em algumas escolas. A segunda dimensão ausente é a da formação de professores (FREITAS et al., 2019, pp. 287-288)

Vale ressaltar que em relação à Educação Básica, os governos municipais, estaduais ou federais deverão “Criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem” (BRASIL, 2017, p. 17).

2.3.1. A Geometria nos Anos Iniciais do EF na BNCC

Em relação à unidade temática da Geometria, os PCN apresentavam como eixo de Espaço e Forma, com um foco na Geometria clássica, axiomática, e suas relações internas, e o espaço vivenciado pelo aluno não era evidenciado. Apesar de a Geometria clássica estar presente na BNCC (2017), o documento confere maior ênfase para a Geometria das transformações, em que conteúdos antes tratados no final do ensino fundamental, passaram a ser combinados nos anos iniciais, ademais acrescenta o desenvolvimento de habilidades com o foco no espaço do aluno.

Isto posto, o conhecimento matemático é colocado na BNCC como relevante para formar cidadãos responsáveis, cientes e críticos. No EF, a articulação entre as diversas unidades temáticas (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, e probabilidade e estatística) deve permitir ao aluno relacionar as representações empíricas às atividades matemáticas por meio de induções e conjecturas.

Dentre os compromissos que se deve ter no EF está o desenvolvimento do letramento matemático, ou seja, levar o aluno a interpretar a Matemática em diversos contextos. É possível desenvolver essa habilidade por meio do uso de estratégias didáticas como a resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem matemática.

Articulando com as competências gerais, as específicas devem garantir o desenvolvimento das componentes curriculares, levando o aluno a desenvolver o raciocínio lógico; relacionar conceitos e procedimentos; observar, interpretar e avaliar os aspectos quantitativos e qualitativos; utilizar diferentes ferramentas matemáticas; expressar respostas em diferentes registros e linguagens; discutir projetos sociais e interagir de forma cooperativa na resolução de problemas.

Os diferentes campos da Matemática se reúnem em ideias fundamentais que são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático, e que se articulam entre si por meio da equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. É nesse rumo que a BNCC propõe que as habilidades sejam divididas em cinco unidades temáticas, que se correlacionam.

Os desenvolvimentos das habilidades estão baseados na progressão ano a ano, no uso de novas ferramentas e da resolução de problemas. Nos Anos Iniciais do EF deve-se retomar as experiências praticadas na Educação Infantil para sistematizar as noções aprendidas e compreender o significado dos objetos matemáticos, por meio do uso de alguns recursos didáticos, tais como:

[...] malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2017, p. 274).

Como o foco desta pesquisa está no desenvolvimento do eixo temático Geometria dos Anos Iniciais, destacaremos no quadro 1 as Habilidades citadas na BNCC para os três primeiros anos:

Quadro 1 - Objetos de conhecimento e habilidades de Matemática segundo a BNCC para os três primeiros anos iniciais do EF

	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
1º Ano do EF	Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado	(EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás.
		(EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.
	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico	(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.

	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.
2º Ano do EF	Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido	(EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.
	Esboço de roteiros e de plantas simples	(EF02MA13) Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.
	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características	(EF02MA14) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.
	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.
3º Ano do EF	Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência	(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações	(EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.
		(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.
	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
	Congruência de figuras geométricas planas	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Fonte: Brasil (2017, pp.277, 281, 285-287).

De acordo com o quadro 1, a unidade temática geometria tem por objetivo desenvolver o pensamento geométrico permeando os seguintes objetos de conhecimento:

- Estudo de posições e deslocamentos no espaço, localizando a movimentação de pessoas e objetos partindo do referencial o seu próprio corpo para depois considerar o referencial no outro. Espera-se que o aluno desenvolva as habilidades de descrever, identificar, registrar e representar a localização de pessoas e objetos transpondo diferentes pontos de referências.
- Estudo das formas e relações entre os elementos das figuras geométricas espaciais, confrontando-as com objetos familiares, identificando seu formato e analisando suas características. Espera-se que o aluno desenvolva as habilidades de relacionar,

reconhecer, nomear, comparar, associar e descrever as características das figuras espaciais, associando ainda com suas planificações.

- Estudo das formas e relações entre os elementos das figuras geométricas planas, distinguindo-as por meio do formato das faces das figuras espaciais, analisando suas características e congruência. Espera-se que o aluno desenvolva as habilidades de identificar, nomear, reconhecer, comparar, e classificá-las em relação a seus lados e vértices e, em diferentes disposições no plano ou no sólido.
- Estudo das transformações geométricas, no final do 3º ano do EF por meio de atividade de congruência de figuras geométricas planas sobrepondo-as em malhas quadriculadas ou triangulares, ou por intermédio de tecnologia digital. Espera-se que o aluno desenvolva a habilidade de reconhecer as figuras congruentes em diferentes meios. Essa atividade é importante para desenvolver nos anos posteriores o objeto de conhecimento simetria de reflexão, área e perímetro de figuras, ampliação e redução de figuras poligonais.

Nos Anos Iniciais do EF portanto, acredita-se que os alunos estabeleçam pontos de referência, construam representações de espaços, estimem distâncias, caracterizem as formas geométricas, reconheçam as planificações das figuras espaciais, nomeiem os polígonos, e manipulem diferentes representações de figuras geométricas planas.

2.4. O estudo de posições e deslocamento no espaço

As primeiras noções geométricas de espaço na criança se dão por meio dos sentidos e dos movimentos. Essa percepção possibilita construir, na criança, um espaço representativo, por meio da experimentação e manipulação de objetos reais, com os quais se constrói o raciocínio sobre representações mentais. Isso pode ser feito com o uso de materiais simples, como embalagens. “A experimentação nas aulas de Geometria é um recurso que pode levar os alunos à construção de conceitos e princípios (relações entre conceitos) e à resolução de problemas” (PIROLA, 2014, p.5).

A passagem do espaço perceptivo ou sensorio- motor ao espaço representativo é, às vezes, contínua, ou seja, a imagem de uma ação é interiorizada ou se pode então coordená-la com outras e descobrir a reversibilidade operatória. Outras vezes é descontínua, isto é, a criança não transpõe unicamente o que faz e o que vê, a intuição geométrica não se apoia diretamente sobre os dados sensorio-motores, mas há uma reconstrução e portanto, transformação (PIRES; CURI; CAMPOS, 2000, p. 30).

Para que a criança comece a trabalhar com a Geometria propõe-se explorar a noção de espaço desde os primeiros anos de escolaridade. “Em particular, a capacidade de orientação espacial do indivíduo depende da sua capacidade de utilizar com sucesso as estratégias de estruturação, processamento e abordagem” (GORGORIO, 1998, p. 227, tradução nossa).

Segundo Schmitz et al. (1994), essa construção da noção de espaço se dá em etapas: o aluno primeiro organiza por meio de seu comportamento e ação o que os autores chamam de *espaço de ação ou espaço perceptivo*, construído pelos seus sentidos e deslocamentos, mediante a presença e manipulação do objeto.

Ao explorar localização e movimento é preciso explicitar para o aluno a noção de referencial. Isso parece evidente, mas ocasionalmente, o professor não determina em sua fala. Essas omissões em certas atividades propostas pelo professor ou nos livros didáticos podem torná-las penosas ou impossíveis para o aluno.

A maioria dos livros didáticos traz propostas para que a criança trace percurso em mapas ou em malhas quadriculadas. No entanto, muitas vezes, o “mapa” apresentado contém erros de representação da realidade que podem ser aceitáveis se produzidos pelas crianças, mas que não deveriam estar presentes nos livros. Um problema frequente é confundir quem está sendo tomado como referência: o personagem na ilustração ou o leitor do livro (MANDARINO, 2014, p.14).

As relações que as crianças começam a fazer com o meio e com a manipulação dos objetos permite que elas construam a noção de espaço. Segundo Schmitz et al. (1994) as crianças com menos de cinco anos localizam objetos no espaço no nível perceptivo e representam por meio de relações topológicas (vizinho de, ao lado, entre, fora etc.), não considerando as formas, distâncias, retas e ângulos. Entre sete e oito anos elas constroem um sistema projetivo e euclidiano para localizar os objetos, utilizando a coordenação dos objetos num sistema de referência móvel, pelo ponto de vista do observador (perspectiva do sujeito). Nessa faixa etária elas localizam um objeto à sua direita, mas não na direita de uma outra pessoa, processo que ocorre entre oito e onze anos. Entre onze e doze anos a criança já considera os objetos à direita/ esquerda uns dos outros.

Dessa forma, “Os jogos que envolvem movimento e localização das crianças, a montagem de modelos concretos de figuras geométricas com canudos de refrigerantes, com garrafas pet ou com sucata, e muitas outras atividades desse tipo podem enriquecer o ensino” (MADARINO, 2014, p.12).

Piaget afirma que a criança desenvolve a noção espacial usando o seu próprio corpo como ponto de referência, percebendo seus movimentos e seu deslocamento. Nesse contexto,

as noções “[...] são condições necessárias à coordenação espacial e nesse processo, está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulos e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico” (PIRES; CURI; CAMPOS, 2000, p. 31).

Dessa forma, realizando atividades lúdicas, construindo brinquedos e trabalhando em grupos, é possível desenvolver habilidades geométricas, explorando a lateralidade, a orientação espacial e a percepção geométrica, componentes importantes do pensamento geométrico (MANDARINO, 2014, p. 18).

Segundo Pires et al. (2000) as primeiras noções são topológicas: vizinhança, separação, ordem, entorno, continuidade, figuras fechadas e abertas, interior e exterior. Só depois que se desenvolve as noções projetivas: na frente/atrás, à direita/esquerda de quê/ quem? Por último é que se constrói as noções euclidianas, quase que simultaneamente com as projetivas: a construção de uma unidade de medida com a fragmentação de um todo em partes, aplicação desta unidade de medida cobrindo toda a extensão do objeto.

2.5. O estudo das formas e relações entre as figuras geométricas

Outra capacidade geométrica importante para começar o estudo da Geometria com as crianças é o aprendizado das formas e relações entre as figuras geométricas e está expressa na BNCC (2017) nos dois últimos objetos do conhecimento do 1º e 2º ano do EF, e do 2º e 3º objeto do conhecimento do 3º ano do EF, dessa unidade temática e nas respectivas habilidades EF01MA13, EF01MA14, EF02MA14, EF02MA15, EF03MA13, EF03MA14 e EF03MA15.

Ela se dará mediante a manipulação das figuras espaciais com a exploração da visualização, reconhecendo objetos familiares, analisando as características, comparando e reconhecendo o sólido. Segundo Pietro e Velasco (2006, p.12) “a aptidão de visualização é, junto às de relações espaciais e orientação espacial, um dos fatores mais representativos e ela é definida como a aptidão para manipular mentalmente figuras tridimensionais complexas.”

Muitas vezes, na abordagem das figuras geométricas espaciais, utiliza-se os desenhos para reproduzir os objetos tridimensionais, o que acaba sendo uma atividade complexa para a criança, pois o desenho é bidimensional. Isso é um dos grandes obstáculos da Geometria, fazer compreender a representação de um diagrama, e evitar falsas interpretações dos objetos. “[...] é preciso investir na compreensão das representações de figuras espaciais por meio de desenhos em uma folha de papel” (MADARINO, 2014, p.13).

Posteriormente, por intermédio do reconhecimento das faces das figuras espaciais ocorrerá a exploração com as figuras planas em diferentes posições no plano ou no sólido. Nesse processo de elaboração conceitual para a formação do pensamento geométrico, podemos situar a visualização e a representação, que segundo Nacarato e Passos (2003) estão intimamente relacionadas. A primeira consiste em pensar por meio das imagens mentais, ou seja, a habilidade de ver aquilo que não está à vista diante do aluno. A segunda são os instrumentos utilizados para expressar os conhecimentos e ideias geométricas, por exemplo os desenhos, materiais manipuláveis, linguagem e gestos. Essas duas últimas formas de representação são complementares nas crianças, pois “as crianças fazem uso frequente de outros meios para entender a linguagem. A linguagem falada é complementada por olhares e movimentos corporais” (VAN HIELE, 1957b, p. 180, tradução nossa). Adicionalmente, no processo de visualização temos que:

Os diferentes tipos de visualização de que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhes seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 78).

Os instrumentos usados para a representação de um conceito podem ser um mecanismo facilitador para a aprendizagem matemática, mas se os elementos desses instrumentos não forem bem esclarecedores, ele poderá ser um dificultador nesse processo. O impasse de identificar esses elementos está diretamente relacionado com o fato de a capacidade da visualização geométrica não estar interiorizada no aluno.

2.6. O estudo das transformações geométricas

A noção das transformações geométricas é considerada por Piaget e Garcia (2011) como *instrumento operatório essencial* para a construção do conhecimento, por meio da translação, reflexão e rotação. Ela está expressa na BNCC (BRASIL, 2017) no último objeto do conhecimento do 3º ano do EF, dessa unidade temática e na respectiva habilidade EF03MA16 com a exploração da congruência de figuras planas.

Para isso, utiliza-se o contato e a manipulação com o objeto real sobrepondo em malhas quadriculadas ou triangulares, ou com o objeto virtual, construído em software de Geometria dinâmica, possibilitando a manipulação, sobreposição e a visualização dos conceitos.

Os instrumentos geralmente usados pelos professores são os desenhos no quadro e nos livros didáticos, que muitas vezes são estereotipados, aparecendo sempre da mesma forma e posição. “E é nessa dinâmica envolvendo objeto real e desenho, aspectos visuais e analíticos que vai ocorrendo a construção de conceitos geométricos” (NACARATO; PASSOS, 2003, p.103).

Com isso, os sólidos e desenhos são apenas modelos materializados das entidades mentais, das representações gerais do conceito. As figuras geométricas são caracterizadas por suas propriedades.

Assim, os objetos de investigação e manipulação no raciocínio geométrico são entidades mentais chamadas de conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (formas, posição, magnitude) e que, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais, como idealidade, abstração, generalidade, perfeição (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 63).

A figura geométrica é uma imagem visual, que possui propriedades conceituais e figurais. Para tanto, ao se referir às figuras geométricas deve-se considerar três categorias de entidades mentais: a definição (verbal, escrita ou oral), a imagem (desenhos ou protótipos), e o conceito figural (conceitos básicos das figuras). Apesar de o conceito figural ser um produto natural da mente humana, o seu desenvolvimento “não é um processo natural. Uma das principais razões que a geometria é um assunto tão difícil em programas de escola é que conceito figural não desenvolve naturalmente para sua forma ideal” (FISCHBEIN, 1993, p. 161, tradução nossa).

Para construir alguns conceitos geométricos o professor poderá trabalhar com figuras planas recortadas, onde o aluno pode identificar congruências e semelhanças. Poderá também fazer o aluno criar, compor e decompor figuras planas, por meio do contorno e recorte de uma figura de cartolina em quebras cabeças; deduzir e refletir o que se precisaria para montar um poliedro, o número de arestas e formatos da face; explorar o vocabulário durante as atividades como em jogos de adivinhação, da memória, da manipulação dos objetos. “A manipulação, o desenho e a visualização de formas geométricas permitem a exploração de propriedades e de relações que precedem o uso do raciocínio formal” (UTIMURA, 2015, p. 37).

2.7. Desenvolvimento da concepção espacial

Para desenvolver a concepção espacial em sala de aula por intermédio de atividades práticas, espera-se que o aluno possa observar as estruturas geométricas do objeto. Porém, como salientam Nacarato e Passos:

O processo de observação passiva não garante a apreensão das propriedades do objeto. Porém, quando o professor permite a manipulação ou, inclusive, a construção do objeto, a compreensão da estrutura, sua percepção espacial pode ser mais completa (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 44).

Existem várias maneiras de representar um objeto espacial, seja de forma concreta, na qual é possível manuseá-lo e tocá-lo com as mãos; por meios digitais, em que também é possível manipulá-lo, pela imagem; ou por meio de fotografias e desenhos, nos quais é inviável a operação, já que é a imitação plana de um objeto tridimensional. Nesse último caso, segundo Nacarato e Passos (op. cit.), é fundamental a intervenção pedagógica para que o aluno consiga ler e interpretar tais representações sem a necessidade de usar os objetos concretos, pois “[...] requer a presença de sua imagem mental, para que o leitor possa interpretar nos desenhos as linhas paralelas e perpendiculares do objeto que revelam a profundidade e orientam corretamente a visão de suas faces” (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 49). Ainda segundo os autores “A criança pode, muitas vezes, não dispor da habilidade de desenho, mas isso não significa que ela não possua a imagem mental do objeto em questão” (idem, op. cit., p. 52).

Quanto ao uso de computadores e smartphones, eles podem ser considerados ferramentas importantes para contribuir na formação do pensamento geométrico, posto que, esses aparelhos estão popularizados e presentes no cotidiano do jovem desde o seu nascimento. Além disso, vários softwares, muitas vezes específicos da Geometria e gratuitos, estão disponibilizados para se trabalhar vários temas dessa área.

Programas de computadores que permitem a representação tridimensional de objetos espaciais, possibilitando aos usuários manipular esses objetos dinamicamente, através de transformações como rotações, translações, dilatação ou secções por planos, deverão ser usados nas salas de aula com mais frequências (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 121).

Assim como no desenho, os sólidos serão representados de forma plana na tela, e os estudantes precisam interpretar corretamente os conceitos geométricos usando a argumentação, valendo-se para isso das ferramentas disponíveis no software.

No capítulo seguinte, faremos uma discussão do quadro teórico que fundamenta nossa pesquisa.

QUADRO TEÓRICO

Realizamos no capítulo anterior algumas considerações sobre a relevância de se ensinar Geometria desde a educação infantil, assim como, a evolução dessa unidade temática no Brasil, a importância do seu ensino nos anos iniciais do EF, e o desenvolvimento dos objetos de conhecimento indicados pela BNCC (2017).

Nosso foco é o desenvolvimento da concepção espacial, no que tange ao estudo das formas e relações entre os elementos das figuras geométricas espaciais e suas transformações, incluindo a manipulação dos objetos reais e virtuais, dentro de um quadro teórico adequado para a análise dos conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores dos anos iniciais do EF.

Sendo assim, o quadro teórico que utilizamos nesta pesquisa compreende Duval, van Hiele, Parzysz e Gutiérrez no que tange o ensino da Geometria e, Shulman, Ball e Mishra e Koehler no estudo do conhecimento do professor, conforme vemos a seguir.

3.1. Teoria dos registros de representações semiótica

Em 1995, Raymond Duval, publicou a teoria dos Registros de Representação Semiótica¹⁰, estruturando o que foi a referência das suas obras. Investigou a influência das representações dos objetos matemáticos¹¹ nas técnicas usadas no ensino e aprendizagem da matemática. O termo *representações* foi, segundo Duval (1999), imposto nas disciplinas das ciências humanas para analisar o conhecimento, a natureza, ou o conteúdo desenvolvido. Refere-se a uma atividade interna, conhecida como atividade mental. A representação e sua relação com um objeto incluem os aspectos forma (desenho, imagem etc.) e conteúdo (maneira de como é apresentado o objeto no lugar onde ele se encontra e o torna acessível).

Quando temos duas representações do mesmo objeto, elas podem não ter a mesma forma e conteúdo. E a diferença se deve ao fato de que elas não podem explicar as mesmas propriedades do objeto representado, devido às possibilidades e restrições de representação que estão relacionadas à forma (DUVAL, 1999, p. 30, tradução nossa).

¹⁰ Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema *semiótico* e de outro lado, pela *referência* do objeto representado (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 467).

¹¹ A apreensão do objeto matemático passa, necessariamente, por intermédio de suas representações. Então, conhecer o objeto só é possível, como já foi dito, mediante a sua materialização; é preciso que ele seja dado ao conhecimento, ou melhor, ao sujeito do conhecimento (FLORES, 2006).

O conteúdo necessita da forma da representação, ou seja, dos meios de explicação ou a forma como é apresentado no sistema semiótico ou não semiótico. “A forma depende do registro de representação, o conteúdo depende das possibilidades de explicação sobre as propriedades do objeto que permite o registro de representação” (DUVAL, 1999, p. 32, tradução nossa).

O funcionamento cognitivo humano para reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações não é natural. Estas limitações que impedem a mobilização de formas alternativas são observáveis por meio de um sistema de tarefas de conversão de representação organizadas de acordo com um princípio de variação sistemática de uma representação e o significado da conversão (DUVAL, 1999, p. 32, tradução nossa).

Para separar os sistemas semióticos utilizados Duval (1999) escolheu o termo *registro*¹², permitindo separar as *transformações*¹³ que constituem a atividade matemática: os *tratamentos*¹⁴ e as *conversões*¹⁵.

Segundo Henriques e Almouloud (2016), para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação semiótica devem-se levar em consideração as atividades cognitivas fundamentais, que são:

- **Formação:** é a seleção de signos do conteúdo percebido, imaginado ou já representado para caracterizar um objeto, como o uso de ícones gráficos, a designação nominal dos objetos, a reprodução de seu contorno, a codificação de relações e propriedades, a composição de um texto, a construção de uma figura geométrica, a elaboração de um esquema ou de uma fórmula, a descrição do domínio de uma função, etc. “Pode ser estabelecida através de um enunciado compreensível numa determinada língua natural. Esta formação deve respeitar regras internas do sistema semiótico de representação usado” (DIONÍZIO; BANDT, 2012, p.12).

¹² “O registro é o sistema no qual ocorre ou se realiza a representação de um dado objeto, externando, assim, o objeto não ostensivo (ideia, noção, conceito) pensado pelo sujeito. Pois, como afirma Chevallard (1992), os objetos não ostensivos só são acessíveis a partir dos objetos ostensivos associativos” (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 469).

¹³ “Essas transformações são o que eu vou chamar na sequência de gestos intelectuais específicos em qualquer atividade matemática” (FREITAS; REZENDE, 2013, p. 16).

¹⁴ “São procedimentos de justificação do objeto de estudo baseados em fenômenos congruentes, segundo os quais os registros permanecem num mesmo sistema de representação, seja através da escrita, de figuras, gráficos, diagramas, dentre outros” (PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p.5).

¹⁵ “É um processo de transformação de um tratamento em outro no qual há mudança de sistema de registro com a conservação da referência ao objeto estudado” (PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p.5).

- Tratamento: é um processo de transformação de uma representação interna para outro registro de representação, como o cálculo e a paráfrase. Um exemplo é o do cálculo, que é uma forma de tratamento próprio das escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo de limite de uma função, cálculo integral de uma função, cálculo proposicional...); “São operações que envolvem transformações de registro e que ocorrem sobre o mesmo sistema semiótico de representação. Ou seja, é a transformação dessa representação no próprio registro em que ela foi formada” (DIONÍZIO; BANDT, 2012, p. 12).

Falaremos de tratamento quando as atividades forem agrupadas e confundidas naquilo que geralmente se chama de tarefas de produção e tarefas de compreensão. A produção de uma resposta, de um texto ou de um esquema, simultaneamente mobiliza a formação de representações semióticas e seu tratamento. A compreensão de uma questão, de um texto ou de uma imagem, mobiliza os de conversão e formação ou as três atividades cognitivas (DUVAL, 1999, p. 36, tradução nossa).

Existem dois tipos de tratamentos no funcionamento do desenvolvimento cognitivo do pensamento humano e que se complementam, tendo a “função de fornecer a percepção imediata da consciência de unidades de informação cada vez mais ricas, de modo que possa visar objetos mais complexos ou mais gerais” (DUVAL, 1995, p. 35, tradução nossa). São eles:

Os tratamentos quase instantâneos: aqueles realizados antes mesmo de percebidos e que produzem as informações e os significados de que se têm consciência. É resultante da prática, como a leitura, escrita, desenho. Os tratamentos intencionais: aqueles que se relacionam com as características visuais de um objeto, o qual o sujeito vê e percebe, como a contagem das faces, arestas e vértices de um poliedro.

Chamamos de conversão a transformação da representação em um registro de representação de um mesmo objeto em outro registro, como o uso da ilustração, de gráficos de funções. Como exemplo, a tradução de um texto em uma ou mais expressões algébricas correspondentes é uma conversão da representação dessas expressões da língua materna para o registro algébrico. “O termo conversão é utilizado por ele para denotar as transformações de registros de representação semiótica que ocorrem quando há mudança de sistema semiótico de representação em referência ao mesmo objeto matemático” (DIONÍZIO; BANDT, 2012, p.13).

Além disso, “segundo a Teoria dos Registros de Representação, é a atividade de conversão a responsável pela construção do conhecimento, ou seja, pela apropriação do saber” (PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p. 6). Desta forma, devemos considerar que

[...] levar em conta a existência de muitos registros de representação, bem como, as atividades de conversão entre os registros, são, para Duval, imprescindíveis para a compreensão dos objetos matemáticos no ensino da matemática. É isto que possibilitará a diferenciação entre o objeto e sua representação (FLORES, 2006, p. 4).

A coordenação¹⁶ de diferentes registros não ocorre de forma natural. Devemos diferenciar essas unidades significativas de cada registro como objeto da aprendizagem, possibilitando a apreensão¹⁷ do que ela representa.

Segundo Duval “em termos concretos, é necessário ser capaz de explorar todas as possíveis variações de uma representação em um registro, prevendo, ou observando, as variações concomitantes de representação no outro registro” (1995, p. 78, tradução nossa).

Segundo Henriques e Almouloud (2016) o termo *conversão* não é tão simples como o de tratamento, muitas vezes é utilizado de maneira errônea por estudantes e pesquisadores, referindo-se ao *registro* e não à *representação*, outras vezes não evocando o objeto representado na conversão. “Para que se realize (a conversão) é necessário seguir certos procedimentos metodológicos bem definidos e estabelecer relações entre elementos das unidades significativas em cada registro” (DIONÍZIO; BANDT, 2012, p. 13).

3.1.1. Teoria dos registros de representações semiótica em Geometria

Em relação ao ensino da Geometria, Duval (1995) menciona que os tratamentos são realizados em um dos registros mais acessíveis ou manipuláveis, na escrita simbólica ou na representação gráfica, permitindo reconverter em uma representação do registro inicial.

Uma análise semiótica sobre a determinação das unidades básicas que constituem este registro, as possibilidades de sua articulação em figuras e a modificação das figuras obtidas, é pré-condição para uma descrição precisa dos diferentes tratamentos matematicamente relevantes neste registro (DUVAL, 1995, p. 175, tradução nossa).

A coordenação entre os tratamentos específicos se apropria de dois tipos de registros: por meio da percepção visual nos tratamentos figurativos (designando a figura e suas propriedades) e, dos discursivos (declarando as definições, teoremas etc.) por meio da compreensão da língua materna, sendo realizados interativamente de forma concomitante.

¹⁶ “A coordenação é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos” (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 470).

¹⁷ “As operações cognitivas sobre as figuras geométricas com fins heurísticos de descoberta da resolução do problema” (SOUZA; MORETTI; ALMOULOU, 2019, p. 328).

Segundo Duval (1995) os problemas relacionados à aprendizagem da Geometria estão diretamente ligados a falta de coordenação entre os tratamentos originados nos registros figurativos e dos discursivos, além da má utilização dos tratamentos pertinentes e espontâneos utilizados em cada um dos dois registros. Além disso, segundo o mesmo autor (1994), dois problemas relacionados à utilização de figuras são: a persistência de visualizar primeiramente as formas e propriedades já reconhecidas e a incapacidade de relacioná-la com o problema. “Existe, portanto, uma lacuna entre a visão de uma figura, isto é, sua apreensão espontânea perceptiva, e a maneira matemática de olhar para ela” (DUVAL, 1994, p. 122, tradução nossa).

3.1.1.1. Apreensões de uma figura

A utilização do uso de figuras na Geometria é explicada por Duval (1994) como uma representação de uma situação geométrica de forma mais fácil de entender do que sua apresentação em forma discursiva. Para que haja uma figura é necessário que haja uma identificação de alguma coisa perceptível, como o número de dimensões, forma, contorno, tamanho, orientação, textura, cor etc.

Nela temos uma unidade básica representativa importante, a visual, classificada por meio das unidades figurativas elementares. As possibilidades de tratamentos utilizados dependerão das modificações que ocorrem da relação da parte com o todo, como a visualização dependendo do seu posicionamento. Ocorre primeiramente por meio do que ouvimos e do que percebemos. “Não pode haver ensino de geometria que não leve em conta as diferentes apreensões a que uma figura dá origem” (DUVAL, 1995, p. 184, tradução nossa).

É necessária uma aprendizagem para desenvolver uma maneira de observar cada um dos quatro tipos de apreensão de uma figura. Esses processos cognitivos de apreensões da figura estão emaranhados cooperativamente e cognitivamente sob as seguintes operações específicas conforme percebemos no quadro 2.

Quadro 2 - Processos cognitivos de apreensões de uma figura

Apreensão dos registros figurais	Perceptiva	Na qual se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada.
	Operatória	Na qual se operam modificações na figura do tipo: Mereológica (modifica uma figura sem modificar sua dimensão), ótica (ver em profundidade ou em perspectiva) e posicional (deslocamento em relação a um referencial).
	Discursiva	Na qual se opera a coordenação entre figura e discurso.
	Sequencial	Solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição.

Fonte: Scheifer; Brandt (2020, p. 154)

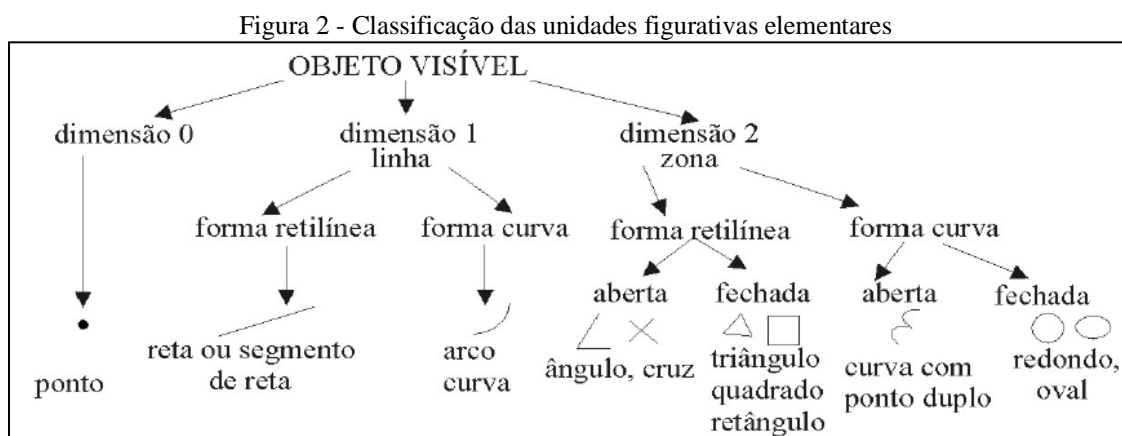
Apreensão perceptiva é a maneira mais instantânea de identificar ou reconhecer as diferentes unidades figurais que são discriminadas em uma figura em uma situação geométrica, sua forma ou objeto por meio da organização em que se encontra ou em conformidade com os indicadores intrafigurais¹⁸, cujos tratamentos cognitivos são realizados inconscientemente.

Apreensão operatória é a maneira de realizar as modificações iniciais de uma figura e sua reorganização perceptiva tanto por meio de tratamentos realizados mentalmente como fisicamente, independentemente do conhecimento matemático.

Apreensão discursiva é a maneira de explicar as propriedades matemáticas de uma figura por meio da interpretação dos seus elementos vinculados ao enunciado, indicando as hipóteses observadas e com o objetivo de realizar a demonstração. Segundo Scheifer e Brandt “a apreensão discursiva é que torna a figura passível de interpretações e entendimento, e só ocorre quando há domínio da apreensão perceptiva. Muitas vezes, uma contrapõe a outra, porém não pode ser dissociada uma da outra” (2020, p. 165).

Apreensão sequencial é a maneira de instigar a reprodução ou construção da figura, que dependerá das propriedades matemáticas que serão reconhecidas e das limitações das ferramentas utilizadas.

Devemos fazer uma interação entre os tratamentos figurais¹⁹ por meio de fenômenos de congruência na movimentação entre os registros, da utilização da apreensão perceptiva, da operatória, a da exploração heurística de uma situação. Antes de compreender melhor essa interação, observamos na figura 2 como as unidades figurativas elementares são classificadas.



Fonte: Duval (1995, p. 177, tradução nossa)

¹⁸ “Indicadores intrafigurais são, por exemplo, diferenças de tamanho ou orientação entre certas unidades figurativas que constituem a imagem do que é visto” (DUVAL, 1994, p. 124, tradução nossa).

¹⁹ “Os tratamentos figurais dizem respeito ao registro das figuras independente de todo conhecimento matemático, e são vinculados à possibilidade de modificações que podem efetuar-se nas figuras. Essas modificações podem ser óticas ou posicionais, e podem ser efetuadas física ou mentalmente” (SCHEIFER; BRANDT, 2020, p. 159).

Segundo Duval (1995) toda figura aparece como a combinação das unidades figurativas elementares entre as variações visuais dimensionais (ponto, linha, área) e qualitativas (variação de forma, tamanho, orientação, granulação, cor etc.). A apreensão perceptiva tende a favorecer o reconhecimento de certas unidades figurais, que nem sempre estão dispostas no enunciado ou as que são essenciais para resolver o problema. A apreensão operatória tende a modificar a figura em subfiguras que não são perceptíveis inicialmente, permitindo formar subsequências de figuras de mesma dimensão por meio dos dados e perguntas levantadas na exploração da figura. A exploração heurística das figuras tende a privilegiar as unidades figurais de dimensão dois (ângulos, figuras planas, curva em um ponto como na forma de um i , curva em forma de um e , elipses e circunferência), em relação às de dimensão inferior (ponto, reta ou semirreta, arco ou curva), pois segundo Duval “uma figura desempenha um papel heurístico se permitir trabalhar na dimensão maior que das unidades figurativas que representam cada um dos objetos do raciocínio” (1995, p. 171). Além disso, “a mesma observação pode ser feita para a geometria no espaço” (ibidem, p. 171).

3.2. As ideias de Gutiérrez

De acordo com Gutiérrez (1992) o aluno ao estudar com Geometria espacial e ao lidar com os objetos tridimensionais acaba usualmente explorando a manipulação de objetos físicos reais ou virtuais, realizando a leitura e desenho da sua representação no plano. Ainda segundo o autor (1992, p. 35, tradução nossa), mesmo que a manipulação desses objetos físicos seja mais fáceis para o aluno, eles ainda “não têm consciência dos vínculos entre esses movimentos com os movimentos mentais requeridos em outros contextos”. Além disso, a sua representação plana é a mais usada no contexto escolar, mas “as mais difíceis de serem manipuladas mentalmente”.

Desse modo, Gutiérrez (1996a) esclarece a contribuição de imagens mentais para o nosso pensamento como fundamental no processo de aquisição de conhecimentos. Segundo o autor, a imagem mental é “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais” (p. 7, tradução nossa). Assim sendo, um modelo concreto de um objeto é fundamental para ajudar um aluno a fazer a representação visual para gerar uma imagem mental.

Mas pode acontecer que uma imagem em algum momento seja inadequada para o aluno em relação a uma outra imagem do mesmo conceito. Quando isso ocorre D’Amore (2007) afirma que temos uma *misconception*, ou seja, uma concepção errada do conceito, criando assim

um *conflito* entre a imagem que o aluno acreditava como certa, com a nova imagem, ao ampliar os limites do conceito.

Muitas vezes para se chegar à construção de um conceito devemos passar por uma *misconception* momentânea. Um bom exemplo é o da construção do conceito do paralelepípedo, no qual o desenho do professor ou das figuras nos livros didáticos, na maioria das vezes apresenta quatro faces retangulares, sendo uma delas a base, e duas quadradas, criando assim uma imagem mental do paralelepípedo. Até que um dia, o aluno se depara com um paralelepípedo com toda as faces retangulares, ou com as faces quadradas como base, ou até mesmo com um paralelepípedo oblíquo, dando início com uma *misconception*, conflito entre a imagem inicial e intuitiva com a nova imagem.

Porém, chegará o momento em que a imagem mental criada resistirá a todo estímulo diferente, incluindo todas as argumentações novas relativa ao conceito. Nesse caso, D'amore (op. cit.) explica que temos um *modelo* do conceito, ou seja, a imagem que melhor define todas as informações em relação às solicitações anteriores. Vale à pena ressaltar que:

Do ponto de vista metodológico, os pesquisadores não devem pedir aos sujeitos que descrevam suas imagens mentais enquanto estão resolvendo uma tarefa, já que os sujeitos podem não estar cientes de suas próprias imagens (como é o caso dos jovens estudantes da escola primária) ou, se eles estavam cientes delas, o diálogo certamente poderia distorcer o processo de raciocínios nos sujeitos (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 11, tradução nossa).

A observação de um objeto e a obtenção de suas características aparentemente óbvias pelo processo visual não é tão simples assim, pois é preciso que essa habilidade cognitiva esteja desenvolvida. A visualização é uma habilidade importante para a pessoa ser capaz de pensar naquilo que não está diante dos olhos. Segundo Gutiérrez (1996a), a visualização em Matemática é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos mentais ou físicos para resolver problemas ou provar propriedades visuais ou espaciais. Desta forma, promover a visualização em Matemática e, nas ciências, se justifica segundo Bloom (1988), tanto na importância de se ensinar Geometria, assim como no seu papel nas atividades do dia a dia.

Vamos começar a distinguir visualização e representação para podermos compreender melhor esse processo no ensino e aprendizagem da Geometria. Segundo DUVAL (1999, p. 3, tradução nossa) a representação se refere a “um grande intervalo de atividades de significado: crenças firmes e holísticas sobre algo, várias maneiras de evocar e denotar objetos, como as informações são codificadas”, e a visualização significa “ênfatar imagens e intuição empírica de objetos e ações físicas”.

Esse processo de visualização “[...] precisa de um bom tipo de gatilho ou estímulo, então diferentes tarefas estimularão imagens diferentes” (BISHOP, 1988, p. 190, tradução nossa). Segundo Catalá et al. (1995) os estímulos visuais para obter uma adequada percepção espacial no desenvolvimento desse processo poderá ser feito por meio do uso de modelos concretos, desenhos, dobraduras e/ou imagens na tela do computador.

A habilidade de visualização, segundo Gutiérrez (1996a), pode ser desenvolvida por dois tipos de processos: o primeiro é por meio da interpretação de informações visuais usadas para criar as imagens mentais, e a segunda por meio da interpretação de imagens, para gerar as informações pelo processo de observação, análise das imagens mentais, e transformação das imagens mentais em outras imagens mentais gerando outros tipos de informações.

Os diferentes tipos de visualização de que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhes seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 78).

Para que o aluno realize processos de imagens mentais para resolver um certo tipo de problema geométrico é preciso que tenha adquirido algumas das habilidades de visualização. As principais segundo Gutiérrez (1996a) são:

- a) Percepção do terreno: identificar uma figura específica isolando-a de um plano de fundo;
- b) Constância perceptual: reconhecer as propriedades de um objeto real ou mental independentemente de tamanho, cor, textura ou posição;
- c) Rotação mental: gerar as imagens mentais dinâmicas em configuração de movimentos diferentes;
- d) Percepção de posições espaciais: relacionar vários objetos, imagens e imagens mentais para si próprio;
- e) Percepção de relações espaciais: relacionar vários objetos, imagens e imagens mentais uns com os outros;
- f) Discriminação visual: comparar vários objetos, imagens e imagens mentais identificando semelhanças e diferenças.

A discriminação pode ser dada por meio: da apreensão perceptiva identificando pela experimentação de uma forma ou um objeto; da apreensão discursiva pelo enunciado ou explicação de um desenho usando a língua materna (linguagem natural), da apreensão formal (escrita); da apreensão sequencial pela construção de diagramas, símbolos ou figuras, etc.; da

apreensão operatória pelas modificações e transformações da figura. “Para aprender geometria é preciso estabelecer as ligações entre as apreensões perceptivas e operatórias que denominamos de visualização” (SOUZA; MORETTI; ALMOULOU, 2019, p. 330).

Para contribuir na aquisição cognitiva das apreensões de Duval (1995) na aprendizagem da Geometria, utilizaremos as fases do modelo van Hiele no desenvolvimento das tarefas propostas, pois “propõe uma organização de ensino que ajuda os alunos a construir as estruturas mentais para que alcancem um nível mais alto de raciocínio” (SALVADOR et al., 1994, p. 13, tradução nossa).

Como as primeiras interpretações do modelo van Hiele focavam no raciocínio geométrico sobre as figuras planas, conforme afirma Gutiérrez (1992, p. 33, tradução nossa), os resultados mais relevantes de pesquisas usando este modelo “referem-se à Geometria plana e, quase sempre, a polígonos e conceitos relacionados”, e acrescenta ainda que “sabemos muito pouco sobre os níveis em outras áreas da Geometria, como a Geometria tridimensional”. Assim, ao estenderem os níveis para as figuras espaciais, ocorreu o surgimento de “dificuldades de interpretação e consistência” (BATTISTA, 2007, p. 847). Por isso, para conceituar a evolução da geometria ensinada por meio da modelagem do espaço físico, utilizaremos os diferentes paradigmas de Parzysz (2006).

3.3. O modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele

O modelo van Hiele foi criado pelo casal Pierre Marie van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geoldof, na década de 1950, com base nas dificuldades que seus alunos do curso secundário da Holanda apresentavam sobre a Geometria, e da falta de entendimento da comunicação geométrica entre professores e alunos. Teve origem nas teses de doutorado na Universidade Real de Utrecht, Holanda, em 1957.

Dina van Hiele-Geldog focava em experimentos educacionais investigando como os alunos evoluíam, e morreu logo após a conclusão da tese. Pierre Marie van Hiele focava nos níveis²⁰ de aprendizagem dos alunos em Geometria, e assumiu o estudo após a morte de sua esposa, procurando responder por quê os alunos tinham problemas em aprender Geometria. Ele divulgou a teoria em publicações posteriores.

²⁰ Segundo Gutiérrez é “uma descrição dos modos de pensar que podem ser encontrados na geometria do aluno” (1992, p. 32, tradução nossa)

Dina e Pierre observaram que a expansão do raciocínio geométrico nas crianças ocorria sequencialmente e consistia no desenvolvimento de cinco níveis hierárquicos de aprendizagem. Esses níveis são independentes se não estão vinculados às idades dos alunos. O aluno só poderia passar para o nível seguinte quando atingisse maturidade do nível anterior. De acordo com Dina “o objetivo das primeiras situações de aprendizado é permitir que os alunos experimentem a perspectiva da geometria de maneira empírica” (VAN HIELE, 1957b, p. 191, tradução nossa).

O primeiro nível de pensamento geométrico, segundo Pierre van Hiele (1986) é o Nível básico (ou Nível 1) da Geometria, também conhecido por alguns autores como nível de reconhecimento ou visualização, e consiste em identificar, comparar, e nomear figuras pela sua aparência global. É baseado em atividades de reconhecimento da figura relacionando-a com seu nome, geralmente comparando com outros objetos semelhantes. Segundo van Hiele, corresponde em analisar as estruturas geométricas globais usando a visualização, ou seja, “quando o aluno pode manipular as características conhecidas de uma figura familiar” (VAN HIELE, 1957a, p. 144, tradução nossa).

Segundo De Villers (2010) deve-se destacar que determinados tipos de atividades de construção (com software de Geometria dinâmica ou com lápis e papel) são inadequados no primeiro nível de van Hiele. Neste nível deve-se fornecer ao aluno esboços prontos de figuras concretas ou virtuais para que ele possa fazer a investigação visual.

O aluno consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e reproduzir um desenho com papel quadriculado. Por exemplo, pode reconhecer um dado, chamá-lo de cubo, mas não é capaz de reconhecer as seis faces quadradas (VIANA, 2014, p. 24).

O segundo nível, conhecido como análise, consiste em analisar o objeto geométrico por meio de seus componentes e reconhecer suas propriedades, aprendendo a terminologia adequada. Corresponde em ordenar um conjunto de princípios das estruturas que foi analisado no primeiro nível, ou seja, “quando o aluno consegue utilizar relações conhecidas entre as figuras” (VAN HIELE, 1957a, p. 134, tradução nossa).

Ao explorar um objeto geométrico real ou virtual o aluno observa e analisa suas propriedades, destaca a diferença de algumas, mas ainda não relaciona com outras figuras. “Quando os alunos começam a perceber como o mesmo esquema pode ser aplicado repetidamente, o raciocínio geométrico sobre o objeto é reconhecido” (VAN HIELE, 1957b, p. 38, tradução nossa).

Por meio de atividades exploratórias é possível reconhecer e nomear grupos de figuras, “analisar semelhanças (o que é mais difícil do que analisar diferenças) e podem separar as figuras em poliedros e não poliedros” (VIANA, 2014, p. 25). Com base nisso, então seria possível usar figuras reais ou virtuais no auxílio da construção do desenvolvimento para o nível seguinte.

De acordo com van Hiele (1957b) por meio da observação, as relações e as ordenações geométricas podem evoluir para o terceiro nível, que é conhecido por alguns autores como síntese, abstração, dedução informal ou ordenação. O aluno distingue as relações entre as figuras feitas no nível anterior, mas neste nível “é necessário entender o sistema lógico como um regime dedutivo, ou seja, também para distinguir teoremas, definições e axiomas” (VAN HIELE, 1957a, p. 119, tradução nossa).

O terceiro nível consiste em perceber que uma propriedade pode decorrer da outra, fazer uma argumentação lógica informal, e ordenar as figuras por classes. “O aluno, neste nível, ordena logicamente figuras e entende inter-relações de propriedades tanto das figuras quanto entre elas” (VIANA, 2014, p. 26).

O quarto nível, conhecido por alguns autores por dedução ou dedução formal, consiste em desenvolver um processo dedutivo e de demonstrações, reconhecendo condições necessárias e suficientes. O aluno é capaz de solucionar um problema, ou seja, “é capaz de encontrar respostas de problemas geométricos usando diferentes soluções e demonstrando-as” (VAN HIELE, 1957a, p. 119, tradução nossa). Além disso, “o aluno compreende o significado da dedução e é capaz de construir demonstrações de teoremas. Em geral, esse nível não é alcançado no Ensino Fundamental” (VIANA, 2014, p. 26).

O último nível, conhecido como rigor, consiste em estabelecer teoremas em diversos sistemas, sem ser o euclidiano. Normalmente “estudantes de nível superior podem atingir esse nível” (VIANA, 2014, p. 26).

Para a compreensão dos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico propostos pelos van Hiele (1957a, 1957b), o quadro 3 apresenta um resumo das características principais de cada nível.

Quadro 3 - Descrição dos Níveis de van Hiele

<i>As figuras são julgadas por sua aparência.</i>		
Nível 1: Básico	Palavra usada	Nomear uma figura corresponde a dar nome para a figura.
	Rotinas	Reconhecimento direto como uma experiência perceptiva que é auto evidente.
	Narrativas usadas	Descrições de como se percebe. Este aqui (quadrado) parece diferente deste (um retângulo).
	Mediadores visuais	Formas geométricas em 2-D, a abertura de ângulos, posições das linhas ou orientações físicas de uma figura são partes do processo de reconhecimento direto.

Nível 2: Análise	<i>Figuras são portadoras de suas propriedades.</i>	
	<i>Palavra usada</i>	Nomear uma figura está associado às suas propriedades.
	<i>Rotinas</i>	Reconhecimento direto com objeto incluindo verificação, medição e comparação de propriedades parciais de figuras.
	<i>Narrativas usadas</i>	Descrições de propriedades visuais. Os quadrados não são retângulos porque têm todos os lados iguais.
	<i>Mediadores visuais</i>	Formas geométricas em 2-D, a abertura de ângulos, posições de segmentos ou orientações físicas de uma figura são partes do processo de reconhecimento direto e identificação de propriedades visuais.
Nível 3: Síntese	<i>As propriedades são ordenadas e são deduzidas umas das outras.</i>	
	<i>Palavra usada</i>	Nomear uma figura significa a realização da figura em relação às suas narrativas defendidas.
	<i>Rotinas</i>	Incluindo rotinas no nível anterior com o objeto produzindo narrativas defendidas.
	<i>Narrativas usadas</i>	Descrições de uma definição de figura e ações em uma figura. Retângulo é um paralelogramo com quatro ângulos retos.
	<i>Mediadores visuais</i>	Figuras, linhas e ângulos são partes do processo de identificação de condições necessárias e suficientes de uma definição.
Nível 4: Dedução	<i>Preocupa-se em pensar com o significado da dedução.</i>	
	<i>Palavra usada</i>	Nomear uma figura significa a verificação da figura em relação às suas narrativas declaradas e suas conexões com outras figuras.
	<i>Rotinas</i>	Uso de símbolos abstratos produzindo narrativas declaradas e fazendo conexões entre elas.
	<i>Narrativas usadas</i>	Descrições de relações abstratas. Construções de narrativas usando raciocínio dedutivo.
	<i>Mediadores visuais</i>	Figuras, linhas e ângulos são partes do processo de identificação de condições necessárias e suficientes de uma definição. Todos os mediadores visuais de nível anterior, além de símbolos abstratos, diagramas matemáticos.
Nível 5: Rigor	<i>Figuras são portadoras de suas propriedades.</i>	
	<i>Palavra usada</i>	Dar nome a uma figura significa a realização com suas narrativas declaradas e conexões com outras figuras na geometria euclidiana e não euclidiana.
	<i>Rotinas</i>	As rotinas estão ligadas à criatividade.
	<i>Narrativas usadas</i>	Descrições de relações abstratas na Geometria euclidiana e não euclidiana.
	<i>Mediadores visuais</i>	Símbolos matemáticos e artefatos usados na geometria euclidiana e não euclidiana.

Fonte: Wang (2016, pp. 36-38, tradução e adaptação nossa)

Para o desenvolvimento de cada nível geométrico, deve-se utilizar uma linguagem específica, o que significa que as terminologias vão mudando conforme os alunos vão avançando de níveis. Da mesma forma, as propriedades dos conceitos vão se refinando ao avançar de um nível para o outro. Para que essa progressão ocorra “as estratégias metodológicas, os materiais didáticos, o conteúdo e o vocabulário devem ser adequados ao nível de pensamento geométrico que o aluno está” (UTIMURA, 2015, p. 41).

No desenvolvimento cognitivo de cada nível, para que o aluno possa transitar para o nível seguinte, temos a possibilidade de utilizar cinco fases didáticas, que segundo Gutiérrez (1992, p. 32, tradução nossa) “são sugestões para os professores sobre como organizar o ensino de Geometria, a fim de facilitar e promover os alunos a passarem do seu nível atual de pensamento para o seguinte”. Segundo van Hiele (1957a), essas fases são:

Fase 1 – Investigação, também chamada por outros autores como fase da Informação ou Questionamento: o aluno investiga o material apresentado, e a relação entre professor e aluno é de manter um diálogo sobre o conceito em estudo. O professor informa os problemas a serem estudados, os materiais utilizados, as observações levantadas etc., e os alunos aprenderão a manejar e usar o material disponível. Permitem ao professor observar os conhecimentos prévios dos alunos e introduzir os vocabulários específicos do assunto, que são fatores importantes para a estruturação perceptiva. As palavras “evocam as diferentes relações incluídas na estruturação perceptiva que podem servir como ponto de partida para raciocínio subsequente” (VAN HIELE, 1957a, p. 29, tradução nossa).

Fase 2 – Orientação Direcionada ou Rígida: os alunos começam a explorar o material proposto em relação ao conceito e às estruturas características em estudo, apresentando a tarefa de modo progressivo, e fazendo-os descobrir, compreender e aprender suas propriedades, figuras etc. É orientado e mediado pelo professor levando em consideração o conhecimento do aluno com o intuito de emergir as ideias prévias e os conflitos cognitivos. Além disso, o professor deve estimular a autoestima considerando os pequenos acertos na atividade, e considerando o erro como parte da aprendizagem.

Fase 3 – Explicitação: de acordo com van Hiele (1957b, p.219, tradução nossa) “os resultados da manipulação de objetos materiais agora são expressos por meio de palavras”, nas quais as opiniões dos alunos são expressas verbalmente, refinando seu vocabulário, em um contexto de diálogo em grupo. O professor deve deixar os alunos trocarem suas experiências e justificarem suas opiniões, levando-os a analisarem suas ideias e as de seus colegas. Com os alunos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental não é interessante, segundo D’Amore (2007) introduzir ao mesmo tempo novos conceitos, vocabulários e símbolos, até que se tenham adquirido um domínio suficiente sobre eles. O professor deve permitir que os alunos usem as novas figuras, conceitos ou propriedades a seu modo.

Fase 4 – Orientação Livre: o professor deve colocar problemas que possam ser resolvidos de diversas formas, nos quais o aluno possa aplicar os conhecimentos adquiridos nas fases anteriores. Esses problemas não podem ser exercícios de aplicação, mas sim situações novas, em aberto, de múltiplas etapas, que permitem várias maneiras de serem completadas. É uma fase de controle de qualidade do processo, pois “a descoberta de possíveis falhas indicará o interesse de retornar à fase anterior. E a evidência de um grau razoável de sucesso indicará a vantagem de passar para a fase posterior” (SALVADOR et al., 1994, p. 13, tradução nossa).

Fase 5 – Integração ou Fechamento: os alunos ainda devem atingir uma visão geral dos conteúdos e métodos do que foi estudado. Segundo Kaleff (2008) se trata de uma revisão e

síntese de integração global entre os materiais didáticos, conteúdos e as relações estabelecidas. O professor deve fornecer experiências e observações globais, sem comportar novos conceitos ou propriedades.

Apesar de o trabalho dos van Hiele focar no raciocínio geométrico sobre as figuras planas, consideramos importante trata-lo nesta pesquisa, pois utilizaremos as fases deste modelo para a contribuição da aquisição cognitiva das apreensões de Duval (1995) no desenvolvimento das tarefas propostas. Além disso, as contribuições das críticas a esse modelo permitirão relacioná-lo como estudo com as figuras espaciais.

No modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, Pierre van Hiele (1986) declara que o processo da aprendizagem em Geometria progride em níveis sequenciais e hierárquicos em uma evolução que não depende da idade, e sim da maturidade e das experiências vividas pelo aluno. Inicialmente, os níveis eram discretos e só seria possível mudar de nível quando o aluno tivesse desenvolvido as características do nível anterior.

Algumas críticas sobre o modelo van Hiele foram levantadas no final do século passado pelo fato de uma mesma sala de aula apresentar alunos em diferentes níveis do pensamento geométrico. Além disso, Gutiérrez (1992) afirma que essa progressão entre os níveis representa uma preocupação educacional desse modelo, pois “esse progresso não pode ser ensinado, mas é altamente dependente do tipo de ensino” (p. 32, tradução nossa). Apesar disso, Gutiérrez (1996b) afirma que os níveis de van Hiele nos dão a possibilidade de desenvolver a visualização e incorporá-la nas atividades escolares de Matemática.

A falta de generalização das atividades propostas na utilização desse modelo é uma das críticas levantadas, pois sobrecarrega o professor a pensar em cada atividade de forma isolada “o que conduz que cada situação ou estratégia aplicada tenha de ser revista” (PANDISCIO; ORTON, 1998, apud AIRES; CAMPOS; POÇAS, 2015, p. 158).

Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991) relatam que a continuidade e efetivação de um nível específico de van Hiele podem demorar meses ou anos, e quando o aluno sente dificuldade em uma atividade específica acaba voltando ao nível mais baixo para depois progredir no nível superior. Isso contraria a forma hierárquica que o modelo van Hiele era até então exposto, mostrando que os alunos podem estar desenvolvendo dois níveis ao mesmo tempo, pois “nem todos os alunos usam um único nível de raciocínio, alguns deles usam vários níveis ao mesmo tempo, provavelmente dependendo da dificuldade do problema” (GUTIÉRREZ; JAIME; FORTUNY, 1991, p. 250, tradução nossa)

Indo de acordo com Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991) temos que Clements, Battista e Sarama (2001, p. 126, tradução nossa) afirmam que podem existir “diferentes níveis de

pensamento geométrico e do desenvolvimento desses níveis nos alunos”, ou seja, os alunos podem desenvolver simultaneamente diversos níveis, contrariando a forma hierárquica que os van Hiele expuseram.

Van Hiele alega que todos os alunos começam no nível 1, ou seja, tem a capacidade de reconhecer as figuras geométricas comuns pela visualização, mas Senk (1989) é relutante a esse conceito reconhecendo em sua pesquisa a existência de um não nível ou nível 0, que precede o nível inicial de van Hiele. Clements e Battista (1992) também defendem a existência do nível 0 chamando-o de nível de pré-reconhecimento. Nesse nível os alunos podem não conseguir identificar formas comuns por não ter as imagens mentais necessárias, ou seja, as representações mentais daquele objeto ainda não foram construídas.

Nível 0: Pré-Reconhecimento. As crianças percebem formas geométricas, mas talvez por causa de uma deficiência na atividade perceptiva, possam atender apenas a um subconjunto das características visuais de uma forma. Eles são incapazes de identificar muitas formas comuns. Eles podem distinguir entre figuras que são curvilíneas e aquelas que são retilíneas, mas não entre figuras da mesma classe, isto é, eles podem diferenciar entre um quadrado e um círculo, mas não entre um quadrado e um triângulo (CLEMENTS; BATTISTA, 1992, p. 429, tradução nossa)

Clements e Sarama (2011) também defendem a ideia desse nível 0 por meio de pesquisas que realizaram, chamando-o de nível pré-cognitivo. A transição desse nível para o nível 1 (básico) é, segundo os autores, um momento de conflito entre os protótipos visuais com sua análise. Por esse motivo que Utimura e Curi esclarecem que “podemos relacionar esses conflitos com o que Parzysz aponta ao referir-se aos pólos do visto e do sabido” (2016, p.51). Desta forma, consideraremos a existência desse nível 0 antes da apropriação dos diferentes paradigmas de Parzysz (2006) no estudo com as figuras espaciais, modelo esse que vamos considerar no item subsequente.

3.4. O modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de Parzysz

Parzysz (2006) considerou vários paradigmas distintos ao conceituar a evolução da Geometria ensinada por meio da modelagem do espaço físico, em um processo que vai da observação de materiais, tais como figuras ou maquetes, para a demonstração, apoiadas em entidades teóricas, ou seja, da Geometria da observação para a Geometria da demonstração.

De acordo com Dias (2009) Parzysz compara os dois primeiros níveis de van Hiele, visualização e análise, como a fase da Geometria que se utiliza do concreto, na qual os objetos

são físicos e a validação ocorre de forma perceptiva. Compara também os dois últimos níveis de van Hiele, dedução formal e rigor, com a fase da Geometria que se utiliza da teoria, na qual os objetos são abstratos e a validação ocorre por processos de demonstração. Dessa forma, Parzysz (2006) coloca o terceiro nível de van Hiele, dedução informal, como um nível de transição entre essas duas fases geométricas, do concreto para o abstrato. Na figura 3 podemos perceber essa articulação entre os modelos de van Hiele e de Parzysz.

Figura 3 - Interpretação de Parzysz para os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele



Dias (2009, p.21)

Apoiado nas ideias ligadas aos dois primeiros níveis de van Hiele para explicar a transição da Geometria da observação para a Geometria da demonstração, nos paradigmas geométricos de Houdement e Kuzniak (2003) para esclarecer a passagem da Geometria natural para a formal, e em Henry (1999) que diferenciou os tipos de relações com o espaço no ensino e aprendizagem da Geometria, Parzysz chegou a quatro paradigmas que se articulam conforme o quadro 4.

Quadro 4 - Construção do conhecimento geométrico de Parzysz

Geometrias não axiomáticas			Geometrias axiomáticas	
Tipo de Geometria	Concreta ²¹ (G0)	Espaço-gráfica (G1)	Proto-axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validações	Perceptivo-dedutivos		Hipotético-dedutivos	

Fonte: Parzysz (2006, p. 130, tradução nossa)

A Geometria Concreta (G0) é o nível da visualização e materialização validado apenas pelos seus aspectos perceptíveis da realidade ou do material concreto. Os objetos ainda não são geométricos, pois são considerados materiais com todas as suas características como matéria, cor etc.

A Geometria Espaço-gráfica (G1) é o nível em que os objetos físicos em G0 recebem uma representação gráfica, como um esboço ou desenho, no qual o aluno se apoia na manipulação dos objetos concretos e no uso de instrumentos. É a primeira fase da abstração para constatar visualmente propriedades características do objeto para obter uma representação

²¹ Utimura e Curi (2016) observam que Parzysz não considera G0 como uma Geometria propriamente dita, pois “seus objetos são realizações materiais com todas as características, como cor e texturas, influenciando nas observações e nas constatações” (UTIMURA, CURI, 2016, p. 48).

gráfica. Segundo Dias (2009, p. 24) “a validação é baseada em comparação visual e sobreposições, apoiadas por medições realizadas com régua graduada, compasso, esquadros”.

A Geometria Proto-axiomática (G2) é o nível no qual ainda se pode utilizar os objetos físicos e representações feitas nos níveis anteriores, realizando o levantamento de hipóteses e premissas intuitivamente. De acordo com Dias (2009, p. 25) “a validação se dá por meio de um discurso dedutivo aplicado aos dados do enunciado do problema, se apoiando nos postulados e axiomas da geometria euclidiana”.

A Geometria axiomática (G3) é o nível no qual os axiomas são explicitados de forma completa podendo ou não ser usado o objeto físico como parte do processo de validação, já que agora os objetos são considerados teóricos. Conforme Dias (2009, p. 23) “a validação é baseada em teoremas e axiomas. Nesta Geometria, uma afirmação que derive de uma observação da realidade ou não, será verdadeira se puder ser demonstrada”.

Na escola, a Geometria trabalhada nos anos iniciais é a espaço-gráfico (G1) na qual as tarefas estão ligadas ao uso de instrumentos, materiais concretos ou figuras, utilizando o campo visual e perceptivo. No ensino, G1 e G2 estão interligadas na resolução de um problema, no qual uma pode intervir na outra, colocando em ação a dialética do ponto do sabido e do ponto do percebido, para explorar as representações do espaço em Geometria. Segundo Parzysz, trata-se de um conflito na interpretação do desenho entre os polos do que se *vê*, ou seja, do que é “percebido (as propriedades induzidas da observação do desenho)” e do que se *sabe*, ou seja, do “sabido (as propriedades geométricas dadas em um enunciado ou demonstradas)” (2006, p. 139, tradução nossa).

Em relação aos saberes geométricos dos professores dos anos iniciais, Parzysz (2006) propõe que é importante em sua formação saber diferenciar os paradigmas de G1, além de sugerir que G1 e G2 “têm um papel crucial na construção pelo aluno de sua relação com os saberes da geometria” (2006, p. 102). Além disso, a passagem entre G1-G2 é importante na educação básica, pois “é nessa transição que o aluno inicia a tomada de consciência da Geometria axiomática euclidiana, que deveria estar finalizada na transição de G2-G3” (DIAS, 2009, p. 26).

Consideramos que o conhecimento geométrico adquiridos pelos alunos e professores que atuam nos anos iniciais precisa atingir pelo menos o G1. Como nosso foco de estudo se restringe nos três primeiros anos do EF, posicionaremos nossos estudos em G0 e G1 e com a possibilidade de transição para o G2.

Nos próximos subcapítulos iremos informar o nosso quadro teórico na investigação do conhecimento geométrico mobilizado pelo professor dos aos iniciais do EF no ensino da Geometria Espacial Elementar.

3.5. As categorias do conhecimento do professor

Ao pensarmos sobre o conhecimento mobilizado pelo professor raciocinamos logo sobre o domínio que o professor tem acerca do conteúdo e a tarefa que irá lecionar, porém esse conhecimento não é apenas do conteúdo da matéria, pois se fosse assim, segundo Fernandez (2015), vários professores especialistas, universitários e pesquisadores deveriam ser excelentes professores, porém percebemos que muitas das vezes isso não acontecia e a aprendizagem com seus alunos não ocorria, pois “na prática, entretanto, não é só isso que caracteriza um bom professor” (p.502).

De acordo com Shulman (1986) é importante estabelecer “uma estrutura para classificar os domínios e as categorias de conhecimento do professor, por um lado, e as formas de representação desse conhecimento por outro” (SHULMAN, 1986, p.10, tradução nossa). Assim sendo, as dimensões centrais do conhecimento de conteúdo²² necessário para o ensino foram expostas por Shulman (op. cit.) em três categorias: o conhecimento específico do conteúdo²³ como “a estrutura substantiva e sintática da disciplina, incluindo compreender como afirmativas são justificadas, diferenças entre convenção e construção lógica” (PALIS, 2010, p. 433), o conhecimento curricular²⁴ como os “programas, materiais instrucionais, parâmetros, currículo horizontal e vertical” (Id., op. cit.), e o conhecimento pedagógico do conteúdo²⁵ que é o “conhecimento sobre ensinar e aprender” (Id., op. cit.).

Dessa forma, segundo Shulman (2001, 2005), as categorias da base do conhecimento do professor podem ser classificadas da seguinte maneira:

- Conhecimento do conteúdo;
- Conhecimento pedagógico geral, com especial referência aos princípios e estratégias mais abrangentes de gerenciamento e organização de sala de aula, que parecem transcender a matéria;
- Conhecimento do currículo, particularmente dos materiais e programas que servem como “ferramentas do ofício” para os professores;

²² Content Knowledge no original, em inglês.

²³ Subject-matter Content Knowledge no original, em inglês.

²⁴ Curricular Knowledge no original, em inglês.

²⁵ Pedagogical Content Knowledge no original, em inglês.

- Conhecimento pedagógico do conteúdo, esse amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional;
- Conhecimento dos alunos e de suas características;
- Conhecimento de contextos educacionais, desde o funcionamento do grupo ou da sala de aula, passando pela gestão e financiamento dos sistemas educacionais, até as características das comunidades e suas culturas; e
- Conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica.

(SHULMAN, 2001, pp. 174-175, tradução nossa)

Segundo Grossman, Wilson e Shulman (2005), “o conhecimento da matéria ocupa um lugar central na base de conhecimento do ensino” (p.21, tradução nossa). Porém, os cursos de formação de professores apresentam os assuntos a serem ensinados por meio do uso de materiais específicos, métodos, currículo e instrução, ou seja, “as aulas de metodologia de ensino têm sido tradicionalmente dedicadas às estratégias para o ensino da disciplina, não da disciplina em si” (p. 2, tradução nossa).

Shulman (2001, 2005) enuncia como uma das quatro fontes principais de conhecimento básicos para o ensino: “a bibliografia, os estudos acumulados em cada uma das disciplinas, o conhecimento acadêmico histórico e filosófico sobre a natureza do conhecimento nesses campos de estudo” (SHULMAN, 2005, p. 12, tradução nossa)

Tendo essa dimensão desenvolvida, o professor consegue identificar, definir e discutir conceitos, relacionando-os com outros conceitos da área e com os de outra disciplina. “O conhecimento ou falta de conhecimento do conteúdo pode afetar como os professores criticam os livros didáticos, como eles selecionam o material a ser ensinado, como estruturam seus cursos e como conduzem as instruções” (GROSSMAN, WILSON E SHULMAN, 2005, p.13, tradução nossa).

3.5.1. Os tipos de conhecimento necessários ao ensino

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008) as categorias do conhecimento do professor propostas por Shulman (1986) destacam o papel do conhecimento necessário para o ensino, declarando que elas são os paradigmas que faltavam na pesquisa sobre o ensino. Elas descrevem as dimensões gerais dos conhecimentos dos professores: o conhecimento do conteúdo, pedagógico do currículo e pedagógico do conteúdo. Além desses, o conhecimento dos alunos, de contextos educacionais e dos fins, propósitos e valores da educação, como dimensão do conteúdo específico.

Em relação à Matemática, Ball, Thames e Phelps (2008) definiram o conhecimento matemático para o ensino²⁶ com base nas pesquisas de Shulman, esclarecendo as habilidades necessárias para ensinar matemática. Eles afirmaram que os professores “precisam conhecer o material que eles ensinam; devem reconhecer quando seus alunos dão respostas erradas ou quando o livro fornece uma definição imprecisa”, além disso, “quando os professores escrevem no quadro, eles precisam usar termos e notações corretamente” (p.399, tradução nossa).

Os autores ainda subdividem o conhecimento do conteúdo nos domínios:

- *Conhecimento comum do conteúdo*: “refere-se a conhecimentos e habilidades matemáticas utilizados em qualquer situação que não envolva o ensino” (ALMEIDA et al., 2015, p. 4), como exemplo, quando o professor reconhece a resposta errada do aluno;
- *Conhecimento especializado do conteúdo*: “se refere a conhecimentos e habilidades específicas do professor que ensina matemática” (ALMEIDA et al., 2015, p. 4), como exemplo, quando o professor avalia a natureza do erro;
- *Conhecimento do conteúdo dos estudantes*: “relaciona conhecimentos matemáticos com conhecimentos sobre os alunos” (ALMEIDA et al., 2015, p. 4), como exemplo, quando o professor tem familiaridade com os erros comuns dos alunos e sabe quais são os erros mais propensos de acontecer;
- *Conhecimento de conteúdo e do ensino*: “relaciona conhecimentos matemáticos com conhecimentos sobre o ensino” (ALMEIDA et al., 2015, p. 4), como exemplo, quando o professor tem o conhecimento sobre o que e como ensinar.

O conhecimento de conteúdo e dos estudantes e o conhecimento de conteúdo e do ensino de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), e o conhecimento matemático para o ensino segundo Ball e Bass (2009), coincidem com as dimensões centrais do conhecimento de conteúdo necessário para o ensino identificado por Shulman (1986): o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento curricular e o conhecimento pedagógico do conteúdo.

O conhecimento matemático exposto por Ball e Bass (2009) é o conhecimento que difere o professor do especialista. Coloca o conhecimento matemático especializado em função do ensino, tendo como atribuições:

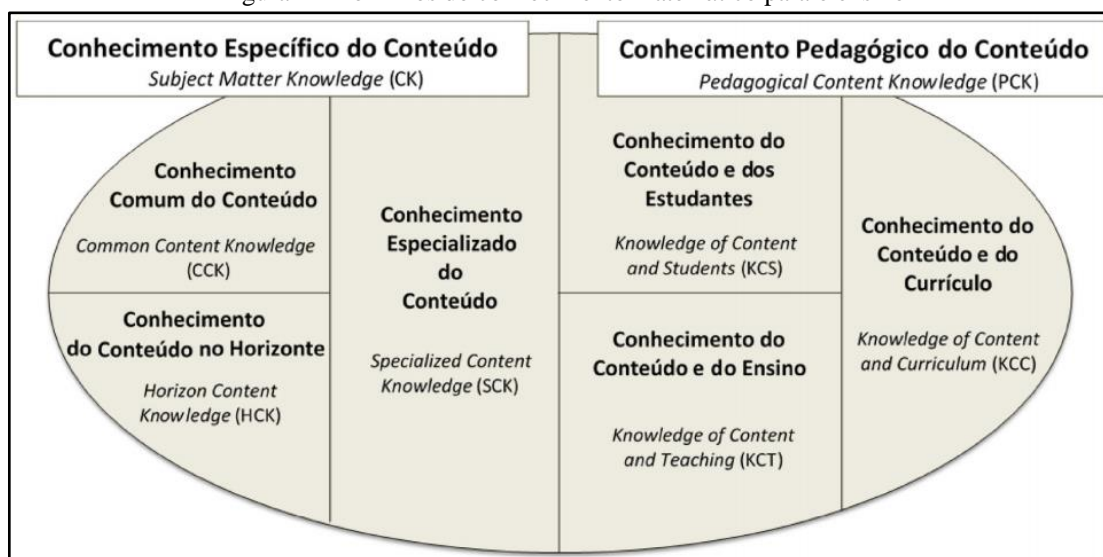
Identificar e trabalhar em direção ao objetivo matemático da lição; ouvir e interpretar as respostas dos alunos; analisar o trabalho do aluno; ensinar aos alunos o que conta como *matemática* e *matemática prática*; tornar o erro uma ponte proveitosa para o trabalho matemático; atender à ambiguidade de palavras específicas; decidir o que

²⁶ Mathematical Knowledge for Teaching no original, em inglês.

esclarecer, tornar mais preciso, deixar na linguagem apropriada ao aluno (BALL; BASS, 2009, p.4, tradução nossa).

A correspondência entre esses domínios de Ball, Thames e Phelps (2008) e as categorias iniciais de Shulman (1986) é expressa na figura 4.

Figura 4 - Domínios do conhecimento matemático para o ensino



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p.403, tradução RIBEIRO e OLIVEIRA, 2015, p. 315)

Essa maneira de colocar as categorias do conhecimento matemático para o ensino foi uma forma de representar os conhecimentos que um professor pode ter ao ensinar algum conteúdo matemático. Temos, por meio dele, que o conhecimento específico do conteúdo identificado por Shulman está subdividido nos domínios do conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo. Em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, este está subdividido nos domínios no conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do ensino. Temos também, um aspecto de sua teoria categorizado como o domínio do conhecimento do conteúdo no horizonte ou conhecimento do conteúdo horizontal²⁷, e o conhecimento do conteúdo e do currículo.

O conhecimento de conteúdo horizontal corresponde a como os assuntos estão relacionados no currículo, como exemplo, o professor que leciona matemática no terceiro ano do EF tem que saber como os conteúdos matemáticos que ele leciona se relacionam com as outras áreas do saber. Apesar de não haver maneiras de mensurar o conhecimento de conteúdo horizontal, ele orientará o professor em seu trabalho nos seguintes aspectos:

²⁷ É um subdomínio do conhecimento matemático para o ensino (MKT), uma teoria baseada em prática conhecimento da matemática decorrente do trabalho de ensino da matemática (BALL; BASS, 2009, p. 2, tradução nossa).

Fazer julgamentos sobre a importância da matemática; ouvir o significado matemático no que os alunos estão dizendo; destacar e sublinhar pontos-chave; antecipar e fazer conexões; notar e avaliar oportunidades matemáticas; capturar distorções matemáticas ou possíveis precursores para confusão temática ou deturpação (BALL; BASS, 2009, p.4, tradução nossa).

Ball (1993) destacou três dilemas na prática matemática ao se tentar ensiná-la de forma a respeitar o conteúdo e as individualidades de cada aluno, que são:

- *Representar o conteúdo*: refere-se a como o professor deve construir boas representações instrucionais e descobrir como usá-las;

É importante também levar em consideração que os professores construíram representações sobre processos pedagógicos, não apenas como produto da sua preparação profissional formal, mas também a partir de sua experiência como aluno nos níveis educacionais anteriores e sua conexão, das diferentes redes social ao seu redor, com outras manifestações disciplinares (SALAZAR, 2005, p. 15 tradução nossa).

- *Construir crianças como pensadores matemáticos*: coloca o professor como responsável em construir pontes entre o que os alunos estão pensando e compreendendo, o que já sabem e o que ainda irão aprender, por meio da capacidade de ouvir as crianças, separando as considerações relevantes do discurso do seu conhecimento;
- *Como criar e usar a comunidade*: refere-se à forma como as crianças ouvem as ideias uns dos outros, refinando e articulando ou revisando suas próprias ideias, e o papel do professor é fornecer um ambiente apropriado para isso.

3.6. Conhecimentos matemáticos mobilizados pelos professores

Deborah Ball (1988), em sua tese, explorou uma abordagem para o ensino da matemática mobilizada pelos professores chamando-a de pedagogia matemática, com o propósito de “ajudar os alunos a desenvolver o poder matemático e a se tornarem participantes ativos da matemática como um sistema de pensamento humano” (BALL, op. cit., p. 2, tradução nossa). A autora ainda afirma que na pedagogia matemática “aprender o que é a matemática e como a pessoa se envolve nela são objetivos iguais e interconectados com a aquisição do ‘material’ – conceitos e procedimentos – da matemática” (BALL, op. cit., pp. 6-7, tradução nossa).

O conhecimento da Matemática, nesse caso, exige o entendimento de saber quando e o porquê da utilização de certos procedimentos matemáticos, enfatizando o que Ball (op. cit.) chama de *compreensão significativa*. Dessa forma, em uma aula de Matemática, o professor exerce o papel de guiar o aluno como criador e praticante da Matemática, de forma que o professor atua como personagem ativo para: “liderar, mostrar, dirigir e estruturar o tempo das aulas” (BALL, op. cit., p. 8, tradução nossa).

Todavia, o conhecimento pedagógico matemático ainda é pouco utilizado em sala de aula, justificado por Ball (op. cit.) pelos seguintes fatores:

- Fator 1: Visões culturalmente incorporadas do conhecimento e do ensino;
 - Fator 2: Organização das escolas e condições do ensino;
 - Fator 3: Materiais curriculares ruins;
 - Fator 4: Formação matemática inadequada de professores.
- (BALL, op. cit., p. 8, tradução nossa).

Em relação ao primeiro fator, a autora encara o conhecimento como algo fixo, por meio do qual os professores ofertam o conhecimento que se lembram, de quando eram alunos, da forma como seus professores lhe passaram, situando a aprendizagem como processo passivo de assimilação.

Sobre o fator 2, a autora pondera que no ensino fundamental o que torna a experiência em pedagogia matemática dificultosa são: turmas com muitos alunos, pois o professor ainda tem que se preocupar com a ordem e disciplina; nos anos iniciais, os professores ensinam além da Matemática, as outras disciplinas ou áreas de conhecimento (como é exposto na BNCC); falta de tempo para que o professor possa planejar suas aulas.

No tocante ao fator 3, a autora versa sobre os materiais que os professores utilizam em sala de aula de Matemática, como os livros, exercícios etc. Muitos destes, com figuras estereotipadas, fórmulas e apelo ao cálculo.

Por fim, no fator 4, a autora esclarece que a formação matemática inadequada deve se referir à “sua estrutura truncada ou ao seu currículo mal direcionado” além disso, o que é ensinado aos professores “não é organizado de maneira ideal ou não é suficiente para romper com os modos tradicionais de ensino” (BALL, 1988, p. 14, tradução nossa). Assim sendo, os professores, na preparação de suas aulas de Matemática, adotam como um componente significativo o que aprenderam e observaram em sua vida escolar.

Ainda sobre o conhecimento matemático para o ensino, segundo Koehler et al. (2014), as ferramentas digitais estão cada vez mais onipresentes no processo de ensino e aprendizagem e deverão ser consideradas como um dos conhecimentos necessários para que os professores

dos anos iniciais do EF possam mobilizar. Dito isto, “os professores terão que fazer mais do que simplesmente aprender a usar as ferramentas disponíveis no momento; eles também terão que aprender novas técnicas e habilidades, conforme as atuais tecnologias se tornam obsoletas” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1023, tradução nossa).

A constatação desta ideia se dá na medida em que a BNCC (BRASIL, 2017) expõe o uso de tecnologias digitais na exploração da unidade temática da Geometria nos anos iniciais do EF já a partir do 3º ano, com o estudo do objeto de conhecimento congruência de figuras geométricas planas na exploração da habilidade “(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais” (BRASIL, 2017, p. 289).

O uso da tecnologia digital também permeia o 4º ano do EF com o estudo do objeto de conhecimento ângulos retos e não retos e simetria de reflexão na exploração das respectivas habilidades “(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria”, e em “(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas (idem, op. cit., p. 293);

O 5º ano do EF também aborda a tecnologia digital no estudo do objeto de conhecimento figuras geométricas planas e ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas na exploração das respectivas habilidades “(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais”, e em “(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais” (idem, op. cit., p. 297).

Assim como foi mencionado acima, percebemos a importância do uso da tecnologia digital, no ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, na transição do estudo das figuras espaciais para as planas. Dessa forma, para se pensar na inserção de tecnologias digitais no ambiente de ensino, partimos dos níveis de desenvolvimento do Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo em Matemática (TPACK) exposto por Mishra e Koehler (2006), que se referem às ideias de Shulman (1986) sobre o conceito do conhecimento pedagógico do conteúdo, além do que é exposto por Basniak e Estevam (2018, p.4) como “o conhecimento necessário aos professores para ensinar com e sobre tecnologia em suas áreas disciplinares e no nível escolar em que atuam”.

3.7. Conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo matemático mobilizados pelos professores

A escolha de usar o TPACK no quadro teórico deste trabalho se deve ao fato que “oferece várias possibilidades para promover a pesquisa em formação de professores, desenvolvimento profissional e uso de tecnologia pelos professores” (KOEHLER; MISHRA, 2009, p. 67, tradução nossa). Além disso, Mishra e Koehler (2006, p. 1025, tradução nossa) consideram a interação no TPACK entre “o conhecimento sobre o conteúdo (C), pedagogia (P) e tecnologia (T) como central para o desenvolvimento de um bom ensino”.

O TPACK é importante no campo da formação e desenvolvimento profissional do docente, pois o professor é “um agente autônomo com o poder de influenciar significativamente a integração apropriada (ou inadequada) da tecnologia no ensino” (KOEHLER; MISHRA, 2008, p. 3, tradução nossa). Além disso, “nos permite conceituar e discutir uma complexa rede de relacionamentos de maneira metodológica e fundamentada” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1044, tradução nossa).

Vale ressaltar, segundo Koehler e Mishra (2009), que essa integração²⁸ tecnológica não se refere somente aos usos de softwares, “se aplicam a tecnologias tanto analógicas (ex.: giz e lápis) quanto digitais (computadores, por ex.), bem como a antigas ou a novas tecnologias” (PALIS, 2010, p. 435).

Segundo Koehler e Mishra (2009) as tecnologias tradicionais (analógicas), como lápis, lousa, microscópio, pêndulos, são caracterizadas por sua especificidade (função), estabilidade (não mudam), e transparência (funcionamento interno), enquanto as tecnologias digitais são multiformes (utilizáveis de várias maneiras), instáveis (mudam conforme o tempo), e opacas (sua função interna está oculta).

No nível acadêmico, é fácil argumentar que um lápis e uma simulação de software são ambas tecnologias. Este último, no entanto, é qualitativamente diferente, pois seu funcionamento é mais opaco para os professores e oferece fundamentalmente menos estabilidade do que as tecnologias mais tradicionais. Por sua própria natureza, as novas tecnologias digitais, que são protéticas, instáveis e opacas, apresentam novos desafios para os professores que estão lutando para usar mais tecnologias em suas aulas. (KOEHLER; MISHRA, 2009, p. 61, tradução nossa)

²⁸ “O termo *integração*, usado aqui, é bastante abrangente, e não se refere à justaposição de atividades baseadas em computadores, como um anexo, em um ensino essencialmente inalterado em outros aspectos, mas denota a utilização de tecnologia no desenvolvimento conceitual, e procedimental, na resolução de problemas e na avaliação” (PALIS, 2010, p. 435).

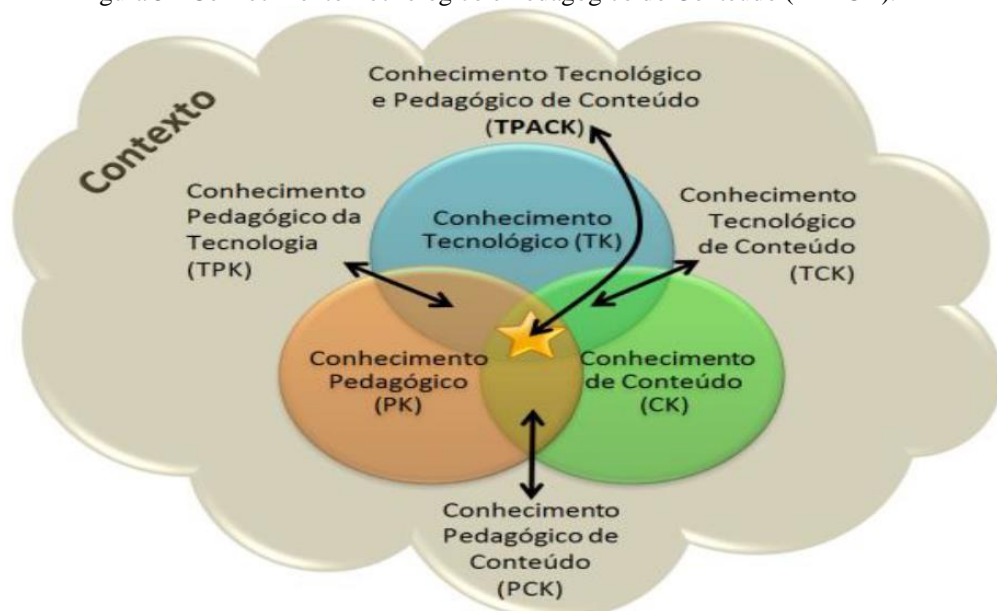
Segundo Koehler e Mishra (2008, 2009), muitos professores se consideram despreparados para usar a tecnologia digitais no ensino e aprendizagem, pois não tiveram experiência com elas em sua formação, e por isso consideram que muitas delas são irrelevantes para sala de aula. Além disso, fatores de contextos sociais e institucionais também propiciam a não utilização das tecnologias como a falta de tempo para preparação das aulas em sua agenda cheia, dinheiro, informação, suporte técnico ou recursos. Koehler e Mishra (2009, pp. 61-62, tradução nossa) acrescentam também que “os professores geralmente têm uma experiência inadequada (ou inapropriada) com o uso de tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem”.

Desta forma, para mudar esse cenário devemos considerar a realidade pedagógica e as práticas dos professores, para torná-los flexíveis e criativos. Assim sendo,

É necessário um investimento pessoal e coletivo para uma mudança de atitude, visto que é necessário ao professor atual despir-se de eventuais preconceitos, superar alguns medos e trajar-se do desejo de aprender a usar os recursos tecnológicos, interagindo com os alunos em sala de aula. (CIBOTTO; OLIVEIRA, 2012, p. 10)

O TPACK é expresso como uma interação complexa entre três componentes principais do conhecimento dos professores: o de conteúdo, pedagógico e tecnológico. A combinação entre esses três componentes do conhecimento permite o surgimento de outros quatro: pedagógico do conteúdo, pedagógico da tecnologia, tecnológico do conteúdo, e tecnológico e pedagógico do conteúdo. Assim, é considerado o “cerne do bom ensino envolvendo a tecnologia” (KOEHLER; MISHRA, 2008, p. 12, tradução nossa), conforme vemos na figura 5:

Figura 5 - Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (TPACK).



Fonte: Cibotto e Oliveira (2017, p. 13)

Na figura 5, temos:

- O Conhecimento do Conteúdo (CK – *Content Knowledge*), já mencionado por Shulman (1986): “é o conhecimento sobre o assunto real a ser aprendido ou ensinado” (KOEHLER; MISHRA, 2008, p. 13, tradução nossa);
- O conhecimento pedagógico (PK – *Pedagogical Knowledge*): “é um conhecimento profundo sobre os processos e práticas ou métodos de ensino e aprendizagem e abrange (entre outras coisas) propósitos, valores e objetivos educacionais gerais” (KOEHLER; MISHRA, 2008, p. 14, tradução nossa);
- O Conhecimento Tecnológico (TK – *Technological Knowledge*): “é o conhecimento sobre tecnologias padrão, como livros, giz e quadro-negro, e tecnologias mais avançadas, como internet e vídeo digital” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1027, tradução nossa). Além disso, “inclui a habilidade de aprender e de adaptar-se a uma nova tecnologia. Também abrange habilidades de operar tecnologias específicas” (PALIS, 2010, p. 435). É a capacidade de saber usar ferramentas de tecnologias padrão ou digitais, instalar e remover equipamentos, programas ou softwares, ou seja, é a capacidade de aprender e se adaptar-se às novas tecnologias;
- Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK – *Pedagogical Content knowledge*): similar às ideias de Shulman (1986) sobre o conhecimento pedagógico aplicável ao ensino de um conteúdo específico, no qual “o professor interpreta o assunto, encontra várias maneiras de representá-lo e adapta os materiais instrucionais e concepções alternativas e conhecimentos prévios dos alunos” (KOEHLER; MISHRA, 2008, p. 15, tradução nossa);

O PCK relacionado ao uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) caracteriza-se como saber:

(a) Identificar tópicos a serem ensinados com o TIC; (b) Identificar representações para transformar conteúdo; (c) Identificar estratégias de ensino que eram difíceis com a tecnologia tradicional; (d) Selecionar ferramentas de TIC para apoiar o conteúdo e estratégias de ensino; e (e) Infundir atividades de TIC nas salas de aula. (KOEHLER et al., 2014, p. 103)

- O Conhecimento Pedagógico da Tecnologia (TPK – *Technological Pedagogical Knowledge*): “pode ser definido como a compreensão de qual seja a melhor forma de o professor utilizar determinadas tecnologias para desenvolver os procedimentos

de ensino e aprendizagem” (CIBOTTO; OLIVEIRA, 2017, p. 17). “Isso inclui o conhecimento das possibilidades e restrições pedagógicas de uma série de ferramentas tecnológicas relacionadas a projetos e estratégias pedagógicas disciplinares e de desenvolvimento apropriadas” (KOEHLER; MISHRA, 2009, p. 65, tradução nossa). Vale ressaltar que “o uso de *Power Point* e projetor para a simples exposição de conteúdos não são considerados TPK” (CIBOTTO; OLIVEIRA, 2017, p. 18)”.

- O Conhecimento Tecnológico do Conteúdo (TCK – *Technological Content Knowledge*): “Inclui conhecimentos sobre como o conteúdo a ensinar pode ser modificado pelo uso de uma tecnologia e reciprocamente” (PALIS, 2010, p. 436), ou seja, “o TCK, então, é um entendimento da maneira pela qual a tecnologia e o conteúdo influenciam e constroem um ao outro” (KOEHLER; MISHRA, 2009, p. 65, tradução nossa). Desta forma, “os professores precisam entender quais tecnologias específicas são mais adequadas para abordar a aprendizagem de assuntos em seus domínios e como o conteúdo determina ou talvez até muda a tecnologia – ou vice-versa” (KOEHLER; MISHRA, 2008, p. 16, tradução nossa);
- Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (TPACK – *Technological Pedagogical Content Knowledge*): “incluindo a compreensão de representações de conceitos usando tecnologia, técnicas pedagógicas que empregam tecnologia para ensinar conteúdos, de como uma tecnologia pode ajudar a lidar com as dificuldades dos alunos” (PALIS, 2010, p. 436);

Assim sendo, o TPACK

Engloba o ensino de conteúdos curriculares utilizando técnicas pedagógicas, métodos ou estratégias de ensino que utilizam adequadamente tecnologias para ensinar o conteúdo de forma diferenciada de acordo com as necessidades de aprendizagem dos alunos. (CIBOTTO; OLIVEIRA, 2017, p.19)

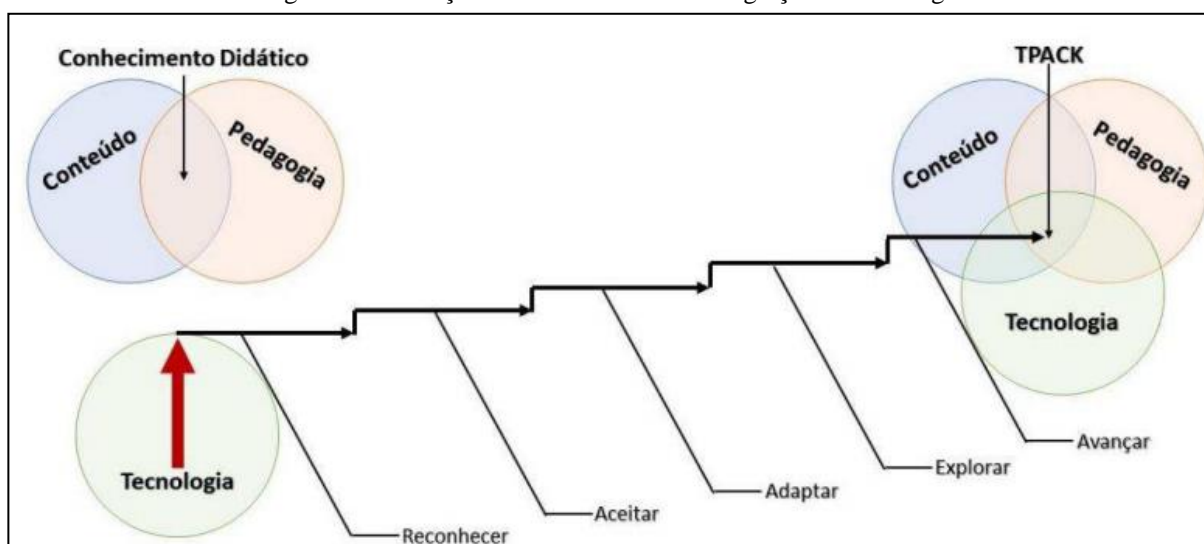
Dito isso, Koehler e Mishra (2009) argumentam que professores especializados empregam o TPACK constantemente em sua prática de ensino, explorando a interação entre seus componentes de forma flexível e em contextos específicos.

Além disso, conforme foi expresso na figura 5, o contexto é importante para o ensino e aprendizagem, pois situa o conhecimento do professor em situações diversas, adaptando-se aos diferentes fatores educacionais. Assim sendo, a consciência das interações entre os conhecimentos que o TPACK concebe e “como eles estão vinculados em contextos específicos

(incluindo o conhecimento de determinados alunos, redes sociais da escola, preocupações dos pais etc.), confere o tipo de flexibilidade que os professores precisam para ter sucesso” (KOEHLER; MISHRA, 2008, p. 23, tradução nossa). Somado a isso, Cibotto e Oliveira (2012, p. 10) destacam “o contexto brasileiro no qual nem toda juventude possui acesso a uma tecnologia de qualidade e muitos dos quais que possuem esta possibilidade, utilizam as tecnologias digitais em diversos contextos cotidianos, mas não o fazem da mesma maneira no interior das salas de aula”.

Segundo Niess et al. (2009), quando os professores se preocupam com a aprendizagem matemática dos alunos por meio do uso de tecnologias apropriadas, a base do conhecimento do professor é descrita como TPACK, e identificada em cinco níveis sequenciais para a integração de uma tecnologia que os professores ainda não tenham explorado, conforme é mostrado na figura 6.

Figura 6 - Descrição visual dos níveis de integração da tecnologia



Fonte: Niess et al. (2009, p. 10, tradução nossa)

Os níveis de integração da tecnologia expressos pelo professor no ensino e aprendizagem de algum conteúdo de Matemática são os seguintes:

1. **Reconhecer** (conhecimento): se os professores são capazes de usar a tecnologia e reconhecer o seu alinhamento com o conteúdo matemático, mas ainda não a integram no ensino e aprendizagem da Matemática;
2. **Aceitar** (persuasão): quando os professores tomam uma atitude favorável ou desfavorável relativamente ao ensino e aprendizagem da Matemática com tecnologia adequada;
3. **Adaptar** (decisão): quando os professores se envolvem em atividades que os levam à decisão de adotar ou rejeitar o ensino e a aprendizagem da Matemática com tecnologia adequada;
4. **Explorar** (implementação): se os professores integram ativamente uma tecnologia adequada no ensino e na aprendizagem da Matemática;

5. *Avançar* (confirmação): se os professores avaliam os resultados da decisão de integrar tecnologia adequada no ensino e na aprendizagem da Matemática. (OLIVEIRA; HENRIQUES; GUTIÉRREZ-FALLAS, 2018, p. 424)

Dessa forma, segundo Oliveira, Henriques e Gutiérrez-Fallas (2018), o conhecimento do professor em relação ao TPACK está vinculado aos temas: Currículo e Avaliação (ajuste curricular do conteúdo e o modo como será avaliado); Aprendizagem (quando os alunos usam a tecnologia); Ensino (metodologias, gestão da sala quando se usa a tecnologia); e Acesso (uso, limitação e disponibilidade da tecnologia). Já em relação à formação de professores sobre o uso de tecnologia, temos que

- i) Os professores acreditam que a formação, com vistas à integração da tecnologia, deve envolver a apresentação de modelos a serem reproduzidos ou adaptados nas suas práticas, sem perceber, contudo, que esse é o modelo das formações que têm recebido e que criticam por considerarem inadequado;
- ii) As dificuldades que têm de reconhecer e explorar o potencial dos diferentes recursos tecnológicos para ensinar matemática podem decorrer de fragilidades no conhecimento matemático e pedagógico de Matemática, cuja natureza técnica predominante encaminha uma utilização técnica desses recursos refletida na reprodução dos modelos didático-pedagógicos presentes nas práticas tradicionais de ensino (BASNIAK; ESTEVAM, 2018, p. 18).

Segundo Koehler et al. (2014) a limitação do quadro teórico do TPACK está na neutralidade dos objetivos do ensino, “a estrutura do TPACK não fala sobre que tipos de conteúdo precisam ser cobertos e como devem ser ensinados” (p.109, tradução nossa).

Para que a compreensão das relações entre conteúdo, pedagogia e tecnologia seja adquirida pelos professores, segundo Mishra e Koehler (2006), deve ser ofertada uma formação que explore as interações entre esses conhecimentos. Acreditamos, assim como esses autores, “que o desenvolvimento do TPACK deve ser um objetivo crítico da formação de professores” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1046, tradução nossa).

Desta forma, no próximo capítulo, exploraremos nosso quadro metodológico do conhecimento geométrico dos professores dos anos iniciais do EF sobre figuras espaciais, e a construção de uma formação que explora as interações dos conhecimentos conforme proposto pelo TPACK.

QUADRO METODOLÓGICO

Realizamos no capítulo anterior o levantamento bibliográfico do quadro teórico da nossa pesquisa. Neste capítulo abordaremos os procedimentos metodológicos e instrumentais técnicos que permearão a coleta de dados, seleção de fontes, e a delimitação do universo de análise.

O quadro metodológico desta pesquisa utilizará uma triangulação metodológica, justificada com base no argumento da Dra. Michèle Artigue, apresentado no X CIEM²⁹: “para cada pergunta, não é usada uma única técnica, mas várias técnicas e, em seguida, é feita uma triangulação metodológica” (2020, Mesa de discusión, tradução nossa).

Assim, seguindo essa triangulação podemos nos “dedicar ao problema em potencial da validade do constructo, uma vez que várias fontes de evidências fornecem essencialmente várias avaliações do mesmo fenômeno” (YIN, 2001, p. 121).

Desta maneira, conforme a figura 7, utilizaremos para a apuração e condução da investigação: o estudo de caso³⁰, a análise documental³¹ e a engenharia didática³². Além disso, para a análise dos dados coletados usaremos a análise do conteúdo³³.

Figura 7 - triangulação metodológica usada na pesquisa



Fonte: construção nossa

²⁹Congresso Internacional de Ensino de Matemática, realizado no campus PUCP – Péru em 20 a 22 de fevereiro de 2020.

³⁰O estudo de caso é o estudo de *um* caso, seja ele simples e específico, [...] sempre bem delimitado, devendo ter seus contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 17)

³¹Lüdke e André (1986, p.38) considera na análise documental “desde leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorando, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos, roteiros de programas de rádio e televisão até livros, estatísticas e arquivos escolares”.

³²Uma função clássica da engenharia didática: explorar a possibilidade de novas formas de vida didática, tanto no nível das organizações matemáticas quanto didáticas, e avaliar as condições de uma possível ecologia, se forem interessantes (ARTIGUE; BOSCH; GÁSCON, 2011, p. 47, tradução nossa).

³³Um conjunto de instrumentos metodológicos cada vez mais sutis em constante aperfeiçoamento, que se aplicam a “discursos” (conteúdos e continentes) extremamente diversificados (BARDIN, 2016, p.15)

Os dados coletados no estudo de caso ocorrem por meio de uma investigação empírica de uma variedade de evidências reais inseridos em um contexto, preservando suas características globais e significativas. Nessa metodologia procura-se responder “como” e “por quê” da ocorrência de certos acontecimentos, ou seja, vamos procurar responder “como” e “por quê” ocorrem a mobilização de determinados conhecimentos geométricos pelos professores dos anos iniciais do EF no ensino de figuras espaciais.

Na análise documental a investigação é explanatória, buscando identificar informações factuais nos documentos certificados por meio de questões ou hipóteses de interesse, ou seja, vamos buscar evidenciar sobre quais são os conhecimentos geométricos mobilizados ou não, pelos professores dos anos iniciais no ensino de figuras espaciais.

Segundo Yin (2001, p.19) o estudo de caso pode ser complementado com “outros dois tipos – estudos ‘explanatórios’ e ‘descritivos’.” Assim sendo, a investigação explanatória se dará no estudo da análise documental e a descritiva no estudo da engenharia didática. De acordo com Lüdke e André (1986, p. 39) “a análise documental indica problemas que devem ser mais bem explorados através de outros métodos”. Essa complementação promoverá com o estudo da engenharia didática, que por sua vez, possibilitará investigar o processo de ensino e aprendizagem de figuras espaciais pelos professores dos anos iniciais, possibilitando “tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino” (MACHADO, 2016, p.235).

Nos itens a seguir explicaremos cada uma das metodologias e coletas de dados aplicados nesta pesquisa.

4.1 O estudo de caso

Como estratégia de pesquisa, usaremos o estudo de caso para buscar retratar como os professores que atuam nos anos iniciais do EF mobilizam os conhecimentos geométricos ao ensinar Geometria, ou seja, apanhar os componentes principais do conhecimento dos professores e a interação entre eles, segundo é expresso no TPACK. “O estudo de caso permite uma investigação para se preservar as características holísticas e significativas dos eventos da vida real” (YIN, 2001, p. 21).

Segundo Lüdke e André (1986) no estudo de casos se utiliza de várias fontes de investigação, coletados em momentos e situações diferentes, e com diversos informantes. Assim sendo, pesquisaremos as atas de coordenação, os diários de classe, questionários

aplicados no estudo de caso piloto, as atividades propostas, o planejamento anual do 3º ano escolar do EF, assim como, o comportamento e fala dos professores por meio da gravação de áudios da coordenação e das entrevistas. Isso justifica a escolha do estudo de caso, já que “o poder diferenciador do estudo é a sua capacidade de lidar com uma ampla variedade de evidências - documentos, artefatos, entrevistas e observações” (YIN, 2001, p. 27).

Desta forma, “com essas variedades de informações, oriunda de fontes variadas, ele poderá cruzar as informações, confirmar ou rejeitar hipóteses, descobrir novos dados, afastar suposições ou levantar hipóteses alternativas” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 19). Para mais, buscaremos por meio do estudo de caso “retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.110).

Ainda segundo Yin (2001) os componentes importantes para o estudo de caso são:

- As questões de um estudo: Quais são os conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores dos anos iniciais do EF ao lecionarem figuras espaciais em uma turma de terceiro ano?
- Suas proposições: A geometria é pouco explorada nos anos iniciais do EF, os professores têm deficiência de conhecimento do conteúdo e conhecimento tecnológico sobre essa unidade temática, há uma preferência no ensino de figuras planas, nomenclatura, área e perímetro.
- Suas unidades de análise: Com a autorização concedida pela secretaria de educação de Angra dos Reis, escolheremos uma de suas escolas municipais que ofertam os anos iniciais do EF para acompanhar, durante um período de aproximadamente um mês, as coordenações dos professores que atuam nessa fase escolar, as aulas de Geometria lecionadas por esses professores, o comportamento e, principalmente, seus conhecimentos mobilizados ao explorar essa unidade temática.
- A lógica que une os dados às proposições: A escolha da escola se deu pelo motivo de que ela adotou o livro mais escolhido no PNLD (2019³⁴) desse município e oferece a todos os anos iniciais do EF. Ademais, a escola selecionada não participou do nosso estudo piloto feito em 03 de fevereiro de 2020.

³⁴O registro da escolha do material didático do PNLD 2019 ocorreu até às 23h59min do dia 12/09/18 e seu recebimento até fevereiro de 2019.

- Os critérios para se interpretar as descobertas: Utilizaremos os pressupostos da engenharia didática.

Antes de realizar a coleta de dados faremos um estudo de caso piloto com a finalidade de aperfeiçoar a coleta, no alinhamento das questões desta pesquisa. “O estudo de caso piloto auxilia os pesquisadores na hora de aprimorar os planos para a coleta de dados tanto em relação ao conteúdo dos dados quanto aos procedimentos que devem ser seguidos” (YIN, 2001, p. 100).

4.1.1 O estudo de caso piloto

Para obter algumas informações iniciais sobre o conhecimento geométrico de diferentes professores dos anos iniciais do EF, utilizamos a semana de formação continuada com os professores do município de Angra dos Reis (FORMAR) para obtenção de alguns dados importantes para a pesquisa.

Na primeira fase do caso piloto, aplicamos um questionário (Apêndice 1) a uma amostra de 52 professores dos anos iniciais de diversas escolas da rede no dia 30 de julho de 2019, na formação *Descritores: desafios e Resoluções*, promovido pela secretaria municipal de educação de Angra dos Reis e, com um dos mediadores, o autor desta pesquisa.

O questionário teve como objetivo conhecer o público docente que atua nos anos iniciais do EF, sua formação docente, a localização da escola onde leciona, horário e tempo de trabalho, a disponibilidade e modalidade de ensino preferida para fazer um curso de formação, as competências gerais e as unidades temáticas de Matemática que mais e que menos gosta de ensinar, os materiais e estratégias usadas ao ensinar Geometria, e se tem algum conhecimento sobre os constructos explorados neste trabalho.

A segunda fase do estudo de caso piloto ocorreu em 03 de fevereiro de 2020, na formação *Novas metodologias para o ensino da Geometria*, promovida pela secretaria municipal de educação de Angra dos Reis, na qual aplicamos uma formação em Geometria Elementar. Estavam presentes 22 professores dos anos iniciais do EF de diversas escolas da rede e, por meio dessa formação, aplicamos uma avaliação diagnóstica (Apêndice 2) e realizamos seis entrevistas (Apêndice 3).

A avaliação diagnóstica teve como objetivo identificar, dos professores dos anos iniciais do EF que participaram da formação, as categorias do saber para ensinar expostas por Shulman (1986), quais sejam o saber do conteúdo, o saber curricular e o saber pedagógico do conteúdo. Já, as entrevistas, tiveram o objetivo de “permitir o aprofundamento de pontos levantados por

outras técnicas de coletas de alcance mais superficial, com o questionário” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34).

Dessa forma, a avaliação diagnóstica e as entrevistas permitiram identificar, nos docentes, alguns dos componentes do CK, PK, PCK do TPACK, ou seja, o nível de conhecimento que os professores se encontram em relação ao conteúdo, pedagógico e pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar.

A análise das duas fases do caso piloto é exposta no próximo capítulo, inserida nas análises preliminares da engenharia didática.

4.2 Engenharia Didática

A teorização da didática da Matemática na escola francesa levou ao surgimento de novas metodologias. Segundo Artigue (1995, p.12, tradução nossa) os pesquisadores franceses desenvolveram uma metodologia em “oposição aos paradigmas comparativos clássicos de experimentação em aula, uma metodologia específica: *engenharia didática*.”

A engenharia didática foi desenvolvida na década de 1970, pelo teórico francês Guy Brousseau, na medida em que ele avançava no estudo da teoria das situações didáticas (TSD). A engenharia didática é uma metodologia de investigação caracterizada, segundo Artigue (1995), pelas estruturas que ocorrem por meio das práticas nas aulas, ou seja, “sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino” (op. cit., p.36, tradução nossa). Outra característica da engenharia didática é a relação feita e validada em cada tipo de registro, situando assim “no registro dos estudos de caso e cuja validação é essencialmente interna, baseada no confronto entre *a análise a priori e posteriori*” (idem, p.37, tradução nossa).

A sequência didática construída nesta pesquisa seguirá a engenharia didática, que é uma metodologia cujo processo experimental é temporal e que segue quatro diferentes fases:

- a primeira é a fase das *análises preliminares* que se apoia no quadro teórico;
- a segunda é a fase da concepção e *análise a priori* das situações didáticas;
- a terceira é a fase da experimentação;
- a quarta e última fase é da *análise a posteriori* e validação.

A primeira fase, *análises preliminares*, consiste em especificar um conteúdo ou assunto a ser ensinado e aprendido, construir as hipóteses e objeções da pesquisa e contestar os resultados da investigação. Além disso, essa fase “inclui principalmente um questionamento

epistemológico do conteúdo matemático em jogo e da necessidade de introduzi-lo na escola e um estudo das condições e limitações oferecidas pelas instituições onde o processo de ensino e aprendizagem acontece” (BARQUERO; BOSCH, 2018, p.302).

A segunda fase é denominada de *design* ou *análise a priori*. Nela, o conteúdo averiguado é examinado dentro do escopo da pesquisa, apresentando a proposta de ensino, especificando os anseios dos professores, antecipando os comportamentos e declarando a hipótese investigada. “Podemos distinguir aqui um nível matemático e um didático, para primeiro ‘definir’ ou ‘caracterizar’ o conteúdo (análise matemática), e depois propor como fazê-lo emergir de questões problemáticas dentro de uma sequência de situações concretas (análise didática)” (BARQUERO; BOSCH, 2018, p.302).

A terceira fase, chamada de *experimentação*, é caracterizada pela descrição do ambiente da pesquisa, dos sujeitos e apresenta o desenvolvimento da experiência, explicitando os dados coletados na prática: as observações, as produções feitas pelos professores, os questionários e entrevistas aplicados durante diferentes momentos da formação.

Segundo Machado (2016, p.245), quando houver mais de uma sessão nessa fase, é aconselhável fazer “uma *análise a posteriori* local após uma ou algumas sessões, confrontando com as análises *a priori* feitas, para eventuais correções da rota prevista”. Além disso, “neste nível experimental, geralmente é desenvolvida uma análise ‘in vivo’, ao se interpretar em tempo real (ou logo após) o que está ocorrendo na sala de aula” (BARQUERO; BOSCH, 2018, p.302).

A quarta fase é denominada *análise a posteriori* e validação, a qual se fundamenta nos dados colhidos durante cada sessão da experimentação e no tratamento adequado das informações. Segundo Machado (2016, p.246), as fases 3 e 4 são complementares, pois “para uma melhor compreensão do ocorrido, tornam-se necessário dados complementares como: entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação quanto no final dela”.

Assim sendo, pela “confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* que se validam ou se refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia” (MACHADO, 2016, p. 246).

4.3 A análise documental

Iniciamos a análise documental, conforme foi explicitado na introdução desta pesquisa, com a coleta de documentos que referenciam o conhecimento geométrico do professor dos anos iniciais do EF. A pesquisa foi realizada por meio da análise de artigos no banco de dissertações

e teses da Capes que apontam o tema, percebendo uma falta de publicações que explore esse assunto.

A análise documental é, segundo Lüdke e André (1986), uma técnica que complementa as informações obtidas por outros procedimentos de coleta de dados, seja na busca de aspectos novos de um tema ou do problema. Além disso, a análise documental norteará a primeira fase da engenharia didática, e permite exemplificar maneiras possíveis de estudar o conhecimento matemático necessário ao ensino.

Considera-se documento em uma análise documental quaisquer declarativa que possam servir de informação para o comportamento humano. Consequentemente, para a escolha dos documentos analisados apoiamo-nos nas ideias de Stylianides e Ball (2004) conforme descrito no quadro 5.

Quadro 5 - Seis abordagens para o estudo do conhecimento matemático necessário ao ensino

ABORDAGENS	FONTES OU OBJETOS DE ANÁLISE	MÉTODOS OU LOCAIS DE CONSULTA	EXEMPLOS DE ESTUDOS COM O FOCO NO COHECIMENTO DE FIGURAS ESPACIAIS NECESSÁRIO PARA O ENSINO
<i>Análise dos documentos políticos</i>	Documentos políticos que estabelecem padrões para formação de professores e outros que definem padrões para a matemática escolar.	Análise do PCN* (1997), DCN (2013) e BNCC (2017).	Análise de texto de documentos políticos para investigar o que se recomendam que os futuros professores têm de aprender sobre figuras espaciais nos curso de formação de professores. Desenvolver uma compreensão dessas recomendações podem fornecer informações importantes para os futuros professores saberem sobre figuras espaciais.
<i>Análise do currículo de matemática dos professores</i>	Currículo de Matemática no curso de licenciatura em Pedagogia	Análise curricular das ementas adotadas.	Buscamos informações para compreender o que é considerado importante para que os futuros professores saibam sobre figuras espaciais.
<i>Análise do conhecimento matemático dos professores</i>	(1) avaliação diagnóstica ³⁵ ; (2) o conhecimento atual dos professores em áreas específicas relacionadas ao trabalho de ensino.	(1) análise da avaliação diagnóstica em função do quadro teórico; (2) análise do que os professores sabem sobre a matemática, realizados fora do ambiente real da sala de aula na escola.	Revisão dos estudos disponíveis sobre o conhecimento geométrico dos professores pode fornecer algumas ideias sobre o que os pesquisadores da educação matemática consideram importante para os professores conhecerem sobre métodos de ensino de figuras espaciais. Além disso, as análises empíricas de como os professores compreendem e ensinam sobre figuras espaciais pode ajudar a identificar áreas de dificuldades comuns, que podem ser abordadas nos programas de formação de professores, se forem consideradas compreensões cruciais dos professores.

³⁵Apesar de não ser considerado um comprovante na análise documental, a avaliação diagnóstica entra como fonte complementar das informações colhidas nessa fase da pesquisa para a abordagem do estudo do conhecimento matemático necessário ao ensino da geometria espacial elementar.

<i>Análise do currículo de matemática dos alunos</i>	Currículos escolares de matemática desenvolvidos para o uso em aulas de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental.	Análise curricular: livro de matemática.	Análise de livros didáticos para entender sobre como são abordadas as figuras espaciais. Essa análise deve fornecer informações sobre o que os professores precisam saber sobre como ensinar as figuras espaciais.
<i>Análise do conhecimento matemático dos alunos</i>	Conhecimento atual em geometria espacial nos três primeiros anos do ensino fundamental.	Análise das avaliações externas sobre geometria espacial.	Análise empírica de como os alunos compreendem figuras espaciais (por exemplo, por meio do relatório do Saeb) pode ajudar a identificar áreas de dificuldades comuns. A identificação dessas áreas pode fornecer informações sobre o que os professores precisariam saber sobre figuras espaciais, para reconhecer e abordar os pontos fracos da compreensão dos alunos sobre esse tópico.
<i>Análise da prática da matemática escolar</i>	Prática da matemática escolar	Análise dos registros da prática matemática da escola.	Análise empírica dos componentes matemáticos da instrução em sala de aula para descobrir as demandas impostas ao conhecimento geométrico pelos professores em termos de figuras espaciais, à medida que implementam o currículo, facilitam discussões, ouvem os alunos, gerenciam suas dificuldades e buscam ativamente ajudá-los a superar essas dificuldades.

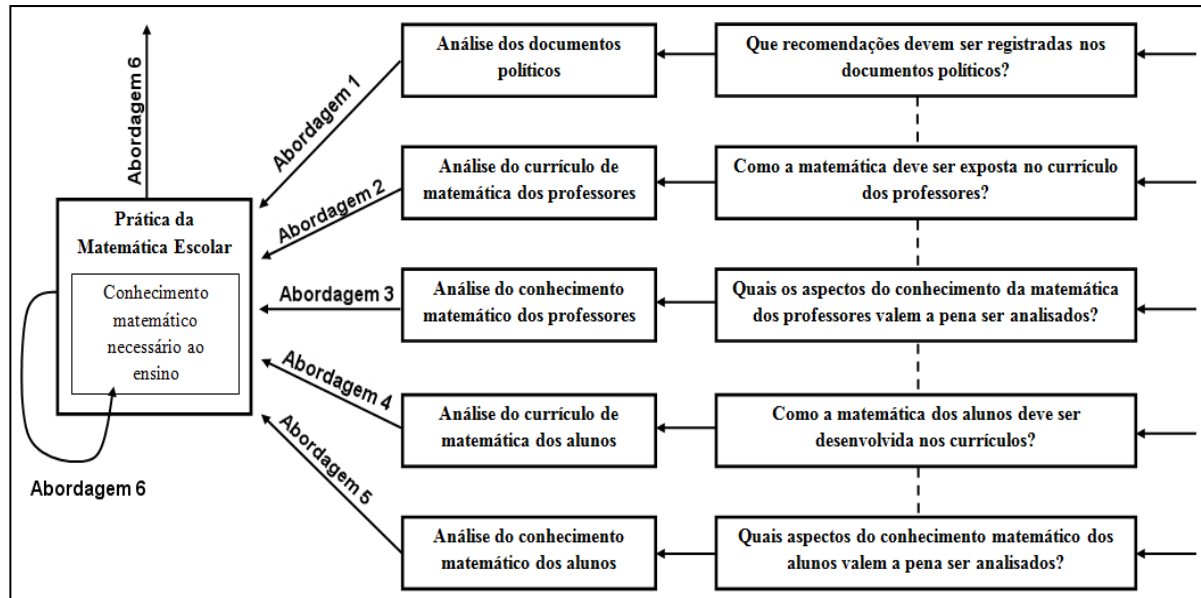
*Consideraremos o PCN nesta pesquisa pois foi um documento que orientou o trabalho docente durante um bom tempo, assim como, atentaremos aos documentos mais recentes como os DCN e BNCC.

Fonte: Adaptado de Stylianides e Ball (2004, p.9)

Essas abordagens exibem, com uma visão geral, o estudo do conhecimento da Geometria espacial elementar necessária ao ensino, em uma sequência de abordagens que interagem na prática da matemática escolar. Assim sendo, os documentos analisados foram: os PCN (1997), as DCN (2013) para o EF, a BNCC (2017), as ementas do currículo de matemática do curso de licenciatura em pedagogia das universidades locais de Angra dos Reis, os livros do 3º ano de matemática do EF correspondentes ao manual do professor mais adotados no município de Angra dos Reis, as matrizes de referência da Anresc (Prova Brasil), as matrizes de referência da ANA, suas escalas de proficiências, o planejamento escolar do 3º ano da escola analisada e os diários dos professores que atuam nessa fase escolar.

A figura 8 serve de referência contra as limitações e contribuições das abordagens expostas no quadro 5, complementando e atuando em um aglomerado de ideias para pesquisas adicionais futuras. A estrutura representada nessa figura revela o papel que as seis abordagens desempenham no processo de estudo do conhecimento matemático necessário ao ensino da geometria espacial elementar. Os segmentos pontilhados indicam a existência de relações entre os elementos, e as setas apontam para a influência de diferentes fatores na busca de uma concordância entre si.

Figura 8 - Uma estrutura para estudar o conhecimento matemático necessário ao ensino da Geometria espacial elementar necessário ao ensino



Fonte: Stylianides e Ball (2004, p.33, tradução nossa)

A figura 8 exhibe as abordagens 1 a 5 como coordenadas, identificando contribuições pertinentes para a compreensão matemática necessária ao ensino de figuras espaciais. Segundo Stylianides e Ball (2004), as recomendações da abordagem 1 estariam alinhadas com as ideias incorporadas nos materiais curriculares criados para os professores na abordagem 2, também com os aspectos do conhecimento dos professores considerados essenciais para o trabalho na abordagem 3, com a tarefa curricular que os professores devem ensinar na abordagem 4, e com os tópicos que os alunos têm dificuldades na abordagem 5, prosseguindo com a sua utilização na prática ou como ela progride nas tarefas em sala de aula na abordagem 6.

As abordagens de 1 a 5, além de poder iniciar o processo de estudo do conhecimento matemático, também fornecem contribuições para exploração da prática da abordagem 6. Desta forma, temos que as três primeiras abordagens, apesar de serem de investigação de diferentes grupos, estudam o conhecimento geométrico necessário para o ensino. A primeira coloca os documentos oficiais de política pública como principal objeto de investigação, a segunda estuda os currículos de matemática na formação de professores, e a terceira coloca o quê os educadores matemáticos consideram importante estudar e o quê os motivam. Apesar da sua relevância, essas abordagens recebem críticas pelo fato de elas “estarem distantes do ensino da sala de aula, no cenário natural em que o conhecimento matemático dos professores é exercido” (STYLIANIDES; BALL, 2004, p. 20, tradução nossa).

Esse motivo nos leva a considerar também a quarta e a quinta abordagens, que tratam os currículos de matemática na escola e o conhecimento matemático dos alunos, colocando o

conhecimento geométrico necessário ao ensino em uma forma integral. Assim, a quarta e quinta abordagens aproximam mais da prática da matemática na sala de aula, entretanto, ainda não conseguem perceber as situações matemáticas menos expostas ao trabalho que os professores e alunos desenvolvem juntos na sala de aula.

Para superar essa lacuna, consideramos a sexta abordagem, que analisará o conhecimento geométrico necessário para o ensino na sala de aula, integrando a investigação numa triangulação com entrevistas e a observação. A análise documental exposta na sexta abordagem resultará por meio da análise dos diários dos professores, complementada pela observação direta do exercício do professor em sala de aula, “sendo o principal instrumento da investigação, o observador pode recorrer aos conhecimentos e experiências pessoais como auxiliares no processo de compreensão e interpretação do fenômeno estudado” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 26).

Apesar de as entrevistas e a observação não serem instrumentos na análise documental, consideramos importantes nessa fase da pesquisa, pois o pesquisador reunirá uma variedade de informações, as quais poderão ser controladas pelo grupo participante. Deste modo, o pesquisador assumirá, na sexta abordagem, o papel de observador como participante, que, segundo Lüdke e André (1986), o caracteriza como revelação, para a amostra pesquisada, da identidade do pesquisador e dos objetivos do estudo. Assim, durante esse processo, o registro das observações (Apêndice 4) seguiu diretrizes gerais feitas em campo, a partir destas apreciações.

Recopilando, a análise documental será feita na abordagem 1 no estudo dos PCN (1997), as DCN (2013) e a BNCC (2017) para o EF; na abordagem 2 no estudo das ementas do currículo de matemática do curso de licenciatura em pedagogia das universidades locais que ofertam esse curso no município de Angra dos Reis; na abordagem 3 com a revisão do quadro teórico desta pesquisa; na abordagem 4 no estudo do livro de matemática adotado na escola; na abordagem 5 no estudo das matrizes de referência da Anresc (Prova Brasil), das matrizes de referência da ANA, e das suas escalas de proficiências; e na abordagem 6 com o estudo dos diários dos professores que atuam no 3º ano do EF.

Ademais, para complementar essa fonte de coleta de dados, utilizamos as anotações com o material transcrito das gravações. Logo, buscamos categorizar os dados coletados por meio da análise do conteúdo, utilizando também do arcabouço teórico em que a pesquisa se apoia, sobre as indicações do conhecimento do conteúdo, do pedagógico e da tecnologia e nos possíveis componentes entre eles.

4.4 Análise de conteúdo

Após a coleta e investigação do material pesquisado, como as entrevistas, documentos e registros das observações, eles serão diagnosticados usando as técnicas de análise de conteúdo proposta por Bardin (2016). A autora organiza as diferentes fases da análise de conteúdo da seguinte forma: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A primeira fase, chamada de pré-análise, é o momento da escolha dos documentos que serão investigados neste estudo. São eles, os documentos submetidos na análise documental, as transcrições das entrevistas, os registros das observações, o questionário e a avaliação diagnóstica. Ademais, é o momento da formulação das hipóteses e dos objetivos, ou seja, de afirmações provisórias que se pretende confirmar ou invalidar. Também é o momento da construção de indicadores que revelem sua interpretação. À vista disto, a pré-análise permeou o estudo de caso piloto, a análise documental e a primeira fase da engenharia didática.

A segunda fase da análise do conteúdo é o momento da exploração do material, que segundo Bardin (2016, p. 131) é uma fase “longa e fastidiosa, consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas”. Desta forma, o tratamento dos resultados obtidos e sua interpretação são expostos de tal modo que sejam significativos e válidos.

De mais a mais, segundo a autora, tratar o material significa codificá-lo. Neste processo é preciso seguir regras para a organização dos dados, por meio de recortes (escolha das unidades), da enumeração (escolha das regras de contagem) e da classificação e agregação (escolha das categorias).

Assim sendo, a escolha nas unidades de registro serão palavras e temas relacionados com a geometria espacial elementar e enquadrados nos componentes da teoria do TPACK. O tema aqui é definido como “unidade de significação que se liberta naturalmente de um texto analisado segundo certos critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura” (BARDIN, 2016, p.135). Já a escolha da unidade de contexto corresponde à parte da mensagem, frase ou parágrafo, que servirá como unidade de compreensão da unidade de registro.

Quanto à enumeração, é possível definir o modo de contagem das unidades de registro de várias maneiras, tais como, pela presença ou ausência de elementos, pela frequência ponderada em que eles aparecem, pela intensidade em que cada elemento ocorre, pela direção

favorável/desfavorável, pela ordem de aparição das unidades de registros, e pela *coocorrência*, ou seja, quando dois ou mais registros aparecem em uma unidade de contexto.

A escolha das categorias é uma etapa na qual se organizam os elementos das mensagens analisadas em grupos previamente definidos por unidades de registros, com características comuns. Isto posto, vamos enquadrar as unidades de registros primeiramente nas categorias formadas pelos principais componentes do TPACK: conhecimento do conteúdo (CK), conhecimento pedagógico (PK) e conhecimento tecnológico (TK). Havendo a necessidade de subdividir as unidades de registros, consideraremos também como categoria o conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK), o conhecimento pedagógico da tecnologia (TPK), o conhecimento tecnológico do conteúdo (TCK), o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK) e o contexto da prática matemática.

Segundo Bardin (2016, p. 169) “a análise do conteúdo constitui um bom instrumento de indução para se investigarem as causas (variáveis inferidas) a partir dos efeitos (variáveis de inferência ou indicadores; referências no texto) [...]”. As variáveis inferidas no nosso estudo são o conhecimento geométrico dos professores dos anos iniciais do EF em relação às figuras espaciais e as variáveis de inferências são as unidades de registros obtidas na categorização da análise do conteúdo. Dessa forma, faz-se a descrição ou hipóteses dos dados ou a interpretação dos resultados.

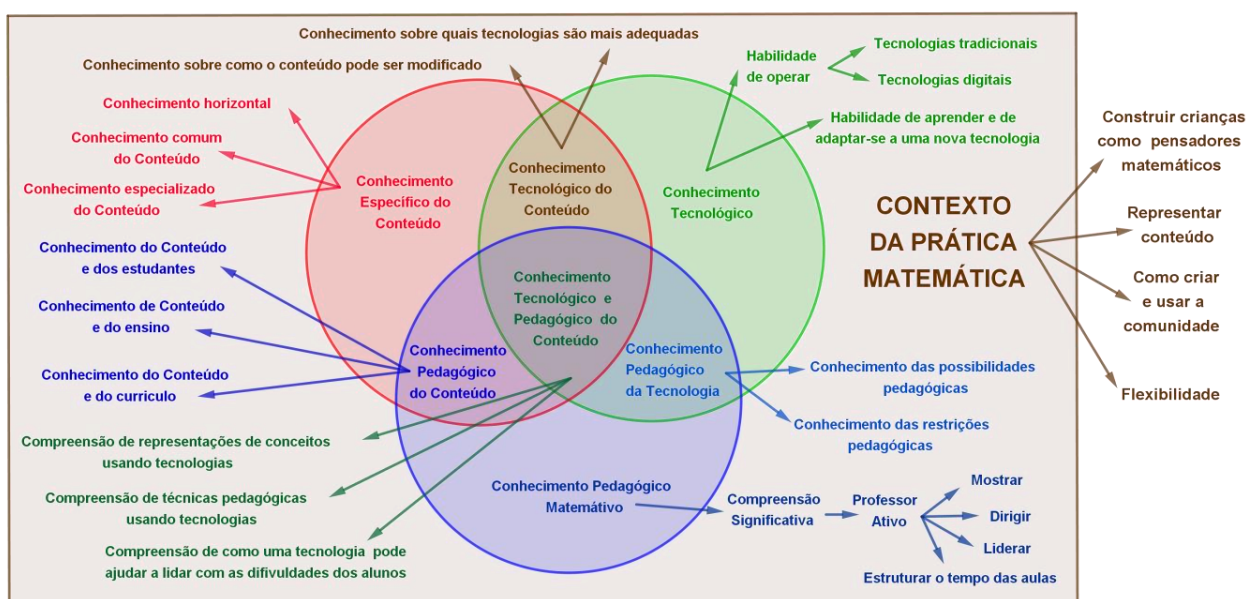
No próximo capítulo realizaremos o processo da análise do conteúdo do material coletado e investigado nas análises preliminares da engenharia didática.

ANÁLISES PRELIMINARES

É a primeira fase da Engenharia didática, que se apoia no quadro teórico didático geral, e dos conhecimentos geométricos dos professores identificados durante o estudo de caso e da análise documental, além da realização das considerações sobre “a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino; a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução; a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática” (MACHADO, 2016, p. 238).

Para nortear essa análise, buscamos organizar os dados coletados por meio do tratamento dos resultados por categorias comuns registrados nas ideias de Shulman (1986) corroboradas e aprofundadas por Ball, Thames e Phelps (2008), Ball e Bass (2009), Ball (1988, 1993), Koehler (2014) e Mishra e Koehler (2006, 2008, 2009). A figura 9 expõe a articulação entre o quadro teórico sobre o Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo em Matemática (TPACK) usado na pesquisa.

Figura 9 - Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo em Matemática (TPACK)



Fonte: Construção nossa

Assim sendo, buscamos identificar dentro do conhecimento específico do conteúdo: o conhecimento horizontal (como os assuntos estão relacionados no currículo), o conhecimento comum do conteúdo (quando o professor reconhece a resposta errada do aluno) e conhecimento especializado do conteúdo (quando o professor avalia a natureza do erro). Dentro do conhecimento pedagógico do conteúdo: conhecimento do conteúdo e dos estudantes (quando o professor tem familiaridade com os erros comuns dos alunos e sabe quais são os erros mais

propensos de acontecer), conhecimento de conteúdo e do ensino (quando o professor tem o conhecimento sobre o que e como ensinar) e o conhecimento do conteúdo e do currículo (quando o professor tem conhecimento sobre os programas, materiais instrucionais, parâmetros, currículo horizontal e vertical).

Adicionalmente, chamamos o conhecimento pedagógico, de acordo com que Deborah Ball (1988) usou em sua tese, de conhecimento pedagógico matemático com uma abordagem para o ensino da matemática mobilizada pelos professores. Refere-se à compreensão significativa, com o professor assumindo uma postura ativa, liderando, mostrando, dirigindo e estruturando o seu tempo de aula.

Ademais, buscamos identificar dentro do conhecimento tecnológico: a habilidade do professor em operar as tecnologias tradicionais e digitais e, a habilidade de aprender e de adaptar-se a uma nova tecnologia. Desta forma, procuramos distinguir dentro do conhecimento pedagógico da tecnologia o conhecimento das possibilidades e restrições pedagógicas do uso das tecnologias. Igualmente, averiguaremos, dentro do conhecimento tecnológico do conteúdo o conhecimento sobre quais tecnologias são adequadas para cada tipo de conteúdo abordado e como cada um dos conteúdos podem ser modificados dentro do contexto do ensino e aprendizagem.

Por fim, examinaremos o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo: a compreensão de representações de conceitos, de técnicas pedagógicas e do enfrentamento das dificuldades dos alunos usando tecnologias. Para a investigação metodológica do estudo de caso e análise documental nesta primeira fase da Engenharia didática, apoiamos nas ideias de Stylianides e Ball (2004) nas abordagens de seis processos de estudo do conhecimento matemático necessário para o ensino, os quais apresentamos na sequência.

5.1. Análise dos documentos políticos

Os documentos políticos aqui são definidos como os documentos oficiais nos quais os professores têm recomendações em relação ao que aprender e ensinar sobre figuras espaciais nos três primeiros anos do EF, são eles: os PCN (1997), as DCN (2013) para o EF, e a BNCC (2017). Procuramos responder: que recomendações são registradas nos documentos oficiais em relação ao conhecimento geométrico de figuras espaciais? Desta forma, buscamos identificar nesses documentos as categorias sobre o conhecimento do conteúdo, do pedagógico e da tecnologia que foram recomendados.

Verificamos que os conteúdos dos PCN de Matemática para o EF estão divididos em blocos, e a Geometria é mencionada no bloco *Espaço e Forma* no qual o aluno desenvolverá a compreensão do mundo, descrevendo, representando e localizando-se nele; e em *Grandezas e Medidas*, em que o aluno fará a interligação com a Aritmética. À vista disto, a Geometria se firma como um campo que possibilita trabalhar com as diversas situações-problema e vinculá-la com as outras áreas da Matemática e campos do saber. “[...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa” (BRASIL, 1997b, p. 39).

Portanto, o objetivo principal de Geometria nas séries/ciclos iniciais é a percepção e organização do espaço em que se vive. Considerando que esse espaço sensível é tridimensional, a proposta é iniciar-se o estudo da Geometria pela observação desse espaço e pelos modelos que o representam (FONSECA et al., 2001, p. 28).

Em relação ao conhecimento espacial, os PCN definem que ele pode ser construído por meio das experiências das crianças. Da experimentação e manipulação dos objetos que o aluno irá construir a sua representação mental no espaço, saindo do sensorial para chegar ao espaço geométrico. “O pensamento geométrico se desenvolve inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades” (BRASIL, 1997b, p. 82).

Desta maneira, é por meio do trabalho constante de observar, manipular e construir as formas e figuras que o aluno vai percebendo diferenças, semelhanças e características entre elas. Essa exploração permitirá o reconhecimento de figuras tridimensionais e bidimensionais.

Em relação as orientações didáticas dispostas nos PCN, o professor é colocado como mediador na criação de situações que permitam a interação dos alunos na construção do processo de aprendizagem. Divide-se em orientações didáticas gerais, que estabelecem as propostas para a área, e as orientações específicas, que indicam como cada conteúdo pode ser tratado. Coloca-se, também, a autonomia como uma capacidade que deve ser desenvolvida nos alunos desde as séries iniciais, sendo fundamental na proposta da didática geral. Recomenda-se situações planejadas em que os alunos gradativamente tornem-se mais autônomos, e que as aulas sejam organizadas em função do espaço e tempo.

Segundo os PCN, existem alguns caminhos que permitem obter um melhor ensino na Matemática, porém é o professor que escolherá qual será o melhor para a sua prática em sala

de aula, mas para isso é fundamental que conheça diversas possibilidades; que articule os diferentes blocos de conhecimento da Matemática com os outros campos do saber; que a sequência dos conteúdos não seja trabalhada de forma rígida e inflexível; e que o planejamento seja bem desenvolvido.

Além disso, os PCN (BRASIL, 1997) de Matemática colocam como orientação didática a proposta de Resolução de Problemas, iniciando um conteúdo com um desafio em que os alunos possam operar alguma estratégia para resolvê-lo, utilizando dos conceitos, ideias e métodos matemáticos para resolvê-lo; e não como um exercício para aplicar fórmulas. Outra proposta didática mencionada é usar da História da Matemática, pois “pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.” (BRASIL, 1997b, p. 34)

Quanto aos recursos tecnológicos, os PCN informam que qualquer material pode ser usado como fonte de informação, não somente o livro didático, e de preferência que se utilize materiais de uso social como jornal, computadores, filmes, etc. “[...] é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento” (BRASIL, 1997a, p. 96).

Somado a isso, coloca-se também o recurso às Tecnologias da Informação como uma nova forma de comunicar e conhecer o mundo, e entrando como um novo desafio para as escolas. O acesso aos recursos tecnológicos é uma realidade para a maioria da população, e entra no ambiente escolar como meio motivador para explorar e investigar conceitos. Segundo os PCN de Matemática:

Isso traz como necessidade a incorporação de estudos nessa área, tanto na formação inicial como na formação continuada do professor do ensino fundamental, seja para poder usar amplamente suas possibilidades ou para conhecer e analisar softwares educacionais (BRASIL, 1997b, p.35).

Para finalizar, expõe a importância do recurso aos jogos, permitindo o desenvolvimento de processos psicológicos básicos, o autoconhecimento e o conhecimento dos outros, por meio das regras e procedimentos. Possibilita a satisfação, interesse, prazer, hábitos, e ajuda a perceber regularidades.

Quanto às DCN (2013), elas expõem que os componentes curriculares são os conteúdos sistematizados que fazem parte do currículo e que se articulam com as outras áreas do

conhecimento. Segundo o artigo 26 da LDB (1996), o currículo da base nacional comum deve abranger obrigatoriamente o estudo da Língua Portuguesa e da Matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, do ensino da Arte, da Educação Física e do Ensino Religioso. Considerando ainda que: “Do ponto de vista da abordagem, reafirma-se a importância do lúdico na vida escolar, não se restringindo sua presença apenas à Arte e à Educação Física.” (BRASIL, 2013, p. 118).

Assim sendo, a seleção dos conteúdos deve levar em consideração quais terão relevância para a vida e trajetória escolar do aluno, buscando a contextualização e a flexibilidade das abordagens em relação às diversidades dos estudantes, ou seja, o professor precisa ter o conhecimento de conteúdo horizontal.

Ademais, o professor também precisa ter o conhecimento de conteúdo vertical, mencionado como elo importante na ação pedagógica, ou seja, saber fazer a articulação entre todas as etapas de educação, em especial da Educação Infantil com os anos iniciais do Ensino Fundamental, em termos de reconhecer o que os alunos já aprenderam e recuperar sua ludicidade.

Quanto à organização dos conteúdos é preciso buscar uma integração entre as áreas com a vida cotidiana, permitindo um envolvimento ativo dos estudantes e estabelecendo uma relação com suas experiências no processo de aprendizagem. Além disso, as DCN recomendam que os conteúdos curriculares sejam tratados por meio de projetos articulados com as áreas de conhecimento, e que sejam destinados para isso pelo menos 20% da carga horária de trabalho anual.

Desta forma, para que o ambiente escolar esteja propício para a aprendizagem, os sistemas de ensino deverão oferecer às escolas condições adequadas de trabalho e materiais necessários às suas atividades, conforme é esclarecido como dever de Estado no inciso IX do art. 4º da Lei nº 9.394/96 “padrões mínimos de qualidade de ensino, definidos como a variedade e quantidade mínimas, por aluno, de insumos indispensáveis ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem” (BRASIL, 1996).

O conhecimento matemático é colocado na BNCC (2017) na articulação entre as diversas unidades temáticas (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, e probabilidade e estatística). A Geometria na BNCC, já foi exposta neste trabalho no subcapítulo 2.3 (p. 27), sendo assim, resumiremos aqui, por meio do quadro 6, as unidades de registros em relação aos conhecimentos que o professor precisa desenvolver no ensino de figuras espaciais de acordo com os documentos oficiais analisados:

Quadro 6 - Conhecimentos de figuras geométricas espaciais que o professor precisa desenvolver segundo os documentos oficiais

PCN	DCN	BNCC
Conhecimento do Conteúdo (CK)		
<u>Conteúdos conceituais e procedimentais:</u> Perceber, interpretar e representar tamanhos e formas; Observar e caracterizar as formas geométricas; Interpretar, comparar e representar objetos; Perceber semelhanças entre figuras espaciais e planas; Construir e representar formas.	<u>Conteúdos curriculares:</u> Compreender a realidade que o cerca; Ter a capacidade de representação; Compreender o mundo físico e natural.	<u>Habilidades:</u> Relacionar e associar figuras geométricas espaciais à objetos do mundo físico; Nomear, comparar e reconhecer figuras geométricas espaciais; Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais; Relacionar as figuras geométricas espaciais com suas planificações.
Conhecimento Pedagógico (PK)		
<u>Orientações didáticas:</u> Realizar experimentações; Manipular objetos; Mediar interações entre os alunos; Utilizar resoluções de problemas e da história da matemática; Favorecer as conexões entre os tratamentos dos conteúdos	<u>Tratamentos dos conteúdos:</u> Considerar a importância do lúdico; Favorecer a ajuda entre os educandos; Integrar as áreas dos conhecimentos; Possuir o conhecimento horizontal.	<u>Metodologias e estratégias didático-pedagógicas:</u> Relacionar representações empíricas; Usar a investigação; Interagir com seus pares de forma cooperativa; Usar resolução de problemas; Desenvolver projetos; Desenvolver o letramento matemático; Usar a modelagem matemática; Possibilitar a articulação horizontal e vertical do currículo.
Conhecimento tecnológico (TK)		
<u>Recurso:</u> Utilizar o livro, a revista, o jornal, jogos, filmes, computador e softwares educacionais	<u>Materiais:</u> Compreender as condições adequadas de trabalho e os materiais necessários para o ensino.	<u>Recursos didáticos e tecnológicos:</u> Usar livros, novas ferramentas, jogos, vídeos e software de geometria dinâmica.
Contexto		
Aulas organizadas em função do espaço e tempo; Sequência dos conteúdos trabalhada de forma que não seja rígida e inflexível; A importância das regras e procedimentos.	Condições adequadas de trabalho e materiais necessários às atividades.	Progressiva sistematização de experiências de novas formas de relação com o mundo; Organizar o trabalho em torno dos interesses manifestados pelas crianças e de suas vivências mais imediata.

Fonte: Construção nossa

Percebemos que cada um dos documentos oficiais se utilizou de nomenclaturas diferentes ao se referirem aos conhecimentos do conteúdo, conhecimento pedagógico e conhecimento tecnológico. Isto posto, os PCN direcionam algumas orientações em relação aos conteúdos, mas não instituem o que deve ser ensinado, e as DCN não os explicitam diretamente, apenas sugere como os diferentes assuntos podem ser abordados.

Assim sendo, a BNCC expõe os conteúdos na forma de habilidades³⁶. Hoje, a BNCC está como o mais importante e atual guia para que os professores possam organizar os currículos e delimitar os conhecimentos e habilidades que os alunos deverão saber.

³⁶ As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares (BNCC, 2017, p. 29).

Por meio do quadro 6, podemos notar uma similaridade entre os documentos oficiais em relação ao conhecimento do conteúdo (CK), porém com a diferença de que os PCN colocam a importância de saber representar os objetos e formas por meio do desenho e da construção da figura, já a BNCC propõe como relevante o saber reconhecer, relacionar e explorar as figuras ou sólidos espaciais entregue aos alunos em suas diversas representações.

Quanto o conhecimento pedagógico (PK), também percebemos uma semelhança entre eles, no entanto, a BNCC coloca que ao utilizar o objeto geométrico, o aluno não manipule apenas. É primordial instigar a investigação e experimentação, relacionando as formas e suas representações, em um trabalho de interações entre os alunos. Além disso, deve-se saber usar a resolução de problemas e a história da matemática, por meio de projetos e modelagem³⁷.

A BNCC apresenta também a importância de saber, não somente do conhecimento horizontal, mas também do vertical sobre o currículo, ou seja, de saber a relação dos conteúdos com os diversos temas matemáticos e entre as diversas áreas destacadas ao longo do ano, e de saber da relação dos conteúdos entre os anos escolares.

Sobre o conhecimento tecnológico (TK), percebemos a correspondência entre o uso do livro e jogos, e algumas modificações entre os recursos, tais como vídeo exposto na BNCC ao invés de filme como é colocado na PCN. Isso possivelmente se deu por conta da evolução tecnológica que coloca o vídeo em contexto mais amplo do que o do filme, pois segundo Bahia e Silva (2017), pode-se considerar como vídeos didáticos os vídeos de mediação, videoaula, vídeo tutorial, vídeo instrucional, entre outros.

Ademais, os PNC expõem o uso de revistas e jornais para a construção de figuras espaciais, todavia, a BNCC destaca a importância de reconhecê-las e não de construí-las, por meio do uso de novas ferramentas, ou seja, qualquer objeto que possa representar a figura espacial, ou qualquer outro recurso que sirva como ferramenta na apreensão da figura.

Por fim, a BNCC apresenta o uso da tecnologia digital, como o uso do *software* de geometria dinâmica, isso vem complementar o que antes era exposto nos PCN quanto à utilização do computador e *softwares* educativos.

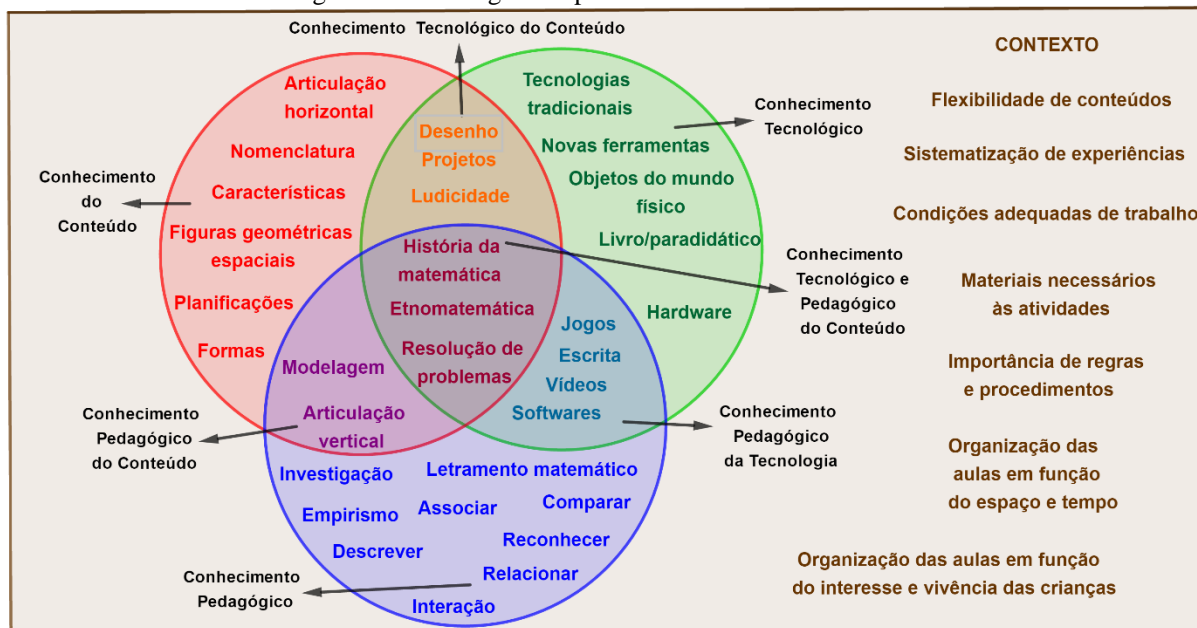
Ainda assim, como a BNCC é um documento mais atual, espera-se encontrar como uma das hipóteses da pesquisa que os conhecimentos de Geometria Espacial elementar mobilizados pelos professores dos anos iniciais são os recomendados pela PCN. Desta forma, após a pré-análise e exploração do material, fizemos a cocorrência das unidades de registros no tratamento dos resultados organizando por categorias comuns (Apêndice 5). Assim, podemos

³⁷ Modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial (D'AMBRÓSIO, 1986, p. 11)

interpretar a primeira abordagem do processo de estudo do conhecimento matemático necessário ao ensino, compreendendo quais recomendações são registradas nos documentos oficiais em relação ao conhecimento geométrico de figuras espaciais nos anos iniciais do EF.

As categorias foram organizadas em relação aos componentes do TPACK conforme encontra-se na figura 10.

Figura 10 - Resumo das recomendações registradas nos documentos oficiais em relação ao conhecimento geométrico de figuras espaciais nos anos iniciais do EF



Fonte: Construção nossa

Consequentemente, após categorizar as respostas do quadro 6, de acordo com os compontes do TPACK, identificamos que as recomendações registradas nos documentos oficiais em relação ao conhecimento geométrico de figuras espaciais seguem um quadro bem estruturado englobando diversas noções, não só importante para o ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar, mas das diversas unidades temáticas da matemática e das outras áreas do saber.

Para averiguar se essas recomendações estão alinhadas com as ideias incorporadas nos materiais curriculares criados para os professores, pesquisaremos no próximo item a segunda abordagem, investigando como as figuras espaciais estão expostas nos currículos dos professores dos anos iniciais do EF.

5.2. Análise do currículo de matemática dos professores

Os objetos de análise aqui se referem às ementas do currículo de matemática do curso de licenciatura em pedagogia. Assim sendo, escolhemos investigar as universidades locais que ofertam esse curso no município de Angra dos Reis. Na modalidade presencial, temos a Universidade Federal Fluminense (UFF) polo Angra dos Reis e na modalidade à distância temos o consórcio do Centro de Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro (Cederj³⁸), polo Uniandrade, polo Unicesumar, e o polo da Universidade Anhanguera.

Como as ementas dos polos da Uniandrade, Unicesumar e da Universidade Anhanguera não estão disponíveis no site da instituição, nos dedicamos apenas à investigação das ementas do curso de licenciatura em pedagogia da modalidade presencial da UFF (Anexo1) e o da modalidade a distância do consórcio Cederj (Anexo 2).

A UFF oferece em sua grade curricular duas disciplinas, uma no segundo período com carga horária de 60 horas chamada de *Linguagem Matemática*, e a outra no terceiro período com carga horária de 95 horas chamada de *Matemática: Conteúdo e método I*. O consórcio Cederj também oferta na sua grade curricular duas disciplinas, uma no segundo período com carga horária de 60 horas chamada de *Matemática na Educação 1*, e a outra no terceiro período com carga horária de 60 horas chamada de *Matemática na Educação 2*.

Fizemos a investigação por meio das plataformas das universidades e procuramos apontar nas ementas de 2020 as indicações sobre o cohecimento do conteúdo, do pedagógico e da tecnologia que são recomendados aos docentes dos anos iniciais do EF em relação ao ensino e aprendizagem de figuras espaciais. A análise destes documentos e as informações descobertas se encontram no quadro 7.

Quadro 7 - Conhecimentos de figuras geométricas espaciais que o professor precisa desenvolver segundo as ementas do curso de licenciatura em pedagogia

UFF	Cederj
Conhecimento do Conteúdo (CK)	
Conteúdos do ensino de geometria; Linguagem geométrica; Raciocínio lógico: levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação, organização	Sólidos geométricos; Representação espacial; Formas geométricas básicas; Visualização espacial.
Conhecimento Pedagógico (PK)	
Análise dos processos de representar, relacionar, resolver problemas, investigar e comunicar; Construção e resolução de problemas; Métodos de ensino; Abordagens didática; Concepção construtivista da aprendizagem significativa; Análises de propostas interdisciplinares; Aspectos epistemológicos e metodológicos; Etnomatemática; Análise de jogos matemáticos.	Relações entre as formas geométricas; A resolução de problemas; A história da Matemática; Comunicação de ideias geométricas.

³⁸ É um consórcio formado por sete universidades públicas do Estado do Rio de Janeiro em parceria com a Secretaria de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação do Rio de Janeiro com o objetivo de oferecer cursos de graduação a distância, na modalidade semipresencial para todo o Estado do Rio de Janeiro. A competência acadêmica do curso de licenciatura em pedagogia a distância no polo de Angra dos Reis é de responsabilidade da Faculdade de Educação da UERJ.

Conhecimento tecnológico (TK)	
Materiais didáticos estruturados; Jogos matemáticos; Paródias; Meios de comunicação; Livros didáticos; Ferramentas tecnológicas.	Não menciona
Contexto	
Reflexão crítica da linguagem matemática; Concepção e tendência no campo da Educação Matemática; Diretrizes curriculares para o ensino da Matemática; Laboratório de ensino.	Visão crítica de seu mundo e da realidade que os cerca,

Fonte: Construção nossa

Percebemos que cada uma das ementas utilizou nomenclaturas diferentes para se referir a ideias comuns relacionadas ao conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico. A UFF não deixa claro quais são exatamente os conteúdos que devem ser abordados, apenas menciona o uso da linguagem geométrica. Já o Cederj menciona o estudo dos sólidos, suas representações e formas, além de colocar como conteúdo a visualização espacial, que é explicitado pela UFF de maneira mais ampla como forma de desenvolver o raciocínio lógico.

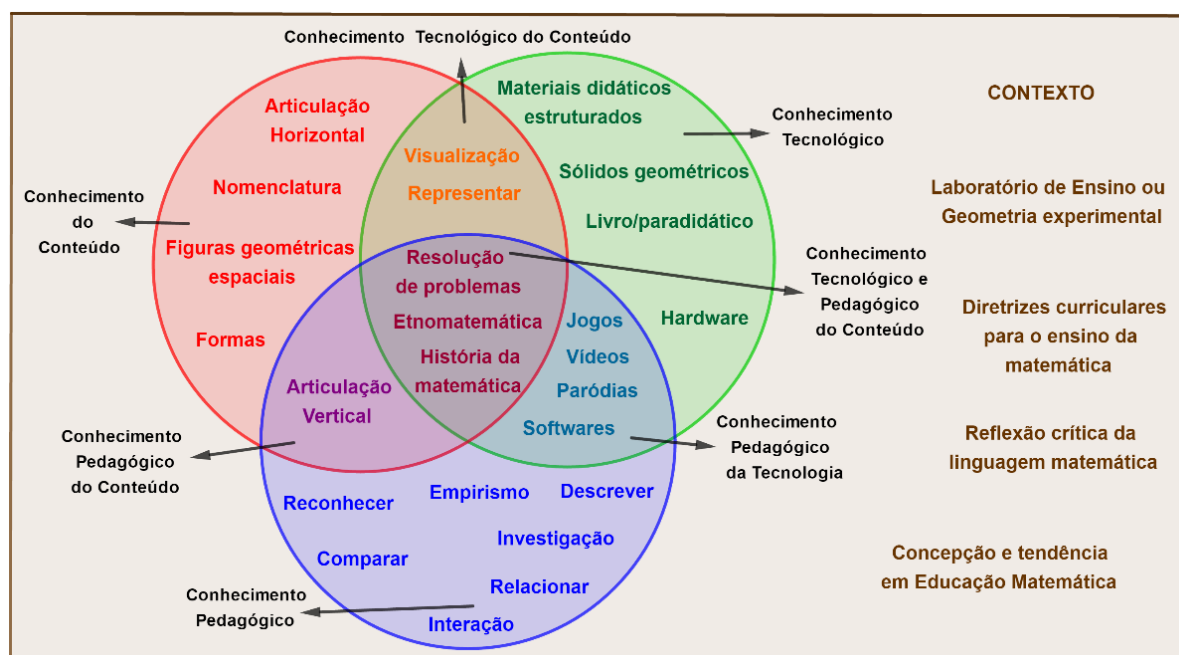
Quanto ao conhecimento pedagógico, identificamos uma similaridade entre as ementas, na qual o professor deve pautar as formas geométricas, usando a comunicação e a linguagem adequadas, diferentes representações, investigando-as, compreender distintas metodologias, tais como a história da matemática, etnomatemática, jogos e resolução de problemas.

Acerca do conhecimento tecnológico, pelo Cederj não foi identificado nenhum recurso didático, na UFF temos a menção de diferentes materiais estruturados, mas sem aprofundamento. Consideramos aqui como material estruturado em Geometria: o papel para a construção da figura espacial por meio das faces; palitos e massinha de modelar, para a formação da forma esquelética dos sólidos, tendo o palito como aresta e a massinha como vértice. Além disso, a UFF também menciona como recurso os jogos, o livro didático, as paródias, e as ferramentas tecnológicas e, consideraremos aqui como tecnologias tradicionais e digitais.

Deste modo, após a pré-análise e exploração do material, fizemos a coocorrência do tratamento dos resultados em categorias comuns (Apêndice 5). Assim, podemos interpretar a segunda abordagem do processo de estudo do conhecimento matemático necessário ao ensino sobre como as figuras espaciais são expostas nos currículos dos professores dos anos iniciais do EF.

As categorias foram organizadas em relação aos componentes do TPACK conforme se encontra na figura 11.

Figura 11 - Como as figuras espaciais são expostas nos currículos dos professores dos anos iniciais do EF



Fonte: Construção nossa

Assim sendo, após categorizar as respostas do quadro 2 de acordo com os componentes do TPACK, identificamos como as figuras espaciais são expostas nos currículos dos professores dos anos iniciais do EF, e percebemos que segue um quadro parecido com as recomendações registradas nos documentos oficiais. A diferença maior está que nos currículos dos professores há uma preocupação maior na compreensão de técnicas pedagógicas usando tecnologias, enquanto que, as recomendações dos documentos oficiais têm uma preocupação maior nos conteúdos necessários para o ensino. Outra dessemelhança é que os currículos dos professores apresentam uma preocupação com a preparação profissional formal, enquanto que nas recomendações dos documentos oficiais, o receio dá-se pela flexibilidade do processo de ensino e aprendizagem para a idealização de crianças como pensadores matemáticos.

Contudo, pela pouca carga horária dedicada à Matemática, espera-se encontrar como uma das hipóteses da pesquisa, professores que apresentem um conhecimento superficial em relação a Geometria Espacial elementar. Assim sendo, pesquisaremos na próxima abordagem, os aspectos de cognição dos professores considerados essenciais para o trabalho, investigando quais faces do conhecimento de figuras espaciais dos professores valem a pena serem analisadas.

5.3. Análise do conhecimento matemático dos professores

Os objetos de análise aqui se referem ao questionário, a avaliação diagnóstica e entrevista com uma amostra de professores dos anos iniciais do EF e aplicada na primeira e segunda fase do estudo de caso piloto. Procuramos identificar o conhecimento geométrico mobilizado pelos professores ao ensinar figuras espaciais se baseando no quadro teórico referido no capítulo 3 deste trabalho.

Posto isto, enquadrámos o nível de pensamento geométrico dos professores em função da construção do conhecimento geométrico de Parzysz adaptado por nós para os anos iniciais do EF. Além de categorizar os dados em relação aos componentes do TPACK, triangulamos as informações entre o questionário aplicado na primeira fase do estudo de caso, com a avaliação diagnóstica e entrevista aplicadas na segunda fase do estudo de caso.

5.3.1 Análise do questionário

O questionário (Apêndice 1), lápis/caneta, foi entregue e respondido apenas pelos professores dos anos iniciais, que representam uma amostra de 52 docentes - dos 60 - que se inscreveram na formação *Descritores: desafios e Resoluções*, realizado no horário da tarde, no dia 30 de julho de 2019, na segunda semana de Formação Continuada dos Educadores da Rede Municipal de Ensino de Angra dos Reis (Formar³⁹). A escolha desta amostra decorreu porque boa parte dos inscritos nesta formação, correspondia ao público alvo desta investigação. Além disso, outro fator predominante foi que um dos palestrantes era o autor desta pesquisa, facilitando assim, a coleta dos dados. Pelo questionário, constatamos que a média das idades dos professores que participaram da primeira fase do estudo de caso era de 42 anos e a média profissional era de 14 anos de experiência. Um fator que chamou a atenção é que apenas cinco docentes (menos de 10% da amostra) apresentavam idade inferior a 30 anos, e apenas 10 (menos de 20%) tinham um tempo de experiência inferior a 10 anos. Isso nos leva à hipótese que há pouca renovação do quadro de professores do município de Angra dos Reis. Com isso, definimos que um dos grupos de professores a ser entrevistado seria o que tem menos experiência docente, além dos professores com aproximadamente dez e vinte anos de

³⁹ Realizada entre os dias 29 de julho e 2 de agosto de 2019, com aproximadamente 50 atividades pedagógicas, a formação foi composta por oficinas, fóruns e palestras com quatro horas de duração, e um número de vagas limitadas para cada atividade distribuídas nos turnos da manhã, tarde e noite. Os docentes se inscreveram previamente por meio do sistema da prefeitura Sektionline (www.sektionline.com.br) escolhendo, dentre as atividades disponíveis, a formação de seu interesse, sendo que, os professores dos anos iniciais que possuíam uma matrícula de 20 horas realizaram pelo menos cinco atividades.

experiência no magistério, para verificar se existe alguma relação entre seus conhecimentos com o tempo de prática docente.

Quanto à formação dos professores dos anos iniciais do EF evidenciada no questionário, foi muito similar ao que a gerência administrativa da secretaria de educação nos informou em 31 de março de 2020 (Anexo 3). Como essa última amostra engloba todos os professores dos anos iniciais da rede, decidimos considerá-la ao invés do que foi identificado no questionário. Nesses dados, temos que 23% dos docentes têm apenas o diploma de nível médio na modalidade normal, 47% têm curso superior em licenciatura em pedagogia, e 30% têm curso superior em outras áreas, sendo que destes, apenas 1,6% é em licenciatura em Matemática.

Em relação à pós graduação, dos 52 professores dos anos iniciais do EF que participaram da primeira fase do estudo de caso, temos que 17 têm especialização, nos quais, três em ciências ambientais e educação especial, uma em ludopedagogia, sete em psicopedagogia, dois em letramento e alfabetização, três em gestão e administração das unidades escolares, um em legislação educacional; apenas dois professores possuem mestrado, um em educação especial e o outro em educação, contextos contemporâneos e demandas populares. Nenhum professor tem doutorado.

Os dados mostram a qualificação profissional desses docentes, e evidenciam que a formação foge da área da Matemática, revelando uma possível carência em relação ao conhecimento do conteúdo matemático e necessidade de ofertar uma formação para esse fim. Outro dado que chama a atenção é o turno de trabalho desses profissionais, na qual constatamos que somente um professor trabalha no turno da manhã, três no turno da tarde, e os outros 48 trabalham nos dois turnos.

No tocante ao ensino da Matemática observamos uma preferência dos professores no ensino da unidade temática dos números, com 48% dos docentes afirmando se sentir mais preparado para ensiná-la, o que nos remete à valorização maior dessa unidade temática em relação as outras quatro. Quanto à Geometria, temos 16% dos professores consideram capacitados a ensiná-la contra 23% que se sentem despreparados.

Observamos também que os educadores utilizam diversos materiais e estratégias para ensinar Geometria. Dentre as tecnologias utilizadas, 71% usam objetos do dia a dia, 67% blocos geométricos, 65% sólidos geométricos, 60% desenho, 56% figuras recortadas, 50% o livro didático, 44% origami ou dobradura, 19% canudos, e 4% outros tipos de materias. Para tal, as estratégias utilizadas em relação aos objetivos a serem alcançado temos que, 58% deles usam jogos, 54% exploram a resolução de problemas, 52% passam exercícios, 52% utilizam o quadro, 44% o discurso oral, 19% a história da matemática, e 13% utilizam tecnologias digitais.

O questionário permitiu identificar algumas tecnologias utilizadas pelos professores e estratégias de ensino em Geometria. Contudo, as informações obtidas no questionário não permite afirmar muita coisa sobre o conhecimento do conteúdo, pedagógico e pedagógico do conteúdo, por isso a necessidade de aplicar a avaliação diagnóstica e entrevista aos docentes dos anos iniciais do EF, em uma segunda fase do estudo do caso piloto, para assim apurar mais informações em relação a esses componentes do TPACK.

A seguir vamos apresentar a análise da avaliação diagnóstica e da entrevista, assim como a triangulação entre essas três fontes de dados.

5.3.2 Análise da avaliação diagnóstica docente

Dos 22 professores que responderam a avaliação diagnóstica (Apêndice 2) aplicada na segunda fase do estudo de caso piloto em 03 de fevereiro de 2020, na formação *Novas metodologias para o ensino da Geometria*, promovida pela secretaria municipal de educação de Angra dos Reis, percebemos que apenas um professor respondeu corretamente, argumentando as características comuns entre as figuras espaciais, realizando o levantamento de hipóteses e premissas intuitivamente, assim sendo, esse professor se encontra no nível da Geometria Proto-axiomática (G2) de Parzysz (2006).

Notamos também, que cinco professores se encontram no nível da Geometria Espaço-gráfica (G1) de Parzysz (2006), pois percebemos que, apesar de uma deficiência na habilidade de visualização ao não reconhecer todas as representações das figuras espaciais, os professores conseguiram identificar a contagem dos vértices, arestas e faces das figuras espaciais disponíveis e da figura espacial de um prisma pentagonal representada no papel. Contaram também os cubinhos de uma figura, na qual nem todos os cubinhos representados no papel estavam visíveis.

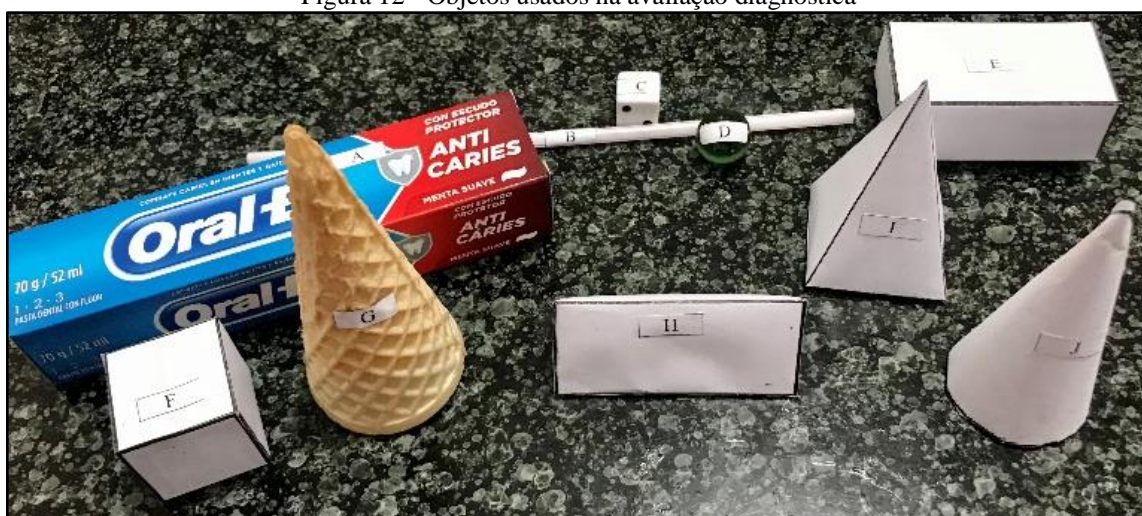
Além disso, 14 professores se encontram no nível da Geometria Concreta (G0), pois seu nível de visualização é dado somente pelos aspectos perceptíveis da realidade ou do material concreto, sendo que eles conseguiram apenas associar corretamente o objeto do cotidiano com o sólido geométrico apresentado pelo formador.

Percebemos que dois professores se encontram em nenhum dos níveis iniciais definidos por Parzysz, pois as características dos objetos não foram consideradas, uma vez que não souberam argumentar, identificar os elementos das figuras espaciais em diferentes representações, assim como reconhecê-las. Utilizaram a nomeação das figuras pelas imagens

mentais que tinham do objeto, e classificaram-nas apenas em objetos que apresentam curvas e retas. Assim sendo, percebemos que os níveis de Parzysz não formam suficientes para enquadrar os professores em níveis da Geometria, constatando a existência do nível do pré-reconhecimento de Clements e Battista (1992) ou pré-cognitivo de Clements e Sarama (2011) que precede a visualização e, dessa forma, consideramos a existência de um nível que antecede a Geometria Concreta (G0).

Para compreender a respostas dadas pelos docentes, foi entregue, no início da atividade, 10 objetos nomeados de A à J, conforme vemos na figura 12.

Figura 12 - Objetos usados na avaliação diagnóstica



Fonte: Avaliação diagnóstica

Temos no quadro 8 a identificação de cada um dos objetos:

Quadro 8 - Relação da letra com o objeto usado na avaliação diagnóstica

(A)	Caixa de pasta de dente
(B)	Canudo
(C)	Dado
(D)	Bola de gude
(E)	Paralelepípedo
(F)	Cubo
(G)	Casquinha de sorvete
(H)	Prisma triangular
(I)	Pirâmide quadrangular
(J)	Cone

Fonte: Construção nossa

A constatação das respostas dos docentes para justificar que se encontram no nível que precede o nível da Geometria Concreta (G0) de Parzysz (2006) e que chamamos de pré-cognitivo, conforme afirma Clements e Sarama (2011), se dá por meio das unidades de contexto expresso no quadro 9:

Quadro 9 - Resposta de dois docentes que se encontram no nível pré-cognitivo

As características dos objetos não foram consideradas	Docente I	<p>a) Quais deles apresentam curvas? <u>D, G e J</u></p> <p>b) Quais deles não apresentam curvas? <u>J, E, F, JG, A e C</u></p>	Não identificou que o objeto B (canudo) apresenta curva
	Docente II	<p>a) Quais deles apresentam curvas? <u>B, H, D, G, J</u></p> <p>b) Quais deles não apresentam curvas? <u>C, F, E, A, I</u></p>	Identificou que o objeto H (prisma triangular) apresenta curva
Utilizaram a nomeação das figuras pelas imagens mentais do que se tinha do objeto	Docente I	<p>2) Pegue o Objeto A e escreva o que você observa nele: <u>Um objeto feito de papel, que traz informações sobre um produto, de tamanho médio e em forma de triângulo, com dois lados maiores e dois menores.</u></p> <p>3) Pegue o Objeto B e escreva o que você observa dele: <u>Um canudo branco, com dois pequenos furos, de mais ou menos 30cm.</u></p> <p>4) Pegue o Objeto C e escreva o que você observa dele: <u>Um dado pequeno branco, com bolinhas pretas, marcando as quantidades, sendo de um lado 5, do outro 4, do outro 2, do outro 6 e do outro 3.</u></p> <p>5) Pegue o Objeto D e escreva o que você observa dele: <u>Uma bola de gude verde, em forma de círculo, pequena e brilhante quando cai no chão e nos remete ao período da infância.</u></p> <p>6) Pegue o Objeto G e escreva o que você observa dele: <u>Uma casquinha de sorvete, com superfície não lisa e na forma de um cone, com aberturas circulares.</u></p>	Explicita apenas a um subconjunto das características visuais de uma forma
	Docente II	<p>2) Pegue o Objeto A e escreva o que você observa nele: <u>retângulo</u></p> <p>3) Pegue o Objeto B e escreva o que você observa dele: <u>é um objeto de formato cilíndrico</u></p> <p>4) Pegue o Objeto C e escreva o que você observa dele: <u>é um dado, formato de cubo</u></p> <p>5) Pegue o Objeto D e escreva o que você observa dele: <u>é uma esfera</u></p> <p>6) Pegue o Objeto G e escreva o que você observa dele: <u>é um cone</u></p>	
Não souberam identificar os elementos das figuras espaciais em diferentes representações	Docente I	<p>13) Quais objetos que você recebeu têm o mesmo formato do:</p> <p>a) Cubo: <u>C, F</u></p> <p>b) Paralelepípedo: <u>E</u></p> <p>c) Pirâmide quadrangular: <u>I</u></p> <p>d) Prisma triangular: <u>H</u></p> <p>e) Cone: <u>G</u></p> <p>f) Cilindro: <u>J</u></p> <p>g) Esfera: <u>D</u></p>	O docente I não reconheceu o objeto A (caixa de pasta de dente) como paralelepípedo e objeto J como cone, colocando-o como cilindro. O docente II não reconheceu o objeto C (dado) como cubo, o objeto E como paralelepípedo, além de confundir o objeto I (pirâmide quadrangular) com o objeto H (prisma triangular) e explicitar o objeto D (bola de gude) como cubo
	Docente II	<p>13) Quais objetos que você recebeu têm o mesmo formato do:</p> <p>a) Cubo: <u>F e D</u></p> <p>b) Paralelepípedo: <u>A</u></p> <p>c) Pirâmide quadrangular: <u>H</u></p> <p>d) Prisma triangular: <u>I</u></p> <p>e) Cone: <u>F e G</u></p> <p>f) Cilindro: <u>B</u></p> <p>g) Esfera: <u>D</u></p>	















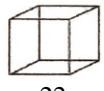

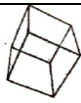


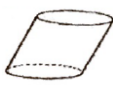

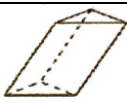


Fonte: Avaliação diagnóstica

Percebemos na resposta do Docente I, o emprego das imagens mentais que possuía, como reconhecer cor, tamanho e som, relacionando com imagens mentais adquiridas de outros objetos, observando as características do tipo de material que as constituem e finalidade. Em relação às respostas do Docente II, percebemos que ele não conseguiu comparar os objetos que

lhes foram entregues, e sim, utilizar das imagens mentais que possuía de outros objetos associando-os na observação entre eles.

Ademais, percebemos uma deficiência da visualização ou na apreensão perceptiva, pois nem todos os professores conseguiram identificar adequadamente todas as figuras espaciais dos objetos entregues no início da formação em diferentes posições e formatos, representados por figuras no papel. Observamos no quadro 10, uma relação das unidades de contexto da forma predominante do reconhecimento de cada figura expressa pelos 22 professores.

Quadro 10 - Reconhecimento da figura espacial em diferentes representações no plano x número de professores que discerniu a figura

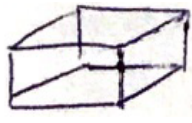








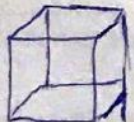




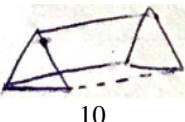

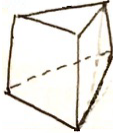
Paralelepípedo	 20	 19	 16	 1
Cone	 21	 21	 20	
Pirâmides	 20	 19	 16	 12
Esfera	 21	 20	 18	
Cubo	 22	 18	 18	
Cilindro	 20	 20	 19	
Prisma Triangular	 20	 19	 18	 13

Fonte: Avaliação Diagnóstica

Percebemos que a maior taxa de sucesso se deu no reconhecimento das figuras que geralmente são estereotipadas como as que são apresentadas nos livros didáticos e nos desenhos feitos pelos professores no quadro. Isto mostra a importância de explorar as diferentes representações de um registro, conforme afirma Duval (1995), e a manipulação e exploração das figuras espaciais, segundo Parzysz (2006) para o desenvolvimento do nível da Geometria Espaço-gráfica (G1).

O questionário, aplicado na primeira fase do estudo do caso piloto, mostrou que 60% dos professores utilizam o desenho como um dos registros usados como estratégia no ensino da Geometria, porém, na avaliação diagnóstica, verificamos como esse recurso chega na sala de aula no processo de visualização da figura espacial. As formas como o desenho é normalmente representado estão expressas pelas unidades de contexto no quadro 11.

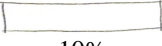


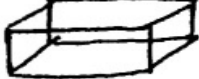
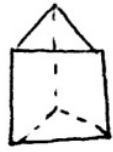
Quadro 11 - Forma de determinar a figura espacial com desenho x número de professores que usam a representação

Paralelepípedo	 16	 2	 1	Erraram ou não desenharam 3
Cone	 17	 2	 1	Erraram ou não desenharam 2
Pirâmide quadrangular	 13	 3	 1	Erraram ou não desenharam 5
Cubo	 20	 1		Erraram ou não desenharam 1
Cilindro	 13	 4	 2	Erraram ou não desenharam 3
Prisma Triangular	 10	 6	 1	Erraram ou não desenharam 5

Fonte: Avaliação Diagnóstica

Percebemos que a forma mais utilizada para representar os desenhos é a com sua face lateral maior, ou plana para os corpos redondos, usada como base para as figuras. Mas isso ainda não foi suficiente para levantarmos algumas constatações sobre esses desenhos, por isso, buscamos classificar as unidades de contextos segundo as categorias de Potari e Spiliotopoulou (1992) sobre como os desenhos podem ser feitos: em modelos holísticos, modelos com elementos de projeção, modelos geométricos incompletos, modelos geométricos completos e modelos físicos. O quadro 12 mostra exemplos dos desenhos dos professores em cada uma dessas categorias.

Quadro 12 - Categorias do nível do desenho das figuras espaciais segundo Potari e Spiliotopoulou (1992)

Modelo Holístico	Modelo com elementos de projeção	Modelo geométricos incompletos	Modelos geométricos completos	Modelos físicos
 10%	 7%	 8%	 61%	 14%

Fonte: Avaliação Diagnóstica

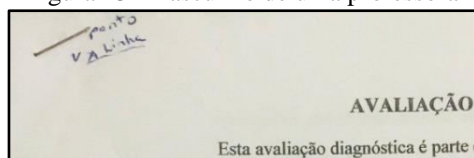
Assim sendo, quando existe a dificuldade de representar a imagem de um sólido, não havendo distinção das faces e das dimensões, temos um desenho do modelo holístico, e infelizmente em nossa amostra, 10% dos professores se encontram nessa categoria. Além disso, quando o desenho do sólido é ortogonal, ou seja, quando eles são vistos de uma perspectiva, projetando a frente ou ambas as partes dianteira e traseira, temos um desenho do modelo com elementos de projeção, e 7% dos professores se encontram nessa categoria. Quando são desenhados apenas alguns dos elementos ou características do sólido, temos um modelo geométrico incompleto, nesse caso, 8% dos professores se encaixam nessa categoria. Quando o desenho é mais aprimorado, com todos os elementos dos sólidos, diferenciando as dimensões, temos um modelo geométrico completo, essa foi a categoria que mais esteve presente nas imagens executadas pelos professores, com 61%. Finalmente, quando o desenho fornece as informações completas e considera sua construção física, temos o modelo físico, com 14% dos professores nessa categoria.

O desenho possibilita o reconhecimento de unidades figurais em uma imagem geométrica, permitindo o desenvolvimento do nível de apreensão perceptiva, porém, conforme percebemos, existe a dificuldade nos professores em realizar a representação das figuras espaciais por meio de desenhos, e isso afetará diretamente a forma como o aluno desenvolverá essa visualização das figuras geométricas espaciais, dado que “alguns traços nas figuras podem mudar completamente a percepção sobre ela” (SCHEIFER; BRANDT, 2020, p. 160).

Falta ainda, na avaliação diagnóstica, determinar se o professor consegue realizar a análise das figuras espaciais apresentadas pelo formador em sua configuração estrutural construída por palitos e massinhas, reconhecendo-a por meio de seus componentes e suas propriedades, visualizando essa nova representação e usando a terminologia adequada. Esse método de construção dos sólidos em sua forma estrutural foi relatado por vários professores que já utilizam como estratégia de ensino, e alguns deles ao invés de usar massinha de modelar usam jujubas.

Percebemos que os empecilhos na construção foram pontuais, porém, como a atividade era em grupo, logo os obstáculos eram vencidos com a ajuda dos colegas. Notamos ainda a dúvida com a nomenclatura do vértice, aresta e face, conforme observamos nos diálogos entre os professores, e constatamos no rascunho deixado no canto da avaliação de um dos professores conforme mostra a figura 13.

Figura 13 - Rascunho de uma professora



Fonte: Avaliação diagnóstica

No rascunho notamos que a professora escreveu V de vértice para se referir aos pontos e A de aresta para se referir as linhas. Isso mostra uma deficiência no conhecimento de conteúdo. Mas, como essa estratégia de ensino já tinha sido usada por vários professores, compreendemos que a habilidade de operar com a tecnologia tradicional por meio do uso de canudos, massinhas de modelar ou jujubas, está bem conceituado, carecendo assim, ao professor formação em relação aos conteúdos e uso de outras tecnologias - principalmente as digitais -, no ensino da Geometria.

À vista disto, para aprofundar mais sobre esses conhecimentos, utilizamos uma entrevista com seis professores, e a análise está expressa no item a seguir.

5.3.3 Análise da entrevista

Seguindo os protocolos de estudo de caso, usamos um conjunto de perguntas (Apêndice 3) com a finalidade de identificar os componentes do conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico e conhecimento pedagógico do conteúdo, além de acrescentar perguntas (que não constam no apêndice) sobre possível conhecimento tecnológico.

O objetivo foi, segundo (YIN, 2001, p. 113) “corroborar certos fatos que você já acredita terem sido estabelecidos (e não indagar sobre outros tópicos de natureza mais ampla e espontânea)”. A entrevista foi realizada em 3 de fevereiro de 2020, durante o intervalo na formação *Novas metodologias para o ensino da Geometria*. Entrevistamos, em local separado, seis professores individualmente e escolhidos por lecionarem em escolas de diversas regiões do município de Angra dos Reis, além de possuírem diferentes tempos de experiência profissional como docentes dos anos iniciais do EF.

Desta forma, convidamos para a entrevista professores com o tempo de experiência compreendido em quatro meses, três anos, 10 anos, 15 anos, 30 anos e 34 anos. Antes da concessão da entrevista, explicamos o objetivo do projeto e coletamos as devidas autorizações do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice 6).

Categorizamos as respostas dadas pelos professores de acordo com os componentes do TPACK a fim de verificar possíveis relações entre elas. Chamaremos os docentes de A, B, C, D, E, e F, respectivamente os professores com experiência docente, em ordem decrescente. Todas as entrevistas foram transcritas e enviadas por e-mail aos professores para a confirmação e autorização do diálogo. As escolhas das unidades de registro encontram-se no quadro 13.

Quadro 13 - Unidades de registros das entrevistas

Conhecimento do Conteúdo (CK)	
A	Não sabe quais são os conteúdos que devem ser abordados em Geometria, porém “fui seguindo as orientações que me faziam”.
B	Não sabe quais são os conteúdos que devem ser abordados em Geometria. Costuma abordar “as figuras geométricas, e..., as espaciais, é, os sólidos geométricos, basicamente isso”.
C	Não sabe quais são os conteúdos que devem ser abordados em Geometria, “não sei especificamente!” Aborda apenas nomenclatura do que “eles encontram no dia a dia, como pasta de dente, sorvete, é..., casquinha de sorvete, ...é, é isso!”
D	Não sabe quais são os conteúdos que devem ser abordados em Geometria, aborda “os desenhos, as figuras, né! A nomeação das figuras, as características das formas geométricas”, disse que “meu conhecimento ainda é superficial”.
E	“Figura geométrica, dos sólidos geométricos, né! As características”.
F	Não sabe quais são os conteúdos que devem ser abordados em Geometria.” Assim, eu, eu acompanho o material didático, e o conteúdo que nos é solicitado para trabalhar, né!”, mas mencionou as “as formas geométricas, os sólidos geométricos”.
Conhecimento Pedagógico (PK)	
A	“Eu gosto de trabalhar por grupos”, e “são poucas vezes que quando, eu fui fazer alguma atividade, assim, dinâmica, foram poucas vezes”.
B	Os alunos ficam sentados em fileiras, “no padrão tradicional”. “Faço perguntas, é..., pergunto o porquê de determinada resposta”.
C	“Eu tenho dificuldade da questão mesmo da parte prática, né!”, “De estar mostrando mesmo a questão da realidade”, os alunos ficam “em fileira porque dar mais crianças né!”
D	“Tem aula que é mais de, de..., que eu preciso trazer o conteúdo mais escrito, aí eu coloco enfileirado, tem aula que é mais dinâmica, né! Que tem que usar algum material é, é..., concreto, aí eu coloco em grupo no meio, assim, um de frente para o outro. E, tem aula que eu trabalho mesmo cada um na sua carteira, produzindo o seu trabalho individual”. “Eu primeiro faço pergunta”, “e aí, um vai interagindo com o outro”.
E	Organiza a turma de acordo com a atividade.
F	“Dentro da matemática, entra a geometria”, com “muito trabalho em grupo”.
Conhecimento Tecnológico (TK)	
A	“Eu uso o quadro!”, “Material dourado!”, “Livro”. Não usa a tecnologia digital.
B	Usa material “Concreto, material que lembra os sólidos”, “O livro pouco!” Não usa a tecnologia digital em matemática.
C	“A gente fica muito na questão do quadro”, “Livro didático, eu utilizo..., histórias que também, eu conheço algumas histórias relacionadas à questão da geometria” em livros paradidáticos.
D	“A imagem”, “livro didático, é..., tem livros didáticos que tem aquela planificação, que recorta, que o aluno recorta, e monta as figuras espaciais, é... Tem a, a..., esse trabalho de massinha, que fazem as figuras, através das massinhas, o canudo”, objetos do dia a dia, além de usar a “Internet, alguma atividade legal”.
E	Já usou cubos geométricos, geoplano, massinhas, materiais concretos diversos.

F	“Os livros vêm com aqueles,..., com figuras planas,..., que vem com a figura aberta para as crianças”, “planificadas, para as crianças montarem”. Usa também “Folha sulfite, eles fazem os desenhos, eles fazem as pesquisas, é, dentro de revistas”.
Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK)	
A	Ainda não conseguiu ensinar Geometria, porém nas suas aulas de matemática “eu tento deixar mais simples possível, assim não tem, não costumo problematizar o que a gente está aprendendo, justamente para que eles se divirtam e gostem”.
B	Orienta-se “Nos materiais curriculares e livros, na internet, o caderno de planejamento da prefeitura”.
C	“Eu acho que fica mais na questão prática mesmo”, “eu acho o concreto fica mais fácil para ele estar entendendo.”
D	-
E	“A gente faz a atividade do cotidiano: observação, e as atividades ou práticas ou escrita”.
F	-
Conhecimento Pedagógico da Tecnologia (TPK)	
A	“Trabalhos de casa, quando a gente..., primeiro a gente ensina aquele conteúdo, aí a gente trabalha em sala, em dupla, ou em grupo”.
B	“Eu gosto de usar a parte de informática também, até nessa turma eu tinha aula de informática, e tentava trazer coisas, é..., úteis, não só joguinho. Mas a parte de matemática não cheguei a entrar”.
C	-
D	Usa “uma avaliação escrita com desenhos, com imagens”, “o aluno tem que escrever.”
E	Costuma partir do concreto e depois você vai abordando o conceito. “A gente sempre tem que produzir os materiais”.
F	“No concreto dessa forma. Com recorte, colagem”.
Contextos	
A	“Em relação a indisciplina, isso atrapalha a concentração do aluno como da própria turma também, e quando há falta de recursos, isso limita o que a gente poderia fazer, né!”, além disso, “Eu ainda não tive que me reinventar”.
B	“Da geometria..., normalmente a matemática ela é..., vista com olhos tortos, né!” e “A questão da indisciplina, também é muito forte, que afeta, porque tem aquele pequeno grupo que está interessado em aprender, mas a maior parte da turma acaba tumultuando”.
C	“Ah! Eu acho que a indisciplina é muito complicado mesmo, porque assim, infelizmente você ser assim tradicional, que a gente fala que é mais fácil, né!”.
D	“A gente não tem os sólidos geométricos, a gente tem muito blocos lógicos com figura que dizem que é plana né!”, além de “Primeiro, é matar um bicho papão, né!” [...] “Aí, eu estímulo e tento desmitificar o medo né!”
E	“A indisciplina dificulta tudo no geral” o que acaba em realizar a “Reunião de pais”. “Além disso, eu uso a prática do incentivo” e sobre a falta de material “Eu entendo também, que a gente pode estar produzindo”.
F	“Falta de material, eu acho que é assim, a gente pode construir, né!” e “Então, a indisciplina influência, mas a gente tem domínio, né!”

Fonte: Entrevistas concebidas em 3 de fevereiro de 2020.

Identificamos, em relação ao conhecimento do conteúdo geométrico dos professores dos anos iniciais do EF, uma carência sobre o conhecimento do conteúdo, confirmado na avaliação diagnóstica e explicitado nas falas dos professores na entrevista. Contudo, ao ensinar geometria, os conteúdos abordados são os que são declarados pelos colegas da área, pelo livro didático, dando uma preferência para a nomenclatura e características das figuras e formas geométricas. Desta forma, a construção de uma formação para esses professores deve considerar primeiramente o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo geométrico.

Notamos também, em relação ao conhecimento pedagógico em Geometria, uma preferência em se trabalhar em grupos ao usar materiais concretos, com interação entre os

alunos, em fileiras e com parte escrita para explorar mais o conteúdo, todavia, ainda com uma carência do conhecimento de como realizar essa prática, já que, como foi dito anteriormente, os educadores apresentam dificuldade no conhecimento do conteúdo.

Reparamos, pelas colocações levantadas durante a formação pelos professores, que o conhecimento pedagógico do conteúdo geométrico se dá por tentativas e erros. Os educadores buscam meios e métodos de organizar a sala e abordar os conteúdos, posto que têm dificuldades, e quando percebem que os alunos estão aprendendo, repetem a metodologia em outras aulas. No entanto, quando há uma inquietação em relação à segurança desses conteúdos, voltam para a aula tradicional com os alunos enfileirados e copiando do quadro, por estarem assim, em sua zona de conforto. Abordam os conteúdos de forma superficial, orientando-se por meio de livros, internet e planejamento.

Consequentemente, ao abordar a Geometria, esses professores usam as tecnologias tradicionais, como quadro, material dourado, livro, livro paradidático, objetos do dia a dia, massinha, geoplano, desenhos, recorte e colagem, e construção das figuras espaciais exposta nos livros. As tecnologias digitais, como internet e computador são usados como ferramentas de pesquisa do professor, e não como recurso didático.

Notamos que o conhecimento pedagógico da tecnologia usado pelos professores remete à forma tradicional de ensino, na exploração dos materiais concretos e jogos. Já, o conhecimento tecnológico do conteúdo se dá pela abordagem do conteúdo no quadro e, atividades em sala e para casa, por meio do uso de desenhos e figuras. O conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo em Geometria foi identificado como a estratégia de tentativa e erro.

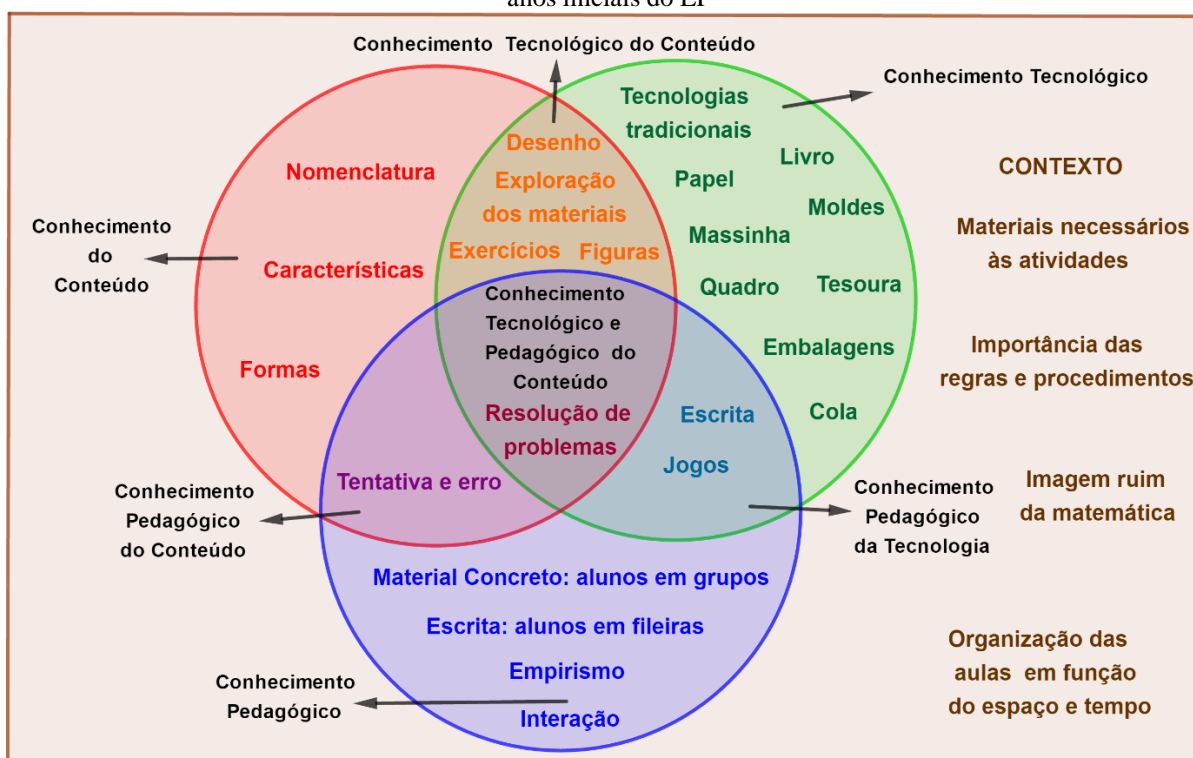
5.3.4 Triangulação das fontes usadas no estudo de caso

Percebemos o déficit dos professores, nas aulas de matemática em geral, em relação ao uso de tecnologias digitais, aos conteúdos de geometria e o uso de metodologias específicas ao abordarem os conteúdos. Isso confirma o que Dionízio e Bandt (2020) perceberam em suas oficinas no ensino da Geometria desenvolvidas com os professores que atuam nos anos iniciais do EF “que mesmo os conhecimentos sobre as figuras geométricas bi e tridimensionais, mais presentes na fala das professoras, precisavam ser aprofundados no processo formativo” (2020, p. 186), que “a participação em cursos que abordem o trabalho com a geometria não garante a aprendizagem da docência” (2020, p. 188) e por fim, “a aprendizagem da docência para o ensino

da geometria, quando ocorre, é por meio de formações específicas voltadas a esse propósito ou por meio de estudos individuais, que considerem as duas dimensões do conhecimento, a dos conteúdos e das formas de pensar” (2020, p. 188).

Logo, por meio da coocorrência do tratamento dos resultados da triangulação do questionário, avaliação diagnóstica e entrevista em categorias comuns (Apêndice 5), mostramos na figura 14 como os professores apresentam seu conhecimento geométrico.

Figura 14 - O conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria elementar dos professores dos anos iniciais do EF



Fonte: Construção nossa

Após categorizar as respostas dos questionários, avaliação diagnóstica e entrevistas, de acordo com os componentes do TPACK, identificamos quais aspectos do conhecimento de figuras espaciais dos professores vale a pena analisar, e percebemos uma carência nos diversos componentes do conhecimento. Em relação ao conhecimento recomendado pelos documentos políticos e expostos no currículo dos professores, temos que os conhecimentos de conteúdos incorporados e identificados nos professores são as nomenclaturas, formas e características, os conhecimentos tecnológicos incorporados e detectados limitam-se ao uso de livros, o conhecimento pedagógico incorporado é a interação e o empirismo, o conhecimento pedagógico da tecnologia incorporado e constatado é a estratégia de jogos. Por fim, o único conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo incorporado é o de resolução de problemas, e, mesmo assim, atestado em apenas 54% dos docentes da amostra. Percebemos também a importância

do contexto no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, da influência da experiência do professor como aluno e de sua preparação profissional, da flexibilidade de lidar com as situações do cotidiano, do paradigma da matemática ser considerada uma disciplina complexa e conseqüentemente apresentar uma imagem desagradável, a indisciplina dos alunos e a falta de material.

Desta forma, as respostas encontradas nas três primeiras abordagens mostram que nem todos os conhecimentos de Geometria Espacial elementar recomendados pelos documentos políticos e evidenciados no currículo de professores foram incorporados pelos docentes dos anos iniciais, possivelmente afetando, desta maneira, a tarefa de como os docentes desenvolvem o ensino e aprendizagem do currículo de Matemática dos alunos, assunto sobre o qual discorreremos a seguir.

5.4. Análise do currículo de matemática dos alunos

Os objetos de análise aqui se referem ao livro de matemática adotado na escola. Procuramos identificar nesses documentos referências sobre como o ensino e aprendizagem de figuras espaciais devem ser desenvolvidas no currículo do terceiro ano do EF. Buscamos reconhecer as tarefas curriculares sobre o conhecimento do conteúdo, do pedagógico e da tecnologia que os professores devem ensinar.

Primeiramente examinamos, por meio do portal operacional e de gestão do MEC, Sistema Integrado de Monitoramento Execução e Controle do Ministério da Educação (Simec⁴⁰), os livros mais adotados pelas escolas municipais que ofertam os anos iniciais do EF de Angra dos Reis no PNLD 2019 (Apêndice 7). O percentual dos livros adotados encontra-se no quadro 14.

Quadro 14 - Livros adotados nas escolas municipais de Angra dos Reis no PNLD 2019

Livro	1ª opção		2ª opção	
A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	6	11%	3	6%
ÁPIS MATEMÁTICA	20	37%	10	19%
APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA	5	9%	6	11%
AQUARELA MATEMÁTICA	1	2%	0	0%
AR - APRENDER E RELACIONAR: MATEMÁTICA	1	2%	1	2%
BURITI MAIS – MATEMÁTICA	8	15%	4	7%
EU GOSTO	0	0%	3	6%

⁴⁰ Disponível em: <http://simec.mec.gov.br/livros/publico/index_escolha.php>

LIGAMUNDO MATEMÁTICA	0	0%	1	2%
MEU LIVRO DE MATEMÁTICA	4	7%	3	6%
NOVO BEM-ME-QUER	5	9%	2	4%
NOVO PITANGUÁ – MATEMÁTICA	0	0%	2	4%
VEM VOAR MATEMÁTICA	4	7%	19	35%
TOTAL	54	100%	54	100%

Fonte: Simec (2020)

Diante desses resultados, escolhemos analisar o livro do 3º ano de matemática do EF correspondente ao manual do professor, respectivamente o mais adotado como 1ª opção, e o mais adotado como 2ª opção, são eles: *Ápis matemática* e *Vem voar matemática*. A análise desses dois livros didáticos mostra que, seguem às orientações da BNCC (2017) quanto aos objetos do conhecimento propostos e as habilidades a serem desenvolvidas.

Para facilitar a compreensão, destacamos as habilidades referentes ao estudo das figuras geométricas espaciais e percebemos que elas foram distribuídas ao longo do livro conforme observado no quadro 15.

Quadro 15 - Indicações das habilidades de geometria espacial nos livros didáticos analisados do PNLD 2019

Livro	Estrutura	Páginas	Seções de conteúdos	Objetos dos conhecimentos	Habilidades Previstas		
					Totais	Geometria Espacial	
ÁPIS MATEMÁTICA	Unidade 1	22	14	13	12	0	0%
	Unidade 2	30	13	10	10	2	20%
	Unidade 3	30	12	16	14	0	0%
	Unidade 4	24	16	9	8	1	13%
	Unidade 5	28	16	14	12	1	8%
	Unidade 6	22	12	17	16	2	13%
	Unidade 7	28	19	14	14	0	0%
	Unidade 8	18	6	21	21	1	5%
VEM VOAR MATEMÁTICA	Unidade 1	48	24	3	22	1	5%
	Unidade 2	58	29	3	22	1	5%
	Unidade 3	50	27	3	19	1	5%
	Unidade 4	54	28	3	21	2	10%

Fonte: Dante (2017) e Santos (2017)

Observamos que as habilidades referentes ao estudo de figuras espaciais foram distribuídas ao longo do livro didático em *Ápis Matemática* e em *Vem Voar Matemática*, mostrando uma tendência na articulação entre as unidades temáticas e no ensino espiral retomando e aprofundando um mesmo conceito ao longo das unidades. Mostra-se aqui a importância da aquisição do conhecimento horizontal por parte do professor no ensino e aprendizagem da Geometria Espacial elementar.

Essa primeira análise ainda não mostrou os indícios dos componentes do conhecimento do conteúdo, do pedagógico e da tecnologia em relação ao estudo de figuras espaciais, daí realizamos a investigação das unidades de registros explicitada no quadro 16, a seguir.

Quadro 16 - Conhecimentos de figuras geométricas espaciais que o professor precisa desenvolver nos alunos segundo os livros analisados no PNLD 2019

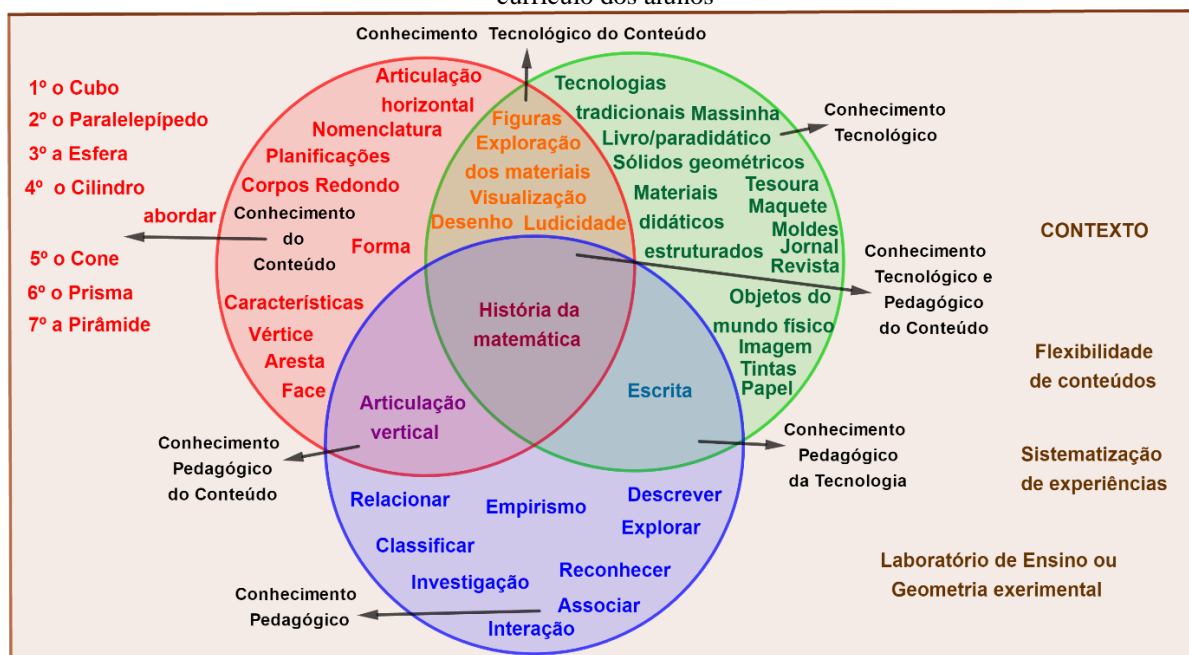
ÁPIS MATEMÁTICA	DEM VOAR MATEMÁTICA
Conhecimento do Conteúdo (CK)	
<p>Descrever o que se vê; Manipular, classificar e agrupar os sólidos; Identificar a forma dos sólidos geométricos retos; Reconhecer e comparar objetos do mundo físico que tem a forma dos sólidos geométricos; Explorar os nomes dos sólidos geométricos; Apresentar primeiro o cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro e cone, para depois o prisma e pirâmide; Descobrir elementos: faces, vértices e arestas; Descobrir características; Observar semelhanças e diferenças; Contornar as faces; Pintar as regiões planas do contorno; Confeccionar maquetes; Definir corpos redondos; Modelar os sólidos usando massinha; Montar os sólidos usando os moldes; Identificar o desenho dos sólidos em diferentes posições e tamanhos; Definir figuras geométricas espaciais e figuras planas; Associar a planificação ao sólido.</p>	<p>Explorar e reconhecer atributos dos sólidos; Separar os sólidos usando algum critério; Identificar a forma dos sólidos geométricos retos; Identificar objetos que lembrem os sólidos geométricos; Dizer o que o sólido geométrico e o objeto têm em comum; Associar as representações de figuras geométricas espaciais aos objetos do cotidiano; Nomear os sólidos geométricos; Apresentar primeiro o cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro e cone, para depois o prisma e pirâmide; Identificar, nomear e contar o número de faces, arestas e vértices; Analisar as características; Relacionar base e face lateral; Comparar pirâmides de bases diferentes; Explorar as características dos prismas; Classificar os prismas; Identificar a parte da caixa com o seu contorno; Contornar as faces; Pintar as faces laterais; Confeccionar maquetes; Chamar atenção para a parte arredondada; Montar os sólidos usando palitos e massa de modelar; Montar os sólidos usando os moldes; Observar as representações de figuras geométricas espaciais; Relacionar os sólidos geométricos a sua planificação; Descrever as características das planificações.</p>
Conhecimento Pedagógico (PK)	
<p>Estimular as competências leitoras e orais; Mover a participação de toda a turma; Articular a troca de ideias entre os alunos; Conduzir as atividades oralmente; Valorizar o conhecimento prévio do aluno; Utilizar histórias em quadrinhos; Articular com as áreas de conhecimento das ciências da natureza e ciências humanas; Articular com a unidade temática dos números; Testar se é possível fazer o sólido rolar em diferentes posições; Realizar experimentação com tintas; Pintar as partes dos corpos redondos e rolar em uma folha; Realizar brincadeira e jogos; Carimbar as faces pintadas do sólido em um papel.</p>	<p>Estimular as competências leitoras e orais; Mover a participação de toda a turma; Compartilhar as ideias entre os alunos; Conduzir as atividades oralmente; Verificar se os alunos foram capazes de perceber características dos sólidos; Articular com as áreas de conhecimento das ciências da natureza e ciências humanas; Realizar experimentação com tintas; Realizar brincadeira e jogos; Carimbar as faces pintadas do sólido em um papel; Sobrepor as embalagens nos contornos dos moldes.</p>
Conhecimento tecnológico (TK)	
<p>Livro paradidático e outros livros; Foto de objetos; Citar os objetos em uma lousa e em um cartaz; Tesoura; Recortar Moldes; Escrever os nomes dos sólidos; Jornal; Revista; Desenho das figuras; Lápis ou caneta; Massa de modelar; Argila; Dicionário matemático; Maquete; Embalagens; Tinta; Folha de papel e dobraduras.</p>	<p>Sólidos geométricos; Livro paradidático; Foto de objetos; Citar os objetos em um painel; Tesoura; Recortar os moldes; Escrever os nomes dos sólidos; Desenho das figuras e suas planificações; Lápis ou caneta; Massa de modelar; Maquete; Embalagens; Tinta; Folha de papel; Palitos de madeiras; Bolas de isopor.</p>
Contexto	
<p>Geometria Experimental e manipulativa; Enfatizar a igualdade entre as unidades temáticas e o trabalho integrado.</p>	<p>Estabelecer relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do</p>

conhecimento; Lidar com situações de descrição, confronto de hipóteses e descrição de objetos.

Fonte: Construção nossa

Após a pré-análise e exploração do material, fizemos a coocorrência do tratamento dos resultados em categorias comuns, elas foram organizadas em relação aos componentes do TPACK conforme encontra-se na figura 15.

Figura 15 - Conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria elementar desenvolvidos no currículo dos alunos



Fonte: Construção nossa

Assim, podemos interpretar a quarta abordagem do processo de estudo do conhecimento matemático necessário ao ensino da Geometria espacial elementar referente como a Geometria espacial elementar é desenvolvida no currículo dos alunos. Desta forma, após categorizar as unidades de registro do quadro 11, de acordo com os componentes do TPACK, identificamos que as recomendações registradas nos currículos dos alunos em relação ao conhecimento geométrico de figuras espaciais seguem um quadro bem estruturado com diversos conhecimentos, principalmente entre o conhecimento de conteúdo e o conhecimento tecnológico. Vale ressaltar, segundo Dionizio (2019, p. 41), “que a forma como o conteúdo de geometria é apresentada nos livros nem sempre contribui com o processo de aprendizagem. Por isso, o professor precisa ter cautela na escolha e na utilização de tais livros”.

Além disso, percebemos um foco grande do uso de tecnologias tradicionais e uma falta de articulação entre o conhecimento das tecnologias sugeridas com o conhecimento pedagógico da tecnologia.

Ademais, a Geometria espacial elementar deve ser desenvolvida no currículo dos alunos respeitando a articulação horizontal e vertical, abordando as principais figuras espaciais seguindo a seguinte ordem de abordagem: 1º o cubo, 2º o paralelepípedo, 3º a esfera, 4º o cilindro, 5º o cone, 6º o prisma e por último a pirâmide, dentro de um contexto de geometria experimental e manipulativa, realizando a intergração com as outras áreas do saber e entre as unidades temáticas da matemática.

Comparando os conhecimentos de Geometria elementar incorporados e identificados nos professores com os conhecimentos detectados para serem desenvolvidos no currículo dos alunos, notamos uma ineficácia nos docentes em relação aos conhecimentos de conteúdos a respeito da articulação horizontal, da planificação, do corpo redondo, vértice, arestas e faces, e da sequência de ensino das figuras espaciais. Observamos também a carência em relação ao conhecimento pedagógico acerca de relacionar, classificar, descrever, explorar, reconhecer, associar e fazer a investigação. Com referência ao conhecimento tecnológico, a destituição está no uso dos sólidos geométricos, materiais didáticos estruturados, maquete, jornais, revistas, objetos do mundo físico, imagem e tinta. Além disso, existe a carência com relação ao conhecimento tecnológico do conteúdo por meio da visualização e ludicidade, do conhecimento pedagógico do conteúdo por meio da articulação vertical, e do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo por meio da história da matemática.

Assim sendo, a resposta está alinhada com os tópicos em que os alunos têm dificuldades na abordagem 5, mostradas no próximo item, referente aos aspectos do conhecimento matemático dos alunos em relação às figuras espaciais elementares.

5.5. Análise do conhecimento matemático dos alunos

Aqui os objetos de análise referem-se ao exame do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb⁴¹), que é composto por testes padronizados e questionários socioeconômicos, realizados periodicamente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Nos anos iniciais do EF, até o ano de 2018, tínhamos a Avaliação Nacional da

⁴¹A partir de 2019 serão avaliadas creche e pré-escola na Educação Infantil, 2º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio.

Alfabetização (ANA⁴²) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc⁴³) – conhecida nacionalmente como Prova Brasil – e que hoje todas elas são agrupadas com o nome de Saeb. Além disso, as datas dos exames foram unificadas, sendo que os exames são realizados em anos ímpares desde 2019 e os resultados divulgados em anos pares.

Segundo o cronograma do INEP, os microdados do Saeb de 2019 serão divulgados em dezembro de 2020, dessa forma, procuramos analisar as avaliações recentes da prova Brasil e da prova ANA cujos resultados já foram divulgados. Nossa pesquisa se deu por meio da investigação do portal do Inep (2019b) das matrizes de referência da Anresc (Prova Brasil)/Aneb (Anexo 4), das matrizes de referência da ANA (Anexo 5), e suas escalas de proficiências. Pesquisamos também, como complementação de informações, a plataforma painel educacional do Inep (2017).

Com base nessas pesquisas, identificamos as recomendações registradas sobre figuras espaciais na matriz de referência conforme observamos no quadro 17.

Quadro 17 - Matriz de referência do Saeb anos iniciais do EF em relação à Geometria Espacial Elementar

	ANA	Prova Brasil
Reconhecer as representações de figuras geométricas espaciais	Associar representações de objetos do mundo físico a representações de alguns sólidos geométricos simples: cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, pirâmide. (exemplo: caixa com paralelepípedo, casquinha de sorvete com cone).	Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações
	Reconhecer planificações de prismas. Evitar usar cubos e paralelepípedos num mesmo item.	

Fonte: Inep (2019b)

Notamos que a matriz de referência da ambas avaliações do Saeb, Prova Brasil e ANA, para os anos iniciais do EF, vão de acordo com as orientações das habilidades expostas da BNCC (2017). A matriz de referência da ANA, segue a similaridade com a BNCC na habilidade (EF01MA13) do 1º ano do EF em “relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico”, na habilidade (EF02MA14) do 2º ano do EF em “reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico”, e na habilidade (EF03MA13) do 3º ano do EF em “associar figuras

⁴² Aplicados até 2016 para alunos do 3º ano do EF, e por conta da implementação da BNCC em 2017, que estabeleceu o fim do ciclo de alfabetização no 2º ano e não mais no 3º, a prova passará a ser aplicada apenas aos alunos do 2º ano do EF. Contudo, por conta de uma série de mudanças anunciadas pelo MEC para o Saeb 2019, a prova ANA será aplicada somente em 2021. Isso porque os anos de 2018 e 2019 foram definidos como prazo para que as escolas pudessem se estruturar para tirar a BNCC do papel e torná-la realidade nas salas de aula.

⁴³ Aplicada em escolas públicas urbanas e rurais que contenham no mínimo 20 estudantes matriculados no quinto e no nono anos do EF.

geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras” (BNCC, 2017, pp. 279, 283, 287).

Outra correspondência com a BNCC é a avaliação da Prova Brasil com a habilidade (EF03MA14) do 3º ano do EF em “descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações”, na habilidade (EF04MA17) do 4º ano do EF em “associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais” e na habilidade (EF05MA16) do 5º ano do EF em “associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos”(BNCC, 2017, pp. 287, 293, 297).

Com base nisso, e antes da análise dos resultados das últimas avaliações do Saeb para os anos iniciais do EF, vamos compreender a atual escala de proficiência de matemática utilizada por ela no 5º ano do EF (Anexo 6) e compará-la com a escala antiga usada até 2017 (Anexo 7). A escala se divide em 11 níveis, de 0 à 10, pelo desempenho dos alunos na avaliação e as informações em relação a Geometria espacial elementar, e que se encontra no quadro 18.

Quadro 18 - Escala de proficiência de matemática Saeb do 5º ano do EF em Geometria espacial

Nível	Desempenho	Descrição da Prova Brasil	
		antes de 2017	à partir de 2017
0	Menor que 125	-	-
1	Maior ou igual a 125 e menor que 150	-	-
2	Maior ou igual a 150 e menor que 175	-	-
3	Maior ou igual a 175 e menor que 200	-	-
4	Maior ou igual a 200 e menor que 225	Identificam propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras com suas planificações.	Reconhecer a planificação de uma pirâmide dentre um conjunto de planificações.
5	Maior ou igual a 225 e menor que 250	-	Reconhecer a planificação de um cubo dentre um conjunto de planificações apresentadas.
6	Maior ou igual a 250 e menor que 275	Identificam planificações de uma figura tridimensional.	-
7	Maior ou igual a 275 e menor que 300	-	Reconhecer um cubo a partir de uma de suas planificações desenhadas em uma malha quadriculada.
8	Maior ou igual a 300 e menor que 325	-	Reconhecer objetos com a forma esférica dentre uma lista de objetos do cotidiano.
9	Maior ou igual a 325 e menor que 350	-	Reconhecer a planificação de uma caixa cilíndrica.
10	Maior ou igual a 350	Relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.	-

Fonte: Inep (2019b)

Percebemos que a atual avaliação do Saeb para o 5º ano está atenta em averiguar o desempenho em geometria espacial pertinente às habilidades EF03MA14, EF04MA17 e EF05MA16, conforme foi descrito em sua matriz de referência. Além disso, observamos que a antiga escala procurou descrever uma preocupação em relacionar as figuras espaciais com sua planificação, como é exposto no Saeb, e também determinou como os alunos identificam propriedades comuns e diferenças entre as diversas figuras espaciais.

O resultado da média de proficiência em matemática do 5º ano no Saeb de 2017 mostra que o resultado obtido no município de Angra dos Reis é de 15,4 pontos menor que o resultado do estado de Rio de Janeiro, e de 14,7 pontos menor que o resultado do Brasil. Os resultados estão demonstrados no quadro 19.

Quadro 19 - Proficiência em matemática do 5º ano do EF do Saeb 2017

Dependência administrativa	Média
Brasil	227,3
Rio de Janeiro	228,0
Angra dos Reis	212,6

Fonte: Inep (2019c)

Com essa média, podemos afirmar em relação à escala de proficiência expressa no quadro 13, que os alunos do 5º ano do EF, das dependências administrativas do Brasil e do estado do RJ se encontram no nível 5, enquanto os alunos da dependência administrativa do município de Angra dos Reis se encontram no nível 4, ou seja, os alunos neste nível apenas reconhecem a planificação de uma pirâmide dentre um conjunto de planificações, mas não reconhecem a planificação em diferentes registros do cubo e do cilindro, nem reconhecem os objetos com forma esférica.

Verificando esses níveis em comparação com as dependências administrativas das escolas de todo o Brasil, do Estado do Rio de Janeiro e do Município de Angra dos Reis, temos os resultados no quadro 20.

Quadro 20 - Proficiência em Geometria Espacial Elementar do 5º ano do EF no Saeb 2017

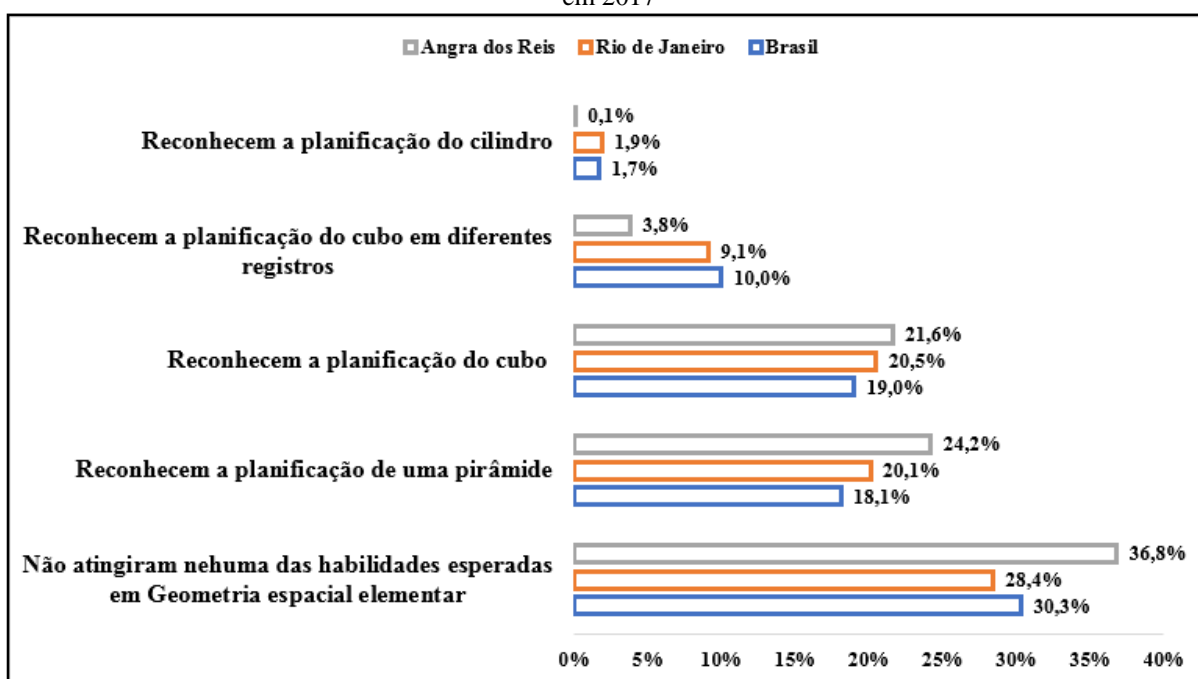
Dependência administrativa	Abaixo do Nível 4	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9	Nível 10
Brasil	30,3%	18,1%	19%	16%	10%	4,4%	1,7%	0,6%
Rio de Janeiro	28,4%	20,1%	20,5%	15,6%	9,1%	3,6%	1,9%	0,8%
Angra dos Reis	36,8%	24,2%	21,6%	12,7%	3,8%	0,9%	0,1%	0,0%

Fonte: INEP (2019c)

Seguindo a descrição do Saeb de 2017, os níveis 4, 5, 7, 8, 9 são os únicos que nos fornecem alguma evidência de proficiência ou deficiência do aprendizado da Geometria espacial elementar nos alunos dos anos iniciais do EF. Assim, por meio do quadro 15, podemos

expressar a proficiência em Geometria espacial elementar por meio dos resultados da Prova Brasil 2017 conforme é expresso no gráfico da figura 16.

Figura 16 - Gráfico referente à proficiência em Geometria espacial elementar do 5º ano do EF de Angra dos Reis em 2017



Fonte: INEP (2019)

A porcentagem de alunos que não atingiu nenhuma das habilidades esperadas em Geometria espacial elementar está concentrada no nível menor que 4, correspondendo a uma média de 30,3% de todos os alunos do Brasil, de 28,4% dos alunos do estado do Rio de Janeiro e de 36,8% dos alunos de Angra dos Reis. Já, os alunos que atingiram todas as habilidades esperadas se encontram no nível 9 e 10, ou seja, apenas 2,3% de todos os alunos do Brasil, 2,7% dos alunos do estado do Rio de Janeiro e 0,1% dos alunos de Angra dos Reis.

Em relação às habilidades de Geometria Elementar desenvolvidas pelos alunos de Angra dos Reis até 2017, temos que 24,2% reconhecem a planificação de uma pirâmide (nível 4), 21,6% também reconhecem a planificação do cubo (nível 5), apenas 3,8% conseguem reconhecer a planificação do cubo em diferentes registros, e 0,1% reconhecem, além das habilidades anteriores, a planificação do cilindro. Percebemos, com isso, que até 2017, os alunos apresentam uma deficiência na aprendizagem de Geometria espacial elementar pertinente ao estudo das planificações das principais figuras espaciais.

Complementando essas informações e seguindo a descrição da Prova Brasil nos anos anteriores a 2017, temos os níveis 4, 6 e 10 como os únicos que nos fornecem alguma evidência de proficiência ou deficiência do aprendizado da Geometria espacial elementar nos alunos dos

anos iniciais do EF. Verificando esses níveis nos resultados de 2013 e 2015, temos no quadro 21, essas informações.

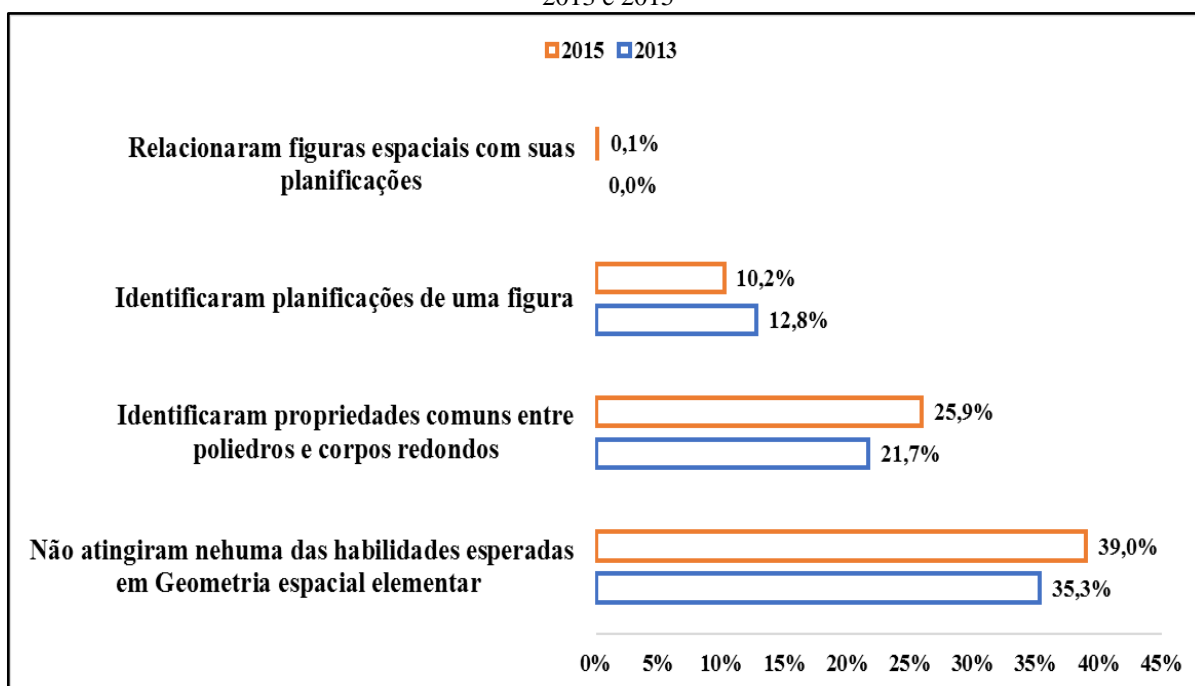
Quadro 21 - Proficiência em Geometria Espacial Elementar do 5º ano do EF em Angra dos Reis de 2013 e 2015

Angra dos Reis	Abaixo do Nível 4	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9	Nível 10
2013	35,3%	21,7%	20,5%	12,8%	5,6%	2,7%	1,4%	0%
2015	39%	25,9%	19,8%	10,2%	3,6%	1,1%	0,3%	0,1%

Fonte: Inep (2017)

Por meio do quadro 16 podemos expressar os resultados encontrados segundo a descrição da Prova Brasil sobre a proficiência em Geometria espacial elementar, representada por meio do gráfico da figura 17.

Figura 17 - Gráfico da proficiência em Geometria espacial elementar do 5º ano do EF de Angra dos Reis em 2013 e 2015



Fonte: Construção nossa de Inep (2017)

A porcentagem dos alunos de Angra dos Reis que não atingiram nenhuma das habilidades esperadas em Geometria espacial elementar estão concentradas no nível menor que 4, correspondendo uma média de 35,3% em 2013, e 39% em 2015, já os alunos que identificaram alguma propriedade das figuras espaciais (nível 4) correspondem a 21,7% em 2013 e 25,9% em 2015. Quanto à identificação da planificação de uma figura (nível 6) corresponde a 12,8% em 2013 e 10,2% em 2015. Os alunos que conseguiram relacionar as figuras espaciais com suas diversas planificações (nível 10), ou seja, aos alunos que conseguiram atingir todas as habilidades esperadas em Geometria espacial elementar correspondem a 0% em 2013 para 0,1% em 2015.

E o que se percebe com a análise feita sobre a Prova Brasil, é que esse processo parece estar bastante debilitado por parte dos educadores. O desempenho dos alunos nos mostra que mesmo em questões que pareciam simples e elementares e que não exigiam habilidades cognitivas complexas e elaboradas, os alunos apresentavam alto índice de erro. Ou seja, para os alunos que não desenvolveram as habilidades básicas necessárias para resolver questões de Geometria, algumas atividades simples são, para eles, cognitivamente complexas (SCHEIFER; BRANDT, 2020, p. 152).

Além da análise dos resultados da proficiência da Prova Brasil de 2017, 2015 e 2013 para os alunos do 5º ano do EF, consideramos também a análise da proficiência da prova ANA, aplicada aos alunos do 3º ano do EF, em 2016, 2014, 2013, anos cujos resultados se encontram na plataforma Painel Educacional até o momento desta pesquisa. Segue assim, uma escala de proficiência e desempenho dos alunos do Saeb/ANA 2016 (Anexo 8) e as informações em relação a Geometria espacial elementar no quadro 22.

Quadro 22 - Escala de proficiência de matemática do 3º ano do EF em Geometria espacial

Nível	Desempenho	Provavelmente são capazes de:
1	Menor que 425 pontos	Associar figura geométrica espacial à imagem de um objeto.
		Reconhecer planificação de figura geométrica espacial (paralelepípedo).
2	Maior ou igual a 425 e menor que 525 pontos	Ter desenvolvido as habilidades descritas no nível anterior.
		Comparar comprimento de imagens de objetos.
		Nomear as figuras espaciais.
3	Maior ou igual a 525 e menor que 575 pontos	Ter desenvolvido as habilidades descritas nos níveis anteriores
4	Maior ou igual a 575 pontos	

Fonte: Inep (2018)

Segundo o relatório do Saeb/ANA 2016 no primeiro nível “predominam habilidades geralmente apreendidas pelos estudantes na sua convivência infantil, em práticas cotidianas que envolvem brincadeiras e jogos, entre outras atividades” (INEP, 2018, p. 52), além disso, a passagem do Nível 1 para o 2 se justifica da seguinte maneira, “no Nível 1, por exemplo, os estudantes demonstram associar representação de figura geométrica plana ou espacial a objetos, enquanto no Nível 2 eles reconhecem a nomenclatura dessas figuras”(INEP, 2018, p. 53).

Verificando esses níveis em comparação com as dependência administrativa das escolas de todo o Brasil, do Estado do Rio de Janeiro e do Município de Angra dos Reis, temos no quadro 23 essa comparação.

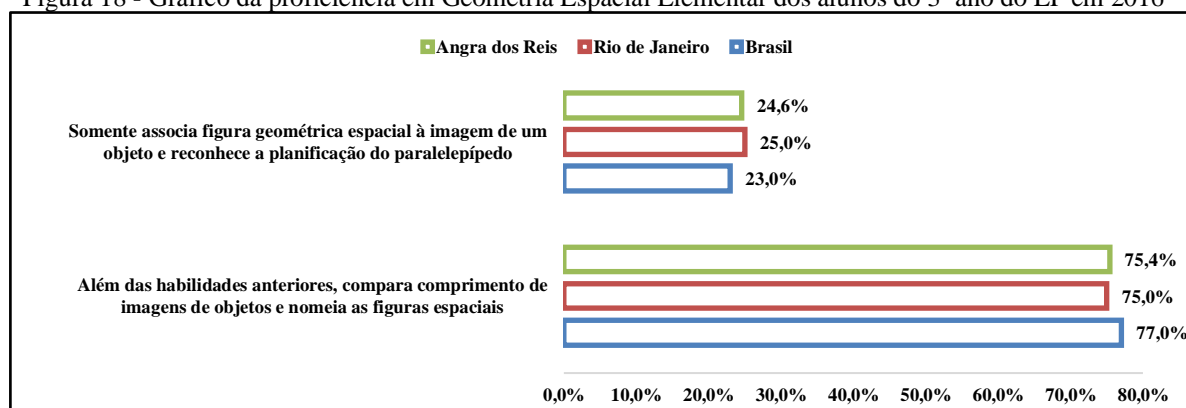
Quadro 23 - Proficiência em Geometria Espacial Elementar do 3º ano do EF no Saeb/ANA 2016

Dependência administrativa	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4
Brasil	23%	31,5%	18,4%	27,1%
Rio de Janeiro	25%	35,5%	18,7%	20,8%
Angra dos Reis	24,6%	35,8%	20,4%	19,2%

Fonte: Inep (2017)

Por meio do quadro 23, podemos expressar os resultados encontrados segundo a descrição do Saeb/ANA 2016 sobre a proficiência em Geometria espacial elementar, representada por meio do gráfico da figura 18.

Figura 18 - Gráfico da proficiência em Geometria Espacial Elementar dos alunos do 3º ano do EF em 2016



Fonte: Inep (2017)

Notamos no gráfico da figura 11 a relação descrita no Saeb/ANA 2016 dos alunos do 3º ano do EF que provavelmente desenvolveram as habilidades de associar figuras geométricas espaciais à imagem de um objeto, reconhecer a planificação do paralelepípedo, comparar comprimento de imagens de objetos e nomear as figuras espaciais, são de 75,4% dos alunos de Angra dos Reis contra 75% dos alunos do estado do Rio de Janeiro e 77% de todo o Brasil. Além disso, aos alunos em processo de desenvolvimento das habilidades descritas na Saeb/ANA correspondem a 24,6% dos alunos de Angra dos Reis, contra 25% dos alunos do estado do Rio de Janeiro e 23% de todo o Brasil.

Complementando essas informações e seguindo a descrição Saeb/ANA nos anos anteriores a 2016, percebemos que de nada mudou em sua matriz de referência. Assim sendo, vamos comparar o resultado do Saeb/ANA do município de Angra dos Reis pela série histórica de 2016, 2014 e 2013. Dessa forma, apurando os níveis, temos no quadro 24 as seguintes informações.

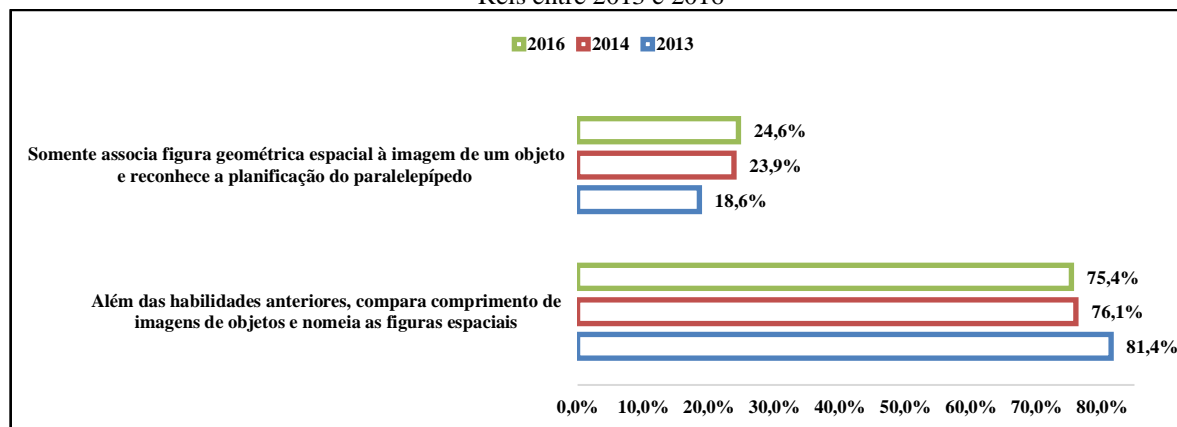
Quadro 24 - Proficiência em Geometria Espacial Elementar dos alunos do 3º ano do EF de Angra dos Reis

Angra dos Reis	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4
2013	18,6%	40,1%	22,6%	18,7%
2014	23,9%	39,8%	17,1%	19,2%
2016	24,6%	35,8%	20,4%	19,2%

Fonte: Inep (2017)

Por meio do quadro 24, podemos expressar a análise dos três últimos resultados divulgados do Saeb/ANA com a proficiência em Geometria espacial elementar esperada nessa fase escolar, sendo representada no gráfico da figura 19.

Figura 19 - Gráfico da proficiência em Geometria Espacial Elementar dos alunos do 3º ano do EF de Angra dos Reis entre 2013 e 2016



Fonte: Inep (2017)

Em relação à habilidade do aluno do 3º ano do EF em somente ser capaz de associar uma figura geométrica espacial à imagem de um objeto e reconhecer a planificação do paralelepípedo, notamos um pequeno aumento de 18,6% em 2013 para 24,6% em 2016. Além disso, o percentual dos alunos que provavelmente desenvolveram as habilidades anteriores mais a aptidão de comparar comprimento de imagens de objetos e nomear as figuras espaciais caiu de 81,4% de 2013 para 75,4% em 2016. Segundo a plataforma painel educacional do Inep, (2017) a média de alunos por turma em 2016 para essa fase escolar foi de 24,6, ou seja, aproximadamente de uma turma com 24 alunos, 6 estavam em processo de desenvolvimento das habilidades esperadas em geometria espacial elementar, segundo a avaliação do Saeb/ANA.

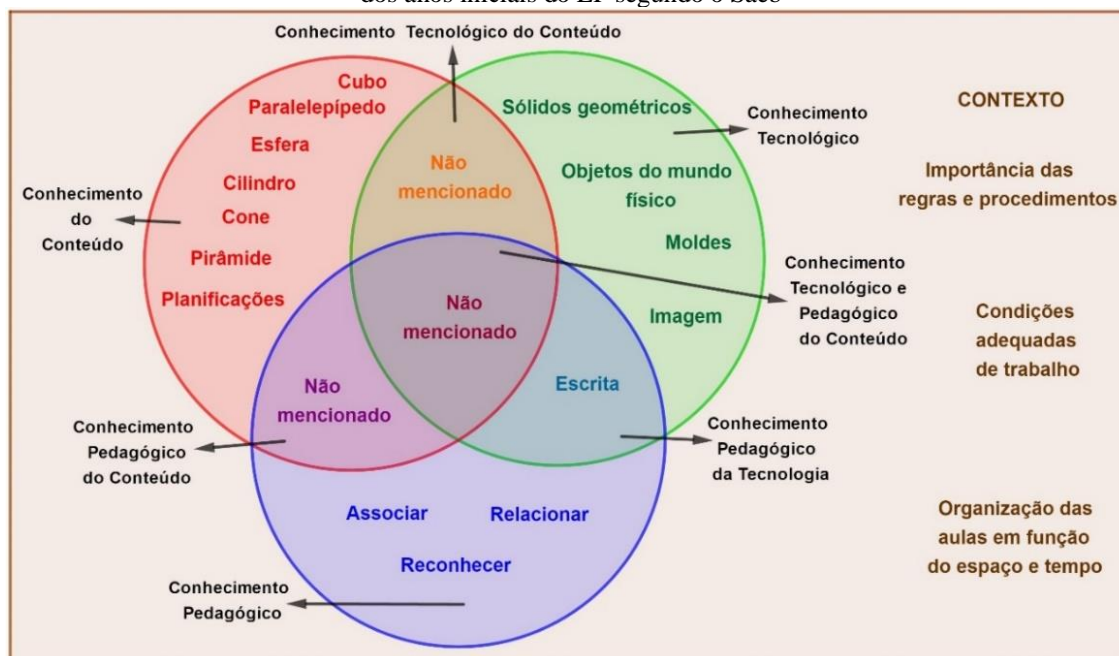
Em relação a todas as indicações levantadas, podemos afirmar que possivelmente existe uma lacuna por parte dos docentes em relação ao conhecimento do conteúdo, do pedagógico e da tecnologia em associação a geometria espacial elementar, o que pode ter ocasionado que 24,6% dos alunos do 3º ano do EF em 2016 eram capazes de vincular somente uma figura geométrica espacial à imagem de um objeto e reconhecer a planificação do paralelepípedo segundo a avaliação do Saeb/ANA (2016) e que 36,8% dos alunos do 5º ano de 2017 em Angra dos Reis (figura 9) apresentavam um deficiência na aprendizagem de Geometria espacial elementar relativo ao estudo das planificações das principais figuras espaciais.

Essas informações constataam que a carência no tocante aos vários conhecimentos de Geometria elementar incorporados e identificados pelos professores afetam diretamente no conhecimento matemático que alunos deveriam aprender em relação as figuras espaciais elementares.

Desta forma, após a pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, podemos interpretar a quinta abordagem do processo de estudo do conhecimento matemático

necessário ao ensino respeitante aos aspectos do conhecimento matemático que devem ser desenvolvidos nos alunos é expressado na figura 20.

Figura 20 - Aspectos do conhecimento geométrico de figuras espaciais que devem ser desenvolvidos nos alunos dos anos iniciais do EF segundo o Saeb



Fonte: Construção nossa

Após categorizar as avaliações externas, de acordo com os componentes do TPACK, identificamos que os aspectos do conhecimento geométrico de figuras espaciais nos alunos dos anos iniciais do EF seguem um quadro pouco estruturado e sem indicações sobre alguns dos componentes do TPACK.

Portanto, identificamos os aspectos sobre o conhecimento em Geometria espacial elementar que devem ser desenvolvidos nos anos iniciais do EF. Desta forma, as respostas encontradas nas cinco primeiras abordagens estão alinhadas com a sua utilização na prática ou como ela progride nas tarefas em sala de aula, a serem pesquisadas a seguir por meio da análise da prática da Matemática escolar mediante as instruções em sala de aula.

5.6 Análise da prática da matemática escolar

Os objetos de análise se referem aos registros da prática da Matemática na sala de aula, ou seja, dos diários dos professores que atuam no 3º ano do EF, da observação direta do exercício do professor em sala de aula e das anotações do material transcrito das gravações dessas aulas. Por conta do fechamento das unidades escolares por causa da pandemia do Covid-

19 até esse período da pesquisa, os objetos de análise da prática da matemática escolar definidos anteriormente não puderam ser verificados.

Para que haja algumas constatações sobre o conhecimento de Geometria espacial elementar mobilizados na prática pelos professores, iremos na segunda e terceira fase da engenharia didática, que corresponde a análise a priori e experimentação, buscar identificar elementos que constatem ou refutem possíveis conhecimentos durante a realização da formação por meio das falas dos professores e registros escritos.

No próximo capítulo detalharemos como essa concepção e análise a priori será desenvolvida.

CONCEPÇÃO E A ANÁLISE A PRIORI

A análise a priori é a segunda fase da engenharia didática e se constitui, a partir das análises prévias, um momento de decisão de como agir sobre as variáveis consideradas importantes ao problema da pesquisa e sobre as variáveis que podem conduzir a caminhos ou soluções para os problemas.

Além disso, a concepção e análise a priori é um momento de preparação para a próxima fase da engenharia didática chamada de experimentação, na qual consideraremos a proposta de formação do tipo autoformação, que é a instrução na qual o professor participa de maneira autônoma e espontânea. Segundo Dionízio (2019, p. 55) “dentre os tipos de formação, a que mais contribui para que sejam introduzidas inovações na prática educativa é a autoformação”.

Assim sendo, convidamos os professores dos anos iniciais do EF para uma formação inserida no contexto do grupo de escolas da amostra da pesquisa, ou seja, escolas que não tiveram professores que participaram no 2º estudo de caso piloto realizado em fevereiro de 2020 e das escolas que receberam o livro mais adotado como 1ª opção ou como 2ª opção no PNLD 2019. Segue, no quadro 1, a relação das escolas relacionadas para a amostra da nossa pesquisa.

Quadro 25 - Relação das escolas de Angra dos Reis convidadas para a formação referente ao ensino e aprendizagem da geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF

Escola	Bairro
E. M. Gal. Silvestre Travassos	Ilha Grande
E. M. Prof. Francisco De Assis Oliveira Diniz	Bracuí
E. M. Prof. Sylvio De Castro Galindo	Camorim
E. M. Brasil Dos Reis	Ilha Grande
E. M. Alberto Torres	Ilha da Gípoia
C.E.H.I. Monsenhor Pinto De Carvalho	Ilha Grande
E. M. Tenente Jovino	Ilha da Caieira
E. M. Deputado Câmara Torres	Portogalo
E. M. José Virgílio Pereira Maia	Ilha Grande
E. M. Joaquim Alves De Brito	Ilha Grande
E. M. Ayrton Senna Da Silva	Ilha Grande
E. M. Thomaz H Mac-Cormick	Ilha Grande
E. M. Regina Celia Monteiro Pereira	Morro Do Carmo
E. M. Almirante Tamandaré	Tararaca

Fonte: Construção nossa

Constatamos que nossa amostra compreende um total de catorze escolas, das quais nove se encontram em ilhas e cinco na parte continental do município. Desta forma, para melhor atingir as escolas selecionadas e ofertar uma formação continuada aos seus professores,

escolhemos propor a modalidade de Educação à Distância (EaD), por meio de *Lives*⁴⁴ realizadas pela plataforma do Google Meet⁴⁵, possibilitando a troca de experiências em tempo real por meio de áudio, vídeo e chat com os professores inscritos, além de viabilizar a gravação da formação e conseqüentemente o uso dos registros nas análises a posteriori. Além disso, nesta fase do trabalho⁴⁶, vivenciamos um momento de pandemia da Covid-19 em que as organizações de saúde recomendam o isolamento social e o fechamento das unidades escolares, sendo a proposta mais viável para fomentar uma formação.

Complementarmente, consideramos o que afirma Paula Louzano (2020, Webinar - Instituto Ânima), que o currículo de formação de professores tem de incorporar na prática “um conhecimento profundo da disciplina, um conhecimento sobre como as crianças aprendem, um conhecimento sobre como eu ensino cada uma das disciplinas, [...] e o conhecimento do contexto”. Entendemos, neste contexto, com a articulação do nosso quadro teórico, que a autora se referiu ao conhecimento profundo da disciplina como o conhecimento do conteúdo, o conhecimento sobre como as crianças aprendem como conhecimento pedagógico, e o conhecimento sobre como eu ensino como o conhecimento tecnológico. Assim sendo, com base nos estudos preliminares, consideramos na elaboração da engenharia didática as seguintes variáveis globais:

- 1) Conhecimento do contexto: social, político, cultural do aluno e das crenças dos professores sobre o tema. Levamos em consideração a caracterização das crianças como pensadores matemáticos, realizando as pontes entre o que os alunos pensam e compreendem, o que sabem e o que vão aprender. Somado a isso, ponderamos a representação do conteúdo pela experiência que os professores tiveram como aluno e em sua preparação profissional. Analisamos, também, a comunidade local como parte do ambiente, refino, articulação e revisão das ideias dos alunos, e por último a flexibilidade, ou o *jogo de cintura*, que o professor tem que ter na sala de aula.
- 2) Conhecimento específico do conteúdo: conhecimento horizontal, conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo. Levamos em consideração como os assuntos estão relacionados no currículo, como os professores reconhecem a resposta errada do aluno e avaliam a natureza do erro.

⁴⁴ Acrescentamos a necessidade prévia que se ofereça uma capacitação aos docentes sobre o uso das tecnologias digitais. Para não fugir do foco da tese quanto ao tempo e objetivos, esta capacitação não será realizada em nossa formação. Diante disto, surge a necessidade de incluir no critério da escolha da amostra, professores que tenham pelo menos conhecimento básico de informática.

⁴⁵ Google Meet é o serviço de comunicação em vídeo oficial do Google, grátis e disponível para Android, iOS e navegadores web.

⁴⁶ 2º semestre de 2020.

- 3) Conhecimento pedagógico matemático: relacionado a compreensão significativa do conteúdo matemático para o ensino. Levamos em consideração a postura de um professor ativo, que saiba estruturar seu tempo de aula, liderando, salientando e dirigindo o processo do ensino e aprendizagem da geometria espacial elementar.
- 4) Conhecimento tecnológico: tecnologias tradicionais e digitais. Levamos em consideração a habilidade de operar as diferentes tecnologias e a habilidade de aprender e adaptar-se a uma nova tecnologia.
- 5) Conhecimento pedagógico do conteúdo: conhecimento do conteúdo e dos estudantes, conhecimento de conteúdo e do ensino e conhecimento do conteúdo e do currículo. Levamos em consideração a familiaridade que o professor tem com os erros mais comuns dos alunos e quais são os mais propensos de acontecer; se o professor sabe o quê e como ensinar; e se compreende os programas e materiais instrucionais que regem o ensino da geometria espacial elementar.
- 6) Conhecimento pedagógico da tecnologia: conhecimento das possibilidades e restrições pedagógicas. Levamos em consideração o saber pedagógico sobre cada uma das tecnologias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial elementar.
- 7) Conhecimento tecnológico do conteúdo: conhecimento sobre quais tecnologias são mais adequadas para cada tipo de conteúdo abordado e como os conteúdos podem ser modificados por elas. Levamos em consideração o uso das ferramentas tecnológicas e representações no processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar, assim como, uma reflexão sobre como o conteúdo pode ser melhor abordado por meio do uso de diferentes tecnologias.
- 8) Conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo. Promover a prática das habilidades do 3º ano do EF expressas na BNCC (2017) referentes à Geometria espacial elementar, promovendo a compreensão de representações de conceitos e de técnicas pedagógicas usando as tecnologias e, de como elas podem ajudar a lidar com as dificuldades dos alunos.

Em relação às variáveis locais que orientam cada sessão, explicitaremos os objetivos, estratégias e recursos usados para cada organização proposta em quatro *Lives*, cada uma delas abordando algumas das variáveis globais que iremos executar, com duração média de duas horas, seguindo com bate papo e interação por meio dos recursos disponibilizados no *chat* durante a formação. Além disso, será realizada uma avaliação obrigatória após a última *Live*. Vale ressaltar que para incentivar os professores a se inscreverem, oferecemos, por meio da

Secretaria de Educação de Angra dos Reis, certificado de 12 horas para quem concluir a formação, sendo oito horas de *Lives* e quatro horas da avaliação.

Encaminhamos previamente os informativos da formação para as escolas selecionadas, via e-mail e memorando. Os professores interessados se inscreveram via plataforma da Google Classroom⁴⁷. Nesta plataforma estão disponíveis os *links* de acesso às *Lives* e a avaliação nos dias e horários acertados com a secretaria de Educação de Angra dos Reis.

Assim sendo, para a videoconferência, utilizamos a ferramenta do Google Meet, e para maior interação nas perguntas e provocações realizadas durante a formação utilizamos a ferramenta Mentimeter⁴⁸ anexada na apresentação do Power Point e disponibilizada por meio de *link* ou *QR Code* inserido no *chat*. Além disso, algumas das atividades são realizadas via plataforma virtual *GeoGebra Classroom*⁴⁹.

Desta forma, buscamos relacionar as variáveis didáticas com as categorias encontradas nos componentes do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar exposta na primeira fase da engenharia didática. Para a integração de uma tecnologia na qual os professores ainda não tenham explorado, levaremos em consideração as ideias que descrevem Niess et al. (2009) em relação aos níveis de integração da tecnologia expressos pelo professor no ensino e aprendizagem de algum conteúdo de Matemática: reconhecer, aceitar, adaptar, explorar, avançar. O objetivo das *Lives* é construir junto com os professores um planejamento adequado de aulas remotas sobre Geometria espacial elementar.

A seguir, justificaremos cada uma das variáveis globais exploradas em cada uma das *Lives* e os elementos do seu planejamento.

6.1. Live 1 – Nível 1: Reconhecer o conhecimento do contexto e o conhecimento específico do conteúdo

⁴⁷ É um sistema de gerenciamento de conteúdo para a criação, a distribuição e a avaliação de trabalhos online. A inscrição se dará pelo acesso ao link <<https://classroom.google.com/c/MTg5MzI1MTIwNTY4?cjc=zwplgggl>>, clicando no símbolo de + (Participar da turma), digitando o código da turma: zwplgggl e pressionando em participar.

⁴⁸ O Mentimeter é um recurso digital para criar interações em tempo real, como enquetes, nuvem de palavras ou coleta de perguntas. O grande benefício do Mentimeter é criar interações para grandes grupos e tornar isso visível para todos.

⁴⁹ É uma plataforma virtual na qual é possível atribuir tarefas interativas e envolventes para os alunos; ver o progresso atualizado ao vivo dos alunos que trabalham em uma tarefa específica; ver quais tarefas os alunos iniciaram (ou não); fazer perguntas para a turma inteira e ver todas as respostas dos alunos instantaneamente; não identificar os nomes dos alunos ao exibir respostas às perguntas; facilitar discussões ricas e interativas entre todos os alunos, grupos de alunos e alunos individuais. (EQUIPE GEOGEBRA, 2020, tradução nossa)

A intenção desta primeira Live é apresentar a importância do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem alinhado com o conteúdo da Geometria espacial elementar. Para isso, vamos primeiramente explorar a variável global do conhecimento do contexto para situar o conhecimento do professor em diversas situações, adaptando-se aos diferentes fatores educacionais, e, tal qual, aperfeiçoar a compreensão que os professores possuem sobre a variável global do conhecimento específico do conteúdo, expondo aos docentes à necessidade de incorporar a tecnologia no processo de ensino e aprendizagem.

Assim sendo, para o conhecimento do contexto de Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, temos as seguintes variáveis didáticas: organização das aulas em função do espaço e tempo, flexibilidade de conteúdo, importância das regras e procedimentos, condições adequadas de trabalho, materiais necessários às atividades, sistematização de experiências, organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças, laboratório de ensino ou Geometria experimental, reflexão crítica da linguagem matemática, concepção e tendência em educação matemática, diretrizes curriculares para o ensino da matemática e a imagem ruim da matemática.

A variável *organização das aulas em função do espaço e tempo* é exposta nos PCN (1997) como instrumento de apoio para o planejamento das aulas, no questionário e entrevista com os professores como estratégia de realização de trabalhos em grupos, e pelas avaliações externas como forma de acostumar os alunos a responderem atividades individualmente.

A variável *flexibilidade de conteúdo* é justificada nos PCN (1997) pelo fato de o aluno ir compreendendo as habilidades de forma mais ampla conforme vai construindo seu pensamento, possibilitando perceber as transformações e regularidades geométricas. Essa variável é exposta no livro didático – *Ápis Matemática* como maneira de possibilitar a construção do raciocínio e do ensino em espiral.

A *importância das regras e procedimentos* é indicada nos PCN (1997b, p. 35), ao favorecer a compreensão do aluno num mundo social e proporcionar “as primeiras aproximações com futuras teorizações”. Essa variável também foi exposta nas entrevistas pelos professores como forma de inibir a indisciplina na sala de aula e é colocada pelas avaliações externas como ferramenta para se fazer Matemática, como vemos na explicação em relação ao questionário aplicado aos professores no Saeb de 2017 ao avaliar sobre as práticas pedagógicas, listando “itens acerca da frequência com que se realizam exercícios para fixação de procedimentos e regras, discutem-se diferentes modos para resolver problemas e cálculos, entre outras práticas concernentes à docência na área” (INEP, 2019c, p. 43).

Condições adequadas de trabalho é a variável exposta na BNCC (2017) que permitirá o pleno desenvolvimento da educação, e exposta nas avaliações externas como parte importante da qualidade da educação causada pelas interações que os diversos sujeitos têm com o ambiente do processo educacional.

Os *materiais necessários as atividades* é a variável didática colocada pelas DCN (BRASIL, 2013, p. 121) como recurso que permite organizar as situações de aprendizagem e proporcionar aos alunos “oportunidade de racionar manuseando-os, explorando as suas características e propriedades”. Essa variável foi exposta nas entrevistas pelos professores como recurso escasso na escola tendo que muitas vezes serem produzidos ou financiados pelo próprio docente.

A variável *sistematização de experiências* é mencionado na BNCC (BRASIL, 2017, p. 58) na exploração das vivências cotidianas e das experiências desenvolvidas na Educação Infantil, permitindo “novas formas de relação com o mundo, novas possibilidades de ler e formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões, em uma atitude ativa na construção de conhecimentos”. Essa variável também é explicitada no livro didático *Vem voar matemática* indo ao encontro com o que é exposto na BNCC (2017). Complementar a essa variável, temos a variável didática *organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças*, que aparece na BNCC (2017) como situações de aprendizagem que devem partir de questões desafiadoras e que estimulem a curiosidade nos alunos.

Além dessas, temos a variável *laboratório de ensino ou Geometria experimental*, que é mencionada no currículo de formação de professores da UFF como oportunidade de desenvolver habilidades relacionadas ao raciocínio lógico envolvendo conteúdos matemáticos. Essa variável também é colocada pelos livros didáticos *Ápis matemática* e *Vem voar matemática* como ambiente de construção coletiva de conhecimento.

A variável *reflexão crítica da linguagem matemática* é exposta no currículo de formação de professores da UFF e do Cederj como forma de comunicação de ideias geométricas presentes nos diferentes meios de comunicação e contextos socioculturais. Assim como a variável *concepção e tendência em educação matemática* também são expressas no currículo de formação de professores como forma de situar a matemática na contribuição para o desenvolvimento do estudante.

A variável *Diretrizes curriculares para o ensino da matemática* é exposta no currículo de formação de professores da UFF para determinar a matemática no EF. Por fim, a variável *imagem ruim da matemática* é mencionada na entrevista pelos professores, segundo Docente D

como um “bicho papão”, ou seja, como dificuldades, medos e traumas que os professores e alunos apresentam na matemática. Desta forma, deve-se utilizar da prática do incentivo, estimulando o aluno a realizar as tarefas e desmitificando o medo, o erro ou a dificuldade enfrentada.

Portanto, para a investigação dessas variáveis didáticas, propomos nesta primeira *Live* explorar atividades em forma de enquetes por meio de perguntas abertas e fechadas cujas respostas serão apresentadas em forma de quadro ou escalas. Como não foi possível averiguar a prática do professor na sala de aula, acreditamos que colocar o professor em uma situação de discussão e reflexão pode contribuir para a averiguação dos possíveis conhecimentos mobilizados por esses docentes.

Dessa forma, buscaremos identificar as atividades mentais dos professores, conforme explicita Duval (1999), referindo-se às representações conscientes do objeto usadas no processo de ensino e aprendizagem de figuras espaciais por meio do uso da linguagem ou imagem, das percepções, crenças, concepções, explicações espontâneas, memórias, lembretes, ideias e conceitos. Nesta etapa ainda não são consideradas as atividades cognitivas, ou seja, os registros de representação semiótica. Assim sendo, apresentamos a seguir a sequência didática criada, os objetivos de cada uma, suas variáveis didáticas e as estratégias previstas para soluções dos docentes, conforme vemos no quadro 26.

Quadro 26 - Sequência didática da Live 1: conhecimento do contexto

Apresentação - Apresentar aos professores o pesquisador, o projeto e o objetivo de pesquisa.
Coleta de autorização - Pedir autorização do termo de consentimento livre e esclarecido virtual ⁵⁰ .
Vamos conversar – No contexto atual de pandemia mundial, tivemos que replanejar nossas aulas por meio do ensino à distância. Experenciamos uma plataforma exposta pela secretaria de educação do município e repensamos sobre o processo de ensino e aprendizagem. Mas, muitos de nós não estávamos preparados para essa mudança, principalmente por conta do conhecimento de alguns recursos tecnológicos.
Enquete 1 no Mentimeter: O quanto você considera que estava preparado nessa mudança para o ensino à distância?
Alternativa de resposta - Escala de 0 a 10 na qual 0 representa nada preparado e 10 totalmente preparado. Os docentes podem responder ou deixar de responder cada uma das opções: ao usar o computador, smartphone ou tablet nas aulas; ao usar a plataforma da prefeitura; ao utilizar a concepção e tendência em educação matemática para o ensino à distância
Enquete 2 no Mentimeter: Quais as maiores dificuldades enfrentadas na preparação das aulas à distância?
Alternativa de resposta - O professor irá digitar suas respostas na tela (resposta textual).
Enquete 3 no Mentimeter: Quais conhecimentos de educação matemática você possui em relação ao ensino à distância?
Alternativa de resposta - O professor irá digitar suas respostas na tela (resposta textual).
Objetivo - Identificar nas falas e escrita dos professores possíveis carências sobre os conhecimentos de tecnologias digitais, principalmente no uso dos computadores, smartphone ou tablet para a preparação de suas aulas, e identificar quais noções sobre educação matemática os professores apresentam em relação ao ensino à distância.

⁵⁰ Disponível em:

<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScc4aQiVF0jaMzEvHAGFaMuBT9EC_drvCNjDJNapZGjLK42hw/viewform?usp=sf_link>

Variável didática – Concepção e tendência em educação matemática, principalmente sobre o ensino à distância.
Estratégias previstas para a solução – Os professores podem responder as opções sem nenhuma interferência, responder as opções aleatoriamente por não compreender ao enunciado ou não responder. Cabe salientar que a todo momento serão feitos questionamentos para que os professores possam dialogar sobre o tópico discutido e responder às opções de forma mais coerente.
Vamos conversar – Antes de planejarmos qualquer atividade no contexto atual, temos que levar em consideração que as atividades on-line também serão impressas para os alunos que não têm acesso ao recurso tecnológico. Por isso, devemos pensar sobre algumas variáveis didáticas importantes que atendam tanto aos alunos que acessarão a aula pela plataforma da prefeitura quanto aos alunos que receberão as atividades da aula impressa. Em relação ao que foi exposto, dê sua opinião sobre cada uma das variáveis didáticas.
Variável didática - Organização das aulas em função do espaço e tempo.
Enquete 4 oral: Como a atividade a ser planejada por vocês será disponibilizado para o aluno? Terá uma introdução? Se sim, como será? Limitar-se-á a um número máximo ou mínimo de tarefas? Quanto tempo o aluno levará em média para fazer a atividade proposta? De que forma essas atividades estarão organizadas para que os alunos possam responder individualmente?
Variável didática - Materiais necessários às atividades.
Enquete 5 oral: Quais recursos você utilizaria na atividade a ser planejada por vocês para que os alunos tenham acesso? É possível utilizar o mesmo recurso na aula on-line e na atividade a ser impressa?
Variável didática - Organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças.
Enquete 6 oral: Como propor questões desafiadoras? Como estimular a curiosidade nos alunos?
Objetivo - Identificar o que os professores trazem da sua preparação profissional formal e experiências quanto aluno sobre o conhecimento de figuras espaciais.
Estratégias previstas para a solução – Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.
Variável didática - Importância das regras e procedimentos
Enquete 7 oral: É necessário esclarecer como o aluno deve realizar as atividades a serem propostas tanto na plataforma quanto as impressas? É necessário estabelecer como o aluno deve responder às questões? Se o aluno tiver dúvida, o que ele deve fazer?
Variável didática - Condições adequadas de trabalho.
Enquete 8 oral: Que condições são essas? Será que o aluno conseguirá realizar o que será proposto nas atividades a serem planejadas por vocês tanto nas tarefas on-line quanto às impressas? Existem outras possibilidades para realizar a mesma tarefa proposta?
Variável didática - Laboratório de ensino ou Geometria experimental.
Enquete 9 oral: Como desenvolver atividades relacionadas ao raciocínio lógico? Como explorar um ambiente para a construção do conhecimento?
Objetivo - Identificar como os professores constroem pontes entre o que os alunos pensam e compreendam, com o que sabem e vão aprender.
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.
Variável didática - Sistematização de experiências.
Enquete 10 oral: Como explorar as vivências cotidianas dos seus alunos? Como explorar as experiências desenvolvidas na educação infantil?
Variável didática - Reflexão crítica da linguagem matemática.
Enquete 11 oral: Como sondar a comunicação de ideias geométricas presentes no meio de comunicação e contextos socioculturais, como por exemplo, pirâmide alimentar. Devemos usar a linguagem geométrica correta?
Variável didática - Imagem ruim da matemática.
Enquete 12 oral: Como estimular o aluno a realizar às atividades a serem planejadas por vocês tanto na plataforma quanto às impressas? Como desmitificar o medo de realizar uma atividade e a dificuldade enfrentada? Como tornar a matemática prazerosa?
Objetivo - Identificar como o professor cria e usa a comunidade no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial.
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.
Variável didática - Flexibilidade do conteúdo.
Enquete 13 oral: Como explorar as atividades a serem propostas tanto na plataforma quanto às impressas de forma mais ampla? Como possibilitar aos alunos a perceberem as transformações e regularidades geométricas? Como construir o raciocínio geométrico no aluno?
Variável didática - Diretrizes curriculares para o ensino da matemática.

Enquete 14 oral: Quais são as diretrizes curriculares que regem seu trabalho? De que forma as diretrizes curriculares podem conduzir à prática das suas aulas?
Objetivo - Identificar a forma como os conteúdos da Geometria espacial elementar são flexibilizados pelos professores e as diretrizes curriculares utilizadas por eles.
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.
Encerramento - Dúvidas, sugestões, elogios, críticas e questionamentos podem ser feitos por aqui.
Abrir uma caixa de diálogo on-line na qual os professores anonimamente poderão dar seu parecer digitando sua opinião sobre o que foi discutido neste primeiro momento.

Fonte: Construção nossa

Após a discussão da variável global do conhecimento do contexto, partiremos para a investigação do conhecimento do conteúdo necessário para a exploração da Geometria espacial. Assim sendo, temos no conhecimento específico do conteúdo as seguintes variáveis didáticas: articulação horizontal, formas/figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide), nomenclatura, corpos redondos, características (vértices, arestas e faces) e planificação.

A variável *articulação horizontal* é exposta nos PCN (1997b, p. 40) como maneira de “estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento”, pelas DCN (2013) como forma de assegurar a coesão no currículo, pela BNCC (2017) como possibilidade de percorrer todos os componentes curriculares, pelo currículo de formação de professores da UFF e Cederj como proposta de interdisciplinaridade, nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como forma de abordar os conteúdos articulando as cinco unidades temáticas da Matemática e as diversas áreas do conhecimento.

A variável *formas/figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide)* é mencionado nos PCN (1997) e BNCC (2017) na exploração de figuras tridimensionais, nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como trabalho que deve ser feito seguindo uma ordenação na exploração, primeiro os cubos, segundo os paralelepípedos, terceiro a esfera, quarto os cilindros, quinto os cones, sexto os prismas e por último as pirâmides. Por fim, a avaliação externa do Saeb/ANA coloca essa variável didática associada ao reconhecimento de objetos do mundo físico.

A variável *nomenclatura* é citada na BNCC (2017) como parte da habilidade que deve ser desenvolvida no aluno, no currículo de formação de professores da UFF como exploração da linguagem geométrica, pelos professores entrevistados como parte dos conteúdos que devem ser desenvolvidos, e nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como processo de exploração das atividades.

A variável *corpos redondos* é exposta nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar*, assim como na avaliação externa do Saeb/Prova Brasil, como atividade de identificação e exploração de propriedades, realizando a comparação com os poliedros.

A variável *características* é exposta nos PCN (1997b, p. 54) como “estabelecer semelhanças e diferenças entre os objetos, pela observação de suas formas”, no currículo de formação de professores do Cederj como processo de visualização, nas entrevistas com os professores, assim como nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar*, como parte dos conteúdos a serem explorados.

A variável *planificação* é exposta nos PCN (1997) e BNCC (2017), assim como nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como parte final do processo de exploração de figuras espaciais, e nas avaliações externas por meio do reconhecimento da planificação das figuras tridimensionais, com a ressalva exposta no Saeb/ANA em evitar explorar a planificação de cubos e paralelepípedos em uma mesma atividade.

Assim sendo, para a investigação dessas variáveis didáticas exploraremos a atividade cognitiva do registro de representação semiótica correspondente à formação e tratamento usados no processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar, assim como buscar identificar as imagens mentais que os professores têm deste objeto de conhecimento (figuras espaciais).

Apresentaremos a seguir a sequência didática criada, os objetivos de cada uma das atividades, suas variáveis didáticas e as estratégias previstas para soluções dos docentes para a exploração do conhecimento específico do conteúdo da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, realizado nesta *Live*, conforme vemos no quadro 27.

Quadro 27 - Sequência didática da Live 1: conhecimento específico do conteúdo

Vamos conversar – Os conteúdos de Geometria espacial elementar devem ser abordados após o estudo de posições e deslocamentos do espaço e antes do estudo das formas e relações das figuras planas. Diante disso, é importante conhecer quais conteúdos devemos abordar no processo do ensino e aprendizagem de figuras espaciais.
Enquete 1 no Mentimeter - Escreva até 10 palavras referentes aos conteúdos de Geometria espacial nos anos iniciais do EF.
Alternativa de resposta - O professor irá digitar suas respostas nos quadros que aparecerão e as palavras digitadas surgirão na tela tanto do formador quanto dos professores, logo após todos digitarem, em forma de nuvens e em categorias hierarquizadas.
Objetivo - Discutir sobre as categorias mais destacadas do resultado apresentado em forma de nuvem; constatar as variáveis didáticas do conhecimento do conteúdo de Geometria espacial referenciado pelos professores; identificar os conteúdos mais e menos relevantes segundo os docentes.
Variáveis didáticas - Articulação horizontal, figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide), nomenclatura, corpos redondos, características (vértices, arestas e faces) e planificação.

Estratégias previstas para a solução - Os professores podem escrever até dez conteúdos, escrever o conteúdo que consideram mais relevante; escrever algo que não seja o conteúdo (por não saber exatamente quais são os conteúdos), não responder, ou ainda esperam os colegas dialogarem sobre o que escreveram para copiar a mesma resposta ou parte dela.

Enquete 2 oral - Mostrar as seguintes imagens e questionamentos: Que figuras espaciais você identifica na imagem?



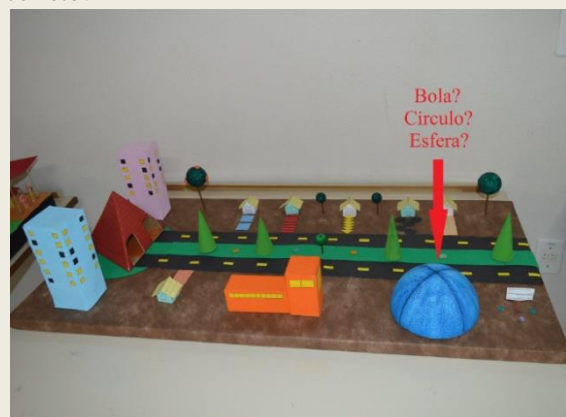
Alternativa de resposta - Todos os professores querem responder ao mesmo tempo; alguns professores falam em sequência; nenhum professor explicita sua opinião; respondem via chat.

Objetivo - Identificar as possíveis lacunas do conteúdo específicos de Geometria espacial que possuem os professores ou se eles apresentam concepções erradas de um conceito.

Variável didática - Figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide), nomenclatura, corpos redondos, características (vértices, arestas e faces) e planificação.

Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.

Enquete 3 no Mentimeter - Mostrar a seguinte imagem e questionamento: Nesta imagem um aluno chamou a figura destacada de bola, outro aluno chamou de círculo e outro aluno de esfera. Quem está correto?



Alternativa de resposta - () O aluno que respondeu bola; () O aluno que respondeu círculo; () O aluno que respondeu esfera; () Nenhum dos três alunos; () Não sabe responder.

Objetivo - Identificar o conhecimento comum do conteúdo, ou seja, se o professor reconhece a resposta errada do aluno; identificar o conhecimento especializado do conteúdo, ou seja, se o professor avalia a natureza do erro.

Variáveis didáticas - Figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide), nomenclatura, corpos redondos, características (vértices, arestas e faces) e planificação.

Estratégias previstas para a solução - Assinalar ao menos uma das quatro possíveis respostas; assinalar não sabe responder.

Enquete 4 oral - Observe as figuras espaciais a seguir e explicita as características, nomes e formas observadas em cada uma delas. Cada quadro de figura será mostrado separadamente na ordem em que se encontram.



Alternativa de resposta - Todos os professores querem responder ao mesmo tempo; alguns professores falam em sequência; nenhum professor explicita sua opinião; respondem via chat.

Objetivo - Identificar as possíveis lacunas do conteúdo específicos de Geometria espacial nos professores ou se eles apresentam concepções erradas de um conceito.

Variáveis didáticas - Figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide), nomenclatura, corpos redondos, características (vértices, arestas e faces).

Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente sem medo de cometer possíveis erros; revelar algumas características das figuras; não responder; indagar suas dúvidas sobre os conteúdos.

Informação - Apresentar as variáveis didáticas identificadas na pesquisa sobre o conhecimento específico do conteúdo de figuras espaciais para ampliar este conhecimento nos docentes.

Encerramento - Dúvidas, sugestões, elogios, críticas e questionamentos podem ser feitos por aqui.

Abrir uma caixa de diálogo on-line onde os professores anonimamente poderão dar seu parecer digitando sua opinião sobre o que foi discutido nesta primeira Live.

Fonte: Construção nossa

Vale ressaltar que durante toda a *Live* o espaço para discussão será constantemente estimulado por meio de questionamentos para que os professores possam interagir e responder com mais desenvoltura, e que suas contribuições possam ser mais relevantes para a pesquisa.

Nesta primeira *Live* foi exposta aos professores, as variáveis didáticas do conhecimento do contexto e o do conhecimento específico do conteúdo relevantes na exploração da Geometria espacial, porém, ainda não foi discutido como a tecnologia pode ser integrada no processo de ensino e aprendizagem, etapa esta que será realizado na *Live 2*.

6.2. Live 2 – Nível 2: Aceitar o conhecimento pedagógico matemático e o conhecimento tecnológico

A intenção desta segunda *Live* é aperfeiçoar o conhecimento pedagógico e tecnológico que os professores possuem sobre a Geometria espacial elementar, para que a aceitação por parte dos professores em relação ao uso das tecnologias seja empregada em sua na prática. Para isso, exploraremos primeiramente a variável global do conhecimento pedagógico matemático

mostrando os processos e práticas ou métodos de ensino e aprendizagem, e, por fim, estudaremos a variável global do conhecimento tecnológico mostrando as tecnologias que podem ser usadas neste processo da aprendizagem e a capacidade de aprender e adaptar-se a elas.

Para o conhecimento pedagógico matemático temos as seguintes variáveis didáticas: letramento matemático, investigação (exploração), empirismo (experimentação), descrição, associação (relacionar, classificar), comparação, reconhecimento e a interação entre os alunos.

A variável *letramento matemático* é citada na BNCC (2017, p. 266) como “competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente”, além de possibilitar os alunos a identificar que os conhecimentos matemáticos “são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)”.

A variável *investigação (exploração)* é exposta na BNCC (2017) como competência que possibilita desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de produzir argumentos, e colocado no currículo de formação de professores da UFF como parte da exploração dos processos matemáticos.

A variável *empirismo (experimentação)*, é exposta nos PCN (1997b, p. 81-82) como aspecto que “permite agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível, e, de outro, possibilita o trabalho sobre as representações dos objetos do espaço geométrico e, assim, desprender-se da manipulação dos objetos reais para raciocinar sobre representações mentais”. A BNCC (2017, p. 540) menciona essa variável como competência que permite “indicações decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais”. Essa variável é referenciada no currículo de formação de professores da UFF como forma de oportunizar o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao raciocínio lógico, é exposta pelos professores nas entrevistas como atividades práticas e em grupos, e por fim, também é mencionado nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como processo para desenvolver o pensamento geométrico.

A variável *descrever* é apontada pela BNCC (2017) como competência que permitirá ao aluno a expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, pelo currículo de formação de professores da UFF como habilidade relacionada ao raciocínio lógico, e, por fim, é colocada pelo livro – *Ápis matemática* como ligação à comunicação de ideias matemáticas.

A variável *associar (relacionar, classificar)* é exposta na BNCC (2017) e nas avaliações externas como habilidade de reconhecer as figuras espaciais em diferentes registros de representações, e no currículo de formação de professores UFF e Cederj como processo de comunicação de ideais geométricas.

A variável *comparar* é exposta pelos PCN (1997) como primeira etapa para desenvolver o pensamento geométrico, na BNCC (2017) como processo de relacionar as figuras espaciais a objetos do mundo físico, no currículo de formação de professores da UFF e Cederj como forma de explorar a visualização, e nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como proposta para compreensão e visualização de conceitos.

A variável *reconhecer* é exposta na BNCC (2017) como parte do processo relacionado à habilidade de visualização, pelo currículo de formação de professores da UFF e Cederj como visualizar a figura em diferentes representações, nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como capacidade de verificar os procedimentos de uma atividade matemática ou figura geométrica, e na avaliação externa Saeb/Prova Brasil como identificar as propriedades das figuras tridimensionais e suas planificações.

A variável *interação* é citada nos PCN (1997), nas DCN (2013) e na BNCC (2017) como cooperação entre os alunos, no currículo de formação de professores UFF e Cederj como processos matemáticos de comunicação de ideias geométricas, expostas nas entrevistas pelos professores como estratégia usada em trabalhos com material concreto, e nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como processo contínuo de exploração e apropriação do saber por meio de proposta pedagógicas com trocas afetivas.

Assim sendo, para a investigação dessas variáveis didáticas exploraremos como são desenvolvidas pelos professores, as atividades do processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar, e apresentar no final, como sugestão de conhecimento, as fases do modelo van Hile conforme afirma Gutiérrez (1992).

Em vista disto, apresentamos a continuação da sequência didática para a exploração do conhecimento pedagógico matemático da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, realizado na segunda *Live*, conforme vemos no quadro 28.

Quadro 28 - Sequência didática da Live 2: conhecimento pedagógico matemático da geometria espacial elementar

<p>Vamos conversar - Os conhecimentos pedagógicos também são importantes no processo do ensino e aprendizagem de figuras espaciais. Diante disto, é importante conhecer os processos pedagógicos para a compreensão significativa no ensino e aprendizagem de geometria espacial elementar.</p>
<p>Enquete 1 no Mentimeter - Escreva até 10 palavras referentes aos conhecimentos pedagógicos de geometria espacial nos anos iniciais do EF.</p>

Alternativa de resposta - O professor irá digitar suas respostas nos quadros que aparecerão e as palavras digitadas surgirão na tela tanto do formador quanto dos professores, logo após todos digitarem, em forma de nuvens e em categorias hierarquizadas.
Objetivo - Discutir sobre as categorias mais destacadas do resultado apresentado em forma de nuvem; constatar as variáveis didáticas do conhecimento pedagógico matemático da Geometria espacial referenciado pelos professores.
Variáveis didáticas - Letramento matemático, investigação (exploração).
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem escrever até dez respostas, escrever a resposta que consideram mais relevante; escrever algo que não seja o conhecimento pedagógico (por não saber exatamente quais são esses conhecimentos), não responder, ou ainda esperam os colegas dialogarem sobre o que escreveram para copiar a mesma resposta ou parte dela.
Enquete 2 oral - Quais procedimentos pedagógicos você utilizaria em uma turma do 3º ano do EF ao abordar a seguinte habilidade: Associar figuras geométricas espaciais a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.
Alternativa de resposta - Todos os professores querem responder ao mesmo tempo; alguns professores falam em sequência; nenhum professor explicita sua opinião; respondem via chat.
Objetivo - Identificar a compreensão significativa sobre figuras espaciais e a postura de um professor ativo.
Variáveis didáticas - Letramento matemático, investigação (exploração), empirismo (experimentação), descrever, associar (relacionar, classificar), comparar, reconhecer e a interação.
Estratégias previstas para a solução - Explicitar as respostas oralmente sem medo de cometer possíveis erros; explicitar algumas categorias pedagógicas; não responder; indagar suas dúvidas sobre a parte pedagógica em matemática.
Enquete 3 no Mentimeter - Informar cada uma das variáveis didáticas do conhecimento pedagógico identificadas na pesquisa com o intuito de mostrar a importância e o significado de cada uma delas. Explicitar como cada variável didática do conhecimento pedagógico é mobilizado por vocês.
Alternativa de resposta - Escala de 0 a 10 na qual 0 representa nada mobilizado e 10 representa bastante mobilizado. Os docentes podem responder ou deixar de responder cada uma das variáveis do conhecimento pedagógico.
Objetivo - Identificar as possíveis lacunas em relação a cada uma das variáveis didáticas do conhecimento pedagógico matemático de Geometria espacial dos professores ou se apresentam concepções erradas de um conceito pedagógico.
Variáveis didáticas - Letramento matemático, investigação (exploração), empirismo (experimentação), descrever, associar (relacionar, classificar), comparar, reconhecer e a interação.
Estratégias previstas para a solução - Assinalar as opções sem nenhuma interferência, marcar as opções aleatoriamente por não compreender o enunciado, não marcar ou não ter certeza se mobiliza cada variável didática analisada. Cabe salientar que a todo momento será levantado questionamentos para que os professores possam dialogar sobre tópico discutido e responder com maior clareza.
Informação - Comunicar aos professores sobre as cinco fases do modelo de van Hiele como “sugestões para os professores sobre como organizar o ensino de Geometria” (GUTIÉRREZ, 1992, p. 32, tradução nossa).

Fonte: Construção nossa

Depois de terminada essa sequência didática, e após explorar as dimensões centrais do conhecimento necessário para o ensino, exposta por Shulman (1986), vamos agregar na discussão o conhecimento tecnológico. Desta forma, as possíveis carências em relação ao conhecimento do conteúdo e ao conhecimento pedagógico foram minimizadas, possibilitando uma melhor exploração sobre os conhecimentos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar.

Temos no conhecimento tecnológico as seguintes variáveis didáticas: tecnologias tradicionais (livro/paradidático, folha de papel, lápis/caneta, quadro, tesoura, cola, massinha/massa de modelar, maquete, moldes, jornal, revistas, tintas), novas ferramentas (canudos, palitos), objetos do mundo físico (embalagens), materiais didáticos estruturados (sólidos geométricos), imagem/foto e *hardware* (computador e smartphone).

A variável *tecnologias tradicionais* identificada nas abordagens realizadas na análise prévia possui as seguintes referências e justificativas:

- a) O *livro didático/paradidático* é referenciado nos PCN (1997) e na BNCC (2017) como recurso didático importante para a compreensão das noções matemáticas integradas às situações de análise e reflexão. Pelo currículo de formação de professores da UFF como recurso auxiliar ao planejamento, implementação e avaliação de atividades, e confirmado nas entrevistas nas falas dos professores. Pelos próprios livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar*, como mais um dos recursos auxiliares do professor para introduzir algum conceito, complementar, aprofundar e ampliar o que foi estudado;
- b) A *folha de papel* é exposta nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como recurso auxiliar nas atividades com desenhos, pinturas, contornos, recortes e dobraduras, e referenciadas no questionário e entrevistas com os professores. Também é evidenciado nas avaliações externas como recurso que permite representar as figuras tridimensionais no plano;
- c) Os *lápiz/caneta* e *quadro* são expostos nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar*, assim como nas avaliações externas do Saeb, como recursos auxiliares nas atividades com desenho, escrita e observação da sua forma;
- d) A *tesoura*, a *cola* e os *moldes* são mencionados nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como recursos auxiliares nas atividades envolvendo recortes e montagem das figuras tridimensionais, e confirmadas nos questionários e entrevistas com os professores. Além disso, os *moldes* também são expostos nesses livros didáticos e nas avaliações externas como parte do processo da observação e associação das figuras com suas planificações;
- e) A *massinha/massa de modelar* ou *argila* é exposta apenas nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como recurso para modelar algumas das figuras espaciais, e a *maquete* é mencionada nesses livros para a observação e construção de um espaço usando sólidos geométricos;
- f) O *jornal* e *revista* são mencionados nos PCN (1997) e no livro – *Ápis Matemática* como recurso para observação das figuras espaciais representadas em imagens do cotidiano, seu uso para dobraduras, e complementada no livro *Vem voar* por meio do uso de experiências envolvendo *tintas*.

A variável *novas ferramentas (canudos, palitos)* é exposta na BNCC (2017) como recursos que permitem a progressão ano a ano das habilidades desenvolvidas e na execução de

situações-problema propostos, e é referenciado no livro didático – *Vem voar* como recurso auxiliar na construção de prismas e pirâmides ao explorar as arestas, faces e vértices.

A variável *objetos do mundo físico (embalagens)* é exposta nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como recurso que permitirá aos alunos reconhecer e comparar os sólidos geométricos com objetos do cotidiano, e confirmado nos questionários e entrevistas feita com os professores.

A variável *material didático estruturado (sólidos geométricos)* é mencionada no currículo de formação de professores da UFF como meio de oportunizar atividades para a construção de conceitos mais sistematizados e completos. Também é mencionada no livro didático - *Vem voar* como modelo para exploração e desenvolvimento de atividades.

A variável *imagem/foto* é exposta nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* e nas avaliações externas do Saeb por meio de obras de arte, ilustrações e fotografias do cotidiano, com o objetivo de motivar o debate sobre o tema ou questão a ser explorada. Essa variável foi asseverada pelos professores do seu uso na prática em sala de aula por meio de entrevistas e questionários realizados com os docentes.

A variável *hardware (computador e smartphone)* é mencionado nos PCN (1997) e BNCC (2017) como recurso didático de apoio ao ensino e aprendizagem, e no desenvolvimento das habilidades.

Assim sendo, para a investigação dessas variáveis didáticas exploraremos a modelagem do espaço físico, ou seja, os paradigmas de Parzyzs (2006) correspondente à Geometria concreta (G0), tentando descobrir como os professores se apropriam da visualização e materialização dos objetos físicos, e da Geometria espaço-gráfica (G1), tentando descobrir como os objetos físicos são representados pelos docentes.

Portanto, apresentamos a continuação da sequência didática para a exploração do conhecimento tecnológico da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, realizada nesta segunda *Live*, conforme vemos no quadro 29.

Quadro 29 - Sequência didática da Live 2: conhecimento tecnológico da Geometria espacial elementar

Vamos conversar – Vamos agora explorar o conhecimento tecnológico abordando os recursos usados no processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar.
Enquete 1 no Mentimeter - Escreva até 10 palavras referentes aos recursos que geralmente são usados por vocês no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial.
Enquete 2 no Mentimeter - Escreva até 10 palavras referentes aos recursos que poderão ser usados por vocês no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial no EaD.
Alternativa de resposta - O professor irá digitar suas respostas nos quadros que aparecerão e as palavras digitadas surgirão na tela tanto do formador quanto dos professores, logo após todos digitarem, em forma de nuvens e em categorias hierarquizadas.
Objetivo - Discutir sobre as categorias mais destacadas do resultado apresentado em forma de nuvem; constatar as variáveis didáticas do conhecimento tecnológico da Geometria espacial referenciadas pelos professores.

Variáveis didáticas - Tecnologias tradicionais (livro/paradidático, folha de papel, lápis/caneta, tesoura, cola, massinha/massa de modelar, maquete, moldes, jornal, revistas, tintas), novas ferramentas (canudos, palitos), objetos do mundo físico (embalagens), materiais didáticos estruturados (sólidos geométricos), imagem/foto e hardware (computador e smartphone).
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem escrever até dez recursos, escrever o recurso que consideram mais relevante; escrever algo que não seja o recurso (por não saber exatamente quais são os recursos), não responder, ou ainda esperam os colegas dialogarem sobre o que escreveram para copiar a mesma resposta ou parte dela.
Enquete 3 no Mentimeter - O quão à vontade você se sente ao utilizar os seguintes recursos no ensino e aprendizagem da Geometria: livro/paradidático; folha de papel, lápis/caneta, tesoura, cola, tintas, moldes de figuras; jornal, revistas, imagem e fotos; massinha/massa de modelar; objetos do mundo físico (embalagens); material didático estruturado (sólidos geométricos); novas ferramentas (maquete, materiais manipuláveis, aplicativos educativos, etc.); <i>hardware</i> (computador e smartphone)?
Alternativa de resposta - Os professores podem assinalar sua resposta em uma escala que vai de 0 a 10, na qual 0 representa nada à vontade e 10 representa bastante à vontade.
Objetivo - Identificar a frequência de certos recursos a serem pouco ou muito utilizados pelos professores no ensino e aprendizagem de figuras espaciais.
Variáveis didáticas - Tecnologias tradicionais (livro/paradidático, folha de papel, lápis/caneta, tesoura, cola, massinha/massa de modelar, maquete, moldes, jornal, revistas, tintas), novas ferramentas, objetos do mundo físico (embalagens), materiais didáticos estruturados (sólidos geométricos), imagem/foto e <i>hardware</i> (computador e smartphone).
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem assinalar as escalas numéricas aleatoriamente; ter dúvida no valor da escala mais adequada para cada item; assinalar todas as alternativas na escala 0 por não ensinar geometria; não responder algumas das escalas; não responder.
Enquete 4 oral – Após o resultado da enquete anterior ser divulgado aos professores, será feita a seguinte pergunta: Qual causa ou motivo levou vocês assinalarem cada um dos resultados apresentados? Teve algum outro recurso que vocês utilizam no ensino e aprendizagem de figuras espaciais sem ser os que foram referenciados?
Alternativa de resposta - Todos os professores querem responder ao mesmo tempo; alguns professores falam em sequência; nenhum professor explicita sua opinião; respondem via chat.
Objetivo - Identificar as causas e motivos de certos recursos serem pouco ou muito utilizados pelos professores no ensino e aprendizagem de figuras espaciais. Reconhecer outros recursos tecnológicos utilizados pelos docentes e não identificados nas análises prévias.
Variáveis didáticas - Tecnologias tradicionais (livro/paradidático, folha de papel, lápis/caneta, tesoura, cola, massinha/massa de modelar, maquete, moldes, jornal, revistas, tintas), novas ferramentas, objetos do mundo físico (embalagens), materiais didáticos estruturados (sólidos geométricos), imagem/foto e <i>hardware</i> (computador e smartphone).
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.
Encerramento - Dúvidas, sugestões, elogios, críticas e questionamentos podem ser feitos por aqui.
Abriu o debate para a discussão dos componentes do conhecimento pedagógico matemático e conhecimento tecnológico abordados nesta <i>Live</i> .

Fonte: Construção nossa

Nesta segunda *Live* foi apresentado aos professores estratégias de tomada de decisão relativas ao ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar, porém, ainda sem relacionar às tarefas que envolvam o uso da tecnologia adequada, momento este, que será exposto na terceira *Live*.

6.3. Live 3 – Nível 3: Adaptar o conhecimento pedagógico do conteúdo, o conhecimento tecnológico do conteúdo e o conhecimento pedagógico da tecnologia

A intenção desta terceira *Live* é cativar os professores em atividades envolvendo tecnologias para que possam tomar a decisão de adotá-las em suas aulas. Para isso, exploramos primeiramente a variável global do conhecimento pedagógico do conteúdo, interpretando um determinado conteúdo de forma a representá-lo e adaptá-lo no processo de ensino e aprendizagem, depois o conhecimento tecnológico do conteúdo, mostrando como a tecnologia influencia o conteúdo e vice versa, para depois, estudar a variável global do conhecimento pedagógico da tecnologia levando o professor a refletir sobre a melhor forma de utilização de determinadas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem.

Desta forma, temos no conhecimento pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF as seguintes variáveis didáticas: articulação vertical; modelagem.

A variável *articulação vertical* é exposta nas DCN (2013) como coesão dos fundamentos que norteiam o currículo, na BNCC (2017) como progressão dos componentes curriculares e a continuidade das experiências dos alunos, e no livro didático – *Ápis Matemática* como processo que deve partir do tridimensional, passando para o bidimensional e, em seguida, para o unidimensional.


A variável *modelagem matemática* é exposta apenas na BNCC (2017) como processo de aprendizagem que contribui para desenvolver o letramento matemático e o pensamento computacional.

Assim sendo, para a investigação dessas duas variáveis didáticas realizaremos a apreensão discursiva na interpretação de um problema e explicitação dos elementos das figuras e da apreensão perceptiva.

Apresentamos a seguir a sequência didática criada, os objetivos de cada uma, suas variáveis didáticas e as estratégias previstas para soluções dos docentes quanto à exploração do conhecimento pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, realizado na terceira *Live*, conforme vemos no quadro 30.

Quadro 30 - Sequência didática da Live 3: conhecimento pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar

Vamos conversar – Um dos componentes do conhecimento que o professor precisa é o conhecimento pedagógico do conteúdo que se refere à exploração pedagógica dos conteúdos de forma significativa. Vamos averiguar esse conhecimento por meio da discussão de algumas enquetes de atividades propostas no livro didático.	
Enquete 1 oral - Quais são os erros mais propensos de acontecer nessa atividade?	
Alternativa de resposta - Todos os professores querem responder ao mesmo tempo; alguns professores falam em sequência; nenhum professor explicita sua opinião; respondem via chat.	

Objetivo - Identificar se os professores têm familiaridade com os erros comuns dos alunos.	Atividade 5 Se possível, antes desta atividade, reúna os alunos em pequenos grupos e entregue a cada grupo papel tipo cartolina, fita adesiva, tesoura de pontas arredondadas e modelos de alguns poliedros. Oriente-os a contornar todas as faces do poliedro na cartolina, de modo que, depois que recortar as faces desenhadas e colá-las com fita, seja possível formar o modelo do poliedro. (SANTOS, 2017, p. 22)
Variáveis didáticas – Modelagem. Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.	
Enquete 2 oral – Que atividades de Geometria espacial elementar podemos propor a partir da observação da figura?	
Alternativa de resposta - Todos os professores querem responder ao mesmo tempo; alguns professores falam em sequência; nenhum professor explicita sua opinião; respondem via chat.	
Objetivo - Identificar se os professores têm familiaridade com o processo de resolução de problemas.	
Variável didática – Articulação vertical e modelagem.	
Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.	(SANTOS, 2017, p.164-165)
Enquete 3 no Mentimeter - Na habilidade (EF03MA14): Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações. O que deve ser ensinado? Como deve ser ensinado?	
Alternativa de resposta - O professor irá digitar suas respostas livremente.	
Objetivo - Identificar o conhecimento de conteúdo e do ensino no professor.	
Variáveis didáticas - Articulação vertical.	
Estratégias previstas para a solução - Digitar uma ou mais frases, não digitar, aguardar o posicionamento ou a discussão de um colega ou do professor formador para iniciar uma conversa e escrever sua opinião. O resultado será apresentado em forma de caixas de respostas na qual será permitido levantar questionamentos e opiniões sobre as respostas dos professores sem identificá-los.	
Informação - Comunicar aos professores sobre as variáveis didáticas do conhecimento pedagógico do conteúdo identificados na pesquisa e realizar uma reflexão crítica sobre elas por meio do diálogo aberto com o grupo.	

Fonte: Construção nossa

Após este momento, exploraremos o conhecimento tecnológico do conteúdo da geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, que possui as seguintes variáveis didáticas: projetos; representação; desenho; figuras; ludicidade; visualização.

A variável *projetos* é exposta apenas na BNCC (2017) como forma de processos matemáticos que são ao mesmo tempo objeto e estratégia para a aprendizagem, e que possibilitam o desenvolvimento do letramento matemático.

A variável *representar* é mencionada nos PCN (1997) como forma de comunicar-se matematicamente, nas DCN (2013) como capacidade fundamental para a compreensão da realidade que os cerca e dos conceitos matemáticos básicos, na BNCC (2017) como utilização

de registros para elucidar um objeto matemático, no currículo de formação de professores da UFF e Cederj como abordagem didática do conteúdo matemático aplicado no processo de visualização, e na avaliação externa do Saeb/Ana como forma de associar os objetos do mundo físico aos sólidos geométricos.

A variável *desenho* é exposta nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como recurso tecnológico utilizado na resolução de uma situação-problema, normalmente para representar um sólido geométrico, e utilizado pelos professores na ausência dos sólidos geométricos. Vale ressaltar aqui, o cuidado do uso do desenho, pois uma representação mal feita poderá ocasionar uma falsa interpretação do conceito.

A variável *figuras* é colocada no currículo de formação de professores do Cederj como meio usado no desenvolvimento da visualização, e confirmado pelos professores nas entrevistas e questionários como recurso usado ao ensinar geometria.

A variável *ludicidade* é posicionada nas DCN (2013) como estratégia pedagógica para um bom planejamento com o objetivo de construir novas formas de sociabilidade e subjetividade, e nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como situações prazerosas, principalmente vinculados ao uso de jogos, possibilitando levantar alguns questionamentos, registros ou conteúdos matemáticos.

Por fim, a variável de *visualização* é um processo cognitivo na qual o aluno consegue, segundo os PCN (1997) perceber, interpretar, observar, refletir, comparar, levantar suposições sobre o objeto de conhecimento explorado, e, segundo a BNCC (2007) o aluno consegue associar, relacionar, organizar e identificar um objeto. É exposta no currículo de formação de professores da UFF e Cederj, assim como nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar*, como habilidade de observar o conteúdo matemático.

Posto isto, para a investigação dessas variáveis didáticas propomos explorar os prismas regulares e sua planificação, como criado por Hakel Awila e disponível⁵¹ na comunidade on-line do Geogebra⁵². Esta atividade é totalmente intuitiva, permitindo modificar o número de lados da base do prisma, a medida do lado da base e da altura, e, além disso, é possível planificar a figura arrastando o ponto correspondente à planificação, abrindo e fechando-a. Dessa forma, realizaremos a apreensão perceptiva identificando a imagem do que é visto, a apreensão discursiva por meio da interpretação dos elementos das figuras e dos ícones dos controles

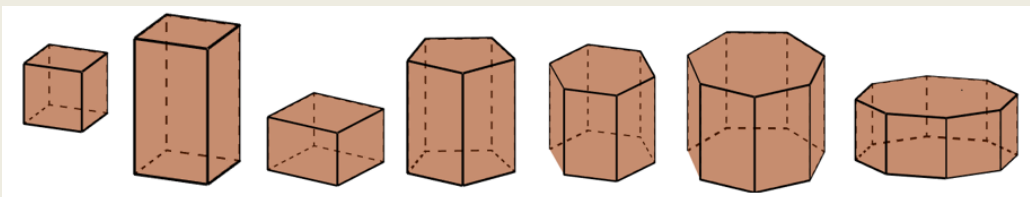
⁵¹ <<https://www.geogebra.org/m/Fpjf6QRq>>.

⁵² O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, 2020).

deslizantes. Por fim, procederemos com a apreensão sequencial, instigando a reprodução e construção de cada uma das figuras exploradas anteriormente, e com a apreensão operatória por meio da modificação do número de lados da base e o tamanho da altura, explorando também a planificação de cada uma delas.

Em vista disto, apresentaremos a seguir a sequência didática criada, os objetivos de cada uma, suas variáveis didáticas e as estratégias previstas para soluções dos docentes quanto à exploração do conhecimento tecnológico do conteúdo da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, realizada na terceira *Live*, conforme vemos no quadro 31.

Quadro 31 - Sequência didática da Live 3: conhecimento tecnológico do conteúdo da geometria espacial elementar

<p>Vamos conversar – Vamos ver agora como a tecnologia influencia o conteúdo e vice versa. Para isso, vamos explorar a atividade a seguir:</p>
<p>Atividade 1 - Acesse o link a seguir para conectar-se à próxima atividade: <www.geogebra.org/classroom> e use o código GUPC VJFA. Construa cada uma das seguintes imagens:</p>

<p>Alternativa de resposta - Interpretação de cada um dos controles deslizantes, modificar a visualização da figura arrastando o cursor ou dedo sobre a tela e mudando o polo de vista, ou não realizar a atividade por dificuldades operacionais.</p>
<p>Objetivo - Representar o desenho expresso por meio da modificação da figura mostrada na tela do computador ou smartphone. Compreender como o conteúdo pode ser modificado.</p>
<p>Variável didática - Representar, figuras, visualização.</p>
<p>Estratégias previstas para a solução - Os professores podem arrastar cada um dos controles deslizantes, visualizar a manipulação das figuras, interpretar as informações visuais do desenho e transformá-las nas imagens desejadas. As possíveis dificuldades serão fomentadas oralmente ou por meio do compartilhamento da tela.</p>
<p>Enquete 1 oral - Esta última atividade poderia ser realizada com uso de outras tecnologias (recursos)? Se sim, com quais tecnologias (recursos)? Como?</p>
<p>Alternativa de resposta - Discussão oral.</p>
<p>Objetivo - Identificar a compreensão das tecnologias consideradas adequadas pelos professores e como elas podem ser utilizadas por eles.</p>
<p>Variável didática - Projetos, representar, desenho, figuras.</p>
<p>Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.</p>
<p>Enquete 2 no Mentimeter – Como podemos propor atividades lúdicas abordando o conteúdo das tarefas realizadas anteriormente para os alunos que não têm acesso às tecnologias digitais?</p>
<p>Alternativa de resposta - O professor digitará suas respostas livremente.</p>
<p>Objetivo - Identificar a compreensão das tecnologias consideradas adequadas pelos professores dentro de um contexto de ensino e aprendizagem.</p>
<p>Variáveis didáticas - Ludicidade.</p>
<p>Estratégias previstas para a solução - Os professores podem digitar uma ou mais frases ou não digitar ou aguardar o posicionamento ou a discussão de um colega ou do professor formador para iniciar uma conversa e escrever sua opinião. O resultado será apresentado em forma de caixas de respostas na qual permitirá levantar questionamentos e opiniões sobre as respostas dadas sem identificá-los.</p>
<p>Informação - Comunicar aos professores sobre as variáveis didáticas do conhecimento tecnológico do conteúdo da geometria espacial elementar identificados na pesquisa e realizar uma reflexão crítica sobre elas por meio do diálogo aberto com o grupo.</p>

Em seguida, exploraremos o conhecimento pedagógico da tecnologia de Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, a qual possui as seguintes variáveis didáticas: escrita; paródias; jogos; vídeos; *softwares*.

A variável *escrita* é exposta nos livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como processo de expressar a comunicação de ideias matemáticas, e confirmado no questionário aplicado aos professores como procedimento para sintetizar e reforçar o conteúdo abordado.

A variável *paródia* é mencionada no currículo de formação de professores da UFF como método para oportunizar a construção de conceitos mais sistematizados e completos.

A variável *jogos* é mencionada nos PCN (1997b, p. 35) como recurso que permite fornecer um sentido funcional dos conceitos, ou seja, são “fonte de significados e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema”, na BNCC (2017) como recurso didático para a compreensão e utilização das noções matemáticas, no currículo de formação de professores da UFF como método para oportunizar a construção de conceitos mais sistematizados e completos, e pelos professores como proposta para tornar as aulas mais prazerosa.

A variável *vídeos* é exposta nos PCN (1997) e na BNCC (2017) como recurso didático integrado às situações que levem a análise e reflexão para a compreensão e utilização das noções matemáticas, no currículo de formação de professores da UFF como uma proposta didática no processo de ensino e aprendizagem.

A variável *software* é mencionado nos PCN (1997) como forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente, na BNCC (2017) como recurso didático de geometria dinâmica que possibilita a compreensão e utilização de noções matemáticas, no currículo de formação de professores da UFF vinculado ao uso do laboratório de ensino e proposta de ensino e aprendizagem da Geometria

Assim sendo, para a investigação dessas variáveis didáticas realizaremos a apreensão discursiva e perceptiva nas duas primeiras atividades propostas: primeiro explorar as figuras de objetos do cotidiano com formato de prismas e exibidos na primeira *Live*, investigando as informações visuais e assim criando imagens mentais. Segundo, mostrar os prismas que apareceram nos livros didáticos analisados identificando quais deles representam a mesma figura dos prismas exibidos anteriormente. Este é o momento de conversão da representação das figuras do cotidiano para a representação das imagens de desenhos exibidos nos livros didáticos.

Apresentamos a seguir a sequência didática criada, os objetivos de cada uma, suas variáveis didáticas e as estratégias previstas para soluções dos docentes para a exploração do conhecimento pedagógico da tecnologia da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, realizado na terceira *Live*, conforme vemos no quadro 32.

Quadro 32 - Sequência didática da Live 3: conhecimento pedagógico da tecnologia da Geometria espacial elementar

<p>Vamos conversar – Vamos ver agora como podemos usar os recursos tecnológicos pedagogicamente no processo de ensino e aprendizagem. Para isso, vamos explorar as atividades a seguir:</p>																																												
<p>Enquete 1 oral - Quais informações visuais você pode explicitar em cada uma dessas imagens?</p> 	<p>Enquete 2 oral - Quais destes prismas, exposto nos livros didáticos, representa alguns dos formatos dos prismas encontrados nos objetos cotidianos vistos anteriormente?</p> 																																											
<p>Enquete 3 oral - Quais são as POSSIBILIDADES e RESTRIÇÕES pedagógicas ao utilizar cada um dos recursos na atividade realizada anteriormente?</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>(Possibilidades) Quais cenários?</th> <th>RECURSOS</th> <th>(Restrições) (Quais limitações?)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>ESCRITA</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>PARÓDIAS</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>JOGOS</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>VÍDEOS</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>SOTWARES</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>(Conforme os professores vão dando suas respostas, o formador irá digitá-las no quadro)</p>	(Possibilidades) Quais cenários?	RECURSOS	(Restrições) (Quais limitações?)		ESCRITA			PARÓDIAS			JOGOS			VÍDEOS			SOTWARES		<p>Alternativa de resposta - Discussão oral.</p> <p>Objetivo - Identificar característica do conhecimento tecnológico do conteúdo, averiguando por parte dos professores, as possibilidades e restrições do uso das tecnologias no ensino de Geometria espacial elementar.</p> <p>Variável didática - Escrita, paródias, jogos, vídeos, softwares.</p>																									
(Possibilidades) Quais cenários?	RECURSOS	(Restrições) (Quais limitações?)																																										
	ESCRITA																																											
	PARÓDIAS																																											
	JOGOS																																											
	VÍDEOS																																											
	SOTWARES																																											
<p>Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.</p>																																												
<p>Enquete 4 oral – Para cada recurso identifique qual(is) tecnologia(s) você poderá usar para que possam ser desenvolvidos cada possibilidade pedagógica retratado na atividade anterior? Por quê?</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">TECNOLOGIAS</th> <th>RECURSOS</th> <th>Tecnologias escolhidas (numeração)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1) Livro/paradidático;</td> <td>10) Jornal;</td> <td>ESCRITA</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2) Folha de papel;</td> <td>11) Revistas;</td> <td>PARÓDIAS</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3) Lápis/caneta;</td> <td>12) Tintas;</td> <td>JOGOS</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4) Quadro;</td> <td>13) Canudos;</td> <td>VÍDEOS</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5) Tesoura;</td> <td>14) Palitos;</td> <td>SOTWARES</td> <td></td> </tr> <tr> <td>6) Cola;</td> <td>15) Embalagens;</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7) Massinha;</td> <td>16) Sólidos geométricos;</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>8) Maquete;</td> <td>17) Imagens/foto;</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>9) Moldes;</td> <td>18) Computador/smartphone.</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>(Conforme os professores vão dando suas respostas, o formador irá digitar a numeração da tecnologia no quadro)</p>			TECNOLOGIAS		RECURSOS	Tecnologias escolhidas (numeração)	1) Livro/paradidático;	10) Jornal;	ESCRITA		2) Folha de papel;	11) Revistas;	PARÓDIAS		3) Lápis/caneta;	12) Tintas;	JOGOS		4) Quadro;	13) Canudos;	VÍDEOS		5) Tesoura;	14) Palitos;	SOTWARES		6) Cola;	15) Embalagens;			7) Massinha;	16) Sólidos geométricos;			8) Maquete;	17) Imagens/foto;			9) Moldes;	18) Computador/smartphone.			<p>Alternativa de resposta - Discussão oral.</p> <p>Objetivo - Identificar as tecnologias emergentes por cada um dos recursos usados no contexto pedagógico no ensino de Geometria espacial elementar.</p> <p>Variável didática - Escrita, paródias, jogos, vídeos, softwares.</p>	
TECNOLOGIAS		RECURSOS	Tecnologias escolhidas (numeração)																																									
1) Livro/paradidático;	10) Jornal;	ESCRITA																																										
2) Folha de papel;	11) Revistas;	PARÓDIAS																																										
3) Lápis/caneta;	12) Tintas;	JOGOS																																										
4) Quadro;	13) Canudos;	VÍDEOS																																										
5) Tesoura;	14) Palitos;	SOTWARES																																										
6) Cola;	15) Embalagens;																																											
7) Massinha;	16) Sólidos geométricos;																																											
8) Maquete;	17) Imagens/foto;																																											
9) Moldes;	18) Computador/smartphone.																																											

Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.
Encerramento - Dúvidas, sugestões, elogios, críticas e questionamentos podem ser feitos por aqui
Abrir o debate para a discussão dos componentes do conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento pedagógico da tecnologia e o conhecimento tecnológico do conteúdo abordados na Live 3.

Fonte: Construção nossa

Até aqui investigamos os componentes principais do TPACK, dos contextos da prática matemática, dos componentes do conhecimento do conteúdo, pedagógico e tecnológico, e a interseção entre cada um deles, porém ainda falta averiguar o TPACK propriamente dito, que é a convergência entre todos esses componentes do conhecimento. Assim sendo, iremos explorar na *Live 4* esse conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar.

6.4. Live 4 – Nível 4: Explorar o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo

A intenção desta quarta *Live* é continuar cativando os professores em atividades envolvendo tecnologias para que eles a possam integrar ativamente em suas aulas. Para isso, exploraremos a variável global do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo utilizando tarefas extraídas do livro didático, adaptando-as ao contexto atual e à prática vivenciada por alguns professores do município de Angra dos Reis.

Assim sendo, temos as seguintes variáveis didáticas em relação ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF: a resolução de problemas; a etnomatemática; e a história da matemática.

A variável *resolução de problemas* foi explicitada apenas na BNCC (2017) como processo matemático fundamental para o desenvolvimento do letramento matemático e pensamento computacional.

A variável *etnomatemática* foi exposta nos PCN como proposta da ação pedagógica que procura entender a realidade do aluno dentro do contexto cultural, e no currículo de formação de professores na UFF é referenciada na concepção construtivista da aprendizagem significativa.

A variável *história da matemática* foi explicitada nos PCN (1997b, p.23) como “um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência”. Ela permite elucidar ideias matemáticas que estão sendo construídas nos alunos e fornecer “respostas a alguns ‘porquês’ e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento

(Ibidem, p.34). Além disso, foi exposta no currículo dos professores pelo consórcio Cederj como forma de mostrar a evolução da Matemática a partir da superação de problemas. Por fim, essa variável é colocada no livro didático - *Ápis Matemática* – como recurso didático que permitirá comparar os diversos períodos da história ou as diferentes culturas, correlacionando com a etnomatemática, conforme vimos no parágrafo anterior.

Posto isto, para a investigação dessas variáveis didáticas propomos explorar as pirâmides por meio de atividades retiradas do livro *Vem voar matemática 3º ano* (2017) e complementadas com a atividade criada por Rodrigo Farias Gama e disponível⁵³ na comunidade on-line do Geogebra. Esta atividade é totalmente intuitiva, permitindo modificar o número de lados da base da pirâmide, a medida do lado da altura, manipular a figura clicando e arrastando o curso/dedo na tela, além disso, é possível planificar a figura movendo o ponto correspondente à planificação, abrindo e fechando-a. Dessa forma, realizaremos segundo Gutiérrez (1996a), o desenvolvimento da visualização por meio da interpretação de informações visuais e das imagens geradas na atividade, efetivando a apreensão perceptiva mediante a observação, análise das imagens mentais e transformações dessas imagens em outras imagens, gerando outros tipos de informações. Além disso, será posta a apreensão discursiva por meio da interpretação da abertura da unidade e das sugestões de atividades. Por fim, procederemos com a apreensão sequencial instigando a reprodução e construção de diferentes pirâmides, e com a apreensão operatória por meio da modificação do número de lados da base e o tamanho da altura, explorando também a sua planificação. Assim sendo, exploraremos os paradigmas de Parzyz (2006) correspondente a geometria, (G0), (G1) e (G3), permeando os estudos de Duval (1995) por meio da investigação dos aspectos perceptíveis da pirâmide, a conversão em diferentes registros de representações e o uso do discurso dedutivo no levantamento de hipóteses e premissas durante a execução das atividades no processo de coordenação.

Apresentaremos a seguir a sequência didática criada no Mentimeter, os objetivos de cada uma, suas variáveis didáticas e as estratégias previstas para soluções dos docentes para a exploração do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar nos anos iniciais do EF, realizado na terceira *Live*, conforme vemos no quadro 33.

⁵³ No endereço <<https://www.geogebra.org/m/wznzknkg>>.

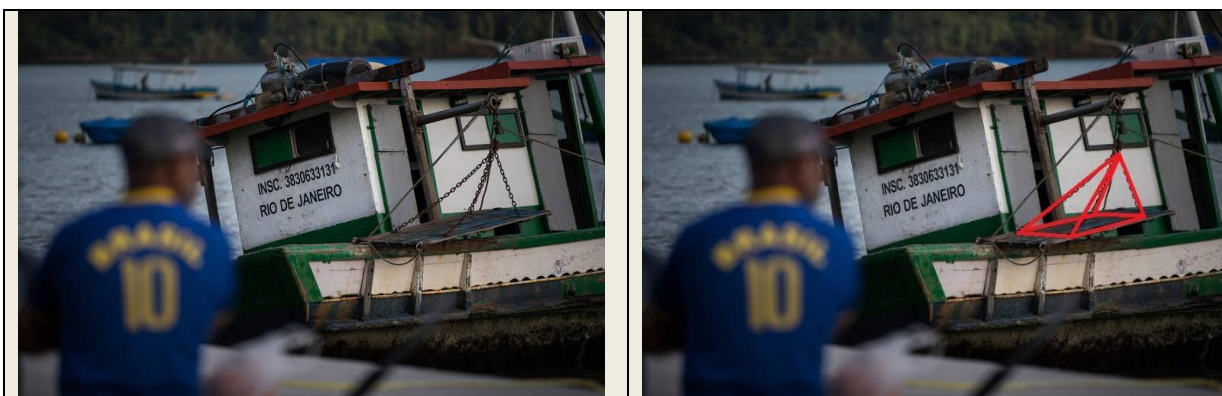
Quadro 33 - Sequência didática da Live 4: conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo da geometria espacial elementar

<p>Vamos conversar – A imagem a seguir é apresentada na abertura da unidade 3 do livro <i>Vem voar matemática</i> 3º ano. Observe a imagem e responda:</p>	<div data-bbox="403 327 807 456" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>As pirâmides de Gizé – Quéfren, Quéops e Miquerinos – foram construídas às margens do rio Nilo, no Egito. A pirâmide de Quéops também é conhecida como a grande pirâmide de Gizé. Foto de 2009.</p> </div> <div data-bbox="467 465 1046 815" style="text-align: center;"> </div> <div data-bbox="1099 512 1445 804" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ol style="list-style-type: none"> Há cerca de 5000 anos, desenvolveu-se na África a civilização egípcia. Por que será que os egípcios construíram pirâmides como as desta imagem? <i>Resposta pessoal.</i> Na sua opinião, quais conhecimentos matemáticos os egípcios já possuíam para serem capazes de construir esses monumentos? <i>Resposta pessoal.</i> </div> <p style="text-align: center;">(SANTOS, 2017, pp. 114-115)</p>	
<p>Enquete 1 no Mentimeter - Que sugestões de atividades em Geometria espacial podemos propor a partir da abertura da atividade feita anteriormente?</p>		
<p>Alternativa de resposta - O professor irá digitar suas respostas livremente.</p>		
<p>Objetivo - Identificar se os professores explicitam os elementos constituintes da história da matemática: como campo de problemas, integração com outras áreas, evolução da matemática e recurso auxiliar para comparar história/cultura das civilizações</p>		
<p>Variável didática - História da matemática</p>		
<p>Estratégias previstas para a solução - Os professores podem digitar uma ou mais frases ou não digitar ou aguardar o posicionamento ou a discussão de um colega ou do professor formador para iniciar uma conversa e escrever sua opinião. O resultado será apresentado em forma de caixas de respostas na qual permitirá levantar questionamentos e opiniões sobre as respostas dadas sem identificá-los.</p>		
<p>Enquete 2 no Mentimeter - Nas imagens a seguir, verifique se algumas delas poderiam ser usadas no contexto cultural do aluno.</p>		
<p style="text-align: center;">Mercado do Peixe</p>	<p style="text-align: center;">Igreja Matriz</p>	<p style="text-align: center;">Porto Naval</p>
<p style="text-align: center;">Barcos</p>	<p style="text-align: center;">Instrumentos de pesca</p>	<p>Alternativa de resposta - Escala de 1 a 2 na qual 1 representa está no contexto cultural do aluno e 2 representa não está no contexto cultural do aluno. Os docentes podem responder ou deixar de responder cada uma das escalas indicadas nas imagens.</p>
<p>Objetivo - Identificar a compreensão do professor sobre a etnomatemática quanto à realidade do aluno.</p>		
<p>Variáveis didáticas – Etnomatemática.</p>		
<p>Estratégias previstas para a solução – Os professores podem responder as opções sem nenhuma interferência, responder as opções aleatoriamente por não compreender o enunciado ou não responder. Cabe salientar que a todo momento serão feitos questionamentos para que os professores possam dialogar sobre o tópico discutido e responder as opções de forma mais coerente.</p>		

Enquete 2 oral – Conforme observamos, as pirâmides do Egito serviam como túmulos para os antigos Faraós, mas hoje em dia usamos elas com outro propósito. Em cada uma das imagens que mostramos anteriormente, identifique as pirâmides e diga para qual função ela está sendo usada no contexto atual?

Iremos mostrar as imagens e esperar a fala dos professores e depois exibir os traçados das pirâmides expostas nelas.





Enquete 3 oral – Quais outras imagens poderiam ser usadas para representar o contexto cultural do aluno?

Enquete 4 oral – Quais outras atividades poderiam ser feitas para que o aluno possa identificar as pirâmides em seu contexto cultural?

Alternativa de resposta - Discussão oral.

Objetivo - Identificar a compreensão do professor sobre a etnomatemática quanto a concepção construtivista de uma aprendizagem significativa.

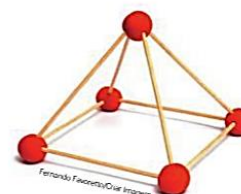
Variáveis didáticas – Etnomatemática.

Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.

Enquete 5 oral - Observe uma sugestão de atividade proposta no livro *Vem voar matemática* 3º ano. Qual é a resposta desejável?

3 O modelo de pirâmide ao lado foi construído usando palitos e massinha de modelar.

- Que elementos da pirâmide os palitos representam? E as massinhas?



Enquete 6 oral – A figura desta atividade é semelhante a algumas das pirâmides mostradas na atividade anterior? Se sim, em quais imagens?

(SANTOS, 2017, p. 141)

Enquete 7 oral - O que vocês podem dizer sobre as figuras dessa imagem?

Alternativa de resposta - Os professores podem chamar os vértices de pontas/massinha, arestas de linhas/lados/palitos. Pode haver a confusão de lado e face. Pode haver resposta do tipo que já fez alguma atividade parecida e usou elementos alternativos ou que nunca realizou atividades do tipo por não haver material na escola.

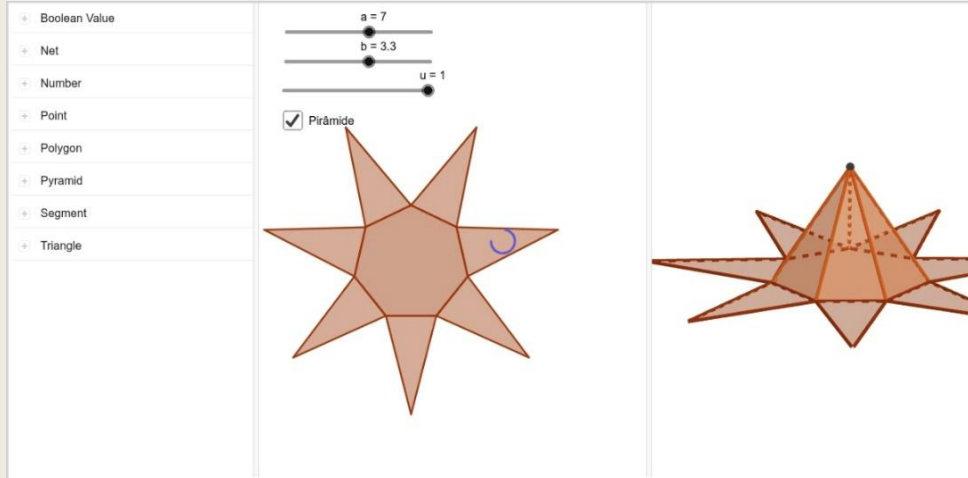


Objetivo - Identificar a compreensão do professor sobre a resolução de problemas quanto ao desenvolvimento do letramento matemático.

Variáveis didáticas – Resolução de problemas.

Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.

Enquete 8 oral - Acesse o link a seguir para conectar a próxima atividade: <www.geogebra.org/classroom> e use o código UHXQ KFUA.

<p>Se você estiver no celular, coloque-o na posição horizontal. Observe que apareceram três quadros (figura A), o primeiro corresponde às informações da construção da figura, para nossa atividade. Interessamos apenas o segundo e o terceiro quadros.</p>	<p style="text-align: center;">Figure A: Atividade pirâmide planificada exibida no Geogebra Classroom</p> 
<p>No segundo quadro aparece três botões deslizantes (a,b,u). Caso todos eles não aparecerem, clique no canto da tela fora dos quadros e arraste para cima/baixo até aparecerem os três botões deslizantes.</p>	
<p>Clique e arraste o botão “a”. O que acontece com a pirâmide? Clique e arraste o botão “b”. O que acontece com a pirâmide? Clique e arraste o botão “u”. O que acontece com a pirâmide? Clique no quadrado ao lado da palavra Pirâmide, logo abaixo do botão “u”. O que acontece com a pirâmide? Clique e arraste o cursor/dedo sobre a tela no segundo quadro. O que acontece com a pirâmide? Clique e arraste o cursor/dedo sobre a tela no terceiro quadro. O que acontece com a pirâmide? Construa a pirâmide realizado na atividade anterior e determine sua planificação.</p>	
<p>Sobre a atividade realizada: O que você achou? Qual foi sua maior dificuldade? Qual a diferença entre a atividade feita com o material concreto e feita pelo computador ou smartphone?</p>	
<p>Alternativa de resposta - Discussão oral.</p>	
<p>Objetivo - Identificar a compreensão do professor sobre a resolução de problemas quanto ao desenvolvimento do pensamento computacional.</p>	
<p>Variáveis didáticas – Resolução de problemas.</p>	
<p>Estratégias previstas para a solução - Os professores podem explicitar as respostas oralmente; esperar os colegas comentarem para depois dar sua opinião, responder via chat ou não responder.</p>	
<p>Informação - Comunicar aos professores sobre as variáveis didáticas do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo da geometria espacial elementar identificados na pesquisa e realizar uma reflexão crítica sobre elas por meio do diálogo aberto com o grupo.</p>	
<p>Informação - Sugerir aos professores links de outras atividades⁵⁴ criadas no Geogebra que podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial.</p>	
<p>Todas a planificações do cubo: https://www.geogebra.org/m/kmjt7xbk</p>	
<p>Planificação do cilindro: https://www.geogebra.org/m/XzfFNDYV</p>	
<p>Planificação do cone: https://www.geogebra.org/m/rff64Qzw</p>	
<p>Planificações de prismas e pirâmides: https://www.geogebra.org/m/qgf745xq</p>	
<p>Prismas: https://www.geogebra.org/classroom/afkbaazq</p>	
<p>Encerramento - Dúvidas, sugestões, elogios, críticas e questionamentos podem ser feitos por aqui</p>	
<p>Abrir o debate para a discussão dos componentes do conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento pedagógico da tecnologia e o conhecimento tecnológico do conteúdo abordados na Live 3.</p>	

Fonte: Construção nossa

Após explorar o TPACK não significa que os professores irão incorporar a tecnologia em sua prática. Para essa confirmação é preciso que os docentes avaliem o uso da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem e decidam incluí-la em sua prática. Para isso, vamos propor uma avaliação que será explicitada a seguir.

⁵⁴ Essas atividades podem ser feitas on-line ou por meio do aplicativo do Geogebra.

6.5. Avaliação – Nível 5: Avançar sobre o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo

A intenção desta avaliação é confirmar a integração do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial explorado nas *Lives* anteriores. Assim sendo, vamos propor ao término da formação, que os professores preparem atividades adequadas ao processo do ensino e aprendizagem da Geometria espacial, e postem na plataforma “Apoiar2”⁵⁵ usada pela secretaria de educação de Angra dos Reis.

A avaliação estará disponível na plataforma da Google Classroom somente após a última *Live*, e estará disponível aos professores durante uma semana, sendo critério fundamental para o recebimento do certificado após a formação. Assim sendo, apresentaremos a seguir a avaliação a ser exposta aos docentes conforme vemos no quadro 10.

Quadro 34 - Avaliação disponível na plataforma da Google Classroom

De acordo com que foi exposto nas <i>Lives</i> , preparem uma aula que aborde qualquer habilidade de Geometria espacial elementar, e insira na plataforma “Apoiar 2”. Lembre-se que a aula estará disponível tanto para os alunos acessarem de forma online quanto na versão impressa.
Após postar a atividade na plataforma “Apoiar 2”, baixe e compartilhe aqui na plataforma para que a aula esteja disponível para todos os colegas poderem utilizá-la, adaptando-a ou não, em sua prática.
Título da atividade:
Objetivos:
Conteúdos:
<Insira aqui o documento>

Fonte: Construção nossa

Abaixo da avaliação estará disponível um espaço para que os professores possam inserir seus comentários livremente. Todas as avaliações postadas e comentários inseridos nesta última etapa da concepção e análise a priori serão analisadas para verificação da integração do TPACK por partes desses docentes.

Para dar continuidade aos processos de engenharia didática, iremos abordar no próximo capítulo a terceira e quarta fase, que correspondem à experimentação e análise a *posteriori* e validação.

⁵⁵ Plataforma de Apoio Pedagógico à distância com o objetivo de fazer com que sejam oferecidas atividades às crianças como forma de manter o vínculo com as Unidades de Ensino, minimizando o impacto do distanciamento. O aluno pode acessar via aplicativo ou pelo endereço <<http://sectonline.com.br/apoiar.html>>.

EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

A experimentação é a terceira fase da engenharia didática e se constituiu na aplicação da formação do tipo autoformação, ou seja, a inscrição foi voluntária com uma amostra da pesquisa referente ao grupo de professores que atuam ou já atuaram nos anos iniciais do EF, do município de Angra dos Reis. Para tal, foi acertado no dia 1º de dezembro de 2020, em uma reunião com a secretaria de educação deste município, para que a formação ocorresse respectivamente nos dias 14, 15, 16 e 18 de dezembro de 2020 das 9h às 11h com *live 1*, *live 2*, *live 3* e *live 4*. Ficou acertado também, que o dia 17 de dezembro seria o dia comum de coordenação dos professores nas escolas.

No dia 14 de dezembro de 2020, porém, por volta das 8h30 houve um problema de instabilidade de todos os serviços do Google, ficando indisponíveis o acesso ao Google *Classroom* e ao Google Meet por aproximadamente 1h. Por esse motivo, às 9h10 encaminhei uma mensagem via WhatsApp, já que não era possível encaminhar e-mail, para a direção das escolas inscritas avisarem aos professores que esta primeira *live* da formação estaria suspensa, retornando normalmente no dia seguinte.

Vale ressaltar que, para informar aos professores sobre a formação, encaminhei um documento informativo (Apêndice 8), para as escolas selecionadas, no dia 02 de dezembro de 2020, por meio de memorando, e-mail das escolas e WhatsApp da direção, esclarecendo a proposta da formação, incluindo dentre outras coisas, o passo a passo em como fazer a inscrição, dias, horários e as etapas das atividades. Além disso, entre os dias 03 e 11 de dezembro de 2020, participei, como convidado, nas *lives* de coordenação realizadas nessas escolas para convidar os docentes a estarem na formação e esclarecer possíveis dúvidas.

Adicionalmente, boa parte dos professores durante a coordenação, elogiou a proposta da formação, mas alegou falta de tempo para participar da formação. Além disso, a pedido de alguns professores, disponibilizarei aos inscritos, na plataforma do Google *Classroom*, as gravações da formação a serem inseridas no canal do Youtube para quem não puder acessar algumas das *lives* no dia e horário estabelecidos, assistindo assim, em tempo oportuno. Como nessas coordenações, ao comentar sobre as ferramentas tecnológicas digitais que eu usaria na formação, professores demonstraram interesse em conhecê-las, decidi acrescentar também um link de como preparar atividades usando a ferramenta do Mentimeter; links de como inserir atividades em Word ou PDF, imagens, vídeos e áudios usados na plataforma do *Apoiar2*⁵⁶; e

⁵⁶ Plataforma de Apoio Pedagógico à distância da Secretaria de Educação de Angra dos Reis.

um link de um site com as informações de como criar e usar atividades postadas no Geogebra Classroom.

Dessa forma, disponibilizei para os docentes inscritos, por meio da plataforma Google Classroom e no menu Atividades, seis tópicos constituindo com as seguintes informações:

- Apresentação: consta uma mensagem de boas-vindas, um resumo da formação e um artigo⁵⁷ apresentado por mim e meu orientador no XIV Encontro Paulista de Educação Matemática para quem quisesse compreender melhor sobre as variáveis didáticas a serem exploradas nesta formação.
- *live 1*: consta o link de acesso à *live 1*, o vídeo do Youtube⁵⁸ sobre como fazer exercícios on-line e em tempo real usando a ferramenta Mentimeter, os slides em Power point da apresentação e o link de acesso da gravação da *live 1*⁵⁹ disponibilizados no canal do Youtube logo após sua finalização;
- *live 2*: consta o link de acesso à *live 2*, vídeos criados por mim e disponível no Youtube⁶⁰ sobre como postar atividades na plataforma do Apoiar2, os slides em Power point da apresentação e o link de acesso da gravação da *live 2*⁶¹ disponibilizados no canal do Youtube logo após sua finalização;
- *live 3*: consta o link de acesso à *live 3*, informações de um site⁶² de como criar atividades no GeoGebra Classroom, os slides em Power Point da apresentação, o link de acesso da gravação da *live 3*⁶³ disponibilizados no canal do Youtube logo após sua finalização e um arquivo em forma de folheto explicativo em PDF, mostrando o passo a passo de como criar uma conta na comunidade do GeoGebra (Apêndice 9).
- *Live 4*: consta o link de acesso à *Live 4* e o link⁶⁴ sobre a oficina "Google Classroom e GeoGebra Classroom: uma interseção interessante para aulas remotas", atividade apresentada no I Encontro Internacional do GeoGebra em Língua Portuguesa, os slides em Power Point da apresentação, o link de acesso

⁵⁷ Anais do XIV Encontro Paulista de Educação Matemática – XIV EPEM - ISBN: 978-85-7713-213-3

⁵⁸ Disponível em: <<https://youtu.be/4gl8v9sPO0M>>.

⁵⁹ Disponível em: <https://youtu.be/cAMxekz_vSk>

⁶⁰ Disponível em: <https://youtu.be/H_SmwqcrzTU>; <<https://youtu.be/o7KeNDkQBKM>>; <<https://youtu.be/vKMmeo-N5dk>>; <<https://youtu.be/uDx2HLS3EDE>>.

⁶¹ Disponível em: <<https://youtu.be/LQbf9wvPBDw>>

⁶² Disponível em: <<https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2020/08/geogebra-classroom.html#:~:text=Agora%20voc%C3%AA%20tem%20que%20abrir,com%20seus%20alunos%20via%20ink.>>>.

⁶³ Disponível em: <<https://youtu.be/dY2Ufoh8dKE>>

⁶⁴ Disponível em: <<https://youtu.be/XKCAcnYK5No>>

da gravação da *Live* 4⁶⁵ disponibilizados no canal do Youtube logo após sua finalização, e um folheto explicativo em PDF de como explorar e encaminhar para os alunos as atividades escolhidas na comunidade do GeoGebra, assim como, verificar o progresso das tarefas realizadas por eles (Apêndice 10).

- Avaliação: consta as informações sobre como inserir uma atividade de Geometria espacial elementar no Google *Classroom*, a ser preparado e postado na plataforma do Apoiar2 ou para os alunos na versão impressa, além de informações sobre como acessar o Drive com as atividades postadas pelos colegas na formação.

Assim sendo, até antes do início da formação tivemos nove professores inscritos. Todavia, logo que iniciou a formação, uma das diretoras entrou em contato comigo via WhatsApp pedindo link de acesso à *live*, pois havia duas professoras, que ainda não estavam inscritas, interessadas em fazer a formação. Assim, enviei o link para a diretora encaminhar para as referidas docentes.

Com isso, no início da formação, tivemos 11 inscrições: seis professoras participaram da primeira *live*, cinco da segunda, quatro da terceira e quatro da quarta. Essas professoras que participaram das *lives* atuam ao todo, em cinco unidades escolares diferentes, sendo que duas delas em uma mesma escola. Dessas unidades de ensino, três estão localizadas em distintas ilhas e duas na parte continental do município. Atualmente, essas docentes estão com as seguintes funções: uma lecionando em uma turma multianual de 1º e 2º ano do EF, três na educação infantil e, duas assumindo as funções de diretora e professora de uma turma multianual com alunos da educação infantil até o 5º ano do EF. Percebemos que, nas escolas de ilhas, as professoras acabam assumindo mais de uma função.

Vale ressaltar aqui, que apesar de, nem todas as professoras inscritas na formação estarem atuando em turmas especificamente dos anos iniciais do EF, isso não viabiliza a pesquisa, pois na prática, todas elas estão aptas a atuarem da Educação Infantil até o 5º ano do EF. Além disso, como veremos nas análises a *posteriori*, todas as docentes inscritas ou atuam ou já atuaram nos anos iniciais do EF. Somado a isso, esse fato colabora na ampliação dos resultados da análise dos dados coletados e sua validação, abrangendo o conhecimento dos professores que ensinam Geometria espacial elementar desde a Educação infantil até 5º ano do EF.

⁶⁵ Disponível em: <<https://youtu.be/s0Hki8RW48A>>

Isto posto, a primeira *live* teve início às 9h no dia 15 de dezembro de 2020, e conforme as professoras foram acessando, fui colhendo o telefone de contato e escola em que lecionam. Investiguei também, por meio de uma pergunta oral, como as professoras haviam ingressado na *live*: uma delas conseguiu pelo link inserido na atividade na plataforma do Google *Classroom* e três outras pelo link encaminhado no e-mail 30 minutos antes do início da formação, e duas delas pelo link encaminhado à direção. Além disso, no início dessa *live* foi pedido a autorização do termo de consentimento livre e esclarecido virtual de cada docente, que se encontra no (Apêndice 11).

Desta forma, para melhor troca de informações com as professoras foi proposto a criação um grupo de WhatsApp para disponibilizar o link de acesso às *lives* seguintes, alguns minutos antes do início de cada uma delas, para não ocorrer atraso como aconteceu neste primeiro dia de formação. Ficou acertado também, que as novas datas da formação seriam no dia 16 com a *live* 2, no dia 17 com a *live* 3 e no dia 18 com a *live* 4, todas na mesma semana de dezembro. Combinamos também que, caso necessite faltar, avisar no grupo de Whatsapp e assistir as gravações das *lives*, pois seria provável que nos dias 16 e 17, algumas escolas estivessem realizando reuniões de coordenação, como de fato ocorreu, tendo uma professora que não participou da segunda *live* e duas da terceira. Além disso, na última *live* duas professoras que também assumem o cargo de direção, não puderam entrar, pois foram convocadas, no dia anterior, a participarem de uma reunião com a secretaria de educação do município, e outras duas professoras estavam com problemas de conexão de internet, avisando via chat e mensagem no grupo de WhatsApp criado para a turma, conseguindo ficar presentes por aproximadamente meia hora.

Para melhor condução da formação foi utilizado pelo formador dois notebooks para acessar a *live*, um para disponibilizar a apresentação, envio de links nos chats e controle dos microfones, e o outro para observação das mensagens enviadas pelas docentes e daquelas que estavam ligando o microfone, possivelmente para pedir a vez de fala.

Com isso, foram exploradas oito sequências didáticas, organizadas em forma de enquetes ao longo da formação. Para melhor compreensão da investigação vamos chamar a primeira sequência didática de S1, a segunda de S2, e assim por diante, da mesma maneira que cada uma das enquetes e sua ordem realizada como E1, E2, Por exemplo, em S1E3, refere-se à primeira sequência didática com a enquete 3, e S2E3, como segunda sequência didática com a enquete 3. Além disso, como nas gravações das *lives* os nomes das professoras foram constantemente mencionados, e para minimizar o sigilo de suas respostas, iremos explicitar

suas falas identificando-as apenas como professora ou docente. Havendo a necessidade de identificar alguma docente, iremos chamá-las de Docente A, Docente B, e assim por diante.

Contudo, para a análise *a posteriori* foram levadas em consideração as variáveis globais, as variáveis locais, e as variáveis didáticas, relacionando-as com o quadro teórico explicitado no capítulo 3, e mostrados nos próximos itens.

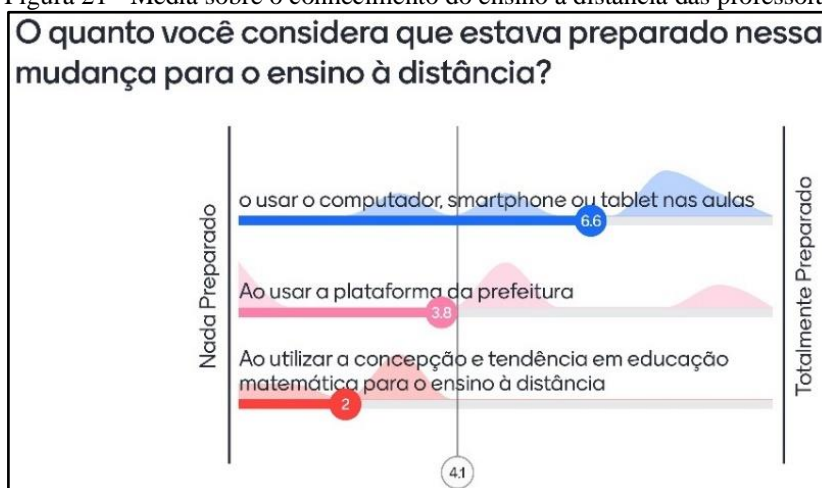
7.1. Análise *a posteriori* da live 1

Por meio dos Registros das Observações feitas na *live* 1 (Apêndice 12) logo após sua finalização, percebemos que as professoras, em sua grande maioria, acessaram a *live* com câmera e áudio ligados, mas logo após se apresentarem e fazerem os cumprimentos, desligavam, ligando apenas o áudio no momento do diálogo e troca de informações. Cada professora só fazia algum comentário quando a outra colega terminava seus esclarecimentos. Era nítido que havia um conhecimento tecnológico entre as professoras para a participação de videoconferência, talvez pelo excesso de *lives* que realizaram nos últimos meses no ensino remoto. Porém, a dificuldade do uso da tecnologia digital ainda era apresentada por uma docente que estava com problemas no acesso aos links disponibilizados no chat, sendo auxiliada por outra colega no grupo. Temos também como observações, a espontaneidade nas respostas dadas pelas professoras, pois o pesquisador precisou de pouca interferência nas provocações levantadas.

Assim sendo, nessa primeira *live*, investigamos S1 referente ao conhecimento de contexto, que foi dividido em 14 enquetes, e S2 referente conhecimento específico do conteúdo, que foi dividido em quatro enquetes.

Em S1E1, S1E2 e S1E3 buscamos identificar na variável didática concepção e tendência em educação matemática, as possíveis carências sobre os conhecimentos do ensino à distância usado na prática, sendo apresentado na figura 21 essa média.

Figura 21 - Média sobre o conhecimento do ensino à distância das professoras



Fonte: Resultado de S1E1

Por meio da observação da figura 21, podemos constatar que algumas dificuldades no uso das tecnologias digitais ainda são apresentadas pelas professoras, principalmente as que têm mais tempo em docência. Isso foi confirmado na gravação desta *live* por meio da fala de uma docente em 21min58s “eu não consigo não”, em 22min11s “não, não sei nem como chegar até lá. Na verdade, a primeira pergunta sua eu marcaria zero, sabe...”, referindo-se a dificuldade de acessar ao link exposto no chat do Google Meet usando o celular. Outra docente também explicitou dificuldades com as tecnologias digitais, confirmado em 32min59s “eu sinto muita dificuldade, você pode até perceber aqui nesta atividade, então o que eu fiz foi pedir ajuda a minha filha que é adolescente, e os adolescentes se dão super bem com isso, então, é o que é possível, procuro é vencer um pouco e, postar as atividades na plataforma, mas aí são limitações minhas”.

Além disso, a média baixa do uso da plataforma da prefeitura, justifica-se pela limitação de atividades que podem ser postados na plataforma. Indicando um possível conhecimento docente em relação a importância do uso de atividades que permeiam vários registros de representação semiótica, que a limitação da plataforma não beneficia. Confirmado na gravação desta *live* por meio da fala de uma docente em 26min22s “pra mim, na plataforma ainda falta alguns recursos que a pré-escola precisa”, e conferido na resposta explicitada em S1E2 representado, na figura 22.

Figura 22 - Respostas das docentes sobre as dificuldades enfrentadas nas aulas à distância



Fonte: Resultado de S1E2

Podemos observar também na figura 22, que outra dificuldade do ensino à distância está ligada à preocupação em como aluno vai acessar a tarefa e interagir com o professor, verificada na gravação desta *live* por meio da fala de uma docente em 29min43s “eu tenho muitas dificuldades na hora de planejamento, porque eu tenho que pensar em atividades que eu possa é..., que vão ser acessíveis, em que eu possa, assim, é..., inserir na plataforma, com os recursos que nunca tem, então eu tive essa dificuldade, em pensar em atividades diversificadas, para quem ver, tanto a turma quanto os alunos especiais e... em relação a inserção na plataforma, para que eles tenha acesso”.

Para mais, a baixa média sobre a variável didática concepção e tendência em educação matemática para o ensino à distância e referenciada em S1E3 foi dada pela falta de experiência voltada a essa modalidade de ensino, confirmado na gravação desta *live* por meio da fala de uma docente em 27min1s “bem, eu acho que a dificuldade maior, pelo menos no meu caso, foi lidar com o ensino a distância enquanto professora, que até então eu já fiz algumas formações a distância, mas enquanto professora eu fiquei meio sem saber o que fazer”. Somado a isso, tem-se a preferência para o ensino presencial constatado na fala de uma docente em 35min1s “eu prefiro aulas presenciais”.

Ademais, buscamos identificar na gravação desta *live* o que os professores trazem da sua preparação profissional formal e experiências como alunos em S1E4, S1E5 e S1E6, respectivamente como as variáveis didáticas organização das aulas em função do espaço e tempo, materiais necessários às atividades, organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças.

Em relação a organização das aulas em função do espaço e tempo, temos na fala de uma docente que acha impossível preparar atividades para a fase pré-escolar para que o aluno possa fazer individualmente, constatado em 38min26s “nessa questão do aluno fazer as atividades individualmente no pré é, praticamente impossível, porque até pra ele acessar o celular, saber o que tem que fazer, ele precisa da ajuda de alguém”. Sobre realizar uma introdução na atividade, a mesma docente cita uma parceria com os pais e a busca da autonomia do aluno em 38min47s “a introdução que eu coloco, eu ponho para o pai auxiliar a criança a fazer aquela

atividade, geralmente eu coloco atividades muitas relacionadas a brincadeira, né ..., tento buscar essa autonomia na criança”. Somado a isso, a docente ainda coloca que dá preferência para atividades curtas, justificando em 39min26s “porque como eu sei que eles dependem do auxílio dos pais, né, e o pai chega em casa depois de um dia cansativo de trabalho, e não quer dar atenção para a criança, e se a criança começar a perguntar muito, né, digamos assim, incomodar muito, a família pode perder a paciência, e uma coisa que era pra ser prazerosa acaba ficando muito desgastante para a criança”.

Em relação aos materiais necessários às atividades, uma das docentes menciona gravuras, dobraduras e canudos em 42min2s “realmente eu uso gravuras, né, uso é..., dobraduras pedindo para que eles façam né, [...] atividades com canudinhos”. Outra docente reforçou que os kits oferecidos, pela prefeitura, auxiliaram na preparação das atividades, como podemos ver em 42min44s “um recurso que eu acho que ajudou foi, em relação aos recursos né, que eu vi, foi a questão dos kits né”. Além disso, outra docente também mencionou os materiais oferecidos pelo governo federal em 43min32s “que esse material que chegou do governo federal é um material muito bom”, acrescentando também em 43min51s “materiais reutilizados, reciclados que eles teriam em casa”.

Em relação à organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças, uma das docentes esclareceu que o seu planejamento segue a hipótese de os alunos fazerem as atividades em 46min20s “eu espero que eles estejam fazendo, gostando das atividades, como eu falei, eu trabalho muito com proposta de brincadeira, mas na plataforma são poucos alunos que respondem, até mesmo..., acredito por questão de recurso tecnológico, recurso financeiro”.

Somado a isso, buscamos identificar como os professores constroem pontes entre o que os alunos pensam e compreendem, com o que sabem e vão aprender em S1E7, S1E8 e S1E9, respectivamente, com as variáveis didáticas: importância das regras e procedimentos, condições adequadas de trabalho e laboratório de ensino ou Geometria experimental.

Em relação à importância das regras e procedimentos, uma docente elucida que, geralmente utiliza um texto explicativo com os alunos maiores, por serem mais autônomos. Assegurando o passo a passo do que o aluno deve fazer, disponibilizando seu número pessoal de WhatsApp para que os alunos possam tirar dúvidas, conferido em 49min6s “geralmente, eu faço a explicação né, eu coloco um texto dando o passo a passo das atividades, para que os maiores né, e, é..., peço se, caso tenham dúvidas né, que me mandem mensagem”. Outra docente informou que com os alunos menores - referindo-se aos alunos da educação infantil - há menor autonomia. A comunicação é feita com os pais, conforme vemos em 50min3s “eu estabeleço comunicação com os pais, os pais trabalham, disponibilizei o WhatsApp, e aí eu entro em

contato com eles perguntando as dificuldades que eles estão tendo”. Fato este que é reforçado por outra docente em 50min53s “com as turmas menores a gente faz muita mediação com os pais, né”.

Em relação ao laboratório de ensino ou Geometria experimental, uma das docentes comentou que utiliza a pedagogia de Freinet⁶⁶, conforme vemos em 51min28s “tenho trabalhando com outra questão cultural, a realidade deles, então, como antes, é, é..., já trabalhei 11, 12 anos nessa escola, e..., eu já conheço bastante, a comunidade é pequena, então eu uso a pedagogia de Freinet, e a gente faz muitas aulas passeios”, complementando em 51min58s “então, uma, uma, uma, muitas aulas passeios, para conhecer as frutas locais, como é que é..., e algumas atividades foram feitas assim, até no quintal deles mesmo tem”. Porém, a docente mencionou que enfrentou a rejeição de alguns pais com esse tipo de atividades, dizendo em 52min43s “então essa mediação é..., está sendo bem complicada sabe”.

Em relação às condições adequadas de trabalho, uma docente refletiu sobre como o aluno iria conseguir acessar a atividade, conforme vemos em 54min24s “eu acho que é como a gente já comentou né, a gente pensa numa atividade que atenda tanto a plataforma como a atividade impressa”. Reforçado por outra docente que mencionou que a quantidade de laudas influencia seu trabalho, já que a secretaria de educação estipulou cotas de impressão por escola, limitando a preparação das atividades a uma única lauda, conforme vemos em 55min6s “até a questão né, de uma lauda só na atividade impressa é muito complicado, acho que não é adequado, mesmo porque a gente tem que dar uma explicação ali, sobre atividade e isso não comporta”. Outra condição que atrapalha o trabalho do professor são muitas orientações encaminhadas pela secretaria de educação, sendo algumas contraditórias, conforme explicitadas por uma docente em 57min42min “foram muitas orientações, e algumas acaba sendo um pouco contraditória né”.

Além disso, buscamos identificar como as professoras criam e usam a comunidade no processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial em S1E10, S1E11 e S1E12, respectivamente, com as variáveis didáticas sistematização de experiências, reflexão crítica da linguagem matemática e imagem ruim da matemática.

Em relação à sistematização de experiências uma das docentes mencionou que procura trabalhar a realidade local do aluno, visto em 1h1mim50s “e geralmente eu busco trabalhar com

⁶⁶ Muitos dos conceitos e atividades escolares idealizados pelo pedagogo francês Célestin Freinet (1896-1966) se tornaram tão difundidos que há educadores que os utilizam sem nunca ter ouvido falar no autor. É o caso das aulas-passeio (ou estudos de campo), dos cantinhos pedagógicos e da troca de correspondência entre escolas. (FERRARI, 2008)

o contexto, a realidade local”, e quando não conhece os alunos costuma conversar com a professora que deu aula para eles anteriormente ou em algum tipo de registro, informado em 1h2min14s “quando eu chego numa escola que e eu não conheço, que eu não tenho a oportunidade de conversar com a pessoa, eu busco o relatório, eu busco algum registro né, geralmente tem algum registro, ... então eu tento buscar e..., converso com a direção, com alguém responsável que, que tem mais tempo da escola né, que possa me orientar, me esclarecer algumas dúvidas”. Outra professora também utiliza a realidade local, como em 1h3min1s “eu procurei saber na comunidade, pois eu queria trabalhar com a questão do corona vírus, aí eu procurei saber o que eles estavam fazendo, já que as atividades né, de turismo tinha sido suspenso, e lá, a sobrevivência deles é exatamente trabalhando com o turismo, e então, é..., acho como eles mesmo falaram sobre é, é, voltaram a pegar marisco, a pesca bem ali de perto, siri, e , e foi em cima disso que comecei a fazer as atividades com as crianças, eles desenharam, como é que fazem, como fazer né”.

Em relação à reflexão crítica da linguagem matemática, várias professoras confirmaram que devemos usar a linguagem geométrica correta, conforme constatado em uma das falas em 1h5min38s “eu acredito que sim, e a gente sempre deva utilizar a correta”. Todavia, as falas “eu acho” e “eu acredito” indicam possíveis dúvidas em relação ao conhecimento do conteúdo para poderem utilizar essa linguagem correta. Hipótese essa que será explorada na próxima sequência didática.

Em relação à imagem ruim da matemática, uma das docentes mencionou que costuma trabalhar com projetos vinculados à alguma temática, principalmente com o uso de jogos construídos com os alunos, conforme vemos em 1h7min37s “eu costumo, como já falei, trabalhar e desenvolver projetos dentro é..., da temática né, eu trago os conteúdos e desenvolvo jogos né..., na, na, em minha sala tem um cantinho de projetos, de jogos educativos com os conteúdos que eu trabalho, eu desenvolvo os jogos com as crianças é, trabalhando aquele conteúdo, então eles acham prazerosos porque, quando eles, e eles que é, no coletivo, eles que pensam nas regras, eles que elaboram né, eu vou ajudando, eu vou investigando, eles vão falando, e ao final todos sabem como brinca, um ajuda o outro, e eu não tenho muitos problemas, eu consigo é, controlar a indisciplina, eu consigo fazer a recuperação paralela [...]”. Complementando que para o ensino à distância, a docente costuma usar vídeos de jogos, músicas e brincadeiras para tentar levar essa ludicidade, conforme vemos em 1h9min34s “na distância, eu tô, tô colocando vídeos é, de jogos, músicas e brincadeiras, no início e depois da explicação posterior a minha atividade”. Sendo reforçada por outra professora que costuma trabalhar com a realidade da criança e de forma lúdica, checados em 1h9min55s “eu tenho

trabalhado também né, a partir da realidade né, de projetos a partir das realidades dos alunos de forma lúdica, eu acho que os jogos é, são muitos bons para trabalhar com a matemática”. Esta última docente comentou que o trabalho significativo também é importante para tornar a matemática prazerosa, conforme vemos em 1h10min35s “e também de forma significativa, tinha que ter algum significado, eles tinham que ver, né, que no dia a dia existe a matemática, em tudo né, então eu trabalhava muito a partir da realidade deles”.

Por fim, para finalizar essa sequência didática buscamos identificar a forma como os conteúdos da Geometria espacial elementar são flexibilizados pelos professores e as diretrizes curriculares utilizadas por eles em S1E13 e S1E14, respectivamente com as variáveis didáticas flexibilidade do conteúdo e diretrizes curriculares para o ensino da matemática.

Em relação a flexibilidade do conteúdo, uma das docentes relacionou-a com a interdisciplinaridade, conforme vemos em 1h12min41s “é a questão da interdisciplinaridade né, é com o que venho trabalhando, por exemplo eu pego um texto, ou uma música, ou uma brincadeira que é, é, o, o recurso principal, e depois eu venho com as áreas, eu trabalho, ..., por isso que eu falo que tenho dificuldade de fazer uma lauda, porque eu busco trabalhar é, questões que atendam todas as áreas do conhecimento”.

Em relação às diretrizes curriculares para o ensino da matemática, duas docentes comentaram que têm se orientado pela BNCC por ser o documento mais atual, conforme vemos em 1h16min23s “eu procuro também, procurar a BNCC..., né, que é, o, o que a gente tem né, a diretriz que nós temos atualmente”.

Para melhor compreensão da variável global referente ao conhecimento do contexto e da análise de cada uma de suas variáveis didáticas identificadas e exploradas nesta pesquisa, temos no quadro 35 uma síntese de como os professores mobilizam-nas em sua prática.

Quadro 35 - Mobilização do conhecimento do contexto na prática dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

Organização das aulas em função do espaço e tempo	- Parceria com os pais na busca da autonomia do aluno; - Preferência para atividades curtas.
Flexibilidade de conteúdo	- Relacionar com a interdisciplinaridade.
Importância das regras e procedimentos	- Utiliza de um texto explicativo com os alunos mais autônomos, com o passo a passo do que o aluno deve fazer na atividade, e com os alunos menos autônomos, a comunicação é feita com os pais; - Disponibiliza seu número pessoal de WhatsApp para que os alunos possam tirar dúvidas; - Mediação com os pais sobre as dificuldades enfrentadas pelo aluno.
Condições adequadas de trabalho	- Tem a preocupação em como o aluno vai conseguir acessar a atividade; - A limitação da quantidade de laudas por atividade atrapalha o trabalho; - O excesso de orientações, algumas delas contraditórias, atrapalham o trabalho.
Materiais necessários às atividades	- Usam, gravuras, dobraduras e canudos; - Usam os kits oferecidos pela prefeitura;

	<ul style="list-style-type: none"> - Usam os materiais oferecidos pelo governo federal; - Usam materiais reutilizados, ou reciclados.
Sistematização de experiências	<ul style="list-style-type: none"> - Procuram trabalhar com a realidade local do aluno; - Conversam com professores que já deram aula para a turma anteriormente, com a direção ou algum profissional mais antigo da escola para saber mais sobre os alunos; - Leem os registros ou relatórios dos alunos ou da turma nova;
Organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças	<ul style="list-style-type: none"> - Planejamento segue a hipótese de os alunos estarem fazendo as atividades.
Laboratório de ensino ou Geometria experimental	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizam a pedagogia de Freinet; - Trabalham com a questão cultural e a realidade dos alunos; - Realizam aulas passeios e mediação com os pais sobre críticas com esse tipo de aula.
Reflexão crítica da linguagem matemática	<ul style="list-style-type: none"> - Procuram usar a linguagem geométrica correta e sabem da sua importância.
Concepção e tendência em educação matemática	<ul style="list-style-type: none"> - Dificuldades do uso das tecnologias digitais pelos docentes com maior tempo em sala de aula; - Limitação para os tipos de atividades que poderiam estar sendo propostas nas aulas remotas; - Preocupação em como o aluno vai acessar a tarefa e interagir com o professor; - Falta de experiência em docência na modalidade de ensino à distância; - Preferência para o ensino presencial.
Diretrizes curriculares para o ensino da matemática	<ul style="list-style-type: none"> - Procuram se orientar pela BNCC.
Imagem ruim da matemática	<ul style="list-style-type: none"> - Trabalham com projetos e construção de jogos com os alunos; - Usam vídeos, jogos, músicas e brincadeiras para tentar levar a ludicidade no ensino à distância; - Trabalham com atividades voltada para a realidade da criança e de forma lúdica. - Trabalham com atividade de forma significativa.

Fonte: Construção nossa

Diante disso, percebemos que os professores mobilizam um conhecimento do contexto de forma ampla, com preocupação no aluno e em seu processo de aprendizagem. Todavia, nesta primeira *Live*, ainda falta investigar S2 referente conhecimento específico do conteúdo, na qual iremos analisar a seguir.

Assim, buscamos identificar e constatar as variáveis didáticas do conhecimento específico do conteúdo de Geometria espacial referenciados pelos professores em S2E1, respectivamente com as variáveis didáticas articulação horizontal, figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide), nomenclatura, corpos redondos, características (vértices, arestas e faces) e planificação. Em S2E1 as professoras tiveram que escrever até 10 palavras referentes aos conteúdos de Geometria espacial nos anos iniciais do EF que elas deveriam explorar, e o resultado foi expresso por uma nuvem de palavras criadas pelo Mentimeter, tendo seu resultado observado na figura 23.

Figura 23 - Nuvem de palavras sobre os conteúdos de Geometria espacial elementar mencionadas pelas professoras na Live 1



Fonte: Resultado de S2E1

Percebemos na observação da figura 23, que há uma confusão em relação às imagens mentais do conteúdo de Geometria espacial elementar e que esse objeto do conhecimento ainda não foi totalmente assimilado por essas professoras. Fato este, que a unidade temática da Geometria foi referenciada no estudo de posições e deslocamento como exemplo “localização”, “lateralidade”, no estudo das formas e relações entre os elementos das figuras geométricas espaciais como exemplo “sólidos”, prismas”, no estudo das transformações geométricas como exemplo “ângulos”, “superfície”, e em nos outros campos da matemática como exemplo “fórmulas”, “massa”.

Além disso, quando confrontado na *live* 1, após mostrar a nuvem de palavras de S2E1, sobre a diferença entre figuras espaciais de sólidos geométricos em 1h25min45s tivemos um momento de silêncio indicando possíveis dúvidas, e na sequência uma das professoras questionou em 1h26min3s “essa figura espacial seria figura plana?”, outra professora respondeu em “1h26min12s “os sólidos é tridimensional, seria isso?”. Essas indagações mostram uma carência no registro semiótico da Geometria espacial elementar na atividade cognitiva referente a formação (seleção de signos) expressado pela primeira docente, e no tratamento (características visuais) expressado pela segunda docente.

Diante disso, em relação às figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide), podemos observar na figura 23 que nem as esferas e nem os paralelepípedos foram mencionados, possivelmente pela falta de compreensão maior em relação a esses objetos de estudo. Em relação aos corpos redondos, apenas os cilindros e cones foram referenciados, e mesmo assim, com pouco destaque.

Somado a isso, em S2E2 buscamos identificar as possíveis lacunas ou concepções erradas de um conceito, e percebemos, ao mostrar a imagem da foto de duas maquetes construídas por figuras espaciais, que as professoras reconheceram as figuras espaciais utilizadas, mostrando carência apenas na visualização da esfera. Esse fato ocorreu no questionamento que levantamos em 1h31min59s se havia esfera na maquete, tendo como resultado que uma das professoras respondeu que sim e as demais alegaram não saber.

Em relação à nomenclatura, percebemos na figura 23 que algumas palavras como “ponto” e “vértices” foram referenciados, o que pode indicar o uso de ambas para designar a mesma coisa. Porém, ao explicar a nomenclatura correta usada na Geometria espacial e questionar em 1h27min35s “numa figura espacial não são pontos, alguém sabe o nome correto?”, tivemos a resposta desejada: vértices.

Todavia, em S2E3 quando questionadas se a semiesfera que aparecia na maquete era bola, círculo ou esfera, para assim tentar saber se as professoras reconhecem e avaliam a resposta errada do aluno, todas as professoras responderam esferas, no entanto, mostrando dúvidas em sua resposta, conforme vemos no questionamento falado baixo de uma docente em 1h38min31 “é uma esfera?”. Quando perguntei se apresentavam dúvidas em 1h38min35s uma professora mostrou não ser a esfera inteira, mas não soube expressar o nome da figura, conforme vemos em 1h38min43 “eu estou vendo uma esfera, mas não uma esfera inteira né”, sendo apoiada pelas demais. Quando questionei em 1h39min3s como poderia chamar a figura, uma docente respondeu “a metade da esfera”. Desta forma, podemos dizer que, saber a linguagem geométrica correta das figuras espaciais e suas características auxilia o professor no reconhecimento de uma resposta errada dada por um aluno.

Em relação às características (vértices, arestas e faces) das figuras espaciais, na figura 23, obtivemos das professoras que as arestas não tiveram o mesmo destaque que os vértices e faces, talvez pela confusão no uso da linguagem de arestas como lados. Para reforçar isso, em S2E4, buscamos identificar as possíveis lacunas do conteúdo, principalmente voltado ao nome e suas características.

Diante disso, percebemos que as professoras tiveram dificuldades em explicitar as características das figuras, constantemente sendo provocadas pelo formador, e assim, responderam o nome do cubo e algumas de suas características em 1h41min12s “as faces iguais”, “seis faces iguais”, “8 vértices”, o nome do paralelepípedo e algumas de suas características em 1h42min56s “o cubo tem todas as faces congruentes e o paralelepípedo não”, “faces planas”, “retangular” se referindo a face, o nome da esfera e algumas de suas

características em 1h44min19s “são redondas”, o nome do cilindro e algumas de suas características em 1h44min57s “o cilindro têm duas faces planas”, “bases circulares”.

Apesar disto, quando foi mostrado os cones, seu nome foi dado corretamente, mas suas características não foram explicadas, conforme vemos em 1h45min37s “tem características cilíndricas”, “uma base maior e outra base menor”, “as bases são circulares”. Quando questionadas na sequência se os cones têm bases circulares, tivemos uma resposta em 1h45min46s “não necessariamente”, “tem uma base, que pode ter outra base menor ou um vértice”. Para tentar entender o porquê desta resposta, vamos observar a imagem que foi mostrada às professoras na figura 24.

Figura 24 - Objetos do dia a dia em formato de cone.



Fonte: 5ª imagem em S1E4

Interrogadas em 1h46min6s “o que você quis dizer com isso?”, não tive retorno. Quando mostrei que tanto na figura apresentada do cone de trânsito e do cata-vento a imagem vai se afunilando, e que sua parte final não é uma ponta, questionei novamente em 1h46min27s “o final dele não é uma ponta, acho que é isso que você está se referindo, correto?”, voltando não ter retorno. Comentei apontando com o mouse que a parte final destas figuras é outra base menor que também é um círculo, foi quando uma das docentes em 1h46min37s mencionou “isso”. Neste caso, comentei que esses dois cones são troncos de cone, mas que não haveria problemas se o aluno nessa fase escolar chamar apenas de cone, tendo como resposta de uma docente em 1h47min34s “ok”.

Ao apresentar os primas por meio de uma imagem, perguntei o nome da figura e após um tempo em silêncio, o que indica situação de dúvida, foi reforçado pela fala de uma docente em 1h48min8s “ai Jesus”, e uns segundos depois, outra docente disse que são prismas. Quando

perguntei em 1h48min41s “que características eles têm?”, mais uma vez, prevaleceu o silêncio, indicando dúvidas. Foi quando interfeiri, comentando que são figuras em que suas faces são todas... (deixando as professoras responderem), recebendo como retorno em 1h49min05s “planas”, “paralelas”. Após isso, o também perguntei se o formato de suas faces são todas iguais? Tendo como resposta em 1h49min15s “são repetidas”, “são oito medidas”. Como percebi a dificuldade da caracterização e uso dos nomes geométricos corretos, expliquei as características dos prismas usando as figuras apresentadas.

Por fim, foi mostrado as imagens de diferentes pirâmides, sendo atribuído nome pelas professoras, mas quando em 1h52min7s indagadas “quais as características das pirâmides”, veio um longo silêncio, indicando dúvidas. Uma vez mais, foi-se necessário a intervenção do formador, em 1h52min37s direcionando o mouse em uma das faces laterais e perguntando qual o seu formato, recebendo a resposta desejada. Fazendo o mesmo em todas as pirâmides desejadas, e ao perguntar em 1h53min15s qual o formato da base em cada pirâmide, obtive também as respostas pretendidas.

A figura 23 indica possibilidades da articulação horizontal com a menção de “localização”, “sólidos” e “figuras planas”. Todavia, percebemos que essa variável didática já havia sido referenciada na prática do conhecimento do contexto com a variável didática sistematização de experiências por meio de trabalho com a realidade do aluno e na variável didática flexibilidade de conteúdo por meio do trabalho interdisciplinar.

A forma como são abordadas as figuras espaciais foi especificado por uma docente em 1h59min7s “de forma geral, a gente trabalha durante a apresentação das formas geométricas, a gente apresenta todos de uma vez”. Quando comentei que algumas escolas de Angra dos Reis costumam trabalhar as figuras planas antes das espaciais, e segundo os documentos políticos e livros didáticos analisados, a exploração das figuras espaciais deve ser feita antes das planas, outra docente questionou em 2h0min36s “a maioria que, dos cursos normais que eu tenho visto, ensinam os professores a trabalharem assim, as figuras planas primeiro”. Indagada em 2h0min47s “mas você já deve ter estudado em pedagogia que, geralmente é do todo para parte”, recebendo a resposta em 2h0min52s “sim, é, é...”.

Uma preocupação se dá em relação a planificação, não sendo explicitada como conteúdo de geometria espacial na figura 23, e não sendo manifestada em S2E2 e S2E3 para a construção das figuras das maquetes, todavia, seu uso foi esclarecido em S1E5 como gravuras, ou seja, moldes da planificação das figuras espaciais para construí-lo com os alunos, e por meio do uso do origami.

Desta forma, para melhor compreensão da variável global referente ao conhecimento específico do conteúdo, e da análise de cada uma de suas variáveis didáticas identificadas e exploradas na pesquisa, temos no quadro 36 uma síntese de como os professores mobilizam-nos em sua prática.

Quadro 36 - Mobilização na prática do conhecimento específico do conteúdo de Geometria espacial elementar dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

Articulação horizontal	<ul style="list-style-type: none"> - Realizam a sistematização de experiências por meio de trabalho com a realidade do aluno; - Realizam a flexibilidade de conteúdo por meio do trabalho interdisciplinar.
Formas/figuras geométricas espaciais	<ul style="list-style-type: none"> - Exploram muitas vezes as figuras planas antes das espaciais; - Abordam todas as figuras espaciais ao mesmo tempo.
Nomenclatura	<ul style="list-style-type: none"> - Procuram usar a linguagem geométrica adequada; - Em alguns casos usam a linguagem geométrica inadequada, sem saber que está cometendo o erro, pela falta de um conhecimento maior em relação ao conteúdo;
Corpos redondos	<ul style="list-style-type: none"> - São pouco referenciados, tendo cilindro e cones como destaques; - Apresentam dificuldade na visualização das esferas e semiesferas em diferentes representações.
Características	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentam carência no registro semiótico da Geometria espacial elementar na atividade cognitiva referente à formação (seleção de signos) e no tratamento (informações, significados, características visuais) ao observar figuras espaciais. - Identificam no cubo: nome, seis faces congruentes e oito vértices. - Identificam no paralelepípedo: nome e faces retangulares; - Identificam na esfera: nome e que apresenta parte arredondada; - Identificam no cilindro: nome e duas faces planas e circulares; - Identificam no cone: nome; - Identificam nos prismas: faces planas e paralelas; - Identificam na pirâmide: reconhecimento do formato das faces laterais e base.
Planificação	<ul style="list-style-type: none"> - Usam os moldes das figuras espaciais; - Usam o origami; - Usam a abertura de embalagens*.

* A ser mencionado em S4E3 em 51min19s

Fonte: Construção nossa

Diante disto, percebemos que as professoras apresentaram uma carência em relação ao conhecimento específico do conteúdo de Geometria espacial elementar, em relação à sequência didática, ao uso de algumas linguagens geométricas, a falta de visualização, somada com a deficiência no conteúdo, provocando dificuldades na caracterização das figuras espaciais. Para maiores esclarecimentos, vamos analisar no próximo item o conhecimento pedagógico e o conhecimento tecnológico.

7.2. Análise a posteriori da live 2

Por meio dos Registros das Observações feitas na *live 2* (Apêndice 13) registradas logo após sua finalização, percebemos que as professoras ingressaram na *live* com mais facilidade, no horário combinado ou com poucos minutos de atraso, cumprimentando a todos e desligando

as câmeras e áudios. Ademais, uma das professoras iniciou a formação usando o celular por meio dos dados móveis, pois alegou que estava sem energia onde mora, podendo ter dificuldades na participação, poucos minutos depois quando a energia foi restaurada, a professora saiu e retornou à *live*, sendo que desta vez usando o notebook e o *Wifi*.

Percebi que as docentes estavam menos espontâneas no diálogo com o grupo, nos questionamentos e, assim como ocorreu na *live* anterior, não houve acesso à ferramenta do Mentimeter pelo *QR code*, além do que, por conta da dificuldade no acesso ao Mentimeter por meio do link mais a digitação do código disponibilizados no chat, passei a utilizar esta ferramenta apenas pelo link direto e em alguns casos, até a substituição da enquete no Mentimeter pelo discurso oral com o grupo.

Assim sendo, nesta segunda *live*, investigamos S3 referente ao conhecimento pedagógico matemático, e S4 referente conhecimento tecnológico, ambos divididos em quatro enquetes.

Em S3E1 buscamos constatar as variáveis didáticas letramento matemático e investigação (exploração), por meio do questionamento: Escreva até 10 palavras referentes aos conhecimentos pedagógicos de Geometria espacial nos anos iniciais do EF. Houve uma demora na resposta das docentes, por ser uma questão muito ampla, conforme explicitou uma professora em 5min30s “bem ampla”. Para colaborar com o diálogo, comentei que o ponto central nessa questão é o aluno, os procedimentos metodológicos, recebendo a resposta oral de uma docente em 7min12s “hã!, eu acho que assim, é importante a gente..., ter um conhecimento do contexto do aluno, né, saber que o aluno já sabe em relação a isso, pra poder partir do conhecimento inicial que o aluno já tem”. Como na *live* não havia obtido até então a resposta pelo Mentimeter, prossegui com a formação, porém, verifiquei após ao término da *Live* que uma das docentes havia respondido posteriormente essa primeira enquete, o resultado está exposto na figura 25 e expresso por uma nuvem de palavras criadas pelo Mentimeter.

Figura 25 - Nuvem de palavras sobre o conhecimento pedagógico matemático exposto por uma docente



Fonte: Resultado de S3E1

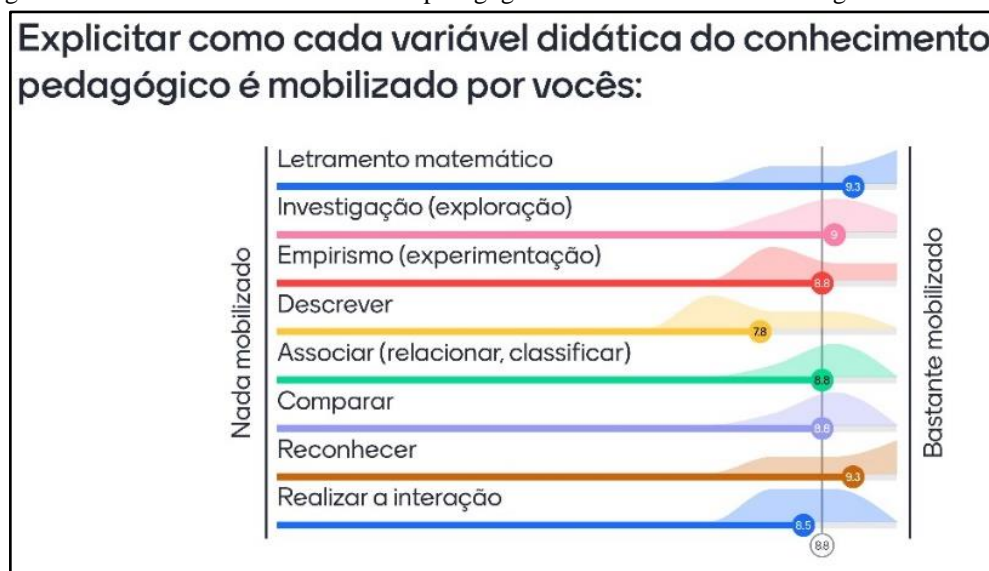
Podemos observar na figura 25, algumas indicações similares às variáveis didáticas do conhecimento pedagógico matemático averiguado na pesquisa: a palavra “experimento”

vinculada à variável empirismo (experimentação), a palavra “criação de hipótese” vinculada à variável investigação (exploração), a palavra “observação” vinculada às variáveis comparação e reconhecimento, e por fim, a palavra “registro” vinculada com as atividades envolvendo diversas representações e subordinada à variável associar (relacionar, classificar).

Em S3E2, buscamos identificar oralmente a compreensão significativa sobre figuras espaciais e a postura de um professor ativo, por meio do questionamento exposto no slide: quais procedimentos pedagógicos você utilizaria em uma turma do 3º ano do EF, ao abordar a seguinte habilidade: Associar figuras geométricas espaciais a objetos do mundo físico e nomear essas figuras. Como nenhuma professora explicitou sua opinião, passei para S3E3 para informar cada uma das variáveis didáticas do conhecimento pedagógico identificadas na pesquisa, e assim tentar reconhecer como cada variável didática é mobilizada por elas.

Ao explicar sobre o que se trata cada variável didática do conhecimento pedagógico matemático, tivemos apenas um retorno, durante a explicação da variável comparar, via chat de uma docente que digitou “dependendo da localidade, através da aula passeio, observações, experimentos”. Após esse momento, buscamos ainda em S3E3 via Mentimeter, identificar as possíveis lacunas sobre o conhecimento pedagógico matemático de Geometria espacial. A resposta desta enquete se encontra na figura 26.

Figura 26 - Média sobre o conhecimento pedagógico matemático mobilizado segundo as docentes



Fonte: Resultado de S3E3

O bom resultado das médias foi explicitado por uma docente por ser um conhecimento que geralmente também é abordado em outras áreas, conforme vemos em 28min52s “eu acho que essas coisas, são coisas que a gente acaba fazendo em todas as aulas né, não só na matemática, a gente está sempre, buscando comparar, trazer para a realidade do aluno, comparar

com coisas do dia a dia, das vivências que a gente tem ali na sala de aula, né, a parte da descrição ..., principalmente na pré-escola, a descrição oral a gente está sempre trabalhando também, então eu acho que isso é uma coisa que permeia todas as áreas do conhecimento e não somente da matemática”.

Após esses esclarecimentos, comuniquei às docentes sobre as cinco fases do modelo de van Hiele como sugestões para colaborar com a organização do ensino da Geometria das suas tarefas a serem propostas. Expliquei cada uma das fases e como poderíamos usar na prática. Ao perguntar ao final, se havia ficado com alguma dúvida, não obtive resposta, talvez pelo fato de este conhecimento já está incorporado na prática, pelas docentes.

Assim, aproveitando o que foi mencionado em S1, S2, e principalmente em S3, buscamos uma síntese de como as professoras mobilizam em sua prática cada variável referente ao conhecimento pedagógico matemático, exposto no quadro 37.

Quadro 37 - Mobilização na prática do conhecimento pedagógico matemático de Geometria espacial elementar dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

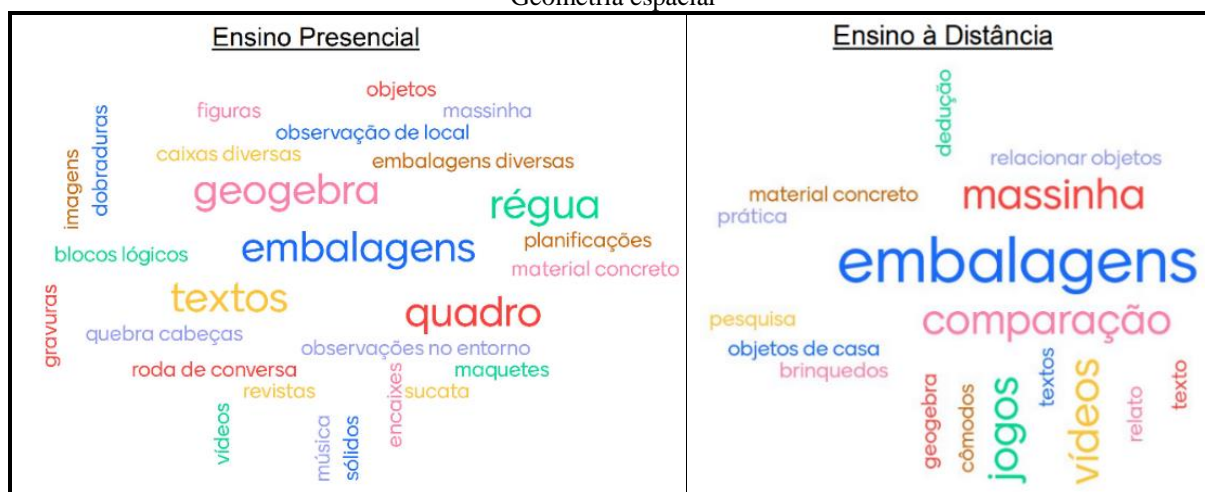
Letramento matemático	- Identificam os conhecimentos matemáticos dos alunos; - Realizam a sistematização de experiências por meio de trabalho com a realidade do aluno.
Investigação (exploração)	- Utilizam da suposição de hipóteses.
Empirismo (experimentação)	- Realizam experimento.
Descrver	- Utilizam da descrição oral.
Associar (relacionar, classificar)	- Usam atividades envolvendo diversas representações de um registro.
Comparar	- Realizam as observações objetos do mundo físico; - Realizam aula passeio.
Reconhecer	- Realizam a observação de figuras e objetos geométricos.
Interação	- Trabalham em grupos; - Usam materiais concretos, ou jogos.

Fonte: Construção nossa

Percebemos que diversas variáveis do conhecimento pedagógico matemático se relacionam, e que foram constatadas pelas docentes como algo bastante usado em suas práticas, não só na matemática, mas nas outras áreas do saber. Além disso, várias dessas práticas também foram referenciadas na análise do conhecimento do contexto. Todavia, nesta segunda *live*, ainda falta investigar S4 referente ao conhecimento tecnológico, a qual iremos analisar a seguir.

Assim, em S4E1 e S4E2, buscamos identificar os recursos, ou seja, as tecnologias usadas pelas docentes no processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial, respectivamente no ensino presencial e no ensino à distância. O resultado se encontra categorizado em forma de nuvens de palavras criados pelo Mentimeter, conforme vemos na figura 27.

Figura 27 - Nuvem de palavras sobre os recursos mobilizado pelas docente no ensino e aprendizagem da Geometria espacial



Fonte: Resultado de S4E1 e S4E2

Percebemos que as professoras não se atentaram ao uso específico dos recursos à Geometria espacial, conforme verificamos na resposta de uma docente ao questionar como utilizam os blocos lógicos em 45min22s “só que os blocos lógicos são geralmente usados nas figuras planas né, você pediu para as espaciais, né, geometria espacial”. Interroguei se a docente os utiliza para a geometria plana ou espacial, recebendo a resposta em 45min36s “para as figuras planas, depois que eu vi que a pergunta era para geometria espacial, rsss”.

Porém, segundo Barguil (2016, p. 235) “observa-se facilmente, portanto, um grave equívoco conceitual no que se refere a nomear o atributo forma das peças dos Blocos Lógicos como se elas fossem bidimensionais, uma vez que são tridimensionais”. O autor ainda salienta (2016, p. 237) “que as peças lógicas foram criadas por Dienes para, conforme a nominata do recurso indica, ensinar lógica para as crianças e não para lecionar figuras planas!”.

Diante disso, fui lendo cada um dos recursos que apareceram na figura 27 referentes ao ensino presencial, questionando alguns dos resultados para esclarecer melhor seu uso na prática.

Desta forma, em relação à música, uma das docentes esclareceu em 48min34s “eu respondi música, Julio, por conta da introdução né, primeiro, é..., como eu comentei ontem, eu faço uma introdução ..., aí eu uso a música, né, aí eu uso o texto da música, exploro o texto para depois fazer a atividade”. Elogiei o trabalho da professora e perguntei se ela utilizava paródia ou alguma música específica, recebendo a resposta em 49min42s “então, eu busquei músicas é ..., relacionadas ao tema, por exemplo figuras planas, aí eu busquei lá no Youtuber, e tinha algumas musiquinhas é, infantis, que falava sobre figuras planas, e no segundo ano eu pesquisei sobre é ..., eu fiz, eu até fiz um poeminha falando sobre os sólidos geométricos, e fiz uma atividade em cima desse poema, mas eu não sei se está correto”. Ao final da formação, a docente

quis explicar melhor porque ela escreveu música, esclarecendo em 1h32min23s “eu escrevi música, mas na verdade eu coloquei lá na, na, na tarefa, foi uma cantiga. Então uma cantiga eu vejo como, é, um ..., uma parte específica da música, a música é o todo, é a melodia, foi por isso que eu escrevi música”.

Continuando a discussão sobre a figura 27, temos em relação à sucata, que a professora quis se referir ao uso de objetos do mundo físico (embalagens), conforme vemos em 51min19s “eu pego eu peço para eles levarem caixas diversas, qualquer material, assim, que a gente tenha ali, que possa ser reutilizado. Quando eles levam caixinhas de medicamentos, de..., de pastas de dentes, eu sempre propunha que eles abram essa caixinha né, para eles verem como seria essa planificação do objeto”.

Em relação à dobraduras, questionei se sabiam a diferença entre origami e dobraduras, ficando todas em silêncio na *live*, até receber a resposta de uma docente em 52min57s “eu entendo que é ..., dobradura é a ação de dobrar o papel, e o origami é a técnica, não sei se seria essa diferença”. Informei que a gente pode fazer dobradura em qualquer objeto maleável, como um pano, sendo contestado pela docente em 53min15s “é, mas no caso a gente utiliza mais o papel né”. Em seguida, informei a diferença do origami e dobradura, aproveitando para esclarecer também sobre outras técnicas do origami, como o Kirigami (origami com uso de recortes e colagem) e origami modular (peças de encaixes para formar a figura), sendo este último possivelmente expressado na figura 27 com a palavra “encaixes”.

No que diz respeito ao quebra cabeças, questionei como esse recurso é usado pela docente que o explicitou, para verificar se não estava se referindo a figuras planas, recebendo a resposta em 55min47s “Mas assim, eu guardo embalagens, eu, eu fiz já algumas vezes, é..., jogo de encaixes só com, com embalagens é, espaciais né..., com essas, vamos assim sólidos né. Eu peguei uma caixa maior né, embrulhei tudo com papel bonitinho, e as caixinhas também de cores diferenciadas, e fui montando é..., dentro de uma caixa, de forma que preenchesse todo esse..., o interior da caixa, e aí propus para a criança, para eles é, para eles estarem é, fazer, conseguir colocar todas aquelas peças, é..., mudando a posição dos, das, das, dos sólidos né. Essa foi a proposta, é um quebra cabeça que eu fiz, dentro de uma caixa maior com é..., com esses sólidos, com essas caixas diversas”.

Na sequência, fui lendo cada um dos recursos que apareceram na figura 27 referentes ao ensino à distância, questionando alguns dos resultados para esclarecer melhor seu uso na prática.

À vista disto, em relação a jogos, uma das professoras esclareceu em 1h5min41s “porque aí ele ..., vai, é, que, eu tinha feito essa tarefa que ele iria comparar as peças do dominó,

que está relacionada à quantificação, à comparação, de, de ..., a espessura é..., também eles iam comparar, é..., vê se eles, conseguiam confeccionar com papelão, né, e se alguém tivesse o material, o jogo, em casa, comprado em loja, pra comparar a espessura do, do..., da peça do dominó comprado com a peça, com, com a espessura do, do dominó confeccionado em casa no papelão no papel cartão”. Perguntei se a professora também criava outros jogos com os alunos, tendo como resposta em 1h6min57s “inclusive, eu fiz, eu..., no ano passado eu até criei um, um..., eu aproveitei ainda a, um isopor que veio na impressora, criei uma roleta, eles criaram um texto instrucional, uma roleta das operações, que aí podem ser trabalhadas, exploradas é..., as quatro operações, e..., trabalho com material concreto também, com tampinhas, com..., para trabalhar a coordenação motora, dar para trabalhar várias coisas”.

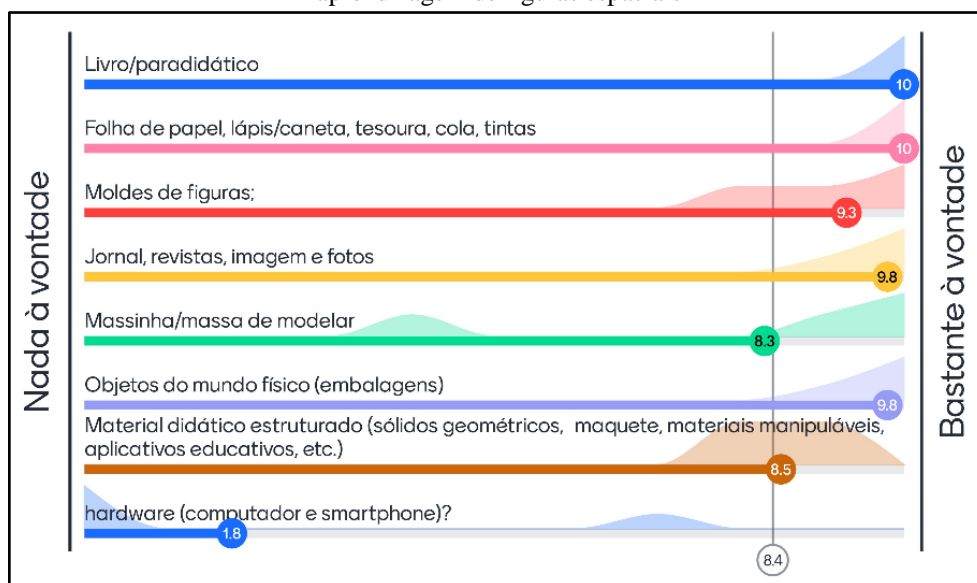
Em relação ao GeoGebra, mencionado tanto no ensino presencial quanto no ensino à distância, foi exposto pela professora como um recurso que ela sabe que existe, mas que ela não sabe utilizá-lo, conforme vemos em 1h7min43s “eu sei que tem recursos que dá pra utilizar, mas eu não sei utilizar esses recursos, eu espero aprender né, eu vi que tinha uma *Live* que você postou na sala de aula falando sobre o GeoGebra, eu acho que dá para usar, rsss, eu usei ele muito para gráficos, na, quando eu fazia matemática, não cheguei a concluir a formação em matemática não, mas eu acredito que dá pra usar também com as crianças menores”.

Em relação aos brinquedos, a sua utilização está ligada à exploração das formas que constituem as partes do brinquedo do próprio aluno, conforme vemos na fala de uma docente em 1h13min38s “é, pra explorar mesmo, né, os próprios brinquedos, as, ..., as formas né, identificar essas, esses sólidos ..., no próprio brinquedo”.

Por fim, percebemos na figura 27 que alguns recursos são mais explorados no ensino presencial, como imagens, blocos lógicos, quadro, régua, maquete, revistas, sólidos geométricos, quebra cabeça enquanto outros são mais explorados para o ensino a distância, como massinha e brinquedos do aluno. Alguns recursos são usados nas duas modalidades de ensino, como o uso das embalagens que foi umas das tecnologias mais referenciada. Vale ressaltar que as outras palavras explicitadas na figura 27 não se enquadram como tecnologia, e sim, como outro componente do conhecimento, ou estratégia usada com determinado recurso.

Desta maneira, para saber o quão à vontade as professoras se sentem ao utilizar alguns dos recursos no ensino e aprendizagem da Geometria espacial, foi pedido para que as docentes assinalassem em S4E3 uma escala que vai de 0 a 10, na qual 0 representa nada à vontade e 10 representa bastante à vontade. O resultado desta enquete se encontra na figura 28.

Figura 28 - Frequência de certos recursos serem pouco ou muito utilizados pelos professores no ensino e aprendizagem de figuras espaciais



Fonte: Resultado de S4E3

Percebemos que o livro didático/paradidático, folhas de papel, lápis/caneta, tesoura, cola, tintas, moldes de figuras, jornal, revistas, imagem, fotos, massinha/massa de modelar, objetos do mundo físico, e os materiais didáticos estruturados são bastantes mobilizados segundo as docentes. Confiei, como hipótese, que a massa de modelar pudesse ser pouco mobilizada por acreditar faltar nas escolas, porém, uma das docentes esclareceu em 1h20min51s, “mas a gente fabrica com os alunos, rsss”. Quando questionei que já tentei fazer nos anos finais do EF e não deu muito certo, novamente a docente elucidou em 1h21min8s “mas no pré a gente tem muita prática na..., pra fazer a massinha, sempre dar certo”.

Em relação ao uso dos hardwares, as docentes relataram não se sentir à vontade na utilização como recurso no processo de ensino e aprendizagem. Como justificativa temos o relato de uma docente em 1h22min39s “uma dificuldade que ..., de acessibilidade, e... também, atualmente, eu tenho muitos alunos que os pais nem tem telefone ..., porque na verdade, eles vivem não tem acesso, então assim ..., eu..., eu nem, eu coloquei, eu deixei zero, porque é, tendo em vista a realidade ..., atual e a realidade da comunidade que eu trabalho”. Questionei se a professora tinha dificuldade no uso do computador ou smartphone, tendo como resposta em 1h23min18s, “não,, eu não”, e complementou 1h23min33s “é assim, eu uso, mas eu também tenho, eu me limito, porque eu acho assim, aqui em Angra é ..., nem todas as escolas têm acesso à internet, e quando tem o sinal é ruim, então quando eu planejo uma aula, como já aconteceu

quando eu trabalhei no Frade⁶⁷, eu planejei uma aula que eu precisava usar, é, é, uma TV, e, e, não ter sinal, e acabei improvisando porque não tinha sinal”.

Somado a isso, outra docente que apresentou dificuldades no uso dos recursos tecnológicos digitais na primeira *live* relatou vontade de aprender a usá-los em sua prática, porém sabe que boa parte dos seus alunos não teriam acesso, conforme vemos em 1h35min17s “eu quanto professora gostaria muito de ..., é ..., de aprender a usar recursos mais tecnológicos né, é ..., por exemplo para usar no ensino remoto, porém, eu atualmente na realidade em que a gente vive, pelo menos na localidade que eu atuo, as crianças não têm acesso, não vai chegar de imediato neles, né”. A docente relatou também que no ensino à distância ela disponibiliza os links dos vídeos das explicações das atividades via WhatsApp para que as crianças possam ter acesso, conforme vemos em 1h36min15s “eu disponibilizo o link do vídeo, de todas as aulas que eu coloco o vídeo, eu disponibilizo no WhatsApp para que eles possam ter mais facilidade de entrar, então assim, os vídeos que eu uso são mais explicativos, na verdade né”.

Diante de tudo que foi exposto nas duas primeiras *lives*, buscamos no quadro 38 realizar uma síntese de como as professoras mobilizam em sua prática cada variável referente ao conhecimento tecnológico.

Quadro 38 - Mobilização na prática do conhecimento tecnológico de Geometria espacial elementar dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

Tecnologias tradicionais (livro/paradidático, folha de papel, lápis/caneta, quadro, tesoura, cola, massinha/massa de modelar, maquete, moldes, jornal, revistas, tintas)	<ul style="list-style-type: none"> - Exploram o texto de músicas, poemas e cantigas; - Usam o origami; - Usam os moldes da planificação das figuras espaciais e gravuras *; - Constroem jogos; - Fabricam massa de modelar com farinha de trigo.
Novas ferramentas (canudos e palitos)	<ul style="list-style-type: none"> - Constroem as estruturas dos poliedros ** e em alguns casos, principalmente com os alunos de ilha, substituem os palitos por gravetos.
Objetos do mundo físico (embalagens)	<ul style="list-style-type: none"> - Usam diversos tipos de caixas de embalagens; - Usam quebra cabeça com embalagens ou jogos; - Usam brinquedos do próprio aluno.
Materiais didáticos estruturados (sólidos geométricos)	<ul style="list-style-type: none"> - Usam principalmente no ensino presencial por meio de atividades envolvendo paródias/músicas ou por meio de jogos.
Imagem/foto	<ul style="list-style-type: none"> - Usam as imagens extraídas da internet, livros, jornais, revistas ***; - Usam as fotografias tiradas pelo celular nas aulas passeio.
Hardware (computador e smartphone)	<ul style="list-style-type: none"> - Usam o Youtube e pesquisam na internet; - Têm ciência que boa parte dos alunos não teriam acesso; - Gostariam de aprender a usá-los em sua prática; - Usam WhatsApp para ter comunicação com os alunos e oferecer link da explicação das atividades propostas;

* A ser referenciado em S6

** A ser referenciado em S7 e S8

*** A ser referenciado em S7

Fonte: Construção nossa

⁶⁷ Bairro de Angra dos Reis localizado na parte continental no distrito de Cunhambebe.

Percebemos que as variáveis do conhecimento tecnológico foram explicitadas vinculando-as com os outros dois componentes do conhecimento e com a interseção entre eles, sendo que esses esclarecimentos foram investigados e analisados nas *lives* posteriores, como veremos a seguir.

7.3. Análise a posteriori da live 3

Por meio dos Registros das Observações feitas na *live 3* (Apêndice 14) registradas logo após sua finalização, percebemos que as professoras, ingressaram na *live* repetindo o procedimento de se cumprimentarem e desligarem as câmeras e áudios. Além disso, uma das professoras apresentou problemas em seu áudio, não conseguindo escutar e nem ligar seu microfone. Ela encaminhou um vídeo no grupo do WhatsApp da turma mostrando que seu computador não estava permitindo que ela ligasse o microfone, e uma das colegas pediu para que ela saísse e retornasse na *live*, mas o problema persistiu. Para não atrasar a formação, a docente pediu para que começássemos enquanto ela tentava solucionar o problema. Iniciei a formação, mas enviei uma mensagem para ela, pedindo que reiniciasse seu computador e retornasse para a formação, foi quando o problema foi solucionado, 30 minutos após o início da formação.

Somado a isso, outra docente reclamou da conexão da internet naquele dia, e outra professora alegou dificuldade com o uso da tecnologia, principalmente quando começamos a realizar as atividades no GeoGebra, alegando que preferiria apenas escutar e observar a atividade, e que assistiria com mais calma a *live* gravada. Além disso, na meia hora final desta formação, outra professora comentou que teria que participar simultaneamente de outra *Live*, assistindo a nossa pelo computador e a outra pelo celular. Esses fatos podem ser uma justificativa para a pouca interação entre os questionamentos orais e no Mentimeter desta formação, comparando com as duas *lives* anteriores.

Assim sendo, nesta terceira *live*, investigamos S5 referente ao conhecimento pedagógico do conteúdo com três enquetes, S6 referente ao conhecimento tecnológico do conteúdo com duas enquetes, e S7 referente ao conhecimento pedagógico da tecnologia com quatro enquetes.

Desta forma, em S5E1 buscamos identificar se os professores têm familiaridade com os erros comuns dos alunos analisando uma proposta de atividade envolvendo modelagem matemática que foi extraída do livro didático. A atividade pedia para que os alunos em grupo,

contornassem as faces dos poliedros em uma cartolina, recortassem e colassem cada uma delas com fita adesiva de modo a construir o poliedro desejado.

Uma docente respondeu que o desenho das faces poderia ficar irregular e a colagem com fita adesiva poderia não dar certo, conforme vemos em 5min “eu acho que, apesar de ter o modelo né, de poliedro, essas faces vão ficar irregulares, ..., e aí, vai atrapalhar a colagem na hora né, de colar mesmo usando a fita vai atrapalhar um pouquinho, e colar com fita nem sempre dar certo”. Ao questionar o porquê de ela achar que as faces ficariam irregulares e o porquê do uso da fita não daria certo, a docente respondeu em 5min52s “se cada vez que ele fosse fazer cada uma das faces do poliedro ele posicionar a caneta de uma maneira diferente, já é o suficiente para dar essa diferença na hora de colar”, e em 6min4s “e a fita, ..., ela até funciona, mas eu acho que para construir um poliedro fica mais legal mesmo, pegar a planificação né, que tem aquela abinha extra depois da face do poliedro, para poder encaixar ali direitinho e ter uma sustentação melhor”. Percebemos nesta última fala, a preferência de utilizar uma planificação pronta da figura espacial, ao invés de explorar a modelagem matemática com os alunos incentivando a fazê-los.

Ainda em relação a esta enquete, outra docente mencionou uma preocupação com a coordenação motora dos alunos, mesmo a atividade sendo feita com alunos do 4º e 5º ano do EF, pois ao aplicar uma atividade parecida com alunos nessa etapa escolar percebeu uma dificuldade dos alunos na construção, conforme vemos em 6min29s “também tem aquela questão né, assim como uma criança lá do 4º e 5º ano, a questão da coordenação motora, na hora de cortar, não é, isso é importantíssimo, porque no ano passado quando eu, eu estive com uma turma do 4º ano, eu montei é ..., nesse livro há, vem um, um, vinham modelos para eles recortarem e montarem, e foi uma dificuldade enorme. Isso também, acho que conta muito a questão da coordenação motora”.

Em S5E2 buscamos identificar se os professores têm familiaridade com o processo de resolução de problemas por meio da observação e uso da abertura da unidade do livro didático. Nele mostrava a figura de um mercadinho com os produtos, em diferentes formatos geométricos, organizados nas prateleiras. O objetivo é verificar se as docentes explicitariam características em relação as variáveis didáticas articulação vertical e modelagem.

Em relação a essa enquete uma docente respondeu explorar a atividade em função do que o aluno já tenha aprendido, conforme vemos em 9min27s “eu acho que ..., é ..., identificar alguns sólidos geométricos ..., e aí, explorar a partir disso, né, é, de acordo com que ele já tiver aprendido, ver a respeito de vértices, de arestas, faces”. Outra docente complementou sobre os componentes curriculares que poderiam ser explorados, conforme vemos em 9min55s “também

né Julio, trabalhar é..., a questão dos nomes, da comparação entre as figuras, ..., descrição, registros”.

Por fim, em S5E3 buscamos identificar o conhecimento de conteúdo e do ensino no professor por meio da descrição de uma das habilidades da BNCC, (EF03MA14): Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações. Procuramos reconhecer algumas características de como a variável didática articulação vertical é exposta pelas docentes ao perguntar o que ensinar? e como? A resposta dessa enquete se encontra na figura 29.

Figura 29 - Indícios de como o conhecimento de conteúdo e ensino é mobilizado pelas docentes

vértice, aresta, face	Nome, características e formas observadas. Roda de conversa buscando conhecimentos prévios, experimento com o sólido explorando suas características, comparação com as planificações.
-----------------------	--

Fonte: Resultado de S5E3

Percebemos que a resposta explicitada na figura 29 é similar aos diálogos mencionados em S5E2, pois em ambos há uma preocupação em relação a progressão dos componentes curriculares e a continuidade das experiências dos alunos, assim como consta na BNCC (2017) sobre articulação vertical.

Diante disso, buscamos no quadro 39 realizar uma síntese de como as professoras mobilizam em sua prática cada variável referente ao conhecimento pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar.

Quadro 39 - Mobilização na prática do conhecimento pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

Articulação vertical	<ul style="list-style-type: none"> - Buscam saber o que os alunos já aprenderam por meio de roda de conversa e explora a atividade em função disso; - Sabem vincular alguns componentes curriculares a partir da observação de uma figura/imagem; - Os componentes curriculares mais explicitados são o uso dos nomes das figuras espaciais, identificação em diferentes registros, características (contagem dos vértices, arestas e faces) e planificação.
Modelagem	<ul style="list-style-type: none"> - Têm familiaridade com possíveis erros apresentados pelos alunos quanto ao uso de certos recursos (tecnologias tradicionais); - Sabem os melhores recursos para usar na atividade; - Usam os moldes das figuras espaciais que vem em anexo nos livros; - Compreendem a importância do desenvolvimento da coordenação motora e sua relação para o sucesso ou fracasso de uma atividade. - Usam de atividades em que o aluno vai realizar experimento, comparar e descrever as formas observadas. - Preferem planificações prontas ao invés de incentivar os alunos a fazê-las.

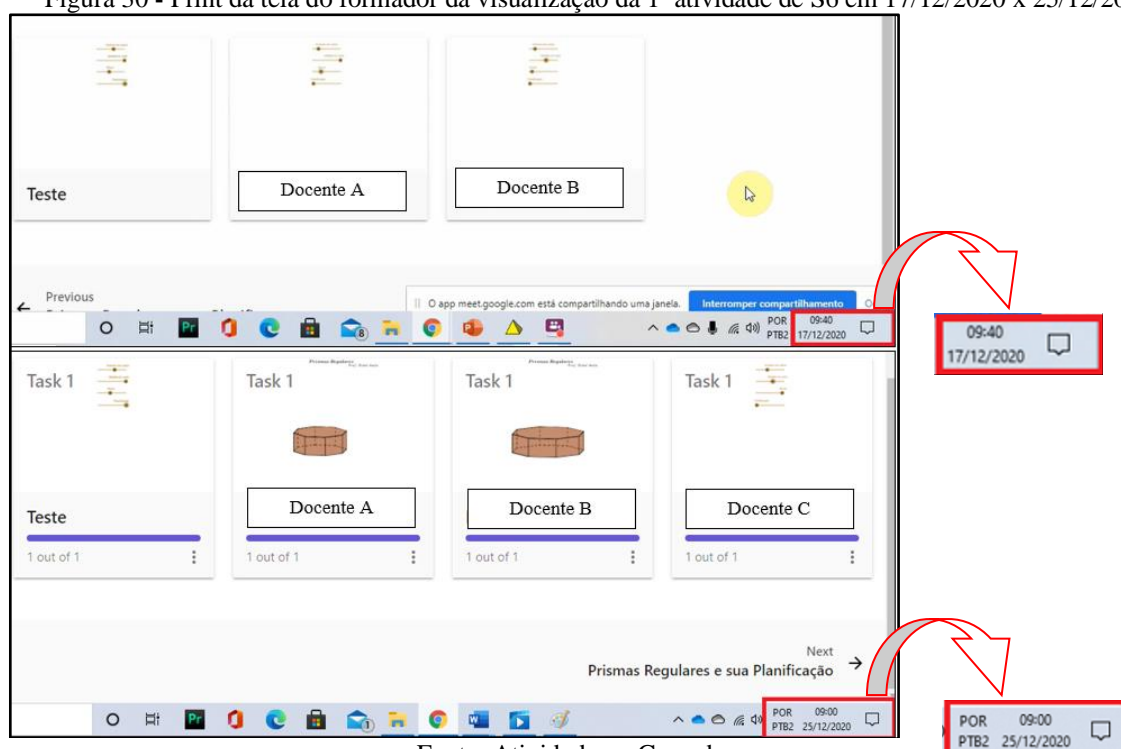
Fonte: Construção nossa

Percebemos que as professoras possuem um domínio amplo em relação as variáveis do conhecimento pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar, principalmente ligada aos conhecimentos pedagógicos. Possivelmente a articulação vertical e conseqüentemente seu uso na resolução de problemas só não está mais bem difundido na prática das docentes, por conta da carência registrada em relação ao conhecimento do conteúdo. Todavia, nesta terceira *live*, ainda falta investigar S6 referente ao conhecimento tecnológico do conteúdo e S7 referente ao conhecimento pedagógico da tecnologia, as quais iremos analisar a seguir.

Antes de explorarmos a primeira enquete em S6, buscamos mediante uma atividade introdutória e disponibilizada no GeoGebra Classroom, compreender como o conteúdo pode ser modificado por meio da manipulação da figura representada na tela do computador ou smartphone, analisando as variáveis didáticas representar, figuras e visualização.

Como já mencionado no início desta *live* no registro de observação, percebemos que uma docente estava com problema de conexão e dificuldades com o uso da tecnologia, reforçado na fala dela em 26min6s “eu não consigo e ..., tenho dificuldades em, em, está acessando”. Diante disso, falei para a docente observar as atividades feita pelas colegas e depois com mais calma, ela poderia assistir à gravação da *live*, acessar e realizar a atividade, como de fato ocorreu, conforme verificamos na figura 30 ao comparar a tela do formador da 1ª atividade de S6 em 17/12/2020 com 25/12/2020.

Figura 30 - Print da tela do formador da visualização da 1ª atividade de S6 em 17/12/2020 x 25/12/2020


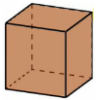

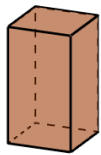

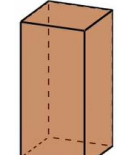
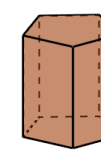

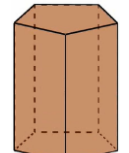
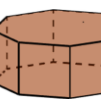
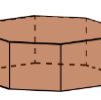
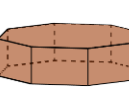


Fonte: Atividade no Geogebra.org

A figura 30 representa a tela do formador em relação a atividade proposta, na qual se pode acompanhar as tarefas realizadas pelas docentes, e verificamos que entre o dia 17/12/2020 e o dia 25/12/2020 tivemos mais uma das docentes acessando a tarefa proposta.

Vale ressaltar que, em relação às professoras que estavam realizando as atividades em tempo real no GeoGebra Classroom, a Docente A estava com problemas de conexão de internet, e o resultado da construção de suas figuras apresentava um *Delay*⁶⁸. Diante disso, iremos mostrar apenas as figuras que conseguimos capturar pelas docentes no processo de execução desta tarefa no dia 17/12/2020, conforme vemos no quadro 40 a seguir.

Quadro 40 - Construção dos prismas realizados pelas docentes na 1ª atividade de S6

Figura proposta	Construída pela Docente A	Construída pela Docente B	Apreensão dos registros figurais
			<p>A apreensão perceptiva está bem desenvolvida sendo identificada corretamente por meio dos indicadores intrafigurais em relação ao número de lados do que é visto na base das imagens das figuras propostas;</p> <p>A apreensão discursiva está bem desenvolvida sendo identificada corretamente por meio da interpretação dos ícones dos controles deslizantes que aparecem na tela do Geogebra.</p> <p>A apreensão sequencial não foi bem desenvolvida por conta da limitação, tanto da conexão da internet quanto do uso da ferramenta GeoGebra por parte das professoras, apresentando dificuldades quando precisou modificar a disposição visual da figura, pois esta função não está em nenhum ícone visual dos controles deslizantes, e sim, clicando e arrastando a tela.</p> <p>A apreensão operatória foi desenvolvida após a realização do tratamento de mostrar a reorganização perceptiva da figura após clicar e arrastar a tela. Podemos observar isso nos prismas pentagonais, feitos em tempo real, e nos prismas octogonais, feito após explicar como modificar a disposição visual das figuras.</p>
			
			
			

Fonte: Atividade no Geogebra.org

Ainda no quadro 38, temos que na construção dos cubos, alterando-se apenas o ícone altura já se conseguia a figura desejada, e no paralelepípedo, deveria mexer também com o ícone medida do tamanho, e nesses casos as professoras não tiveram muitas dificuldades. Porém, a partir do prisma pentagonal, o ícone número de lados e a disposição visual também deveria ser alterada, sendo que nesses casos as docentes apresentaram um pouco mais de dificuldades, conforme vemos na fala da Docente B em 30min24s “eu ainda não sei mexer na posição não, mas peraí que eu vou tentar”. Quando a professora conseguiu realizar a tarefa, demonstrou uma reação de felicidade conforme vemos em 30min39s “aprendi, rsss...”. A

⁶⁸ Designação técnica para os atrasos do som ou dos sinais, em circuitos elétricos transmitidos via satélite, normalmente em relação à imagem: a televisão está com delay. (DICIONÁRIO AURÉLIO, 2020)

Docente A que também apresentou dificuldades na disposição visual, pedindo na sequência uma ajuda para a colega, conforme vemos em 30min43s “socializa aí, porque o meu está torto, rsss”. Ao comentar se os alunos iriam gostar dessa tarefa, tivemos a resposta de uma docente em 31min38s “vão adorar Julio, pois eu já estou adorando aqui, rsss”. Foi nesse momento que a docente que apresentou problemas técnicos no início da *live*, e reiniciou seu computador, conseguiu ingressar novamente a formação com o problema solucionado.

Como a docente que apenas estava assistindo à realização da atividade por suas colegas, alegou dificuldade operacionais com a tecnologia digital, pediu para que pudéssemos compartilhar a tela para visualizar a tarefa, conforme vemos em sua fala em 33min38s “o Julio ..., é ..., não pode ir fazer, e ..., mostrar. Eu tenho dificuldade com a questão da internet né, da, da, de mexer no, no, nisso aí, aí, não tem como aparecer na hora que está fazendo não?”. Falei para a docente que minha tela está sendo acessada como professor, na qual eu consigo acompanhar o que cada aluno está fazendo. Para acessar e mostrar a atividade como aluno, pedi para que uma das professoras, que estava realizando a tarefa, pudesse compartilhar sua tela para mostrar a atividade. Sendo atendido pela Docente B, conforme vemos na fala em 34min31s “eu posso compartilhar”. Após a Docente B compartilhar sua tela e mostrar o que acontece com a figura arrastando cada ícone ou clicando e deslizando a tela, decidi compartilhar minha tela para mostrar a visualização da mesma atividade como professor, e que no final desta *live*, iria ensinar a criarem a conta na comunidade do Geogebra para poderem acessar como professor, conforme está explicitado no apêndice 9.

Na sequência em S6E1 realizamos o questionamento se a atividade anterior, feita no Geogebra, poderia ser aplicada por meio do uso de outras tecnologias, a fim de buscamos identificar a compreensão das tecnologias consideradas adequadas e como elas poderiam ser utilizadas pelas professoras. Nessa enquete, as variáveis didáticas são projetos, representar, desenho e figuras, e a respostas orais explicitado pelas docentes foram sendo anotado pelo formador no quadro 41 a seguir.

Quadro 41 - Respostas pelas docentes em S6E1

Com quais tecnologias (recursos)?	Como?
Usar embalagens, figuras no final do livro, moldes, construir as figuras para poder ver elas. Massa de modelar.	Construção e identificação das figuras espaciais.

Fonte: Slide 18 da *live* 3

Implicitamente, em função do que as docentes relataram, podemos dizer que o uso de projetos na proposta de construção das figuras espaciais a partir dos moldes expostos no final do livro didático colabora no processo de visualização no aluno, conforme vemos na fala de

uma das docentes em 44min14s “pra quem não tem acesso à internet né, eles teriam que construir, ..., para poder ter a noção do, do, ..., da figura ..., da planificação, a figura montada, observar os lados, as posições”. Complementada por outra docente que, também poderia utilizar massa de modelar para a construção das figuras, conforme vemos 44min44s “eu acho que também daria pra fazer com massa de modelar”.

Em S6E2 realizamos o questionamento de como a atividade poderia ser aplicada aos alunos que não têm acesso às tecnologias digitais, mas a resposta já tinha sido referenciada por algumas docentes em S6E2, e por esse motivo, talvez ninguém tenha respondido a essa enquete, somado com os problemas de conexão enfrentada por uma docente, escrevendo no chat da *live* que estava com a internet ruim e que não estava conseguindo ouvir direito. Todavia, uma das docentes mostrou insegurança no preparo de atividades lúdicas no ensino à distância para os alunos da fase pré-escolar e que precisam de interferência e ajuda de um adulto, conforme vemos em 52min47s “quando a educação, é, é, é, à distância, ...é, são o responsável que vai está orientando, ..., será que esse responsável vai ter é, é, noção de estar mostrando para as crianças que a geladeira, o que é a geladeira, o formato dela, as características, as janela, e a própria casa, os cômodos, ... é, isso me dá uma insegurança né, no caso, de passar uma atividade dessa impressa. No caso a educação infantil está recebendo impressa, e como é que esse pai vai ..., mesmo que tivesse internet”.

Diante de tudo que foi visto até então em todas as *lives*, buscamos no quadro 42 realizar uma síntese de como as professoras mobilizam em sua prática cada variável referente ao conhecimento tecnológico do conteúdo da Geometria espacial elementar.

Quadro 42 - Mobilização na prática do conhecimento tecnológico do conteúdo da Geometria espacial elementar dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

Projetos	<ul style="list-style-type: none"> - Constroem as figuras espaciais por meio dos moldes e massinha; - Procuram trabalhar com a realidade local do aluno e com os materiais disponíveis; - Realizam aulas passeios; - Constroem jogos com os alunos;
Representação	<ul style="list-style-type: none"> - Usam objetos do dia a dia; - Usam figuras geométricas espaciais construídas; - Usam materiais reutilizados, ou reciclados.
Desenho	<ul style="list-style-type: none"> - Pedem aos alunos para desenharem objetos do seu dia a dia que se assemelham às figuras espaciais.
Figuras	<ul style="list-style-type: none"> - Usam as figuras e os moldes que aparecem no livro didático; - Usam gravuras; - Usam as embalagens; - Usam origami das figuras espaciais.
Ludicidade	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentam insegurança nas atividades no ensino à distância para os alunos da fase pré-escolar e que precisam de interferência e ajuda de um adulto; - Usam vídeos, jogos, músicas, brincadeiras e quebra cabeça; - Realizam experimento.

Visualização	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentam desenvolvimento na apreensão dos registros figurais utilizando tratamentos em um mesmo registro para figuras virtuais; - O tamanho de como o objeto ou figuras são apresentados por meio da tecnologia digital pode atrapalhar no reconhecimento de suas características*; - Algumas professoras apresentaram dificuldade operacionais com a tecnologia digital para observar as atividades.
---------------------	---

* A ser referenciado em S7E2

Fonte: Construção nossa

Percebemos que várias variáveis do conhecimento tecnológico do conteúdo já foram explicitadas nas sequências anteriores, e que esta sequência permitiu constatar e verificar a compreensão de alguns recursos, principalmente no que se refere ao uso da tecnologia digital. Porém, ainda falta verificar nesta *live* o conhecimento pedagógico da tecnologia, a ser analisado a seguir, em S7 .

Em S7E1 mostramos novamente as figuras dos objetos do dia a dia em formato de prismas observados em S1E4 de modo que as docentes possam identificar suas informações visuais. No início da atividade ao perguntar o nome das figuras, assim como ocorreu na *Live 1*, novamente não obtive resposta, mostrando a carência das docentes em relação ao conteúdo de Geometria espacial. Na sequência, mostramos algumas figuras de prismas expostos nos livros didáticos em S7E2, com disposições visuais e tamanhos diferentes daqueles objetos do cotidiano mostrados anteriormente, para verificar quais deles representam os mesmos prismas. Quanto ao cubo e paralelepípedo a explicitação do nome e a associação entre as figuras foi feita corretamente. O mesmo não ocorreu quanto ao prisma triangular, na qual as docentes ficaram um tempo em silêncio mostrando dúvida, até que uma das docentes explicitou não saber se tem um nome específico, conforme vemos em 1h0min32s “é um prisma, mas é diferente, ela tem algum nome específico?”. Mesmo sendo trabalhado em S1E4 as características, nomes e formas das figuras geométricas espaciais, ainda percebemos uma deficiência em relação ao conhecimento desse tipo de conteúdo. Aproveitei o momento para explicar sobre os prismas e avançarmos nas atividades.

Desta forma, continuando a tarefa em S7E2, as professoras reconheceram que a figura exposta no livro didático era um prisma com 5 lados em sua base, e mencionaram corretamente que era um prisma pentagonal. Todavia, não havia figuras do cotidiano que se assemelhassem a ele, no primeiro momento as professoras alegaram ser um objeto cuja base era um polígono de seis lados. Por isso, dei um *zoom* na base das figuras dos prismas para poder contar melhor o número de lados de sua base, na qual verificaram que em nenhum dos objetos tinha em sua base o polígono pentagonal. Neste caso, percebemos que o tamanho de como o objeto ou figuras apresentadas pode atrapalhar na visualização de suas características. Diante disso, seria

interessante realizar como tratamento inicial da tarefa, reconhecer as bases e seu número de lados. Após este momento, o reconhecimento do prisma hexagonal e o objeto que o assemelha foi realizado corretamente pelas professoras.

Em S7E3 buscamos averiguar as possibilidades e restrições do uso das tecnologias no ensino de Geometria espacial elementar analisando como cada um dos recursos poderiam ser utilizados na atividade realizada anteriormente. Nessa enquete, as variáveis didáticas analisadas são escritas, paródias/músicas, jogos, vídeos, e softwares, e a respostas foram explicitadas oralmente pelas docentes e anotadas pelo formador no quadro 43 a seguir.

Quadro 43 - Respostas pelas docentes em S7E3

(Possibilidades) Quais cenários?	Recursos	(Restrições) (Quais limitações?)
Descrever o formato de cada figura, suas partes, as características.	Escrita	Na educação infantil ou com os alunos semianalfabetos, o aluno descreve e o professor que realiza o registro da escrita.
Levar uma música que os alunos gostem e propor construir uma paródia coletivamente.	Paródias/ Música	Falta de recursos como rádio, caixa de som e alto falante. Tem que improvisar, e muitas das vezes comprar recursos do próprio salário.
Levar embalagens, montar e desmontar, pintar e recortar, fazer quebra cabeça. Relacionar os blocos lógicos com as embalagens. Planejar com antecedência para poder juntar materiais, como as embalagens, com a ajuda dos alunos e dos outros professores. Possibilita usar na recuperação paralela pois faz parte do conteúdo explorado.	Jogos	Falta de recursos pois nem todos os alunos levam as embalagens, nem todas as escolas têm os blocos lógicos completos, nem todas as escolas a gente consegue confeccionar os jogos
Acham que dá para fazer animação.	Vídeos	Falta de recursos e energia elétrica.
-	Softwares	Falta de recurso e anseio dos professores com o uso de novas tecnologias.

Fonte: Slide 24 da *live 3*

Os recursos de escrita, paródias/músicas e jogos foram bem explicitados na prática docente no ensino da Geometria espacial, pois também são recursos usados nas outras áreas do saber. Já os recursos vídeos e softwares não foram referenciados como possibilidades de seu uso na prática, apenas em um cenário possível para o uso do vídeo. Vimos que em S1 e S4 os vídeos foram citados como recurso usado no ensino à distância para oferecer explicação das atividades propostas e explorar a ludicidade.

Um dado que chamou a atenção foi colocado por uma docente quanto à falta de recursos ao longo do tempo, o que vem colaborando com a falta de estímulo que os professores têm no planejamento de atividades com mais qualidade, conforme vemos em sua fala em 1h14min4s “quando, ..., quando eu comecei eu fazia muitas coisas diferentes, mas assim, depois de ..., um

notebook quase quebrado, depois de ..., rsss, algumas reprovações na faculdade porque eu não estudei, entende, porque eu deveria estar estudando porque eu estava preparando aulas, enfim, aí a gente vai adaptando”. Outra docente concordou e complementou sua fala em relação ao ensino à distância, conforme vemos em 1h14min23s “é... mas hoje com tudo que eu tenho vivido com esses quatro anos que eu estou em Angra, eu já tomei uma decisão, enquanto temos o ensino online ..., é ..., na pandemia ..., eu tenho recursos na minha casa, quando eu não tiver ..., quando voltar o presencial, não vou ter mais impressora, não vou ter mais computador, não vou ter nada, vou trabalhar com que estiver na escola, porque senão não tenho vida”.

Percebemos que além da falta de recursos e internet que poderiam limitar o trabalho docente, uma das docentes acrescentou que o medo e anseio ao uso das novas tecnologias digitais também podem atrapalhar, conforme vemos em 1h25min35s “eu acho Julio que aí também, além da falta de recurso, tem um pouco de medo e receio dos professores com as novas tecnologias né. Lá na escola eu percebo, muito isso, que às vezes a sala de informática, o laboratório está disponível, e..., algumas professoras não usam porque têm receio né, de até mesmo nesse ..., nas inserção de atividades na plataforma eu ..., auxiliei algumas professoras lá na escola né, de vez em quando vem alguma aqui em casa para eu está podendo ajudar, porque ..., não é para todo mundo que isso é comum, ... né, não é nem todo mundo tem acesso à tecnologia, nem todo mundo está acostumado. Ontem eu estava até comentando com minha sogra ..., que desde pequenininha eu tenho contato com o computador, então eu vejo que algumas pessoas têm alguns medos que hoje eu não tenho, mas porque ..., eu já tive esses medos lá atrás quando eu era bem mais nova”. Fala que foi complementada por outra docente que é um receio que deve ser superado, conforme vemos em sua fala em 1h26min28s “então, eu acho isso é importante se colocar porque eu, eu estou até avaliando a minha participação mesmo nesse curso, devido as minhas limitações, os desafios também que eu tenho vencido em relação a isto, não deixando de mexer, não deixando..., sempre incomodando um jovem, como eu falei ontem, a minha filha, como adolescente, ela safra muito é ..., está tendo aula online o tempo todo, ela já consegue é, é, postar as atividades, então eu sempre procuro é ..., estar me atualizando e aprendendo mesmo né”.

Percebemos também no quadro 40 que, mesmo as professoras tendo feito em S6 uma atividade no GeoGebra envolvendo prismas, nenhuma docente colocou como um cenário de possibilidade o uso deste recurso, talvez pelo fato dele ainda não está incorporado em sua prática.

Em S7E4 buscamos identificar as tecnologias emergentes por cada um dos recursos explorados anteriormente, para que possam ser desenvolvidos as práticas relatadas. O resultado

das respostas que foram verbalizadas pelas docentes e anotado pelo formador se encontra no quadro 44 a seguir.

Quadro 44 - Respostas pelas docentes em S7E4

TECNOLOGIAS		RECURSOS	Tecnologias escolhidas (numeração)
1) Livro/paradidático;	10) Jornal;	ESCRITA	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14
2) Folha de papel;	11) Revistas;	PARÓDIAS/ MÚSICA	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16,
3) Lápis/caneta;	12) Tintas;	JOGOS	2, 3, 4, 5, 6, 15, 16, 17, 18
4) Quadro;	13) Canudos;	VÍDEOS	Faltam mais conhecimentos
5) Tesoura;	14) Palitos;	SOTWARES	1, 2, 3, 4, 8, 18
6) Cola;	15) Embalagens;		
7) Massinha;	16) Sólidos geométricos;		
8) Maquete;	17) Imagens/foto;		
9) Moldes;	18) Computador/smartphone.		

Fonte: Slide 25 da *live* 3

Percebemos que o recurso da escrita teve a tecnologia mais referenciada, talvez por ser mais utilizado na prática docente em todas as áreas do conhecimento. Vários dos recursos também foram explicitados de modo a promover a alfabetização na criança, em conjunto com as outras áreas do conhecimento. Desta forma, os recursos explicitados e justificados por meio do uso de determinada tecnologia estão referenciados a seguir.

Os livros didáticos/paradidáticos foram referenciados por uma docente na produção da escrita a partir da observação das imagens, das gravuras expressas no livro, conforme vemos em sua fala em 1h32min35s “a partir, a partir do livro, ..., tipo eu pego um paradidático, conta a história, ou até mesmo eu leio um texto que tem lá no livro didático, ou ..., algumas visão, ou mostro algumas é ..., ilustração, que tem aqueles quadros né, obra de arte, que vem trazendo é ..., as formas geométricas, a gente faz a leitura daquelas obras e depois eles vão fazer uma produção de texto”. Após eu questionar se essa tecnologia poderia ser usada junto com o *software*, tivemos que uma docente explicitou seu uso para introduzir um conhecimento que o aluno precisará para poder usar este recurso, conforme vemos na fala de uma docente em 1h41min18s “pode, porque anteriormente você precisa do, da, da, do conhecimento didático, para depois é ..., inserir ...,”.

A tesoura e cola foram citadas com uso do recurso da escrita em atividades envolvendo caça palavras, conforme vemos na fala de uma docente em 1h33min32s “recortes e cole das letras para formar o caça palavras”. No uso de paródias/músicas na organização correta do texto, conforme vemos em 1h36min25s “a gente corta a letra da música toda e pede para o aluno ordenar”. No uso de jogo para sua confecção, conforme vemos na fala de uma docente em

1h38min41s “dependendo do jogo sim né, pois às vezes a gente leva um jogo para ser confeccionado pelas crianças”.

O uso da massinha foi mencionado junto com o recurso da escrita como forma de modelar as letras na escrita, segundo a fala de uma docente em 1h33min49s “a gente faz um monte de letras com massinha também”. No uso de paródia/música para ilustrar a figura geométrica que aparece, conforme vemos em 1h36min51s “pode se usar da massinha na hora se você pedir para ..., para ele ilustrar, fazer a ilustração”.

A maquete foi referenciada junto ao recurso de paródia/música no levantamento de quais figuras aparecem, de acordo com a fala de uma docente em 1h37min6s “na maquete pode sim, porque você pode fazer o levantamento o que que foi que você fez, o que foi que foi feito naquela maquete né”. Indicado também junto com o recurso do *software*, para construção da maquete no computador, conforme uma docente apontou em 1h42min14s “usar a maquete no computador, em um jogo, usando as peças e eles vão montar uma maquete”.

Os moldes foram apontados junto com o recurso da escrita para identificar os nomes das figuras, conforme a fala de uma docente em 1h34min17s “pode identificar o nome da figura, escrever o nome da figura e colar”.

O jornal foi declarado junto com o recurso da escrita para confeccionar alguma notícia, conforme uma docente apontou em 1h34min43s “a gente vai confeccionar uma notícia do jornal”.

O canudo e palito também foram apontados junto com o recurso da escrita para confeccionar letras, segundo uma docente esclareceu em 1h35min11s “com as crianças a gente faz as letras com tudo rsss”.

O computador/smartphone foi referenciado junto com o recurso jogos de acordo com a acessibilidade do seu uso, conforme vemos na fala de uma docente em 1h39min38s “aí depende da, rsss, da acessibilidade né”.

Após essas enquetes, e a pedido das professoras na *live* anterior, decidi apresentar dois *softwares* que podem ser usados na Geometria espacial, *software* Poly Pro e o GeoGebra. Primeiramente perguntei se conheciam o Poly Pro, e as professoras falaram que não, e uma das docentes ainda reforçou em 1h43min59s “eu não conheço nada Julio, rsss”. Apresentei o *software* por meio do compartilhamento de tela, mostrei o nome e a versão mais atualizada para que pudessem baixar, a função de cada uma das telas que aparecem, como escolher e mexer a figura, e como planificá-la. Comentei que a limitação desse *software* é não ter todas as figuras espaciais, como exemplo, na pirâmide ter só o tetraedro, no prisma ter o cubo e os prismas de base triangular, pentagonal, hexagonal, octagonal e decagonal, não ter os corpos redondos e

não poder alterar as dimensões das figuras. Porém, seu uso é interessante para explorar a visualização do aluno, a identificação das bases e de seu formato, pois nas figuras que aparecem a base é expressa com cor diferente em relação as faces laterais.

Na sequência, comentei que o GeoGebra é o *software* de geometria dinâmica mais utilizado no mundo, e sobre Geogebra.org: uma comunidade de atividades criadas no GeoGebra, disponíveis on-line para quem quiser acessar e disponibilizá-las a seus alunos. Comentei que já havíamos feito uma atividade usando essa ferramenta nesta *live*, só que como aluno, e que para acessarmos como professor, para encaminharmos as atividades e ver os progressos do que os alunos estão fazendo, deveríamos criar uma conta em Geogebra.org. Mostrei o passo a passo de como criar a conta por meio dos slides e disponibilizei um arquivo em forma de folheto explicativo em PDF, também mostrando esse passo a passo, encaminhado no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classroom. Além disso, mostrei como escolher e selecionar atividades para encaminhar aos alunos, e indiquei o link <<https://www.geogebra.org/m/xnrmmkjt>> o qual conta com mais de 300 atividades criadas para os anos iniciais referentes a diferentes eixos da matemática, incluindo Geometria espacial. Como em algumas das atividades aparecem nomenclaturas em inglês, então ensinei o passo a passo sobre como traduzir as palavras editando a tarefa e como disponibilizá-la aos alunos.

Após essas informações, perguntei se alguém gostaria de comentar alguma coisa, tendo a resposta de uma das docentes em 2h3min41s “é, foi muita informação de uma vez só, se você puder ..., disponibilizar, mas você vai disponibilizar na, ..., de repente”. Informei que se fizéssemos esse passo a passo em conjunto, levaríamos um tempo maior. Algumas professoras estavam com problemas de conexão de internet no dia, e outras que não puderam assistir a *live* e poderiam assistir à gravação. Diante disso, pedi como atividade de casa que criassem pelo menos a conta na comunidade do GeoGebra, para verificar as atividades e tirar as dúvidas via chat do Google Classroom ou grupo de WhatsApp, para que, na última *live*, pudéssemos minimizar as últimas dúvidas.

Diante de tudo que foi visto até então em todas as *lives*, buscamos no quadro 45 realizar uma síntese de como as professoras mobilizam em sua prática cada variável referente ao conhecimento pedagógico da tecnologia da Geometria espacial elementar.

Quadro 45 - Mobilização na prática do conhecimento pedagógico da tecnologia de Geometria espacial elementar dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

Escrita	<ul style="list-style-type: none"> - Usam para que os alunos descrevam o formato de cada figura, das suas partes e das suas características; - Produção textual por meio da observação das imagens, das gravuras expressas no livro; - Possibilidade de atividade de caça-palavras envolvendo tesoura e cola; - Possibilidade de atividade usando massinha ou canudos para modelar as letras dos nomes das figuras geométricas; - Possibilidade de atividade usando os moldes das figuras para nomeá-los; - Possibilidade de atividade de construção de uma notícia.
Paródias/ Música	<ul style="list-style-type: none"> - Levam uma música que os alunos gostem e constroem uma paródia coletivamente; - A falta de recursos limita a atividade; - Possibilidade de atividade usando tesoura e cola para recortar as partes de um texto de paródias/músicas e em seguida ordená-lo; - Possibilidade de atividade usando massinha para ilustrar as figuras que aparecem nas músicas/paródias; - Possibilidade de atividade usando maquete para identificar as figuras que foram referenciadas nas músicas/paródias.
Jogos	<ul style="list-style-type: none"> - Levam embalagens para que os alunos possam montar e desmontar, pintar e recortar, e fazer quebra-cabeça; - Relacionam os blocos lógicos com as embalagens; - Planejam as atividades com antecedência para poder juntar materiais, como as embalagens, com a ajuda dos alunos e de outros professores; - Usam na recuperação paralela pois faz parte do conteúdo explorado; - A falta de recursos limita a atividade; - Possibilidade de atividade usando tesoura e cola para confeccionar jogos; - Possibilidade de atividades adequadas no computador envolvendo jogos.
Vídeos	<ul style="list-style-type: none"> - Usam no ensino à distância para oferecer explicação das atividades propostas e explorar a ludicidade; - A falta de recursos limita a atividade.
Softwares	<ul style="list-style-type: none"> - A falta de recursos limita a atividade; - O medo e anseio ao uso das novas tecnologias digitais por alguns professores; - Possibilidade de atividade introduzida pelo livro/paradidático; - Possibilidade de atividade usando a construção de maquete pelo computador; - Não conhecem ou não têm familiaridade com os <i>softwares</i> de Geometria.

Fonte: Construção nossa

Percebemos que a mobilização na prática do conhecimento pedagógico da tecnologia de Geometria espacial elementar está muito associada ao uso de tecnologias tradicionais como livro/paradidático, folha de papel, lápis/caneta, quadro, tesoura, cola e massinha de modelar, principalmente quanto ao uso para representação das letras ou nome das figuras espaciais. Além disso, exploram a ludicidade por meio dos jogos e paródias/músicas. A limitação do trabalho docente se dá em boa parte pela falta de recurso, que também provoca à falta de estímulo para seu planejamento. Além disso, o conhecimento pedagógico das tecnologias digitais de vídeos e *software* ainda não é mobilizada por essas docentes.

Até aqui, exploramos e analisamos os componentes do conhecimento do conteúdo, do pedagógico e do tecnológico, e a interseção entre eles somado ao contexto, porém, ainda falta explorar e analisar os conhecimentos tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar a serem investigados a seguir.

7.4. Análise a posteriori da live 4

Por meio dos Registros das Observações feitas na *live* 4 (Apêndice 15) registradas logo após sua finalização, percebemos que as professoras continuaram ingressando na *live* se cumprimentando e desligando as câmeras e áudios. Além disso, mais uma vez, uma das professoras apresentou problemas em seu áudio, e outras duas estavam com problemas com a conexão da internet, saindo da *live* no meio das tarefas e não conseguindo mais retornar. Por esse motivo, não houve uso do Mentimeter e os esclarecimentos foram feitos oralmente.

Para as docentes que não estavam conseguindo participar da *live*, encaminhei, na plataforma Google Classroom e grupo de WhatsApp da turma, um folheto explicativo em PDF sobre como explorar e encaminhar para os alunos as atividades escolhidas na comunidade do GeoGebra, assim como, verificar o progresso das tarefas realizadas por eles.

No final da *live* anterior, foi pedido às professoras presentes que acessassem e criassem, pelo menos, sua conta na comunidade do *GeoGebra*. Ao ingressarem nesta última *live*, fui perguntando se já haviam criado a conta, recebendo a resposta positiva de todas, mas que ainda não sabiam selecionar as atividades, encaminhar para os alunos e em alguns casos, traduzi-las. Dessa forma, dediquei o início deste último dia de formação para mostrar com mais detalhes essas informações.

Primeiramente, mostrei como fazer o login na comunidade do GeoGebra, a função de cada aba que aparece na página principal, como pesquisar atividades por meio do ícone lupa e como encaminhar para o aluno a atividade já selecionada. Após esse momento, como uma nova professora ingressou na *live*, repassei as informações anteriores, acrescentando como selecionar a atividade para a turma pertinente ao anos iniciais do EF, por meio do link <<https://www.geogebra.org/m/xnrmmkjt>> indicado no arquivo em PDF encaminhado anteriormente, e em como traduzir as palavras nas tarefas e adaptá-las para os alunos que não têm acesso às tecnologias digitais. Ao final da explicação, perguntei se havia ficado alguma dúvida, e uma das docentes mencionou que não parecia ser difícil, apenas precisaria pôr em prática, conforme declarou em 31min21s “você está falando aí, é fácil, aí quando a gente vai fazer, que a gente ..., se atropela, mas aí você falando, eu vou lá na *live* e vejo também os slides”. A mesma docente também perguntou se daria para encaminhar as atividades da comunidade do GeoGebra para a plataforma usada na secretaria de Angra, e eu respondi que sim, pois é só colocar as instruções para que os alunos possam acessar o link e digitar o código da atividade,

conforme foi explicado anteriormente. Isso provocou uma curiosidade e entusiasmo na docente, conforme vemos em sua fala em 32min27s “eu estou com curiosidade, pois eu tenho um aluno que ..., que ele ..., só faz atividades com jogos, e, e..., digital”.

Após este momento inicial, vamos nesta quarta *live* explorar S8 para realizar a investigação referente ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo por meio de oito enquetes. Abrimos as atividades expondo uma figura do livro didático, em que aparecem as pirâmides do Egito, e dois questionamentos: Por que os egípcios construíram as pirâmides e quais conhecimentos matemáticos eles já possuíam? A proposta era verificar, por meio dessas indagações se as docentes tinham algum conhecimento sobre a história da matemática.

Ao pedir para as professoras responderem o primeiro questionamento, tivemos um breve momento em silêncio indicando possível dúvida, confirmado em seguida pela interrogação na resposta de uma docente em 37min36s com a frase “o que vem em mente agora, é que foram construídos como proteção?”. Ao perguntar que era para proteger o quê? Não tive resposta.

Em relação ao segundo questionamento, como também não obtive resposta, confirmando as dúvidas que as docentes possuíam em relação a essa parte histórica, comentei a minha resposta pessoal sobre as indagações realizadas. Prossegui para S8E1, na qual busquei identificar se os professores explicitam os elementos constituintes da história da Matemática, como sugestões de atividades com base na observação da imagem da atividade anterior. As repostas dadas por duas docentes revelaram alguns indícios de incorporação da história da Matemática, a primeira em relação a comparações, conforme vemos em 42min1s “a gente pode propor comparações, pode propor para que eles confeccionem uma pirâmide”. A segunda como campo de problemas, conforme vemos 42min22s “fazer pesquisa, já que eles são de terceiro ano, eu ia propor pesquisas, pra ampliar o conhecimento, e ..., eu acho que dá pra fazer maquete, ... fazer, com base na pesquisa que eles fizeram”.

S8E2 seria realizado no Mentimeter, mas foi realizado oralmente. Mostrei algumas imagens de fotografias de localidades de Angra, para que a docente pudesse reconhecer se faz ou não parte do contexto cultural do seu aluno, e assim identificar o seu conhecimento em relação a etnomatemática.

Assim, verificamos dúvidas na palavra “eu acho” referentes à imagem do Mercado do Peixe e explicitado em 44min13s “eu acho que sim”. Confirmado na segunda imagem referente a Igreja Matriz com a palavra “eu acredito”, assim como na primeira imagem, ambas se localizam no centro de Angra, e foi justificada pela docente que podem fazer parte do contexto cultural de pelo menos um grupo de alunos, conforme apontou em 44min39s “eu acredito que essas imagens do centro de Angra façam parte sim do, do contexto da maioria dos alunos né,

eu acredito que alguns poucos podem não conhecer, mas a maioria eu acredito que conhecem sim”. A dúvida voltou a aparecer na imagem com o porto naval com a palavra “não sei”, explicado por uma docente que deve fazer parte do contexto da família, mas não sabe dizer se faz parte do contexto do aluno, como vemos em 45min41s “pode fazer parte do contexto da família, mas da criança em si eu não sei. Ouvir falar da Brasfels⁶⁹ com certeza eles já ouviram, mas se eles conhecem ..., não sei se eles conseguiriam identificar pela foto”. Com relação à imagem de barcos, não houve dúvidas, as docentes afirmaram que faz parte do contexto dos seus alunos, conforme aponta a fala de uma docente em 46min34s “o barco faz parte sim”, e na fala de outra docente em 46min36s “com certeza o barco faz parte”. O mesmo ocorreu com a imagem de instrumentos de pesca, também confirmado pelas docentes, que faz parte do contexto do seu aluno, conforme vemos em 47min “sim”.

Na sequência em S8E2, voltei a mostrar as imagens anteriores para que as docentes pudessem identificar as pirâmides que aparecem e dizer para qual função ela está sendo usada no contexto mostrado. A proposta dessa atividade é reconhecer a compreensão sobre a etnomatemática quanto à concepção construtivista de uma aprendizagem significativa.

Assim, ao mostrar a imagem do Mercado do Peixe, uma docente respondeu que a pirâmide aparecia nos telhados, conforme declarou em 48min37s “eu vejo no telhado né, com aquela parte quando vem..., com parte triangular ..., de cada...”. Outra docente identificou também nas tendas, em 48min59s “nos telhados, nas tendas”. O mesmo ocorreu ao mostrar a imagem da Igreja Matriz, em 49min30s “telhado também”, e em 49min32s “tendas e telhados, e, e, essa parte lá da igreja onde ..., eu acho que é telhado né, proteção, cúpula, sei lá”. Ao perguntar para qual função possuíam as pirâmides ali representadas, as docentes responderam basicamente para proteção, então questionei proteção do quê? Recebendo como resposta em 50min “do sol, da chuva”.

Em relação à imagem mostrada do porto naval, uma das docentes identificou corretamente as pirâmides no final dos guindastes e nas estruturas metálicas, conforme declarou em 51min38s “tá no guindaste, lá no final tem, assim ô..., nas estruturas de ferro”. O mesmo ocorreu em relação a imagem dos barcos, em que a docente identificou corretamente nos mastros, em 52min36s “tem nos mastros, nos mastros”. Por fim, em relação aos instrumentos de pescas, uma das docentes também identificou corretamente a pirâmide que aparecia nas correntes, em 53min34s “tem nessa corrente ali da ..., da parte içada”.

⁶⁹ Porto Naval localizado em Angra dos Reis.

Assim sendo, na sequência em S8E3 perguntei quais outras imagens poderiam ser usadas para representar o contexto cultural do aluno? E em S8E4 perguntei quais outras atividades poderiam ser feitas para que o aluno pudesse identificar as pirâmides em seu contexto cultural? Recebendo como resposta de uma docente, tanto para alunos de ilhas quanto para os alunos da parte continental do município, em usar as praias, conforme vemos em sua fala 54min37s “acho que poderia usar as praias né, pois independentemente de morar no continente ou nas ilhas, eles vão na praia né, e as praias têm várias imagens ..., no guarda sol, tem as tendas, tem ..., eles veem os barcos também”.

Em S8E5, S8E6 e S8E7 buscamos identificar a compreensão do professor sobre a resolução de problemas quanto ao desenvolvimento do letramento matemático. Primeiramente em S8E5, foi mostrado um modelo de uma pirâmide quadrangular regular, formado por palitos de mesmo tamanho, exposta como sugestão de atividade no livro didático, que perguntava quais elementos da pirâmide os palitos e massinhas representavam. Ao questionar às docentes qual seria a resposta desejável, obtivemos como resposta em 56min21s “desejável, seria vértices e arestas, mas provavelmente eles vão responder retas, linhas”. Comentei da importância do uso da linguagem geométrica correta desde sempre para que a criança não cometa esses erros.

Na sequência em S8E6 foi levantado o questionamento: a figura desta atividade é semelhante a algumas das pirâmides mostradas na atividade anterior? Se sim, em quais imagens? Mostrei novamente a imagem da Igreja Matriz, do Mercado do Peixe, e as docentes responderam que está nas tendas e telhados. Porém, ao revelar a imagem do porto naval, as docentes comentaram serem diferentes, justificando em 58min30s “é que na ..., figura que os alunos fizeram, todos os lados, todas as arestas são congruentes, aí nessa imagem não”. O mesmo ocorreu ao apontar a imagem dos barcos, na qual as pirâmides eram triangulares, tendo a resposta da docente ao comparar com a imagem do porto naval da Brasfels, mas não relacionando que suas bases são diferentes, conforme vemos em 59min11s “acho que sim, a mesma situação da Brasfels, ..., são parecidos né, mas, idênticos, idênticos, não tem”. Por fim, ao mostrar a imagem dos instrumentos de pesca, as docentes comentaram que a base era retangular e que a pirâmide era inclinada, conforme vemos nas falas das docentes em 1h0min5s “a base é retangular”, e em 1h0min24s “um pouco inclinada”.

Por fim, em S8E7 foram mostradas três fotos de alunos da rede municipal de Angra, apresentando a mesma pirâmide anterior, só que construída por eles com jujubas e palitos, usando o livro como colaborador para a visualização das características da pirâmide. Vale ressaltar que essas fotos foram encaminhadas por uma docente após execução do segundo estudo do caso piloto desta pesquisa. A proposta era mostrar a continuação das atividades

realizadas anteriormente, ainda sem auxílio de tecnologias digitais. Assim, perguntei às docentes: o que vocês podem dizer sobre as figuras dessa imagem? Como ficou um silêncio e uma docente comentou duas vezes que não entendeu a pergunta, comentei que além das jujubas e palitos, a professora usou o livro para auxiliar na geração de imagens mentais no aluno, e perguntei: daria para fazer a mesma atividade para seus alunos? A resposta foi sim, conforme vemos em 1h3min7s “dá” e em 1h3min9s “dá”. Voltei a questionar a mesma pergunta, só que no ensino à distância, obtendo novamente a resposta que sim, e justificada por uma docente em 1h3min21s “no caso dos meus dá, porque ..., eu já fiz uma atividade que eu pedi pra ..., que a família fizesse com eles em casa massinha de modelar e fazer receita, então quem fez a massinha consegue fazer essa atividade. Outra orientação é usar palitos de dente né, ou, ou, alguns gravetos, já que eles moram na ilha, utilizar gravetos, cortar do mesmo tamanho, fósforos e...”.

Em S8E8 continuamos as atividades envolvendo pirâmides, só que agora usamos a tecnologia digital por meio de uma tarefa no GeoGebra. Neste caso, ainda continuamos a identificar a compreensão do professor sobre a resolução de problemas, só que agora em relação ao desenvolvimento do pensamento computacional. Foi dada uma pequena introdução sobre os quadros que apareceriam na tela e a informação de que usaríamos apenas o segundo e terceiro quadro. Além disso, como no segundo quadro aparecem três botões deslizantes (a,b,u) e um quadrado ao lado da palavra Pirâmide, iniciamos a atividade verificando a função de cada um deles.

O botão deslizante “a” muda o número de lados da base regular da pirâmide, fato que foi identificado pela docente, mas não explicitado que as bases eram regulares, conforme vemos em 1h7min25s “a base dela, aumenta e diminui a quantidade de arestas”.

O botão deslizante “b” tem a função de aumentar a altura da face lateral e, conseqüentemente, a altura da pirâmide, fato que foi identificada pela docente somente em relação à altura da pirâmide, conforme vemos em 1h7min36s “muda a altura”.

O botão deslizante “u” tem a função de abrir e fechar a planificação da figura da pirâmide, tanto no quadro 2 quanto no quadro 3, só que em vistas diferentes. Essas explicações não foram relatadas pela docente, mostrando que o entendimento de cada quadro não foi totalmente compreendido, conforme vemos em 1h7min53s “no primeiro quadro, some as laterais da pirâmide, fica só a base, e no segundo quadro, as laterais vão fechando para formar a pirâmide. ..., a planificação vai fechando, e fecha a pirâmide todinha”.

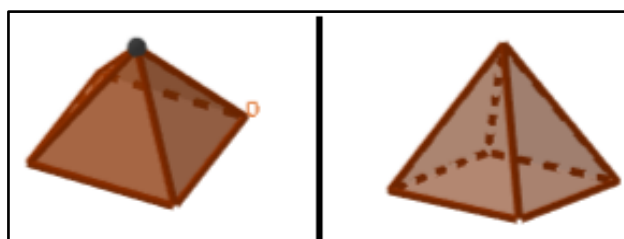
Se o quadrado ao lado da palavra Pirâmide estiver marcado, ele tem a função de mostrar a pirâmide construída, independentemente se arrastar ou não o botão deslizante u, e o contrário

ocorre se o quadrado não tiver marcado. Temos que a docente não soube explicar a situação, conforme vemos em 1h8min25s “o desenho da sombra da pirâmide em pé some”.

O segundo quadro representa a vista superior e o terceiro quadro representa a vista lateral da figura, mas isso não foi referenciado pelas docentes em relação a clicar e arrastar o cursor/dedo sobre a tela no segundo e terceiro quadros respectivamente, conforme vemos em 1h9min5s “no segundo quadro ela muda de lugar e no terceiro quadro ela muda a posição da visualização”.

Na continuidade desta tarefa no GeoGebra, pedi para que construíssem a pirâmide mostrada na atividade anterior feita com palitos e jujubas. Deveriam respeitar a características de que os palitos tinham o mesmo tamanho e conseqüentemente as arestas da pirâmide construída no GeoGebra também deveria ter. Apenas duas professoras ainda estavam nesse momento on-line e percebemos que ambas realizaram a tarefa sem dificuldades, conforme vemos em suas figuras construídas e representadas na figura 31.

Figura 31 - Pirâmide construída pela 1ª docente x Pirâmide construída pela 2ª docente



Fonte: Atividade no Geogebra.org

Por fim, para fechar S8E8, levantamos os questionamentos, sobre a atividade realizada: O que você achou? Qual foi sua maior dificuldade? Qual a diferença entre a atividade feita com o material concreto e feita pelo computador ou smartphone? As respostas explicitadas foram anotadas no quadro 46 a seguir.

Quadro 46 - Respostas pelas docentes na finalização de S8E8

O que você achou?	Qual foi sua maior dificuldade?	Qual a diferença entre a atividade feita com o material concreto e feita pelo computador ou smartphone?
Interessante, ampliou o conhecimento além da visualização, trabalha com a coordenação motora. Consegue explorar vários aspectos das pirâmides, mudando o tamanho da aresta, do número de lados da base da figura. Dar para brincar bastante com a pirâmide.	Dificuldade de realizar a tarefa usando o mouse, talvez o mouse esteja ruim.	No material concreto aparece a figura vazada, e no computador aparece a figura com todas as faces preenchida e sua planificação.

Fonte: Slide 26 da *live 4*

A proposta destes questionamentos era verificar se as docentes reconhecem que a mesma atividade sugerida presencialmente, poderia ser feita remotamente com auxílio da

tecnologia digitais, que aceitassem que é possível trabalhar o lúdico por meio desses recursos, que o envolvimento das atividades realizadas por elas a levassem a tomar a decisão de utilizá-las em sua prática, e que essa implementação venha se concretizar.

Pelas respostas dadas pelas docentes no quadro 44, o uso do recurso GeoGebra em atividades envolvendo tecnologias digitais foi bem recebido, citando vários benefícios e qualidade para a educação. Como as dificuldades foram referentes ao uso do mouse com defeito, e somado com a qualidade da conexão de internet, se não houver falta de recursos, como já referenciado em S7, percebemos uma grande possibilidade de as docentes utilizarem as atividades da comunidade do GeoGebra em suas práticas. Essa ideia também é reforçada pelo fato de elas não citarem grandes diferenças entre as atividades feitas com o material concreto e feita pelo computador ou smartphone, talvez por já aceitarem essas tecnologias digitais, exploradas nessas duas últimas *lives*, como recursos importantes no processo de ensino e aprendizagem.

Na sequência, informei as variáveis didáticas identificada na pesquisa em relação ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar explicando um pouco a respeito de cada uma delas. Perguntei se já haviam estudado alguma coisa em relação à história da Matemática, e o pouco que se lembram foi a respeito do surgimento dos números, conforme vemos na fala de uma docente em 1h18min32s “eu acho que estudei muito pouco falando sobre o surgimento do número ..., né, ..., vi algumas representações de números usados muito tempo atrás, ..., mas acho que nada além disso”. Foi complementada por outra docente que aborda esses conhecimentos quando aparecem nos livros/paradidáticos, conforme vemos em 1h18min47s “é isso que eu ia falar, assim, sobre a história da matemática no geral não, mas a gente é ..., tem um conhecimento, inclusive no livro didático, e tem o livro paradidático que fala sobre a história dos números né, ..., que eu até uso quando vou fazer a introdução quando eu vou trabalhar o, o, fazer a introdução da, das aulas”.

Analisando estas últimas informações, percebemos que, como foi visto na introdução de S8, os livros até trazem alguma abordagem que direcione tarefas com a história da Matemática, porém, eles partem do princípio de que os professores dominam esse conhecimento, e percebemos que os professores apenas apresentam alguns indícios em relação a isso, principalmente voltada para o campo do sistema de numeração.

Em correspondência à variável etnomatemática, perguntei se as professoras já tinham ouvido falar, e a resposta obtida foi dada em 1h19min35s “eu não!”. O breve silêncio após a pergunta e o tom baixo na fala da resposta dada pela docente indica além de dúvida, não saber o que se trata o questionamento. Então, expliquei um pouco a respeito da etnomatemática,

principalmente ligada ao contexto cultural, da mesma forma como vimos em S8E2 ao observar por meio de fotos a região que faz parte da realidade do aluno. Por fim, também expliquei em relação à variável resolução de problemas, que a utilizamos em S8 na construção da pirâmide feita tanto com tecnologias tradicionais quanto às digitais.

No final desta *live*, passei outros cinco links de atividades criadas na comunidade do GeoGebra em relação à Geometria espacial e que podem ser usadas como tarefa nos anos iniciais do EF. Perguntei o que acharam da formação e se tem alguma coisa que pudesse ser melhor explorado, obtive como respostas alguns elogios e que dependem apenas delas para colocar o que viram em prática, conforme vemos na fala de uma docente em 1h23min36s “eu acho que foi muito válida a formação, e agora é com a gente né, a gente treinar bastante pra aprender a usar essas ferramentas”, e em 1h31min39s “agora é com a gente né, eu pretendo treinar um pouquinho para poder inserir isso nas aulas”. Complementada pela fala de outra docente em 1h23min53s “eu quero agradecer, é, superou minhas expectativas, é ...”, em 1h24min45s “tudo que eu possa aprender ..., e para que eu possa contribuir com a aprendizagens dos alunos, eu acho muito válido”, e em 1h32min23s “é a parte da Geometria, é ..., é pouca explorada né, então, ..., talvez seja por falta de conhecimento mesmo, de falta de conhecimento do professor, por falta de conhecimento ...”.

Por fim, mostrei novamente como selecionar uma das atividades indicadas nos links anteriores, como jogar no seu perfil criado na comunidade do GeoGebra, como encaminhá-la para os seus alunos, e como acompanhar as tarefas realizadas por cada um deles.

Diante de tudo que foi visto em todas as *lives*, buscamos no quadro 47 realizar uma síntese de como as professoras mobilizam em sua prática cada variável referente ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo da Geometria espacial elementar.

Quadro 47 - Mobilização na prática do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do EF.

História da matemática	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentaram indícios de realização de atividades envolvendo comparações; - Apresentaram indícios de realização de atividades envolvendo o campo de resolução de problemas; - Possibilidade de atividades envolvendo pesquisa para ampliar o conhecimento; - Possibilidade de atividades envolvendo a construção de figuras espaciais e maquetes. - Usufruem do livro/paradidático para introduzir atividades vinculadas à história da Matemática; - Apresentam poucos indícios em relação ao conhecimento da história da Matemática, principalmente voltada para o surgimento do sistema de numeração;
Etnomatemática	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecem localidades que faz parte do contexto cultural do seu aluno; - Identificam algumas figuras espaciais que aparecem no contexto cultural do aluno; - Reconhecem possibilidades de construção de atividades significativas comuns a todos os alunos a partir das praias; - Não sabem o que é etnomatemática, mas souberam relacionar atividades envolvendo essa variável didática;

Resolução de problemas	<ul style="list-style-type: none"> - Identificam alguns erros cometidos pelos alunos, em relação à linguagem geométrica; - Realizam adaptação de atividades, com objetos comuns na região onde os alunos vivem, como o uso de atividades envolvendo os gravetos ao invés de palitos; - Apresentam dificuldades em explicitar as características das figuras espaciais representadas por meio da tecnologia digital. - Aceitação de atividades envolvendo o uso das tecnologias digitais explicitando alguns benefícios.
-------------------------------	---

Fonte: Construção nossa

A mobilização do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar poderia estar mais bem explicitada na prática docente se a história da matemática fosse explorada como disciplina no curso de licenciatura em pedagogia, ou oferecida como curso de extensão aos professores dos anos iniciais do EF. Seria bom se os livros didáticos e paradidáticos pudessem não só introduzir conceitos, mas também informar ao professor sobre o conhecimento da história da Matemática além do sistema de numeração, e que assim, os livros fossem também um complemento para a formação destes docentes. Que não faltassem os recursos, tanto das tecnologias tradicionais quanto das digitais, na execução das atividades planejadas pelos professores. Que fossem oferecidos cursos para os professores dos anos iniciais do EF voltados ao uso das tecnologias digitais, principalmente no uso do software do GeoGebra.

Por fim, para verificar se os conhecimentos explorados nesta formação foram incorporados como um conhecimento que os professores possam utilizá-lo em sua prática, pedimos para que as docentes pudessem criar uma atividade relacionada a Geometria espacial elementar, postar na plataforma do Apoiar2 e disponibilizar no Google Classroom.

7.5. Avaliação

Ao término da formação apenas uma docente postou a avaliação na plataforma do “Apoiara2” e inseriu-a na turma do Google Classroom dentro do prazo estipulado de uma semana. Essa professora foi uma das que participou de todas as *lives* e isso viabiliza a análise de tarefa postada pela docente (Apêndice 16). Os dados em relação a essa atividade e informados pela docente na plataforma Google Classroom se encontram no quadro 48, a seguir.

Quadro 48 - Avaliação disponível por uma docente na plataforma da Google Classroom

Título da atividade: Brincando com as formas geométricas – paralelepípedo.
Objetivos: (EI03ET01) Estabelecer relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades; (EI03ET02) Observar e descrever mudanças em diferentes materiais, resultantes de ações sobre eles, em experimentos envolvendo fenômenos naturais e artificiais; (EI03ET04) Registrar observações, manipulações e medidas, usando múltiplas linguagens (desenho, registro por números ou escrita espontânea), em diferentes suportes.
Conteúdos: Transformações e formas geométricas.

<Insira aqui o documento (encontra-se no apêndice 16)>

Fonte: Google Classroom

Percebemos por meio dos objetivos que a professora usou a BNCC (2017) como documento orientador em seu planejamento, explicitando alguns dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para a Educação Infantil, no que se refere ao campo de experiências “espaços, tempos, quantidades, relações e transformações”, para crianças pequenas (4 anos a 5 anos e 11 meses).

Assim como foi identificado no conhecimento do contexto em relação à variável Diretrizes curriculares para o ensino da Matemática, a BNCC já está sendo usada como principal documento orientador para a prática docente.

Em relação à palavra transformações que foi explicitada pela docente no conteúdo, percebemos seu uso inapropriado, pois segundo a BNCC (2017), o estudo das transformações geométricas é visto no final do 3º ano do EF, com a exploração da congruência de figuras planas, além disso, as atividades propostas pela docente são para os alunos da Educação Infantil conforme vemos nos códigos alfanuméricos da habilidade expressada em seus objetivos. Esse é possivelmente um erro ligado ao uso inadequado da linguagem geométrica, conforme constatamos na variável nomenclatura no conhecimento específico do conteúdo de Geometria espacial, somado com possível carência em relação a articulação vertical do conteúdo por meio da confusão de qual ano a habilidade deve ser explorada. Ao observar a atividade, fica nítido que o conteúdo se refere ao estudo da forma geométrica do paralelepípedo e que as tarefas propostas pela docente poderiam ser abordadas também no 3º ano do EF.

No início da atividade existe uma pequena introdução com as informações para fazer a tarefa com a ajuda de um adulto e os materiais necessários, conforme vemos na figura 32, a seguir.

Figura 32 - Introdução da atividade criada pela docente

CHAME UM FAMÍLIAR PARA TE AJUDAR NESTA ATIVIDADE.

NÓS VAMOS PRECISAR DE:

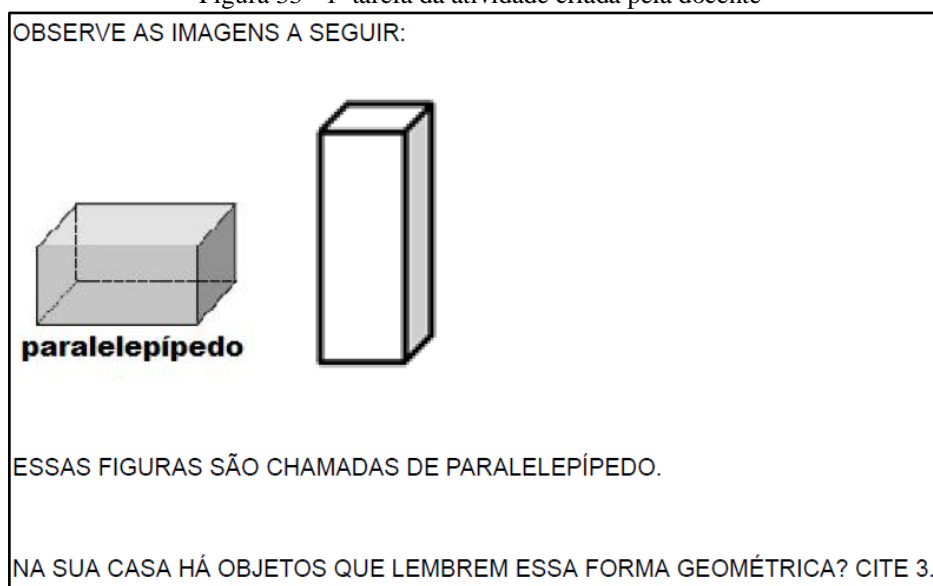
- CAIXA DE PASTA DE DENTES;
- MASSINHA;
- 4 PALITOS DE CHURRASCO E 8 PALITOS DE FÓSFORO;
- OU-
- 8 CANUDOS, SENDO 4 INTEIROS E 4 PARTIDOS AO MEIO (8 METADES).

Fonte: Postagem no Google Classroom

Por meio da figura 32, percebemos um conhecimento do contexto em relação à variável organização das aulas em função do espaço e tempo, direcionando uma introdução para os alunos realizarem a atividade com parceria dos pais, e em relação à variável materiais necessários às atividades, pois os alunos na rede municipal de Angra receberam um Kit contendo, dentre outras coisas, os materiais a serem usados nessa atividade.

Na primeira tarefa a professora apresentou o paralelepípedo em forma de desenho e em dois tipos de registros diferentes. O primeiro desenho tendo como base a sua fase lateral maior e com todas as faces translúcidas permitindo a visualização das arestas que se encontram na parte de trás da figura. O segundo desenho tendo como base a sua fase lateral menor e com todas as faces opacas não permitindo a visualização das arestas que se encontram na parte de trás da figura. Desta forma, as atividades mentais referentes às representações conscientes do paralelepípedo estão sendo usadas por meio do uso das diferentes percepções da figura e memórias relacionadas a objetos cotidianos, conforme vemos na figura 33 a seguir.

Figura 33 - 1ª tarefa da atividade criada pela docente



Fonte: Postagem no Google Classroom

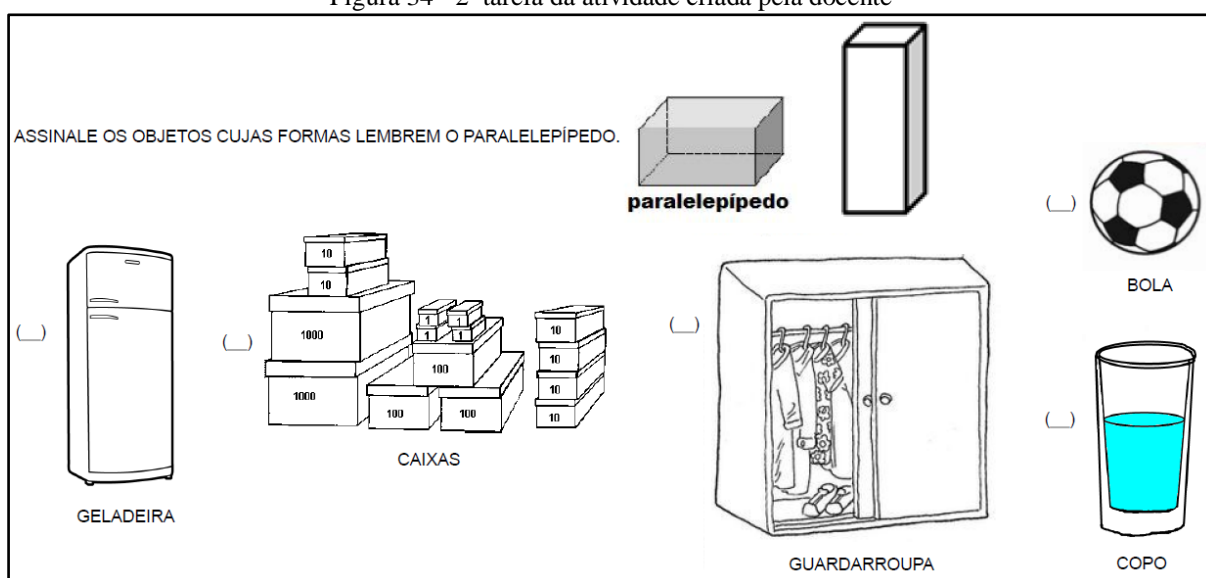
O uso inadequado da linguagem geométrica foi exibido na figura 33 ao usar as expressões “observe as imagens” e “essas figuras”, o que pode provocar uma possível concepção errada do conceito, já que imagens se referem-se à reprodução visual do objeto seja por espelho ou fotografia, e figura é a forma como essa imagem é representada, por exemplo, com uso de desenhos e gravuras. Além disso, o uso do tratamento discursivo (nome do paralelepípedo) está sendo usada apenas na primeira figura e no singular, e isso pode provocar a concepção de os alunos acharem que apenas a primeira figura seja paralelepípedo ou que são

paralelepípedos somente se as figuras que estiverem com uma das duas formas representadas. Temos como uma possibilidade escrever: as figuras a seguir representam a forma geométrica do paralelepípedo.

Além disso, percebemos que a professora organizou as tarefas se apropriando das fases do modelo van Hiele. Nessa primeira tarefa, usou a fase da Informação por meio da apresentação do paralelepípedo, e a fase da Explicitação por meio do questionamento na qual os alunos terão que dar suas opiniões.

Já na segunda tarefa, usou a fase do modelo van Hiele Orientação Direcionada, por meio da exploração e resolução da tarefa, conforme vemos na figura 34 a seguir.

Figura 34 - 2ª tarefa da atividade criada pela docente



Fonte: Postagem no Google Classroom

Na segunda tarefa a professora voltou a mostrar as figuras do paralelepípedo usadas na primeira tarefa, e pediu para que os alunos assinalem os objetos que lembram a forma do paralelepípedo, mostrando figuras representadas em forma de desenhos de vários objetos do cotidiano, nomeando cada um deles.

A forma como está escrito o enunciado na figura 34 pode provocar um incômodo cognitivo no aluno em não saber o que significa “assinale” ou interpretar como rabiscar a figura representada, sem utilizar os parênteses. Temos como uma possibilidade escrever: Marque um x dentro dos parênteses (X) nas figuras que representam a forma geométrica do paralelepípedo.

Todavia, a atividade se apropria da percepção visual nos tratamentos figurativos (designando a figura), coordenada com o tratamento discursivo (dando nomes aos objetos que representam as figuras). Desta forma, provoca o desenvolvimento do processo cognitivo da

apreensão perceptiva, de reconhecer as diferentes unidades figurais em cada figura, cujos tratamentos cognitivos ocorrem inconscientemente.

Na terceira tarefa, usou a fase do modelo van Hiele Orientação Direcionada, por meio da observação e comparação entre as figuras, e a fase Explicitação por meio dos questionamentos feitos para que os alunos exibissem suas opiniões nas repostas. Além disso, a professora usou as mesmas figuras do paralelepípedo utilizados nas duas primeiras tarefas, o que pode provocar no aluno que a concepção visual da figura estereotipada como a única correta, conforme vemos na figura 35 a seguir.

Figura 35 - 3ª tarefa da atividade criada pela docente



Fonte: Postagem no Google Classroom

Nessa terceira tarefa, o uso inadequado da linguagem persiste, uma vez que, no enunciado temos a palavra “imagens” tanto para designar a representação da figura do paralelepípedo quanto para a foto da caixa de pasta de dente, no entanto, somente para este último caso estaria correta. Poderíamos usar como uma possibilidade o seguinte enunciado: Observe as figuras que representam a forma geométrica do paralelepípedo e a imagem de uma caixa de pasta de dente.

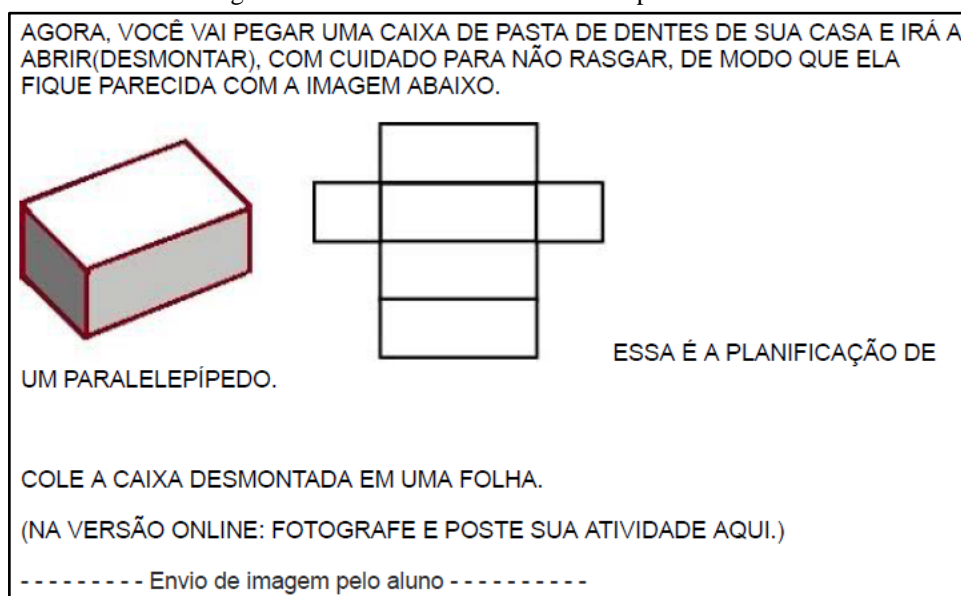
Além disso, tanto na primeira como na terceira tarefa, são usadas a palavra “cite”, que pode colaborar para o incômodo cognitivo no aluno por não saber o significado do que tem que fazer na tarefa ou interpretar como resposta oral, e assim deixando em branco a questão.

Percebemos que nesta terceira questão há uma continuidade no processo cognitivo do tratamento, por meio da observação e comparação da representação da figura do paralelepípedo com a representação do registro da imagem de um objeto com o mesmo formato. Nessa primeira

tarefa, usou a fase da Informação por meio da apresentação do paralelepípedo, e a fase da Explicitação por meio do questionamento na qual os alunos terão que dar suas opiniões.

Na quarta tarefa, usou a fase do modelo van Hiele Informação, explicando o quê o aluno deveria fazer, que é pegar a caixa de pasta de dente, Orientação Direcionada pedindo para que os alunos peguem uma caixa de pasta de dente, abram-na e cole-na em um papel, conforme vemos na figura 36, a seguir.

Figura 36 - 4ª tarefa da atividade criada pela docente



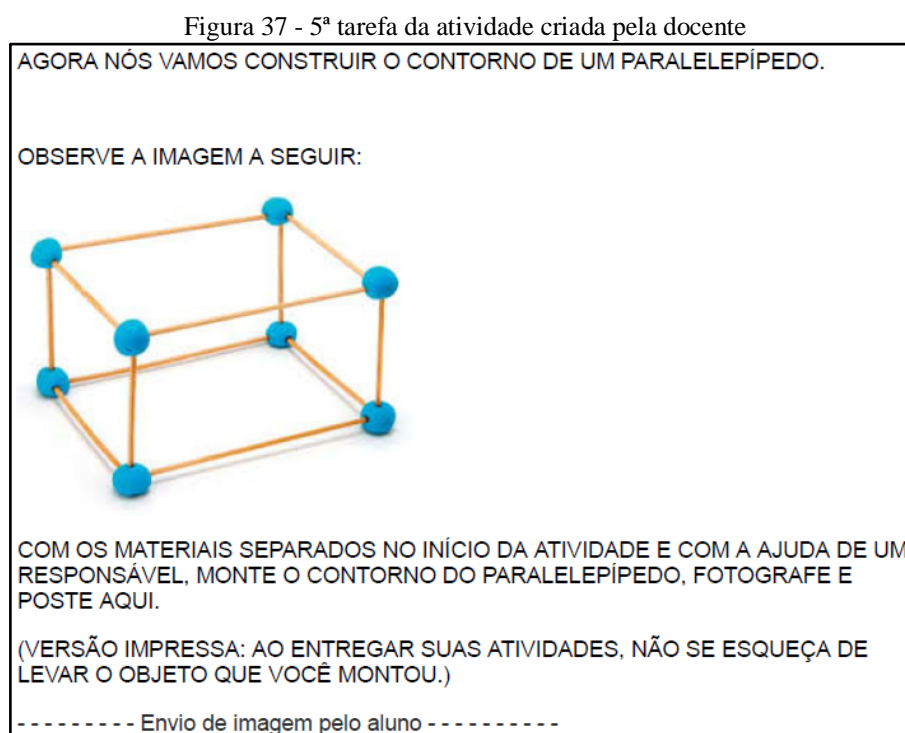
Fonte: Postagem no Google Classroom

A linguagem inapropriada apareceu nesta tarefa com a expressão “fique parecida com imagem abaixo”, pois era para ser a imagem de uma fotografia da caixa da pasta de dente aberta, e o que foi mostrado é a representação de umas das planificações possíveis do paralelepípedo. Outro desconforto cognitivo que os alunos poderiam sentir foi dizer que a figura que representa a planificação do paralelepípedo será “parecida” com a caixa aberta da pasta de dente, uma vez que a forma como o aluno pode abrir a caixa da pasta de dente, pode gerar outros tipos de planificações, somado que na planificação da caixa de pasta de dente estará, possivelmente, com abas, e ela não aparece na representação da figura planificada mostrada na tarefa.

Desta forma, a professora utilizou a atividade cognitiva do tratamento usando a representação da figura do paralelepípedo em outra disposição visual do que havia utilizado nas tarefas anteriores. Além disso, usou o processo cognitivo da conversão, por meio da utilização da caixa de pasta de dente, trabalhando na mesma tarefa com dois registros diferentes, o figural e o modelo concreto. A exploração dessa atividade mediante ao modelo concreto da caixa de

pasta de dente, colaborará com a criação de imagens mentais da representação do paralelepípedo.

Na quinta tarefa, usou a fase do modelo van Hiele Informação, explicando o quê deveria ser feito e os materiais a serem utilizados, a fase da Orientação Direcionada pedindo para observarem o que irão construir, a fase Orientação Livre colocando aos alunos o problema que deverão resolver -construção do paralelepípedo- usando palitos e massinha, podendo ser feito de várias maneiras, conforme vemos na figura 37 a seguir.



Fonte: Postagem no Google Classroom

A linguagem inapropriada da tarefa 5 foi usada na expressão “contorno”, a qual representa o traçado do desenho das arestas de uma figura. Para isso, poderíamos usar como uma possibilidade o seguinte enunciado: Agora vamos construir a estrutura de um paralelepípedo usando palitos e massinhas. O uso da palavra “imagem” foi usado corretamente, já que na sequência mostrou a fotografia de um paralelepípedo construído com palitos e massinhas. Além disso, houve uma convicção da docente que essa atividade poderia ser feita tanto para os alunos que acessam a plataforma da prefeitura Apoiar2, enviando a fotografia do paralelepípedo construído, quanto para os alunos que receberam as atividades na forma impressa, tendo que levar o paralelepípedo construído junto com a impressão, na devolução das atividades.

Dessa forma, a professora utilizou o tratamento de outro tipo de registro do paralelepípedo, por meio da sua forma estrutural. Assim, seu trabalho foi orientado em função da construção do paralelepípedo usando material concreto do palito e massinha, o que permite a criação de mais imagens mentais referentes à representação do paralelepípedo.

Por fim, na sexta tarefa, usou a fase do modelo van Hiele Fechamento, por meio da sugestão de visualização da planificação do paralelepípedo, usado na atividade feita na comunidade do GeoGebra, conforme vemos na figura 38 a seguir.

Figura 38 - 6ª tarefa da atividade criada pela docente



Fonte: Postagem no Google Classroom

Percebemos na figura 38 o desconforto da professora na exploração da tecnologia digital referente ao GeoGebra, colocando apenas como sugestão de atividades. Porém, ao contrário do que foi exposto em S7, em que o recurso GeoGebra não tinha sido mencionado em um cenário possível de aplicação de atividade, agora ele já foi posto em prática pela docente.

Sobre essa atividade postada pela docente, o erro da linguagem geométrica foi de forma instintiva, ligada à falta de um conhecimento mais profundo em relação ao conteúdo de Geometria espacial elementar. Todavia, as tarefas sugeridas foram adequadas, envolvendo diversos tipos de representações de registros semióticos.

Vamos resumir no próximo item tudo que foi explorado na engenharia didática para melhor compreensão da investigação desta pesquisa, relacionando o quadro teórico em relação ao conhecimento do professor com o quadro teórico em relação ao ensino da Geometria utilizado nas tarefas realizadas durante a formação.

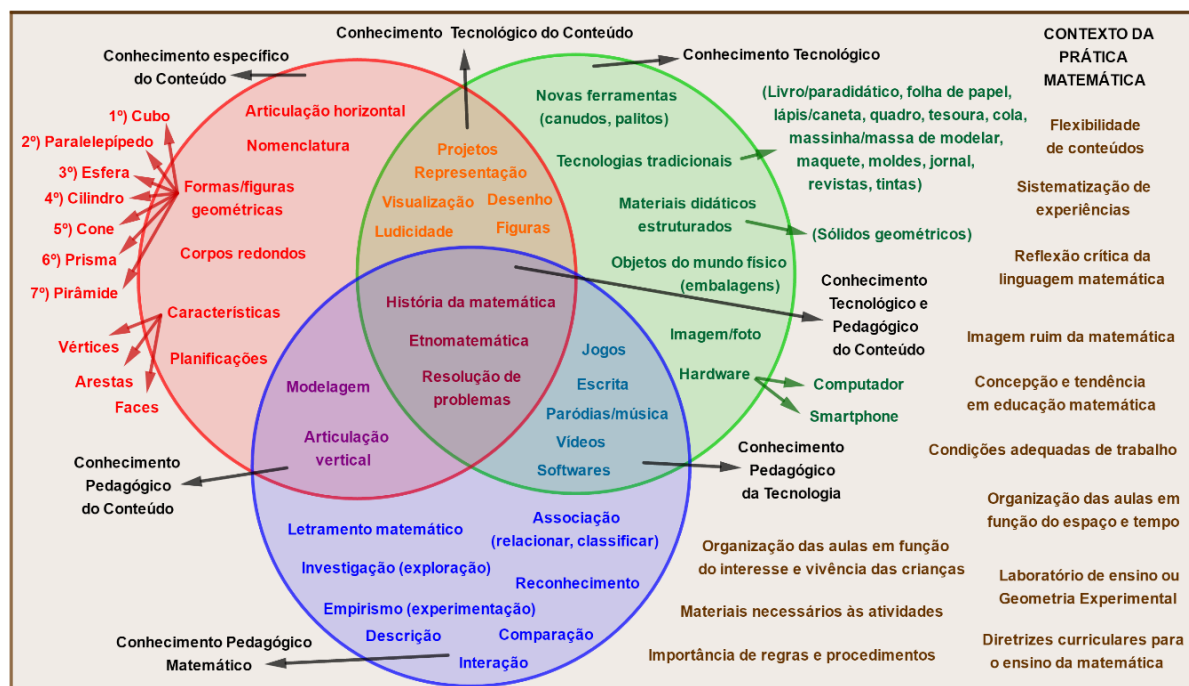
7.6. Síntese da investigação da Engenharia Didática e validação

No início do capítulo 5 articulamos o quadro teórico permeando as ideias de Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Ball et al. (2011), Mishra e Koehler (2006, 2008, 2009), sendo exposto na figura 9 o Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo em Matemática (TPACK) usado na pesquisa.

Por meio das ideias de Stylianides e Ball (2004) nas abordagens dos seis processos de estudo do conhecimento matemático necessário para o ensino, organizamos os dados

encontrados por meio de categorias comuns em relação aos componentes do TPACK, que foram as variáveis didáticas investigados na engenharia didática, conforme podemos observar na síntese mostrada na figura 39.

Figura 39 - Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo de Geometria Espacial Elementar



Fonte: Construção nossa

Com base nesse esquema, averiguamos como cada componente do TPACK é mobilizado na prática docente dos professores dos anos iniciais do EF ao lecionar figuras espaciais por meio de atividades no ensino de Geometria fundamentada da seguinte forma:

Para o conhecimento do contexto da prática matemática buscamos por meio das ideias de Duval (1999), identificar nos professores as atividades mentais em relação aos fatores sociais, políticos, culturais do aluno e, de suas crenças sobre o tema, relacionando-as com as representações conscientes do que tinham sobre os objetos usados no processo de ensino e aprendizagem de figuras espaciais.

Desta forma, percebemos no quadro 35 que os conteúdos são apresentados seguindo a forma de representação semiótica mobilizado por meio da interdisciplinaridade, trabalho com a realidade local e cultural do aluno, com aulas passeios, ludicidade no ensino à distância com vídeos, jogos, músicas e brincadeiras e, por meio da referência do objeto representado com o uso da linguagem geométrica adequada, texto explicativo, materiais reutilizados ou reciclados, e por meio dos kits oferecidos pelos governos.

Assim, por meio do confronto entre a análise *a priori* e *posteriori*, chegamos às seguintes conclusões referentes ao conhecimento do contexto da prática matemática: que a variável *organização das aulas em função do espaço e tempo* é feita no ensino presencial com trabalhos em grupos, e no ensino à distância por meio de atividades curtas em busca da autonomia do aluno; que a variável *flexibilidade de conteúdo* é feita por meio da interdisciplinaridade na demanda da construção do pensamento em relação às transformações e regularidades geométricas; que a variável *importância das regras e procedimentos* é realizada por meio da parceria e mediação com os pais para, não só inibir a indisciplina, mas identificar e enfrentar as possíveis dificuldades no aluno; que a variável *condições adequadas de trabalho*, possui um descompasso na interação entre os professores e os governantes, com a preparação e preocupação de atividades pelos docentes em que os alunos possam ter acesso aos recursos, principalmente no ensino remoto, no qual são limitados pelas orientações fornecidas pela secretaria de educação e direções referentes às quantidades de laudas para as tarefas impressas, e referentes ao uso da plataforma educacional, que por sua vez, é muito limitada para os tipos de atividades que podem ser oferecidas; que na variável *materiais necessários às atividades*, a organização das situações de aprendizagem é proporcionada por meio dos recursos oferecidos pelo governo e pelo uso de materiais reutilizados ou recicláveis; que na variável *sistematização de experiências*, a exploração das vivências cotidianas é feita por meio de trabalhos voltado à realidade local dos alunos, e na variável *laboratório de ensino ou Geometria experimental*, temos que a construção de um ambiente coletivo de conhecimento, se dá por meio de aulas passeios, entretanto, em relação à variável *organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças*, percebemos que essas aulas deveriam versar sobre questões desafiadoras e que estimulassem a curiosidade dos alunos, ainda assim, não foi identificado uma mobilização por parte dos docentes de um planejamento conciso em que tenham controle se os alunos de fato, estão realizando as atividades propostas; que na variável *reflexão crítica da linguagem matemática*, percebemos uma preocupação dos professores no uso adequado da linguagem geométrica, contudo, por falta de um conhecimento mais aprofundado do conteúdo, algumas vezes essa linguagem é usada de forma inapropriada, sem mesmo o docente perceber; que a variável *concepção e tendência em educação matemática* é expressa no currículo de formação de professores como forma de situar a matemática na contribuição para o desenvolvimento do estudante, todavia, percebemos que isso não foi suficiente, já que identificamos uma carência na abordagem docente referente à modalidade de ensino à distância, provocando a preferência por aulas presenciais, assim como, nas dificuldades dos professores no uso das tecnologias digitais, principalmente no ensino remoto; que na variável *Diretrizes curriculares para o ensino*

da matemática, percebemos que os docentes procuram se orientar por meio da BNCC; e, por fim, temos em relação à variável *imagem ruim da matemática*, onde as dificuldades, medos e traumas que os professores e alunos apresentam nessa disciplina é desmistificada por meio atividades significativas, lúdicas e voltadas para a realidade da criança.

Para o conhecimento específico do conteúdo buscamos explorar como os assuntos estão relacionados no currículo, como os professores reconhecem a resposta errada do aluno e avaliam a natureza do erro, identificando as imagens mentais que os professores têm em relação as figuras espaciais por meio de atividade cognitiva referente ao uso do registro de representação semiótica correspondente à formação e tratamento.

Diante disso, percebemos no quadro 36 que a atividade cognitiva da formação se dá mediante abordagens das figuras planas antes das espaciais, da exploração de todas as figuras espaciais ao mesmo tempo, na procura do uso adequado da linguagem geométrica, no uso dos moldes das planificações das figuras já prontas, e no uso das embalagens. Em relação à atividade cognitiva referente ao tratamento, percebemos um tratamento quase instantâneo ao informar os nomes dos cubos, paralelepípedos, esferas, cilindros e cones, e no tratamento intencional no reconhecimento das seis faces congruentes do cubo, nas faces retangulares no paralelepípedo, nas duas faces planas e circulares do cilindro, das faces planas e paralelas do prisma e no reconhecimento do formato da fase lateral e da base de uma pirâmide.

Conforme foi identificado na avaliação diagnóstica, há uma deficiência na habilidade de visualização por parte de alguns professores, percebemos que isso refletiu na carência pertencente ao uso do registro semiótico da atividade cognitiva da formação, pois a seleção de signos foi contra o identificado na figura 40, principalmente no que se refere a sequência didática das abordagens das figuras espaciais. Ecoou também, na carência em relação ao tratamento vinculado à falta de percepção de unidades de informações das figuras espaciais, pois nem todas as características foram identificadas observando-as.

Assim, por meio do confronto entre a análise *a priori* e *posteriori*, chegamos às seguintes conclusões referentes ao conhecimento específico do conteúdo: que a variável *articulação horizontal*, assim como propuseram o currículo de formação de professores da UFF e Cederj, é feita por meio de proposta interdisciplinar; que a variável *formas/figuras geométricas espaciais (cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, prisma, pirâmide)*, ao contrário de como é apresentado nos livros didáticos no tocante a uma ordenação de exploração das figuras espaciais, identificamos que os professores abordam todas ao mesmo tempo e, muitas vezes, após as figuras planas; que a variável *nomenclatura*, é uma habilidade bastante desenvolvida pelos professores, na busca da exploração da linguagem geométrica correta; que a variável

corpos redondos, têm os cones e cilindros como figuras mais referenciadas, não sendo identificado o trabalho relacionado a tarefas ligadas a comparação com os poliedros; que na variável *características*, foi salientada uma carência em relação ao registro semiótico da atividade cognitiva referente à formação e tratamento, pela deficiência identificada na habilidade de visualização, deixando de serem abordadas informações importantes das figuras espaciais; por fim, na variável *planificação*, identificamos que o reconhecimento da planificação das figuras tridimensionais se dá por meio do uso da abertura de embalagens e do uso dos moldes das figuras espaciais, principalmente as que vem no final dos livros didáticos.

Para o conhecimento pedagógico matemático buscamos explorar a postura de um professor ativo, que saiba estruturar seu tempo de aula, liderando, salientando e dirigindo o processo do ensino e aprendizagem da geometria espacial elementar, apresentando as fases do modelo van Hiele no desenvolvimento das atividades conforme afirma Gutiérrez (1992), como sugestão de conhecimentos no processo de ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar.

Assim sendo, percebemos no quadro 37, a postura ativa do professor, buscando identificar o que os alunos já sabem, por meio de trabalhos em grupos, aulas passeios, uso de experimentos utilizando várias representações de um registro, materiais concretos, observações e incentivo à descrição oral. Foi percebido também, que as fases do modelo van Hiele já eram mobilizadas pelas docentes, mesmo não conhecendo este modelo, conforme percebemos na média sobre o conhecimento pedagógico matemático mobilizado segundo as docentes na figura 26, e na fala de uma docente em S3E3 em 28min53s dizendo ser um conhecimento utilizado em todas as aulas.

Assim, por meio do confronto entre a análise *a priori* e *posteriori*, chegamos às seguintes conclusões referentes ao conhecimento pedagógico matemático: que a variável *letramento matemático* é mobilizada por meio de atividades que exploram a realidade do aluno; que a variável *investigação (exploração)* e *empirismo (experimentação)* são complementares e se dão por meio de atividades em que os alunos tenham que levantar hipóteses na realização de experimentos, testar e verificar o processo; que a variável *descrever*, é feita pelo estímulo constante da utilização da descrição oral durante todo o processo educativo, para estimular a autonomia e verificar a opinião do colega; que variável *associar (relacionar, classificar)*, *comparar* e *reconhecer* são complementares, sendo realizadas envolvendo o uso de diversas representações, principalmente com o uso de figuras do livro, embalagens e objetos do mundo físico, por meio da observação das figuras usadas e identificadas nas aulas passeio; e por fim,

a variável *interação*, é desempenhada pela cooperação entre os alunos no trabalho em grupo na construção de jogos e no uso de materiais concretos.

Para o conhecimento tecnológico buscamos averiguar nos professores a habilidade de operar as diferentes tecnologias e a habilidade de aprender e adaptar-se a uma nova tecnologia, explorando os paradigmas de Parzyzs (2006) correspondentes à Geometria concreta (G0) e da Geometria espaço-gráfica (G1).

Assim sendo, percebemos no quadro 38 que o conhecimento tecnológico referente à Geometria Concreta (G0) está relacionado ao uso das embalagens, brinquedos, jogos, músicas, poemas e cantigas, uma vez que, os professores se apropriam apenas dos aspectos perceptíveis da realidade ou do material concreto. O conhecimento tecnológico referente à Geometria espaço-gráfica (G1) está relacionado ao uso do origami, moldes das planificações das figuras espaciais, massa de modelar, palitos ou gravetos, imagens extraídas da internet, livros, jornais, revistas, e fotografias realizadas nas aulas passeios, pois utilizam destas tecnologias como forma de representar os objetos físicos explorados.

Diante disto, mediante ao confronto entre a análise a priori e posteriori, chegamos às seguintes conclusões pertinentes ao conhecimento tecnológico: que a variável *tecnologias tradicionais*, é uma das mais mobilizadas pelos docentes, na exploração de diversos textos que abordem as figuras espaciais, na construção de origamis e da construção de figuras espaciais a partir dos moldes de suas planificações, na modelagem com o uso da massinha de modelar, fabricadas em alguns casos, com farinha de trigo; que a variável *novas ferramentas (canudos, palitos)*, são utilizados para a construção das estruturas dos poliedros; que a variável *objetos do mundo físico (embalagens)*, são muito utilizados por serem mais acessíveis; que a variável *material didático estruturado (sólidos geométricos)*, são mais manipulados nos ensino presencial vinculados com jogos; que na variável *imagem/foto*, seu uso se dá mediante imagens extraídas da internet, livros, jornais, revistas ou tiradas por meio de fotografias com o celular; por fim, a variável *hardware (computador e smartphone)*, foi a tecnologia menos utilizada na prática educativa dos professores, conforme vemos na figura 28 e seu uso se dá apenas como ferramenta para pesquisa e comunicação com os alunos.

Para o conhecimento pedagógico do conteúdo buscamos averiguar a familiaridade que o professor tem com os erros mais comuns dos alunos e quais são os mais propensos de acontecer, se o professor sabe o quê e como ensinar e se compreende os programas e materiais instrucionais que regem o ensino da geometria espacial elementar, por intermédio de atividades que exploraram a apreensão discursiva na interpretação de um problema e explicitação dos elementos das figuras espaciais observadas e, da sua apreensão perceptiva.

Assim sendo, em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, percebemos no quadro 39 que o professor tem familiaridade com os erros mais comuns dos alunos em relação ao tipo de atividade manual a ser desenvolvida, principalmente quanto ao uso das tecnologias tradicionais, pois compreendem que o aluno está em processo de desenvolvimento da coordenação motora. Além disso, as docentes sabem explorar a atividade a partir da observação da figura/imagem do objeto espacial, porém limitando na exploração dos nomes, reconhecimento, identificação de algumas características e planificações, principalmente por meio dos moldes que vem em anexo aos livros didáticos.

Nesta situação, por meio do confronto entre a análise a priori e posteriori, chegamos às seguintes conclusões referentes ao conhecimento pedagógico do conteúdo: que a variável *articulação vertical*, é mobilizada pelos docentes mediante roda de conversa com os alunos para saber o que já aprenderam, e assim, poder progredir com os componentes curriculares tendo como referências o livro e a BNCC; que na variável *modelagem matemática*, o processo de aprendizagem ocorre principalmente com o uso de tecnologias tradicionais e atividades envolvendo experimento, comparação, descrição das formas observadas, porém, no estudo das planificações decorrentes à preferência ao uso dos moldes das figuras espaciais já prontas ao invés de incentivar o aluno a fazê-las, resulta ao contrário do que sugere a BNCC (2017), dificulta o desenvolvimento do letramento matemático e que somado à preferência do uso das tecnologias tradicionais, também impossibilita o desenvolvimento do pensamento computacional.

Para o conhecimento tecnológico do conteúdo buscamos averiguar quais tecnologias são mais adequadas para cada tipo de conteúdo abordado e como os conteúdos podem ser modificados por elas, por meio de atividades que exploraram a apreensão perceptiva, a apreensão discursiva, a apreensão sequencial e a apreensão operatória.

Assim sendo, em relação ao conhecimento tecnológico do conteúdo, percebemos no quadro 42 que as tecnologias mais utilizadas são as tradicionais, objetos do mundo físico (embalagens e materiais reutilizados ou reciclável), novas ferramentas (palitos/gravetos) e imagem/foto, sendo exploradas por meio de atividades envolvendo a construção das figuras espaciais, desenhos, jogos, brincadeiras e experimentos.

Diante disto, por meio do confronto entre a análise a priori e posteriori, chegamos às seguintes conclusões referentes ao conhecimento tecnológico do conteúdo: que a variável *projetos*, são estratégias utilizadas pelos docentes nas aulas passeios, procurando trabalhar com a realidade local do aluno, e por meio delas utilizar os materiais disponíveis para a construção das figuras espaciais usando moldes ou massinhas; que na variável *representar*, os registros

usados para elucidar um objeto matemático são os objetos do dia a dia, as figuras espaciais já construídas e os materiais reutilizados ou reciclados; que na variável *desenho*, ao contrário do que sugere os livros didáticos – *Ápis Matemática* e *Vem voar* como recurso tecnológico utilizado para representar um sólido geométrico na resolução de uma situação-problema, é usado pelos professores com os alunos como forma de representar os objetos do seu dia a dia que se assemelham com as figuras espaciais; que a variável *figuras*, foi colocada no currículo de formação de professores do Cederj como mecanismo usado no desenvolvimento da visualização, e esse processo foi expresso pelos professores como recurso da utilização das gravuras e moldes, principalmente os que vêm no livro didático, do uso das embalagens e dos origamis construídos das figuras espaciais; na variável *ludicidade*, o levantamento de alguns questionamentos, registros ou conteúdos matemáticos são realizados por meio do uso de experimento, vídeos, jogos, brincadeiras e quebra-cabeças, todavia apresentam insegurança nessa realização no ensino à distância; e, por fim, a variável *visualização*, correspondente ao processo cognitivo importante de observação do conteúdo matemático explorado, foi expressa anteriormente com o uso de figuras, entretanto foi identificado nas docentes durante as atividades envolvendo tecnologias digitais, que além de dificuldade operacionais, o tamanho de como o objeto ou figuras são apresentados pode atrapalhar no reconhecimento de suas características.

Para o conhecimento pedagógico da tecnologia buscamos averiguar o saber pedagógico do professor sobre cada uma das tecnologias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial elementar, por meio de atividades que abordaram a apreensão discursiva e perceptiva na exploração de figuras de objetos do cotidiano, e da conversão da representação destas figuras para a representação das imagens de desenhos exibidos nos livros didáticos.

Assim sendo, em relação ao conhecimento pedagógico da tecnologia, percebemos no quadro 45 que o saber pedagógico docente em relação ao uso das tecnologias está quase sempre vinculado ao desenvolvimento do letramento matemático e a ação pedagógica com o foco na alfabetização.

Diante disto, por meio do confronto entre a análise a priori e posteriori, chegamos às seguintes conclusões referentes ao conhecimento tecnológico do conteúdo: que na variável *escrita*, a produção desse recurso é realizada na descrição do que é visto da observação das imagens e gravuras expressas nos livros didáticos, além da criação de outras possibilidades de atividades com o foco na alfabetização, como exemplo, modelar as letras dos nomes das figuras espaciais e registrá-los no papel; que a variável *paródias*, recebeu um acréscimo da *música* para complementar os resultados encontrados, então passou a ser variável *paródias/música*, que

assim como foi posto no currículo de formação de professores da UFF como método para oportunizar a construção de conceitos mais sistematizados e completos, é realizado pelos docentes em um trabalho coletivo com a turma na construção de paródias a partir de músicas que os alunos gostem; que na variável *jogos*, a construção dos conceitos é explorada por meio do uso de embalagens, em atividades de encaixes, de comparação com os sólidos geométricos e com os blocos lógicos, e usado também, como processo de recuperação paralela; que a variável *vídeos*, assim como colocado nos PCN (1997) e na BNCC (2017), como recurso didático integrado às situações que levem a análise e reflexão para a compreensão e utilização das noções matemáticas, foi expresso pelos docentes vinculado na exploração da ludicidade, todavia, apenas para o ensino a distância ao introduzir uma tarefa como forma de trazer uma compreensão das noções matemáticas a serem exploradas; e por fim, na variável *software*, foi identificado nenhum conhecimento em relação aos *softwares* de Geometria, além de identificar a falta de recursos e o medo/anseio de alguns dos docentes na utilização das tecnologias digitais, ainda assim, percebemos uma vontade da utilização de atividades criadas na comunidade do GeoGebra em relação à Geometria espacial e que foram apresentadas na formação às docentes, conforme percebemos nas falas das professoras no final das atividades em S8, como exemplo em 1h31min39s “agora é com a gente né, eu pretendo treinar um pouquinho para poder inserir isso nas aulas”.

Para o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo buscamos promover no professor a compreensão de representações de conceitos e de técnicas pedagógicas usando as tecnologias e, de como elas podem ajudar a lidar com as dificuldades dos alunos por meio de atividades referenciadas por Gutiérrez (1996a), explorando o desenvolvimento da visualização, permeando os estudos de Duval (1995) por meio da investigação dos aspectos perceptíveis do que é visto, da conversão em diferentes registros de representações e do uso do discurso dedutivo no levantamento de hipóteses e premissas durante a execução das atividades no processo de coordenação, realizando desta forma, a exploração dos paradigmas de Parzyzs (2006) correspondente a geometria, (G0), (G1) e (G2).

Assim sendo, em relação ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo, percebemos em S8 e no quadro 47 que a construção do conhecimento geométrico correspondente à Geometria Concreta (G0) se deu no desenvolvimento da visualização, realizado no primeiro momento, com a interpretação de informações visuais das imagens das pirâmides do Egito expressas no livro didático, usadas para criar as primeiras imagens mentais. Partindo assim, para a construção do conhecimento geométrico corresponde a Geometria Espaço-gráfica (G1) na qual as pirâmides receberam uma representação gráfica exteriorizada

nas imagens de fotografias de localidades de Angra dos Reis, gerando outras imagens mentais, e posteriormente, na apresentação da imagem da figura de uma pirâmide formada por palitos e massinhas, apresentada em forma de gravura no livro didático e na forma estrutural construída com jujubas e palitos e apresentada por meio de foto construídos por alunos da rede municipal de Angra. Por fim, as últimas imagens mentais desenvolvidas foram realizadas na construção do conhecimento geométrico corresponde à Geometria Proto-axiomática (G2), que se deu por meio das figuras virtuais apresentadas nas atividades com o GeoGebra, na qual as representações das pirâmides usadas anteriormente, permitiram o levantamento de hipóteses e premissas intuitivamente, como exemplo, na identificação de que as arestas tinham o mesmo tamanho, e percebemos na construção das pirâmides realizadas pelas docentes e expressa na figura 32, que essas características foram respeitadas.

Além disso, o desenvolvimento da visualização também se deu por meio da interpretação de imagens, indagadas durante a aplicação das enquetes, para gerar as informações, ainda não perceptíveis pelo processo de observação, e gerar novas análises das imagens mentais, e provocar as transformações das imagens mentais em outras imagens mentais. Somado a isso, o desenvolvimento da visualização também permeou os estudos de Duval (1995), por meio da apreensão perceptiva ao identificar ou reconhecer as unidades figurais das pirâmides em diferentes registros (imagem, gravura, figura estrutural, figura virtual), da apreensão operatória ao modificar o tamanho das arestas na figura virtual e seu posicionamento na tela, da apreensão discursiva interpeladas durante a realização das enquetes e na interpretação dos controles deslizantes na figura virtual no GeoGebra, e na apreensão sequencial na construção das figuras realizadas com palitos e massinhas para a sua forma virtual construída no GeoGebra.

Diante disto, por meio do confronto entre a análise a priori e posteriori, chegamos às seguintes conclusões referentes ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo: que a variável *história da matemática*, explicitada pelos PCN (1997) como campo de problemas que permite construir e esclarecer ideias nos alunos, apenas foi identificado na mobilização por parte dos professores de alguns indícios em relação ao surgimento do sistema de numeração, principalmente quando são introduzidos nos livros didáticos, porém, como foi constatado que o livro didático é uma tecnologia bastante usufruída pelos docentes, temos que ela pode ser um meio importante para a divulgação desta variável; somado a isso, a variável *etnomatemática*, correlacionada com a variável *história da matemática*, e que segundo o currículo de formação de professores na UFF, possibilita a concepção construtivista de uma aprendizagem significativa, percebemos que, mesmo não sendo uma variável didática conhecida pelos

professores, eles souberam relacioná-la a atividades significativas envolvendo o contexto cultural do aluno; e por fim, a variável *resolução de problemas*, explicitada pela BNCC (2017) como processo matemático fundamental, são evidenciados pelos professores na identificação da linguagem geométrica usada erroneamente pelos alunos, e no processo do desenvolvimento do letramento matemático por meio da adaptação de atividades envolvendo objetos comuns na região onde os alunos vivem, além disso, apresentam dificuldades ao manifestar as características das figuras virtuais para desenvolver o pensamento computacional, apesar de aceitar que as atividades envolvendo as tecnologias digitais são importantes no processo de resolução de problemas.

Enfim, a integração do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial foi constatado na avaliação postada pela docente na plataforma do Google Classroom, mesmo que discretamente, como sugestão em uma das atividades a ser realizada no GeoGebra. Além disso, as tarefas foram organizadas se apropriando das fases do modelo van Hiele e desenvolvidas apoderando-se da percepção visual nos tratamentos figurativos (designando a figura), coordenada com o tratamento discursivo (dando nomes aos objetos que representam as figuras), e envolvendo os diversos tipos de representações de registros semióticos, desenvolvendo dessa forma, as atividades mentais da figura e relacionando-as com as memórias de objetos dos cotidianos.

Com isso, entendemos que o estudo da engenharia didática possibilitou investigar as interações dos conhecimentos propostos pelo TPACK no processo de ensino e aprendizagem de figuras espaciais pelos professores dos anos iniciais, triangulando com a investigação empírica do estudo de caso e a investigação explanatória da análise documental, chegando a algumas conclusões, a serem explicitadas no próximo capítulo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Enfim, chegamos à última seção desta pesquisa, e neste espaço considero adequado falar em primeira pessoa, para destacar a voz do pesquisador e educador matemático. Desse modo, começo realçando minha satisfação pessoal e profissional na realização do estudo da linha de pesquisa *A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores* que investigou *os conhecimentos geométricos mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental em uma proposta de formação continuada com figuras espaciais*.

Conforme comentei na introdução deste trabalho, iniciei o doutorado em educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em 2017, focado no tema relacionado com a formação em Geometria dos professores que atuam nos anos iniciais do EF, e me deparei, após revisão de literatura, que existia uma falta de publicações que explorasse o conhecimento geométrico mobilizados por esses profissionais, principalmente quanto ao estudo de figuras espaciais.

Assim, o objetivo principal desta pesquisa foi distinguir os tipos de conhecimentos que são mobilizados por professores dos anos iniciais do EF, ao trabalhar com Geometria Espacial elementar. Para isso, utilizei o TPACK como base do conhecimento do professor, bem como foi colocado por Niess et al. (2009). Antes de expor as considerações finais levantadas nesta pesquisa, versarei sobre cada um dos objetivos específicos usados nesta investigação.

Primeiramente, verifiquei como objetivo específico, quais recomendações são exibidas nos documentos políticos, os PCN (1997), as DCN (2013) para o EF, e a BNCC (2017), em relação às figuras espaciais. Percebi algumas similaridades entre esses documentos oficiais, apesar da utilização de diferentes nomenclaturas ao ser referirem a uma mesma categoria do conhecimento.

Posto isto, percebi que as DCN têm a função de suggestionar o trabalho do professor em como os assuntos podem ser abordados, e que os PCN e a BNCC são documentos complementares com a função de guiar a prática do professor, sendo que este último, o mais atual. Apesar disso, aponte na investigação que os professores já utilizam a BNCC em sua prática, direta ou indiretamente, seja se guiando no próprio documento oficial, seja se orientando nos livros didáticos, que por sua vez, já estão estruturados seguindo este documento balizador.

Além disso, as recomendações registradas nesses documentos oficiais, expressadas na figura 10 do capítulo 5, apresentaram um quadro bem estruturado, e por esse motivo, acredito

que ele sirva como arcabouço para direcionar tanto a prática docente quanto a formação de professores em relação ao ensino e aprendizagem da Geometria espacial elementar.

Para o segundo objetivo específico, analisei as ementas do currículo de matemática do curso de licenciatura em pedagogia das universidades locais de Angra dos Reis, com o intuito de identificar quais são os conhecimentos de Geometria Espacial explorados na formação de professores. Percebi a utilização de nomenclaturas diferentes para se referir a ideias comuns, além de seguir um quadro parecido com as recomendações registradas nos documentos oficiais.

Todavia, os currículos dos cursos analisados buscam uma maior compreensão em relação às técnicas pedagógicas usando tecnologias, e uma maior preocupação com a preparação profissional formal. De fato, percebemos, a partir da análise *a posteriori* da *live 2*, que o conhecimento pedagógico foi incorporado na prática docente, sendo relatado em vários momentos pelas professoras durante a formação. Porém, conforme percebemos na análise *a posteriori* da *live 3*, que ainda não ocorreu a integração na prática das técnicas pedagógicas usando as tecnologias digitais.

Percebi ainda, que desde 2003, Nacarato e Passos já defendiam o oferecimento de disciplinas voltadas à Metodologia para o Ensino de Matemática nos cursos de Pedagogia ou Normal Superior com carga horária maior que 60 horas. Além disso, como vimos na análise das ementas do currículo de Matemática do curso de licenciatura em pedagogia nas universidades locais no município de Angra dos Reis, a carga horária reservada para tais disciplinas praticamente dobrou em relação ao que era ofertado em 2003, aumentando as abordagens dos conhecimentos pedagógicos, mas faltando maior exploração dos conteúdos específicos dos diversos eixos da matemática e da formação mais específica das diversas tecnologias digitais, principalmente quanto ao uso de vídeos e *softwares* matemáticos.

Por esse motivo, defendo que os cursos de licenciatura em pedagogia devam rever o currículo de formação dos professores e suas ementas, explorando disciplinas voltadas aos conteúdos específicos dos diversos eixos da Matemática e a incorporação em todas as disciplinas do uso de tecnologias digitais, tanto na prática docente quanto da discente. Dessa forma, essa pesquisa abre um leque para investigações sobre como vem ocorrendo a integração do conhecimento das tecnologias digitais na prática do professor formador.

Percebi, por meio do Anexo 3, referente à formação dos professores que atuam nos anos iniciais da rede municipal de Angra dos Reis, que apenas metade desses docentes tinha curso superior em licenciatura em pedagogia, e assim, nada adiantaria repensar no currículo de formação de professores dos cursos de licenciatura em pedagogia se esse conhecimento não chegar a esses profissionais. Por esse motivo, defendo que as universidades devam formentar

formações para os professores que estão em sala de aula, com o foco não só nas técnicas pedagógicas usando as tecnologias digitais, mas na exploração dos conteúdos específicos da Matemática e do uso adequado das tecnologias digitais no estudo de tais conteúdos. Assim, acredito na parceria das universidades com as secretarias de educação para a viabilização dessas formações, conforme ocorreu comigo, doutorando da PUC-SP, com a secretaria de educação de Angra dos Reis.

Para o terceiro objetivo específico, analisei o conhecimento geométrico de figuras espaciais dos professores por meio de uma avaliação diagnóstica. Kaleff já havia identificado desde 2008, em uma formação continuada com professores, que estes profissionais apresentavam carências na visualização e interpretações gráficas, no uso de diversas representações de um objeto espacial e no traçado de desenhos das figuras espaciais, e defendia formações continuadas de Geometria para esses docentes.

No ano de 2020, muitas dessas deficiências ainda foram encontradas por meio da avaliação diagnóstica aplicada a um grupo de professores dos anos iniciais do EF que atua na rede municipal de Angra dos Reis, talvez por conta de parte desses docentes não terem o curso superior em licenciatura em Pedagogia, ou talvez porque as formações continuadas em Geometria são pouco fomentadas para esses professores, carecendo maior estudo sobre como elas estão sendo oferecidas a esses profissionais.

Para maior aprofundamento das informações identificadas na avaliação diagnóstica, realizei uma entrevista com seis professores que atuam nos anos iniciais do EF e que apresentam diferentes tempo de experiência profissional. Constatei, conforme percebido na avaliação diagnóstica, uma escassez em relação aos conteúdos de Geometria espacial elementar, e que esses docentes orientam sua prática por meio de livros, pesquisas na internet e planejamento escolar.

Foi entendido também, o uso excessivo das tecnologias tradicionais na prática docente, e que as tecnologias digitais são usadas apenas como ferramentas auxiliares de pesquisa no planejamento de suas aulas. Percebi também que, durante a aplicação da formação, os professores que tinham mais tempo de experiência docente são os que apresentavam mais dificuldades no uso das tecnologias digitais. Assim, como foi mencionado por um docente durante a formação, os professores que amadureceram envolvidos com tecnologias digitais podem até não saber mexer em certos recursos, porém apresentam mais facilidades na compreensão do uso dessas tecnologias, como de fato foi observado.

Não obstante, pudemos perceber que os professores que participaram da formação puderam avançar nos três primeiros níveis descritos por Niess et al. (2009), quer sejam

reconhecer, aceitar e adaptar, conforme percebemos nas manifestações das docentes durante a formação. Além disso, uma das docentes, atingiu o nível quatro: explorar, pois implementou uma tecnologia digital em sua prática, conforme foi notado na figura 39, em uma das atividades propostas para sua turma no ensino remoto. O quinto e último nível: avançar, não pôde ser alcançado pelas docentes, talvez pelas dificuldades apresentadas com as tecnologias digitais, ou talvez seja pelo pouco tempo dedicado à exploração do *software* do Geogebra durante a formação.

Acredito, por esse motivo que, as formações continuadas a serem oferecidas a esses profissionais da educação, deva levar em consideração esses fatores, ou seja, formações para o uso básico na prática em sala de aula das tecnologias digitais, para profissionais que apresentam pouca compreensão destas tecnologias, e formações para o uso avançado destas tecnologias para os profissionais que apresentam uma maior compreensão destes recursos, principalmente quanto ao uso de vídeos digitais e *softwares*, como o GeoGebra para o ensino da Geometria espacial elementar.

Para o quarto objetivo específico, analisei os conhecimentos de Geometria Espacial presentes nos livros didáticos recomendados pelo PNLD, buscando identificar referências sobre como o ensino e aprendizagem de figuras espaciais devam ser desenvolvidos no currículo do terceiro ano do EF, e buscar reconhecer quais são as tarefas curriculares que os professores devam ensinar em relação ao conhecimento do conteúdo, do pedagógico e da tecnologia.

Percebi que os livros didáticos no PNLD 2019, já seguiam as orientações da BNCC (2017), e que as habilidades referentes ao estudo de figuras espaciais foram distribuídas ao longo do livro didático analisados, mostrando uma tendência na articulação entre as unidades temáticas e no ensino espiral. Todavia, conforme foi constatado na análise *a posteriori* na *Live 1*, a abordagem das formas/figuras geométricas espaciais eram feitas sem articulação entre as unidades, com a exploração das figuras planas antes das espaciais e com a exploração de todas as figuras espaciais ao mesmo tempo. Dessa forma, os docentes apresentaram uma insuficiência em relação ao conhecimento específico do conteúdo de Geometria espacial elementar e na mobilização da articulação horizontal entre esses conteúdos. Percebi que, durante a formação, a mobilização da prática desse conhecimento se dá por meio do trabalho com a realidade do aluno e do trabalho interdisciplinar.

Foi constatado também, que os livros didáticos são um recurso bastante usado na prática docente, e que apresentam em suas tarefas uma articulação grande com o uso de tecnologias tradicionais e uma falta de articulação entre o conhecimento das tecnologias sugeridas com o conhecimento pedagógico da tecnologia. Por consequência, a ausência de tarefas voltadas ao

uso de tecnologias digitais impossibilita a incorporação na prática docente do uso de recursos voltados a essas tecnologias. Esse motivo me leva a acreditar que, os livros didáticos poderiam explorar mais as tecnologias digitais em suas tarefas, para que tanto os professores, quanto os alunos pudessem incorporar esses recursos em sua prática educativa, e as editoras pudessem oferecer formações pedagógicas voltadas no uso dos recursos expostos nos livros didáticos.

Reafirmo aqui, o que mencionei no capítulo anterior que, como os livros didáticos e paradidáticos são recursos bastante usados na prática docente, poderiam não só introduzir conceitos direcionando o planejamento, mas servir também como um complemento para a formação desses professores. Dessa forma, defendo que além do livro didático referente ao manual do professor, as editoras poderiam oferecer diferentes livros paradidáticos abordando distintas temáticas e conteúdos direcionados para diferentes anos de escolaridade. Vale ressaltar, que o PNLD já disponibiliza livros paradidáticos, porém, voltados para as bibliotecas escolares, e em um número reduzido de escolha. O que argumento, é que as editoras pudessem investir em mais títulos de paradidáticos e que esses livros fossem encaminhados também aos professores, principais agentes da ação educativa.

Enquanto o livro didático for um recurso pensado apenas no uso na prática do aluno, e não pensarmos que ele também é um importante guia do professor, estaremos seguindo um caminho no qual a culpa das deficiências dos conhecimentos docentes recai apenas no profissional da educação, e que é ele que tem que buscar meios e caminhos para suprir essa ineficiência, sem saber ao certo por onde deve passar. Todavia, conforme foi constatado, o livro didático também é um importante guia do professor, e, por isso, ele deve direcioná-lo a caminhos precisos, indicando e fornecendo meios de como suprir a falta de alguns conhecimentos importantes para a sua prática educativa.

Assim sendo, defendo também, que as editoras poderiam oferecer aos docentes, em parceria com o MEC, livros técnicos científicos voltados para a formação de professores e indicados por diversas universidades, para que de certa forma, alguns dos conhecimentos do TPACK pudessem ser implementados. Reafirmo a importância da parceria das universidades com as secretarias de educação para o fomento de formações continuadas aos professores, mas também, a parceria com as editoras, para a disponibilização de livros didáticos, paradidáticos e técnicos formativos aos docentes.

Para o quinto objetivo específico, analisei o conhecimento geométrico de figuras espaciais dos alunos baseado nas provas do Saeb. Percebi que as avaliações externas, Prova Brasil e ANA, possuem uma matriz de referência que vai ao encontro das orientações das habilidades expostas da BNCC (2017).

Conforme foi evidenciado na Proficiência em Matemática do 5º ano do EF do Saeb 2017, os alunos da dependência administrativa do município de Angra dos Reis se encontram no nível 4, ou seja, eles apenas reconhecem a planificação de uma pirâmide dentre um conjunto de planificações, mas não distinguem a planificação em diferentes registros do cubo e do cilindro, nem diferenciam os objetos com forma esférica. Fato justificado pela carência, de pelo menos algumas dessas habilidades nos professores, pois durante a execução da formação, foi constatado na *live 1* que os professores apresentam dificuldade na visualização das esferas e semiesferas em diferentes representações e na caracterização de algumas das formas/figuras geométricas espaciais.

Um fator que chamou bastante atenção foi exposto no capítulo 5 nas figuras 16 e 17, referentes aos resultados da Prova Brasil 2017, 2015 e 2013, na qual temos que os alunos do 5º ano do EF da rede municipal de Angra dos Reis que não atingiram nenhuma das habilidades esperadas em Geometria espacial elementar representam 35,3% em 2013, 39% em 2015 e 36,8% em 2017, enquanto os que atingiram todas as habilidades esperadas representam 0% em 2013, 0,1% em 2015 e 2017. Além disso, temos na figura 19, exposta no capítulo 5, em relação à análise dos resultados divulgados do Saeb/ANA, 2013, 2014, 2016, que os alunos do 3º ano do EF que estavam em processo de desenvolvimento das habilidades esperadas em Geometria espacial elementar representavam 18,6% em 2013, 23,9% em 2014 e 24,6% em 2016 .

Uma causa para esse baixo resultado, foi constatado durante a formação e é relacionado à carência docente em relação aos seguintes conhecimentos específicos do conteúdo: quanto à sequência didática, muitas vezes abordando as figuras planas antes das espaciais ou explorando todas as figuras espaciais ao mesmo tempo; ao uso de algumas linguagens geométricas, usando em alguns casos a linguagem geométrica inadequada, sem saber que está cometendo o erro; a falta de visualização, apresentando a apreensão dos registros figurais para figuras virtuais por meio de tratamentos em um mesmo registro, a falta de reconhecimento das características das figuras, e dificuldade operacional com a tecnologia digital para observar as atividades; somada com a deficiência no conteúdo, provocando dificuldades na caracterização das figuras espaciais, apresentando carência no registro semiótico na atividade cognitiva referente à formação (seleção de signos) e no tratamento (informações, significados, características visuais) ao observar figuras espaciais.

Sugiro aqui como forma de diminuir esse déficit do conhecimento específico do conteúdo de Geometria espacial elementar, que as futuras formações voltadas para os docentes que atuam nos anos iniciais do EF começassem a exploração desse conhecimento, assim como foi proposto na engenharia didática realizado nesta pesquisa. Todavia, percebi na realização da

formação, que a exploração do conhecimento específico deste conteúdo necessitaria de um tempo maior para melhor exploração de cada uma das formas/figuras geométricas estudadas.

O sexto e sétimo objetivos específicos são complementares, com o propósito de identificar respectivamente os tipos de conhecimentos de Geometria Espacial mobilizados por professores dos anos iniciais EF na prática de sala de aula e no uso de ferramentas tecnológicas. A princípio, essa investigação se daria por meio da análise dos diários dos docentes que atuam no 3º ano do EF, da observação direta do exercício do professor em sala de aula e das anotações do material transcrito das gravações dessas aulas. Todavia, por causa da pandemia da Covid-19, essas análises não puderam ser realizadas dessa forma, e a averiguação dessa prática ocorreu durante a formação, ao colocar o professor em constantes situações de discussão e reflexão, para a utilização de suas falas e dos registros escritos como objetos de análises desses conhecimentos. Assim, utilizei os registros das observações feitos nas *lives* logo após sua finalização, o uso de enquetes e questionamentos em que os professores interagiram e responderam durante a realização da formação.

Averigui que os professores mobilizam um conhecimento do contexto de forma ampla, com preocupação no aluno e em seu processo de aprendizagem. Procuram buscar a autonomia do aluno com parceria com os pais/responsáveis, exploram atividades ligadas à interdisciplinaridade e com a realidade local e cultural do aluno, usam materiais reutilizados ou reciclados, assim como, materiais que foram oferecidos pelos governos municipal e federal, e procuram trabalhar com projetos e construção de jogos.

Vale ressaltar que o trabalho docente é muitas vezes dificultado pelas orientações governamentais, que direciona para uma preocupação burocrática ao invés da educativa, e que muitas das vezes limita o que o professor pode ou não fazer em sua prática, como exemplo, limitar o número de laudas de uma atividade a ser impressa. Outra dificuldade, somada ao uso das tecnologias digitais e a falta de alguns recursos, está inexperiência docente no ensino à distância, na qual os docentes tiveram que ir descobrindo caminhos e meios em como disponibilizar as atividades que foram planejadas para o ensino presencial, para o ensino remoto, enfrentando como principal desafio o acesso do aluno a tarefa e a sua interação com o professor ou outro colega.

Além disso, a única formação que os professores dos anos iniciais do EF da rede municipal de Angra dos Reis fizeram nesse período de pandemia da Covid-19, além da que ofereci para algumas unidades escolares, foi direcionada ao uso do livro digital com parceria da Editora Moderna. O que foi oferecido para o EaD foi direcionado ao uso de apenas um

recurso, ou seja, careceu da disponibilização de uma formação mais específica em relação a essa modalidade de ensino.

Diante disso, percebo a necessidade do oferecimento de formações que fomentem uma preparação docente para o ensino na modalidade EaD e na modalidade do ensino híbrido, tanto para os professores em formação, e nesse caso é preciso rever o currículo de formação dos professores, quanto para os que já estão em sala de aula, tendo que descobrir meios e métodos para tentar oferecer alguma tarefa aos alunos.

Somado a isso, deduzi que os professores apresentaram uma privação em relação ao conhecimento específico do conteúdo de Geometria espacial elementar, relacionado ao uso das formas/figuras geométricas espaciais, nomenclatura, corpos redondos, características e planificações. Dessa forma, reafirmo a necessidade do fomento de formações para esses docentes.

Em relação ao conhecimento pedagógico matemático temos que ele é bastante usado nas práticas dos docentes, não só na Matemática, mas em outras áreas do saber. Talvez, por ser um conteúdo usado em todas as áreas do conhecimento, ou talvez porque é um conhecimento bastante explorado no currículo de formação de professores. Uma observação percebida e que deve ser registrada aqui, é o fato de que os professores com menos tempo em docência apresentam um entusiasmo maior na busca de atividades, recursos e preparação de materiais a serem utilizados em sua prática de ensino. Todavia, conforme o tempo vai passando e esse profissional vai percebendo que muitas vezes, acaba trabalhando além da sua jornada de trabalho e comprando materiais com seu próprio dinheiro a ser usado com seus alunos, esse entusiasmo vai minguando, resultando no docente deixar de fazer alguma atividade ou ter que adaptá-la por falta de tempo, material ou dinheiro.

Temos que o conhecimento tecnológico mais explicitado por esses docentes se refere ao uso das tecnologias tradicionais, objetos do mundo físico (embalagens), novas ferramentas, como exemplo o uso de gravetos, imagens/fotos extraídas da internet, livros, jornais, revistas ou fotografadas com o celular. Em relação ao uso de computador e smartphone, utilizam basicamente como fonte de pesquisa e construção de atividades, pois tem ciência de que boa parte dos alunos não tem acesso.

Em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, assim como foi referenciado no conhecimento pedagógico matemático, foi percebido um domínio amplo em relação as variáveis desse conhecimento. Todavia, por conta da insuficiência em relação ao conhecimento específico do conteúdo, a articulação vertical vinculada à resolução de problemas carece de mais aprofundamento por parte dos docentes. A modelagem, na maioria das vezes, é bem

executada na prática, com exceção da exploração das planificações, pois preferem utilizar os moldes das figuras espaciais já prontos, ao invés de incentivar os alunos a fazê-los. Por esse motivo, defendo também formações que explorem o uso da modelagem matemática, tanto para os futuros professores quanto para os docentes que estão em sala de aula.

Em relação ao conhecimento tecnológico do conteúdo, percebi uma insegurança na preparação de atividades para o EaD, principalmente para os alunos do pré-escolar, e dificuldades operacionais com o uso das tecnologias digitais, principalmente com os professores com mais tempo em docência. É possível ou provável que esse seja o motivo pelo qual os docentes preferem utilizar tecnologias tradicionais. Além disso, os professores buscam trabalhar em função de projetos, com aulas passeios, construção de jogos, e das figuras espaciais por meio de massinha, origami, moldes das figuras espaciais, desenho, e se utilizando das figuras extraídas nos livros didáticos e do uso de embalagens.

Em relação ao conhecimento pedagógico da tecnologia, percebi uma associação em relação ao uso das tecnologias tradicionais com o uso da representação das letras ou da escrita dos nomes das figuras espaciais. Utilizam paródias/músicas na exploração da ludicidade, utilizam jogos construídos em conjunto com os alunos usando embalagens e as aplicam na recuperação paralela, usam os vídeos apenas no EaD para oferecer explicação das atividades, e não utilizam de nenhum *software* de Geometria.

Vale ressaltar, que a falta de certos recursos pode limitar a atividade a ser proposta, e que o uso pedagógico em relação ao recurso vídeos e *softwares* no ensino da Geometria espacial elementar demanda de mais aprofundamento nesta pesquisa. Todavia, foi percebido que os professores não têm familiaridade com o uso de vídeos e *softwares* no ensino e aprendizagem da Geometria, necessitando do oferecimento de formações para o uso específico desses dois recursos.

Por fim, em relação ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar foi percebido que, o pouco da história da matemática que os professores conhecem, referem-se ao surgimento do sistema de numeração. Com relação à etnomatemática identificada na pesquisa como outra categoria do TPACK, foi percebido que apesar de os docentes não saberem o que vem a ser ao certo, souberam relacionar as atividades significativas envolvendo o contexto cultural do seu aluno, principalmente com o uso de praias locais. Por fim, em relação a resolução de problemas, também identificado como outra categoria do TPACK, foi percebido que os professores realizam adaptações de atividades, com objetos comuns na região onde os alunos vivem, conseguem identificar alguns erros provocado pelos alunos, porém apresentam dificuldades em relacioná-los por meio de tecnologias digitais.

Diante disso, defendo que a história da Matemática ou história das ciências sejam oferecidas como uma disciplina nos cursos de formação de professores, e na forma de curso de extensão, correlacionando-a com a etnomatemática por meio de atividades envolvendo culturas diversas, e abordando a resolução de problemas para a construção de conceitos. Além disso, acredito que os livros didáticos e paradidáticos poderiam melhor explorar a história da Matemática nos seus cinco eixos temáticos, abordando além da introdução de atividades e do surgimento do sistema de numeração.

Dessa forma, entendo que se faz necessária mais pesquisa voltada ao uso da história da Matemática nos anos iniciais do EF, para melhor fomentá-la nos livros didáticos e paradidáticos e nos cursos de formação de professores. Assim como oferecer formação voltada ao uso da resolução de problemas com a preocupação do desenvolvimento do letramento matemático e no pensamento computacional, por meio de proposta de atividades com uso de materiais concretos e por meio do uso das tecnologias digitais, principalmente em relação ao uso do *software* do GeoGebra.

Conforme foi percebido na investigação, há carência de proposta de atividades de Geometria espacial elementar em português criadas na comunidade do GeoGebra. Isso abre um campo de pesquisa no Brasil para a construção de atividades relacionadas às habilidades de Geometria espacial elementar a serem disponibilizadas aos professores. Além do oferecimento de formação para ensinar a usar esse *software* e a utilização da comunidade do GeoGebra para a prática educativa.

Por fim, o último objetivo a ser averiguado, era propor uma formação continuada em Geometria Espacial elementar para professores dos anos iniciais do EF. Foi escolhido fazer na modalidade de EaD, por meio de *lives* realizadas pela plataforma do Google Meet. Apesar desta escolha, em que o oferecimento da formação pôde ser realizado para mais escolas, o número de professores que se inscreveram foi maior do que os que de fato realizaram a formação. Além disso, percebi que o número de participantes foi diminuindo durante a execução das *lives*. Também foi constatado vários problemas em relação à parte da tecnologia digital, que foge do alcance do formador, como exemplo problemas com o computador e fone dos formandos e falta ou oscilação do sinal da internet.

Mesmo assim, a proposta de formação foi executada, e por meio dela, pôde-se extrair os conhecimentos mobilizados pelos docentes, e assim, contribuir na averiguação do objetivo principal, que é identificar os tipos de conhecimentos que são mobilizados por professores dos anos iniciais do EF, ao trabalhar com Geometria Espacial elementar.

Dessa forma, observa-se na figura 40 no capítulo 7, o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial elementar necessário para o ensino, e assim, temos como quadro que pode servir como guia para direcionar a prática docente e o currículo de formação de professores.

De acordo com a observação na formação, vários professores que atuam nos anos iniciais do EF também atuam ou podem atuar na educação infantil, e dessa forma, uma complementação a este trabalho seria a investigação dos conhecimentos tecnológicos e pedagógicos do conteúdo de Geometria espacial elementar na Educação infantil, para que se possa refletir melhor sobre o currículo de formação de professores e, conseqüentemente, poder planejar formações mais específicas para esta etapa escolar.

Além disso, acredito que o quadro teórico e metodológico utilizado nesta pesquisa sirva de viés para futuras pesquisas complementares que explorem o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo da Geometria espacial dos docentes que atuam nos anos finais do EF, que atuam no Ensino Médio e nos que atuam no curso de formação de professores.

Assim, ficam esses resultados como contribuição para a área e para futuras pesquisas referentes ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de Geometria espacial, auxiliando na determinação de novos horizontes para a integração tecnológica na prática docente. Diante disso, pretendo não só divulgar os resultados encontrado nessa investigação, mas colaborar no fomento de formações aos docentes dos anos iniciais do EF em relação ao uso do *software* do GeoGebra, e na construção de atividades de Geometria espacial elementar em português para esse público, tornando-os públicos na comunidade do GeoGebra.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, Paulo. Conferências em paralelo: Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: ENSINO DA GEOMETRIA NO VIRAR DO MILÊNIO. 1999, Lisboa. **Encontro**. Lisboa: DEFCUL, 1999. p. 51-62.
- AIRES, Ana Paula; CAMPOS, Helena; POÇAS, Ricardo. Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: definição de quadrado com alunos de 6º ano de escolaridade. **Revista Latino americana de Investigación en Matemática Educativa**, Distrito Federal: Redalyc, v. 19, n.2, 2015. p. 151-176
- ALMEIDA, Marieli et al. Uma proposta de análise vertical: investigando o conhecimento matemático para o ensino de professores da educação básica. In: Encontro Mineiro de Educação Matemática, 7., 2015, São João Del-Rei, MG. **Anais...São João Del-Rei: UFSJ**, 2015, 12 p.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. Diálogos da matemática com outras tendências da educação matemática. In: I SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 2016, Bonito-Mato Grosso do Sul. **Anais...Bonito: Conferência 6**, 2016. V. 1.
- ARTIGUE, Michèle. La importancia de la creación y resolución de problemas en la ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (CIEM), 10., 2020, Perú. **Anais...Perú: PUCP**, 2020. Mesa de discusión.
- ARTIGUE, Michèle; BOSCH, Marianna; GÁSCON, Josep. La TAD face au problème de l'interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques. In: BOSCH, Marianna. et.al. **Un panorama de la TAD**. Paris: Université Aix-Marseille, 2011. p. 33 - 55.
- ARTIGUE, Michèle et al. **Ingeniería Didáctica Em Educación Matemática: Um esquema para La investigación y La innovación em La enseñanza y El aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Iberoamérica, 1995. 140 p.
- BAHIA, Ana Beatriz; SILVA, Andreza Regina Lopes da. Modelo de produção de vídeo didático para EaD. **Revista Paidéi@**, Unimes Virtual: v. 9, n. 16, Jul. 2017. Disponível em: <<http://periodicos.unimesvirtual.com.br/index.php?journal=paideia&page=index>>. Acesso em 28 março 2020.
- BALL, Deborah L.; BASS, H. With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners mathematical futures. In: JAHRESTAGUNG DER GESELLSCHAFT FIIR DIDAKTIK DER MATHEMATIK, 43RD, 2011, Oldenburg, Germany, 15 May 2011, 2009
- BALL, Deborah L.; **Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education**. Michigan - EUA, 1988. 271 f. Tese (Doctor of Philosophy) - Michigan State University, Michigan, 1988.

BALL, Deborah L.; THAMES, Mark H.; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of teacher education**, University of Michigan, November/ December, 2008. n.5, v.59

BALL, Deborah L.; With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics. **The elementary School Journal**, The University of Chicago Press, Mar. 1993. n. 4, v. 93

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016. 279 p.

BARGUIL, Paulo Meireles. Geometria na educação infantil e no ensino fundamental: contribuições do Fiplan. In: ANDRADE, Francisco Ari de; TAHIM, Ana Paula Vasconcelos de Oliveira; CHAVES, Flávio Muniz (org.). **Educação, saberes e práticas**. Curitiba, PR: CRV, 2016. 360 p. cap. 19, p. 233-250

BARQUERO, Berta; BOSCH, Marianna. Engenharia didática coo metodologia de pesquisa: de situações fundamentais a percursos de pesquisas. In: ALMOULOU, Saddo Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1 ed. Curitiba, PR: CRV, 2018. 572 p. cap.1, p.300-328.

BARRETO, Marcília Chagas; OLIVEIRA, Bárbara Pimenta de. Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica para o ensino de matemática. **Livro 1: Didática e Prática de Ensino na relação com a Escola**, E-Books: UECE, 2014. Disponível em: <<http://www.uece.br/endipe2014/index.php/2015-02-26-14-09-14/search?keyword=CONTRIBUI%C3%87%C3%95ES%20DA%20TEORIA%20DOS%20REGISTROS%20DE%20REPRESENT>>. Acesso em: 17 fevereiro 2019

BASNIAK, Maria I.; ESTEVAM, Everton J. G. Conhecimento tecnológico e pedagógico de matemática revelado por professores quando relatam suas práticas. **Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Especial Saberes Profissionais do Professor de Matemática (versãoonline): Amaz RECM, v. 14, n. 31, p. 03-21, Mar - Out, 2018.

BATTISTA, Michael T. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER JR, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Chalotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics, 2007. v.2, cap. 19, p. 843-908.

BISHOP, Alan J. A review of research on visualisation in mathematics education. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONALGROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 12th, 1988, Veszprem, Hungary. **Anais...Hungary: To the educational resources information center**, 1988. 1 v. p. 187 – 193.

BLOOM, W. Spatial and visual aspects. In: PROCEEDINGS OF THE SIXTH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 6., 1988. Hungary: JanosBolyai, 1988. p.375 – 378

BRASIL. **Escolha PNLD 2019 – Orientações**. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação e Ministério da Educação. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/guia-do-livro-didatico/item/11986-escolha-pnld-2019>>. Acesso em: 13 de janeiro de 2019.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF,1997a. 126 p.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática/ Ensino de primeira à quarta série. Brasília: MEC/SEF,1997b. 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 562 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria Executiva. Secretaria de Educação Básica. Conselho Nacional da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, CNE, CONSED, UDIME, 2017. 472 p.

CATALÁ, Claudi Alsina. et.al. Invitación a la Geometria. In: _____. Invitacion a la Didactica de la Geometría. 3. ed. Madri: Editorial Síntesis, 1995. p. 11-39.

CIBOTTO, R. A. G.; OLIVEIRA, R. M. M. A. TPACK – Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo: uma revisão teórica. **Imagens da Educação**, Maringá: UEM, v. 7, n. 2, p. 11-23, 2017.

CIBOTTO, Rosefran A. G; OLIVEIRA, Rosa M. M. A. TIC: considerações sobre suas influências nas distintas gerações e na escola contemporânea. In: VII EPCT - Encontro de Produção Científica e Tecnológica, 2012, Campo Mourão - PR. **Anais... VII EPCT**: NUPEM, 2012.

CIEGLINSKI, Amanda. **Educação**. Portal Rede Brasil Atual(FM 98,9 na Grande São Paulo, FM 93,3 no litoral paulista e FM 102,7 no noroeste do estado). Publicado 07/12/2010 - 09h44. Disponível em: <<https://www.redebrasilatual.com.br/educacao/2010/12/apesar-de-melhoria-brasil-ainda-ocupa-posicoes-finais-em-ranking-internacional-de-educacao/>>. Acesso em: 29 fevereiro de 2020.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, United States: Macmillan, 1992. p. 420-464

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M.T.; SARAMA, J. Logo e Geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, 2001. N. 10, 187 p.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, 2011. v. 14, p. 113-148

CURI, Edda. **Formação de professores polivalentes**: uma análise de conhecimentos para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses

conhecimentos. São Paulo, 2004. 278 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexos sobre educação e matemática.** São Paulo: Summus, 1986. 115 p.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2007. 502 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Ápis Matemática: 3º ano (Ensino Fundamental).** São Paulo: Scipione, 2017. 316 p.

DEMO, Pedro. **A nova LDB: ranços e avanços.** 6 ed. Campinas: Papyrus, 1997.

DIAS, Mônica S. da Silva. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico.** São Paulo, 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009

DICIONÁRIO DO AURÉLIO. Dicionário Aurélio de Português Online. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/delay/>>. Acesso em: 25 de dezembro de 2020.

DIONÍZIO, Fátima A. Q.; BANDT, Célia F. Ensino da geometria na infância: saberes e conhecimentos na aprendizagem da docência. In: MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck (org.). **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval.** Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p. cap. 6, p. 150-170.

_____. O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 9., 2012, Universidade de Caxias do Sul. **Anais... IX ANPED SUL: UCS, 2012.** 16 p. p. 1-16

DIONIZIO, Fátima Aparecida Queiroz. **Aprendizagem da docência para o ensino de geometria na infância no contexto da formação e da prática pedagógica.** Ponta Grossa, 2019. 290 f. Tese (Doutorado em Educação - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brasil, 2019.

DUVAL, Raymond. **Conversion et articulation des représentations analogiques: séminaire de recherche.** Nord Pas de Calais: IUFM Paris, 1999. 115p.

_____. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Recherches en sciences de l'éducation: Peter Lang, 1995. 400p.

_____. Semiosis Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères* – IREM, Paris: TOPIQUES, n. 17, p.121-138, 1994.

EQUIPE GEOGEBRA. Learn GeoGebra Classroom. Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/hncrgruu>>. Acesso em: 07 de agosto de 2020

FERNADEZ, Carmen. Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de professores de ciências. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte: UFMG, n. 2. v. 17, p.500-528, 2015

FERRARI, Márcio. **Célestin Freinet, o mestre do trabalho e do bom senso**. Nova Escola. 1 out. 2008. Pensadores da Educação. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/1754/celestin-freinet-o-mestre-do-trabalho-e-do-bom-senso>>. Acesso em: 30 dez. 2020.

FIorentni, Dario; LOrenzato, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. *Springer*, Netherlands, 1993. Educational Studies in Mathematics, vol. 24, n. 2, p. 139-162

FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro – SP: REDALYC, v.19, n.26, p. 1-22, 2006

FONSECA, Graziela. Painéis – intervenções iniciais: formação inicial. In: ENSINO DA GEOMETRIA NO VIRAR DO MILÊNIO. 1999, Lisboa. **Encontro**. Lisboa: DEFCUL, 1999. p. 65-69.

FONSECA, Maria da Conceição F.R; LOPES, Maria da Penha; BARBOSA, Maria das Graças G; GOMES, Maria Laura M. G; DAYRELL, Mônica Maria M. S. S. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 128 p.

FREITAS, Fabrício M. et al. Abrindo a caixa de pandora: as competências da matemática na BNCC. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR: RPEM, v.8, n.17, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.33871/22385800.2019.8.17.265-291>>. Acesso em: 16 jan. 2020

FREITAS, José Luiz M. de; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. Separata de: **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, Pr: RPEM, v.2, n.3, p.11-34, jul./dez.2013

GIOVANNI JR; José Ruy. **A Conquista da Matemática: 3º ano (Ensino Fundamental)**. São Paulo: FTD, 2018. 292 p.

GORGORIO, N. Exploring the Functionality of Visual and Non-Visual Strategies in Solving Rotation Problems. Separata de: **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, n.35, p. 207-231, 1998

GROSSMAN, P. L.; WILSON, S. M.; SHULMAN, L. S. Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. **Revista de currículum y formación del profesorado**, vol. 9, n.2, 2005.

GUTIÉRREZ, A. Children's Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures. In A. R. BATTURO (ed.). **New Directions in Geometry Education**. Brisbane, Australia: Centre for Math. And Sc. Education, Q.U.T, 1996b, p. 33-42

_____. Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. **Structural Topology**, 1992, n. 18, p.31-47

_____. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. PUIG y A. GUTIÉRREZ (eds.). **Proceedings of the 20th PME Conference**. Spain: University of Valencia, July, v.1, 1996a, p. 3-19

GUTIÉRREZ, A; JAIME, A. FORTUNY, José M. An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. **Journal for Research in Mathematics Education**, 1991. N. 3, v. 22, p. 237-251

HENRIQUES, A; ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**, Bauru: UNESP, v.22, n.2, p. 465-487, 2016

HENRY, M. L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. **Repères-IREM**, n. 36, p. 15-34, 1999.

HOUEMENT C.; KUZNIAK A. Elementary Geometry split into diferente geometrical paradigms. *Proceeding of cerme 3*. Itália, 2003.

INSTITUTO ÂNIMA. **Webinar | Formação de Professores: Experiências Internacionais e Nacionais**. Evento online realizado em 10 de junho de 2020, 14h-17h. Disponível em: <<https://youtu.be/INTlq9NwvMo>>. Acesso em: 11 julho 2020.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Dados do Censo Escolar**. Notícias: 04 de fevereiro de 2019a. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/dados-do-censo-escolar-numero-de-matriculas-na-educacao-infantil-cresceu-11-1-de-2014-a-2018/21206>. Acesso em: 01 fevereiro 2020

_____. **Saeb**. Notícias: 29 de outubro de 2019b. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas>>. Acesso em: 05 abril 2020

_____. **Painel educacional**. Notícias: 16 de junho de 2017. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/painel-educacional>>. Acesso em: 07 abril 2020

_____. **Relatório SAEB2017**. Brasília: Ministério da Educação, 2019c. 166 p.

_____. **Relatório SAEB/ANA2016**: panorama do Brasil e dos estados. Brasília: Ministério da Educação, 2018. 235 p.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Novas tecnologias no ensino da matemática**: tópicos em ensino de geometria. Rio de Janeiro: UFF, 2008. 223 p.

KOEHLER M.J. et al. The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework. In: SPECTOR J. et al. (eds). **Handbook of Research on Educational Communications and Technology**. New York: Springer, 2014. 1005 p. p. 101-111.

KOEHLER, Matthew J.; MISHRA, Punya. What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education Journal*, Waynesville, NC USA, March, 2009. n. 1, vol. 9, p. 60-70.

_____. Introducing TPCK. In: ROUTLEDGE; TAYLOR & FRANCIS GROUP. **Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) for Educators**. New York: AACTE, 2008. 315 p. pt. 1, cap. 1, p. 3-29.

LEITE, Angela; TABOADA, Roberta. **Aprender Juntos Matemática: 3º ano (Ensino Fundamental)**. 6 ed. São Paulo: Edições SM, 2017. 312 p.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. 207 p.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986. 128 p.

MACHADO, Silvia D. A. Engenharia Didática. In: _____. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2016. 254 p. cap. 8, p. 233-248.

MANDARINO, Mônica C. F. Objetivos do Ensino de Geometria no Processo de Alfabetização. Salto para o futuro: **Geometria no Ciclo de Alfabetização**. TV Escola/MEC, Boletim 7, p. 9-15, set. 2014s

MANOEL, Wagner Aguilera. **A importância do ensino da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: razões apresentadas em pesquisas brasileiras**. Campinas, 2014. 131 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2014.

MEGID, Maria A. B. A.; PEREIRA, Adrielli E. O.; TEIXEIRA, Kalyne J.; Educação matemática do pacto nacional pela alfabetização na idade certa e a formação dos professores. In: IV ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS E III COLÓQUIO DE PRÁTICAS LETRADAS, 2016, São Carlos – SP. **Anais ISSN – 22376712**. São Carlos – SP: UFSCar, 2016. p. 1-7

MISHRA, Punya; KOEHLER, Matthew J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record Journal**, Michigan State University, June 2006. v. 108, n. 6, pp. 1017-1054.

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Cármen Lucia Brancaglioni; **A Geometria nas Séries Iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: UDFSCAR, 2003. 151 p.

NISS, Margaret L. et al. Mathematics Teacher TPACK Standards and Development Model. **Contemporary Issues in Technology and Teacher Education Journal**, Waynesville, NC USA, 1 mar. 2009. v. 9, n. 1.

NOVA ESCOLA. **Compare: as mudanças dos PCNs para a BNCC em matemática**. Mantenedora: Fundação Lemann. [S.I.] [2020?]. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/bncc/conteudo/33/compare-as-mudancas-dos-pcns-para-a-bncc-em-matematica>>. Acesso em: 17 fev. 2020.

OLIVEIRA, Hélia; HENRIQUES, Ana; GUTIÉRREZ-FALLAS, Luis F. A integração da tecnologia na planificação de aulas na perspectiva do ensino exploratório: um estudo com futuros professores de matemática. **Revista do Centro de Ciências da Educação**, Florianópolis: PERSPECTIVA, v. 36, n. 2, p. 421-446, abr./jun. 2018.

PALIS, Gilda de la R. O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo do professor de Matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo: PUC-SP, v. 12, n. 3. pp. 432-451, 2010.

PANTOJA; Lúcia F. I.; CAMPOS, Nadja F. da S. C.; SALCEDOS, Rocio R. C. A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de sistemas de equações algébricas lineares. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais...** Canoas –RS: ULBRA, 2013.

PARZYSZ, Bernard. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, Department of Mathematics, Italy: University of Palermo, 2006, n. 17, p. 128-151

PAVANELLO, Regina M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. Separata de: **Revista Zetetiké**, Campinas, SP: UNICAMP, Ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PIAGET, J; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências (G. Unti, Trad.)**. [S.I.]: Petrópolis: Editora Vozes. (Trabalho original publicado em 1983), 2011.

PIETRO, Gerardo; VELASCO, Angela Dias. Visualização espacial, raciocínio indutivo e rendimento acadêmico em desenho técnico. **Psicologia Escolar e Educacional**, Campinas: SCIELO, v.10, n.1, 2006. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/pee/v10n1/v10n1a02.pdf>>. Acesso em: 21 junho 2019.

PIRES, Célia Maria C; CURI, Edda; CAMPOS, Tânia Maria M; **Espaço e Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental**. São Paulo: PROEM, 2000. 286 p.

PIROLA, Nelson A; Ensino e Aprendizagem da Geometria no Contexto da Alfabetização Matemática. Salto para o futuro: **Geometria no Ciclo de Alfabetização**. TV Escola/MEC, Boletim 7, p. 4-8, set. 2014.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO. Faculdade de ciências exatas e tecnologia. Instituto São Paulo Geogebra. Sobre o Geogebra. Disponível em: <<https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>>. Acesso em: 02 agosto 2020.

POTARI, Despina; SPILIOTOPOULOU, Vasiliki. Children's Representations of the Development of Solids. **For the Learning of Mathematics**, 12, British Columbia: FLM Publishing Association, p. 38 – 46, fev. 1992.

RAMOS, Lucina Bandeira da Costa; ROSA, Paulo Ricardo da Silva. O Ensino de Ciências: **fatores intrínsecos e extrínsecos que limitam a realização de atividades experimentais pelo professor dos anos iniciais do ensino fundamental**. Revista Investigações em Ensino de Ciências. UFRGS, v. 13(3), p. 299-331. 2008

REIS, Lourisnei Fortes et al. **Aquarela Matemática: 3º ano (Ensino Fundamental)**. São Paulo: Kit's editora, 2018. 140 p.

RIBEIRO, Alessandro J.; OLIVEIRA, Felipe A. P. V. S. Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. **Revista Zetetiké**, Campinas, São Paulo: FE/UNICAMP & FEUFF, v. 23, n.44, p. 311-327, jul/dez. 2015.

SALAZAR, Susan F. El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. **Actualidades investigativas en educacion**, San Pedro de Montes de Oca, Costa Rica: INIE, n.2, v. 5, p.1-18, julio-diciembre, 2005

SALVADOR, Rosa Corberán et al. **Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele**. 95 ed. Madrid: Centro de publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia: CIDE, 1994. 194 p. (Colección: Investigación)

SANTOS, Anderson O.; OLIVEIRA, Guilherme S. de. A prática pedagógica em geometria nos primeiros anos do ensino fundamental: construindo significados. Separata de: **Revista Valore**, Volta Redonda: FASF, n. 3, vol. 1, p. 388-407, Jan./Jun. 2018

SANTOS, Anderson O.; OLIVEIRA, Guilherme S. de; GHILLE, Kelma G. M. Prática Pedagógica de Geometria na Educação Infantil. **Artigo Original**, Campinas, São Paulo: Cadernos da Fucamp, v. 16, n. 28, p. 95-108, 2017

SANTOS, Julio C. Augustus De Paula. **Vem Voar Matemática: 3º ano** (Ensino Fundamental). 3 ed. São Paulo: Ática, 2017. 300 p.

SCHEIFER, Carine; BRANDT, Celia Finck. Design teórico do pensamento geométrico. In: MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck (org.). **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p. cap. 6, p. 150-170.

SCHMITZ, Carmem C; LEDUR, Elsa A; MILANI, Miriam de N; **Geometria de 1ª a 4ª série: uma brincadeira séria**. 2.ed. São Leopoldo: UNISINOS, 1994. 78 p.

SCHUBRING, Gert. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos. **Zetetiké**, Campinas, SP: CEMPEM-FE/UNICAMP, v.7, n. 11, 1999. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646833/13734>>. Acesso em 31 janeiro de 2019.

SECT ONLINE. **Prefeitura de Angra dos Reis**. Secretaria de educação, ciências e tecnologia. Disponível em: <http://sectonline.com.br/sistema/index_externo.php>, Acesso em 26 julho 2019.

SENK, Sharon L. Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal for Research in Mathematics Education**, Chicago, may, 1989. N. 3, v. 20, p. 309-321.

SHULMAN, Lee S. Conocimiento y enseñanza. **Revista estudios públicos**, Santiago: CEP, n.83, invierno, 2001.

_____. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. **Revista de curriculum y formación del profesorado**, v.09, n.2, 2005.

_____. Paradigmas y programas de investigación em el estudio de La enseñanza: una perspectiva contemporânea. In: WITTRICK, Merlim C. **La investigación de la enseñanza I**. Madrid: Paidós, 1989. 181 p. cap.1, p. 9-84.

_____. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, Washington, fev. 1986. v.15, n.2., p.4-14.

SHULMAN, Lee S.; SHULMAN, Judith H. Como e o que os professores aprendem: uma perspectiva em transformação. **Revista pesquisa e ação educacional**, São Paulo: CENPEC, n.2, v.4, 2014

SISTEMA INTEGRADO DE MONITORAMENTO EXECUÇÃO E CONTROLE. **Relatório de escolas participantes da escolha de livros**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://simec.mec.gov.br/livros/publico/index_escolha.php>. Acesso em: 14 abril 2020.

SOUZA, Roberta N. Sodré de; MORETTI, Mércles Thadeu; ALMOULOU, Saddo Ag. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo: PUC – SP, v. 21, n.1, 2019. Disponível em:<<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39101>>. Acesso em: 20 junho 2019

STYLIANIDES, A. J.; BALL, D. L. Studying the mathematical knowledge needed for teaching: The case of teachers' knowledge of reasoning and proof. In: AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 85. **Proceedings...** San Diego, 2004.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **O que são e para que servem as diretrizes curriculares?** 08 de janeiro de 2018. Disponível em : <<https://www.todospelaeducacao.org.br/conteudo/o-que-sao-e-para-que-servem-as-diretrizes-curriculares-/>>. Acesso em: 30 de janeiro de 2020.

UTIMURA, Grace Z. CURI, Edda (coautora). **Figuras geométricas espaciais: alunos de quinto ano e suas professoras aprendendo juntos**. Curitiba: Appris, 2016. 119 p.

UTIMURA, Grace Z. **Docência compartilhada na perspectiva de estudos de aula (lesson study): um trabalho com as figuras geométricas espaciais no 5º ano**. São Paulo, 2015. 191 f. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

VAN HIELE, Pierre Marie. **El problema de la comprensión (em conexión com la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometría)**. 1957a. 151 f. Tese (Doctoral in Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad de Utrecht, Utrecht. Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991. No publicada.

_____. **Structure and insight : a theory of mathematics education**. Orlando, Flórida - USA: Academic Press, 1986. 246 p.

VAN HIELE-GELDOLF, Dina. **The didactics of geometry in the lowest class of secondary school**. 1984. 259 p. Tesis (Doctoral in Mathematics and Natural Sciences) - Universidad de Utrecht, Utrecht, Traducción al inglés en Fuys, 1957b.

VELOSO, Eduardo; FONSENCA, Helena; PONTE, João Pedro da; ABRANTES, Paulo. Introdução. In: ENSINO DA GEOMETRIA NO VIRAR DO MILÊNIO. 1999, Lisboa. **Encontro**. Lisboa: DEFCUL, 1999. p. 1-5.

VELOSO, Eduardo; PONTE, João Pedro da. Introdução. In: ENSINO DA GEOMETRIA NO VIRAR DO MILÊNIO. 1999, Lisboa. **Encontro**. Lisboa: DEFCUL, 1999. p. 1-5.

VIANA, Odalea A.; Figuras Planas e Espaciais: como trabalhar com elas nos anos iniciais do ensino fundamental. Salto para o futuro: **Geometria no Ciclo de Alfabetização**. TV Escola/MEC, Boletim 7, p. 23-30, set. 2014.

VIEIRA, Marilandi M. M.; ARAÚJO, Maria Cristina P. e. Os estudos de Shulman sobre formação e profissionalização docente nas produções acadêmicas brasileiras. **Revista Cadernos de Educação**, Rio de Janeiro: Colégio Pedro II, n. 53, p. 80-100, 2016

VIEIRA, Norma S. O. **A formação matemática do pedagogo**: reflexões sobre o ensino de geometria. Fortaleza, 2017. 100 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017

VILLIERS, Michael de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 2010. vol. 12, n. 3, p. 400-431

VINHA, Julci. **Como usar o Google Meet para dar aulas [Escola online]**. Tecnoblog: 16 julho 2020. Disponível em: < <https://tecnoblog.net/352901/como-usar-o-google-meet-para-dar-aulas-escola-online/>>. Acesso em: 8 agosto 2020.

WANG, Felipe. **Discourse Perspective of Geometric Thoughts**. Idaho, USA: Springer Spektrum, 2016. 248 p.

YIN, Roberto K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 2ª ed. Porto Alegre: Bookmam, 2001. 205 p.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; GUELLI, Oscar, Augusto. **Meu livro de Matemática**: 2º ano (Ensino Fundamental). São Paulo: AJS, 2018. 274 p.

APÊNDICES

APÊNDICE 1: QUESTIONÁRIO

QUESTIONÁRIO

Este questionário é parte de uma pesquisa em andamento de Doutorado em Educação Matemática pela PUC-SP, cujo tema é *Os conhecimentos geométricos mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental em uma proposta de formação continuada com figuras espaciais*. Será mantido sigilo quanto a qualquer identificação de pessoas ou lugares, usando nomes fictícios no caso da utilização dos dados.

Doutorando/pesquisador: Julio Silva de Pontes

E-mail juliospontes@gmail.com

1) Idade:			
2) Tempo de magistério em anos:			
3) Bairro do local de trabalho:			
4) Sexo:	<input type="checkbox"/> Masculino	<input type="checkbox"/> Feminino	<input type="checkbox"/> Indefinido
	<input type="checkbox"/> Normal técnico		
	<input type="checkbox"/> Licenciatura em Pedagogia		
	<input type="checkbox"/> Especialização, se sim, em que?		
5) Quais formações você possui?	<input type="checkbox"/> Mestrado, se sim, em que?		
	<input type="checkbox"/> Doutorado, se sim, em que?		
	<input type="checkbox"/> 1º ano do EF		
	<input type="checkbox"/> 2º ano do EF		
	<input type="checkbox"/> 3º ano do EF		
6) Atualmente leciono na(o)	<input type="checkbox"/> 4º ano do EF		
	<input type="checkbox"/> 5º ano do EF		
	<input type="checkbox"/> Educação Infantil		
	<input type="checkbox"/> Não estou em sala de aula		
	<input type="checkbox"/> turno da Manhã	<input type="checkbox"/> turno da Tarde	<input type="checkbox"/> turno da Noite
		<input type="checkbox"/> Presencial	
		<input type="checkbox"/> Semipresencial	
7) Gostaria de fazer uma formação em qual modalidade? Justifique:	<input type="checkbox"/> a distância		
	<input type="checkbox"/> não gostaria		
8) Qual tempo você tem disponível na semana para uma formação?	<input type="checkbox"/> Até 1 horas	<input type="checkbox"/> Até 2 horas	<input type="checkbox"/> Até 3 horas
	<input type="checkbox"/> Até 4 horas	<input type="checkbox"/> Mais de 4 horas	<input type="checkbox"/> Não tenho

9) Qual(is) a(s) competências gerais que mais gosto de lecionar?	<input type="checkbox"/> Matemática <input type="checkbox"/> Área de linguagens <input type="checkbox"/> Áreas de Ciências da Natureza <input type="checkbox"/> Áreas de Ciências Humanas <input type="checkbox"/> Educação Infantil
10) Qual(is) a(s) competências gerais que menos gosto de lecionar?	<input type="checkbox"/> Matemática <input type="checkbox"/> Área de linguagens <input type="checkbox"/> Áreas de Ciências da Natureza <input type="checkbox"/> Áreas de Ciências Humanas <input type="checkbox"/> Educação Infantil
11) Em relação à Matemática, qual(is) eixo(s) você se considera mais preparado para lecionar	<input type="checkbox"/> Números <input type="checkbox"/> Álgebra <input type="checkbox"/> Geometria <input type="checkbox"/> Grandezas e medidas <input type="checkbox"/> Probabilidade e estatística
12) Em relação à Matemática, qual(is) eixo(s) você se considera menos preparado para lecionar	<input type="checkbox"/> Números <input type="checkbox"/> Álgebra <input type="checkbox"/> Geometria <input type="checkbox"/> Grandezas e medidas <input type="checkbox"/> Probabilidade e estatística
13) Ao ensinar geometria, quais materiais ou estratégias você utiliza?	<input type="checkbox"/> Não trabalho com esse eixo <input type="checkbox"/> Livro didático <input type="checkbox"/> Desenho <input type="checkbox"/> Figuras recortadas <input type="checkbox"/> Sólidos Geométricos <input type="checkbox"/> Objetos do dia a dia <input type="checkbox"/> Blocos Geométricos <input type="checkbox"/> Escrita no quadro <input type="checkbox"/> Origami ou dobradura <input type="checkbox"/> Discurso oral <input type="checkbox"/> Resolução de problemas <input type="checkbox"/> Canudos <input type="checkbox"/> Tecnologias da Informação <input type="checkbox"/> Exercícios <input type="checkbox"/> Jogos <input type="checkbox"/> Outros: <input type="checkbox"/> História da Matemática
14) Você já ouviu falar no modelo van Hiele no desenvolvimento do pensamento geométrico?	<input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/> Sim Se sim, onde? Se sim, você utiliza em suas aulas?
15) Você já ouviu falar na Teoria dos Registros de Representação Semiótica?	<input type="checkbox"/> Não <input type="checkbox"/> Sim Se sim, onde? Se sim, você utiliza em suas aulas?

APÊNDICE 2: AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DOCENTE

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DOCENTE

Esta avaliação diagnóstica é parte de uma pesquisa em andamento de Doutorado em Educação Matemática pela PUC-SP, cujo tema é *Conhecimentos geométricos mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental: proposta de uma formação continuada com figuras espaciais*. Será mantido sigilo quanto a qualquer identificação de pessoas ou lugares, usando nomes fictícios no caso da utilização dos dados.

Doutorando/pesquisador: Julio Silva de Pontes, e-mail juliospontes@gmail.com, cel. (21) 992744810

Nome:	Idade:
Tel. para contato: ()	E-mail:
Escola onde leciona:	

Parte I: O professor lhe entregará um conjunto de objetos, observe-os e responda:

- 1) Os objetos foram nomeados usando as letras do alfabeto, quais são elas _____
- 2) Pegue o Objeto A e escreva o que você observa nele: _____

- 3) Pegue o Objeto B e escreva o que você observa dele: _____

- 4) Pegue o Objeto C e escreva o que você observa dele: _____

- 5) Pegue o Objeto D e escreva o que você observa dele: _____

- 6) Pegue o Objeto G e escreva o que você observa dele: _____

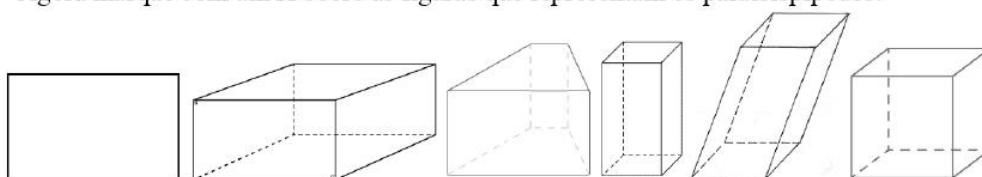
- 7) Observe novamente os objetos e responda:
 - a) Quais deles apresentam curvas? _____
 - b) Quais deles não apresentam curvas? _____
- 8) Quais dos objetos têm a mesma característica visual do objeto A? _____
- 9) Quais dos objetos têm a mesma característica visual do objeto B? _____
- 10) Quais dos objetos têm a mesma característica visual do objeto C? _____
- 11) Quais dos objetos têm a mesma característica visual do objeto D? _____
- 12) Quais dos objetos têm a mesma característica visual do objeto G? _____

Parte II: O professor lhe mostrará um conjunto de objetos, observe-os e responda:

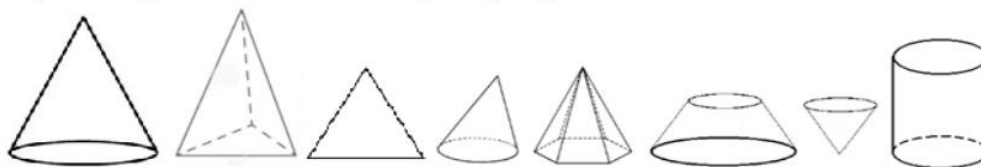
13) Quais objetos que você recebeu têm o mesmo formato do:

- a) Cubo: _____
- b) Paralelepípedo: _____
- c) Pirâmide quadrangular: _____
- d) Prisma triangular: _____
- e) Cone: _____
- f) Cilindro: _____
- g) Esfera: _____

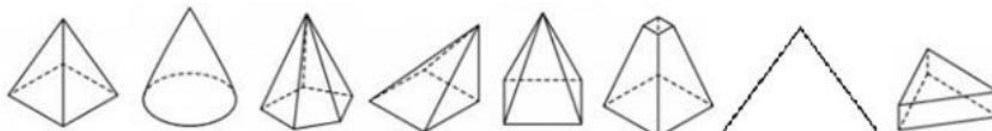
14) Agora marque com um X sobre as figuras que representam os paralelepípedos:



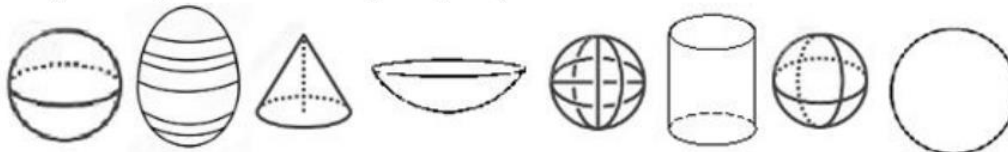
15) Agora marque com um X sobre as figuras que representam os cones:



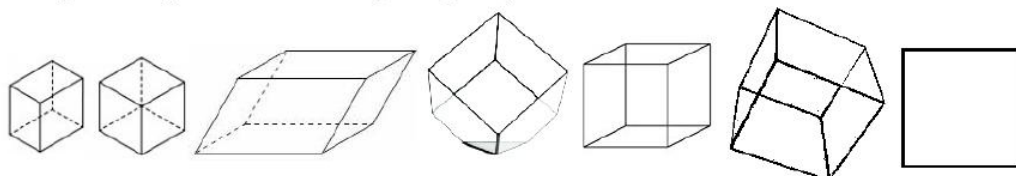
16) Agora marque com um X sobre as figuras que representam as pirâmides:



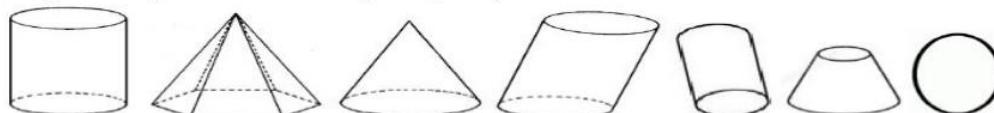
17) Agora marque com um X as figuras que representam as esferas:



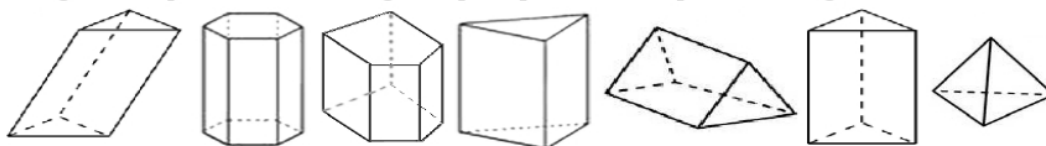
18) Agora marque com um X as figuras que representam os cubos:



19) Agora marque com um X as figuras que representam os cilindros:



20) Agora marque com um X as figuras que representam os prismas triangulares:



Parte III: O professor lhe entregará um conjunto de objetos e lhe mostrará a forma estrutural de algumas das figuras espaciais. Pegue o objeto relativo ao que foi mostrado pelo professor, observe-o e construa a sua forma estrutural correspondente ao:

21) Cubo

23) Prisma Triangular

22) Paralelepípedo

24) Pirâmide quadrangular:

25) Sabendo que os vértices representam as pontas de cada um dos objetos geométricos construídos, quantos vértices possuem:

a) O Cubo: _____

c) O Prisma Triangular: _____

b) O Paralelepípedo: _____

d) A pirâmide quadrangular: _____

26) Sabendo que as arestas representam os palitos de cada um dos objetos geométricos construídos, quantas arestas possuem:

a) O Cubo: _____

c) O Prisma Triangular: _____

b) O Paralelepípedo: _____

d) A pirâmide quadrangular: _____

27) Sabendo que as faces representam as regiões laterais de cada um dos objetos geométricos construídos, quantas faces possuem:

a) O Cubo: _____

c) O Prisma Triangular: _____

b) O Paralelepípedo: _____

d) A pirâmide quadrangular: _____

28) Pegue os seguintes objetos geométricos abaixo e desenh-os dentro da lacuna correspondente:

Cubo	Paralelepípedo	Prisma Triangular
Pirâmide quadrangular	Cilindro	Cone

Parte IV: Observe todos os objetos construídos, e responda:

29) É possível construir a forma estrutural de um cilindro, cone ou esfera? _____.
Justifique? _____.

30) Pegue o paralelepípedo e o cubo e escreva o que eles têm de:

a) Semelhantes: _____

b) Diferentes: _____

31) Pegue o paralelepípedo, o cubo e o prisma triangular e escreva o que eles têm de:

a) Semelhantes: _____

b) Diferentes: _____

32) Com o que você observou do paralelepípedo, do cubo e do prisma triangular, tente montar um objeto com uma estrutura diferente, mas com as mesmas semelhanças observadas. Se você conseguiu construir esse objeto, escreva como ele ficou? _____

33) É possível montar outros objetos com essas mesmas características? _____, justifique: _____.

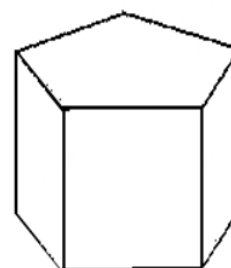
34) Observe a figura do objeto ao lado e responda:

a) Número de vértices: _____

b) Número de arestas: _____

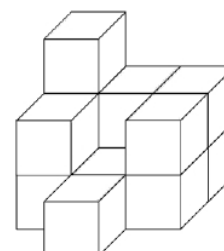
c) Número de faces: _____

d) Ele possui características semelhantes a algum dos objetos que você possui? _____.
Se si, qual? _____.



35) Observe a figura do objeto ao lado, e responda:

Por quantos cubinhos ela é formada? _____



APÊNDICE 3: ENTREVISTA DOCENTE

ENTREVISTA DOCENTE

Esta entrevista é parte de uma pesquisa em andamento de Doutorado em Educação Matemática pela PUC-SP, cujo tema é *Conhecimentos geométricos mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental: proposta de uma formação continuada com figuras espaciais*. Será mantido sigilo quanto a qualquer identificação de pessoas ou lugares, usando nomes fictícios no caso da utilização dos dados.

Doutorando/pesquisador: Julio Silva de Pontes, e-mail juliospontes@gmail.com, cel. (21) 992744810

Apresentação

- 1) Primeiramente, diga seu nome, tempo de magistério e a atual escola onde você leciona?
- 2) Você gosta de ensinar Matemática? Você gosta de ensinar Geometria? Justifique:

Conhecimento do conteúdo

- 3) Você sabe quais são os eixos temáticos que devem ser abordados ao longo do ano nas aulas de Matemática?
- 4) Em reação ao eixo da Geometria, você sabe quais são os conteúdos que devem ser abordados? Quais são os conteúdos que você costuma abordar?
- 5) Você tem alguma dificuldade em ensinar algum desses conteúdos? Por quê?

Conhecimento pedagógico

- 6) Você costuma gerenciar e organizar a sala de aula ao ensinar Geometria?
- 7) Quais são os materiais e ferramentas que você costuma usar ao ensinar Geometria?

Conhecimento do currículo

- 8) Você costuma orientar suas aulas de Geometria nos materiais e programas curriculares?
- Se sim, como você costuma se orientar? E quais programas curriculares você costuma seguir?

Conhecimento pedagógico do conteúdo

- 9) Quais são as estratégias ou metodologias que você costuma utilizar ao ensinar Geometria?
- 10) Você costuma utilizar novas estratégias e metodologias ao ensinar Geometria? Por quê?

Conhecimento dos alunos e de suas características

- 11) Que procedimentos você costuma utilizar nas aulas de Geometria para determinar se o aluno aprendeu o que foi ensinado?
- 12) E o que você realiza para melhorar a aprendizagem dos alunos com dificuldades?

Conhecimento de contextos educacionais

- 13) Como a indisciplina, a falta de recurso, e a comunidade escolar afeta o ensino e aprendizagem da Geometria em sua sala de aula?

Conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica

- 14) Quais propósitos e valores você costuma passar para seus alunos para incentivá-lo a ensinar Geometria?

APÊNDICE 4: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES

REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES	
Doutorando/pesquisador: Julio Silva de Pontes, e-mail juliospontes@gmail.com , cel. (21) 992744810	
Observação n°.: _____, realizada em ____/____/_____, das _____ hs às _____,	
Local de observação: _____, público _____.	
Descrição	
Do sujeito (professor)	Aparência física: Maneirismos: Modos de vestir: Modos de falar: Modos de agir:
De diálogos	Das palavras: Dos gestos: Dos depoimentos: Das observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e o pesquisador:
Do local	Do uso de desenhos ilustrando a disposição dos móveis: Do espaço físico: Da apresentação visual do quadro de giz: Dos cartazes: Dos materiais de classe:
De eventos especiais	O que ocorreu: Quem estava envolvido: Como se deu esse envolvimento:
Das atividades	Gerais: Dos comportamentos das pessoas observadas:

Dos comportamentos do observador	<p>Das suas atividades:</p> <p>Das ações:</p> <p>Das conversas com os participantes durante o estudo:</p>
Reflexão	
Análíticas	O que está sendo aprendido?
Metodológicas	<p>Procedimentos e estratégias metodológicas utilizados:</p> <p>As decisões sobre o plano de estudo:</p> <p>Os problemas encontrados:</p> <p>A forma de resolver os problemas:</p>
Éticas e conflitais	Questões surgidas no relacionamento com os informantes:
Das mudanças na perspectiva do observador	<p>Opiniões:</p> <p>Preconceitos:</p> <p>Hipóteses do observador:</p>
De esclarecimentos necessários	<p>Pontos a serem esclarecidos:</p> <p>Aspectos que parecem confusos:</p> <p>Relações a serem explicitadas:</p> <p>Elementos que necessitam de maior exploração:</p>

**APÊNDICE 5: COOCORRÊNCIA DAS UNIDADES DE REGISTROS NO TRATAMENTO DOS RESULTADOS ORGANIZADO
POR CATEGORIAS COMUNS**

CATEGORIAS		ABORDAGEM 1			ABORDAGEM 2		ABORDAGEM 3	ABORDAGEM 4		ABORDAGEM 5	
		<i>Que recomendações?</i>			<i>Como deve ser exposta?</i>		<i>Quais os aspectos valem a pena ser analisados?</i>	<i>Como deve ser desenvolvida?</i>		<i>Quais aspectos valem a pensa ser analisados?</i>	
		Documentos políticos			Currículo dos professores		Conhecimento dos professores	Currículo de matemática (Livro didático)		Conhecimento dos alunos (avaliações externas)	
		PCN	DCN	BNCC	UFF	CEDERJ	Questionários + Avaliação diagnóstica + entrevistas	Ápis matemática	Vem voar matemática	Saeb/ANA	Prova Brasil
Conhecimento do Conteúdo (CK)	Perceber/Visualizar	X				X					
	Interpretar/Visualizar	X				X					
	Representar	X	X	X	X	X				X	
	Observar/refletir/visualizar	X			X	X		X	X		
	Caracterizar	X				X	X	X	X		
	Comparar/supor/visualizar	X		X	X	X		X	X		
	Construir	X									
	Compreender		X								
	Classificar							X	X		
	Associar/hipótese/visualização/agrupar			X	X	X		X	X	X	X
	Relacionar/organizar/visualizar			X	X	X			X	X	X
	Nomear			X	X		X	X	X		
	Reconhecer/Decidir/identificar/visualizar			X	X	X		X	X		X
	Descrever/argumentar			X	X			X			
Sólidos geométricos					X			X	X		

	1° abordar o Cubo	X		X				X	X	X	
	2° abordar o Paralelepípedo	X		X				X	X	X	
	3° abordar a Esfera	X		X				X	X	X	
	4° abordar o Cilindro	X		X				X	X	X	
	5° abordar o Cone	X		X				X	X	X	
	6° abordar o Prisma	X		X				X	X		
	7° abordar a Pirâmide	X		X				X	X	X	
	Face							X	X		
	Vértice							X	X		
	Aresta							X	X		
	Formas/Figuras geométricas espaciais	X		X		X		X			
	Poliedros										X
	Corpos Redondos							X	X		X
	Planificação	X		X				X	X	X	X

Conhecimento Pedagógico (PK)	Experimentação/empirismo	X		X	X			X	X	X	
	Manipulação/reflexão	X			X				X		
	Comunicação/interação	X	X	X	X	X		X	X		
	Resolução de problemas	X		X	X	X		X			X
	História da matemática	X				X			X		
	Articulação horizontal/interdisciplinaridade	X	X	X	X				X	X	
	Articulação vertical		X	X					X		
	Ludicidade/Pintar/contornar/carimbar		X						X	X	
	Investigação/exploração			X	X						
	Projetos			X							
	Letramento matemático			X							
	Modelagem matemática			X							
	Construtivismo				X						
	Etnomatemática				X						

Contexto	Organização das aulas em função do espaço e tempo	X					X			X	X
	Flexibilidade de conteúdos	X						X			
	Importância das regras e procedimentos	X					X			X	X
	Condições adequadas de trabalho		X							X	X
	Materiais necessários às atividades		X				X				
	Sistematização de experiências			X					X		
	Organização das aulas em função do interesse e vivência das crianças			X							
	Laboratório de Ensino ou Geometria experimental				X			X	X		
	Reflexão crítica da linguagem matemática				X	X					
	Concepção e tendência em educação matemática				X	X					
	Diretrizes curriculares para o ensino da matemática				X						
	Imagem ruim da matemática							X			

APÊNDICE 6: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Senhor(a) eu sou o Julio de Silva Pontes, pesquisador e doutorando no Programa de Educação Matemática da PUC/SP. Estou realizando um estudo que objetiva fundamentar uma formação continuada em geometria para os professores que atuam nos três primeiros anos iniciais do ensino fundamental, objetivando justificar a importância do ensino desta área para essa fase escolar, e produzir conhecimento na área de formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.

Nesse sentido, gostaria de convidá-lo a participar desta pesquisa. Sua participação permitirá levantar dados pertinentes a construção de um modelo epistemológico de referência e validação da metodologia, que serão tratados de forma a manter o seu sigilo, sem possibilidade de identificação. Destacamos que, a qualquer momento, o senhor(a) participante é livre para deixar de participar da pesquisa, sem qualquer ônus ou penalização de qualquer parte. Caracteriza-se firmemente a participação voluntária.

Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da PUC/SP campus Monte Alegre, que é um dos 2 (dois) Comitês instalados na universidade, e responsável pela apreciação dos protocolos de pesquisa das áreas de Ciências Humanas e Sociais oriundos de 8 (oito) das 9 (nove) Faculdades que integram a PUC-SP.

Atenciosamente,

Pesquisador: Julio Silva de Pontes
 RA: 00193063
 RG: 20381215-1
juliospontes@gmail.com
 (21) 992744810

CEP-PUC/SP Monte Alegre
 Térreo do Edifício Reitor Bandeira de Mello,
 na sala 63-C, Rua Ministro Godói, 969 -
 Perdizes - São Paulo - SP - CEP: 05015-001
 Tel./FAX: (11)3670-8466, e-mail:
cometica@pucsp.br

Autorização

Eu, _____, portador do RG: _____,
 telefone: _____ e e-mail _____, declaro
 abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário
 da pesquisa supra citada para os devidos fins.

Subcrevo o presente em _____ de _____ de 2020

 Assinatura do participante

 Assinatura do pesquisador

**APÊNDICE 7: RELATÓRIO DAS ESCOLAS MUNICIPAIS DE ANGRA DOS REIS X
ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD 2019)**

Escola	1ª opção	2ª opção
E M DINIZ MARQUES DE SOUZA	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	ÁPIS MATEMÁTICA
E M PROF ANTONIO JOSE NOVAES JORDAO	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	BURITI MAIS - MATEMÁTICA
E M INACIO DURING	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	LIGAMUNDO MATEMÁTICA
E M DOM PEDRO I	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	MEU LIVRO DE MATEMÁTICA
E M FREI BERNARDO	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
CEHI E M MARIA HERCILIA CARDOSO DE CASTRO	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M JOAQUINA MARIA ROSA DOS SANTOS	ÁPIS MATEMÁTICA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA
E M PROF ADELAIDE FIGUEIRA	ÁPIS MATEMÁTICA	BURITI MAIS - MATEMÁTICA
E M CORNELIS VEROLME	ÁPIS MATEMÁTICA	EU GOSTO
E M PRINCESA IZABEL	ÁPIS MATEMÁTICA	MEU LIVRO DE MATEMÁTICA
E M CECILIA MARA EDILEUS VIEIRA	ÁPIS MATEMÁTICA	NOVO BEM-ME-QUER
E M GAL SILVESTRE TRAVASSOS	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M PROF FRANCISCO DE ASSIS OLIVEIRA DINIZ	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M PROF SYLVIO DE CASTRO GALINDO	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M BRASIL DOS REIS	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M ALBERTO TORRES	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M DR LAURO TRAVASSOS	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
CEHI MONSENHOR PINTO DE CARVALHO	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
ESCOLA MUNICIPAL PREFEITO TOSCANO DE BRITTO	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M TENENTE JOVINO	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M DEPUTADO CAMARA TORRES	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M JOSE VIRGILIO PEREIRA MAIA	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M JOAQUIM ALVES DE BRITO	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M PEDRO SOARES	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M AYRTON SENNA DA SILVA	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M THOMAZ H MAC-CORMICK	ÁPIS MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M PROF TANIA RITA DE O TEIXEIRA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA
E M ANGELO FRANCISCO JERONIMO	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA	ÁPIS MATEMÁTICA

E M PREF JOSE LUIZ RIBEIRO RESECK	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA	BURITI MAIS - MATEMÁTICA
E M RAUL POMPEIA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA	EU GOSTO
E M MANOEL RAMOS	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA	NOVO BEM-ME-QUER
E M PROFESSOR URURAHY	AQUARELA MATEMÁTICA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA
E M TEREZA PINHEIRO DE ALMEIDA	AR - APRENDER E RELACIONAR: MATEMÁTICA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA
E M POETA CARLOS DRUMMOND DE ANDRADE	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA
E M FRANCISCO XAVIER BOTELHO	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	ÁPIS MATEMÁTICA
E M NOVA PEREQUE	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	ÁPIS MATEMÁTICA
E M BRIGADEIRO NOBREGA	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA
E M MARECHAL DUTRA	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA
E M ZITA DE OLIVEIRA SOARES	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	APRENDER JUNTOS MATEMÁTICA
E M CACIQUE CUNHABEBE	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	EU GOSTO
E M ANTONIO JOAQUIM DE OLIVEIRA	BURITI MAIS - MATEMÁTICA	MEU LIVRO DE MATEMÁTICA
E M FREI FERNANDO GEURTSE	MEU LIVRO DE MATEMÁTICA	AR - APRENDER E RELACIONAR: MATEMÁTICA
E M MORADA DO BRACUHY	MEU LIVRO DE MATEMÁTICA	BURITI MAIS - MATEMÁTICA
E M PROFESSORA MANOELINA RODRIGUES BARBOSA	MEU LIVRO DE MATEMÁTICA	NOVO PITANGUÁ - MATEMÁTICA
E M PROF JOSE AMERICO LOMEU BASTOS	MEU LIVRO DE MATEMÁTICA	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M PREFEITO FRANCISCO PEREIRA ROCHA	NOVO BEM-ME-QUER	ÁPIS MATEMÁTICA
CEHI JOAO CAROLINO REMEDIOS	NOVO BEM-ME-QUER	ÁPIS MATEMÁTICA
E M MAURO SERGIO DA CUNHA	NOVO BEM-ME-QUER	ÁPIS MATEMÁTICA
E M DR ORLANDO GONCALVES	NOVO BEM-ME-QUER	NOVO PITANGUÁ - MATEMÁTICA
E M SANTOS DUMONT	NOVO BEM-ME-QUER	VEM VOAR MATEMÁTICA
E M PROF AMELIA ARAUJO LAGE	VEM VOAR MATEMÁTICA	A CONQUISTA DA MATEMÁTICA
E M REGINA CELIA MONTEIRO PEREIRA	VEM VOAR MATEMÁTICA	ÁPIS MATEMÁTICA
E M FREI JOAO MOREIRA	VEM VOAR MATEMÁTICA	ÁPIS MATEMÁTICA
E M ALMIRANTE TAMANDARE	VEM VOAR MATEMÁTICA	ÁPIS MATEMÁTICA

APÊNDICE 8: FOLHETO INFORMATIVO SOBRE A PROPOSTA DE FORMAÇÃO

FORMAÇÃO:

ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Prof. Doutorando (PUC-SP): Julio Silva de Pontes
E-mail: juliospontes@gmail.com
Cel. e WhatsApp: (21) 992744810

Objetivo:

- Construir junto com os professores um planejamento adequado de aulas remotas sobre Geometria Espacial elementar, buscando relacionar as variáveis didáticas com a integração tecnológica.

Público alvo

- Professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental e que lecionam em uma das seguintes unidades escolares:

Modalidade de Educação a Distância (Ead)

- Será por meio de Lives realizado pela plataforma do Google Meet com duração média de duas horas, seguindo com bate papo e interação por meio dos recursos disponibilizados no chat durante a formação. Além disso, será realizada uma avaliação obrigatória após a última Live.

Escola
E. M. Gal. Silvestre Travassos
E. M. Prof. Francisco De Assis Oliveira Diniz
E. M. Prof. Sylvio De Castro Galindo
E. M. Brasil Dos Reis
E. M. Alberto Torres
C.E.H.I. Monsenhor Pinto De Carvalho
E. M. Tenente Jovino
E. M. Deputado Câmara Torres
E. M. José Virgílio Pereira Maia
E. M. Joaquim Alves De Brito
E. M. Ayrton Senna Da Silva
E. M. Thomaz H Mac-Cormick
E. M. Regina Célia Monteiro Pereira
E. M. Almirante Tamandaré

Inscrição

- Via plataforma da Google Classroom acessando o link <<https://classroom.google.com/c/MTg5MzI1MTIwNTY4?cjc=zwplgg1>>, clicando no símbolo de + (Participar da turma), digitando o código da turma: **zwplgg1** e pressionando em participar.
- Nesta plataforma estão disponíveis os links de acesso às Lives e a avaliação nos dias e horários acertados com a secretaria de Educação de Angra dos Reis.

Carga horária

- Total de 12 horas: compondo 2 horas em cada uma das quatro Lives e 4 horas da avaliação.

Datas e horários dos encontros

- **Live 1:** 14 de dezembro (segunda-feira) das 9h às 11h.
- **Live 2:** 15 de dezembro (terça-feira) das 9h às 11h.
- **Live 3:** 16 de dezembro (quarta-feira) das 9h às 11h.
- **Live 4:** 18 de dezembro (sexta-feira) das 9h às 11h.

Etapas da formação

- Realizado por videoconferência por meio da ferramenta do Google Meet, e para maior interação nas perguntas e provocações realizadas durante a formação utilizamos a ferramenta Mentimeter inserida na apresentação do Power Point e disponibilizada por meio de link ou QR Code inserido no chat. Além disso, algumas das atividades são realizadas via plataforma virtual GeoGebra Classroom.
- **Live 1: Reconhecer o conhecimento do contexto e o conhecimento específico do conteúdo:** A intenção desta primeira Live é apresentar a importância do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem alinhado com o conteúdo da Geometria Espacial elementar.
- **Live 2: Aceitar o conhecimento pedagógico matemático e o conhecimento tecnológico:** A intenção desta segunda Live é aperfeiçoar o conhecimento pedagógico e tecnológico que os professores possuem sobre a Geometria Espacial elementar, para que a aceitação por parte dos professores do uso das tecnologias seja empregada em sua na prática.
- **Live 3: Adaptar o conhecimento pedagógico do conteúdo, o conhecimento tecnológico do conteúdo e o conhecimento pedagógico da tecnologia:** A intenção desta terceira Live é cativar os professores em atividades envolvendo tecnologias para que possam tomar a decisão de adotá-las em suas aulas.
- **Live 4: Explorar o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo:** A intenção desta quarta Live é continuar cativando os professores em atividades envolvendo tecnologias para que eles a possam integrar ativamente em suas aulas.
- **Avaliação: Avançar sobre o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo:** Ao término da formação, os professores irão preparar atividades adequadas ao processo do ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, postar na plataforma "Apoiar2" e compartilhar com o grupo.

APÊNDICE 9: DOCUMENTO COM O PASSO A PASSO DE COMO CRIAR UMA CONTA NA COUNIDADE DO GEOGEBRA

Como Criar conta no Geogebra.org e utilizar suas atividades

1. Geogebra (Vamos criar uma conta)

Acesse: <https://www.geogebra.org/>

Clique em :

Clique em:

Cadastre-se

Cadastre-se usando um login do ...

 Google  Office 365  Microsoft  Facebook  Twitter

Cadastre-se usando o seu login GeoGebra

E-mail

Nome do usuário

senha

Confirmação da senha

Consent Por favor, selecione apenas uma das opções a seguir

I acknowledge that I am over 14 years old, I have read the [Termos de Serviço](#) and the [Privacy Policy](#) and consent to their contents

On behalf of my child, I acknowledge that I have read the [Termos de Serviço](#) and the [Privacy Policy](#) and consent to their contents

Cadastre-se

Confirme o seu endereço de e-mail

Um e-mail de confirmação de registro foi enviado para (\$1).
Por favor, abra o seu e-mail e clique no link de ativação para terminar o processo de cadastro. Se você não receber este e-mail dentro de 15 minutos, verifique sua caixa de SPAM.

[Enviar novamente e-mail de confirmação](#) [Trocar endereço de e-mail](#)

Bem-vindo a Comunidade do GeoGebra!

Por favor, preencha os campos a seguir para obter os melhores materiais do GeoGebra e suporte da comunidade em sua região.

Preencha com seus Dados
e no final da página clique em:

Vamos nos familiarizar com o GeoGebra

Vamos escolher atividades para os anos iniciais:

Link das atividades: <https://www.geogebra.org/m/xnrmmkjt>

Vá para o final da página

More interactive elementary math resources

- Place value
- Geometric solids → Escolha essa opção
- Tangram with geometric figures
- Nets of 3D solids
- Money unit
- Fractions
- Exploring nets of geometric solids
- Geometry
- Geometric figures on the virtual geoboard
- Multiply with dice
- Different math activities for elementary school
- Elementary school applets collection
- Primary school mathematics collection
- Puzzles, games, and other fun stuff

Geometric Solids: Recognize, Name and...

Can you sort these geometric solids?

Do you recognize the shape of thes...

Do you know the name of these sol...

Do you know the name of the objec...

Find the solid matching the name

Find the matching object

Vai aparecer sete atividades em inglês relacionada a geometria espacial elementar.

Você pode mudar o nome de cada atividade e traduzir as palavras, para isso, clique na atividade


Clique nos três pontinhos  que aparece no canto direito superior da tela e escolha  Abrir com GeoGebra App

Clique com o botão direito do mouse sobre a palavra que quer traduzir e escolha  Settings

Em Escreva a palavra em português e dê Enter

Faça isso em todas as palavras. Após isso, clique nas três barras  que aparece no canto superior direito e

Escolha  Save . Coloque o nome para a atividade.

Após Salvar clique na lupa 


Sua atividade vai aparecer como a primeira. Clique com o botão esquerdo do mouse e

Escolha 

Clique em  e depois em 

Aparecerá uma mensagem com o nome da atividade, o link para você enviar para os alunos e o código da atividade, como na figura a seguir.



Identificando figuras espaciais

Participe da aula em www.geogebra.org/classroom/bpmrennu 

ou digitando o código em www.geogebra.org/classroom

BPMR ENNU

◦ Agora só encaminhar o link e o código da atividade para seus alunos acessarem.

◦ Acompanhe no Geogebra.org em seu  Perfil 

◦ Clique na atividade que você escolheu para enviar o link para os alunos ou para acompanhar as atividades de quem estiver fazendo.

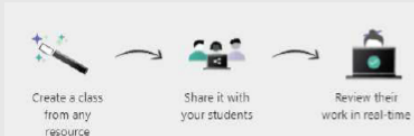
APÊNDICE 10: DOCUMENTO COM O PASSO A PASSO EM COMO EXPLORAR E ENCAMINHAR AOS ALUNOS AS ATIVIDADES ESCOLHIDAS NA COMUNIDADE DO GEOGEBRA

Sugestões de atividades de Geometria Espacial Elementar construídas no Geogebra.

Propostas de atividades	Link de acesso
+ 300 atividades diversas para anos iniciais	https://www.geogebra.org/m/xnrmmkjf
Mostrar todas a planificações do cubo	https://www.geogebra.org/m/kmjt7xbk
Explorar a planificação do cilindro	https://www.geogebra.org/m/XzfNDYV
Explorar a planificação do cone	https://www.geogebra.org/m/rff64Qzw
Explorar a comparação das planificações de prismas e pirâmides	https://www.geogebra.org/m/qgf745xq
Explorar os prismas	https://www.geogebra.org/classroom/afkbaazq

Após estiver logado na sua conta do Geogebra .org

- Escolha a atividade que você gostaria de encaminhar para o aluno, acessando um dos links indicados no slide anterior.
- Clique em CREATE CLASS que aparece na parte superior direita da tela
- E depois aparecerá a janela onde você poderá mudar o nome da atividade e Encaminhá-la para os alunos.
- Clique em CREATE
- Pronto, a atividade já estará no seu perfil no geogebra.org





- Para acessar todas as atividades que você escolheu, clique em  que aparecerá na parte superior esquerda da tela.
- vá na aba  **Profile** ou **Perfil** se estiver traduzido.
- e procure as atividades que você selecionou.
- Para encaminhar a atividade para ou aluno ou acompanhar as tarefas feitas por ele é só clicar sobre a atividade que você procura.

Boa Prática!!

APÊNDICE 11: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO VIRTUAL

FORMAÇÃO: ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL ELEMENTAR NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

*Obrigatório

Objetivo: Construir junto com os professores um planejamento adequado de aulas remotas sobre Geometria espacial elementar, buscando relacionar as variáveis didáticas com a integração tecnológica.



TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Senhor(a) eu sou o Julio de Silva Pontes, pesquisador e doutorando no Programa de Educação Matemática da PUC/SP. Estou realizando um estudo que objetiva fundamentar uma formação continuada em geometria espacial elementar para os professores que atuam nos três primeiros anos iniciais do ensino fundamental, objetivando justificar a importância do ensino desta área para essa fase escolar, e produzir conhecimentos importantes para a prática da formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.

Nesse sentido, gostaria de convidá-lo a participar desta pesquisa. Sua participação permitirá levantar dados importantes e validar a metodologia, que serão tratados de forma a manter o seu sigilo, sem possibilidade de identificação. Destacamos que, a qualquer momento, o senhor(a) participante é livre para deixar de participar da pesquisa, sem qualquer ônus ou penalização de qualquer parte. Caracteriza-se firmemente a participação voluntária.

Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da PUC/SP campus Monte Alegre, que é um dos 2 (dois) Comitês instalados na universidade, e responsável pela apreciação dos protocolos de pesquisa das áreas de Ciências Humanas e Sociais oriundos de 8 (oito) das 9 (nove) Faculdades que integram a PUC-SP.

Atenciosamente,

Pesquisador: Julio Silva de Pontes
RA: 00193063
RG: 20381215-1
juliospontes@gmail.com
(21) 992744810

CEP-PUC/SP Monte Alegre
Térreo do Edifício Reitor Bandeira de Mello, na sala 63-C, Rua Ministro Godói, 969 - Perdizes - São Paulo - SP - CEP: 05015-001 Tel./FAX:(11)3670-8466,
e-mail: cometica@pucsp.br

**Consentimento de
participação da pessoa
como sujeito da pesquisa**

Declaro que, dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário da pesquisa supra citada para os devidos fins.

1. Nome *

2. RG *

3. Celular *

4. E-mail *

5. Em qual escola do município de Angra dos Reis você está lecionando atualmente? *

Marcar apenas uma oval.

- E. M. Gal. Silvestre Travassos
- E. M. Prof. Francisco De Assis Oliveira Diniz
- E. M. Prof. Sylvio De Castro Galindo
- E. M. Brasil Dos Reis
- E. M. Alberto Torres
- C.E.H.I. Monsenhor Pinto De Carvalho
- E. M. Tenente Jovino
- E. M. Deputado Câmara Torres
- E. M. José Virgílio Pereira Maia
- E. M. Joaquim Alves De Brito
- E. M. Ayrton Senna Da Silva
- E. M. Thomaz H Mac-Cormick
- E. M. Regina Celia Monteiro Pereira
- E. M. Almirante Tamandaré
- Outro: _____

6. Para participar da pesquisa, é necessário que você concorde com o termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Você concorda em participar desta pesquisa? *

Marcar apenas uma oval.

- Aceito participar da pesquisa
- Não aceito participar da pesquisa

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE 12: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 1

REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES	
Doutorando/pesquisador: <u>Julio Silva de Pontes</u> , e-mail <u>juliospontes@gmail.com</u> , cel. (21) 992744810	
Observação n°.: <u>1</u> , realizada em <u>15/12/2020</u> , das <u>9h</u> hs às <u>11h20</u> ,	
Local de observação: <u>Google Meet</u> , público <u>Formador + 6 professores</u> .	
Descrição	
Do sujeito (professores inscritos na formação)	<p>Aparência física: Alguns ligaram as câmeras no início, apresentando-se com roupas confortáveis em suas casas, mas logo desligaram a câmera.</p> <p>Maneirismos: Cada professor ao falar ligava o ^{micro-}fone e logo em seguida desligava-o, quando isso não ocorria o formador(en) desligava o microfone de todos.</p>
De diálogos	<p>Das palavras: Os professores foram espontâneos com suas respostas, normalmente fazendo comentários em uma de fala de seus colegas, e quando isso não ocorria, o formador(en) fazia comentários e provocações.</p> <p>Dos gestos: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p> <p>Dos depoimentos: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p> <p>Das observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e o pesquisador: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p>
Do local	<p>Da disposição dos móveis: Alguns microfones apresentavam ruídos: O formador usava dois computadores, um para disponi-</p> <p>Do espaço físico: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p> <p>Da apresentação visual do plano de tela: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p> <p>Dos chats: outro para observar o chat.</p> <p>Dos links: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p>
De eventos especiais	<p>O que ocorreu: O evento iniciou com 30 min de stress, alguns professores acessaram a formação.</p> <p>Quem estava envolvido: via endereço, enviado por email, outros pelo endereço enviado por WhatsApp, e outros pelo link.</p> <p>Como se deu esse envolvimento: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p>
Das atividades	<p>Gerais: Uma das professoras estava com dificuldades de acessar os links pelo chat, por isso utilizou que desse a resposta oral, se quisesse.</p> <p>Dos comportamentos das pessoas observadas: <i>(Handwritten notes are present but illegible)</i></p>

Dos comportamentos do observador	<p>Das suas atividades: Procurei chamar os professores pelo nome, falar o nome do professor</p> <p>Das ações: quando ele briga e sempre põe para dar a palavra, elogi alguns comentários e ordenei algumas discussões. Havia dificuldade no acesso ao Mentimeter, a maioria alemã pelo endereço o código.</p>
Reflexão	
Analíticas	<p>O que está sendo aprendido? Reconhecer o conhecimento do conteúdo e o conhecimento específicos do conteúdo.</p>
Metodológicas	<p>Procedimentos e estratégias metodológicas utilizados: Projeto dos slides em power point, interação e diálogos usando o Mentimeter e discussões oral.</p> <p>As decisões sobre o plano de estudo:</p> <p>Os problemas encontrados:</p> <p>A forma de resolver os problemas:</p>
Éticas e conflitais	<p>Questões surgidas no relacionamento com os informantes: Manter o microfone desligado, passar informações via grupo do Whatsapp.</p>
Das mudanças na perspectiva do observador	<p>Opiniões: Dos professores insatisfeitos, alguns atiram na educação infantil, abundo diálogo possíveis também para esses anos de escolaridade.</p> <p>Preconceitos:</p> <p>Hipóteses do observador: Não tem como dividir o professor em Educação Infantil e Anos Iniciais.</p>
De esclarecimentos necessários	<p>Pontos a serem esclarecidos: trabalhar a linearidade das figuras espaciais. Poder trabalhar ou apresentar todas as figuras espaciais aos anos ou a melhor trabalhar cada uma separadamente?</p> <p>Aspectos que parecem confusos:</p> <p>Relações a serem explicitadas:</p> <p>Elementos que necessitam de maior exploração:</p>

APÊNDICE 13: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 2

REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES	
Doutorando/pesquisador: <u>Julio Silva de Pontes</u> , e-mail <u>juliospontes@gmail.com</u> , cel. (21) 992744810	
Observação n°.: <u>2</u> , realizada em <u>16 / 12 / 2020</u> , das <u>9h</u> hs às <u>10h50</u> .	
Local de observação: <u>Google Meet</u> , público <u>Formados + 5 professoras</u> .	
Descrição	
Do sujeito (professores inscritos na formação)	<p>Aparência física: Ao ingressar na live as professoras realizaram o cumprimento a todos, deixaram o áudio e câmera desligada.</p> <p>Maneirismos:</p> <p>Modos de vestir: Houve uma resistência para dar</p> <p>Modos de falar: suas opiniões.</p> <p>Modos de agir:</p>
De diálogos	<p>Das palavras: Nem todos os questionamentos foram respondidos, principalmente voltado a parte pedagógica por considerarem uma resposta ampla.</p> <p>Dos gestos:</p> <p>Dos depoimentos:</p> <p>Das observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e o pesquisador:</p>
Do local	<p>Da disposição dos móveis: câmeras desligadas, somente o formado (eu) permaneci com a câmera ligada. Os áudios</p> <p>Do espaço físico: foram abertos apenas no momento de falar.</p> <p>Da apresentação visual do plano de tela:</p> <p>Dos chats:</p> <p>Dos links:</p>
De eventos especiais	<p>O que ocorreu: Uma das professoras enviou a formação pelo celular devido deves minutos pois estava sem energia em sua residência, mas logo no início de formação a energia voltou e a professora saiu da reunião, reingressando depois em seguida.</p> <p>Quem estava envolvido:</p> <p>Como se deu esse envolvimento:</p>
Das atividades	<p>Gerais: Estavam com menos espontaneidade ao serem questionadas, sendo resistentes as dar algumas respostas.</p> <p>Dos comportamentos das pessoas observadas:</p>

Dos comportamentos do observador	<p>Das suas atividades: Questionei, exemplifiquei e dei minha opinião em alguns questionamentos</p> <p>Das ações: que ficaram sem resposta dos professores. Percebi que ninguém estava a usar o Mentimeter pelo QR Code. Houve mais facilidade de acesso ao Mentimeter pelo link direto.</p>
Reflexão	
Analíticas	O que está sendo aprendido? Aceltar o conhecimento pedagógico matemático e o conhecimento tecnológico.
Metodológicas	<p>Procedimentos e estratégias metodológicas utilizados: Projetos de slides</p> <p>As decisões sobre o plano de estudo: em power Point, projeções,</p> <p>Os problemas encontrados: questionamentos, esclarecimentos,</p> <p>A forma de resolver os problemas: o uso do Mentimeter e discurso oral.</p>
Éticas e conflitais	Questões surgidas no relacionamento com os informantes: Quando o diálogo não ocorre, o formador (eu) dá a minha opinião, exemplos e esclarecimentos sobre o que estava sendo explorado.
Das mudanças na perspectiva do observador	<p>Opiniões:</p> <p>Preconceitos: No final de formação procurei saber por meio de questionamento oral, a que os professores pretendem e esperam ver nas últimas duas formações.</p>
De esclarecimentos necessários	<p>Pontos a serem esclarecidos: Pesquisa e levar exemplos de softwares, sites, links, mídias, parábolas, ^{matrizes} que possam ser usados na Geometria Espacial</p> <p>Aspectos que parecem confusos: nos atitudes tanto postado</p> <p>Relações a serem explicitadas: na plataforma como as impressões, e que o ensino presencial.</p> <p>Elementos que necessitam de maior exploração: na plataforma como as impressões, e que o ensino presencial.</p>

APÊNDICE 14: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 3

REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES	
Doutorando/pesquisador: <u>Julio Silva de Pontes</u> , e-mail <u>juliospontes@gmail.com</u> , cel. (21) 992744810	
Observação n.º: <u>3</u> , realizada em <u>17/12/2020</u> , das <u>9h</u> hs às <u>11h19</u> ,	
Local de observação: <u>Google Meet</u> , público <u>Formados + 4 professoras</u> .	
Descrição	
Do sujeito (professores inscritos na formação)	<p>Aparência física: Ao ingressar na live todos se cumprimentaram.</p> <p>Maneirismos: Uma das professoras estava com problemas no áudio, mas escutava, mas conseguia falar.</p> <p>Modos de vestir: Ela pediu para irmos a fornecer enquanto ela reiniciava o computador, conseguindo entrar 30 min depois com o problema resolvido.</p>
De diálogos	<p>Das palavras: Houve pouca interação em alguns questionamentos.</p> <p>Dos gestos: Uma professora alegou problema com a internet e a outra com a questão da tecnologia.</p> <p>Dos depoimentos: Tecnologia.</p> <p>Das observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e o pesquisador:</p>
Do local	<p>Da disposição dos móveis: Houve pouca troca pelo chat, as professoras estavam falando pouco com o curso, ou não se</p> <p>Do espaço físico: mencionavam. Houve problema</p> <p>Da apresentação visual do plano de tela: com a conexão de internet e microfone de 2 professoras.</p> <p>Dos chats:</p> <p>Dos links:</p>
De eventos especiais	<p>O que ocorreu: Uma professora estava com dificuldades de compreensão tecnológicas, então após</p> <p>Quem estava envolvido: após 30 min estava partilhada de 2 reuniões</p> <p>Como se deu esse envolvimento: ao mesmo tempo, e outra professora com problemas de conexão.</p>
Das atividades	<p>Gerais: Por conta dos problemas citados anteriormente, alguns</p> <p>Dos comportamentos das pessoas observadas: questionamentos de Meet foram feitos verbalmente, e algumas atividades de google foram feitas por 2 professoras.</p>

Dos comportamentos do observador	<p>Das suas atividades: Quando não tinha diálogo ou resposta, eu continuava a fazer perguntas questionamentos</p> <p>Das ações: e dando minha opinião. Mesmo pouco tempo ao</p> <p>Das conversas com os participantes durante o estudo: Mentimeter;</p>
Reflexão	
Analíticas	<p>O que está sendo aprendido? Adaption e conhecimentos pedagógicos do conteúdo, o conhecimento tecnológico do conteúdo e o conhecimento pedagógico da tecnologia.</p>
Metodológicas	<p>Procedimentos e estratégias metodológicas utilizados: Projeto de slides em power point, mentimeter, comentários de tela, e de tela do aluno, questionamentos, discurso oral.</p> <p>As decisões sobre o plano de estudo:</p> <p>Os problemas encontrados:</p> <p>A forma de resolver os problemas:</p>
Éticas e conflitais	<p>Questões surgidas no relacionamento com os informantes: Para quem não estava conseguindo resolver o problema no contexto, foi pedido que deixasse o power point depois e assiste a live gravada</p>
Das mudanças na perspectiva do observador	<p>Opiniões: No final da formação mostrei como erro</p> <p>Preconceitos: o Google on line, como usar uma conta no Google e usar os</p> <p>Hipóteses do observador: trocar com os alunos, mostrei o passo a passo compartilhando dele e incluindo no power point. Como os professores alcançam muito rapidamente, pedi que fizessem a criação de conta, mesmo nos aplicativos e trouxe as dúvidas para a próxima live.</p>
De esclarecimentos necessários	<p>Pontos a serem esclarecidos:</p> <p>Aspectos que parecem confusos: Reforçar na próxima live a criação de conta no Google e a utilização e uso de trocas com os alunos.</p> <p>Relações a serem explicitadas:</p> <p>Elementos que necessitam de maior exploração:</p>

APÊNDICE 15: REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES REALIZADAS NA LIVE 4

REGISTROS DAS OBSERVAÇÕES	
Doutorando/pesquisador: <u>Julio Silva de Pontes</u> , e-mail <u>juliospontes@gmail.com</u> , cel. (21) <u>992744810</u> Observação n.º: <u>4</u> , realizada em <u>18/12/2020</u> , das <u>9h</u> hs às <u>10h47</u> , Local de observação: <u>Google Meet</u> , público <u>Fornecedores + 4 professoras</u> .	
Descrição	
Do sujeito (professores inscritos na formação)	Aparência física: <u>As professoras na live trouxeram o cumprimento para todos. Uma das professoras estava com problema de audição e outra duas com a conexão.</u> Maneirismos: Modos de vestir: Modos de falar: Modos de agir:
De diálogos	Das palavras: <u>Para falar de dificuldades com conexão e de áudio, foi passada a informação via link, e mensagem no WhatsApp,</u> Dos gestos: <u>durante e após a formação.</u> Dos depoimentos: Das observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e o pesquisador:
Do local	Da disposição dos móveis: <u>lâmina desligada das professoras e áudio ligada apenas para os comentários. Não houve uso de</u> Do espaço físico: <u>mentimeter pois os esclarecimentos</u> Da apresentação visual do plano de tela: Dos chats: <u>foram feitos oralmente.</u> Dos links:
De eventos especiais	O que ocorreu: <u>Problema de áudio de uma das alunas (professora) e conexão de internet de outras duas.</u> Quem estava envolvido: Como se deu esse envolvimento: <u>Entendemos áudio para o grupo fornecendo informações que a gravação estaria na plataforma google sobre o áudio e o ambiente.</u>
Das atividades	Gerais: <u>Também uma grupo de WhatsApp + google sobre o áudio</u> Dos comportamentos das pessoas observadas: <u>aluna deu informações de como selecionar os arquivos no google.org e entendemos para os demais.</u>

Dos comportamentos do observador	<p>Das suas atividades: A Conexão de duas profissões caiu no meio das atividades, não retornando mais.</p> <p>Das ações: Por isso, os conteúdos do momento foram</p> <p>Das conversas com os participantes durante o estudo: feitas geralmente buscando mais diálogos entre os professores.</p>
Reflexão	
Analíticas	<p>O que está sendo aprendido? Explorar o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de geometria espacial elementar nos anos iniciais do Ensino Fundamental.</p>
Metodológicas	<p>Procedimentos e estratégias metodológicas utilizados: Projeto de slides, pdf e tela para acompanhamento</p> <p>As decisões sobre o plano de estudo: do passo a passo em como escolher e postar e acompanhar</p> <p>Os problemas encontrados: os conteúdos no geogebra.org.</p> <p>A forma de resolver os problemas:</p>
Éticas e conflitais	<p>Questões surgidas no relacionamento com os informantes: troca de mensagens no grupo de whatsapp e envio de um documento informando o passo a passo de como usar o geogebra.org.</p>
Das mudanças na perspectiva do observador	<p>Opiniões: comecei a falar mostrando como fazer</p> <p>Preconceitos: para escolher as atividades, editá-las,</p> <p>Hipóteses do observador: e encaminhá-las para os alunos, e acompanhar os tempos dos alunos.</p>
De esclarecimentos necessários	<p>Pontos a serem esclarecidos: compreendo que o conteúdo de formação valde a compreensão da</p> <p>Aspectos que parecem confusos: História da Matemática, uso de tecnologias digitais e uso do geogebra.org, pois muitos d</p> <p>Relações a serem explicitadas: suas funções não foram comentadas.</p> <p>Elementos que necessitam de maior exploração:</p>

**APÊNDICE 16: TAREFA POSTADA POR UMA DOCENTE NA PLATAFORMA
ESCOLAR USADA PELA PREFEITURA DE ANGRA DOS REIS**



Estado do Rio de Janeiro
Município de Angra dos Reis
Secretaria de Educação

Turma: _____

Professor(a):

Disciplina: _____

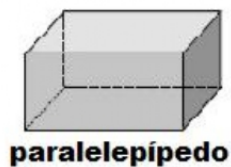
Aluno(a):

CHAME UM FAMILIAR PARA TE AJUDAR NESTA ATIVIDADE.

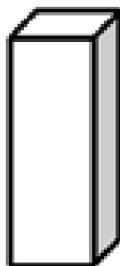
NÓS VAMOS PRECISAR DE:

- CAIXA DE PASTA DE DENTES;
- MASSINHA;
- 4 PALITOS DE CHURRASCO E 8 PALITOS DE FÓSFORO;
- OU-
- 8 CANUDOS, SENDO 4 INTEIROS E 4 PARTIDOS AO MEIO (8 METADES).

OBSERVE AS IMAGENS A SEGUIR:



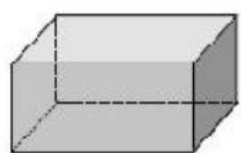
paralelepípedo



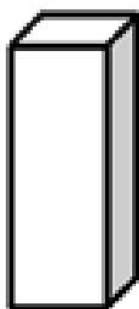
ESSAS FIGURAS SÃO CHAMADAS DE PARALELEPÍPEDO.

NA SUA CASA HÁ OBJETOS QUE LEMBREM ESSA FORMA GEOMÉTRICA? CITE 3.

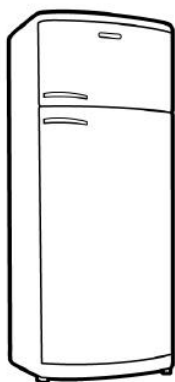
ASSINALE OS OBJETOS CUJAS FORMAS LEMBREM O PARALELEPÍPEDO.



paralelepípedo

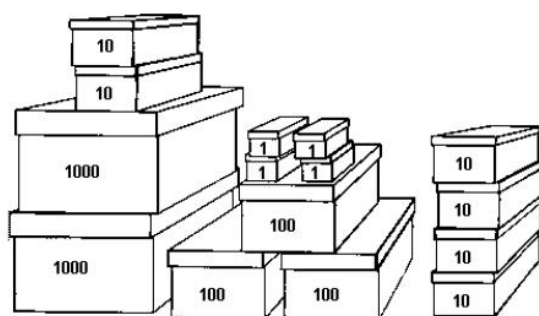


()



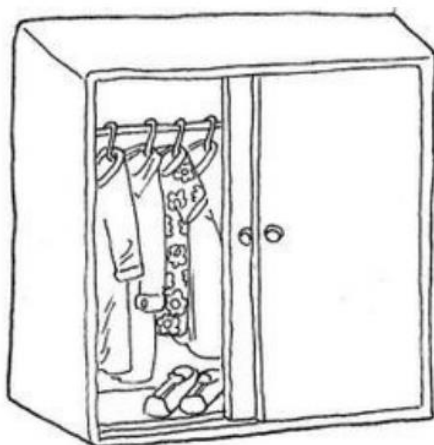
GELADEIRA

()



CAIXAS

()



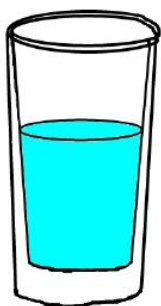
GUARDARROUPA

()



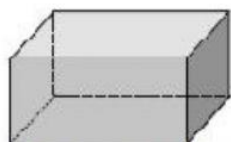
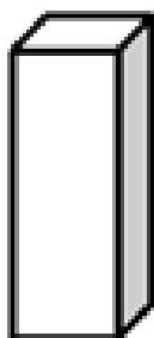
BOLA

()



COPO

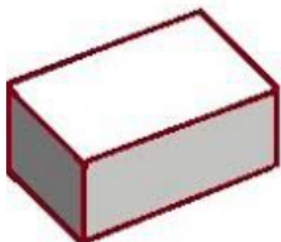
OBSERVE AS IMAGENS A SEGUIR:

**paralelepípedo**

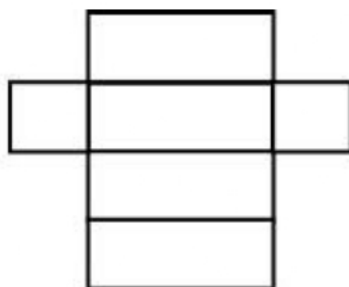
A CAIXA DE PASTA DE DENTE PARECE COM O PARALELEPÍPEDO?

CITE DUAS SEMELHANÇAS ENTRE O PARALELEPÍPEDO E A CAIXA DE PASTA DE DENTE.

AGORA, VOCÊ VAI PEGAR UMA CAIXA DE PASTA DE DENTES DE SUA CASA E IRÁ A ABRIR(DESMONTAR), COM CUIDADO PARA NÃO RASGAR, DE MODO QUE ELA FIQUE PARECIDA COM A IMAGEM ABAIXO.



UM PARALELEPÍPEDO.



ESSA É A PLANIFICAÇÃO DE

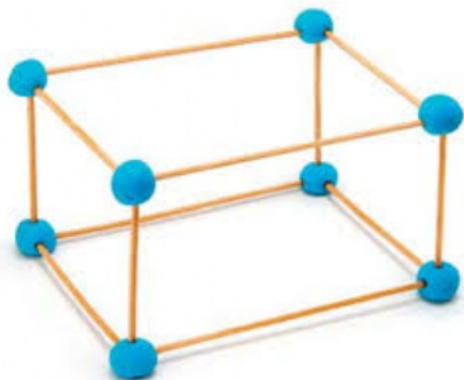
COLE A CAIXA DESMONTADA EM UMA FOLHA.

(NA VERSÃO ONLINE: FOTOGRAFE E POSTE SUA ATIVIDADE AQUI.)

----- Envio de imagem pelo aluno -----

AGORA NÓS VAMOS CONSTRUIR O CONTORNO DE UM PARALELEPÍPEDO.

OBSERVE A IMAGEM A SEGUIR:



COM OS MATERIAIS SEPARADOS NO INÍCIO DA ATIVIDADE E COM A AJUDA DE UM RESPONSÁVEL, MONTE O CONTORNO DO PARALELEPÍPEDO, FOTOGRAFE E POSTE AQUI.

(VERSÃO IMPRESSA: AO ENTREGAR SUAS ATIVIDADES, NÃO SE ESQUEÇA DE LEVAR O OBJETO QUE VOCÊ MONTOU.)

----- Envio de imagem pelo aluno -----

SE DESEJAR VISUALIZAR, ON LINE, A PLANIFICAÇÃO DE UM PARALELEPÍPEDO, CLIQUE NO LINK

<https://www.geogebra.org/m/k8kKsFUz>

ANEXOS

ANEXO 1: EMENTA DO CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA DA MODALIDADE PRESENCIAL DA UFF EM 2020

Ementa e Conteúdo Programático Linguagem Matemática - P2	Ementa e Conteúdo Programático Matemática: Conteúdo e Método I - P3
<p>Ementa</p> <ul style="list-style-type: none"> - A IMPORTÂNCIA DA ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL E NA EJA. - O PAPEL DA LINGUAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM. REFLEXÃO CRÍTICA DA LINGUAGEM MATEMÁTICA PRESENTE NOS MATERIAIS DIDÁTICOS, NOS MEIOS DE COMUNICAÇÃO E NOS DIFERENTES CONTEXTOS SOCIOCULTURAIS. - ANÁLISE DOS PROCESSOS MATEMÁTICOS: REPRESENTAR, RELACIONAR, OPERAR, RESOLVER PROBLEMAS, INVESTIGAR E COMUNICAR. SISTEMAS DE NUMERAÇÃO, LINGUAGEM ESTATÍSTICA E LINGUAGEM GEOMÉTRICA. - O USO DE MÉTODOS DE ENSINO NA CONSTRUÇÃO DA LINGUAGEM MATEMÁTICA SIGNIFICATIVA. LABORATÓRIO DE ENSINO: CONSTRUÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS, PARÓDIAS, ANÁLISE DE JOGOS MATEMÁTICOS, CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE GRÁFICOS, ETC. <p>Conteúdo Programático</p> <p>REFLETIR SOBRE O PAPEL DA LINGUAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL E NO ENSINO FUNDAMENTAL, PRESENTE NOS DIFERENTES MEIOS DE COMUNICAÇÃO E TAMBÉM NOS DIFERENTES CONTEXTOS SOCIOCULTURAIS.</p> <p>ANALISAR A SITUAÇÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA, E PRINCIPAIS TENDÊNCIAS, TENDO EM VISTA A ATUAÇÃO PROFISSIONAL DO PEDAGOGO.</p> <p>OPORTUNIZAR ATIVIDADES ENVOLVENDO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS, MATERIAIS DIDÁTICOS ESTRUTURADOS E JOGOS MATEMÁTICOS, PARA QUE, A PARTIR DESSAS EXPERIÊNCIAS SEJAM CONSTRUÍDOS CONCEITOS DE MODO MAIS SISTEMATIZADO E COMPLETO.</p> <p>OPORTUNIZAR O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES COMO OBSERVAÇÃO, ANÁLISE, LEVANTAMENTO DE HIPÓTESES, BUSCA DE SUPOSIÇÕES, REFLEXÃO, TOMADA DE DECISÃO, ARGUMENTAÇÃO E ORGANIZAÇÃO, ASPECTOS ESTREITAMENTE RELACIONADOS AO CHAMADO RACIOCÍNIO LÓGICO ENVOLVENDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS.</p>	<p>Ementa</p> <ul style="list-style-type: none"> - ESTUDO DAS CONCEPÇÕES E TENDÊNCIAS NO CAMPO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. ANÁLISE HISTÓRICA E SOCIOCULTURAL DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA. - REPRESENTAÇÕES SOCIAIS DA MATEMÁTICA E SUAS RELAÇÕES COM O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM. ETNOMATEMÁTICA. - DIRETRIZES CURRICULARES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA. PROCESSOS DE NUMERIZAÇÃO. - ANÁLISES DE PROPOSTAS INTERDISCIPLINARES: DIÁLOGOS DA MATEMÁTICA E OUTRAS ÁREAS DE CONHECIMENTO. - ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS E METODOLÓGICOS NO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA. ABORDAGENS DIDÁTICA DOS CONTEÚDOS DO ENSINO DE MATEMÁTICA: NÚMEROS NATURAIS, NÚMEROS RACIONAIS, E GEOMETRIA. - ANÁLISE E UTILIZAÇÃO DE PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA. LABORATÓRIO DE ENSINO: LIVROS DIDÁTICOS, MATERIAL DOURADO, ÁBACO, JOGOS, FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS, CALCULADORAS, ETC. <p>Conteúdo Programático</p> <p>SITUAR A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL, VERIFICANDO DE QUE MANEIRA ESSA DISCIPLINA CONTRIBUI PARA O DESENVOLVIMENTO DO ESTUDANTE.</p> <p>ESTUDAR E VIVENCIAR MÉTODOS DE ENSINO PROPOSTOS PARA A MATEMÁTICA ESCOLAR, RELACIONANDO-OS COM CONCEPÇÕES MAIS GERAIS DE ENSINO E APRENDIZAGEM.</p> <p>ADQUIRIR UMA BASE DE CONHECIMENTOS NA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, TENDO COMO REFERÊNCIA UMA CONCEPÇÃO CONSTRUTIVISTA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.</p> <p>DESENVOLVER HABILIDADES RELACIONADAS AO PLANEJAMENTO, IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DE ATIVIDADES NA ÁREA DE MATEMÁTICA.</p>

**ANEXO 2: EMENTA DO CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA DA
MODALIDADE A DISTÂNCIA DO CONSÓRCIO CEDERJ EM 2020**



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - UERJ
CENTRO DE EDUCAÇÃO E HUMANIDADES
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA A DISTÂNCIA
UERJ /UAB/CEDERJ**

EMENTÁRIO

2º período

Código	Nome da Disciplina	Carga Horária	Créditos
	MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO 1	60	4
Ementa	<p>Conceito de número natural. Sistema de numeração e valor de posição. Operações: significados e suas propriedades.</p> <p>Os modelos de contagem na abordagem das operações. A História da Matemática como forma de mostrar que a evolução da matemática se dá a partir da superação de problemas. A resolução de problemas como forma de aprender Matemática. Análise de dados, estatística e probabilidades</p>		

3º período

Código	Nome da Disciplina	Carga Horária	Créditos
	MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO 2	60	4
Ementa	<p>Ampliação do conceito de número: os racionais. Operações com frações e suas aplicações. Visualização e representação espacial. Sólidos geométricos. Formas geométricas básicas e relações entre elas. Noções de grandeza e de medida. Perímetro, área e volume. Comunicação de idéias geométricas.</p>		

**ANEXO 3: FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO EF
DE ANGRA DOS REIS INFORMADO PELA GERÊNCIA ADMINISTRATIVA
DA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO EM 31 DE MARÇO DE 2020**

Curso Superior	Professores
NENHUM	201
Administração - Bacharelado	4
Artes Visuais - Bacharelado	1
Artes Visuais - Licenciatura	5
Ciências Biológicas - Bacharelado	2
Ciências Biológicas - Licenciatura	17
Ciências Contábeis - Bacharelado	5
Ciências Sociais - Licenciatura	2
Comunicação Social (Área Geral) - Bacharelado	1
Direito - Bacharelado	3
Educação Física - Bacharelado	1
Educação Física - Licenciatura	10
Filosofia - Licenciatura	1
Fisioterapia - Bacharelado	2
Geografia - Licenciatura	8
Gestão de recursos humanos - Tecnológico	3
História - Licenciatura	33
História – Bacharelado	3
Jornalismo - Bacharelado	1
Letras - Língua Estrangeira - Bacharelado	1
Letras - Língua Estrangeira - Licenciatura	5
Letras - Língua Portuguesa - Bacharelado	2
Letras - Língua Portuguesa - Licenciatura	37
Letras - Língua Portuguesa e Estrangeira - Licenciatura	35
Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Humanas - Licenciatura	3
Licenciatura para a Educação Profissional e Tecnológica - Licenciatura	2
Matemática - Licenciatura	15
Música - Licenciatura	1
Nutrição - Bacharelado	1
Outro curso de formação superior - Bacharelado	1
Outro curso de formação superior - Licenciatura	2
Pedagogia (Ciências da Educação) - Bacharelado	51
Pedagogia - Licenciatura	416
Psicologia - Bacharelado	4
Química - Bacharelado	1
Serviço Social - Bacharelado	2
Turismo - Bacharelado	1
TOTAL	883

ANEXO 4: MATRIZ DE REFERÊNCIA EM GEOMETRIA DA ANRESC (PROVA BRASIL) / ANEB

**MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA
DO SAEB: TEMAS E SEUS DESCRITORES
5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

I. Espaço e Forma

- | | |
|------|---|
| D1 – | Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas. |
| D2 – | Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações. |
| D3 – | Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos. |
| D4 – | Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares). |
| D5 – | Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas. |

ANEXO 5: MATRIZ DE REFERÊNCIA EM GEOMETRIA DA PROVA ANA



Matriz de Matemática

EIXO ESTRUTURANTE	HABILIDADE	ESPECIFICAÇÕES DAS HABILIDADES
EIXO GEOMETRIA	H11 - Identificar figuras geométricas planas.	<p>Associar as seguintes figuras planas com seus respectivos nomes: triângulos, quadrados, retângulos e círculos em posição prototípica ou não.</p> <p><i>Observação:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Nos distratores podem ser utilizadas quaisquer figuras planas (ex. trapézio, pentágono etc).</i> 2. <i>Evitar usar quadrados, retângulos e losangos num mesmo item.</i>
	H12 - Reconhecer as representações de figuras geométricas espaciais.	<p>Associar representações de objetos do mundo físico a representações de alguns sólidos geométricos simples: cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, pirâmide. (exemplo: caixa com paralelepípedo, casquinha de sorvete com cone).</p> <p>Reconhecer planificações de prismas.</p> <p><i>Observação:</i></p> <p><i>Evitar usar cubos e paralelepípedos num mesmo item.</i></p>

ANEXO 6: ESCALA DE PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA UTILIZADA NAS AVALIAÇÕES DO SAEB NO 5º ANO DO EF À PARTIR DE 2017



ESCALA DE PROFICIÊNCIA DE MATEMÁTICA 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nível	Descrição do Nível
<p>Nível 0 Desempenho menor que 125</p>	<p>A Prova Brasil não utilizou itens que avaliam as habilidades deste nível.</p> <p>Os estudantes localizados abaixo do nível 125 requerem atenção especial, pois não demonstram habilidades muito elementares.</p>
<p>Nível 1 Desempenho maior ou igual a 125 e menor que 150</p>	<p>Os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS</p>
<p>Nível 2 Desempenho maior ou igual a 150 e menor que 175</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES</p> <p>TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES</p>
<p>Nível 3 Desempenho maior ou igual a 175 e menor que 200</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA</p> <p>Localizar um ponto ou objeto em uma malha quadriculada ou croqui, a partir de duas coordenadas ou duas ou mais referências.</p> <p>Reconhecer dentre um conjunto de polígonos, aquele que possui o maior número de ângulos.</p> <p>Associar figuras geométricas elementares (quadrado, triângulo e círculo) a seus respectivos nomes.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS</p> <p>NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES</p> <p>TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES</p>
<p>Nível 4 Desempenho maior ou igual a 200 e menor que 225</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA</p> <p>Reconhecer retângulos em meio a outros quadriláteros.</p> <p>Reconhecer a planificação de uma pirâmide dentre um conjunto de planificações.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS</p> <p>NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES</p> <p>TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES</p>



Nível	Descrição do Nível
<p>Nível 5 Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA Localizar um ponto entre outros dois fixados, apresentados em uma figura composta por vários outros pontos. Reconhecer a planificação de um cubo dentre um conjunto de planificações apresentadas.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES</p>
<p>Nível 6 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA Reconhecer polígonos presentes em um mosaico composto por diversas formas geométricas.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES</p>
<p>Nível 7 Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. Reconhecer um cubo a partir de uma de suas planificações desenhadas em uma malha quadriculada.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES</p>
<p>Nível 8 Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA Reconhecer uma linha paralela a outra dada como referência em um mapa. Reconhecer os lados paralelos de um trapézio expressos em forma de segmentos de retas. Reconhecer objetos com a forma esférica dentre uma lista de objetos do cotidiano.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES</p>



Nível	Descrição do Nível
<p>Nível 9 Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA Reconhecer a planificação de uma caixa cilíndrica.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES</p>
<p>Nível 10 Desempenho maior ou igual a 350</p>	<p>Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <p>ESPAÇO E FORMA Reconhecer dentre um conjunto de quadriláteros, aquele que possui lados perpendiculares e com a mesma medida.</p> <p>GRANDEZAS E MEDIDAS</p>

**ANEXO 7: ESCALA DE PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA UTILIZADA NAS
AVALIAÇÕES DO SAEB NO 5º ANO DO EF ANTES DE 2017**

DESCRIÇÃO DOS NÍVEIS DA ESCALA DE DESEMPENHO DE MATEMÁTICA – SAEB

5º e 9º. Ano do Ensino Fundamental

(continua)

Níveis de Desempenho dos alunos em Matemática	O que os alunos conseguem fazer nesse nível e exemplos de competência
Nível 0 - abaixo de 125	A Prova Brasil não utilizou itens que avaliam as habilidades abaixo do nível 125.
Nível 1 - 125 a 150	Neste nível os alunos do 5º e do 9º anos resolvem problemas de cálculo de área com base na contagem das unidades de uma malha quadriculada e, apoiados em representações gráficas, reconhecem a quarta parte de um todo.
Nível 2 - 150 a 175	Além das habilidades demonstradas no nível anterior, neste nível os alunos do 5º e 9º anos são capazes de: <ul style="list-style-type: none"> interpretar mapa que representa um itinerário.
Nível 3 - 175 a 200	Além das habilidades demonstradas nos níveis anteriores, neste nível os alunos do 5º e 9º anos: <ul style="list-style-type: none"> localizam informação em mapas desenhados em malha quadriculada;
Nível 4 - 200 a 225	Além das habilidades descritas anteriormente, os alunos do 5º e 9º anos: <ul style="list-style-type: none"> identificam propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.
Nível 5 - 225 a 250	Os alunos do 5º e do 9º anos, além das habilidades já descritas: <ul style="list-style-type: none"> identificam a localização/movimentação de objeto em mapas, desenhado em malha quadriculada; resolvem problema envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas;
Nível 6 - 250 a 275	Os alunos do 5º e 9º anos: <ul style="list-style-type: none"> identificam planificações de uma figura tridimensional; envolvendo o cálculo de área de figura plana, desenhada em malha quadriculada; identificam propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados e pelos tipos de ângulos;

DESCRIÇÃO DOS NÍVEIS DA ESCALA DE DESEMPENHO DE MATEMÁTICA – SAEB

5º e 9º. Ano do Ensino Fundamental

(continua)

Níveis de Desempenho dos alunos em Matemática	O que os alunos conseguem fazer nesse nível e exemplos de competência
Nível 7 - 275 a 300	<p>Os alunos do 5º e 9º anos:</p> <ul style="list-style-type: none"> reconhecem a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas; identificam propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados e tipos de ângulos; identificam as posições dos lados de quadriláteros (paralelismo);
Nível 8 - 300 a 325	<p>Os alunos do 5º e do 9º anos:</p> <ul style="list-style-type: none"> envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas; desenhadas em malhas quadriculadas; envolvendo o cálculo de área de figuras planas, desenhadas em malha quadriculada;
Nível 9 - 325 a 350	<p>Neste nível, os alunos do 5º e 9º anos:</p> <ul style="list-style-type: none"> reconhecem a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas; calculam a área de um polígono desenhado em malha quadriculada;
Nível 10 - 350 a 375	<p>Além das habilidades demonstradas nos níveis anteriores, neste nível, os alunos do 5º e 9º anos:</p> <ul style="list-style-type: none"> identificam propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações;
Nível 11 - 375 a 400	
Nível 12 - 400 a 425	

ANEXO 8: ESCALA DE PROFICIÊNCIA EM MATEMÁTICA UTILIZADA NAS AVALIAÇÕES DO SAEB/ANA



Interpretação pedagógica da escala de Matemática da ANA em 2014

Níveis	Descrição
Nível 1 (até 425 pontos)	<p>Neste nível, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ler horas e minutos em relógio digital; medida em instrumento (termômetro, régua) com valor procurado explícito; - Associar figura geométrica espacial ou plana a imagem de um objeto; contagem de até 20 objetos dispostos em forma organizada ou desorganizada à sua representação por algarismos; - Reconhecer planificação de figura geométrica espacial (paralelepípedo); - Identificar maior frequência em gráfico de colunas, ordenadas da maior para a menor; - Comparar comprimento de imagens de objetos; quantidades pela contagem, identificando a maior quantidade, em grupos de até 20 objetos organizados;
Nível 2 (maior que 425 até 525 pontos)	<p>Além das habilidades descritas nos níveis anteriores, os estudantes provavelmente são capazes de:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ler medida em instrumento (balança analógica) identificando o intervalo em que se encontra a medida; - Associar a escrita por extenso de números naturais com até três ordens à sua representação por algarismos; - Reconhecer figura geométrica plana a partir de sua nomenclatura; valor monetário de cédulas ou de agrupamento de cédulas e moedas; - Identificar registro de tempo em calendário; uma figura geométrica plana em uma composição com várias outras; - Identificar frequência associada a uma categoria em gráfico de colunas ou de barras; - Identificar frequência associada a uma categoria em tabela simples ou de dupla entrada (com o máximo de 3 linhas e 4 colunas, ou 4 linhas e 3 colunas); - Comparar quantidades pela contagem, identificando a maior quantidade, em grupos de até 20 objetos desorganizados; quantidades pela contagem, identificando quantidades iguais; números naturais não ordenados com até três algarismos; - Completar sequências numéricas crescentes de números naturais, de 2 em 2, de 5 em 5 ou de 10 em 10; - Compor número de dois algarismos a partir de suas ordens; - Calcular adição (até 3 algarismos) ou subtração (até 2 algarismos) sem reagrupamento; - Resolver problema com as ideias de acrescentar, retirar ou completar com números até 20; problema com a ideia de metade, com dividendo até 10.

Nível 3 (maior que 525 até 575 pontos)	<p>Além das habilidades descritas no nível anterior, o estudante provavelmente é capaz de:</p> <ul style="list-style-type: none">- Associar um agrupamento de cédulas e/ou moedas, com apoio de imagem ou dado por meio de um texto, a outro com mesmo valor monetário;- Identificar frequências iguais em gráfico de colunas; identificar gráfico que representa um conjunto de informações dadas em um texto; identificar frequência associada a uma categoria em tabela de dupla entrada (com mais de 4 colunas, ou mais de 4 linhas);- Completar sequência numérica decrescente de números naturais não consecutivos;- Calcular adição de duas parcelas de até 03 algarismos com apenas um reagrupamento (na unidade ou na dezena); subtração sem reagrupamento envolvendo pelo menos um valor com 3 algarismos;- Resolver problema, com números naturais maiores do que 20, com a ideia de retirar; problema de divisão com ideia de repartir em partes iguais, com apoio de imagem, envolvendo algarismos até 20.
Nível 4 (maior que 575 pontos)	<p>Além das habilidades descritas no nível anterior, o estudante provavelmente é capaz de:</p> <ul style="list-style-type: none">- Ler medida em instrumento (termômetro) com valor procurado não explícito; horas e minutos em relógios analógicos, identificando marcações de 10, 30 e 45 minutos, além de horas exatas;- Reconhecer decomposição canônica (mais usual) de números naturais com três algarismos; composição ou decomposição não canônica (pouco usual) aditiva de números naturais com até três algarismos;- Identificar uma categoria associada a uma frequência específica em gráfico de barra;- Calcular adição de duas parcelas de até 03 algarismos com mais de um reagrupamento (na unidade e na dezena); subtração de números naturais com até três algarismos com reagrupamento;- Resolver problema, com números naturais de até três algarismos, com as ideias de comparar, não envolvendo reagrupamento; com números naturais de até três algarismos, com as ideias de comparar ou completar, envolvendo reagrupamento; de subtração como operação inversa da adição, com números naturais; de multiplicação com a ideia de adição de parcelas iguais, de dobro ou triplo, de combinação ou com a ideia de proporcionalidade, envolvendo fatores de 1 algarismo ou fatores de 1 e 2 algarismos; de divisão com ideia de repartir em partes iguais, de medida ou de proporcionalidade (terça e quarta parte), sem apoio de imagem, envolvendo números de até 2 algarismos.