PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Joice D'Almeida

As concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética de professores de Matemática da rede pública paulista, sob o olhar da teoria APOS

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2021

JOICE D'ALMEIDA

As concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética de professores de Matemática da rede pública paulista, sob o olhar da teoria APOS

Doutorado em Educação Matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutora em **Educação Matemática,** sob a orientação, da Profa. Dra. **Barbara Lutaif Bianchini**.

São Paulo
2021

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos, desde que citada a fonte

Assinatura: _____

Data: _____/_____/_____

Banca Examinadora

_____

_____

_____

_____

_____

Dedico este trabalho à minha mãe, Célia, por me ter me ensinado a ser uma mulher forte, guerreira e dedicada em tudo aquilo que toco. E mesmo não estando neste mundo para acompanhar esta trajetória, continua presente no meu coração, com muito amor e saudade.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brazil (CAPES) - Financing Code 001.

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu Senhor e Salvador, por ter me permitido percorrer este caminho e me dar forças para concluir mais esta etapa. A Ele toda honra e toda glória.

À professora Dra. Barbara Lutaif Bianchini, pela orientação, atenção e incentivo primordiais para a execução deste trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora, Dr. Gabriel Loureiro de Lima, Dr. Gerson Pastre de Oliveira, Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva e Dra. Marilene Ribeiro Resende por contribuírem para o aprimoramento deste trabalho.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA – pelas sugestões, contribuições e acompanhamento da evolução do trabalho durante as reuniões do grupo.

Aos professores e colegas de estudo do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, por compartilharem durante todos estes anos momentos que certamente foram fundamentais para minha formação.

Aos docentes participantes deste estudo pela disposição, colaboração e confiança.

À minha família, familiares e amigos que me acompanharam e torceram sempre.

Ao meu querido Luiz Dantas, pelo incentivo, apoio, carinho e por sempre acreditar em mim. A todos, cada qual com sua particularidade, que de alguma forma me auxiliaram para o desenvolvimento desta tese, expresso minha gratidão.

Em especial, a meu pai Abel, sempre minha referência de caráter e humanidade, por dedicar esforços para que eu colhesse sempre o melhor dos estudos desde criança.

RESUMO

O tema central desta tese é o Teorema Fundamental da Aritmética, parte integrante da Teoria Elementar dos Números, cujo objetivo principal é investigar as concepções e os conhecimentos de professores de Matemática, atuantes na rede estadual paulista, sobre este tema. O trabalho, desenvolvido no contexto de uma pesquisa qualitativa, contou com a participação de seis professores de Matemática voluntários e atuantes na rede pública paulista. A fundamentação teórica da pesquisa se deu à luz da teoria APOS, de Ed Dubinsky, que descreve o caminho para a construção de conceitos matemáticos, por meio de mecanismos mentais – interiorização, encapsulação e tematização – e estruturas mentais, também chamadas de concepções – Ação, Processo, Objeto e Esquema. Elaborou-se uma Decomposição Genética, elemento componente da teoria utilizada, em que se descreveu as possíveis construções mentais que um indivíduo constrói para a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética e de conceitos vinculados a ele. Como teoria auxiliar na análise dos conhecimentos revelados pelos professores, baseou-se no modelo teórico do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, o MTSK. Para a coleta de dados, elaborou-se um documento contendo questões sobre sua formação, sua experiência profissional e seu entendimento sobre a Teoria dos Números, para a caracterização dos participantes e outro, contendo seis questões sobre conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, que foram respondidos pelos professores. Posteriormente, realizou-se uma entrevista semiestruturada com cada docente, com intervenção nos registros anteriormente realizados, buscando analisar a compreensão sobre elementos como os conceitos de múltiplo e divisor, a unicidade da decomposição em fatores primos e a utilização desta representação em contextos internos e externos à temática central. Os resultados indicam que alguns dos participantes apresentam dificuldades na definição de múltiplos e divisores e a maioria não reconheceu a unicidade da decomposição em fatores primos. Além disso, para este grupo de docentes, as propriedades provenientes desta representação são pouco consideradas para a decisão sobre a divisibilidade e multiplicidade de um número inteiro, sendo as estratégias dominantes a utilização do procedimento da divisão com resto zero e os critérios de divisibilidade. Acredita-se que os resultados aqui divulgados trouxeram uma contribuição importante para o escopo de estudos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Palavras-chave: Teorema Fundamental da Aritmética, Teoria APOS, Teoria Elementar dos Números, Educação Matemática.

ABSTRACT

The central theme of this thesis is the Fundamental Theorem of Arithmetic, an integral part of the Elementary Theory of Numbers, whose main objective is to investigate the conceptions and knowledge of Mathematics teachers, working in the public schools in São Paulo, about the Fundamental Theorem of Arithmetic. The work, developed in the context of a qualitative research, had the participation of six volunteer Mathematics teachers working in the São Paulo public network. The theoretical foundation of the research was based on Ed Dubinsky's APOS theory, which describes the path to the construction of mathematical concepts, through mental mechanisms - interiorization, encapsulation and thematization - and mental structures, also called conceptions - Action , Process, Object and Schema. A Genetic Decomposition was elaborated, a component element of the theory used, in which the possible mental constructions that an individual builds for the understanding of the Fundamental Theorem of Arithmetic and the concepts linked to it were described. As an auxiliary theory in the analysis of the knowledge revealed by the teachers, it was based on the theoretical model of the Specialized Knowledge of the Mathematics Teacher, the MTSK. For data collection, a document was prepared containing questions about their education, professional experience and their understanding of the Theory of Numbers, for the characterization of the participants and another, containing six questions about concepts related to the Fundamental Theorem of Arithmetic, which were answered by the teachers. Subsequently, a semi-structured interview was carried out with each professor, intervening in the records previously carried out, seeking to analyze the understanding of elements such as the concepts of multiple and divisor, the uniqueness of decomposition into prime factors and the use of this representation in internal and external contexts to the central theme. The results indicate that some of the participants have difficulties in defining multiples and divisors and most did not recognize the uniqueness of the decomposition into prime factors. Furthermore, the properties arising from this representation are little considered for the decision on the divisibility and multiplicity of an integer, with the dominant strategies being the use of the division procedure with zero remainder and the divisibility criteria. It is believed that the results disclosed here brought an important contribution to the scope of studies related to the Fundamental Theorem of Arithmetic.

Keywords: Fundamental Theorem of Arithmetic, APOS Theory, Elementary Number Theory, Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Unidade temática Números do 6º ano 21
Figura 2 – Unidade temática Números do 7º ano 22
Figura 3 – Unidade temática Números do 9º ano 22
Figura 4 – Teoria APOS 57
Figura 5 – Decomposição genética do conceito de indução matemática 65
Figura 6 – Determinação de múltiplo no livro didático 74
Figura 7 – Dispositivo prático para a decomposição em fatores primos 83
Figura 8 – O Conhecimento Especializado do Professor de Matemática 89
Figura 9 – Protocolo da Questão 1 de Alice 114
Figura 10 – Protocolo da Questão 2 de Alice 118
Figura 11 – Protocolo da Questão 3 de Alice 119
Figura 12 – Protocolo da Questão 4 de Alice 123
Figura 13 – Protocolo da Questão 5 de Alice 125
Figura 14 – Protocolo da Questão 6 de Alice 127
Figura 15 – Protocolo com rascunho da Questão 6 de Alice 128
Figura 16 – Protocolo da Questão 1 de Ester 132
Figura 17 – Protocolo da Questão 2 de Ester 134
Figura 18 – Protocolo da Questão 3 de Ester 136
Figura 19 – Protocolo da Questão 4 de Ester 138
Figura 20 – Protocolo da Questão 5 de Ester 140
Figura 21 – Protocolo da Questão 6 de Ester 142
Figura 22 – Protocolo da Questão 1 de Regina 150
Figura 23 – Protocolo da Questão 2 de Regina 152
Figura 24 – Protocolo da Questão 3 de Regina 153
Figura 25 – Protocolo do item d da Questão 3 de Regina 155
Figura 26 – Protocolo da Questão 4 de Regina 156
Figura 27 – Protocolo da Questão 5 de Regina 157
Figura 28 – Protocolo da Questão 6 de Regina 158
Figura 29 – Protocolo da Questão 1 de Saulo 169
Figura 30 – Protocolo da Questão 2 de Saulo 171
Figura 31 – Protocolo da Questão 3 de Saulo 173

Figura 32 – Protocolo da Questão 4 de Saulo 175
Figura 33 – Protocolo da Questão 5 de Saulo 177
Figura 34 – Protocolo da Questão 6 de Saulo 179
Figura 35 – Protocolo da Questão 1 de Leandro 186
Figura 36 – Protocolo da Questão 2 de Leandro 188
Figura 37 – Protocolo da Questão 3 de Leandro 189
Figura 38 – Protocolo da Questão 4 de Leandro 190
Figura 39 – Protocolo da Questão 5 de Leandro 191
Figura 40 – Protocolo da Questão 6 de Leandro 193
Figura 41 – Protocolo da Questão 1 de Dandara 200
Figura 42 – Protocolo da Questão 2 de Dandara 204
Figura 43 – Protocolo da Questão 3 de Dandara 205
Figura 44 – Protocolo da Questão 4 de Dandara 208
Figura 45 – Protocolo da Questão 5 de Dandara 209
Figura 46 – Protocolo da Questão 6 de Dandara 211

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Síntese da caracterização dos(as) participantes da pesquisa 215
Quadro 2 – Conceitos de múltiplo e divisor dos participantes 220
Quadro 3 – Utilização da representação canônica 223
Quadro 4 – Conhecimentos revelados pelos professores 231

SUMÁRIO

1. Introdução 16
1.1. Trajetória Acadêmica 16
1.2. Problemática e objetivo 18
2. Revisão de Literatura 29
3. Fundamentos Teóricos 52
3.1. A Teoria APOS 52
3.2. As estruturas e os mecanismos mentais 58
3.3. A Decomposição Genética 63
3.4. Pesquisas baseadas na teoria APOS 67
3.5. O Teorema Fundamental da Aritmética 73
3.6. Decomposição Genética do Teorema Fundamental da Aritmética 80
3.7. O Conhecimento Especializado do Professor de Matemática 86
4. Procedimentos Metodológicos 94
4.1. Descrição dos participantes e procedimentos 94
4.2. Descrição e análise do Instrumento de Coleta de Dados 99
5. Descrição e Análise dos Dados 109
5.1. Entrevista com a professora Alice 109
5.2. Entrevista com a professora Ester 130
5.3. Entrevista com a professora Regina 146
5.4. Entrevista com o professor Saulo 163
5.5. Entrevista com o professor Leandro 182
5.6. Entrevista com a professora Dandara 195
5.7. Uma análise panorâmica 214
5.7.1. O Formulário de Caracterização do(a) Participante 214
5.7.2. Resumo da Questão 1 218
5.7.3. Resumo da Questão 2 220
5.7.4. Resumo da Questão 3 221
5.7.5. Resumo da Questão 4 224
5.7.6. Resumo da Questão 5 225
5.7.7. Resumo da Questão 6 227
5.7.8. Os Conhecimentos Especializados, segundo o MTSK 228

5.7.9. As Concepções dos professores, segundo a teoria APOS 230
6. Considerações Finais 234
Referências **244**
Anexos **249**

1. INTRODUÇÃO

1.1. TRAJETÓRIA ACADÊMICA

A temática Teoria dos Números me traz interesse desde os anos de graduação de Licenciatura em Matemática, quando tive a oportunidade de ser monitora da disciplina Álgebra, na qual está inserida a Teoria dos Números. Durante as aulas de monitoria, pude perceber quão grande eram as dificuldades dos estudantes ao se depararem com as questões complexas da Teoria dos Números, principalmente no que dizia respeito a demonstrações de teoremas. Muitos não conseguiam perceber a correlação entre os teoremas, assim como não entendiam como tais demonstrações e resultados dos teoremas poderiam ajudá-los a ensinar Matemática na sala de aula do Ensino Básico.

Ao iniciar a carreira docente, meus primeiros anos como professora do Ensino Básico público paulista, percebi a falta de conhecimento dos alunos sobre conceitos específicos sobre a Teoria dos Números para este nível de ensino que seriam importantes para a completa compreensão de outros conceitos da Matemática. Conceitos que envolvem a divisibilidade, como o algoritmo da divisão, múltiplos e divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e números primos, eram conhecidos parcialmente pela maioria dos alunos. Aqueles, porém, que tinham o conhecimento de alguns procedimentos envolvendo este tema, não entendiam, na maioria dos casos, o porquê faziam tais procedimentos.

Estas inquietações me trouxeram, em 2008, ao Programa de Estudos Pós-graduação em Educação Matemática, em nível de mestrado. No Programa, iniciei minha participação no Grupo de Pesquisas em Educação Algébrica (GPEA), que tem como projeto norteador “What algebra should be taught in preservice teachers’ courses?”[1] (MACHADO, S. D. A; MARANHÃO, M. C. S. A.; COELHO, S. P., 2003). Ao participar das reuniões do grupo e ter contato com os subprojetos que estavam em andamento, decidi me incorporar ao de título “Teoria Elementar dos Números[2] no Ensino Básico e Licenciatura”, pois acreditei ser o ideal para tentar responder às questões que me incomodavam e para contribuir com as pesquisas na Educação Matemática com esta temática.

[1] “Qual a álgebra a ser ensinada na formação de professores?”.
[2] A Teoria Elementar dos Números é entendida pelo GPEA como parte integrante da Teoria dos Números, tendo o seu foco nos Números Inteiros e suas propriedades.

Durante as leituras realizadas no GPEA, tive contato com as pesquisas em andamento e as já concluídas com a temática Teoria dos Números. Uma destas pesquisas recém-concluídas, na época, foi a de título “Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura”, na qual a autora Marilene Resende (2007) versa sobre o que de Teoria dos Números deve ser ensinado na formação inicial dos professores de Matemática que atuarão no Ensino Básico. Nas análises de seus dados, a autora propõe uma disciplina denominada Teoria Elementar dos Números e identifica tópicos essenciais que deveriam ser abordados na licenciatura em Matemática, tendo como preocupação principal as necessidades efetivas do professor que irá atuar na sala de aula. Os tópicos identificados por Resende (2007) são os que se seguem:

> Números Inteiros: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência (potências em $\mathbb{N}$, sequências, progressões aritméticas e geométricas) e princípio da indução finita; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética; Introdução à congruência módulo *m*: definições, propriedades e algumas aplicações; Equações diofantinas lineares. (RESENDE, 2007, p.228)

Assim, com base nestes tópicos essenciais, o objetivo da minha dissertação[3], orientada pela profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, foi investigar como a questão da divisibilidade e outros assuntos da Teoria Elementar dos Números, tais como operações, propriedades no conjunto dos Números Naturais, são apresentados e trabalhados nos Cadernos do Professor de Matemática do 8º ano[4], na rede estadual paulista de ensino.

Os Cadernos do Professor são apostilas divididas por bimestre, por série e por disciplina, contendo sugestões de abordagem para o professor dos assuntos presentes no currículo em sala de aula. Estas apostilas foram distribuídas, no início de 2008, pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo a todas as escolas da

---

[3] D’ALMEIDA; Joice. **A Teoria Elementar dos Números sob o Ponto de Vista dos Cadernos do Professor de Matemática da Rede Estadual de São Paulo** (Mestrado em Educação Matemática). PUC: São Paulo, 2010.

[4] De acordo com Projeto de lei n° 144/2005, a partir de 2006, no Brasil, o Ensino Fundamental tem duração mínima de nove anos, sendo 5 anos para as séries iniciais e 4 anos para as séries finais, indo do 1º ao 9º ano. A faixa etária ideal para esta etapa de escolarização inicia-se com 6 anos para o 1º ano, 7 anos para o 2º ano, 8 anos para o 3º e assim, sucessivamente, até 14 anos para o 9º ano.

rede pública estadual, como parte integrante da recém-elaborada Nova Proposta Curricular, propondo que todas tivessem um mesmo currículo base.

Os resultados encontrados apontaram para a pouca ênfase dada aos assuntos relacionados à esta temática, sendo a divisibilidade tratada, na maior parte dos momentos em que era necessária, de forma implícita, sendo apenas uma ferramenta procedimental, nos processos de resolução. Além disso, pelo início dos estudos do conjunto dos Números Racionais ocorrer no ano analisado, há predileção para a Matemática do contínuo, deixando a Matemática do discreto com pouca ou nenhuma atenção. Tal constatação continuou a me trazer inquietações, pois algumas questões continuaram a surgir: “Os professores percebem a presença da Teoria Elementar dos Números implícita nos conteúdos dos 8° e 9° anos, uma vez que neste ciclo do Ensino Fundamental o foco maior é na Álgebra?”, “Como os professores trabalham as questões que envolvem tópicos da Teoria Elementar dos Números, se no material que lhes é enviado, pouco se revela sobre o assunto?”

O ingresso no doutorado no início do ano de 2017, e consequentemente a volta ao GPEA, foi impulsionado por estas questões e pelo desejo de contribuir mais uma vez com as pesquisas com a temática Teoria Elementar dos Números. Estas pesquisas, porém, ainda continuam sendo escassas por ser um assunto que tem sido pouco estudado por pesquisadores na Educação Matemática no Brasil. Assim, esta pesquisa torna-se uma parte importante para a composição do corpo de investigações nesta temática.

A seguir, serão apresentadas as leituras que conduziram à formulação da questão e dos objetivos desta tese.

1.2. PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Sobre a Teoria Elementar dos Números nos cursos de formação de professores de Matemática, Resende (2007) afirma que as disciplinas que tratam deste objeto matemático não têm seu foco em habilidade necessárias para a docência para o Ensino Básico e estas acabam sendo abordadas na licenciatura da mesma forma que é tratada nos cursos de bacharelado.

O fato é que a Teoria dos Números ensinada na formação de professores e aquela ensinada na sala de aula do Ensino Básico precisam ser distintas. Esta é uma discussão que Lins e Gimenez (1997) fazem em suas pesquisas ao afirmarem que é importante que a abordagem do estudo dos números em cursos de Licenciatura seja

apropriada de maneira a fornecer aos professores em formação um embasamento teórico e metodológico ao menos suficiente para que seus conceitos sejam ministrados de forma a suprir as necessidades do Ensino Básico. Isto permitiria uma relação efetiva entre o que se aprende na formação inicial e o que deve ser ensinado na Educação Básica.

Os excessos de formalidade e de valorização da forma abstrata no conhecimento acadêmico nos cursos de licenciatura em Matemática entram em contradição com a forma que este mesmo conhecimento toma ao ser trabalhado em níveis de ensino mais básicos, já que acabam se tornando um grande conjunto de regras que não fazem sentido nem para o professor, nem para o aluno. As diferenças entre estas formas, segundo Moreira (2004), “pode estimular ainda o desenvolvimento de concepções e valores que, muitas vezes, dificultam a comunicação do professor com os alunos e a própria gestão da matéria em sala de aula.” (MOREIRA, 2004, p. 178)

Esta situação é uma inquietação constante entre os pesquisadores da Educação Matemática, uma vez que, segundo Resende e Machado (2012), o estudo dos números inteiros ocupa grande parte do currículo do Ensino Básico sendo que seu ensino possui questões próprias que não podem ser ignoradas na formação do professor.

Sobre esta ocupação dos números naturais e inteiros no Ensino Básico, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) – PCN, documento oficial que apresentava diretrizes para a elaboração de currículos para todo país, que vigorou desde o ano de 1997 até o ano de 2017, apresenta o bloco Número e Operações como aquele que é explorado intensamente nos primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental (que se referem do 1º ao 5º ano da organização serial atual). E, ao indicar o que deve ser estudado sobre os números inteiros no terceiro ciclo (6º e 7º anos), os PCN afirmam que,

> com relação aos números naturais, muitas vezes se considera que o trabalho com eles se encerra no final do segundo ciclo; no entanto, é fundamental que o aluno continue a explorá-los […].
> Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem

> compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. […]
> Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. (BRASIL, 1998, p.66)

Apesar de indicações como a da citação acima de que o estudo dos números inteiros deva ser continuado nos terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º ano), os PCN não apresentam como pode ser feita a proposição de situações que possibilitem a valorização da Aritmética, já que na seção “Conteúdos e Procedimentos – Números e Operações” dá-se grande ênfase à álgebra e ao pensamento proporcional, ficando os números inteiros restritos à “Análise, interpretação, formulação e resolução de situações problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais” (BRASIL, 1998, p. 87)

Ainda sobre a ocupação dos números inteiros no Ensino Básico, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento oficial que regulamenta as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e particulares, posterior aos PCN e em vigência desde o início de 2018, confirma o predomínio desta presença. Dividido por áreas de conhecimento – Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso –, apresenta, em cada uma delas, competências gerais “que pretendem assegurar, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, uma formação humana integral que visa à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva” (BRASIL, 2017, p. 25)

Desde os Anos Iniciais, são descritas as competências específicas de cada uma das componentes curriculares, subdivididos em Unidades temáticas, Objetos de conhecimento e Habilidades. Na área de conhecimento Matemática, a Unidade temática Números traz os Objetos de conhecimento que estão diretamente relacionados aos números naturais e os números inteiros e, notadamente, tomam grande parte dos temas apresentados como são descritas desde o 1º ano até o 6º como exemplifica a Figura 1:

Figura 1 – Unidade temática Números do 6º ano

MATEMÁTICA – 6º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Números	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana
	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos
	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais
	Aproximação de números para múltiplos de potências de 10
	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"

Fonte: Brasil (2017, p. 298)

Com o início do estudo dos números decimais, porém, os itens que tratam de números naturais e inteiros vêm perdendo espaço no 7º ano, chegando a não serem citados como assunto a serem abordados no 9º ano, como mostram as Figuras 2 e 3:

Figura 2 – Unidade temática Números do 7º ano

MATEMÁTICA – 7º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Números	Múltiplos e divisores de um número natural
	Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples
	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações
	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador
	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações

Fonte: Brasil (2017, p. 304)

Figura 3 – Unidade temática Números do 9º ano

MATEMÁTICA – 9º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica
	Potências com expoentes negativos e fracionários
	Números reais: notação científica e problemas
	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos

Fonte: Brasil (2017, p. 314)

Para o Ensino Médio, o documento se propõe a dar continuidade e ampliação às habilidades e competências desenvolvidas durante todo o Ensino Fundamental, devendo “contribuir para a integração dos conhecimentos, entendida como condição para a atribuição de sentidos aos conceitos e conteúdos estudados nas escolas” (BRASIL, 2018, p.469). Desta forma, as habilidades e competências a serem desenvolvidas durante esta etapa são descritas de maneira geral, sem determinar quais conteúdos específicos devem ser ensinados, nem a seriação adequada para tal desenvolvimento.

Segundo a BNCC, a não indicação da seriação específica de cada uma das habilidades de Matemática se dá “para garantir aos sistemas de ensino e às escolas a construção de currículos e propostas pedagógicas flexíveis e adequados à sua realidade” (BRASIL, 2018, p. 32). Ainda que concordemos sobre a necessidade imprescindível de haver possibilidades de flexibilização na construção dos currículos devido à pluralidade cultural e social existente no Brasil, entendemos ser importante que haja alguma consonância de conteúdos mínimos obrigatórios para todo o país.

Fica evidente, então, que a presença dos números inteiros no currículo do Ensino Básico no atual guia curricular nacional ocorre de maneira abundante nas séries iniciais até o 6º ano. A partir do 7º ano, entretanto, esta presença se estingue, não sendo citado explicitamente nas habilidades detalhadas a serem desenvolvidas durante o Ensino Médio.

O documento traz apenas que é preciso comparar as habilidades dos alunos em relação a um determinado tema que foi trabalhado em um dado ano “para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes.” (BRASIL, 2017, p. 297)

Deste modo, observamos a urgente necessidade da elaboração de documentos complementares que orientem a construção de currículos coerentes com as habilidades e competências descritas no documento, para que se tenham conteúdos comuns a todos as regiões, respeitando as diversidades existentes, além de orientações de como devem ser abordados temas relativos aos números inteiros nas séries em que não os tem como foco.

Diante disto, pode-se afirmar que o estudo da Teoria dos Números é, muitas vezes, negligenciado em documentos oficiais como foi o PCN num passado recente e como é a BNCC atualmente. Mesmo que afirmem, em alguns momentos, que seu

estudo é necessário e não deve ser abandonado durante a caminhada escolar, pouco se faz referência a tais temas como sendo importante de serem trabalhados, nem ao menos como temas transversais, tampouco a abordagem ideal para que estes assuntos sejam tratados.

Pesquisadores de outros países, não apenas do Brasil, como Campbell e Zazkis (2002), da mesma forma, tem percebido a ausência ou a pouca ênfase dada à Teoria dos Números nos currículos dos diferentes níveis de ensino e afirmam ser

> um tanto surpreendente que a teoria dos números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que desempenha. Talvez mais surpreendente, especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento cognitivo do entendimento matemático, seja que essa escassez de atenção tenha sido dada à pesquisa sobre aprendizado e ensino da Teoria dos Números.[5] (CAMPBELL; ZAZKIS, 2002, p. 2, tradução nossa)

Apesar disso, Machado, Maranhão e Coelho (2005) afirmam que o trabalho com a Teoria dos Números pode

> auxiliar a reconhecer e compensar limitações de estudantes em seu entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros; criar oportunidades, através da abordagem de tópicos como decomposição em primos e divisibilidade, para propor problemas fecundos que desenvolvam a compreensão conceitual da Matemática; instigar as habilidades de estudantes para generalizar e fazer conjecturas e para encontrar maneiras de justificar estas conjecturas; promover o desenvolvimento de estratégias de provas indutivas e dedutivas (MACHADO; MARANHÃO; COELHO, 2005, p. 26).

Resende (2015) concorda com a ideia das pesquisadoras acima, ao afirmar que

> a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova: porque, ao tratar dos números inteiros, permite que os estudantes trabalhem com algo que lhes é familiar; porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas. (RESENDE, 2015, p. 12).

Desta forma, a Teoria dos Números mostra-se importante na formação do pensamento matemático do indivíduo, pois auxilia na composição da habilidade de argumentação, indução e dedução.

---

[5] it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does. Perhaps more surprising, especially with regard to the cognitive development of mathematical understanding, is that such a paucity of attention has been given to research into learning and teaching number theory.

Sobre as capacidades que podem ser desenvolvidas nos estudantes com estudos envolvendo a Teoria dos Números, Rama (2009) destaca que os problemas que envolvem as propriedades algébricas dos números inteiros podem ser bastante desafiadores por terem como característica marcante a necessidade da elaboração de argumentações para justificar sua resolução. Acrescenta, ainda, que para a elaboração de tais argumentações, na maior parte dos problemas, não é preciso a utilização de muito simbolismo e nem o uso de uma linguagem com excesso de formalidade. Segundo o pesquisador, “atividades com esse caráter podem ajudar na formação de um pensamento matemático, e na compreensão da importância das demonstrações nessa ciência.” (RAMA, 2009, p. 154)

Desta forma, fica evidente a necessidade de estudos que permitam o aprofundamento de temas que envolvem o estudo dos Números Inteiros e suas propriedades para que os estudantes desenvolvam habilidades que são próprias da Matemática. Entretanto, não basta saber a importância para os estudantes de estudos nesta temática. É preciso, da mesma forma que sejam realizadas investigações com o foco no conhecimento de professores de Matemática que são necessários para que possibilite tal desenvolvimento.

Sobre isto, Maranhão e Machado (2013) afirmam que existem capacidades consideradas fundamentais para professores que ensinam Álgebra e linguagem algébrica, sendo elas o saber justificar algebricamente as resoluções e conclusões, discernir entre a informação válida e inválida, distinguir a informação pertinente da não pertinente. Segundo as pesquisadoras, percebe-se

> [...] a necessidade de trabalho que inclua conjecturas e demonstrações algébricas, na mediação pretendida e, também, em cursos de formação de professores. Deve-se ampliar a visão histórica de modo a atingir o presente século. É necessário também recuperar o cerne da Álgebra na formação de professores de matemática, isto é, propor reflexões sobre suas principais atividades (MARANHÃO; MACHADO, 2013, p.10)

Entendendo, então, que os professores que atuam na Educação Básica são atores com concepções que podem influenciar diretamente na maneira como este tema é abordado neste nível de ensino, estes foram escolhidos como os indivíduos que nos auxiliarão a responder o questionamento que apresentaremos abaixo. Para isto, utilizaremos como base teórica a teoria APOS (acrônimo para *Action*, *Process*, *Object* e *Schema*).

Nesta teoria, busca-se descrever o caminho realizado por um indivíduo para a construção de um conceito matemático, por meio de abstrações reflexivas ou mecanismos mentais (interiorização, encapsulação, tematização) e por estruturas mentais ou concepções (Ação, Processo, Objeto e Esquema). Destacamos que o termo concepção, nesta teoria, se difere do significado que normalmente é visto em estudos que utilizam este mesmo termo na área da Educação Matemática. Entretanto, com o intuito de seguirmos coerentes com a nomenclatura adotada pelo idealizador da teoria, permanecemos utilizando esta terminologia.

Além disso, a definição de concepção e conceito de acordo com esta teoria devem ser diferenciadas. A concepção é a ideia pessoal que um indivíduo tem para conseguir compreender, diferentemente de conceito, que é concebido como um acordo comum estabelecido pela comunidade matemática. A base teórica, com seus elementos e definições, será detalhada nos próximos capítulos.

Percebendo a necessidade e a importância de mais estudos sobre assuntos relacionados aos números inteiros, escolhemos ater o foco principal de nossas investigações na Teoria Elementar dos Números por estarmos interessados, assim como Resende (2015), no potencial que os assuntos relacionados a este campo têm para promover uma melhoria no ensino, pelo professor, e na aprendizagem e no desenvolvimento do aluno.

A intenção inicial era buscar as concepções sobre os diversos temas que compõem a Teoria Elementar dos Números. Entendendo, porém, que tal investigação seria demasiadamente grande e demandaria mais tempo do que temos disponível, decidimos nos ater apenas a um destes elementos para que a pesquisa fosse realizada de forma satisfatória, sendo o Teorema Fundamental da Aritmética o assunto escolhido.

O Teorema Fundamental da Aritmética, mais conhecido como a decomposição única de um número inteiro em fatores primos, destaca-se na Teoria Elementar dos Números por ser um meio para o desenvolvimento de outros conceitos tais como número primo e número composto, divisores, múltiplos e a divisibilidade. Além disso, concordamos com Zazkis e Campbell (1996) ao afirmarem que

> a decomposição em fatores primos é um esquema unificador para números primos e compostos; ou seja, depende desses conceitos e de sua inter-relação. Se os conceitos de números primos e compostos não foram construídos adequadamente, isso provavelmente inibirá qualquer

> conceitualização significativa da decomposição em fatorem primos.[6] (ZAZKIS; CAMPBELL,1996, p. 217)

Desta maneira, uma compreensão adequada do Teorema Fundamental da Aritmética tem um papel central para a compreensão da estrutura dos números inteiros, sendo, então, um tema com relevância suficiente para que este o escolhido por nós.

Tendo isso em vista, esta pesquisa tem como objetivo investigar as concepções e conhecimentos revelados por professores de Matemática da rede pública de São Paulo, em relação ao Teorema Fundamental da Aritmética, sob o olhar da teoria APOS, procurando responder a seguinte questão:

De que maneira professores de Matemática, atuantes no Ensino Básico da rede pública do Estado de São Paulo concebem o Teorema Fundamental da Aritmética e os conhecimentos a ele vinculados, sob o ponto de vista da teoria APOS?

Como objetivos específicos trazemos:

- Identificar os conhecimentos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética evidenciados pelos professores durante a resolução de uma sequência de atividades;
- Compreender se, e como, o momento da entrevista pode influenciar na construção de conhecimentos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética do professor participante, entendendo que este pode ser considerado um momento de Intervenção;
- Tendo em vista que o Teorema Fundamental da Aritmética é um tema tomado como elementar no conjunto de conhecimentos de um professor de Matemática, entender como e quais Concepções, segundo a teoria APOS, são evidenciadas pelos professores.

Desta forma, apresentamos a organização deste texto, com uma breve descrição dos capítulos que compõem esta tese:

No Capítulo 1, apresentamos a introdução do nosso trabalho, contendo nossa trajetória acadêmica, o desenvolvimento da problemática que justificou esta investigação, assim como a questão norteadora, os objetivos e a estruturação do trabalho.

---

[6] prime decomposition is a unifying schema for prime and composite numbers; that is, it relies on these concepts and their interrelation. If the concepts of prime and composite numbers have not been adequately constructed, this will likely inhibit any meaningful conceptualization of prime decomposition.

No Capítulo 2, apresentamos a revisão de literatura realizada de forma a delinear e descrever teses, dissertações e artigos que tem como temática o Teorema Fundamental da Aritmética e conceitos relacionados a ele.

O Capítulo 3 traz os fundamentos teóricos desta pesquisa, no qual discorreremos sobre a teoria APOS e pesquisas apoiadas nesta teoria, sobre a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, seguida pela descrição de sua Decomposição Genética, finalizado pela apresentação do modelo teórico do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK).

O quarto Capítulo contém aportes sobre a metodologia utilizada neste trabalho, trazendo a descrição dos participantes, assim como os procedimentos metodológicos, o contexto em que se deu a coleta de dados desta tese e a descrição e análise do Instrumento de Coleta de Dados.

O Capítulo 5 traz a descrição e a análise dos dados coletados feita sob o ponto de vista dos elementos componentes da teoria APOS e do modelo teórico do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK), destacando as questões respondidas pelos participantes e discorrendo sobre seu desenvolvimento.

Finalmente, as Considerações Finais contêm a síntese do trabalho, ressaltando os resultados e sugestões para pesquisas futuras.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresentaremos alguns estudos que versam sobre o tema Teoria Elementar dos Números, iniciando com a exposição de teses e de uma dissertação, seguidas por artigos que possuem foco no próprio tema ou em assuntos relacionados a ele.

Para isto, consultamos inicialmente o Catálogo de Teses e Dissertações – CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e começamos nossa busca pelo descritor “Teoria dos Números”, selecionando teses e dissertações publicadas a partir de 2007, com o refinamento Ensino de Ciência e Matemática, Ensino e Educação tanto na Área Conhecimento quanto na Área Avaliação, uma vez que a Teoria Elementar dos Números está inserida na Teoria dos Números e neste local de pesquisa a Educação Matemática não está listada como Área de Conhecimento. Esta busca resultou em 18 trabalhos, sendo 8 teses e 10 dissertações, contendo temas relacionados, em algum aspecto, com o termo Teoria dos Números. Apesar disso, poucas destas se referiam, de fato, à Teoria dos Números e de forma específica à Teoria Elementar dos Números, trazendo os termos “teoria” e “números” como descritores, mas sem estarem relacionados entre si. Outros, não estavam disponíveis para consulta por serem anteriores aos depósitos eletrônicos de trabalhos na Plataforma Sucupira.

Como critério de escolha dos trabalhos a serem aqui expostos, realizamos as leituras dos títulos e dos resumos dos trabalhos disponíveis, procurando por aqueles que poderiam auxiliar na elaboração do nosso trabalho e salientar o ineditismo de nossa proposta. Assim, selecionamos três trabalhos que se relacionam com a Teoria Elementar dos Números e seus temas vinculados, incluindo o Teorema Fundamental da Aritmética.

O primeiro trabalho selecionado é a tese de Resende (2007) que, desde nossa primeira leitura, inspirou algumas inquietações que são contempladas nesta investigação. Em sua pesquisa, a autora tinha como questão norteadora “Qual teoria dos números é ou poderia ser concebida como um saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando a prática docente na educação básica?”. Para responder a esta questão, a autora se baseou no prefácio e no sumário de livros textos sobre a Teoria dos Números, nas propostas curriculares de disciplinas de universidades brasileiras

que têm como conteúdo principal a Teoria dos Números e no discurso de pesquisadores em Teoria dos Números, educadores matemáticos e professores desta disciplina para buscar elementos ao que seria uma ressignificação da disciplina Teoria dos Números em cursos de formação de professores de Matemática para a Educação Básica.

Segundo a autora, as distinções, equivalências e intersecções do que seriam a Teoria dos Números, a Aritmética e a Álgebra não ficam claras nos tempos das civilizações antigas. Esta indefinição se estende até hoje nos programas curriculares mínimos e diretrizes curriculares nacionais, que tratam os números inteiros apenas como um subconjunto dos números reais. Tal simplificação pode trazer prejuízos ao processo de ensino e aprendizagem, uma vez que despreza aspectos importantes presentes no conjunto dos números inteiros. Sobre isso, afirma ainda que “na escola básica, alguns temas da teoria elementar dos números, por falta de compreensão mais ampla, vão sendo esvaziados nos currículos por não ter uma aplicação imediata” (RESENDE, 2007, p.73)

Assim, Resende (2007) apresenta potencialidades no trabalho com este tópico no Ensino Básico, dentre as quais destaco o tratamento de ideias próprias da Teoria Elementar dos Números, compreendida entre os números inteiros e suas relações, como a divisibilidade e o número primo. Estas ideias são relevantes em matemática e estão presentes na matemática escolar explícita ou implicitamente, sendo que algumas delas não fazem sentido se tratadas em outros conjuntos que não sejam o dos números inteiros e seus subconjuntos.

Sobre o número primo, Resende (2007) o considera um conceito fundamental na Teoria Elementar dos Números. Do conceito de número primo, aliado às suas propriedades, derivam outros que da mesma forma são trabalhados na matemática do ensino básico, como o teorema fundamental da aritmética, o reconhecimento de um número primo e a determinação do número de divisores de um dado número.

Refletindo sobre sua questão geradora, Resende (2007) afirma que os assuntos pertinentes à Teoria Elementar dos Números não têm um papel de destaque na formação de professores. Quando se apresentam, são construídos de forma lógico dedutiva, partindo de proposições consideradas verdadeiras, com rigor extremo quanto à forma e com linguagem formal rebuscada. A autora ressalta que a Teoria dos Números pode ser ressignificada, tendo como base o saber científico, mas levando em conta as demandas de seu ensino e aprendizagem no Ensino Básico.

Para que isso seja possível, destaca que “o conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, a teoria e a prática, devam estar presentes na constituição das disciplinas específicas da licenciatura em matemática” (RESENDE, 2007, p. 229)

Em seus resultados, mostra que a argumentação é um tema que necessita ser tratado na formação inicial de professores, por estar presente nos textos oficiais como objetivo geral do ensino básico e, também, pelas implicações pedagógicas benéficas apontadas pelas pesquisas de sua relação com a prova, na forma de processo ou produto. O trabalho com prova e demonstração nas disciplinas de formação de professores de matemática, segundo a pesquisadora, deve considerar as componentes pedagógicas, assim como as suas funções específicas na construção do conhecimento matemático.

Outro resultado apontado nas reflexões finais é a evidente possibilidade do desenvolvimento de atividades investigativas, no trabalho com os números inteiros, uma vez que temas como a exploração de padrões e suas relações numéricas, a divisibilidade e os números primos continuam presentes nos currículos do ensino básico e podem ser explorados em atividades de qualquer nível. O trabalho com a investigação matemática pode propiciar discussões sobre a questão da generalização, uma vez que pode ser entendida como uma de suas etapas. Segundo Resende (2007), as perspectivas metodológicas da investigação no ensino básico “podem abrir a possibilidade de exploração da indução matemática e a discussão da diferença entre esta e a indução empírica que é realizada pelo estudante ao observar dados e padrões existentes entre eles” (RESENDE, 2007, p. 212)

Outra pesquisa selecionada foi a de Fonseca (2015), que investigou em sua tese como conceitos e propriedades dos números primos e do Teorema Fundamental da Aritmética são apropriados por professores em formação e a maneira como os professores compreendem e resolvem problemas relativos a estes temas.

Sua questão de pesquisa foi a seguinte: quais saberes e dificuldades acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética são evidenciados por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Pará quando submetidos a uma sequência didática que pretendeu inseri-los em percursos investigativos, formatados a partir de pressupostos teóricos ligados a representações numéricas e suas características transparentes/opacas?

O pesquisador problematiza sua questão de pesquisa mostrando a pouca consideração que é dada ao tema Teoria dos Números, ainda que seja de grande

relevância na formação inicial do professor. Além disso, apresenta seus objetos matemáticos de estudo, os números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética afirmando que é preciso que os estudantes não apenas identifiquem os números primos, mas sim entendam seu significado, assim como sendo importante que compreendam o Teorema Fundamental da Aritmética, isto é, a decomposição de um número em fatores primos, quando este número não é primo. E, concluindo sua problematização, aponta a importância dos conhecimentos mobilizados pelos professores em formação em relação a este tema.

Fonseca (2015) apresenta um breve panorama sobre os objetos matemáticos de seu estudo, iniciando com aportes históricos relativos à teoria dos números com renomados matemáticos que trabalharam com os números primos em seus estudos, com diversas demonstrações realizadas nos momentos históricos relatados. Entre outras, a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética é detalhada pelo pesquisador e também são apresentados alguns problemas históricos que contribuíram para a evolução do conceito de número primo e do Teorema Fundamental da Aritmética.

Em sua revisão de literatura, comenta sua dificuldade em encontrar estudos brasileiros sobre o tema Teoria dos Números. Desta forma, traz os resultados de teses, artigos e livros com conceitos e definições que o apoiaram em suas análises posteriores.

Em sua investigação, o pesquisador contou com a participação de 10 licenciandos em Matemática da Universidade Estadual do Pará para aplicação de uma sequência didática contendo seis questões sobre números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética. Os dados foram coletados por meio da solução destes problemas realizados pelos sujeitos de pesquisa e por meio do registro de alguns diálogos durante as resoluções. Tendo em mãos os dados, o pesquisador construiu categorias de análise que estão relacionadas à natureza das características representacionais numéricas que surgem do trabalho dos alunos ao longo da sequência didática – transparentes ou opacas; à relação conceito/notação, ligada à representação numérica adotada, no sentido de perceber se os alunos preservam o significado conceitual ou se ficam restritos às formas de representação por eles conhecidas e às estratégias adotadas na resolução dos problemas componentes – de que forma se conectam com o conceito de números primos, compostos e o Teorema

Fundamental da Aritmética – e se são adotados outros procedimentos operatórios/algoritmos.

Analisando as respostas apresentadas pelos participantes, Fonseca (2015) relata que a representação, aparentemente, transparente em algumas questões em relação à determinada característica do número pode não ser, de fato, transparente, dependendo do significado atribuído ao conceito de número primo e do Teorema Fundamental da Aritmética por cada aluno. Em um item, no qual se questionou a primalidade do número k = 16199 = 97x167, mesmo informando que os números 97 e 167 são primos, a maioria não percebeu a transparência da decomposição única do número k em dois fatores primos. Os alunos enunciavam corretamente o conceito de número primo, mas mostraram incompreensão do Teorema Fundamental da Aritmética, uma vez que citavam com frequência questões relacionadas à divisibilidade e a decomposição de um número em fatores primos, mas não enfatizavam o fato desta decomposição ser única para todo número inteiro. Tal inconsistência nos conceitos se mostrou em dificuldades conceituais reveladas nos protocolos com diversas questões não respondidas ou respondidas e justificadas incorretamente.

O pesquisador faz inferências sobre a possibilidade de a trajetória dos sujeitos de pesquisa ter interferido nas dificuldades apresentadas, afirmando que o contrato didático estabelecido no tratamento didático ao qual foram submetidos pode não ter dado a oportunidade que se aventurassem em questões abertas relacionadas ao Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, quando confrontados com as questões da pesquisa, os alunos responderam com mais facilidade aquelas que tinham respostas mais diretas, mas apresentaram dificuldades quando apresentados a questões que demandavam uma mobilização teórica maior do Teorema Fundamental da Aritmética.

Outra inferência apresentada pelo pesquisador sobre os eventuais erros cometidos pelos alunos é que, de fato, o conceito de número primo deve ser discutido relativamente cedo no percurso escolar e para que se tenha certa compreensão, questões muito complexas podem não ser adequadas. Além disso, a perda de espaço da Teoria dos Números no decorrer desta trajetória reforça o entendimento superficial do conceito de número primo.

No que se refere às estratégias de resolução apresentadas, Fonseca (2015) percebeu que frequentemente os sujeitos de pesquisa utilizavam técnicas dos critérios

de divisibilidade e de operações de multiplicação e divisão na tentativa de superar as dificuldades de incompreensão do Teorema Fundamental da Aritmética, despendendo grande sacrifício cognitivo a questões que seriam rapidamente resolvidas se a representação transparente oferecida fosse compreendida e interpretada pelos sujeitos.

Em comparação ao referencial teórico utilizado, o pesquisador observou a ocorrência de coincidências em suas análises em relação à primalidade por exclusão, na qual o conceito de número primo está no fato de ele não ser composto e não no conceito correto da decomposição única de um primo *p* ser *p* x 1; à primalidade por meio de exemplos, em que a tentativa de generalização de números que se apresentavam com uma representação opaca era realizada por meio de exemplos e à primalidade como consequência da fatoração, desconsiderando os conceitos relativos ao Teorema Fundamental da Aritmética.

O pesquisador conclui, também, que os números primos não apresentam qualquer representação que seja transparente, sendo limitantes para muitos estudantes na resolução de problemas. Ainda assim, afirma que as representações opacas dos números primos podem oportunizar a valorização dos significados e dos conceitos.

A pesquisa de Fonseca (2015) tem estreita relação com a que se está propondo neste trabalho, uma vez que seus temas centrais fazem parte da Teoria Elementar dos Números. Diferentemente da pesquisa de Fonseca, a presente tese tentará ampliar o estudo das concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, mas agora, voltada aos professores atuantes nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A próxima pesquisa que descreveremos é a dissertação de Pereira (2016). O relatório inicia-se com a descrição do caminho traçado pela autora, passando pela trajetória pessoal, por leituras sobre a importância do estudo dos números e da Teoria dos Números, sobre a formação inicial do professor de Matemática, sobre os processos de transformação de um conceito matemático e culminando na seguinte questão de pesquisa: “Como ocorre o processo de Transposição Didática na construção do conceito de divisibilidade em uma turma de sexto ano, e suas interações com a disciplina de Teoria dos Números na graduação em Licenciatura em Matemática?”.

Para atingir tal objetivo, utilizou a Teoria da Transposição Didática de Chevallard como sua base teórica majoritária, em que diferencia o saber sábio do científico do saber escolar e define o conceito de Transposição Didática como o trabalho de transformar este saber científico no saber escolar. Além disso, apresenta textos específicos da Teoria dos Números que discutem a questão da divisibilidade, seu objeto de estudo principal, tanto âmbito da matemática acadêmica quanto da matemática escolar.

Em sua investigação, de abordagem qualitativa, Pereira (2016) contou com a participação de um professor da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, de uma professora da rede particular de Vitória-ES e de seus 12 alunos do 6º ano do ensino fundamental. Os dados foram construídos em quadro etapas, sendo a primeira, entrevistas com os dois professores, a segunda e a terceira contaram com a observação das aulas da professora com o 6º ano do ensino fundamental e com a observação das aulas da disciplina Teoria dos Números na Licenciatura em Matemática, respectivamente, concluindo-se com a quarta etapa, em que se considerou os resultados das aulas ministradas no 6º ano.

Entendendo, então, que os processos do fenômeno da Transposição Didática podem explicar a adaptação e interrelação do saber científico e do saber escolar, a pesquisadora utiliza elementos desta teoria para categorizar e analisar os dados coletados, sendo eles: a análise epistemológica do regime didático do saber, a dialética antigo/novo, e a vigilância epistemológica.

Sobre a análise epistemológica do regime didático do saber em divisibilidade nas aulas do 6º ano, a autora identifica uma adaptação deste objeto matemático restrita ao saber escolar, em que se associa a divisibilidade entre números naturais à divisão exata. Ainda que tal adaptação explicite as diferenças existentes entre a noção matemática deste conceito nos contextos escolar e acadêmico, a base conceitual continua a mesma. Entretanto, Pereira (2016) indica que

> a disciplina de Teoria dos Números não discutiu práticas e situações de ensino e aprendizagem a serem empregadas na escola básica, e supomos que essa competência foi transferida para o licenciando. A habilidade de adaptação do conhecimento não é trivial. Por isso, as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas deveriam ser identificadas nas aulas de formação inicial do professor e discutidas as diferenças de tratamento na adaptação do saber para a escola básica (PEREIRA, 2016, p. 83).

Nas aulas de Teoria dos Números, a análise epistemológica indica que o material do professor configura um papel importante na construção do saber do licenciando, já possui uma linguagem científica adaptada para o momento de ensino.

Assim como na aula do 6º ano, houve um desenvolvimento conceitual entre o múltiplo e o divisível. Contudo, não foram realizadas discussões de como tais conceitos poderiam ser empregados na prática de sala de aula.

A dialética antigo/novo, por sua vez foi observada nas aulas do ensino fundamental, quando a professora faz relações entre as operações de multiplicação e divisão, um saber já conhecido dos alunos e os conceitos de múltiplo e de divisor. Já nas aulas de Teoria dos Números, a dialética antigo/novo não foi encontrada.

No tocante à vigilância epistemológica nas aulas do 6º ano, a pesquisadora destaca que a adaptação do saber sábio para o saber ensinável está diretamente ligada ao saber do professor e é influenciada por ele. Com a professora em questão, houve erros conceituais em relação à divisibilidade por zero e esta distorção pode afetar a aprendizagem do aluno. Já nas aulas de Teoria dos Números, ainda que não tenha ocorrido erros conceituais em relação à divisibilidade por zero, os argumentos da justificativa do professor foram conceitualmente frágeis, que, segundo Pereira (2016), configura uma zona de perigo passível de pode levar a uma distorção conceitual por parte do licenciando.

Assim, em ambas as aulas, as transformações do saber da matemática básica para o conteúdo de divisibilidade não foram corretamente trabalhadas, o que poderia explicar tais distorções no conceito do objeto matemático.

Tendo, então, esta pesquisa a divisibilidade como seu objeto de estudo, certamente influenciará nas análises que realizaremos, tendo em vista que este é um dos conceitos diretamente ligados ao Teorema Fundamental da Aritmética. Os resultados encontrados nos auxiliarão a perceber as nuances de entendimento que poderão ser observadas nas concepções dos participantes de nossa pesquisa.

Para continuar a busca por trabalhos sobre temas relacionados à Teoria dos Números, permanecemos com os mesmos filtros anteriormente inseridos na Plataforma Sucupira, trocando apenas o descritor para “Teorema Fundamental da Aritmética”. Neste momento, foram encontrados 18 trabalhos, sendo 2 teses e 16 dissertações, com uma das teses já constando na busca anterior. Continuando com o mesmo critério de escolha já descrito, selecionamos a tese de Barbosa (2008) para ser descrita a seguir.

A pesquisa de Barbosa (2008) buscou analisar os procedimentos e argumentos de alunos da 6ª série do Ensino Fundamental na realização de tarefas com conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética com a seguinte questão de

pesquisa: como se dá o processo de construção de conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética?

Como referencial teórico, baseou-se na Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, que tem como conceitos-chave o próprio conceito de campo conceituais, esquemas, situação e os invariantes operatórios implícitos (teorema-em-ação e conceito-em-ação) e explícitos.

A pesquisa foi realizada com 22 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular do Rio de Janeiro e a coleta de dados foi dividida em três partes. Na primeira, aplicou-se uma avaliação inicial, de cunho diagnóstico, para identificar relações já estabelecidas pelos alunos com conceito relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética; na segunda parte, foi implementada uma proposta de ensino composta por sete atividades e duas avaliações intermediárias e na terceira parte, aplicou-se uma avaliação final, contendo as mesmas questões apresentadas na avaliação inicial.

A análise dos dados dos instrumentos diagnósticos, isto é, das avaliações inicial, intermediárias e final, foi realizada primeiramente de forma quantitativa comparando o desempenho dos alunos questão por questão e na sequência de das avaliações, por meio do programa SPSS (*Statistical Package for Social Science*[7]). Em seguida, a análise qualitativa destes instrumentos foi feita comparando as questões das avaliações inicial e final. Já para o momento de Intervenção de ensino, a análise ocorreu exclusivamente de forma qualitativa, discutindo as estratégias e esquemas em ação utilizadas pelos alunos em cada atividade.

Como resultado geral, o desempenho médio dos alunos na avaliação foi considerado insatisfatório, uma vez que o nível de conhecimento em relação ao Teorema Fundamental da Aritmética se mostrou na ordem de 40%. Nas avaliações intermediárias, não houve mudanças significativas nas médias. Já na avaliação final, esta porcentagem passou para 70%, o que pode ter indicado, segundo a pesquisadora, a eficácia da Intervenção de ensino.

Na análise qualitativa das questões da avaliação inicial, Barbosa (2008) constatou um domínio não suficiente para as possíveis representações para um produto com mais de dois fatores, para a identificação e decomposição destes fatores, sejam eles primos ou não. Já em relação ao reconhecimento de um número primo,

[7] Pacote Estatístico para Ciências Sociais,

apresentaram domínio razoável na operação com números decompostos e na reversibilidade da multiplicação e na divisão. Na avaliação final, entretanto, um domínio considerado bom pela pesquisadora se deu nas questões envolvendo multiplicações e divisões com pequenos números.

Para a análise do momento de Intervenção de ensino, a pesquisadora levou em conta os procedimentos utilizados pelos alunos em todas as avaliações. Assim, destaca que o uso de materiais concretos favoreceu a percepção das diferentes propriedades dos conceitos abordados, a intensa troca de informações entre os alunos que traria mais confiança para expressarem seus procedimentos e estratégias e os diversos teoremas-em-ação e conceitos-em-ação observados nas ações dos alunos.

Sobre as estratégias adequadas para que os alunos compreendam o conceito de número primo, a pesquisadora entende que a definição comumente encontrada nos livros didáticos, em que um número é considerado primo se seus fatores forem apenas 1 e o próprio número, não é suficiente. Simultaneamente, é necessário que se favoreça a compreensão da decomposição em fatores primos.

Tal compreensão para o uso na simplificação de cálculo é favorecida quando os conceitos são trabalhados associados a outros, em situações distintas e com diversas representações. Assim, listou uma sequência de objetivos que criariam condições para que os alunos compreendessem e utilizassem a decomposição em fatores primos na simplificação de cálculos. Dentre estes objetivos, a pesquisadora destaca que o ato de listar os múltiplos e os fatores de um número, estava vinculado primeiramente a efetuar o procedimento da divisão e decidir observando o resto, e em seguida, realizar multiplicações sucessivas para só então descrever o conjunto dos múltiplos do número.

Outro objetivo listado ressaltado é o de criar representações para o produto envolvendo mais de dois fatores, em que os alunos mostraram uma estranheza inicial à ação de decompor um número e, quando realizavam, o faziam apenas em dois fatores. Após a ajuda da pesquisadora, passaram a utilizar três fatores e para decomposição em quatro ou mais fatores a ajuda já não foi necessária.

Como resposta à sua questão de pesquisa, Barbosa (2005) defende que inicialmente se apresentem situações para o reconhecimento da relação ente múltiplo e fator em pares de números e as propriedades de tal relação, para permitir que diferenciem os números primos dos números compostos. Seguido a isso, propõe o

favorecimento da compreensão da noção de decompor um número, por meio do trabalho da decomposição de diversas maneiras para só então decompor em fatores primos. Finalmente, para a utilização do Teorema Fundamental da Aritmética para a simplificação de cálculos, seus fatores e o m.m.c. e o m.d.c., sugere um trabalho de obtenção de igualdades matemáticas por meio da análise da decomposição de um número em fatores primos.

A pesquisa de Barbosa (2008) influenciará positivamente ao que se propõe neste trabalho, uma vez que os conceitos vinculados ao Teorema Fundamental da Aritmética podem ser observados por nós, no intuito de entender como os professores compreendem tais conceitos e de que maneira esta compreensão pode se refletir nas suas estratégias de ensino.

Alterando, novamente, o descritor para “divisibilidade”, mantendo os filtros iniciais, encontramos 12 trabalhos, sendo 2 teses e 10 dissertação, com alguns deles já listados nas buscas anteriores. Seguindo, ainda, os critérios de seleção iniciais, escolhemos apenas mais dois trabalhos para serem descritos.

A pesquisa de Souza (2018) objetivou analisar se houve alguma redução expressiva dos conteúdos de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano e nos documentos curriculares do Ensino Fundamental dos Anos Finais. Desta maneira, iniciou seu trabalho fazendo uma vasta e profunda busca por trabalhos que versaram sobre divisibilidade e Teoria dos Números, na Plataforma Sucupira, em trabalhos publicados nos Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática, nas revistas Bolema e *Zetetiké*. Como resultado, encontrou apenas 1 dissertação, 3 teses e 1 artigo de revista, que foram descritos e comentados, garantindo o ineditismo de sua tese e constatando a escassez de pesquisas que tem a divisibilidade, seu objeto de estudo, como tema principal de investigação.

Após fazer um breve panorama do percurso das reformas curriculares no Brasil, a pesquisadora fez considerações sobre sua base teórica, a Transposição Didática de Chevallard, por entender que há uma transposição do saber científico sobre a divisibilidade para o saber escolar presente no livro didático. Assim, ressaltou que o foco de sua pesquisa está na relação saber escolar-livro didático, com o professor sendo essencial neste contexto para a transposição do saber científico para o saber escolar ocorra. Além disso, enfatizou que a divisibilidade sofre transformações didáticas ao ser apresentada nos livros didáticos e é diferente daquela ensinada aos professores em formação inicial, indicando que nem sempre a transposição didática

presente no livro didático ocorre de forma satisfatória, por permitir rupturas conceituais por parte do professor.

Metodologicamente, o trabalho se enquadra como uma pesquisa qualitativa, de cunho documental, pois vale-se de materiais e documentos que ainda não receberam tratamento analítico, e bibliográfico, por utilizar as contribuições de diversos autores sobre um determinado tema. Desta maneira, selecionou para análise os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, a BNCC para Matemática do 6º ano para o Ensino Fundamental Anos Finais e Programas Curriculares de alguns Estados Brasileiros, além de Planos de Ensino de Matemática do 6º ano de três escolas estaduais.

Ainda, dividiu sua escolha de livros didáticos em quatro grupos. No primeiro, escolheu cinco livros didáticos da 5ª série da anteriores ao Movimento da Matemática Moderna até a década de 70, de 1926 a 1979; no segundo, selecionou oito livros da 5ª série, de 1980 a 2010; o terceiro grupo, compreendia oito livros do 6º ano dentre os mais escolhidos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2014 e o último grupo contou com a análise de oito livros do PNLD de 2017. Por meio da elaboração de fichas de análises, a pesquisadora considerou a ordenação em que os conteúdos relacionados à divisibilidade estão postos, a presença ou ausência destes conteúdos nos livros didáticos e a qualificação dos livros (ótimo, bom, regular, fraca e insuficiente) em relação à presença de conteúdos principais vinculados à divisibilidade.

Em seus resultados, Souza (2018) identifica que os documentos oficiais e programas curriculares, de forma geral, contemplam de maneira reduzida todos os conteúdos de divisibilidade (múltiplos e divisores dos números naturais, critérios de divisibilidade, números primos e números compostos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum) para o 6º ano. De forma específica, o Currículo Paulista apresenta menos da metade destes conteúdos e, em se tratando do Teorema Fundamental da Aritmética, mostrou-se ausente. Já nos Planos de Ensino analisados, ao menos um deles apresenta redução na presença de conteúdos de divisibilidade.

Em relação aos livros didáticos, o primeiro grupo apresentou grande parte dos conteúdos de divisibilidade, com três classificados com o conceito ótimo, por apresentar ausência não significativa destes conteúdos, sendo que a definição do Teorema Fundamental da Aritmética é contemplada em todos eles. Para o segundo grupo de livros didáticos, a presença de assuntos sobre a divisibilidade foi considerada

boa em dois dos livros, regular em cinco deles e fraco para um livro, mas a decomposição em fatores primos só foi abordada em cinco dos oito livros deste grupo.

O mesmo não ocorreu no último grupo, no qual consta a definição do Teorema Fundamental em quatro dos seis livros analisados. Os conteúdos de divisibilidade, por sua vez, foram considerados com boa presença em um livro e com presença fraca em outro. Para os outros quatro livros, a presença de conteúdos de divisibilidade foi considerada regular. Já sobre os livros do quarto grupo, seis foram considerados com presença regular e dois com presença fraca ou insuficiente, com a decomposição em fatores primos sendo definida em metade destes materiais.

Este resultados apontam, segundo a pesquisadora, para grandes mudanças na abordagem metodológica entre 1980 e final da década de 1990, quando deixaram de iniciar a apresentação dos conteúdos seguindo a sequência definições, exemplos, regras e algoritmos e passaram a se adequar às novas tendências curriculares indicadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Esta nova tendência trazia a exigência de um ensino com significado e com menos mecanização da aprendizagem. Com os novos critérios de avaliação adotados pelo PNLD, que privilegiam o livro didático diversificado e flexível, os livros tornam-se mais atrativos, com figuras, fotografias e situações-problema mais contextualizadas com a realidade do aluno.

Entretanto, a análise dos livros distribuídos pelo PNLD nos triênios de 2014 e 2017, apresentam uma redução dos conteúdos de divisibilidade que eram contemplados em livros de épocas anteriores e a pesquisadora questiona se com esta mudança os conteúdos matemáticos se tornaram mais compreensíveis:

> É evidente que as atuais orientações metodológicas para o ensino de Matemática priorizam a abordagem de resolução de problema […]. Contudo, quando se é orientado pelos documentos curriculares a deixar de trabalhar algoritmos que vão possibilitar a determinação do mdc e mmc, por exemplo, podemos pensar que estaremos negando aos alunos a oportunidade de conhecer e trabalhar com cálculos facilitadores e, também, de conhecer a história da Matemática. (SOUZA, 2018, p. 430)

Diante disso, a pesquisadora defende que se deve refletir se tais mudanças provocadas pelas novas tendências apresentadas nos livros didáticos influenciam positivamente, de forma efetiva, a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos pelos alunos.

A pesquisa de Souza (2018) mostra-se de importante relevância para este estudo e para o *corpus* de trabalhos sobre a Teoria dos Números, pois identifica, de

maneira minuciosa, as deficiências e ausências que conteúdos vinculados à divisibilidade, vem, ao longo do tempo, sendo deixados de lado nos documentos oficiais brasileiros e nos livros didáticos, materiais estes que prioritariamente são as escolhas do professor para guiar sua atividade prática.

Especificamente, o Teorema Fundamental a Aritmética, a partir da década de 1980, tem sua presença consideravelmente reduzida comparativamente com os livros de épocas anteriores, chegando a estar presente em apenas metade dos livros mais recentes pesquisados por ela. Entendemos que tal ausência pode influenciar negativamente tanto na aprendizagem dos alunos quanto no ensino do professor, que pode entender que tal tema não é importante por não estar presente no livro didático.

A última tese que traremos é a de Almeida (2020), que teve o objetivo de analisar o conhecimento e mobilizado e revelado por dois professores que ensinam Teoria dos Números sobre divisibilidade, optando a perspectiva do modelo teórico do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática[8] , o MTSK, que tem seu foco no conhecimento especializado do professor de Matemática que, de fato, faz sentido para o professor, considerando todo o conhecimento do professor e não apenas parte dele. O formato escolhido é o *multipaper*, constituído pela escrita de quatro artigos relacionados entre si, que segundo a pesquisadora, possibilitou uma clareza na análise dos dados e uma abrangência maior dos resultados obtidos. Os três primeiros buscam responder à questão de pesquisa e o último discute e sintetizam os resultados apresentados nos três primeiros

Em sua problemática, discute aspectos sobre o ensino da Teoria dos Números na formação inicial de professores de Matemática, destacando, inicialmente a escassez de trabalhos sobre o tema. Aponta, da mesma maneira, que a forma ordenada que este assunto é apresentado aos alunos em formação inicial pode trazer a impressão de que historicamente ela fora assim construída. Além disso, salienta a desconexão existente entre os tópicos estudados e a prática pedagógica posterior do futuro professor.

Sobre a formação e o conhecimento do formador de professores de Matemática, a pesquisadora apontou que pouco se investiga sobre a formação do professor formador, nem sendo discutida de forma aprofundada na legislação, que a trata de forma pontual e superficial. Além disso, destacou que apesar de o senso

[8] Os elementos constituintes deste modelo teórico estarão descritos no Capítulo 3.

comum concordar que a qualidade da formação do professor depende da qualidade do formador, poucas pesquisas têm sido feitas no sentido de entender o conhecimento deste professor formador.

Com uma abordagem qualitativa, a pesquisa se enquadra em um estudo de caso, contando com a participação de dois professores formadores de um curso de Licenciatura em Matemática, que ministravam a disciplina de Teoria dos Números. Os dados foram coletados por meio de entrevistas semiestruturadas, gravações de aulas, planejamento de aulas dos formadores, elementos de avaliação da disciplina e o caderno da pesquisadora. Assim, para auxiliar sua análise, a pesquisadora elaborou uma tabela com indicadores que apontavam para cada uma das categorias definidas em sua base teórica.

O primeiro artigo tem por título “Conhecimento especializado do formador de Matemática ao discutir relação de ordem no conjunto dos números inteiros”[9], e objetivou compreender, observando a prática de um professor formador de Matemática da disciplina Teoria dos Números, o conhecimento revelado e mobilizado. Assim, destacam em seus resultados que o docente participante apresentou todos os subdomínios do Conhecimento Matemático, priorizando o Conhecimento dos Temas ao focar suas explicações em procedimentos, definições, propriedades e registros de representação, assim como todos os subdomínios do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, com prioridade para Conhecimento das Características do desenvolvimento profissional de professores de Matemática, ao preocupar-se com dificuldades em relação aos conhecimentos prévios trazidos do Ensino Básico e à abstração dos alunos, em relação ao tema da relação de ordem nos números inteiros.

O segundo artigo denomina-se “*Mathematical Specialized Knowledge of a Mathematics Teacher Educator for teaching divisibility to prospective secondary teachers*”[10] e discute o conhecimento de um formador de futuros professores de Matemática, ao provar o teorema do algoritmo da divisão de Euclides, com foco em seu Conhecimento Matemático. Em seus resultados, indica que o professor participante mobilizou todos os subdomínio do referido domínio do Conhecimento

[9] ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do formador de Matemática ao discutir relação de ordem no conjunto dos números inteiros. In: **Revista Quadrante**, Lisboa, v. 28, 2019, p. 125-148.

[10] ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. Mathematical Specialized Knowledge of a Mathematics Teacher Educator for teaching divisibility to prospective secondary teacher. In: **Eleventh Congress of the European Society for Research In Mathematics Education**. Utrecht, Netherlands., 2019, p. 3831-3838.

Especializado do Professor de Matemática, apresentando maior prevalência do subdomínio do Conhecimento da Prática Matemática, quando mostrou maior preocupação com os procedimentos e formas de validação. Destacam que a prática do professor observada auxiliará na identificação de categorias do conhecimento do professor formador.

No terceiro artigo, intitulado por “Conhecimento especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações”[11], buscou-se responder à seguinte questão de pesquisa: “Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador, ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?”. Assim, os resultados indicaram que, nas análises aulas do professor houve um destaque para o Conhecimento Pedagógico da Matemática e o Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática, ao escolher um foco menos usual ao apresentar demonstrações para os licenciandos. Além disso, encontrou-se evidência do Conhecimento Matemático com os subdomínios Conhecimento de Temas e o Conhecimento da Prática da Matemática.

Para sintetizar os dados encontrados e responder à questão de pesquisa “Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?”, foi escrito o quarto e último artigo denominado “Meta-análise sobre o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao abordar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana”[12], tomando como base os resultados obtidos nos três artigos anteriores.

Desta maneira, os resultados obtidos, que neste momento, são do artigo e da tese, indicaram evidências do Conhecimento Matemático foi evidenciado em ambos os professores participantes. Entretanto, apenas três indicadores foram evidenciados pelos dois formadores ao mesmo tempo, sendo o primeiro deles o conhecimento de que no conjuntos dos números inteiros negativos não há menor elemento, o segundo, o saber demonstrar teoremas de existência e unicidade e o terceiro, conhecer como construir um conjunto auxiliar usado na demonstração do teorema do algoritmo da divisão de Euclides satisfaça a relação. Tal constatação pode indicar que tais

[11] ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações. In: **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 24-56, 2020.
[12] O artigo ainda não tinha sido submetido até o momento da pesquisa.

conhecimentos são essenciais na demonstração do referido teorema. Por outro lado, a ausência dos outros conhecimentos indicaria um foco diferente entre as aulas analisadas e a própria análise.

Em relação ao Conhecimento Pedagógico da Matemática, as análises foram realizadas apenas com um dos professores participantes em relação à divisibilidade. Os resultados apontam para uma prevalência do Conhecimento das Características do Desenvolvimento profissional de professores de matemática, ao evidenciar conhecer sobre as maneiras mais apropriados para a construção do conhecimento, identidade e para desenvolver as habilidades dos licenciandos e sobre o que normalmente sabem antes de ingressar na formação inicial.

Assim, esta pesquisa, além de nos proporcionar aprender mais sobre o *multipaper*, que não é um formato usualmente utilizado na elaboração de teses, nos auxiliará na identificação e na análise dos eventuais Conhecimentos Especializados do Professor de Matemática que possam ser revelados pelos docentes participantes de nossa pesquisa.

De acordo com os trabalhos relacionados acima, podemos perceber a importância de pesquisas que envolvam temas relacionados à Teoria dos Números, ao observarmos as diversas contribuições que tais assuntos podem trazer tanto para a melhoraria da formação de professores quanto para aprimorar os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática como um todo. Entretanto, a pequena quantidade de trabalhos encontrados, ratificam nossa percepção de estes assuntos não serem continuamente foco de trabalhos de pesquisas acadêmicas.

Assim, para complementar nossa revisão de literatura, trazemos, agora, dois artigos sobre pesquisas que tratam do Teorema Fundamental da Aritmética e de conceitos associados a ele.

O primeiro artigo que apresentaremos tem como tema principal o Teorema Fundamental da Aritmética. O objetivo de Zazkis e Campbell (1996) foi investigar aspectos procedimentais e conceituais de futuros professores do Ensino Fundamental – *Preservice Elementary School Teachers*[13] –, que muitas vezes estão familiarizados com o tema, explicam o seu significado, mas não resolvem corretamente problemas

[13] *Preservice Elementary School teacher* é o nome dado a estudantes treinados em instituições de ensino superior para se tornarem professores do Ensino Fundamental (*Elementary School*). Mais informações em: https://www.igi-global.com/dictionary/investigating-the-factors-influencing-pre-service-teachers-acceptance-to-use-mobile-devices-for-learning/23201.

relacionados ao assunto. Assim, busca contribuir para uma melhor compreensão de como se dá a construção do conhecimento dos números naturais e sua estrutura multiplicativa.

É importante salientar que os autores utilizaram para a realização do estudo ideias conceituais sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático que estavam sendo utilizadas e desenvolvidas entre as décadas de 1970 e 1990, entre elas os trabalhos de Piaget e as ideias de Dubinsky, com a importância da construção de objetos para que se tenha, segundo os autores, a transição do conhecimento processual para o entendimento conceitual. Na teoria APOS, esta transição é o encapsulamento do Processo em Objeto[14].

Participaram deste estudo 54 futuros professores do Ensino Fundamental, matriculados em um curso obrigatório de certificação, nomeado “Fundamentos de Matemática para Professores”, contendo entre os tópicos de estudo temas como números primos e compostos, decomposição em fatores primos e regras de divisibilidade. Após o término do curso, foi realizado um questionário contendo três questões e entrevistas com alunos voluntários do grupo participante. As três questões presentes neste estudo também comporão o questionário que será utilizado na atual pesquisa e, posteriormente, serão apresentadas e analisadas.

Como análise geral, Zazkis e Campbell (1996) afirmam que os participantes construíram conhecimento sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, citando-o, ilustrando tal conhecimento ao decompor um número “grande”, como o número 360, de diferentes maneiras e caminhos, encontrando sempre os mesmos fatores. Contudo, mostraram limitação quando o conhecimento do Teorema estava aplicado em problemas.

Em uma das questões, em que fora questionado sobre a divisibilidade de um número apresentado em sua forma canônica por uma lista de números inteiros, metade dos futuros professores calculou o produto para encontrar seu valor e, em seguida dividiram pelos números da lista para verificar a divisibilidade. Dentre os outros participantes, metade deles mostraram dificuldades em decidir sobre a divisibilidade por números da lista que não estavam explicitamente presentes na forma canônica e, para estes números, fizeram o mesmo que o primeiro grupo, resolvendo o produto. Para Zazkis e Campbell (1996), tais soluções sugerem que, para estes

[14] Os elementos constituintes da teoria APOS serão explicados no Capítulo 3.

alunos, haveria a existência de uma outra decomposição, ou seja, ainda que enunciassem corretamente o Teorema Fundamental da Aritmética, parecia não acreditarem, na prática, a garantia de sua unicidade. Outra justificativa para estes eventos seria que a questão da indivisibilidade não fora trabalhada na mesma medida que a divisibilidade, sendo que uma não foi conceitualizada como a outra.

Numa questão em que foi interrogado se um número inteiro apresentado como produto de dois fatores primos, na qual a informação de que os fatores são primos é dita explicitamente, é divisível por uma lista de números inteiros, um quarto dos alunos apresentou as mesmas conclusões que na questão anterior. Para alguns números, utilizavam critérios de divisibilidade e, para outros, desconfiavam que a única maneira para decidir sobre a divisibilidade era efetuando a divisão.

Mesmo entre aqueles que responderam corretamente à questão, as justificativas foram diversas e, em algumas delas, mostravam compreensão incorreta sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Alguns disseram que o produto de dois números primos resulta em outro número primo. Outros afirmavam que o número inicial não poderia ser divisível pelos números da lista, pois os fatores de sua decomposição não poderiam ser mais decompostos. Isto se explicaria, segundo os pesquisadores, pelos alunos compreenderem a decomposição em fatores primos apenas como um processo de fatoração e não conceitualmente como a representação de um número expresso como produto de números primos.

Outros problemas mostram lacunas sobre a natureza da decomposição em fatores primos. Muitos acreditam que todos os números, de pequeno ou grande valor, devem possuir em sua decomposição em fatores primos, números “pequenos”, como 2, 3, 5, 7 e 11, caso contrário, este número seria, obrigatoriamente um número primo.

Para Zazkis e Campbell (1996), a diferença entre fatores e fatores primos deve ter maior atenção na prática pedagógica. O número 96 pode ser escrito, por exemplo, como 16.6 ou 8.12 e, visivelmente, não possui decomposição única. É importante, portanto, que se tenha claro que a unicidade da decomposição só existe quando for realizada de forma completa, isto é, escrevendo todos os números primos presentes na decomposição.

O conceito de decomposição em fatores primos é um Esquema (concepção-Esquema, segundo a teoria APOS) unificador para números primos e compostos, ou seja, depende desses conceitos e de suas inter-relações. Se os conceitos de números primos e compostos não foram construídos adequadamente, isso provavelmente

inibirá qualquer conceitualização significativa da decomposição em fatores primos. (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996, p. 217)

Portanto, baseados em seus resultados, inferem que o Teorema Fundamental da Aritmética não fora compreendido adequadamente por muitos futuros professores do Ensino Fundamental. Concluem, da mesma forma, que o correto entendimento sobre o Teorema Fundamental da Aritmética é primordial para a compreensão da própria estrutura dos números inteiros.

O próximo artigo traz uma pesquisa que trata sobre a transparência ou opacidade das representações dos Números Naturais. Entendemos que esta questão deve ser levada em conta com bastante atenção, uma vez que o Teorema Fundamental da Aritmética é um tipo de representação de um número inteiro e a maneira como ele se apresenta pode trazer ou não um bom entendimento de seu conceito.

Diferentemente das discussões sobre as diversas representações presentes na Matemática como figuras, modelos manipulativos, linguagem falada, símbolos escritos, gráficos, diagramas, entre outros, Zazkis e Gadowsky (2001) têm seu foco no sistema de símbolos numéricos e nas diferentes representações que podem formar tal sistema. Neste artigo, especificamente, tratam dos números inteiros e das diversas maneiras que podem ser representados.

Segundo os autores, os sistemas de representação podem ser transparentes ou opacos: “Uma representação transparente não tem mais nem menos significados do que as ideias ou estruturas representadas. Uma representação opaca enfatiza alguns aspectos das ideias ou estruturas e não enfatiza outros”[15] (ZAZKIS; GADOWSKY, 2001, p. 45). Ou seja, quando se tem uma representação transparente, todas as propriedades, ideias e estruturas presentes num sistema estão claras e evidentes apenas observando o modo como se apresentam; já numa representação opaca, ficam evidentes apenas alguns destes aspectos em detrimento de outros. Em relação aos números naturais, as autoras afirmam que todas as representações, inclusive a representação canônica que é a que nos interessa, são opacas, entretanto, algumas características podem ser transparentes.

[15] A transparent representation has no more and no less meaning than the represented idea(s) or structure(s). An opaque representation emphasizes some aspects of the ideas or structures and de-emphasizes others.

Para exemplificar este fato, as autoras trazem diferentes representações para o número 46656, sendo elas: (a) 216^2, (b) 36^3, (c) 3x15552, (d) 5x7x31x43+1, (e) 12x3000+12x888 e analisam que

> na representação (a) de 46656, é transparente que o número seja um quadrado perfeito; a representação (b) mostra que o número é um cubo perfeito; de (c) concluímos que o número é um múltiplo de 3 e 15552. Naturalmente, é possível deduzir que o número seja um múltiplo de 3 de (a) e (b) também, mas (a) e (b) não nos dão uma pista sobre 15552. A partir de (d), concluímos que o número deixa um restante de 1 na divisão por 5, 7, 31 e 43, uma conclusão que não é aparente nas representações (a), (b) e (c). A partir da representação (e), vemos que o número é um múltiplo de 12 e, reconhecendo a distributividade, é um múltiplo de 3888.[16] (ZAZKIS; GADOWSKY, 2001, p. 45, tradução nossa)

Baseando-se nestas definições, buscaram identificar características dos números naturais transparentes ou opacas para alunos do Ensino Médio e para futuros professores do Ensino Fundamental.

As respostas dadas por estes sujeitos, em uma questão que perguntava sobre a divisibilidade de um número dado em sua forma canônica e por um outro que não estava na representação, indicaram que para chegar a uma conclusão positiva para o primeiro caso e negativa para o segundo, alguns precisavam calcular o produto representado no número dado inicialmente, dividir pelo número pedido e só então decidir sobre a divisibilidade.

Outros apresentaram dificuldades em enxergar divisibilidades em um número representado por múltiplos fatores. Conseguiam entender, por exemplo, que o número 645 x 7 é divisível por 7 mas não chegariam à mesma conclusão se o número fosse 2^3x34 x 5^2x7^3. Ou seja, para alguns entrevistados, o número 7 do exemplo acima só é reconhecido quando está no formato “um de dois”; quando está no formato “um de muitos”, os alunos simplesmente não o reconheciam.

Em outra questão em que se perguntava se os números 71^2 e 71^6 são quadrados perfeitos, quase que a totalidade dos alunos respondeu afirmativamente para o primeiro número, mas pareceu não ser tão evidente para o segundo caso.

[16] From representation (a) of 46656, it is transparent that the number is a perfect square; representation (b) shows that the number is a perfect cube; from (c) we conclude that the number is a multiple of 3 and 15552. Of course, it is possible to derive that the number is a multiple of 3 from (a) and (b) as well, but (a) and (b) do not give us a clue regarding 15552. From (d), we conclude that the number leaves a remainder of 1 in division by 5, 7, 31, and 43, a conclusion that is not aparent in representations (a), (b), and (c). From representation (e), we see that the number is a multiple of 12 and, acknowledging distributivity, that is it a multiple of 3888.

Alguns alunos precisaram calcular o valor de 71^6 e extrair a raiz quadrada para chegar à conclusão positiva.

Segundo os autores, ainda que esta seja uma estratégia válida para se chegar ao resultado correto, pode não ser a melhor delas, quando o número representado não pode ser calculado, nem por uma calculadora, como por exemplo 7^{160}. Neste caso, a resposta afirmativa ou negativa não está em questão; o que de fato interessa é como a representação facilitaria ou não a solução, sem a necessidade de cálculo. Bastaria perceber que na decomposição em fatores primos de um quadrado perfeito todo número primo aparece um número par de vezes, o que seria uma solução elegante para a questão, sem a utilização de cálculos.

Ao serem questionados sobre o número 36^3 ser um quadrado perfeito, alguns alunos responderam que não era, pois é um cubo perfeito. Para Zazkis e Gadowsky (2001), isto demonstra que na mente dos alunos ambas as propriedades não podem existir mutuamente, não lhes ocorrendo buscar uma representação alternativa para o número proposto. A notação a^2, independentemente de o número inteiro a ser primo ou não, tornou-se um substituto para o conceito de quadrado perfeito e, quando não era dada, não era reconhecida.

Com base nestes e em outros resultados, as pesquisadoras suspeitam que o não reconhecimento de propriedades numéricas transparentes em representações específicas provavelmente está ligado ao indício de os alunos não interpretarem uma representação diferente como um número, de fato. Quando observam um número representado como uma soma, um produto, uma potência, ou uma combinação de operações, por exemplo, os alunos tendem a não reconhecer tais representações como um número. Isto pode ser consequência de práticas escolares anteriores, em que os cálculos são mais enfatizados que as estruturas numéricas. Assim,

> o desejo dos alunos de calcular o produto da forma canônica pode ser visto como uma indicação de sua noção do que é um número e como um meio para verificações empíricas. […] Para discutir a divisibilidade […], é mais convincente para muitos alunos descobrir a representação canônica de um número e realmente executar a divisão com a calculadora, do que prestar atenção aos seus fatores.[17] (ZAZKIS; GADOWSKY, 2001, p. 49-50, tradução nossa)

[17] the students' desire to calculate the canonical decimal representation can be seen both as an indication of their notion of what a number is and as a means toward empirical verifications. [...] In order to discuss the divisibility [...], it is more convincing for many students to find out a number's canonical representation and actually perform the division with the calculator, rather than to pay attention to its factors.

Diante disso, as autoras afirmam que é importante que os alunos tenham contato e apreciem outras representações que não sejam necessariamente a decimal, para não limitar o conceito de número a esta única representação.

Enfim, sugerem a discussão das propriedades dos números em atividades que não consideram apenas a representação decimal, pois acreditam que tais atividades sejam estimulantes para um aumento da habilidade dos alunos ao lidar com a estrutura multiplicativa dos números inteiros.

Desta maneira, as discussões e resultados apontados pelo levantamento de trabalhos já realizados reforçam a necessidade deste estudos com esta temática, que tem sido negligenciada, seja no âmbito do ensino e da aprendizagem, seja na formação inicial e continuada dos professores.

Concluída a presente revisão de literatura, traremos no próximo capítulo a fundamentação teórica desta pesquisa, bem como a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, com definições e consequências geradas por ele.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1. A TEORIA APOS

A teoria APOS, cujo acrônimo significa Ação, Processo, Objeto e Esquema[18], é uma teoria de como um conceito matemático pode ser aprendido. Assim, tem seu foco nos modelos do que ocorre na mente de um indivíduo ao aprender matemática e por meio do desenvolvimento destes modelos projetar materiais instrucionais e avaliações que possam verificar sucessos ou fracassos dos alunos ao lidar com problemas matemáticos.

Não utilizaremos este estudo com o objetivo de projetar materiais instrucionais, mas entendemos que ela é suficiente para revelar a concepção, conforme definida na teoria, dos professores participantes em relação ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Assim, esta teoria nos ajudará a entender como os conceitos evolvidos Teorema Fundamental da Aritmética foram aprendidos pelos professores voluntários deste estudo, bem como perceber qual a concepção que possuem em relação a este tema. Acreditamos que a maneira como o docente entende determinado conceito matemático pode influenciar a forma e relevância de ensino e a prioridade dada a ele como ferramenta de análise e resolução de problemas.

A teoria APOS foi criada por Ed Dubinsky, posteriormente seguiu sendo desenvolvida pelo grupo RUMEC[19] (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*) e por outros investigadores (ARNON *et al*., 2014) e tem suas ideias baseadas nos trabalhos de Jean Piaget. Ainda que Piaget tenha feito um trabalho profundo e extenso sobre a aquisição do conhecimento pelo indivíduo, por meio de sua Epistemologia Genética, não é possível encontrar muitos escritos sobre a prática pedagógica. Piaget desconfiava da eficácia da pedagogia praticada nas escolas tradicionais e da forma como ela parecia inibir o desenvolvimento espontâneo dos indivíduos, assim como não respeitava o tempo de assimilação dos conceitos.

---

[18] Tradução do inglês APOS: *Action*, *Process*, *Object*, *Schema*

[19] RUMEC iniciou-se após um grupo participante de um workshop, financiado pela *Mathematical Association of America* (MMA), em junho de 1995, decidir começar o RUME (*Research in Graduate Mathematics Education*). Após gerarem uma grande quantidade de dados sobre os alunos aprendendo cálculo, álgebra abstrata e matemática discreta, os participantes deste *workshop* voltaram a se reunir em uma quantidade tão alta que decidiram organizar o RUMEC para analisar estes dados. O grupo tem seus projetos com foco na teoria APOS e em com perspectivas intimamente ligada à teoria. Mais informações disponíveis em: https://www.maa.org/rume-a-way-to-get-started. Acesso em 01/05/2021.

Mesmo assim, nos poucos artigos que escreveu sobre educação, fez uma contribuição substancial para o pensamento pedagógico atual, levando à elaboração de teorias e metodologias de ensino no âmbito do construtivismo.

O papel da pedagogia para Piaget, então, segundo Dubinsky (1996), seria de ajudar o estudante a desenvolver estes mecanismos[20] para que sejam utilizados de forma conscientes quando for necessário. Os professores podem criar situações que estimulem a criatividade e o descobrimento do indivíduo, apresentando situações desequilibrantes, para que sejam desenvolvidas novas ideias de como reequilibrar os conceitos acerca do objeto estudado.

Para o autor, o desenvolvimento intelectual presente de forma constante nos trabalhos de Piaget, já que ele não trata apenas de aquisição de partes do conhecimento, mas também dos mecanismos que podem levar o indivíduo a aumentar suas habilidades para resolver situações mais complexas. Estes mecanismos são desenvolvidos, segundo Piaget, de maneira espontânea por meio da maturação, em presença de situações apropriadas.

Para Dubinsky (1996),

> o conhecimento matemático de um indivíduo é sua tendência de responder diante de situações matemáticas problemáticas, refletindo sobre elas em um contexto social e construindo ou reconstruindo ações, processos e objetos matemáticos e organizando-os em esquemas com a finalidade de administrar as situações.[21] (DUBINSKY, 1996, p. 32-33, tradução nossa)

Fica claro, portanto, que as situações matemáticas devem promover o surgimento da dicotomia desequilibração-reequilibração[22] para o estudante perceber que o conhecimento possuído por ele até aquele momento não é suficiente para resolver tal situação.

---

[20] Além da abstração reflexiva, os mecanismos descritos por Piaget (1975) são a assimilação (mecanismo que possibilita a integração de novos elementos à estrutura já existente ou construída), a equilibração (mecanismo caracterizado pela modificação de um esquema ou estrutura de assimilação pelos elementos assimilados) e a equilibração (mecanismo que possibilita a retomada do equilíbrio cognitivo após reequilibrações decorrentes de desequilíbrios).

[21] El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con la finalidad de administrar las situaciones.

[22] Os desequilíbrios ocorrem “quando há uma insatisfação de necessidades por parte do indivíduo, gerando nele uma sensação de falta ou quando o indivíduo é impedido de assimilar o objeto com o qual interage, necessitando reorganizar as suas estruturas cognitivas para acomodá-lo”. (FERREIRA; LAUTERT, 2003, p. 548)

Assim, dentre estes mecanismos capazes de levar a esta dicotomia, a chamada abstração reflexiva foi aquela em que Ed Dubinsky se baseou para criar a teoria APOS. A abstração reflexiva, segundo Piaget, é o principal mecanismo para as construções mentais no desenvolvimento do pensamento, assim como o mecanismo mental por meio do qual todas as estruturas lógico-matemáticas são desenvolvidas na mente de um indivíduo.

Em seus trabalhos, Piaget divide a abstração reflexiva em dois momentos. O primeiro envolve a reflexão, no sentido da consciência e do pensamento contemplativo. Nela, reflete-se em relação a conteúdos, suas operações e propriedades de um nível cognitivo mais baixo até alcançar um nível cognitivo mais elevado. O segundo momento envolve a reconstrução e a reorganização destes conteúdos neste nível cognitivo mais elevado para que suas operações e propriedades possam se tornar conteúdo em que novas operações e propriedades possam ser aplicadas.

Neste sentido, para que o desenvolvimento do conhecimento de um objeto ocorra, seja físico ou mental, é necessário que se tenha o objeto, mas deve ser considerada da mesma forma a ação do indivíduo sobre este objeto, refletindo sobre a variedade de características, propriedades e operações que o envolvem. Não há como se pensar no conhecimento de um objeto desconsiderando a maneira como o indivíduo age sobre ele, isto é, não deve haver dissociação entre indivíduo e objeto.

Tal quadro envolvendo conteúdos e suas operações trazem diferenciações sutis entre ações materiais e operações interiorizadas e de que forma mecanismos mentais como a interiorização e a encapsulação podem levar a diferentes concepções na progressão APOS. Estas diferenciações serão discutidas nos tópicos adiante, entretanto, trazemos um exemplo da abstração reflexiva feito por Beth e Piaget (1974):

> [...] segue-se que quando a criança descobre por experiência o resultado de uma ação, por exemplo, que o resultado de uma adição é independente da ordem seguida (que é uma propriedade das ações de combinar e ordenar e não uma propriedade dos objetos como tais, que não incluem soma nem ordem independentemente das ações realizadas nelas), a abstração reflexiva consiste em traduzir uma sucessão de ações materiais em um sistema de operações interiorizadas, cujas leis são simultaneamente implicadas em uma ação. [23] (BETH; PIAGET,1974, tradução e grifos nossos)

Nesta declaração, é possível observar que na abstração reflexiva, as propriedades dos objetos não residem nos próprios objetos, mas dependem das ações executadas por um indivíduo sobre este objeto. Nas palavras de Arnon *et al*. (2014), interpretando a citação acima, "[...] as propriedades dos objetos não residem nos objetos, mas sim nas ações que são executadas nesses objetos. Assim, as propriedades dos objetos dependem tanto dos objetos quanto dos sujeitos que conhecem os objetos."[24] (ARNON *et al*., 2014, p. 8, tradução nossa). Para Dubinsky, estas "ações materiais" são ações realizadas pelo sujeito, mas são externas a ele. No exemplo da citação, os objetos são os números, a ação aplicada a estes objetos é a adição e a propriedade da operação é a comutatividade. Assim, na teoria APOS, estas "operações interiorizadas" de Piaget são interpretadas como Processos realizados pelo mecanismo mental que foi denominado por "interiorização". Na interiorização, uma Ação, externa e física, isto é, uma ação material, é reconstruída na mente de um indivíduo se tornando em Processo, que são as operações interiorizadas, atuando da mesma forma que a Ação, porém ocorre totalmente na mente do sujeito, sem que haja interferências externas. O que, na citação, Piaget chama de "sistema", Dubinsky interpreta como um Esquema, que no exemplo é o conceito da comutatividade e, ao afirmar que são "simultaneamente implicadas em uma ação", traz a ideia de "coerência" da teoria APOS, a qual permite um indivíduo decidir se um Esquema específico pode ser ou não aplicado em um problema matemático específico.

A abstração reflexiva de Piaget, foi igualmente influenciadora no desenvolvimento da teoria APOS em como um Processo, interiorizado por uma Ação,

---

[23] . . . it follows that when the child discovers by experience the result of an action, for example, that the result of an addition is independent of the order followed (which is a property of the actions of combining and ordering and not a property of the objects as such, which include neither sum nor order independently of the actions carried out on them), reflective abstraction consists of translating a succession of material actions into a system of interiorized operations, the laws of which are simultaneously implied in an act.

[24] [...] properties of objects do not reside in the objects but rather in the actions that are performed on these objects. Thus, properties of objects depend on both the objects and on subjects who know the objects.

é transformado em um Objeto, operação na qual novas operações podem ser aplicadas em níveis mais elevados, por um mecanismo mental denominado Encapsulamento. Aplicando a abstração reflexiva ao conceito de proporções, Piaget escreve que “uma proporção é uma igualdade de relações, em outras palavras, um caso específico de equivalência entre relações” (PIAGET *et al*.1977, p. 186)”. Cada uma destas duas relações é uma ação aplicada a pares de dois números inteiros positivos, transformando-se em frações, que são objetos aos quais podem ser atribuídos valores numéricos. Na interpretação de Dubinsky, as relações entre os pares de números positivos numa proporção são Processos, que são encapsulados em Objetos que poderão ser aplicados em uma outra relação ou comparação.

Os exemplos e conceitos supracitados mostram o quanto a ideia de abstração reflexiva de Piaget está enraizada no desenvolvimento da teoria APOS, a qual tem seu desenvolvimento progressivo da Ação para o Processo, do Processo ao Objeto e do Objeto ao Esquema. Vale ressaltar que, apesar de ter sido apresentada de modo linear e progressivo, a teoria APOS não se desenvolve obrigatoriamente nesta ordem, de um estágio a outro. O indivíduo pode ir e voltar ao estágio que julgar necessário para solucionar o que determinada situação exige. Além disso, Trigueiros comenta que

> uma pessoa pode passar muito tempo em estágios intermediários e, também, estar em fase de construção para certos aspectos de um conceito e em outra para outros. O que se pode afirmar é que o manejo que uma pessoa faz de um conceito diante de distintas situações-problema é diferente quando um indivíduo responde com um nível caracterizado por Processo na teoria do que quando o faz em nível Ação, e quando o faz em nível Objeto, do que quando é feito no nível Processo.[25] (TRIGUEIROS, 2005, p. 3, tradução nossa)

Assim, na teoria APOS são descritos cinco tipos de abstração reflexiva ou mecanismos mentais, sendo eles a interiorização, a coordenação, a reversão, a encapsulação e a generalização. Estes mecanismos mentais geram a construção das estruturas mentais Ação, Processo, Objeto e Esquema.

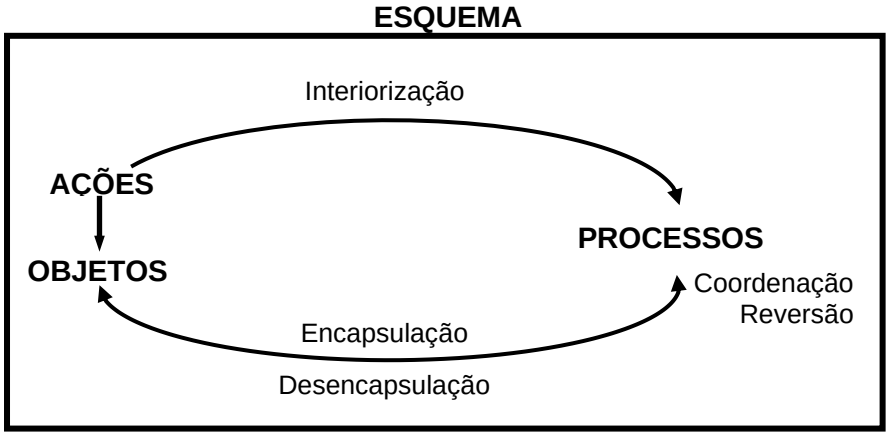
Salientamos, então, que as construções de estruturas mentais, também são denominadas **concepções**, segundo a teoria APOS. Assim, ao nos referirmos às

[25] Una persona puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. Lo que sí puede afirmarse es que el manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde con un nivel caracterizado por proceso en la teoría que cuando lo hace a nivel acción, y cuando lo hace a nivel objeto que cuando lo hace a nivel proceso.

estruturas mentais aqui descritas, utilizaremos, de igual modo, as nomenclaturas concepção Ação, concepção Processo, concepção Objeto e concepção Esquema. Desta maneira, enfatizamos, mais uma vez, que a utilização do termo “concepção”, nesta teoria, não se apresenta com o mesmo significado daquele costumeiramente é definido em diversos trabalhos na Educação Matemática, sendo o termo escolhido apenas para descrever estruturas mentais geradas pela abstração reflexiva que um indivíduo realiza na manipulação de Objetos.

A figura a seguir representa como a progressão APOS pode ocorrer:

Figura 4 – Teoria APOS



Fonte: Arnon *et al*. (2014, p. 10)

A Figura 4 representa a construção das estruturas mentais por meio dos mecanismos mentais. Para que isto ocorra, as Ações são operadas em Objetos; as Ações se interiorizam em Processos que se encapsulam em Objetos; os Objetos podem ser desencapsulados e voltar ao Processo que o gerou, podendo ser coordenado com um outro Processo; todo este sistema integra um Esquema. Nas palavras de Asiala *et al*. (1996), a progressão APOS para o entendimento de um conceito matemático

> […] começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos previamente construídos para formar ações; as ações são então interiorizadas para formar processos que são então encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados de volta aos processos a partir dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas”. [26] (ASIALA *et al*., 1996, p. 9, tradução nossa)

[26][…] begins with manipulating previously constructed mental or physical objects to form actions; actions are then interiorized to form processes which are then encapsulated to form objects. Objects can be de-encapsulated back to the processes from which they were formed. Finally, actions, processes and objects can be organized in schemas.

Ainda que não estejam presentes na Figura 4, os mecanismos mentais assimilação e acomodação, definidos nos trabalhos de Piaget, e o mecanismo da generalização são componentes importantes na progressão APOS. Arnon *et al*. (2014) definem estes mecanismos mentais da seguinte maneira:

> A assimilação do conhecimento refere-se a um mecanismo pelo qual um sujeito pode aplicar uma estrutura cognitiva, essencialmente sem mudança, para incluir um objeto cognitivo com o qual o sujeito não tenha lidado anteriormente. Acomodação refere-se a um mecanismo pelo qual uma estrutura mental é reconstruída e modificada para lidar com uma nova situação. Ambos os mecanismos estão relacionados com a ideia de generalização da APOS. [27] (ARNON *et al*., 2014, p. 19, tradução nossa)

Nos próximos itens, descreveremos mais detalhadamente as estruturas e os mecanismos mentais, trazendo alguns exemplos que reforçarão a compreensão de cada elemento.

Antes, porém, faz-se necessária uma consideração importante. Como já foi dito, a teoria APOS é um modelo para descrever como conceitos matemáticos podem ser aprendidos, podendo ser usado para explicar como conceitos matemáticos são entendidos na mente de um indivíduo.

Desta forma, é preciso considerar a distinção entre conceito e concepção, de acordo com as bases da teoria APOS. Segundo Arnon *et al*. (2014), investigadores que atualmente tem se dedicado a pesquisas relacionadas à teoria APOS, “para uma parte particular do conteúdo matemático, uma concepção se desenvolve como resultado da atividade reflexiva. O termo conceito refere-se à compreensão coletiva desse conteúdo pela comunidade de matemáticos.”[28] (ARNON *et al*., 2014, p. 18, tradução nossa). Estas, portanto, serão as definições de conceito e concepção que serão tomadas neste trabalho.

---

[27] Assimilation of knowledge refers to a mechanism by which a subject can aply a cognitive structure, essentially without change, to include a cognitive object the subject has not previously dealt with. Accommodation refers to a mechanism by which a mental structure is reconstructed and modified in order to deal with a new situation. Both mechanisms are related to the APOS idea of generalization.

[28] For a particular piece of mathematical content, a conception develops as a result of reflective activity. The term concept refers to the collective understanding of that content by the community of mathematicians.

3.2. AS ESTRUTURAS E OS MECANISMOS MENTAIS

AÇÃO

A primeira estrutura mental que se pode obter em relação a um conceito se faz por meio de uma Ação, que é uma transformação externa dirigida a um Objeto ou a Objetos previamente concebidos. Nas palavras de Dubinsky (1996), a Ação é “a transformação de objetos que o indivíduo percebe como algo que é, até certo ponto, externo” (DUBINSKY, 1996, p. 34).

Dizer que a Ação é externa significa que um indivíduo, que tem seu entendimento no nível da ação, só consegue executar uma transformação em um objeto que lhe é apresentado se, externamente, forem apresentados precisamente todos os passos para realizar tal transformação. Cada passo da transformação precisa ser realizado de forma explícita, tendo como guia instruções externas e nenhuma das etapas pode ser pulada ou ignorada.

Como exemplo de Ação, o autor afirma que se um estudante não consegue interpretar uma situação de função, a não ser que seja apresentada uma única fórmula para o cálculo dos valores, este aluno está restrito à concepção Ação de uma função. Ele conseguiria apenas de calcular valores de pontos e fazer algumas manipulações da fórmula.

Mesmo que a Ação seja a estrutura mental mais primitiva e limitada, ela é fundamental na teoria APOS, pois marca o início do entendimento de um conceito, sendo as atividades iniciais aquelas que ajudariam o estudante a construir ações. Sem ela, o desenvolvimento das outras estruturas fica comprometido, já que, o desenvolvimento de novas Ações conduz a estruturas de níveis mais elevados. Porém, o seu uso exaustivo, se não exclusivo, como normalmente é visto tradicionalmente das escolas, não gera a construção de conhecimento, pois acabam sendo procedimentos repetitivos e mecânicos sem reflexão alguma.

PROCESSOS E INTERIORIZAÇÃO

Sobre a estrutura mental Processo, Dubinsky (1996) afirma que,

> quando uma ação se repete e o indivíduo reflete sobre ela, pode se interiorizar em um processo. Ou seja, se realiza uma construção interna que executa a mesma ação, mas agora não necessariamente dirigida por um estímulo externo. Um indivíduo que tem uma concepção Processo de uma transformação, pode refletir sobre ela, descrever, ou inclusive inverter os

> passos da transformação sem realmente realizar estes passos.[29] (DUBINSKY, 1996, p.34, tradução nossa)

Desta forma, a partir do momento em que se repetem as Ações executadas e reflete-se sobre elas, o indivíduo começa a não ter mais a necessidade de ter pistas ou intervenções externas e passa a controle interno sobre estas Ações. Ele passa a ter a capacidade de imaginar cada passo para a execução desta Ação, sem necessitar explicitar tais passos, sendo capaz, inclusive, de invertê-los. Neste momento, diz-se que uma Ação foi interiorizada em um Processo por meio do mecanismo mental denominado Interiorização. O indivíduo que já interiorizou a Ação em um Processo, o tem como algo interno controlado por ele mesmo e que não necessita de indicações externas para realizar transformações no Objeto.

Existe íntima relação entre Ação e Processo. Sobre esta relação, Dubinsky (1991) escreve:

> Uma ação deve ser interiorizada. Como dissemos, isso significa que alguma construção interna é feita em relação à ação. Uma ação interiorizada é um processo. A interiorização permite estar consciente de uma ação, refletir sobre ela e combiná-la com outras ações.[30] (DUBINSKY, 1991, p. 107, tradução nossa)

Assim, uma Ação e um Processo, em relação a um conceito, referem-se à mesma transformação. A diferença está na forma como são concebidas: numa Ação necessita-se seguir explicitamente todos os passos da transformação e que orientações externas sejam dadas; já num Processo, as etapas podem ser realizadas apenas mentalmente.

Exemplificando a concepção Processo, Dubinsky (1996) explica que um indivíduo entendedor das funções na concepção Processo consegue pensar uma função como algo possível de receber mais que uma única entrada ou valores das variáveis independentes, de realizar uma ou mais operações sobre estas entradas e, ao observar os resultados, consegue compreender tais valores como saídas ou variáveis dependentes. Com a concepção Processo para as funções, o indivíduo seria

---

[29] Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación, puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar en realidad dichos passos.

[30] An action must be interiorized. As we have said, this means that some internal construction is made relating to the action. An interiorized action is a process. Interiorization permits one to be conscious of an action, to reflect on it and to combine it with other actions.

capaz de coordenar dois ou mais processos para obter uma composição ou inverter o processo e, portanto, estabelecer funções inversas.

OBJETOS E ENCAPSULAÇÃO

Em relação à estrutura mental Objeto, Dubinsky (1996) define:

> Quando um indivíduo reflete sobre as operações aplicadas a um processo em particular, toma consciência do processo como um todo, realiza aquelas transformações (sejam ações ou processos) que podem atuar sobre ele, e pode de fato construir estas transformações, então está pensando neste processo como um objeto. Neste caso, dizemos que o processo foi encapsulado num objeto.[31] (DUBINSKY, 1996, p. 35, tradução nossa)

É importante salientar que, ao realizar Ações ou Processos sobre um Objeto já encapsulado, é necessário desencapsular e voltar o Objeto ao Processo que foi realizado para o obter, com o objetivo de usar suas propriedades ao manipulá-lo.

Exemplificando a encapsulação de Processos em Objetos e a desencapsulação de objetos em processos ou ações, o autor cita a necessidade de manipulação das propriedades das funções ao se realizar a soma, o produto ou ao se formar conjuntos de funções.

Ainda que a definição de Objeto seja, de certa forma, simples de se enunciar, diversos outros estudos baseados na teoria APOS confirmam que o mecanismo de encapsulação é o mais difícil de ser alcançado e pouquíssimas estratégias pedagógicas têm sido suficientes para auxiliar os estudantes neste movimento.

DESENCAPSULAÇÃO, COORDENAÇÃO E REVERSÃO DE PROCESSOS

Quando um Processo já está encapsulado como um Objeto mental, os mecanismos desencapsulação, coordenação e reversão podem ser aplicados, caso haja esta necessidade na resolução de problemas.

No mecanismo de desencapsulação, assim como o nome sugere, o Objeto mental retorna ao Processo anterior, isto é, um indivíduo pode voltar ao Processo que originou o Objeto em questão.

---

[31] Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como um todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y pueden para construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso há sido encapsulado en un objeto.

Já no mecanismo de coordenação de Processos, dois Objetos se desencapsulam, voltando aos seus processos originais, então se coordenam e dão origem a um novo Objeto.

Para exemplificar a coordenação de Processos, Arnon *et al*. (2014) utilizam a composição de funções:

> Para compor duas funções F e G para obter FoG; os dois Objetos de função devem ser desencapsulados aos Processos que os originaram. Estes Processos são, então, coordenados, aplicando o Processo de F aos elementos obtidos aplicando o Processo de G. O Processo resultante é, então, encapsulado em um novo Objeto.[32] (ARNON *et al*., 2014, p. 23, tradução nossa)

No exemplo acima, fica claro como ocorre a coordenação de Processos, quando o Processo próprio de uma função é aplicada ao Processo da outra função, tendo uma terceira função como resultado.

Para explicar o mecanismo da reversão, vamos trazer a representação da operação adição como exemplo. Quando uma criança está num processo de desenvolvimento de suas capacidades aritméticas, frequentemente são apresentadas a ela situações para descobrir o número desconhecido, como $a + \square = b$ ou em $\square + a = b$. Estes cálculos mostram a necessidade de a criança utilizar o mecanismo da reversão do Processo para encontrar o número solicitado. Assim, estas equações representam, em geral, mais dificuldades que equações do tipo $a + b = \square$ por terem seu resultado facilmente encontrado de forma direta.

ESQUEMAS E TEMATIZAÇÃO

Um Esquema se caracteriza pelo dinamismo e pela contínua reconstrução determinadas pelas atividades matemáticas do sujeito numa situação matemática específica. Cada indivíduo tem a sua própria capacidade de fazer com que um Esquema seja coerente ao perceber se ele pode ou não ser utilizado numa situação matemática específica. Sobre o Esquema, Arnon *et al*. (2014) escrevem que,

> uma vez que um Esquema é construído como uma coleção coerente de estruturas (Ações, Processos, Objetos e outros Esquemas) e conexões estabelecidas entre essas estruturas, ele pode ser transformado em uma estrutura estática (Objeto) e/ou usado como uma estrutura dinâmica que

[32] To compose two functions F and G to obtain F o G; the two function Objects must be de-encapsulated to the Processes that gave rise to them. These Processes are then coordinated, by aplying the Process of F to the elements obtained by aplying the Process of G. The resulting Process is then encapsulated into a new Object.

> assimila outros Objetos ou Esquemas relacionados. [33] (ARNON *et al*., 2014, p. 25, tradução nossa)

Desta forma, o Esquema reúne todas as estruturas que podem ser relacionadas a um conceito, como suas propriedades, operações e todas as estruturas e mecanismos mentais que são utilizados em determinada situação matemática.

O mecanismo mental que possibilita a construção de um Esquema como um Objeto mental é a tematização, que habilita um indivíduo a aplicar transformações na estrutura Esquema.

3.3. A DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA

A decomposição genética tem um papel fundamental nas pesquisas baseadas na teoria APOS. Ela apresenta um modelo teórico-hipotético contendo as estruturas e mecanismos mentais que possivelmente podem ser construídas para que se aprenda um conteúdo matemático específico. Segundo Arnon *et al*. (2014), este modelo teórico "[…] é necessário para fornecer aos pesquisadores hipóteses que possam servir de base para o desenho de instrumentos teóricos-base para obter e analisar as informações dos alunos."[34] (ARNON *et al*., 2014, p. 37)

Para se construir uma decomposição genética de determinado conteúdo, é necessário que se faça inicialmente uma decomposição genética preliminar que pode surgir de algumas maneiras. Podem ser considerados os resultados de pesquisas em Educação Matemática que versam sobre as dificuldades dos estudantes na aprendizagem do conteúdo em questão, assim como sua descrição matemática juntamente com a experiência dos pesquisadores tanto como docentes quanto como estudantes. O desenvolvimento histórico do conceito, da mesma forma, pode ser levado em conta, pois pode apontar quais construções mentais um indivíduo pode realizar analisando como este conceito foi concebido durante seu desenvolvimento na história. Além disso, podem ser utilizados livros-textos para uma construção preliminar de uma decomposição genética, uma vez que a abordagem, geralmente mais didática, usada no texto pode apresentar aspectos de como um indivíduo pode entender determinado conceito. E como uma última maneira de se construir uma decomposição

---

[33] Once a Schema is constructed as a coherent collection of structures (Actions, Processes, Objects, and other Schemas) and connections established among those structures, it can be transformed into a static structure (Object) and/or used as a dynamic structure that assimilates other related Objects or Schemas.

[34] [...] is necessary to provide researchers with hypotheses that can serve as the basis for the design of theory-based instruments to obtain and analyzedata from students.

genética, pode ser utilizada a comparação dos dados do desempenho em tarefas sobre determinado conteúdo matemático. A partir das diferenças evidenciadas nas análises de entrevistas realizadas com indivíduos participantes, pode-se determinar quais construções mentais foram ou não construídas.

Vale ressaltar que cada um destes métodos descritos anteriormente de como obter uma decomposição genética preliminar de um conteúdo pode ser utilizada de forma isolada ou conjunta.

Uma vez construída uma decomposição genética preliminar, é preciso testar a validade do modelo experimentalmente. Se, após aplicação forem observadas as construções mentais detalhadas na descrição da decomposição genética em questão, pode-se dizer que este modelo é suportável. Caso sejam apresentados modos diferentes para a construção do conceito descrito, a decomposição genética pode ser refinada e, se as diferenças forem muito discrepantes, pode-se abandonar a decomposição genética atual para a reformulação de uma nova. Para este estudo, a decomposição genética e as questões propostas e seus objetivos passaram pelo crivo do GPEA, quando discutiram e concordaram com nossos apontamentos, descrições e análises.

Como foi descrita acima, a decomposição genética é um modelo teórico que descreve a construção de determinado conceito e, por esta natureza, ela não é única, ou seja, não existe um caminho único para um indivíduo compreender um conceito matemático. A teoria APOS reconhece que podem ser traçados outros caminhos diferentes dos descritos no modelo teórico. Tomando, entretanto, este indivíduo como um indivíduo genérico, o modelo apresentado pela decomposição genética pode servir para auxiliar na compreensão da construção do conhecimento da maioria dos indivíduos.

Sobre a importância da utilização da decomposição genética em uma pesquisa, Arnon *et al*. (2014) afirmam que

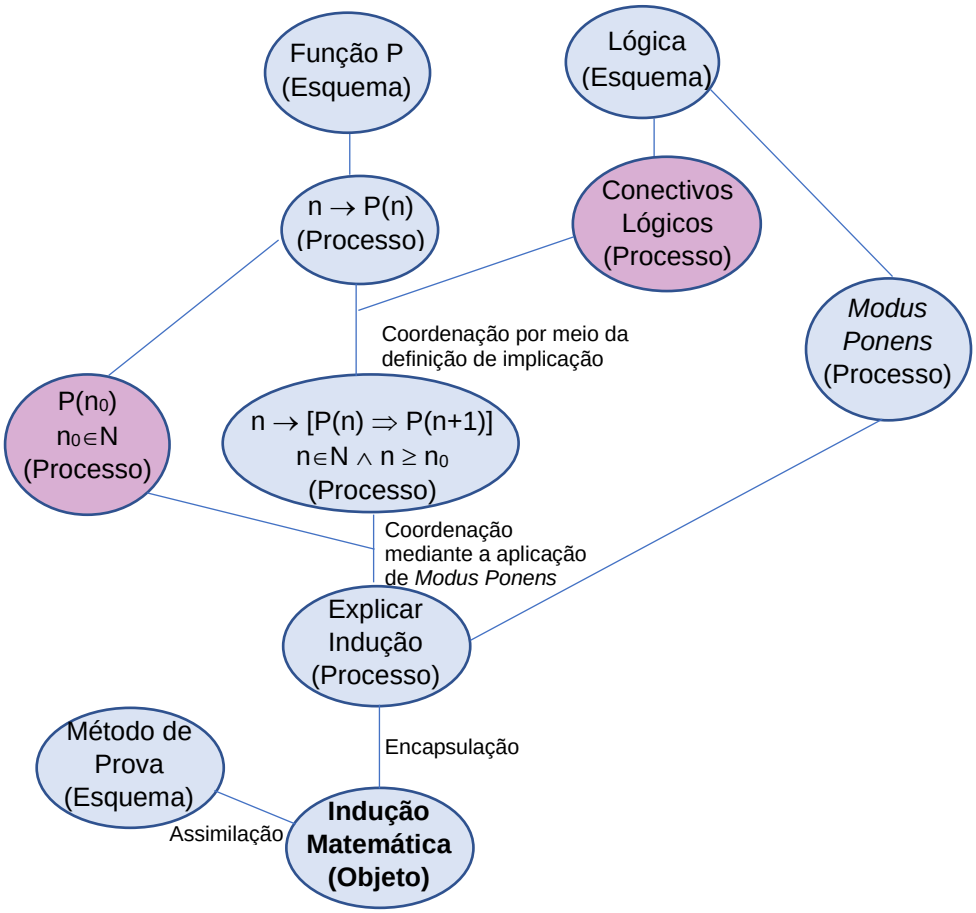
> […] o valor de uma decomposição genética reside na sua utilização como um modelo geral que descreve as construções que são consideradas necessárias pela maioria dos alunos na aprendizagem de um conceito.
> Como acontece com qualquer modelo teórico geral e descritivo, várias decomposições genéticas podem ser projetadas por diferentes pesquisadores ou até pelo mesmo grupo de pesquisadores para descrever a aprendizagem de um conceito particular. Se essas decomposições genéticas forem apoiadas por estudos empíricos das construções dos alunos, todas

> elas poderiam ser consideradas descrições razoáveis das construções dos alunos.[35] (ARNON *et al.*, 2014, p. 41, tradução nossa)

Desta forma, a decomposição genética sobre o teorema fundamental da aritmética que desenvolveremos será apenas uma de outras que podem ser elaboradas. Ela será importante neste estudo para determinar qual o nível de construção deste conceito pelos professores atuantes no ensino fundamental participantes deste estudo.

Para exemplificar uma decomposição genética, apresentamos um esquema do refinamento de uma decomposição genética do conceito de indução finita presente em Garcia e Parraguez (2015):

Figura 5 – Decomposição genética do conceito de indução matemática



Fonte: Garcia e Parraguez (2015, p. 2)

[35] [...] the value of a genetic decomposition resides in its use as a general model which describes those constructions that are found to be needed by most of the students in the learning of a concept.
As with any general and descriptive theoretical model, several genetic decompositions can be designed by different researchers or even by the same group of researchers to describe the learning of a particular concept. If those genetic decompositions are suported by empirical studies of students' constructions, they could all be considered reasonable descriptions of students' constructions.

Nesta decomposição genética, entende-se que para a construção do Objeto Indução Matemática Lógica seja possível, é necessário que as proposições do Esquema Lógica sejam declarações afirmativas, previamente formadas, por meio Processos originários de Ações internalizadas, como conjunções, disjunções, implicações, negações.

A acomodação do Esquema Função *P* deve permitir a construção de um Processo que transforme números inteiros em proposições. Além disso, é necessária a encapsulação do Processo de implicação, seguido pela assimilação do Esquema Função para a inclusão de um Processo que leva a função proposição do inteiro positivo à sua função implicação correspondente.

O Esquema Lógica necessita da inclusão do Processo *Modus Ponens*[36] como interiorização de ações aplicadas a implicações. Esta ação inicia-se como uma hipótese considerada verdade, seguida pela afirmação da verdade que se deseja concluir. Estas construções possibilitam a coordenação do Esquema Função P e o Esquema Lógica, como uma aplicação do Processo *Modus Ponens*.

Isto leva à construção da função $n \rightarrow P(n)$, em que n é um inteiro positivo e P a função-implicação que transforma *n* em $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Ou seja, tomando $n = 1$, teremos $P(1) \Rightarrow P(2)$, aplicando o *Modus Ponens* encontrando a afirmação *P(2).* Tomando, agora $n = 2$, pelo *Modus Ponens*, $P(2) \Rightarrow P(3)$, resultando na afirmação *P(3).* Continuando este procedimento, alternando o Processo *Modus Ponens* e o valor da função, é possível a coordenação como Processo Explicar Indução. Este Processo é encapsulado e adicionado ao Esquema Indução Matemática como Objeto.

A descrição acima apresenta suscintamente a explicação da decomposição genética da Indução Matemática, que já tem sido trabalhada em diversos outros trabalhos com a teoria APOS sobre esta temática. Esta, porém, é um refinamento de uma decomposição genética preliminar.

A necessidade de refinamento de uma decomposição genética ocorre quando a análise da aplicação da decomposição genética preliminar apresenta resultados diversificados, contendo algumas construções como as que foram previstas na análise preliminar ou com construções diferentes ou ausentes e até mesmo construções que

[36] *Modus Ponens,* também conhecida por “modo de afirmação” é uma regra de inferência, isto é, uma regra lógica que permite deduzir proposições a partir de outras, em que se a afirmação *A* implica na afirmação *B* e a afirmação *A* se verifica, então conclui-se que a afirmação *B* se verifica.

não foram previstas. O ciclo aplicação-análise-refinamento pode ser realizado até que o modelo reflita, de fato, as construções realizadas pelos indivíduos.

Tendo feito a descrição e exemplificação das estruturas e dos mecanismos que compõem a teoria APOS, vale ressaltar que esta teoria busca relacioná-los com as situações matemáticas, principalmente, em nível superior. Encontra, porém, alguns obstáculos para fazer esta relação. Um deles seria como realizar, de fato, a transição entre os objetos físicos em objetos mentais. Conforme aumenta-se o nível dos conceitos matemáticos, maior será a necessidade de se construir objetos mentais substitutos realmente efetivos para os objetos físicos, para que, quando manipulados, possam possibilitar a construção de novas ideias matemáticas.

Outro obstáculo ao relacionar as ideias piagetianas com a Matemática em nível superior é que a maior parte das ideias de Piaget provem do desenvolvimento espontâneo. Porém, quanto mais se eleva o nível do conceito matemático, menor é a possibilidade que esta espontaneidade seja continuada. Assim, segundo o autor, é necessário que o professor crie situações que fomentem tal desenvolvimento com profundidade maior que dos níveis elementares presentes nos trabalhos de Piaget.

Ainda que tais obstáculos se refiram à matemática a ser estudada no nível superior, entendemos que as mesmas estruturas e mecanismos mentais podem ser considerados nos estudos relativos ao nível básico, especificamente, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, uma vez que é neste nível de ensino que a formalidade envolvendo os conceitos matemáticos se inicia.

3.4. PESQUISAS BASEADAS NA TEORIA APOS

A fim de exemplificar a utilização da teoria APOS, trazemos três pesquisas que a tomam como base teórica, indo, novamente à Plataforma Sucupira e buscando por trabalhos com o descritor “teoria APOS” para serem aqui descritos.

Começamos com a pesquisa de Rachelli (2017), que investigou como ocorre a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em Ensino de Matemática, sob a perspectiva teórica e metodológica do modelo cognitivo APOS.

Para tanto, a pesquisadora analisou o desenvolvimento dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca, elaborou a decomposição genética destes conceitos, identificou os mecanismos e as estruturas mentais dos estudantes para sua compreensão, analisou como os estudantes compreendem a necessidade de

obtenção de um novo conceito para a resolução de problemas clássicos de derivada e analisou como sequências colaborativas de ensino favorecem a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca.

A pesquisa se desenvolveu em uma abordagem qualitativa e como referencial teórico, utilizou a teoria APOS. A pesquisadora buscou a História da Matemática como ferramenta e motivação para o estudo do conceito de derivada. Esta ferramenta permite que se observe a evolução do conceito da derivada, além de perceber como problemas foram resolvidos e como teorias matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas ao longo do tempo.

Como metodologia de pesquisa, optou por utilizar aquela apresentada pela teoria APOS, com três componentes: a análise teórica, com a qual elaborou uma decomposição genética dos conceitos de derivada clássica e de derivada fraca; o planejamento e implementação, em que elaborou e desenvolveu situações de ensino e a coleta e análise de dados.

Participaram desta investigação, cinco estudantes matriculados na disciplina Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de mestrado em Ensino de Matemática de uma instituição comunitária do Rio Grande do Sul. Foram propostas quinze atividades sobre os conceitos e evolução histórica da derivada, esperando o desenvolvimento nos alunos de mecanismos mentais de abstração reflexionante para a construção de estruturas mentais que promovam a compreensão deste objeto matemático.

Os resultados na análise dos dados sugerem que os alunos compreenderam de forma satisfatória tanto o conceito de derivada clássica como o de derivada fraca, indicando que houve assimilação dos conhecimentos associados aos esquemas sugeridos na decomposição genética construída e o estabelecimento de relações entre os esquemas que já conheciam juntamente com o desenvolvimento de mecanismos de abstração reflexionante para a compreensão dos conceitos.

Em relação às construções mentais, a pesquisadora concluiu que as situações de ensino organizadas e implementadas em sala de aula foram suficientes para garantir aos estudantes a elaboração, desenvolvimento e construção de mecanismos mentais de coordenação, interiorização, encapsulação, reversibilidade e generalização que lhes permitiram enfrentar novos problemas.

Sobre a proposta de metodologia de ensino da teoria APOS, o ciclo de ensino ACE, concluiu-se que sua utilização favoreceu a construção de conhecimento pelos

estudantes, uma vez que o uso de teorias e metodologias diferenciadas, nas quais os alunos trabalham com conceitos, resolvem exercícios e discutem colaborativamente com seus colegas e professor, propiciou um ambiente favorável para a compreensão de conceitos e teorias.

O próximo estudo é o de Prado (2010), que teve por objetivo identificar como dez alunos concluintes de um curso de extensão de Álgebra Linear concebem a noção de base de um espaço vetorial, pautada na teoria APOS, buscando responder as seguintes questões: “Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial?”, “Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um espaço vetorial?” e “Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona as noções elementares desta disciplina?”. Assim, realizou, inicialmente, um refinamento da decomposição genética outrora elaborada por Darly A. K. Euán , fazendo uma expansão ao apresentar uma decomposição genética das noções de base e de dimensão de um espaço vetorial. Tal decomposição genética foi utilizada como roteiro para a descrição e análise dos dados coletados.

Para a elaboração da decomposição genética das noções de base e de dimensão de um espaço vetorial, o pesquisador fez anotações e recolheu materiais durantes as aulas do curso de extensão que participou, buscando fornecer informações sobre construção do conhecimento deste objeto de estudo, além de analisar em dois livros utilizados no curso para ponderar como era apresentada a noção de base de um espaço vetorial.

Assim, segundo Prado (2010), para a construção da noção de base de um espaço vetorial, é necessário que o indivíduo tenha a Concepção Objeto sobre conjunto, subconjunto e pertinência de elemento a conjunto e Concepção Processo sobre espaço vetorial. Após um estudo detalhado sobre as estruturas cognitivas componentes da construção dos Objetos noções de base e dimensão de um espaço vetorial, define que um indivíduo com uma Concepção Ação sobre a noção de base é capaz de operar com vetores pertencentes a um espaço vetorial; aquele que possui uma Concepção Processo sobre a noção de base consegue, por exemplo, identificar e expressar conjuntos geradores de um espaço vetorial e identificar os espaços gerados a partir de um subconjunto; já o que possui uma Concepção Objeto sobre a noção de base a concebe como um conjunto minimal gerador, ou um conjunto maximal linearmente independente, ou um conjunto gerador linearmente

independente, tendo, assim, construído os Objetos os objetos conjunto gerador, espaço gerado e dependência linear.

Além disso, o pesquisador define que um indivíduo possuidor de uma concepção Ação sobre dimensão de um espaço vetorial consegue identificar que a quantidade de vetores de uma base de um espaço vetorial é invariante; quando possui uma Concepção Processo da noção de dimensão é capaz de dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar o espaço vetorial em questão e qual o maior número de vetores linearmente independentes possíveis de se obter para um determinado espaço vetorial; no caso de possuir uma Concepção Objeto sobre a noção de dimensão, reconhece que todas as bases de um mesmo espaço vetorial possuem o mesmo número de vetores, isto é, a dimensão é invariante.

Para a coleta de dados, o pesquisador realizou entrevistas semiestruturadas que, além de fornecer as informações sobre características, formação acadêmica e atuação profissional do participante do estudo, buscou identificar a concepção que o entrevistado mostrou possuir sobre a noção de base e dimensão de um espaço vetorial, além de verificar as correlações que tal sujeito estabeleceu entre as noções elementares de Álgebra Linear. Para isso, pediu aos participantes que explicassem as supostas respostas dadas por alunos em duas questões que tinham como foco as noções de base e de dimensão.

Após a descrição detalhadas das entrevistas realizadas e de sínteses do que nelas foi observado, já identificando concepções apresentadas pelos participantes, o pesquisador realizou uma análise de forma panorâmica, buscando similaridades e discrepâncias entre as declarações dos entrevistados. Constatou que, dentre os dez entrevistados, apenas quatro tem sua formação em Matemática enquanto os outros seis vinham de áreas afins.

Em suas considerações finais, o pesquisador busca responder as questões feitas no início de seu trabalho. Segundo ele, a primeira “Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial?” foi respondida ao utilizar a teoria APOS para descrever um possível caminho para a construção da noção de base de um espaço vetorial, realizando o refinamento da decomposição genética, apresentada por Darly A. K. Euán, seguida pela escolha ideal do tipo de entrevista, no caso a semiestruturada, para ser utilizada. Ressalta-se a importância de o método escolhido para a estruturação do instrumento de coleta ser flexível para se adaptar às situações inesperadas no momento da coleta de dados.

A segunda pergunta “Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um espaço vetorial?” responde-se, segundo o pesquisador, com o auxílio da decomposição genética ao verificar que um participante evidenciou possui uma concepção Ação sobre a noção de base de um espaço vetorial, e cinco mostraram possuir uma Concepção Objeto, apresentando metade das 16 ações apresentadas na análise teórica prévia descritas na decomposição genética, assim como 10 processos dos 16 previstos e 7 dos 9 objetos. Os outros três, no entanto, mostraram não terem construído ao menos uma Conceção Ação, mesmo alguns dos entrevistados tendo participado de dois cursos de Álgebra Linear.

Finalmente, a terceira questão “Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona as noções elementares desta disciplina?”, segundo o pesquisador, foi respondida por meio das argumentações dos entrevistados, mostrando, por exemplo, a correlação entre combinação linear e dependência linear ao falar que “o x3 é combinação linear de x2 e x1, assim, não é um conjunto linearmente independente”; a correlação entre base e dimensão, ao comentar “ele utilizou o fato de ser o IR^2, e a dimensão ser dois. A dimensão do espaço vetorial é a quantidade de elementos da base...”, entre outras afirmações expressas pelos participantes.

Evidentemente, o trabalho de Prado (2010) não tem como tema o Teorema Fundamental da Aritmética, assim como não está relacionado ao nível de ensino escolhido por nós para o desenvolvimento desta tese. Entretanto, julga-se importante para melhor entendimento sobre a maneira de se elaborar uma decomposição genética, assim como identificar elementos inerentes à teoria APOS que podem ser exploradas no momento da análise.

Outro trabalho que utiliza a teoria APOS é o da pesquisadora Nomura (2014) que investigou as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de formação do aluno dos cursos de Engenharia, evidenciando os esquemas cognitivos após o estudo deste objeto e os conceitos imagem e definição no estudo deste objeto matemático pelos estudantes. Suas questões eram: quais concepções (ação-processo-objeto-esquema) são evidenciadas nos alunos, após o estudo do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de sua formação acadêmica em cursos de Engenharia; e (2) Nessas mesmas fases, quais conceitos imagem e definição são evidenciados no estudo do objeto matemático autovalor e autovetor?

A investigação foi desenvolvida sob uma abordagem qualitativa, utilizando estudos de caso múltiplos, para comparar os diferentes aspectos cognitivos destacados pelos alunos participantes da pesquisa. Tendo a teoria APOS e o conceitos imagem e definição como referenciais teóricos, propõe-se inicialmente um problema a dez estudantes de cursos de Engenharia de duas instituições distintas, divididos em dois grupos para estudo de caso.

Para sua análise, porém, os reorganizou em duas categorias: aqueles que concluíram a disciplina Álgebra Linear, mas ainda não cursaram disciplinas específicas e aqueles que estavam em fase de conclusão do curso e que já se depararam com a maioria das disciplinas de formação específica. Além da análise dos registros das resoluções do problema realizada pelos estudantes, são realizadas entrevistas individuais com alguns destes alunos para a análise de seus discursos.

Os resultados da pesquisa mostram que os alunos, inicialmente, não buscaram a definição formal do conceito durante a resolução do problema, ao ser exposta a definição formal descrita no livro-texto sobre os conceitos de autovalor e autovetor. Porém, num segundo momento evidenciaram a construção do conhecimento em seu discurso, após entrevistados, resolvendo rapidamente o problema proposto, buscando a definição e os elementos-chave envolvidos no conceito trabalhado.

Outro ponto salientado nos resultados é o fato de a representação geométrica, em geral, ser negligenciada pelos estudantes, mesmo que tal representação esteja presente de forma constante nos livros-texto.

Os resultados apontam que houve a identificação de algumas características que se aproximam da concepção Objeto, por meio da dedução da definição, que possibilitou a reflexão sobre as propriedades dos conceitos abordados. Entretanto, não foi possível definir que tais objetos foram plenamente encapsulados como objetos mentais e, portanto, não é possível afirmar que os objetos autovalor e autovetor foram interiorizados numa concepção Processo.

Sobre o Pensamento Matemático Avançado, os resultados mostraram que os estudantes são hábeis em fazer abstrações matemáticas de forma consciente, tendo uma participação ativa na construção do conhecimento ao lidar facilmente com a complexidade, abstração e representação dos objetos matemáticos.

Os trabalhos apresentados com a teoria APOS como sua base teórica, mesmo que não estejam diretamente relacionados a assuntos da Teoria Elementar dos Números, nos permitiram entender como são desenvolvidos estudos com esta base

teórica que é pouco utilizada em estudos na Educação Matemática brasileira, como nossa busca mostrou.

3.5. O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Nesta seção, trataremos do tema matemático deste estudo, o Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, será descrita a sua definição formal, seguida de sua demonstração. Apresentaremos, no subtópico deste capítulo, estudos em artigos que tratam de temas relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Antes, porém, se faz necessário relembrar algumas definições, teoremas e corolários que dão subsídios à definição do Teorema Fundamental da Aritmética. Para isso, enunciaremos formalmente tais sentenças, porém não serão demonstradas e sim explicadas de um modo menos formal e exemplificadas numericamente, todas no âmbito do conjunto números inteiros.

Inicialmente, vamos relembrar a definição de número primo, já que entender a noção de número primo é essencial em todos os aspectos da Teoria Elementar dos Números. Assim, trazemos sua definição: “Um número *p* diz-se primo se tem exatamente dois divisores positivos, 1 e |*p*|” (MILIES; COELHO, 2003, p. 78).

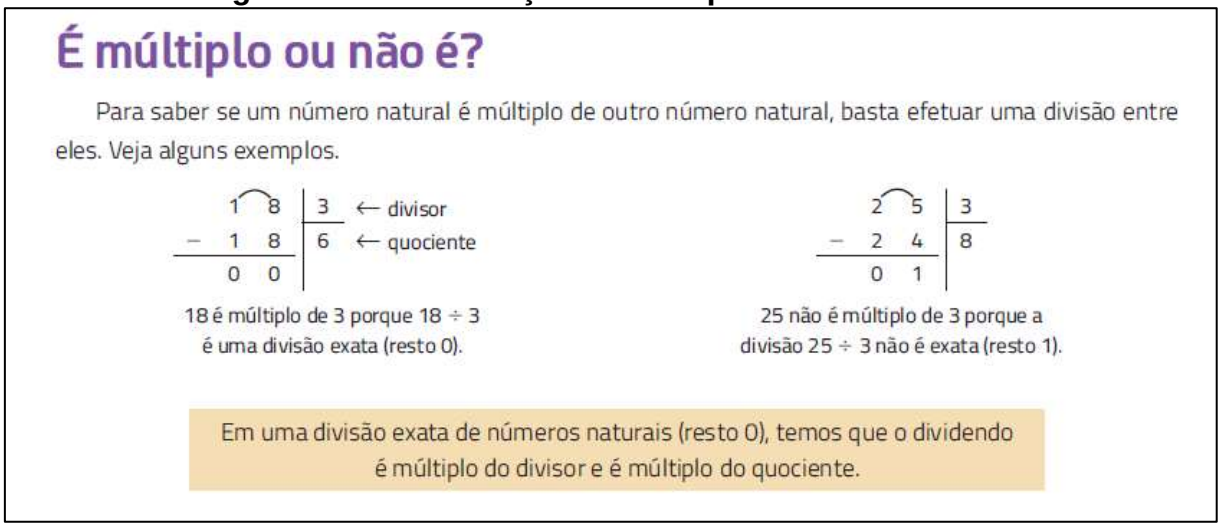
Por ser uma definição, não existe uma demonstração. No entanto, há alguns detalhes que necessitam ser observados. O primeiro deles é a atenção ao significado de divisor. O divisor *b* de um número inteiro *a* é aquele com o qual pode se escrever $a = b.c$, sendo *c*, também um número inteiro e $b \neq 0$, com $b \leq a$.

Exemplificando, se $b = 3$ e $a = 6$, dizemos que 3 é divisor de 6 pois existe $c = 2$ de forma que $6 = 3.2$. Outro detalhe a ser observado é a notação |*p*| para o módulo de *p*, isto é, o valor de *p* é *p* quando *p* é positivo e o valor de *p* é *–p* quando *p* é negativo. Com exemplos numéricos, se $p = 5$, então$|5| = 5$, porém se $p = –5$, então $|–5| = –(–5) = 5$. Desta forma, imediatamente se excluem como números primos o número zero, por possuir infinitos divisores, e os números 1 e –1, por terem apenas um divisor positivo, o número 1.

Ressaltamos que, uma vez observada a definição de divisor, consequentemente, tem-se a definição de múltiplo: se *b* é divisor do número inteiro *a*, então *a* é múltiplo de *b*, pois existe um número inteiro *c* tal que $a = b.c$, sendo $b \neq 0$ e $b \leq a$.

Ainda que as definições de divisor e múltiplo estejam interrelacionadas por meio de um produto de números inteiros, é importante salientarmos que a maneira de se encontrar múltiplos e divisores são apresentados de maneira diferente na matemática escolar. Trazemos, a seguir, aqui um recorte do livro didático do 6º ano da Coleção Teláris, com autoria de Luiz Roberto Dante para exemplificar como é apresentado este procedimento:

Figura 6 – Determinação de múltiplo no livro didático



Fonte: Dante (2018, p. 96)

A orientação didática dada ao professor também reitera a utilização do procedimento da divisão:

> Enfatize aos alunos que um número só é múltiplo de outro quando há uma relação de divisão exata entre eles, por exemplo, temos 56:6 = 9 e resto 2, o que não é uma divisão exata; então, 56 não é múltiplo de 6. Já 54:6 = 9 é uma divisão exata e, então, 54 é múltiplo de 6 e também é múltiplo de 9. (DANTE, 2018, p. 96)

Desta forma, é compreensível que docentes também utilizem este procedimento para encontrar um múltiplo, assim como mostraram os resultados de Pereira (2016), quando a professora participante a divisão exata para a definição da multiplicidade de um número natural. Entretanto, é importante que sempre se evidencie a relação de interdependência existente entre o múltiplo e o divisor para que este movimento não se resuma apenas à execução de um procedimento da divisão, uma vez que a divisão não é considerada uma operação matemática, sendo ela a multiplicação pelo inverso de um número inteiro.

Retornando à demonstração, como relembramos a definição de divisor e múltiplo, vamos apresentar uma propriedade importante dos números primos e que é essencial para a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética: Considerando *a* e *b* números inteiros, "se *p* é um (número) primo e $p|a.b$, então $p|a$ ou $p|b$" (BURTON, 2007, p. 40).

Para um melhor entendimento desta propriedade, é preciso esclarecer que a notação $p|a$ significa que *p* é um divisor de *a*. Desta forma, podemos reescrever esta proposição da seguinte maneira: Seja *p* um número primo e sejam *a* e *b* números inteiros. Se *p* é um divisor do produto *a.b*, então *p* é um divisor de *a* ou *p* é um divisor de *b*. Para exemplificar, vamos tomar inicialmente o número primo $p = 3$ e os números inteiros $a = 6$ e $b = 4$. Facilmente, pode-se notar que 3 é divisor de $6.4 = 24$ e, portanto, 3 é divisor de 6 ou 3 é divisor de 4. Neste caso, a afirmação correta seria apenas que 3 é divisor de 6.

Ainda que no exemplo anterior apenas o número *a* tem *p* como divisor, esta não é uma regra. O "ou" que está presente na sentença não representa um "ou exclusivo", isto é, não exclui a possibilidade de ambos os números, *a* e *b*, terem o primo p como divisor. Considere então o primo $p = 3$ e os números inteiros $a = 9$ e $b = 12$. Assim, 3 é divisor de $9 \cdot 12 = 108$ e, portanto, 3 é divisor de 9 e 3 é divisor de 12, igualmente.

Este resultado pode ser ampliado, se considerarmos o produto em questão com mais que apenas dois fatores, ou seja, um produto $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k$ com *k* fatores e $k \in \mathbb{N}$. Neste caso, se um número primo *p* for divisor deste produto, então *p* será o divisor de algum destes *k* fatores. Este resultado é considerado importante por Milies e Coelho (2003), pois pode ser usado para caracterizar a noção de número primo.

Tendo a noção de número primo definida e caracterizada, existem duas afirmações que são essenciais para o resultado ao qual estamos buscando. O primeiro deles é o lema: "Todo número inteiro $a > 1$ pode ser escrito como produto de números primos" (MILIES; COELHO, 2003, p. 79).

Demonstraremos este resultado, por meio da segunda forma do Princípio de Indução, definido por Milies (2003) da seguinte maneira: "Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação *A(n)* de forma que: (i) *A(a)* é verdadeira e (ii) se *A(m)* é verdadeira para todo inteiro *m* tal que $a \leq m \leq k$, então *A(k+1)* é verdadeira. Então *A(n)* é verdadeira para todo inteiro $n \geq a$." (MILIES; COELHO, 2003, p. 31). Em

outras palavras, se for possível provar que a sentença é válida para o menor número inteiro *a* presente no enunciado e também, tomando como válido que para todo número inteiro *m* maior que *a*, mas menor que um inteiro *k*, provar que a sentença continua válida para *k*, a sentença é considerada verdadeira para todo número inteiro maior ou igual ao número inteiro *a.*

No lema em questão, a primeira etapa está provada, já que $a = 2$ é o primeiro número inteiro *a* ser considerado e o próprio número 2 é um número primo, validando a sentença. Para a segunda etapa, vamos considerar que a sentença é verdadeira para todo número inteiro *b*, sendo $2 \leq b < a$ e provar sua veracidade para *a*.

Se o número inteiro *a* for primo, o enunciado está provado, uma vez que não há outra forma de representá-lo com um número primo que não seja por ele mesmo. Considerando, entretanto, que *a* não é um número primo, podemos afirmar que *a* possui um divisor positivo *b* de tal forma que $1 < b < a$. Assim, pela definição de divisor, existe um número inteiro *c* que nos permite escrever $a = bc$, tendo, da mesma forma, que $1 < c < a$, uma vez que *c* também é divisor de *a*. Por hipótese de indução, os números *b* e *c* podem ser escritos como produto de números primos, na forma $b = p_1.....p_s$ (I) e $c = q_1.....q_k$ (II). Ao substituirmos (I) e (II) na expressão $a = bc$, encontramos $a = p_1.....p_s\, q_1.....q_k$, concluindo a segunda etapa da indução e mostrando que *a* também pode ser escrito como produto de números primos, como queríamos provar.

De acordo, então, com o resultado demonstrado acima, ao tomarmos o número 72, poderíamos supor diversas combinações de fatores para representar este número, como 9.8, 6.12, 24.3, 6.6.2, entre outras combinações. Entretanto, esta combinação é possível ser feita utilizando apenas números primos. No caso do 72, a sua representação utilizando apenas fatores primos seria 72 = 2.2.2.2.3.3. Isto ocorreria para todo número inteiro maior que 1. Se o número considerado for um primo, a representação seria o próprio número primo, o que, da mesma forma estaria de acordo com o lema enunciado.

O teorema que apresentamos a seguir é um dos pilares do desenvolvimento do Teorema Fundamental da Aritmética, a unicidade: “Seja $a > 1$ um inteiro. Então existem primos positivos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_t$ tais que $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$ e essa decomposição é única.” (MILIES; COELHO, 2003, p. 80). Este teorema é a consequência do lema enunciado antes dele, já que considera a representação de

todo número inteiro em fatores primos e inclui a unicidade desta composição, ou seja, os números primos que são fatores da decomposição de cada um dos números inteiros maiores que 1 não podem representar dois números inteiros diferentes. A seguir, apresentamos a demonstração da unicidade da decomposição.

Para isto, utilizaremos a primeira forma do Princípio que é ligeiramente diferente daquela apresentada na demonstração do lema anterior. Para realizar uma demonstração por esta forma, deve-se mostrar inicialmente que a sentença é válida para o menor número inteiro consonante com o enunciado, neste caso, $n = 1$. Em um segundo momento, toma-se como existente um $n = k$ e, finalmente, mostra-se que é a sentença é válida para $n = k + 1$.

A primeira etapa desta demonstração será feita por absurdo, ou seja, supõe-se inicialmente uma proposição não verdadeira para, no final da demonstração, encontrar uma contradição. Assim, considerando um número inteiro a, temos que a primeira parte da prova por indução, para $n = 1$, fica da seguinte maneira:

> **(I)** Suponhamos que a admita uma decomposição do tipo $a = p_1$, onde p_1 é primo e que vale $a = p_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ = em que $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_s$ são primos positivos. **(II)** Como q_1 divide $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$, q_1 deve dividir p_1, que é primo. Então devemos ter $p_1 = q_1$. **(III)** Cancelando, vem $1 = q_2 \ldots q_s$. Se $s > 1$, teríamos que o primo q_2 seria inversível. Uma contradição. Assim, $s = 1$ e, como já provamos que $p_1 = q_1$, o primeiro passo da indução está verificado." (MILIES; COELHO, 2003, p. 80, numeração nossa)

Esclarecendo a demonstração acima, supõe-se, em (I), que o número inteiro a pode ser expresso de duas maneiras: $a = p_1$ e $a = p_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$. Isto seria uma proposição não verdadeira uma vez que queremos provar a unicidade desta decomposição.

Em (II), deve-se lembrar da propriedade dos números primos já citada. Considerando, então, que $p_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$, temos que q_1 é um divisor de $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ e também de p_1, pela igualdade apresentada. O resultado seria que q_1 só pode ser igual a p_1 por ser seu único divisor.

Desta forma, em (III), utiliza-se a lei do cancelamento da multiplicação para encontrar a igualdade $1 = q_2 \ldots . q_s$. Entretanto, o índice s deve ser maior que 1, já que q_1 já foi cancelado. Assim, para que a igualdade fosse verdadeira o primo q_2 teria que ser inversível, isto é, estaríamos lidando com números racionais, o que é uma contradição uma vez que, por definição, os números primos são números inteiros.

Logo, o índice *s* só pode ser 1, ou seja, $p_1 = q_1$, sendo assim, provada a unicidade para $n = 1$.

Para a segunda etapa da prova, Milies e Coelho (2003) denominam como *comprimento* de uma decomposição ao número de fatores que a compõem e apresentam a demonstração segundo o comprimento de uma decomposição do número inteiro *a*. A demonstração da segunda parte da indução fica do seguinte modo:

> **(I)** Suponhamos agora o resultado verdadeiro para todo inteiro que admita uma única decomposição de comprimento $k \geq 1$, e seja *a* um inteiro com uma decomposição de comprimento $k + 1$. **(II)** Se *a* admite outra decomposição, temos $a = p_1...p_{k+1} = q_1...q_s$ (*), em que $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_s$ são primos positivos. Como na primeira parte $q_1 | p_1 \ldots p_{k+1}$ e pelo corolário anterior, temos que $q_1 | p_i$, para algum *i*. **(III)** Como p_i é primo, devemos ter novamente que $q_1 = p_i$. Em particular $q_1 \geq p_1$. De forma análoga, pode-se obter que $p_1 = q_j$, para algum *j*. Logo, $p_1 \geq q_1$. De ambas as desigualdades, vem que $p_1 = q_1$. **(IV)** Finalmente, cancelando (*), temos que $p_2...p_{k+1} = q_2...q_s$.
> Agora, o primeiro membro da igualdade tem uma decomposição de comprimento *k*, logo, da hipótese de indução, admite uma única decomposição. **(V)** Assim, temos $k = s - 1$, donde $k+1 = s$ e $p_i = q_j$, para $i = 2, \ldots, k+1$. Como já provamos que $p_1 = q_1$, ambas as expressões de a coincidem. (MILIES; COELHO, 2003, p. 81, numeração nossa)

Explicando mais detalhadamente a demonstração acima, em (I), supõe-se como hipótese verdadeira, que todo número inteiro possui decomposição de comprimento $k \geq 1$. Para que fique bem claro, o *k* que está sendo utilizado é o índice que representa a "quantidade" de fatores primos do comprimento da decomposição. Isto posto, considera-se um número inteiro *a* que tenha o comprimento de sua decomposição $k + 1$.

Em (II), como se está demonstrando a unicidade, supõe-se, então que o número inteiro *a* tenha outra decomposição, obtendo-se a igualdade $a = p_1.....p_{k+1} = q_1.....q_s$. Note que, no primeiro membro, a decomposição tem comprimento $k+1$ e no segundo membro, o comprimento é *s*. Utilizando a mesma propriedade dos números primos presente na primeira parte da demonstração – que na citação está como corolário –, podemos escrever que q_1 é um divisor de $p_1.....p_{k+1}$, significando que q_1 é divisor de algum primo p_i, com $i = 1,..., k + 1$.

Sendo p_i um número primo, em (III), utiliza-se o resultado proveniente da primeira parte da prova por indução para concluir que $q_1 = p_i$. Perceba que a demonstração traz a particularidade $q_1 \geq p_1$. Isto ocorre, pois se $q_1 = p_i$, o índice *i* pode assumir, no mínimo, o valor 1. Tomando novamente a igualdade $= p_1.....p_{k+1} = q_1.....q_s$,

assim como já realizado anteriormente, que p_1 é divisor de $q_1.....q_s$, e portanto, existe algum primo q_j, com j = 1,...,s, de forma que $p_1 = q_j$, com a particularidade que $p_1 \geq q_1$. Considerando, agora, as desigualdades $q_1 \geq p_1$ e $p_1 \geq q_1$, apenas será verdade no caso de $p_1 = q_1$, já que não podemos ter ao mesmo tempo $q_1 > p_1$ e $p_1 > q_1$.

Tendo, então, o resultado $p_1 = q_1$, em (IV), utiliza-se na igualdade $p_1.....p_{k+1} = q_1.... .q_s$ a lei do cancelamento da multiplicação, obtendo-se $p_2...p_{k+1} = q_2...q_s$. Perceba que, no início da demonstração foi considerado um número inteiro a de comprimento k+1. Tendo sido cancelado o fator p_1, o comprimento da decomposição do primeiro membro desta nova igualdade é k, e portanto, possui uma decomposição única, que é a hipótese da indução.

Observando a igualdade $p_2.....p_{k+1} = q_2.....q_s$, em (V), tem-se que o comprimento da decomposição dos dois membros são iguais, ou seja, k+1 = s e k = s–1. Assim, $p_i = q_i$, significando que ambas as expressões consideradas, inicialmente, como decomposições do número inteiro a, são iguais, sendo assim provada a unicidade da decomposição em fatores primos.

Para ilustrar esta situação, vamos tomar o número 12. Decompondo-o em fatores primos, poderíamos propor algumas combinações como 12 = 2.2.3 ou 12 = 2.3.2 ou 12 = 3.2.2. Independentemente das combinações imaginadas, serão sempre os mesmos números primos que farão parte desta decomposição. Em outras palavras, os únicos números primos que poderão compor um produto que resulta em 12 são 2, 2 e 3, sendo 12 = 2.2.3 a única decomposição possível para o número 12. Vale ressaltar que a ordem dos fatores ser irrelevante nos produtos indicados decorre da propriedade comutativa da multiplicação.

Com o importante resultado demonstrado, a seguir, apresentamos o Teorema Fundamental da Aritmética, acrescentando ao teorema anterior o agrupamento de fatores que eventualmente possam estar repetidos na decomposição de um dado número inteiro e ampliando este resultado aos números inteiros negativos.

O Teorema Fundamental da Aritmética: “Seja a um número diferente de 0, 1 e –1. Então existem primos positivos $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$ e inteiros n_1, n_2,…,n_r tais que $a = E \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$, em que E = ±1, conforme a seja positivo ou negativo. Além disso, essa decomposição é única.” (MILIES; COELHO, 2003, p. 81).

Para demonstrarmos este teorema, vamos entender o que o número a representa. Se tomarmos o mesmo número inteiro a do teorema anterior, isto é,

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, e $E = \pm 1$, podemos escrever que $a = E|a|$, pois, quando o número a for positivo, $E = 1$; já no caso de o número a ser negativo, teremos que $E = -1$. Tendo, então, E como responsável por definir se o número a é positivo ou negativo, podemos garantir que $|a|$ é positivo e, pelo teorema anterior, sabemos que existem números primos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_t$ de forma que $a = E \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$. Como podem existir na decomposição números primos que se repetem, é possível escrever que $a = E \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$, sendo os expoentes $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, a quantidade de repetições de cada um dos números primos que compõem a decomposição do número a. Esta forma de se escrever um número inteiro decomposto, segundo Burton (2007), é chamada de forma canônica.[37]

Assim, concluímos a demonstração de parte do enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética, em que todo número inteiro pode ser escrito como produto de número primos. Faltaria, então, demonstrar sua unicidade, mas este resultado é consequência do teorema anterior, não sendo necessária sua demonstração.

Ainda que já tenha sido expresso o Teorema Fundamental da Aritmética, trazemos uma outra forma de enunciá-lo, na qual os números inteiros negativos não são considerados, mas que pode ser mais claro para o entendimento por ser menos formal: “Todo número inteiro positivo $n > 1$ pode ser escrito como um produto de números primos, esta representação é única, independentemente da ordem em que aparecem os fatores”[38] (BURTON, 2007, p. 41, tradução nossa)

3.6. DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Apresentamos, a seguir, uma decomposição genética, elaborada por nós, descrevendo o que consideramos ser uma concepção Ação, uma concepção Processo, uma concepção Objeto e uma concepção Esquema do Teorema Fundamental da Aritmética.

Em nossa revisão de literatura, não encontramos uma decomposição genética que verse sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Como já foi relatado na descrição da teoria APOS, uma decomposição genética pode ser desenvolvida

---

[37] Any positive integer $n > 1$ can be written uniquely in a *canonical form* $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, where, for $i = 1, 2, \ldots, r$, each k_i is a positive integer and each p_i is a prime, with $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$.

[38] Every positive integer $n > 1$ can be expressed as a product of primes; this representation is unique, apart from the order in which the factors occur.

baseando-se em alguns aspectos, que podem ser únicos ou combinados: em pesquisas matemáticas sobre o entendimento do conceito a ser pesquisado, na experiência docente dos pesquisadores, nas primeiras pesquisas sobre o pensamento de estudantes sobre o conceito, nas perspectivas históricas no desenvolvimento do conceito ou na análise de textos ou materiais instrucionais relacionados ao conceito.

Portanto, a decomposição genética que se segue está baseada em pesquisas já publicadas sobre como estudantes compreendem o Teorema Fundamental da Aritmética, em livros de autores reconhecidos no estudo dos números inteiros e na experiência docente desta pesquisadora.

Para um indivíduo construir o Teorema Fundamental da Aritmética, ele deve já possuir uma concepção Objeto sobre definição de número primo e concepções Processos sobre as definições de divisor e de múltiplo em $\mathbb{Z}$ e sobre a decomposição de números inteiros em fatores.

A definição de número primo é tomada nas demonstrações apresentadas anteriormente como a primeira e principal noção necessária, não apenas para a construção do objeto Teorema Fundamental da Aritmética, mas também para todos os assuntos deste campo, já que segundo Milies e Coelho (2003), os números primos estão para a Teoria dos Números, assim como os átomos estão para a estrutura da matéria. Desta forma, a definição de número primo é imprescindível para a construção do Teorema Fundamental da Aritmética.

Tanto as definições de divisor e de múltiplo em $\mathbb{Z}$ quanto a decomposição de números inteiros, da mesma maneira, se apresentam como noções essenciais e inter-relacionadas para a construção do objeto almejado. A ação de decompor números inteiros em fatores primos depende do conhecimento sólido sobre a relação de divisão exata e multiplicação entre os números inteiros. É importante compreender que, nas ações do procedimento de uma divisão exata entre dois números ou da multiplicação entre dois ou mais números, estão implícitas as definições de divisor e de múltiplo, conforme explicado nas demonstrações anteriores. Assim, as definições de divisor e múltiplo, como concepção Processo, podem ser compostas com a decomposição de números primos, sendo possível ao indivíduo agir no procedimento de decompor um número nas possíveis combinações existentes.

Diante disso, consideramos que um indivíduo que possui a concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética consegue escrever um número,

representando-o por fatores primos. Ele necessitaria, ainda, realizar as divisões ou multiplicações para verificar se a decomposição representa de fato o número inicial, como tentar decompor o número 72 e ter que executar o dispositivo da divisão[39] para verificar se a divisão por 3 é exata.

Pode-se, em alguns momentos, ter a necessidade de decompor números compostos possíveis de aparecer nas tentativas de decomposição do número inicial em fatores primos, como, por exemplo, na tentativa de decomposição do número 36, escrevê-lo inicialmente como 6.6 e em seguida representá-lo por 2.3.2.3. Um indivíduo com a concepção Ação, pode também não perceber que a ordem na representação dos fatores da decomposição não afeta o valor do número inicial nem representaria um outro número inteiro por não compreender, da mesma maneira, que a decomposição é única para cada número inteiro.

É possível, ainda, que o indivíduo utilize um dispositivo prático para obter a forma fatorada do número, sem necessariamente compreender o real significado do dispositivo, fazendo uso de, como está exemplificado na Figura 7, números compostos durante o procedimento. A escrita na forma fatorada de um número inteiro pode ocorrer de forma automática, apenas para fortalecer o procedimento do dispositivo prático que já fora estudado em anos anteriores.

Figura 7 – Dispositivo prático para a decomposição em fatores primos

Utilização correta de um dispositivo para o número 48	Exemplo de utilização equivocada de um dispositivo para o número 48
48 | 2 24 | 2 12 | 2 6 | 2 3 | 3 1 | 48 = 2.2.2.2.3	48 | 4 12 | 4 3 | 3 1 | 48 = 4.4.3

Fonte: elaborado pela autora

[39] Entendemos que o dispositivo prático da divisão mais comumente utilizado é o denominado algoritmo da divisão. Sabemos, porém, que não é o único. Assim, neste texto, o termo dispositivo prático da divisão se refere a qualquer procedimento prático que um indivíduo utiliza para explicitar os termos da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto.

No atual Currículo Paulista de Matemática, o tópico para o estudo dos múltiplos e divisores e dos números primos está indicado para o 6º ano do Ensino Fundamental no bloco Números, com a seguinte habilidade: “Resolver e elaborar situações-problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores” (SÃO PAULO, 2019, p. 347). Já na Base Nacional Comum Curricular, a Unidade temática Números, também do 6º ano, traz como Objeto do Conhecimento os múltiplos e divisores de um número natural e os números primos e compostos, descrevendo o desenvolvimento das habilidades de

> Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.” (BRASIL, 2017, p. 299)

Assim, é possível que a utilização de um dispositivo para decompor um número inteiro ocorra simplesmente como repetição de um procedimento largamente explorado em anos anteriores, sem efetivo entendimento de seu significado. O indivíduo pode, inclusive, não entender o significado da representação na forma canônica, acreditando, por exemplo, que no número $45 = 3^2.5$, o expoente 2 faria parte dos fatores de 45.

Ainda na concepção Ação, o indivíduo pode fazer uso de alguns critérios de divisibilidade para decidir se um número é divisível por outro, pois, como no caso do dispositivo para decomposição, eles já podem ter sido estudados em anos anteriores, porém é um conceito que pode ou não estar interiorizado pelo indivíduo.

Consideremos que a Ação tenha sido interiorizada mentalmente pelo indivíduo que, agora, possui a concepção Processo. A partir deste momento, ele passa a realizar a decomposição de um número inteiro em fatores primos, sem ter a necessidade de sempre efetuar a divisão por meio de um dispositivo para saber se o número inteiro é divisível por um número primo. A execução da divisão seria apenas para encontrar o valor do quociente.

Para isso, é necessário que o indivíduo possua a divisibilidade como uma concepção Processo, assim como descrevem Zazkis e Campbell (1996) que propuseram uma decomposição genética para o conceito de divisibilidade por meio da análise das respostas de alunos a diversas questões sobre divisibilidade e estrutura multiplicativa. A decomposição genética sobre a divisibilidade tem alguns

aspectos de semelhança com a elaborada por nós sobre o Teorema Fundamental da Aritmética.

Para os pesquisadores, a construção do conceito de divisibilidade se inicia quando o indivíduo considera números específicos, normalmente de valores baixos como possíveis divisores. Na concepção Ação sobre a divisibilidade, o indivíduo precisa realizar a divisão, usando um dispositivo da divisão já conhecido, e, após observar o resultado, decidir sobre sua divisibilidade. Este aspecto da concepção Ação sobre a divisibilidade está igualmente presente na concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética pela necessidade de se realizar a divisão efetivamente.

Quando a Ação é interiorizada como um processo mental, o processo de divisão é intencional, mas não precisa ser efetivamente realizado. O indivíduo com a concepção Processo sobre a divisibilidade entende que nem sempre é necessário realizar o dispositivo de divisão para tomar a decisão sobre a divisibilidade de um número.

Ao ser encapsulado como um objeto cognitivo, o conceito sobre a divisibilidade é visto como uma propriedade de "sim ou não" que não depende dos aspectos da divisão. Segundo os pesquisadores, o indivíduo com a concepção Objeto sobre a divisibilidade consegue realizar inferências do tipo "se *a* é divisível por *b*, e *b* é divisível por *c* então, *a* é divisível por *c*".

Assim, fazem referência à íntima relação existente entre a divisibilidade e o Teorema Fundamental da Aritmética ao afirmarem que "quando a divisibilidade está relacionada a outras estruturas cognitivas, como as que envolvem fatoração e decomposição em primos, poderíamos dizer que a divisibilidade passa a ser *tematizada* para formar um objeto mais elevado, ou *esquema*."[40] (ZASKIS; CAMPBELL, 1996, p. 545)

Fica claro, portanto, que um indivíduo com a concepção Processo sobre o Teorema Fundamental da Aritmética precisa interiorizar a divisibilidade na mesma concepção. Tendo isto em vista, este indivíduo pode coordenar estes dois Processos e realizar a decomposição em fatores primos, sem ter que efetivar o procedimento da divisão, ainda que o esteja realizando mentalmente. Ele pode conseguir entender, por

[40] When divisibility is related to other cognitive structure such as those involving factorization and prime decomposition, we would say that divisibility comes to be *thematized* to form a higher object, our *schema*.

exemplo, que a ordem dos fatores presentes na decomposição de um número inteiro não implica em uma decomposição diferente, mas, pelo contrário, compreende que a decomposição de cada número inteiro é única. No exemplo da decomposição do número 28, escrever 2.2.7 é o mesmo que escrever 7.2.2 ou 2.7.2 .

Além disso, na concepção Processo, o indivíduo entende que as formas canônicas dos números inteiros apenas simplificam a estrutura multiplicativa que representa o número inteiro, isto é, na decomposição do número 40, por exemplo, os fatores 2.2.2.5 se agrupam em $2^3.5$ para simplificar a expressão, sem que o número 3, presente no expoente do número 2, faça parte da decomposição. Neste momento, o mecanismo de reversibilidade permite que o indivíduo consiga, sem qualquer tipo de dificuldade, passar da representação canônica para a forma composta do número.

Quando o número e sua representação decomposta em fatores primos são vistos como significando o mesmo valor numérico, diferenciando-se apenas como são apresentados, o indivíduo encapsulou o Teorema Fundamental da Aritmética como um objeto cognitivo, alcançando então a concepção Objeto sobre Teorema Fundamental da Aritmética. Alguém que possui a concepção Objeto pode realizar hipóteses e inferências sobre as propriedades resultantes do Teorema Fundamental da Aritmética.

Estas ações seriam a de verificar se um número é divisível por, divisor de, ou múltiplo de, sem ter a necessidade de observar o número na sua forma composta para tomar esta decisão. Por exemplo, ao ser questionado se o número $2^3.3^2$ é divisível por 3, não seria preciso voltar à forma composta 72 e realizar a divisão para decidir sobre a divisibilidade; bastaria perceber que, como o número 3 é um dos fatores da decomposição, então o número representado por aquela decomposição é divisível por 3.

Além disso, alguém com a concepção objeto sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, consegue agir em situações em que os números inteiros sejam apresentados na forma de variável. Um exemplo disso seria conseguir afirmar que o número inteiro a é divisor de $a^2.b$, independentemente de conhecer o valor das variáveis a e b.

Uma vez que o Teorema Fundamental da Aritmética se relaciona com outras estruturas cognitivas, como o contexto dos quadrados perfeitos, a concepção Objeto sobre o Teorema Fundamental da Aritmética se torna um nível mais elevado, tematiza-se, tornando-se em concepção Esquema.

3.7. O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Neste trabalho de doutoramento, tínhamos, inicialmente a intenção de investigar as concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética reveladas pelos professores participantes, observando apenas a teoria APOS. Entretanto, após o início do trabalho de coleta de dados e como indicação dos membros da banca de qualificação, percebemos que nosso trabalho foi além de apenas investigar concepções, traduzindo-se também em momentos de formação continuada para estes professores, que chamaremos que momentos de Intervenção.

Assim, entendemos ser importante trazer um marco teórico, o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK[41]), que respalde os momentos da análise dos dados em que os conhecimentos necessários para o professor ensinar sejam requeridos, além de ser necessário para nos auxiliar a alcançar um dos nossos objetivos: "compreender se, e como, o momento da entrevista pode influenciar na construção de conhecimentos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética do professor participante, entendendo que este pode ser considerado um momento de Intervenção". Ressaltamos, porém, que não é nossa intenção trazer uma discussão sobre a formação dos professores envolvidos no nosso estudo já que este não é o nosso objetivo; buscamos um embasamento científico para os possíveis tipos de conhecimento que possam ser revelados durante nossa análise.

A partir disso, já é sabido na comunidade acadêmica que uma das grandes contribuições dadas aos estudos sobre o conhecimento dos professores estão presentes em trabalhos de Lee Schulman. Eles ressaltam a importância de diferenciar o conhecimento do conteúdo para o ensino do conhecimento do conteúdo de outros profissionais. Shulman (1986) define, entre outros, um domínio especial denominado conhecimento pedagógico do conteúdo, que nas palavras do autor, "[…] vai além do conhecimento da matéria em si para a dimensão do conhecimento da matéria para o ensino. […] incorpora aspectos do conteúdo mais pertinentes à sua ensinabilidade"[42] (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

---

[41] *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge.*

[42] "[...] which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge for teaching. […] embodies the aspects of content most germane to its teachability".

Este fundamento inspirou Deborah Loewenberg Ball e seu grupo de pesquisa da Universidade de Michigan a buscarem um desenvolvimento teórico para a natureza do conhecimento necessário para se ensinar matemática, assim como suas relações com o ensino. Desta forma, desenvolvem um modelo denominado Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT[43]) que, de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008) pode ser entendido como "[…] o conhecimento matemático necessário para realizar as tarefas recorrentes do ensino de matemática aos alunos.[44]" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 399, tradução nossa). Desta forma, o MKT baseia-se no já difundido Conhecimento do Conteúdo de Shulman para distinguir dois grandes domínios: o Conhecimento do Conteúdo Matemático e o Conhecimento Didático do Conteúdo, que serão detalhados por nós em breve. A elaboração deste modelo se deu por meio "[…] da observação da prática docente e de questionários aplicados aos professores e pode se utilizar como um ponto de referência para a formação do professor. Apesar disso, […] é preciso uma maior precisão na natureza de cada domínio de conhecimento do professor necessário para sua prática.[45]"(ROJAS; FLORES; CARRILLO, 2015, p. 144, tradução nossa).

Observando o caráter especializado do modelo MKT em sua completude, liderado por José Carrillo, o grupo de pesquisa SIDM da Universidade de Huelva, na Espanha, passam a especificar alguns aspectos deste modelo e o redefinem, dando origem ao modelo de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, o MTSK. Este modelo centra-se na especificidade existente no conhecimento do professor de Matemática em relação ao conteúdo, considerando as crenças que os professores possuem sobre Matemática e seu ensino. Neste modelo, os autores seguem a mesma linha de Ponte (1994), definindo crenças como

> verdades pessoais, sustentadas individual ou coletivamente, derivadas da experiência ou do próprio pensamento, com certo componente afetivo e de valor, sobre as quais se podem ter diferentes graus de convicção, além de serem justificadas com base em argumentos que não seguem critérios que eles podem responder aos cânones de evidências, ou seja, eles não são falsificáveis. (MONTES *et al*., 2014, p. 10)

[43] *Mathematical Knowledge for Teaching*
[44] "[...] mathematical knowledge needed to perform the recurrent tasks of teaching mathematics to students".
[45] "de la observación de la práctica docente y de cuestionarios aplicados a los profesores, y puede emplearse como punto de referencia para la formación del profesor. No obstante, […] se requiere una mayor precisión en la naturaleza de cada dominio de conocimiento del profesor necesario para su práctica.".

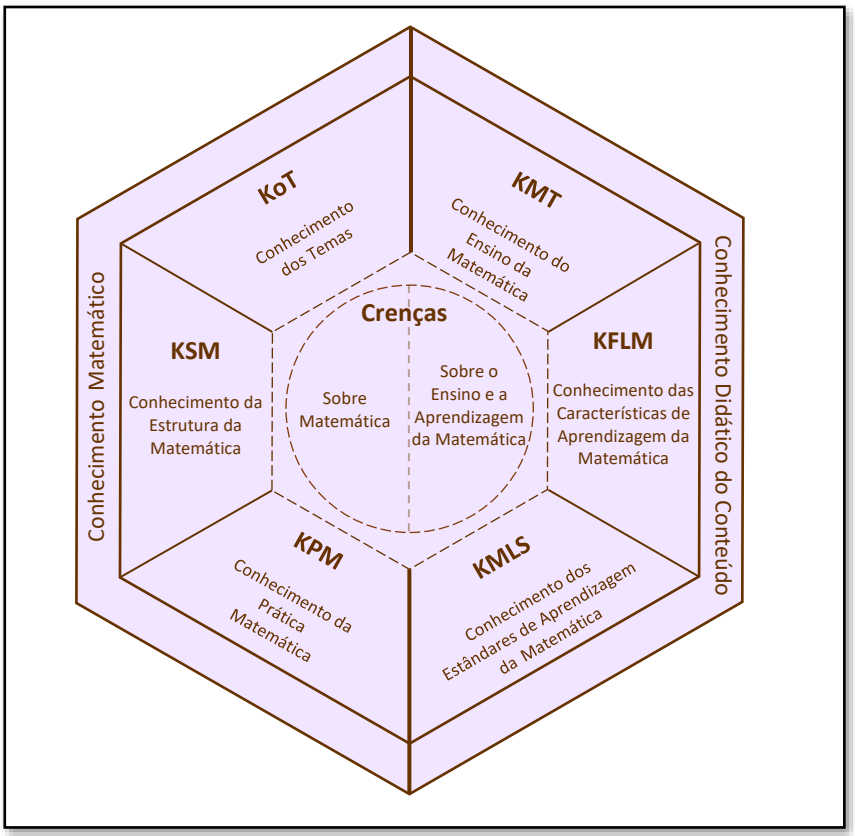
Este é um aspecto importante a ser observado, uma vez que a crença, de acordo com os propositores do modelo, compõe o conhecimento, assim como a concepção. Convém observarmos que não entendemos crenças e concepções como contendo o mesmo significado. As crenças vêm impregnadas de afetividade e emoções que não entendemos estarem presentes na definição que utilizaremos para concepção, já citada no capítulo tópico anterior, tendo em vista que nossa base teórica para tal é a APOS, teoria esta que tem seus fundamentos em aspectos exclusivamente cognitivos.

Ainda que a crença não seja o foco principal deste trabalho, entendemos ser importante trazer a definição supracitada para elucidar elementos que compõem este modelo. Além disso, acreditamos que a crença seja um aspecto que possivelmente aparecerá nas falas dos participantes de nossa pesquisa dada a sua natureza empírica.

No MTSK, assim como estabelecido por Schulman (1986, 1987), são definidos dois grandes domínios do conhecimento: o Conhecimento Matemático (MK)[46] e o Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK)[47]. O primeiro se atém ao conhecimento que o professor possui sobre a Matemática no contexto escolar, tomando-a como disciplina científica. Já o segundo diz sobre o conhecimento que o professor possui em relação a como os conteúdos matemáticos devem ser abordados em sala de aula, como objeto de ensino e de aprendizagem. Ambos os domínios possuem três subdomínios, como mostra a figura a seguir:

[46] *Mathematical Knowledge* (MK)
[47] *Pedagogical Content Knowledge* (PCK)

Figura 8 – O Conhecimento Especializado do Professor de Matemática



Fonte: Sosa, Flores-Medrano e Carrillo (2015, p. 175, tradução nossa)

Assim, no domínio Conhecimento Matemático, temos os subdomínios Conhecimento dos Temas (KoT), em que o professor conhece os conteúdos que ensina aos seus alunos; Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM), no qual o professor conhece as relações que se estabelecem entre conteúdos distintos, ou seja, a conexão entre temas matemáticos e Conhecimento da Prática Matemática (KPM), que destaca a importância do professor saber como explorar e gerar o conhecimento matemático, isto é, como se estabelece relações, correspondências, equivalências, como se argumenta e generaliza, vinculado à definição de uma demonstração.

Já para o domínio Conhecimento Didático do Conteúdo os subdomínios definem-se por Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT), no qual o professor conhece os recursos, materiais, formas de apresentar o conteúdo e os exemplos adequados para cada situação; Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM), que diz sobre o conhecimento das características inerentes ao conteúdo matemático, olhando para o conteúdo como objeto de aprendizagem e relacionando-o às caraterísticas de aprendizagem que derivam da interação do

professor com o conteúdo matemático; Conhecimento dos Estândares de Aprendizagem de Matemática (KMLS) que considera o conhecimento do professor em relação ao que se espera que um aluno saiba, qual o nível conceitual e em que momento isso deve ocorrer.

Os proponentes deste modelo utilizam, para cada subdomínio descrito acima, um sistema de categorias surgido após um trabalho minucioso de análise dos dados empíricos coletados durante a elaboração da teoria. Denominaremos e definiremos tais categorias a seguir, iniciando pelas categorias dos subdomínios vinculados ao Conhecimento Matemático.

Categorias do Conhecimento dos Temas

- *Fenomenologia*: considera tanto o conhecimento sobre os modelos relacionados a um tema, que pode ser considerado um fenômeno capaz de gerar conhecimento matemático na gênese do próprio conceito, quanto os usos e aplicações de um tema. Como exemplo, podemos citar o conhecimento do professor que conhece uma aplicação para a decomposição de números inteiros em fatores primos.
- *Propriedades e seus Fundamentos*: considera, assim como diz o nome, o conhecimento sobre as propriedades e fundamentos atribuídos a determinado tema ou procedimento. Exemplificando, trazemos o conhecimento do professor de que a divisão por zero não é possível já que a definição de multiplicação de um número n pelo oposto m só é possível quando $m \neq 0$.
- *Registros de Representação*[48]: considera o conhecimento do professor em lidar com diferentes formas de representação de um tema, assim como o vocabulário e a notação adequada à estas representações.
- *Definições*: considera o conhecimento das propriedades que definem um determinado objeto e os modos alternativos que o professor utiliza para defini-las. Um exemplo seria o definir, em $\mathbb{Z}$, número par como aquele que é múltiplo de dois.
- *Procedimentos*: considera o conhecimento de algoritmos convencionais e alternativos, as condições suficientes para realizar determinado procedimento, os fundamentos dos algoritmos e as características do objeto relacionado ao tema em questão.

[48] A nomenclatura é a mesma utilizada nos trabalhos de Raymond Duval.

Categorias do Conhecimento da Estrutura da Matemática

Conexões de Complexidade: considera o conhecimento no qual o professor relaciona o ensino de um conteúdo como potencializador para o ensino de um conteúdo no futuro.

- *Conexões de Simplificação*: considera o conhecimento em que o professor relaciona o ensino de um conteúdo pautado em um conteúdo que já foi ensinado.

- *Conexões de Conteúdos Transversais*: considera não apenas as "conexões de conteúdo mais simples ou mais complexo entre si, mas há uma qualidade comum nesses que os relaciona, e os modos de pensamento associados a esses temas contemplam essa característica comum"[49] (FLORES-MEDRANO *et al*., 2014, p. 78). Um exemplo seria os padrões de igualdade e similaridade que relacionam as propriedades de equivalência, como a comutativa, $a.b = b.a$, e a congruência e semelhança de figuras, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

- *Conexões Auxiliares*: considera, como o nome sugere, o conhecimento de conexões que façam com que um conteúdo auxilie nos procedimentos de outro, como os conhecimento das operações aritméticas fundamentais para compreensão dos procedimentos de uma equação.

Categorias do Conhecimento da Prática Matemática

- *Práticas ligadas à Matemática em geral*: considera o conhecimento do professor sobre como se desenvolve a Matemática, independentemente do conceito abordado, usado para trabalhar genericamente na Matemática, usado, por exemplo, no trabalho com provas e demonstrações de estruturas algébricas.

- *Práticas ligadas a uma Temática na Matemática*: considera o conhecimento das abordagens comuns a determinado tema, que geralmente são utilizadas para explicar ou definir um conceito, seja por memorização ou por entender que tal abordagem é a ideal para tal justificativa.

Descreveremos, agora, as categorias relacionadas aos subdomínios do Conhecimento Didático do Conteúdo.

Categorias do Conhecimento do Ensino da Matemática

[49] conexiones de contenidos más simples o más complejos entre sí, sino que hay uma cualidad común en estos que les relaciona, y los modos de pensamiento asociados a dichos temas contemplan esta característica común.

- *Teorias Pessoais ou Institucionalizadas de Ensino*: considera o conhecimento do professor de teorias de ensino específicas da Educação Matemática.
- *Recursos Materiais e Virtuais*: considera o conhecimento em relação ao uso de recursos materiais e virtuais, como livros, *softwares*, lousa digital, entre outros e seus benefícios ou dificuldades vinculados ao uso como apoio ao ensino da Matemática em geral.
- *Atividades, Tarefas, Exemplos e Ajudas*: considera o conhecimento do professor sobre recursos que apoiam o ensino, assim como a categoria anterior, porém mostram a intencionalidade docente do professor relacionado a um tema específico.

Categorias do Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática

- *Formas de Aprendizagem*: considera o conhecimento dos possíveis modos de apreensão associados à natureza do conteúdo matemático, incluindo o conhecimento das teorias ou estruturas pessoais ou institucionalizada sobre o desenvolvimento cognitivo dos alunos.
- *Forças e Dificuldades associadas à Aprendizagem*: Considera o conhecimento do professor sobre os erros, obstáculos e dificuldades relacionados à Matemática em geral e a temas específicos.
- *Formas de Interação dos Alunos com o Conteúdo Matemático*: considera o conhecimento vinculado aos processos e estratégias tidos como habituais dos alunos e o vocabulário normalmente usado para abordar determinado tema. Como exemplo, podemos citar o conhecimento de um professor sobre como tipicamente é o procedimento para se encontrar um múltiplo ou um divisor.
- *Concepção de Alunos sobre a Matemática*: considera o conhecimento associado às expectativas e interesses que os alunos têm em relação à Matemática, como as preconcepções que facilitam ou dificultam, associadas a áreas diferentes da Matemática.

Categorias do Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática

- *Conteúdos Matemáticos necessários para o Ensino*: considera o conhecimento do professor sobre os conteúdos que são requeridos para ensinar em determinado nível de ensino, adquirido tanto por meio de documentos que forneçam a orientação de

quais seriam estes conteúdos quanto por abstração das competências específicas que o aluno deva ter naquele momento escolar.

- *Conhecimento de Nível de Desenvolvimento Conceitual e Procedimental esperado*: considera o conhecimento do professor em relação ao que se espera que um aluno conheça e aprenda sobre um tópico em determinado momento escolar.

- *Sequenciamento de diversos Temas*: considera o conhecimento de como se dá o encadeamento dos tópicos a serem desenvolvidos, visando tanto potencialidades que podem ser utilizadas em temas futuros, como conhecimento e capacidades prévios que o aluno deve ter para enfrentar determinada tarefa. Por exemplo, o conhecimento do sequenciamento do trabalho da multiplicação, trabalhado em determinado ano, como “o número de vezes” e em um ano posterior como soma abreviada.

Enfim, este referencial teórico será empregado na análise dos dados quando identificarmos que algum dos conhecimentos especializados do professor foi revelado pelos participantes desta pesquisa. Desta maneira, é possível que nem todas as categorias sejam percebidas, já que este modelo teórico não é nossa referência principal.

Traremos nos próximos capítulos mais detalhamentos sobre como se desenvolveu nossa coleta de dados e análise do que encontramos indo a campo.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para esta investigação adotamos uma abordagem qualitativa, pois, partindo de um problema que despertou o interesse da pesquisadora, buscaremos elaborar aspectos da realidade que poderão servir como respostas ao problema proposto (LUDKE; ANDRÉ, 2013).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma pesquisa qualitativa possui cinco características. A primeira delas destaca que o ambiente natural é a fonte direta dos dados, sendo o investigador o instrumento principal responsável por coletar os dados e realizar sua análise; a segunda característica traz a pesquisa qualitativa como descritiva, tendo todos os dados na forma de palavras; como terceira característica, os autores reforçam que, neste tipo de pesquisa, a ênfase deve ser dada ao processo mais que simplesmente aos resultados.

Já a quarta característica traz que a análise dos dados tende a ser realizada se forma indutiva, por meio de abstrações construídas à medida que estes dados de agrupam e a última, reforça que na pesquisa qualitativa, o significado tem importância vital, buscando identificar as dinâmicas internas nas situações específicas de pesquisa que, por vezes, não são observadas exteriormente. Levando em consideração cada uma destas características em vista, que estão presentes especificamente nesta pesquisa, reiteramos a escolha por uma investigação qualitativa.

Desta forma, no que se segue, descreveremos os procedimentos metodológicos desta investigação, trazendo a caracterização dos participantes e como foram organizados os encontros realizados para a coleta de dados.

4.1. DESCRIÇÃO DOS PARTICIPANTES E PROCEDIMENTOS

Para localizar possíveis voluntários em participar da pesquisa, entramos em contato com escolas da rede pública paulista de ensino, na região da Grande São Paulo, buscando a permissão do responsável pela instituição para fazermos o convite de participação na pesquisa aos professores de Matemática atuantes no Ensino Fundamental II ou no Ensino Médio. Conseguimos a autorização de uma destas escolas e fizemos o convite a nove professores, tendo o aceite de apenas três docentes.

No momento em que estávamos nesta procura, tivemos que lidar com os contratempos causados pela pandemia da COVID-19, que gerou o fechamento de todas as escolas públicas por tempo indeterminado, impossibilitando-nos de contatar os professores por meio de suas escolas.

Assim, mudamos nossa forma de busca por voluntários, fazendo convites via grupos de professores da rede pública em redes sociais, além de solicitar o auxílio de colegas e amigos para que indicassem conhecidos ou companheiros de trabalho que se encaixassem no perfil procurado. Com esta maneira de agir, após diversos convites, conseguimos o aceite de outros três docentes para participação na pesquisa.

Contamos, então, com um total de seis participantes, sendo três professoras e três professores, todos licenciados em Matemática. No momento da coleta de dados, atuavam como docentes na rede pública paulista do Estado de São Paulo, com ao menos uma sala designada nos Ensinos Fundamental ou Médio ou na Educação de Jovens e Adultos. Não restringimos a escolha dos professores participantes àqueles que atuam em um ano ou um nível de ensino específico, por entendermos que os conhecimentos relativos ao Teorema Fundamental da Aritmética devem ser parte integrante da formação de todo professor de Matemática, independentemente do seu local de atuação.

Como precisamos mudar a forma da coleta de dados devido à pandemia, apresentaremos os dois momentos planejados, cada um deles sendo iniciado pela descrição do procedimento presencial, seguido pelo procedimento virtual.

No primeiro momento, quando o modo foi presencial, durante o horário de Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPC) ou o intervalo de trabalho, fomos ao encontro do(a) professor(a) para convidá-lo(a) a participar da pesquisa, iniciando com a apresentação da pesquisadora, seguida do objetivo geral do estudo sem citar explicitamente o tema Teorema Fundamental da Aritmética, dizendo apenas objetivamos investigar qual o conhecimento dos docentes atuantes na rede pública paulista em relação a assuntos relacionados com a Teoria dos Números[50].

Após estas ações e tendo a aceitação do docente em participar da pesquisa, entregamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)[51] para que o lesse e o assinasse, devolvendo uma cópia do documento para o participante, a fim de que

[50] Utilizamos “Teoria dos Números” ao invés de “Teoria Elementar dos Números” para evitar que o desconhecimento de algum termo impossibilitasse o docente de responder à questão.
[51] O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido está no Anexo I.

ele tenha em mãos todos os termos do documento. Salientamos que no documento já constava a autorização de gravação e filmagem da discussão para que a coleta de dados fosse contemplada na sua totalidade, além da garantia de sigilo em relação à identidade do(a) participante.

Com o objetivo de fazer uma breve caracterização do participante, pedimos para que, igualmente, respondesse o Formulário de Caracterização do(a) Participante[52], contendo sua trajetória acadêmica e profissional, explicitando em que faculdade ou universidade fez graduação e se tem alguma especialização, se e o que estudou sobre temas relacionados aos Números Inteiros nestes cursos, há quantos anos leciona na rede pública, especificamente no Fundamental II e se já trabalhou na rede particular. Incluímos, também, questões sobre o que os(as) docentes pensam sobre a Teoria dos Números.

Questionando sobre a formação acadêmica e possível especialização, esperamos saber de cada participante se em sua formação inicial ou em estudos de pós-graduação, teve a oportunidade de estudar, em algum momento, disciplinas que tinham como foco a Teoria Elementar dos Números. É possível que, ainda que tenham feito um curso de Licenciatura em Matemática, o termo “Teoria Elementar dos Números” pode não ser de conhecimento de todos, pois, como mostram os estudos de Resende (2007), a disciplina que deveria trazer um enfoque nos estudos dos números inteiros, enfatizando o ensino na Educação Básica, denominada pela autora como “Teoria Elementar dos Números”, pode estar com denominações diversas, ou ainda, pode não ser uma disciplina específica e estar integrada na ementa de outras disciplinas.

Ao pedir para informar o tempo que lecionam na rede pública, esperamos estabelecer se a experiência em sala de aula como nível de ensino em que mais se exploram temas sobre a Teoria dos Números pode influenciar na sua compreensão e estratégias de resolução das questões. Isto pode ser relevante, já que em estudos de Campbell e Zazkis (2002), Zazkis e Gadowsky (2001) e Zazkis (2011) sobre assuntos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, nos quais os participantes eram futuros professores de Matemática, muitas dificuldades foram encontradas ao resolverem questões relacionadas à Teoria dos Números. É possível que docentes já imersos no cotidiano escolar, tendo oportunidade de ter contato com livros didáticos,

[52] O Formulário de Caracterização do Participante está em Anexo II.

orientações pedagógicas, formações continuadas, relacionamento com outros professores de Matemática, entre outros, possam ter mais sucesso na resolução das questões propostas.

Sobre o questionar se os participantes já trabalharam na rede particular, buscamos perceber como se deu a sua trajetória profissional e possíveis outras vivências possa ter experienciado.

Os questionamentos a respeito de aspectos da Teoria dos números objetivam entender como os professores participantes explicitam sua compreensão sobre a importância do ensino de assuntos relacionados à esta temática no Ensino Básico e quais seriam estes conteúdos.

Após esta fase inicial de apresentação e entrega de documentos protocolares, oferecemos o Instrumento de coleta de dados, contendo seis questões selecionadas, que serão descritas e analisadas, via teoria APOS, na próxima seção. Pedimos para que registrassem cada uma das soluções, à caneta, deixando claro todo e qualquer pensamento e cálculo realizados. Salientamos ao participante que é permitido discutir as questões com outras pessoas para um melhor entendimento do que estava sendo proposto nas questões, inclusive consultando outros materiais, se necessário. Estipulamos um prazo máximo de uma semana para que o professor(a) resolvesse as seis questões e devolvesse os protocolos com suas respostas, via aplicativo de mensagens, para que fossem analisados por nós, antes do segundo momento.

Nas coletas de dados virtuais, fizemos a sondagem sobre o possível aceite de participação do(a) professor(a), enviando uma mensagem de texto ou uma mensagem de voz ao docente, via aplicativo, e informando o objetivo da pesquisa, os procedimentos que seriam utilizados para a coleta de dados, assim como o possível tempo de duração da pesquisa como um todo. Isto se fez necessário, uma vez que muitos, ao serem convidados, justificavam a não participação devido à falta de tempo pela sobrecarga do trabalho causado pela pandemia da COVID-19.

Após isso, enviamos os arquivos contendo o TCLE, o Formulário de Caracterização do participante e o Instrumento de coleta de dados, via e-mail ou via aplicativo de mensagens, solicitando que todos os documentos fossem respondidos, assinados e devolvidos, para que fossem analisados antes do segundo momento da coleta de dados.

No segundo momento, enquanto modo presencial, realizamos uma entrevista semiestruturada, que segundo Laville e Dionne (1999) é uma “série de perguntas

abertas feitas verbalmente em uma ordem prevista, mas na qual o entrevistador pode acrescentar perguntas de esclarecimento" (LAVILLE; DIONNE, 1999, p.188). A ordem que seguimos foi aquela apresentada pelas questões do Instrumento de Coleta de Dados respondida pelos participantes.

A entrevista semiestruturada também foi considerada como um momento importante de possível formação docente e, como já anunciado no Capítulo 3, denominaremos de momento de Intervenção, ou simplesmente, Intervenção. Esta Intervenção vem no sentido de, sempre que entendermos ser necessário, poder exercer alguma influência no pensamento revelado no registro de seu protocolo, em uma tentativa de possibilitar um ganho cognitivo entre as Concepções definidas pela teoria APOS, após reflexão sobre as respostas dadas. Desta forma, entendemos que poderemos possibilitar e fortalecer a abstração reflexiva sobre o Objeto, no nosso caso, o Teorema Fundamental da Aritmética, já que foi no início da entrevista que revelamos, de fato, que este era o tema de enfoque deste estudo.

Ainda que esta Intervenção não possa ser considerada efetivamente uma formação continuada, já que dependeria de haver um processo constante e permanente de aperfeiçoamento necessários à atividade docente, entendemos que a discussão realizada com o participante possui uma dimensão formativa importante que pode permitir que conhecimentos não revelados no documento escrito possam emergir, trazendo um ganho cognitivo e um momento de aprendizagem ao professor sobre o tema pesquisado.

Assim, reencontramos o(a) professor(a) após uma semana, em local definido conjuntamente com a pesquisadora e com o(a) participante e iniciamos a entrevista explicando explicitamente sobre o tema de enfoque da pesquisa, o Teorema Fundamental da Aritmética. Para tanto, apresentamos um vídeo do *Khan Academy* Brasil[53], com o objetivo de mostrar um pouco da história da construção do Teorema e sua definição, com uma linguagem acessível e de simples entendimento, e para lembrar ao participante dos aspectos que o envolvem.

Terminado este momento inicial, começamos a retomada das questões já respondidas e enviadas previamente pelo participante à pesquisadora, com o objetivo de indicar possíveis mudanças de pensamento em relação ao registrado no protocolo de respostas, tendo em vista que, neste momento, o participante já tem o

[53] O vídeo está disponível em https://www.youtube.com/watch?v=CTuofyXZLqk.

conhecimento do tema envolvido na pesquisa e do conceito do Teorema Fundamental da Aritmética, apresentado no vídeo. Desta maneira, observando as respostas já registradas, pedimos que explicasse o procedimento realizado em cada item, comentando o que poderia ser feito de forma diferente e, em alguns casos, se algo que foi discutido durante a entrevista pode ser usado em sala de aula.

Para finalizar, entregamos ao participante um material, o documento denominado Instrumento de Coleta de Dados – Possíveis Respostas[54], contendo as possibilidades de resolução para cada uma das questões, solucionadas com base em elementos vinculados ao Teorema Fundamental da Aritmética, descritas no próximo tópico deste capítulo. Solicitamos que o lesse e fizesse questionamentos sobre o seu conteúdo, caso fosse necessário para o seu entendimento, concluindo, então, os momentos de coleta de dados. Entretanto, como estas foram entrevistas também com intuito de Intervenção, em algumas delas, trouxemos estas resoluções para a discussão durante a entrevista para evidenciar a utilização do Teorema nas questões e proporcionar um melhor entendimento do entrevistado.

Para aquelas entrevistas que necessitaram ser realizadas virtualmente, devido à pandemia da COVID-19, os procedimentos para as entrevistas permaneceram, no geral, da mesma maneira como as realizadas presencialmente. Os diferenciais foram que utilizamos um aplicativo que nos permitisse conversar via vídeo, escolhido em comum acordo com o participante. Apenas em uma entrevista específica, houve somente a utilização de um aplicativo de troca de mensagens, pela impossibilidade do participante em conectar-se via vídeo. As especificidades presentes em cada coleta de dados, tanto presencial quanto virtual, serão detalhadamente descritas no Capítulo 5 desta tese.

A seguir, descrevemos o Instrumento de Coleta de Dados, trazendo a análise de cada uma das questões presentes no documento, tendo como base as Concepções definidas pela teoria APOS.

4.2. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

A proposta de aplicação das seis questões que seguem aos docentes visa identificar elementos que possam responder nossa questão de pesquisa: *De que maneira professores de Matemática, atuantes no Ensino Básico da rede pública do*

[54] O documento Instrumento de Coleta de Dados - Possíveis Respostas está no Anexo III.

Estado de São Paulo concebem o Teorema Fundamental da Aritmética e os conhecimentos a ele vinculados, sob o ponto de vista da teoria APOS?

As questões escolhidas foram utilizadas em pesquisas que objetivaram investigar as concepções de estudantes e futuros professores de Matemática. Portanto, entendemos serem questões ideais para nossa investigação. Além disso, algumas delas estavam presentes em Clubes de Matemática das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBMEP)[55] e provas da Olimpíada Brasileira de Matemática, o que entendemos, da mesma forma, serem úteis para nossa pesquisa.

Apresentamos, em cada questão, o seu objetivo, uma possível resposta e análise de cada uma das situações, segundo a teoria APOS, nas quais identificaremos como se explicitariam as Concepções Ação, Processo, Objeto e Esquema sobre o Teorema Fundamental da Aritmética.

Questão 1. (BROWN; THOMAS; TOLIAS, 2002, p. 49, tradução nossa, adaptada)[56] Considere a lista de números a seguir: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412. Como você explicaria a um aluno quais dos números listados:

a) são divisores de 24?

b) são múltiplos de 24?

c) são divisíveis por 24?

d) pelos quais 24 é divisível?

Objetivo: Identificar o conhecimento dos participantes sobre os conceitos de divisor e de múltiplo.

Possível resolução: Para resolução de todos os itens, vamos considerar a decomposição em fatores primos do número $24 = 2^3.3$.

a) Para saber os números da lista que são divisores de 24, partimos da definição de divisor, que os divisores de um número devem ser menores ou iguais a ele. Assim, os

[55] Clubes de Matemática da OBMEP é um projeto concebido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) que disponibiliza problemas interessantes de Matemática, oferecendo ambientes interativos para desenvolver, pesquisar e criar atividades matemáticas de forma ampla e divertida. Os alunos do ensino básico vinculados a eles podem participar de atividades como gincanas, discussão de filmes, resolução de problemas, jogos e atividades que utilizam programas de geometria dinâmica. Mais informações em http://clubes.obmep.org.br/blog/.

[56] Consider the following list of numbers: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412. Explique cada caso. (a) The numbers in the list that are divisors of 24 are; (b) The numbers in the list that are multiples of 24 are; (c) The numbers in the list that are divisible by 24 are; (d) The numbers in the list that 24 is divisible by are.

possíveis divisores de 24 seriam apenas 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18 e 24. O número 1 é divisor por ser o elemento neutro da operação multiplicação; os números 3, 6 = 2.3, 8 = 2^3 e 12 = 2^2.3 também são divisores, pois tem os fatores primos de suas decomposições inclusos nos fatores presentes na fatoração de 24; já os números 7, 15 = 3.5 e 18 = 2.3^2 não tem fatores coincidindo com aquele presentes em 24. Assim, os divisores de 24 presentes na lista são: 1, 3, 6, 8, 12 e 24.

b) Pela definição de múltiplo, os possíveis números que podem ser múltiplos de 24 seriam 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401e 2412, por serem maiores ou iguais a 24. Os números 48 = 2^4.3, 96 = 2^5.3 e 2400 = 2^5.3.5^2 incluem todos os fatores do número 24; o mesmo não ocorre com os números 39 = 3.13, 42 = 2.21, 69 = 3.23, 2401 = 7^4 e 2412 = 2^2.3^2.67. Desta forma, os múltiplos de 24 são 24, 48, 96 e 2400.

c) Os números divisíveis por 24 são os seus múltiplos, ou seja, 24, 48, 96 e 2400.

d) Os números pelos quais 24 é divisível são seus divisores, isto é, 1, 3, 6, 8, 12 e 24.

Concepção Ação: Espera-se que um indivíduo com a concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, busque suas respostas quase que exclusivamente por meio de procedimentos práticos da divisão, sem nenhum critério inicial para decidir quais seriam os números candidatos a fazer parte da resposta correta. O uso de multiplicações e aproximações, da mesma forma, podem ser observadas. A decomposição dos números em fatores primos raramente será utilizada.

Concepção Processo: Um indivíduo com a concepção Processo sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, utiliza constantemente critérios de divisibilidade para decidir sobre o número 24 ser divisível ou não pelos números presentes na lista, tendo o entendimento que os divisores devem ser menores ou iguais a 24 e seus múltiplos, maiores ou iguais a 24. Ainda que use um dispositivo prático da divisão para encontrar resultados das divisões, tende a fazê-las mentalmente sem, necessariamente, utilizar a decomposição em fatores primos para decidir sobre divisores ou múltiplos.

Concepção Objeto: Um indivíduo com a concepção Objeto sobre o Teorema Fundamental da Aritmética possui habilidades mais apuradas no que se refere aos critérios de divisibilidade, ao uso de um dispositivo para decompor um número inteiro em fatores e da própria divisão. Assim, para decidir sobre ser divisor não necessita,

de fato, realizar a decomposição completa em fatores, já que este não é o foco da questão. Bastaria, então, perceber se o próprio número 24 está presente em uma decomposição dos números da lista que poderiam ser múltiplos e, no caso dos divisores, perceber se os candidatos a serem divisores estão presentes em alguma decomposição de 24.

Concepção Esquema: Não identificamos a possibilidade de haver uma tematização para que surja a Concepção Esquema. Lembramos que o mecanismo da tematização pode ocorrer apenas quando se está em um outro contexto matemático em que se faz necessário a utilização do Teorema Fundamental da Aritmética para sua resolução.

Questão 2. (ZAZKIS; CAMPBELL,1996, p. 209, tradução nossa, adaptada)[57] Como você ajudaria um aluno a decidir se o número k = 16199 = 97.167 (onde 97 e 167 são números primos) é divisível por 3, 5, 11, 13, e 17.

Objetivo: Identificar como os participantes compreendem a divisibilidade de um número inteiro, sendo informada sua decomposição em fatores primos.

Possível resolução: A resolução imediata da questão seria perceber que ambos os números presentes na decomposição de 16199 são primos, não sendo possível que algum número da lista possa ser seu divisor.

Concepção Ação: Com a concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, o indivíduo pode resolver o produto apresentado para verificar seu resultado, sem entender que tal produto representa sua decomposição única. É provável que execute a divisão do número 16199 por cada um dos números indicados na lista para verificar sua divisibilidade.

Concepção Processo: Na concepção Processo do Teorema Fundamental da Aritmética, o indivíduo utiliza os seus conhecimentos sobre divisibilidade para verificar a divisibilidade do número 16199 pelos números da lista, sem que a realização de procedimentos de divisões por este número seja necessária para sua decisão.

[57] Consider the number K = 16199 = 97 X 167 (where 97 and 167 are given as prime numbers) and decide whether K may be divisible by 3, 5, 11, 13, and 17.

Concepção Objeto: Nesta concepção, o indivíduo que a possui o indivíduo percebe que, ao ser informado que os números 97 e 167 presentes na decomposição são números primos, o número 16199 seria divisível apenas por estes dois números, por ele mesmo e por 1, sendo esta, 97.167, sua decomposição única.

Concepção Esquema: Da mesma maneira, não identificamos a possibilidade de haver uma tematização para que surja a Concepção Esquema, pois a questão está no contexto do Teorema Fundamental da Aritmética.

Questão 3. (BROWN; THOMAS; TOLIAS, 2002, p. 50, tradução nossa)[58] Considere o número $M = 3^3.5^2.7$.

a) *M* é divisível por 7? Explique.

b) *M* divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 63? Por 11? Por 15? Explique.

c) $3^2. 5.7^3$ é um múltiplo de *M*? Explique.

d) $3^4.5^5.7^3.13^{18}$ é um múltiplo de *M*? Explique.

Objetivo: Analisar se os participantes entendem a forma canônica de um número inteiro como forma de representação suficiente para a decisão sobre a divisibilidade ou multiplicidade de um número inteiro.

Possível resolução: a) Como o número 7 está presente na decomposição de *M*, então é divisível.

b) Os números 5, $9 = 3^2$, $63 = 3^2.7$ e $15 = 3.5$ tem os seus fatores inclusos na decomposição de *M* e, portanto, *M* é divisível por eles. O mesmo não ocorre com os números 2 e 11 pelos quais *M* não é divisível.

c) Para verificar se o número $3^2.5.7^3$ é múltiplo de *M*, os fatores de *M* devem estar todos inclusos na decomposição do número proposto. Mas não é isso que ocorre, pois *M* tem os fatores 3^3 e 5^2 enquanto o número proposto tem os fatores 3^2 e 5. Portanto, o número não é múltiplo de *M*.

d) Neste caso $3^4.5^5.7^3.13^{18}$ é múltiplo de *M*, pois os fatores de *M* estão todos inclusos na decomposição em fatores primos do número proposto.

[58] Consider the number M = 33. 5^2.7. (a) Is M divisible by 7? Explain. (b) Is M divisible by 5? by 2? by 9? by 63? by 11? by 15? Explain. (c) Is $3^2. 5.7^3$ a multiple of M? Explain. (d) Is 34.55.73.1318 a multiple of M? Explain.

Concepção Ação: Com a concepção Ação, espera-se que o indivíduo tente executar o produto que resultará no número composto que representa *M*, assim como os números fatorados dos itens *c* e *d*. A partir disso, utilizaria um dispositivo prático de divisão para saber sobre a divisibilidade e a multiplicidade. É possível que, enquanto realiza as multiplicações, o indivíduo não perceba que os expoentes presentes na forma canônica dos números não fazem parte do produto e os inclua como fator, utilizando-os durante a multiplicação.

Concepção Processo: Um indivíduo com a concepção Processo sobre o Teorema Fundamental da Aritmética entende que a representação na forma canônica indica um número composto, sem necessariamente ter que resolver as multiplicações indicada para saber disso. Porém, pode não conseguir responder sobre sua divisibilidade ou multiplicidade apenas com esta representação. Como tem domínio dos critérios de divisibilidade, é possível que tenha que efetuar algumas divisões e multiplicações dos fatores indicados para responder cada um dos itens.

Concepção Objeto: Para um indivíduo com a concepção Objeto sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, a solução para os dois primeiros itens seria verificar se os números indicados nos itens têm seus fatores inclusos nos fatores do número *M*. Para os dois últimos itens, verificaria se o número *M* teria seus fatores inclusos nos fatores dos números indicados nos itens.

Concepção Esquema: Assim como nas questões anteriores, não percebemos a possibilidade de haver uma tematização para que surja a Concepção Esquema, pois a questão continua no contexto do Teorema Fundamental da Aritmética.

Questão 4. (Olimpíada Brasileira de Matemática, 2010 – adaptada) Dentre os números 42, 45, 52, 85 e 105 qual se apresenta como um divisor de $3^5.4^4.5^3$?

Objetivo: Analisar se os participantes utilizam a transformação na forma canônica de números inteiros para a decisão sobre a divisibilidade por um número inteiro dado na sua forma decomposta em fatores primos.

Possível resolução: Como se quer saber o divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$, deve-se verificar se os fatores dos números mencionados estão presentes no número inicial. Assim, como

$42 = 2^2.3.7$, $45 = 3^2.5$, $52 = 2^2.13$, $85 = 5.17$ e $105 = 3.5.7$, pode-se afirmar que o número 45 é o divisor procurado.

Concepção Ação: O indivíduo com esta concepção resolveria o produto apresentado no enunciado e, após encontrar seu resultado, dividi-lo-ia por cada um dos números indicados para verificar qual deles possui resto zero no algoritmo da divisão.

Concepção Processo: Com a concepção Processo, o indivíduo que a possui pode realizar o produto apresentado, porém utiliza os critérios de divisibilidade para decidir se os números indicados são divisores.

Concepção Objeto: O indivíduo com a concepção Objeto sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, ao invés de resolver o produto, que resultaria num número relativamente "grande", optaria por decompor em fatores primos os números candidatos a serem divisores e verificaria quais deles tem seus fatores todos inclusos nos fatores da decomposição do número apresentado.

Concepção Esquema: Não percebemos a possibilidade de haver uma tematização para que surja a Concepção Esquema, pois a questão continua no contexto do Teorema Fundamental da Aritmética.

Questão 5. (Clubes de Matemática da OBMEP, 2019) Responda as questões abaixo, justificando:
a) O número A é par. É verdade que o número $2A$ tem que ser divisível por 4?
b) O número $21A$ é divisível por 6. É verdade que A tem que ser divisível por 6?

Objetivo: Entender como os participantes lidam com situações que podem ser solucionadas pelo Teorema Fundamental da Aritmética em que são apresentados números inteiros na forma de variáveis.

Possível resolução: a) Como A é par, então podemos escrevê-lo como $A = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos que $2A = 2.2k = 4k$, isto é, $2A$ deve, obrigatoriamente, ser divisível por 4, ou seja, k é divisor de $2A$, já que existe um k de tal forma que $2A = 4k$

b) Considerando que $21A$ é divisível por 6, podemos escrever que $7.3.A$ é divisível por 6. Para que um número inteiro seja divisível por 6, em sua representação em fatores primos devem estar presentes, não exclusivamente, os algarismos 2 e 3. Assim, se tomarmos $A = 2$, teremos cumprida a hipótese inicial de que $21A$ é divisível

por 6, porém $A = 2$ não é divisível por 6. Logo, não é verdade que A deve ser divisível por 6.

Concepção Ação: Um indivíduo com a concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética não percebe a presença do Teorema Fundamental no enunciado e realizaria a substituição das variáveis por números inteiros para, em seguida, executar um procedimento de divisão para conseguir decidir sobre a situação de divisibilidade. É possível que as hipóteses de ambos os itens sejam ignoradas e não sejam levadas em contas as suas características.

Concepção Processo: Para compreender o enunciado, é possível que um indivíduo com esta concepção, tente substituir alguns números inteiros, conforme são caracterizados no enunciado e, por ter domínio da Divisibilidade, no item a, perceberia prontamente a divisibilidade por 4 a ser verificada; já no item b, o procedimento seria o mesmo, entretanto não estaria utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética em nenhum dos seus procedimentos.

Concepção Objeto: Um indivíduo possuidor da concepção Objeto do Teorema Fundamental da Aritmética perceberia rapidamente as decomposições presentes nos enunciados e utilizaria as características dos números destas representações como justificativa para verificar as hipóteses e justificar suas resoluções. Para este indivíduo, não é necessário saber os valores exatos que A pode assumir e, sim, como eles se relacionam com a hipótese e com a divisibilidade dos números a serem investigados.

Concepção Esquema: Nesta questão, como continua no contexto do Teorema Fundamental da Aritmética não há possibilidade de haver uma tematização para que surja a Concepção Esquema.

Questão 6. (ZAZKIS; CAMPBELL,1996, p. 209, tradução nossa, adaptada)[59] Veja a lista de 10 números sendo eles 8^2, 17^2, 17^3, 234^3, 234^6, $5^2.17^2$, $5^3.7^2$, $5^6.17^2$, p^3 (onde p é primo), C^3 (onde C é composto) e decida quais dos números desta lista são quadrados perfeitos.

[59] Look at the list of 15(sic) numbers, such as 8^2, 17^2, 17^3, 234^3, 234^6, 5^2 X 17^2, 5^3 X 7^2, 5^6 X 17^2, p^3 where p is prime, C^3 where C is composite, and decide which numbers on the list are, or could be, perfect squares.

Objetivo: Entender como os participantes lidam com situações que estão fora do contexto do Teorema Fundamental da Aritmética, mas que o tem como uma ferramenta que auxiliaria na resolução do problema.

Possível resolução: Para que um número seja considerado um quadrado perfeito é necessário que em sua representação canônica, todos os fatores sejam pares para que seja possível escrevê-lo na forma a^2, sendo a um número natural. Desta forma, os números $8^2 = (2^3)^2$, 17^2, $234^6 = 2^6.3^6.39^6 = (2^3.3^3.39^3)^2$, $5^2.17^2 = (5.17)^2$ e $5^6.17^2 = (5^3.17)^2$ são quadrados perfeitos. O mesmo não ocorre com os números 17^3, $234^3 = 2^3.3^3.39^3$ e $5^3.7^2$, que não podem ser escritos na forma a^2 e, portanto, não são quadrados perfeitos. Já em relação ao número p^3, como p é primo, não há possibilidade de decompor p para se obter pares de fatores que geraria um expoente par, então p^3 não é um quadrado perfeito. Sobre o número C^3, pelo fato de C ser composto, há a possibilidade de que seja um quadrado perfeito, caso sua decomposição em primos gere pares de fatores, em todos os seus representantes, C^3 será um quadrado perfeito; caso, algum fator esteja representado em número ímpar, C^3 não será um quadrado perfeito.

Concepção Ação: Um indivíduo com esta concepção apresentaria dificuldades em entender o contexto do problema, uma vez que ele não se limita à utilização dos conceitos do Teorema Fundamental da Aritmética. É possível que tente realizar cálculos com alguns números apresentados, sem ter muito sucesso na sua resolução.

Concepção Processo: Este indivíduo perceberia que as formas canônicas apresentadas representam números compostos e tentariam fazer alguma relação com esta representação e com o tema Números Quadrados Perfeitos. Pode, no entanto, apresentar dificuldades ao lidar com a representação canônica possuindo bases com variáveis.

Concepção Objeto: Ainda que um indivíduo possua a concepção Objeto sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, seu desempenho nesta questão dependerá de seu domínio do outro tema envolvido, o Quadrado Perfeito. Desta forma, conseguiria fazer alterações na representação de cada um dos números listado, os reescrevendo de forma a encontrar quadrados perfeitos. No caso de ter um conhecimento considerável sobre Quadrados Perfeitos, a discussão sobre os números p^3 e C^3 serem ou não quadrados perfeitos poderá ser realizada com algum sucesso.

Concepção Esquema: O indivíduo que possui a Concepção Esquema sobre o Teorema Fundamental da Aritmética o tematiza imediatamente com o Quadrado Perfeito e é hábil em resolver a questão, incluindo a discussão sobre os parâmetros em que o número C^3 é ou não um quadrado perfeito.

Salientamos que a análise descrita será utilizada como guia para a análise dos dados de pesquisa apresentados no próximo capítulo. Entretanto, é possível que alguns procedimentos, raciocínios e compreensões possam não estar presentes na análise das questões já realizadas, pois a Decomposição Genética, assim como outrora fora observado na descrição da teoria APOS, não é estática e pode possuir alterações e adaptações que melhor descreveriam determinada concepção.

Desta forma, traremos, no próximo capítulo, a descrição e a análise detalhadas de cada um dos(as) participantes da pesquisa.

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentaremos a descrição e a análise das seis entrevistas realizadas com os(as) docentes participantes. Nas descrições, apresentaremos os protocolos com as respostas de cada questão e a transcrição de alguns trechos das entrevistas realizadas. A análise será baseada no Teorema Fundamental da Aritmética e em seus conceitos relacionados, no modelo teórico MTSK e nas concepções inerentes à teoria APOS.

5.1. Entrevista com a professora Alice[60]

Para o início da coleta dos dados, dirigimo-nos até a escola em que Alice atua e, durante o intervalo de seu horário de trabalho, explicamos o objetivo principal, o tema da pesquisa e como se dariam os momentos de coleta de dados dos quais participaria. Foram-lhe entregues o TCLE, o Formulário de Caracterização do(a) Participante e o Instrumento para a Coleta dos Dados contendo as seis questões que já apresentamos anteriormente. Solicitamos a Alice que assinasse o TCLE, respondesse o Formulário de Caracterização e as questões da Coleta de Dados e que nos enviasse fotos com suas respostas para que fossem analisadas previamente ao próximo encontro, no qual realizaríamos uma pequena Intervenção e esclarecimentos sobre sua resolução. Alice enviou os arquivos na noite anterior ao encontro.

Desta forma, segundo seu preenchimento do Formulário de Caracterização, a professora Alice, de 42 anos, atua na rede pública paulista como docente há 15 anos, sendo 7 destes dedicados ao Ensino Fundamental II. Concomitantemente a este período, trabalha na rede privada há 17 anos. Concluiu sua graduação em Licenciatura em Matemática em 2002, no Centro Universitário Fundação Santo André, possuindo uma especialização em Jogos Matemáticos. Sobre a Teoria dos Números, entende ser algo fundamental e os temas estudados são raiz quadrada, potência, teorema de Pitágoras, números primos, ímpares e perfeitos.

Após termos analisado previamente as respostas presentes no Instrumento para a Coleta de Dados preenchido por Alice, sentimos que muitas questões deveriam ser esclarecidas, por possuírem justificativas incoerentes ou incompletas e outras, de fato, respondidas e justificadas, uma vez que em algumas delas havia apenas o

[60] Nome fictício que será utilizado durante toda a pesquisa para descrição deste sujeito de pesquisa.

registro da resposta final, sem nenhuma menção do que foi pensado para chegar em tal conclusão. Assim, nos deslocamos até à biblioteca da escola, antes do início de seu horário de trabalho, comunicando à professora que a entrevista seria gravada.

Iniciamos a entrevista de Intervenção apresentando sobre o que o GPEA tem pesquisado sobre a Teoria dos Números, esclarecendo que o grupo entende a Aritmética e a Álgebra como dois ramos que se complementam e não se excluem.

Alice comentou que nunca tinha pensado na concepção de Teoria dos Números e, ao observar os objetivos presentes no TCLE e as questões propostas, questionou-se sobre os números serem tão importantes ao ponto de ter uma Teoria que os explica, uma vez que sempre explicara aos seus alunos de uma forma natural, sem se preocupar com a existência desta Teoria para explicar todos aqueles procedimentos. Preocupamo-nos com este comentário, pois entendemos, assim como Resende (2007), que assuntos pertinentes à Teoria dos Números são conhecimentos fundamentais para o professor que atua no Ensino Básico. Isto pode indicar que a professora domina apenas os procedimentos utilizados na resolução de questões e não as propriedades, características, consequências, implicações, formalidades, entre outros aspectos existentes somente quando se estuda teoricamente um tema ou que talvez ela nunca tenha estudado a Teoria Elementar dos Números em sua trajetória como estudante.

Comentamos que a Teoria dos Números é bastante ampla e, após termos contato com os conceitos contemplados por ela, escolhemos o tema Divisibilidade para os estudos no curso de mestrado. A entrevistada afirma: “Eu sempre pensei na Divisibilidade porque os alunos entendem melhor e eu também...”. Diante disso, entendemos que, para a entrevistada, a Teoria dos Números corresponde apenas ao tema Divisibilidade e isto é o que ela sabe, mostrando não ter uma visão mais ampla do que seria a Teoria dos Números.

Acrescentamos que, em nossos estudos no GPEA, compreendemos que a Teoria Elementar dos Números está incluída na Teoria dos Números, contendo assuntos que normalmente são explorados com maior profundidade no Ensino Fundamental II, sendo eles a evolução, história, propriedades e operações dos Números Inteiros, a Divisibilidade, com os múltiplos, divisores, números primos e critérios de divisibilidade, o Máximo Divisor Comum, o Mínimo Divisor Comum, o Teorema Fundamental da Aritmética, entre outros. Quando citamos os critérios de

divisibilidade como um dos tópicos que fazem parte da Teoria Elementar dos Números, Alice acrescentou que os pares e os ímpares também fariam parte.

Continuamos dizendo que abordar todos os temas da Teoria Elementar dos Números seria impossível devido ao tempo de duração do curso de Doutorado, sendo o Teorema Fundamental da Aritmética o tema escolhido por nós para ser aprofundado nesta pesquisa. Explicamos que outras pesquisas já têm sido realizadas neste tema buscando investigar o entendimento de alunos e professores em formação e nesta pesquisa, os indivíduos pesquisados seriam professores atuantes. Sobre isso, a entrevistada comenta: “E se o professor não entende, como é que ele vai ensinar?” Esta afirmação nos indica uma aproximação com a base de conhecimento de um professor para o ensino, descritas por Shulman (1986) e corroboradas por Sosa, Flores-Medrado e Carrillo (2015) no modelo MSTK. Dentre os conhecimentos presentes no desenvolvimento cognitivo do professor categorizados pelos pesquisadores, o conhecimento didático do conteúdo busca compreensões acerca da estrutura da disciplina e a organização cognitiva da matéria objeto de estudo e compreende o domínio dos aspectos atitudinais, conceituais, procedimentais, representacionais e validativos do conteúdo. Assim, entendemos que, para Alice, o professor só deve ensinar aquilo que conhece e domina.

Ao afirmarmos que ainda são necessárias pesquisas relacionadas à concepção sobre o Teorema Fundamental do Aritmética de professores de formação inicial, a entrevistada comentou o seguinte: “Então, a gente tem que chegar nisso porque, principalmente, eu acredito que na minha formação eu não aprendi nada... eu não aprendi nada... O que você aprende na sua formação? Você não aprende a ser professor”. Com esta afirmação, percebemos que a entrevistada exagerou ao dizer que não aprendeu nada, mas é possível que esteja se referindo a conceitos da Teoria Elementar dos Números. Ainda assim, fica evidente que critica duramente sua própria formação.

E continua:

> O que eu estudei na faculdade? Algo que eu nunca tinha visto antes na Matemática, obviamente. Tinham poucas aulas de Complementos da Matemática […] e ali, as coisas são jogadas como se elas não se ligassem umas com as outras, elas caminham individualmente [...] E ‘pra’ você que é um aluno, na época, de 19, 20 anos, por mais que você seja apaixonado pela Matemática, às vezes isso não consegue se encaixar. Só vem com a maturidade e com o exercício da profissão, que muita coisa eu aprendi quando eu saquei sozinha, quando eu estou preparando aula [...] Então, eu acho que tem uma lacuna muito grande na formação de professores. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Notamos em sua fala que Alice acredita que sua formação foi fragmentada e as relações existentes entre as disciplinas e temas deveriam ser feitas pelo professor e não pelo estudante a se formar. Entendemos, entretanto, que isto deve ser feito por ambos, professor e aluno, por meio de discussões que permitam ao aluno, professor em formação, levar suas incompreensões de relacionar disciplinas e temas para que o docente já experiente e, muitas vezes, distante desta realidade, a compreenda e coletivamente encontre soluções para esta incompreensão.

Vemos, também, seu entendimento de que o conhecimento do professor ocorre nas ações pertinentes à prática docente, como o preparar das aulas. Isso está de acordo com o que defende Tardif (2011), pesquisador reconhecido por estudos sobre os saberes docentes, ao afirmar que este saber "[…] está relacionado com a pessoa e a identidade deles, com a experiência de vida e com a sua história profissional, com as suas relações com os alunos em sala de aula e com os outros atores escolares na escola" (TARDIF, 2011, p.11).

Além disso, critica sua imaturidade pessoal, refletida na sua pouca idade, para conseguir compreender integradamente o que estava sendo proposto nas disciplinas durante a formação inicial. A entrevistada indica, da mesma forma, que as disciplinas deveriam ter uma maior ligação entre elas, criticando a formação dos professores formadores.

Em seguida, perguntamos à entrevistada se tinha alguma recordação do que seria o Teorema Fundamental da Aritmética, respondendo de forma negativa. Apresentamos, então, a ela o vídeo sobre o surgimento do Teorema Fundamental da Aritmética confeccionado pela *Khan Academy* Brasil, programado para este momento da entrevista, caso o entrevistado confirmasse o não conhecimento do Teorema.

Ao terminar a execução do vídeo, a professora logo relaciona o Teorema Fundamental da Aritmética com a "decomposição", dizendo que sabe, mas não o conhece com este nome. Completamos que a decomposição em fatores primos não se limita apenas em dividir um número inteiro sucessivamente por números primos; trata-se de reconhecer a natureza de cada número, que pode descrever a identidade específica de cada número quando este é escrito em sua forma fatorada. Desta forma, sua utilização poderia facilitar a percepção, por exemplo, de divisibilidades, multiplicidades, sem necessariamente se dispor de cálculos muito complexos.

Seguido disso, Alice faz o seguinte relato:

> […] quando vou explicar decomposição para os alunos, eles não querem, resistem a usar os números primos. Aí, o aluno vai e coloca 4. “Professora, mas por que que eu não posso por 4?” Porque o 4 dá ‘pra’ você dividir de novo. Você tem que usar números que você não consegue mais dividir ‘pra’ não ter decimal. “Ah, então quer dizer que se eu colocar o 4 é a mesma coisa que colocar 2 e 2?”. É, é a mesma coisa que você colocar 2 e 2. “Então, você pode pôr o 4?” O 4 é um número que dá ‘pra’ dividir, você não pode pôr um número que dá ‘pra’ ser dividido ainda. Eles começam a entender que os números que eles vão colocar ali são aqueles que não dá ‘pra’ dividir mais. Aí, eles acabam sempre chegando nos primos. “Ah, professora! Então a gente só vai chegar nos números primos mesmo!” […] quando você colocar um número e você tem dúvidas se ele é primo ou não, pensa se você consegue dividi-lo de novo. “Ah, dá”. Então, não pode, você o colocou lá, mas tem que separar este número. A gente usa a palavra decomposição. A gente vai separando, separando aos poucos. Aí é quando eu consigo que eles entendam aquele processo. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA DA PROFESSORA ALICE, 2020)

Observamos que a entrevistada tem clara noção do que é a decomposição em fatores primos, ainda que não o reconheça pelo nome Teorema Fundamental da Aritmética. Apresenta, inclusive, uma descrição detalhada de como ensina tal conceito para os alunos. Sua explicação foi feita de forma a convencer o aluno a utilizar apenas os números primos na decomposição de um número inteiro. Explorar inicialmente a fatoração com mais de dois fatores e posteriormente decompor em fatores primos pode permitir, segundo Barbosa (2008), a compreensão da decomposição em fatores primos.

Acrescentamos que no processo de decomposição em fatores primos, a ordem em que os números primos são utilizados para a divisão não altera sua representação. A entrevistada, então, comenta que a professora de Matemática de seu filho não considerou correta a resposta que ele deu, quando fez a decomposição de um número inteiro, sem iniciar pelo menor número primo possível, uma vez que este era o procedimento ensinado e considerado único e obrigatório pela professora.

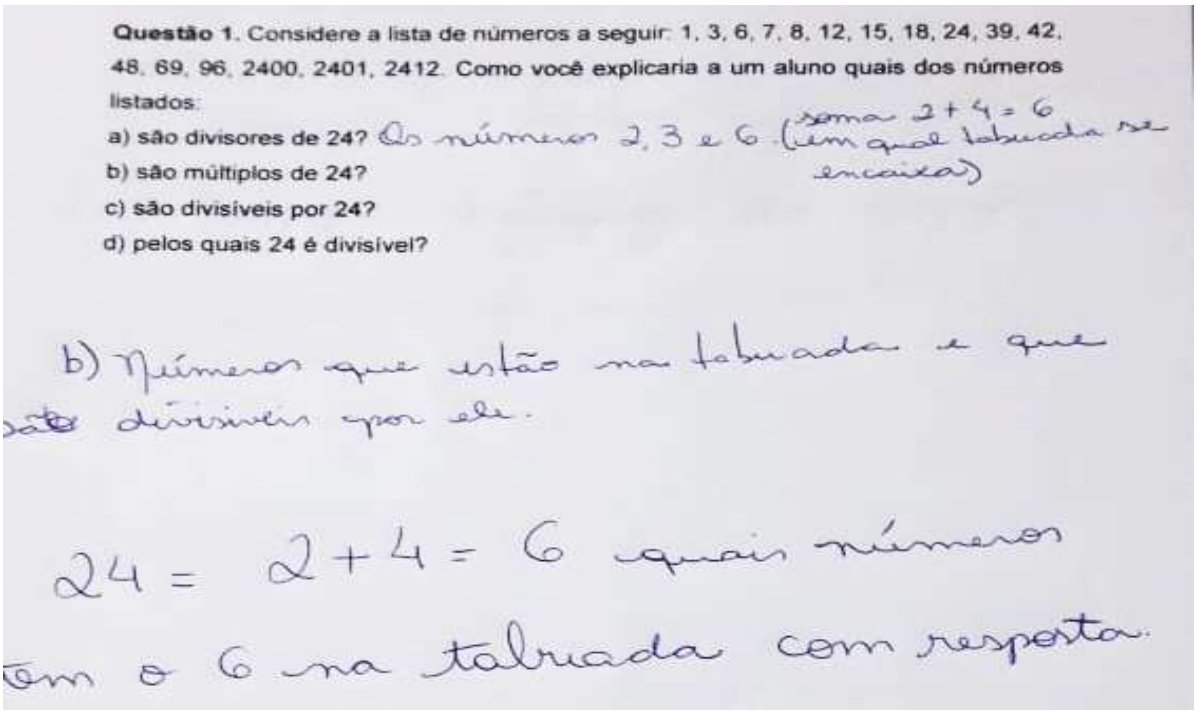
É importante ressaltar que, na socialização de uma experiência sua, notamos o conhecimento especializado do professor de Matemática, segundo o modelo MTSK, no qual o docente conhece as Práticas ligadas a uma Temática na Matemática e, assim, tem conhecimento de uma abordagem que considera ideal para explicar a decomposição em fatores primos aos alunos.

Feitas as considerações iniciais da Intervenção, partimos para análise mais detalhada das questões do Instrumento de Coleta de Dados.

Questão 1

Apresentamos o protocolo da resposta de Alice para a Questão 1.

Figura 9 – Protocolo da Questão 1 de Alice



Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisar previamente o protocolo da Questão 1 de Alice, percebemos que as respostas para cada item não estavam escritas de forma explícita, mas, sim, segundo algum tipo de regra. Questionada sobre como resolveu a questão, tivemos o seguinte diálogo:

> A[61] – Considere esses números a seguir, como você explica a um aluno quais dos números indiciados são divisores por 24? Então eu somo as parcelas. Eu chamo 2 e o 4... deu 6. Seis, ele é divisível por 2 por 3. Se ele é divisível por 2 e por 3, então ele também vai ser divisível por 6. Eu penso assim.
> J[62] – Então, eu não entendi a sua soma das parcelas. Isso é uma regra ou o que?
> A – É uma regra. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Aparentemente, a entrevistada parece ter “criado” um critério de divisibilidade como se fosse uma generalização do critério de divisibilidade por 3. Sabemos que existem critérios de divisibilidade gerais para números inteiros, com expressões possuindo condições específicas para serem utilizadas em cada caso, mas nenhuma delas são descritas como dito acima. Sobre tais intuições subdesenvolvidas, Sirotic e

[61] A letra “A” será utilizada para se referir à fala de Alice durante o diálogo.
[62] A letra “J” será utilizada para se referir à fala da entrevistadora Joice durante o diálogo.

Zazkis (2007) entendem estar relacionado “a deficiências no conhecimento formal e à falta de experiência algorítmica. Construir conexões consistentes entre algoritmos, intuições e conceitos é essencial para se ter um conhecimento vital de qualquer domínio matemático” (SIROTIC; ZAZKIS, 2007, p. 75). E prosseguimos:

> J – Mas para todos os números?
> A – Sim para todos, ‘pra’ todos. ‘Pra’ ser divisível por 2, o número tem que ser par; para ser divisível por 3, a soma das parcelas, soma dos números, tem que ser divisível por 3; para ser divisível por 4, os dois últimos números tem que ser divisíveis na tabuada do 4, que vai de 1 a 9, quer dizer de 1 a 10; ‘pra’ ser divisível por cinco, tem que terminar em 0 e 5; para ser divisível por 6 tem que ser divisível por 2 por 3 ao mesmo tempo.. é assim.
> J – E do 24 funciona da mesma forma?
> A – Funciona da mesma forma, você soma. Eu somei quatro mais 2, seis, seis é divisível por 2 por 3 então também é divisível por 6.
> J – Funciona como, por exemplo, 18?
> A – Funcionaria também. Oito mais 1, 9, é divisível por 3, só por 3, por 2 não é, então, também não é por 6, porque por 6 tem que ser divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo […] São critérios de divisibilidade. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020, grifo nosso)

Ressaltamos, que quando a entrevistada disse “a soma das parcelas”, no primeiro grifo, o correto seria dizer a adição dos algarismos do número em questão. Já no segundo grifo em que a entrevistada diz “dois últimos números”, o correto seria dizer dois últimos algarismos. Parece que ela trata número e algarismo como sinônimos. O terceiro grifo indica o critério de divisibilidade por 5, no qual o correto seria dizer que os números terminados em 5 OU 0 são divisíveis por 5. Aqui, ela não faz uma distinção entre os conectivos ‘e’ e ‘ou’. Ao ser questionada sobre a funcionabilidade desta “regra” de divisibilidade para outros números, a professora confirma, dizendo que são critérios de divisibilidade. Contudo, podemos perceber no diálogo que, ao tentar utilizar sua “regra” de divisibilidade para o número 18, conclui que é divisível apenas por 3 e não é divisível nem por 2 nem por 6, o que é um equívoco.

Além disso, devemos ressaltar um problema na utilização do sinal de igualdade, ao escrever em seu protocolo “24 = 2 + 4 = 6”. Ainda que já tenha sido explicitada a intenção da docente com seu registro, é importante notar que a igualdade presente na expressão é contraditória, uma vez que, se observarmos os números envolvidos na igualdade, teríamos que 24 = 2 + 4 ou, ainda, que 24 = 6, o que são contradições evidente.

Para tentar aprofundar a compreensão do entendimento da participante sobre conceitos fundamentais para o Teorema Fundamental da Aritmética, questionamos sobre o que é múltiplo e o que é divisor. O diálogo foi da seguinte maneira:

> J – […] O que é múltiplo para você?
> A – São os números que eu posso dividir por aquele que está sendo sugerido.
> J – E o divisor seria qual? Quem?
> A – Os próprios múltiplos dele, que seria contrário né? [risos]
> J – Isso, então, todos os múltiplos seriam quem?
> A – Os do número... de que número?
> J – De qualquer número...
> A – 'Tá', por exemplo, vou pensar no 24. Os múltiplos de 24, você pode colocar todos que 'tá' na tabuada né? O que seria o 2, o 4, o 6, o 3, o próprio 24.
> J – Estes seriam os múltiplos ou os divisores?
> A – São os divisores.
> J – E seus múltiplos seriam, do 24?
> A – Buguei. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Em alguns momentos deste diálogo, observamos que houve um equívoco sobre os conceitos questionados, no qual a entrevistada confunde o conceito de múltiplo com o de divisor. Mesmo percebendo que estava errado e que tinha feito confusão entre os conceitos, prosseguiu chamando múltiplo de divisor. Continuando o diálogo:

> J – […] Múltiplos e divisores...
> A – Divisores são os que eu acabei de falar e os múltiplos são que resultam ele, não é?
> J – Não sei, só estou perguntando...
> A – É... os números que resultam nele ou que são multiplicados por ele.
> J – Isso, multiplicados por ele. Então, no caso, o 48...
> A – Sim, ah sim, é o dobro, triplo, quádruplo, os multiplicados por ele. […] Ah, entendi! (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Percebemos que a professora mostra entender o que é a decomposição em fatores primos, apresentando como ensina este processo, mas não tem domínio de conceitos importantíssimos para a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética, os múltiplos e os divisores. Ressaltamos, ainda, a dificuldade mostrada em explicar, ainda que com suas próprias palavras, estes conceitos. Foi necessária a utilização de exemplos numéricos que a ajudasse a entender e, de certa forma, verbalizar seu entendimento sobre estes conceitos. É importante, porém, notar a importância deste momento de Intervenção e da discussão com outras pessoas. Mesmo apresentando dificuldades em definir os conceitos solicitados, no final do

diálogo, percebe-se um ganho cognitivo, já que percebeu o equívoco cometido ao confundir tais definições.

Neste momento, perguntamos, enfim, quais eram suas respostas para cada um dos itens, já que, segundo a entrevistada, não tinha interpretado direito e por isso não os respondeu. De fato, pela resposta dada, é possível ela não tenha lido com atenção o enunciado e, portanto, tenha respondido quais eram os divisores de 24, sem considerar a lista de números dada no enunciado, como é mostrado no diálogo abaixo. Pontuamos, ainda, que a resposta desta questão foi baseada numa "regra" criada por ela própria.

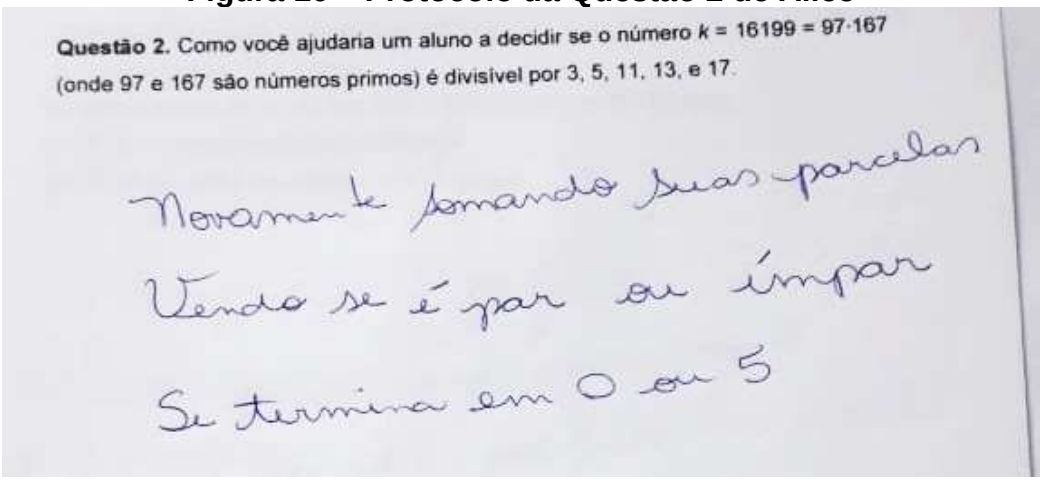
> A – Na letra a, [...] os divisores, então de 24 são... eu utilizo o processo da divisibilidade... então seria o 2, o 3, o seis, e o próprio 24.
> J – Mas dessa lista aqui, quais seriam os divisores?
> A – Ah, sim! O 1, o 3, o 6 e o 24... o 12, o 8... nessa lista, só.
> J – E os múltiplos...
> A – São aqueles que resultam nele, 'né', na verdade. Aí eu tenho que pensar no dobro dele... [fazendo o cálculo] ... 96... aí, eu tenho que fazer conta... [circulando os números que são a resposta correta]. Esse, esse, esse não [2012], esse também não [2401]
> J – Mas por que você falou que não?
> A – Porque esse [2401] terminou com 1, que é ímpar e esse terminou com 12, então não dá.
> J – […] e o item c... Quais destes são divisíveis por 24?
> A – Eu posso dividir por 24 o próprio 24, o 48 e só... os mesmos que são múltiplos dele.
> J – E quais seriam os números pelos quais o 24 é divisível?
> A – Aí seria o 3, o 6, o 8, o 12, o 24, 'tá'? (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Note que tanto no par de expressão "ser divisor de" e "pelos quais é divisível" quanto no par "ser múltiplo de" e "ser divisível por" as respostas são exatamente os mesmos números. Entendemos, então, que a nomenclatura pode ter sido um impeditivo para Alice perceber divisibilidade ou multiplicidade do número 24, não pontuando, no item c, que 96 é divisível por 24 e, no item d, que 1 é um dos números pelo qual 24 é divisível.

Questão 2

Apresentamos, agora, o protocolo da resposta de Alice para a Questão 2.

Figura 10 – Protocolo da Questão 2 de Alice



Fonte: Dados da pesquisa

Assim como a resposta apresentada na Questão 1, esta mostra em seu protocolo novamente a “regra” de divisibilidade criada pela entrevistada como justificativa para sua resposta. Questionada sobre como solucionou esta questão, esclarece:

> Bom, utilizaria, por exemplo, para ser divisível por 5, o número tem que terminar em 0 e 5. Não é o caso, então não é divisível por 5. Para ser divisível por 3, eu somaria as parcelas... 9 mais 9, 18... 19 mais 6, 25... mais 1, 26... 26, 6 mais 2 é 8 então não é divisível por 3, então por 3 não dá. Onze não, porque os múltiplos de 11... porque o 11, sendo um número primo eu vou pensar nele e eu não consigo dividir esse número. Treze, nenhum deles, nenhum deles pelos critérios. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020, grifo nosso)

No grifo feito por nós, ressaltamos que, mais uma vez a professora se equivocou ao citar o critério de divisibilidade por 5, mas, em seu protocolo, escreve da maneira correta “se terminar em 0 ou 5”. Ainda que tenha iniciado sua solução por meio dos critérios de divisibilidade por 3 e 5, a entrevistada não deixou claro como decidiu que o número *k* não seria divisível por 11, 13 e 17. Acreditamos que tenha utilizado a “regra” de divisibilidade equivocada citada por ela anteriormente. O diálogo continua, como se segue:

> J – Essa informação, para você, te ajudar em alguma coisa, 97 e 167 são números primos?
> A – Ajudaria, porque eles são só divisíveis por eles mesmos.
> J – E você consegue ter alguma outra forma de resolver, de acordo com essa informação?
> A – Não dá para dividir. Ajudaria, porque um número primo só é divisível por ele mesmo e por um. Então, se eu não tenho 97 aqui e também não tenho 167, o que eu entendo é que esse número já foi decomposto, que eu não consigo dividir. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

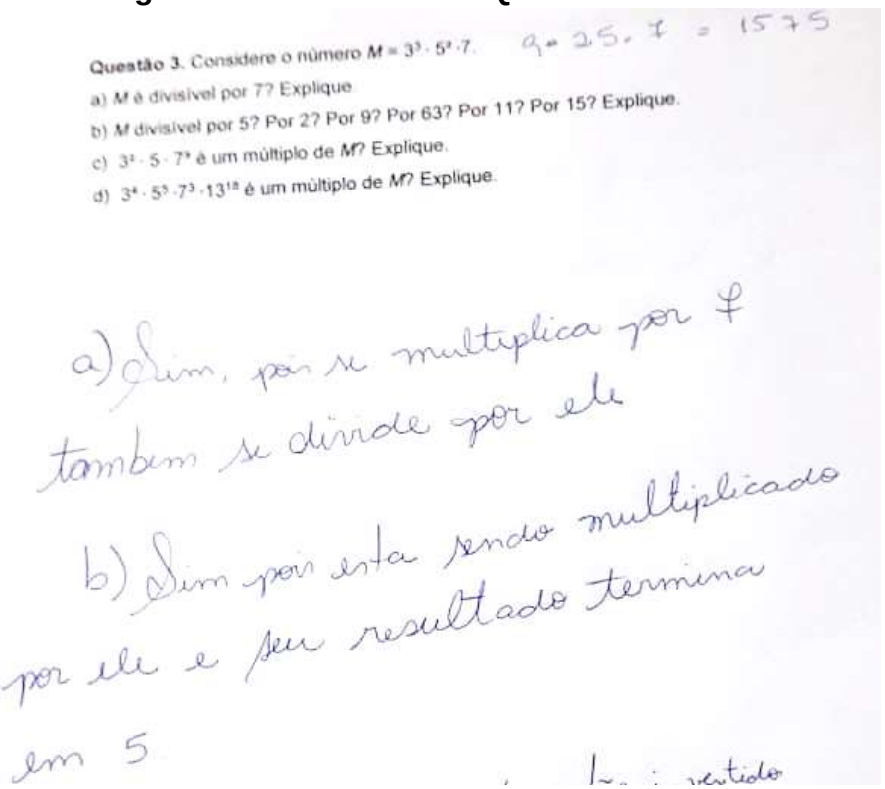
Após ser mostrada a informação do enunciado em que os números 97 e 167 são primos, Alice parece ter lembrado do significado decomposição em fatores primos, mas não necessariamente ligada à decomposição do número *k*. Ao afirmar “eu não consigo dividir”, sendo que o correto seria dizer “não é possível encontrar outros fatores primos”, a docente está se referindo às decomposição dos números 97 e 167, por serem primos e divisíveis apenas por eles mesmos e por 1, e não à impossibilidade de *k* ser divisível por outros números além de 97, 167, *k* e 1. Assim, a maneira como *k* e seus fatores foram representados e definidos no enunciado podem tê-la impedido de perceber efetivamente as características específicas de *k*, tornando-se esta, segundo Zazkis e Gadowsky (2001) e Fonseca (2015), uma representação opaca de *k* para a entrevistada.

Embora tenha respondido corretamente à questão, dizendo que *k* não é divisível por 3, 5, 11, 13, a professora não manifestou dominar a decomposição em fatores primos, não percebendo a unicidade dos fatores presentes na decomposição.

Questão 3

Trazemos, a seguir, o protocolo da resposta da Questão 3 de Alice.

Figura 11 – Protocolo da Questão 3 de Alice



Questão 3. Considere o número $M = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. $9 \cdot 25 \cdot 7 = 1575$

a) M é divisível por 7? Explique.

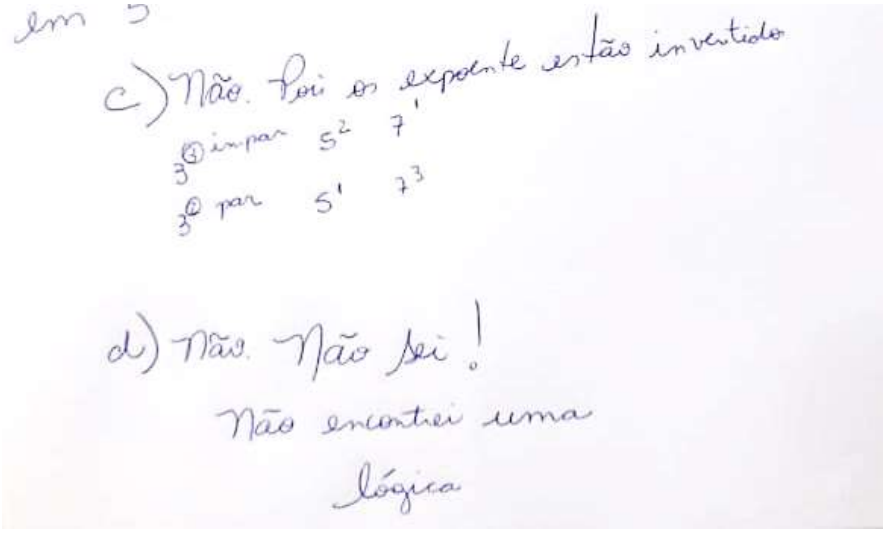
b) M divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 63? Por 11? Por 15? Explique.

c) $3^3 \cdot 5 \cdot 7^3$ é um múltiplo de M? Explique.

d) $3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^{18}$ é um múltiplo de M? Explique.

a) Sim, pois se multiplica por 7 também se divide por ele

b) Sim pois esta sendo multiplicado por ele e seu resultado termina em 5



Fonte: Dados da pesquisa

Observando o protocolo desta questão, percebemos que, novamente, a professora respondeu parcialmente alguns dos itens, sendo que em um deles declarou, explicitamente, que não sabia a resposta. Ao ser questionada sobre sua resolução, seguiu-se o seguinte diálogo sobre os itens a e b:

> A – Considere o número M = $3^3.5^2.7$... Beleza, não está decomposto. Aí, eu pensei em um número que nesse aqui, imediatamente né. M é divisível por 7? Não... é? Lógico que é! Sim porque ele é um múltiplo de 7, então ele também é divisível por 7.
> J - Você pensou isso olhando a decomposição?
> A – Olhando a decomposição. M é divisível por 5? Sim, porque se ele está multiplicando também pode dividir. Por 2, não, porque não tem nenhum número par. Por 9, sim, porque... porque tem na multiplicidade por 3. Por 63, sim porque tem o 7 e o 3 que compõem a decomposição de 63. Por 11, não, porque não compõe de composição de 11. Por 15, sim porque ele é múltiplo de 3 e 5, porque eu penso da decomposição dele. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Ainda que o número *M* esteja claramente decomposto em seus fatores primos, a entrevistada afirma o oposto. Parece ter se confundido com os termos “decomposto” e “composto”, já que em seguida, conforme aparece em seu protocolo, realiza o cálculo do produto presente em *M*, encontrando erroneamente o número composto 1575, por ter considerado $3^3 = 9$, conforme seu protocolo.

Ao afirmar que se um número está multiplicando por outro, ele também pode dividir, a professora, mais uma vez, explicita que sua ideia de decomposição está ligada ao ato de divisão. Dizer que o número 5 “está multiplicando”, isto é, está presente na decomposição de *M*, parece não ser suficiente para comprovar a divisibilidade de *M* por 5. Além disso, esta afirmação não é válida para todos os

números inteiros. Se tomarmos, por exemplo, um número inteiro *M* = 3.0, não é verdade que *M* é divisível por 0.

As afirmações sobre a divisibilidade de cada um dos números explicitada neste trecho do diálogo acima, permite-nos inferir que a entrevistada tem um bom conhecimento sobre analisar a divisibilidade de um número, observando os fatores de sua decomposição, mesmo que em alguns momentos da entrevista tal conhecimento não tenha sido mostrado tão claramente.

Vale ressaltar que, em seu protocolo, a justificativa presente no item *b* para a divisibilidade por 5 está baseada no número composto que encontrou com a realização equivocada do produto presente em *M*, o 1575, e não na decomposição de *M*.

Seguimos com o diálogo sobre o item c:

> J – E se ele é múltiplo...
> A – Olha, pensando na decomposição, sim, deveria. Eu coloquei que não. Deixa-me ver.... conta dos expoentes, das vezes que se repete […]. Eu achei que não.
> J – Você achou que não por causa de?
> A – Dos expoentes, porque aqui... Não tem nada a ver... Agora, pensando direito, 3 vezes 3, 9, vezes 3, 27 e 27 é divisível por 9.
> J - A pergunta é se esse aqui é múltiplo desse [item c].
> A – Não, não é. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Neste momento, a professora Alice, novamente, contradiz a resposta de seu protocolo ao responder que “sim”, quando tinha escrito que “não”, justificada pelos expoentes estarem, segundo sua percepção, “invertidos”. Acreditamos que tal afirmação pode se referir a alguma lembrança que tenha vindo à mente sobre os expoentes de um múltiplo sempre maiores ou iguais aos expoentes de seus divisores, mas que não foi algo corretamente empregado por ela. Entretanto, após ser novamente questionada sobre sua resposta, sustenta o “não”, mas tenta explicar sua resposta observando os expoentes de 3 em ambos os números, dizendo que “27 é divisível por 9”. Mais uma vez, a professora vincula o “ser múltiplo de” com o “ser divisível por”.

Isto pode se referir ao que Carrillo *et al*. (2013) entende como crença, uma vez que a docente apresenta uma verdade pessoal, que provém de uma experiência do seu próprio pensamento, mas baseia-se em critérios que são falsos. Esclarecemos, logo em seguida, que é possível verificar a multiplicidade ou a divisibilidade entre dois números inteiros decompostos em fatores primos, observando os expoentes dos

fatores de ambos os números: se um número inteiro for divisor de outro, os fatores do primeiro devem conter todos os fatores do segundo; já no caso de um número inteiro ser múltiplo de outro, os fatores do primeiro devem estar contidos no segundo.

A resposta da professora também pode se referir, segundo os pesquisadores Sirotic e Zazkis (2007), ao caráter intuitivo do conhecimento sobre o tema, uma vez que pareceu adaptar o conhecimento formal e o algoritmo às suas crenças pela tendência a se buscar uma consistência. Assim, as inconsistências apresentadas "[…] podem ser o resultado da ação contrária dos procedimentos profundamente enraizados que surgem quando a pessoa não está atenta às suas crenças, mas faz as coisas automaticamente."[63] (SIROTIC; ZAZKIS, 2007, p. 52).

A entrevistada comenta "[…] eu não pensei assim não. Na hora que eu bati o olho no expoente, eu falei: 'Mas não dá, não vai dar certo isso'. Mas eu não consigo explicar o porquê que não dá certo. Na minha cabeça não dá. Mas como eu explico para você que não dá?" Este comentário ocorre devido aos expoentes dos fatores do número que está no enunciado do item d. Ao se deparar com expoentes que gerariam um produto muito grande, começou a perceber que poderia haver outro modo, menos complexo de se encontrar a resposta. Ainda que não tenha chegado a uma conclusão sobre qual seria o método, seu protocolo registra sua tentativa de raciocínio.

Seguido a isso, trava-se o diálogo sobre o item d:

> A – Então, porque na hora eu nem 'tava', assim, pensando na calculadora. Eu olhei os expoentes e falei: "meu Deus, não dá!". Aí eu fiquei olhando assim... 7 e aqui 18... tá, 1 e 18, um é ímpar, o outro é par, não vai dar certo. Esse aqui 'tá' quadrado, par e ímpar não vai rolar, também, necessita par e ímpar. Meu Deus, não vai ser múltiplo! Não tem como! Pensei assim.
> J – Depois, então, eu vou mostrar para você a resposta e você vê direitinho. Mas a resposta, na verdade, ele é um múltiplo.
> A – Ah, ele é? Meu pai! […] então quer dizer que a minha lógica coube 'pra' esse [c] e 'pra' esse não [d].
> J – Na verdade é a mesma lógica, porque esse aqui tem um expoente menor, então ele não é múltiplo.
> A – Entendi, tem que ser igual ou maior... entendi, aprendi.
> J – E para ser divisor tem que ser menor ou igual.
> A – Divisor, menor, porque divide o número e fica menor. O múltiplo fica maior, então tem que ser maior, já entendi. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020, grifo nosso)

No primeiro grifo, Alice parece tentar justificar o conceito "ser múltiplo de" relacionando os expoentes de cada um dos fatores dos números indicados, assim

[63] might be the result of the counteraction of the deeply engrained procedures that emerge when the person is not watchful of his or her beliefs, but does things automatically instead.

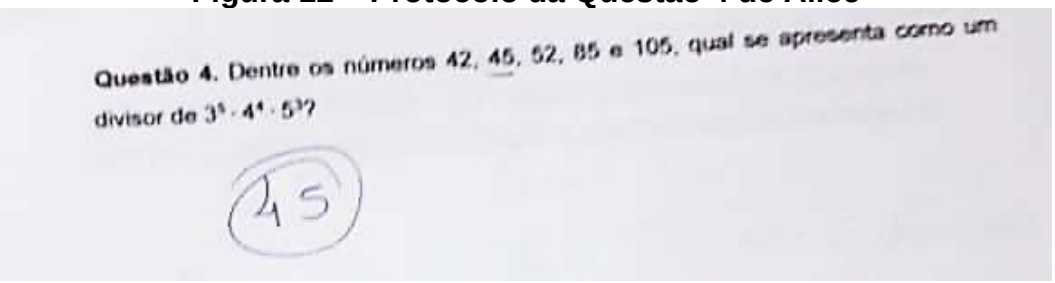
como apresenta no item c de seu protocolo, com o fato de ser par ou ser ímpar, buscando uma “lógica” para tentar entender sua própria resposta. Acreditamos que a entrevistada, em algum momento de sua experiência, pode ter tido contato com o modo de verificar o “ser múltiplo de” por meio dos expoentes, porém não conseguiu se lembrar como fazê-lo durante a entrevista, provavelmente por não o usar de forma frequente.

Ao mesmo tempo, explicita que, de fato, não se lembra ou não conhece a forma de verificação de “ser múltiplo de” ou “ser divisor de”, via observação dos expoentes. Suspeitamos que esteja ligado às inconsistências já mostradas pela entrevistada sobre seus conhecimentos sobre os conceitos de divisor e de múltiplo. No segundo grifo, mesmo dizendo que entendeu a técnica, continua afirmando de forma equivocada seu procedimento.

Questão 4

Seguimos com as respostas da professora Alice para a Questão 4.

Figura 12 – Protocolo da Questão 4 de Alice



Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos notar no protocolo, não há nenhum registro do pensamento que levou Alice a responder que 45 é divisor do número decomposto em fatores primos apresentado no enunciado. Questionada sobre isso, ocorre o diálogo:

> A – […] Eu falei: “dá 45 e ponto” [risos]. Dentre os números par, ímpar, par, ímpar, termina com 2, termina com.., qual se apresenta como um divisor? Eu pensei: 3.4, 12... 12.5, 60 então termina com zero e cinco. Então descartei os números pares aqui.
> J – Ah! Você foi por eliminação. Então o 42 e o 52 você já eliminou?
> A – Já eliminei. Então, para ele ser divisor desses números, para dar certo, só poderia ser com o próprio 45.
> J – O 85 você não pensou nele?
> A – Não, porque ele é maior!
> J – Mas é que eles têm mais expoentes. Se você pensar, por exemplo, no 5^3, ele é 125. Esse aqui, 4^4, 4.4 é 16, 16.16, 256. Aí, 256.125, dá um número grande.

> A – Então, só que eu imaginei que não ia dar certo. Eu, na verdade, o que eu pensei... [faz cálculos mentais e uma pausa]
> J - Os pares você tirou por ter encontrado o 60, que é um múltiplo de 10, então tem que terminar em 5 ou 0?
> A – Isso.
> J – Porque, se esse é o critério, a gente tem o [produto de] 5, 5 e 5 [em 5^3].
> A – Sim, por isso eu escolhi o 45.
> J – E por que não 85 ou 105?
> A – Porque quando na minha cabeça, já dividi por 45. Quando eu vi que 45 dava, já nem tentei os outros, eu não tentei. Na verdade, se fosse ele, se eles pudessem ser também, além do 45, eu teria errado, se fosse uma questão de vestibular, de concurso público. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020, grifo nosso)

Ressaltamos que, outra vez, a professora comenta sobre o critério de divisibilidade por 5 de forma equivocada, dizendo termina com 5 e 0, ao invés de 5 ou zero. Além disso, o fato de a questão ser resolvida por eliminação, de acordo com o que é mostrado no primeiro grifo, nos sugere que a entrevistada não considerou, efetivamente, a decomposição em fatores primos do número dado como ferramenta para sua solução correta. Utilizou apenas os fatores de base deste número para tentar buscar uma linha lógica de pensamento para o seu processo de eliminação de possibilidades.

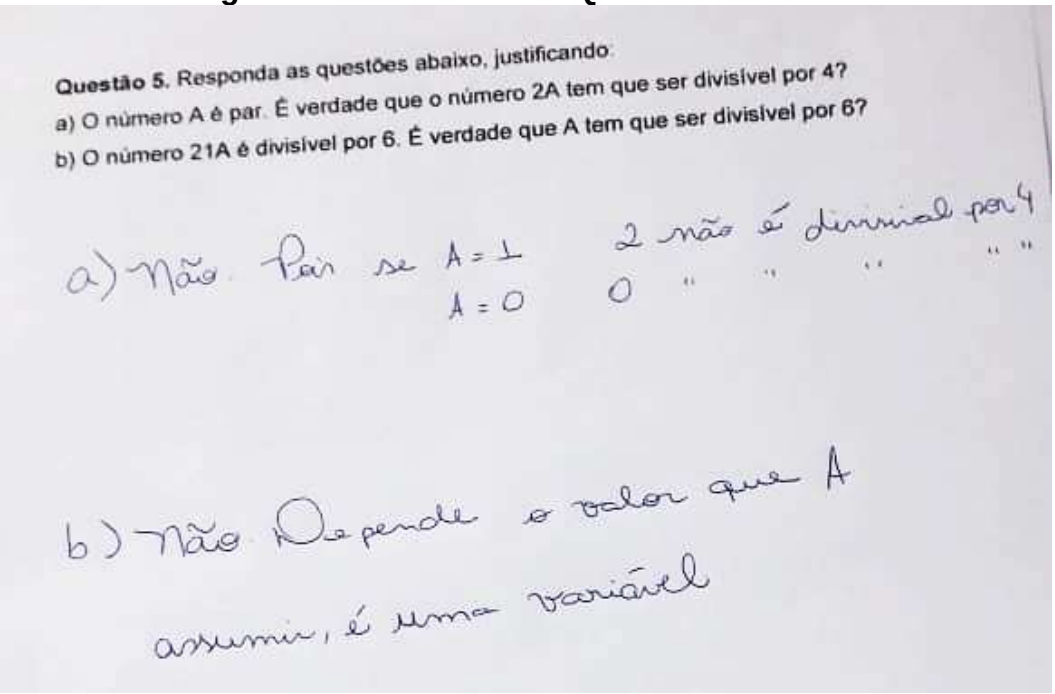
Acreditamos que, apesar de parecer, anteriormente, compreender que um número é divisor de outro quando os fatores do primeiro devem aparecer na decomposição do segundo, a professora não leva em consideração todos os fatores do número decomposto apresentado. Isto fica evidente ao dizer que 85 é maior que 60 e por isso o eliminou como possibilidade de solução.

E mesmo após ser confrontada sobre este critério de eliminação, conforme é mostrado no diálogo, a entrevistada não cogita a possibilidade de decomposição em fatores primos como uma maneira de justificar a divisibilidade solicitada. Antes, admite que não verificou os outros números.

Questão 5

Segue o protocolo das respostas de Alice para a Questão 5.

Figura 13 – Protocolo da Questão 5 de Alice



Fonte: Dados da pesquisa

Tanto na resposta no protocolo, quanto na entrevista, a professora, inicialmente responde negativamente à questão. Deduzimos que isto se deve à falta de atenção na leitura dos dados informados pelo enunciado, já que, assim que foi alertada sobre a obrigatoriedade da paridade de *A*, Alice prontamente reanalisou sua resposta. E o diálogo que se segue sobre o item *a* é o seguinte:

> J – Você pensou isso fazendo como?
> A – Agora? Eu pensei que esse número 4, a decomposição do 4 é o 2, então se for número par vai ser divisível por 4, porque vai ser divisível por 2 também.
> J – Por conta de que 2 que vai dar o 4?
> A – Se eu substituir aqui, por exemplo, o A por 2, e todos os números pares são divisíveis por 2, então vai ser divisível por 4 também. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Assim como apresentou no protocolo, a justificativa para a resposta positiva da questão veio por meio de exemplos: ora tomando $A = 1$, ora $A = 0$, encontrando como *2A*, os valores 2 e 0, respectivamente, sendo que um dos exemplos não atendia às definições presentes no enunciado da questão. É importante ressaltar que, em suas justificativas presentes no item a, Alice comete um erro conceitual ao escrever que “0 não é divisível por 4”, o que é uma inverdade, uma vez que 0 é divisível por qualquer número inteiro.

Acreditamos que a entrevistada não possui em seus conhecimentos técnicas de demonstração e prova, quando são envolvidas variáveis inteiras, usando, neste

caso, exemplos não apenas como apoio para a resolução, mas também como forma suficiente de justificativa. Entendemos que é importante a utilização de exemplos numéricos para verificação da possível veracidade da afirmação presente nesta questão. Entretanto, como *A* é uma variável com universo no conjunto dos números inteiros, é necessária uma demonstração formal que abarque todos os números pares, seguindo o que é dado no enunciado.

O diálogo continua sobre a resolução do item b:

> A – […] é verdade que *A* tem que ser divisível por 6? [pausa longa]. Tem, obrigatoriamente! Porque, para decompor o 6, eu penso no 2 e no 3 e para ser divisível por 6 ele tem que estar dentro desse critério, então sim.
> J – Aqui, é se o *A* tem que ser divisível por 6, obrigatoriamente.
> A – Sim, porque se ele não for por 6, se for só por 3, então ele não vai ser por 2, porque ele vai ser um número ímpar e na decomposição você tem que encontrar, para ser divisível por 6, o 2 na decomposição, que é um número par.
> J – E aqui que você escreveu que depende do valor que *A* assume, ela é uma variável?
> A – Sim. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Neste momento, a professora parece confusa ao analisar a questão. Não fica claro se, ao dizer “ser divisível por 6” está levando em conta o *21A* ser divisível por 6 ou se está pensando apenas nos valores possíveis para *A*.

Ao ser questionada sobre o registro de seu protocolo, em que responde negativamente à questão, indicando que *A* é uma variável e depende do valor assumido por ela para decidir sobre a veracidade do que lhe é perguntado, a professora continua a conversa:

> A – Na verdade, ‘tá’ errado. É sim. Porque, eu não prestei atenção, acho que na hora que eu ‘tava’ resolvendo isso aqui que ‘tá’ errado, não vi aqui na letra a falava par ‘né’.
> J – Só que este *A* [do item a] aqui não é esse mesmo *A* [da letra b].
> A – Não. Então o número *21A* é divisível por 6, é verdade que *A* tem que ser obrigatoriamente divisível por 6? Sim, depende do valor... sim e depende do valor de... não depende do valor que *A* assumir. Se ele é divisível por 6, o *21A* também vai ser divisível por 6, porque na decomposição vai entrar o 2 e o 3.
> J – Então, o *21A* é divisível por 6 só que eu não sei qual o valor do *A*.
> A – Ele pode... o *A* tem que ser divisível por 3 para ser divisível por 6. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020, grifo nosso)

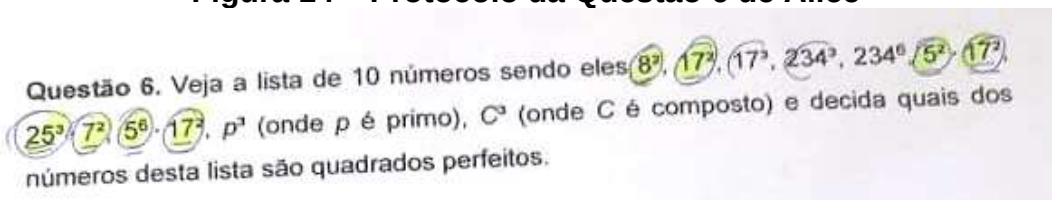
Fica evidente que Alice está confusa em relação à sua resposta final, pois responde que obrigatoriamente A tem que ser divisível por 6, mas em seguida diz que dependerá do valor de *A*. Além disso, percebemos o não entendimento da

entrevistada na declaração que está grifada sobre o que significa uma hipótese numa demonstração. Neste item, a hipótese "*21A* é par" é confundida com "*A* é divisível por 6", que é o que se deseja provar. Tal confusão mostra uma ausência do conhecimento especializado do professor, segundo Flores-Medrado *et al*. (2014), na categoria das Práticas ligadas à Matemática Geral, já que Alice mostrou dificuldades em lidar com uma situação relacionada à prova e demonstração de sentenças matemáticas, sendo este conhecimento necessário para a compreensão do funcionamento de diversos aspetos da Matemática.

Questão 6

A seguir, apresentamos o protocolo de resposta da Questão 6 de Alice.

Figura 14 – Protocolo da Questão 6 de Alice


Questão 6. Veja a lista de 10 números sendo eles 8^2, 17^2, 17^3, 234^3, 234^6, 5^2, 17^2, 25^3, 7^2, 5^6, 17^3, p^3 (onde p é primo), C^3 (onde C é composto) e decida quais dos números desta lista são quadrados perfeitos.

Fonte: Dados da pesquisa

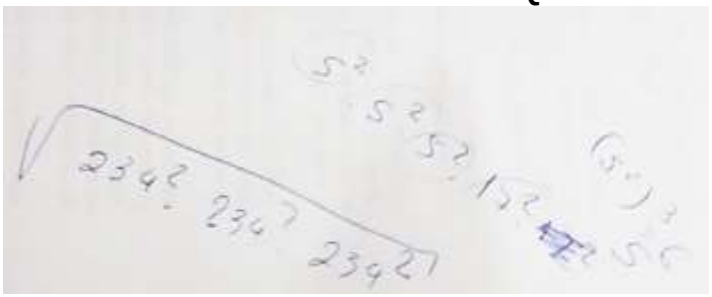
Como mostra o protocolo, Alice não justificou nenhuma de suas respostas, deixando-nos entender que os números em amarelo seriam quadrados perfeitos. Assim, a questionamos sobre o que entende por quadrado perfeito. Sua resposta se apresenta no diálogo que se segue:

> A – Eu penso na raiz quadrada e na decomposição.
> J – 'Tá' bom, raiz quadrada. Então 'pra' definir se é quadrado perfeito, extrai a raiz quadrada.
> A – Eu calculo assim, um quadrado perfeito para mim tem que montar um quadrado, tem que ser raiz quadrada. Então veja a lista dos 10 números sendo eles 8^2, 17.... este já não é quadrado [17^3], esse não é quadrado [234^3], esse [com expoentes resultando em] 2,4 e 6... hum esse é [5^2], esse é [17^2], esse não é quadrado [25^3], 'tô' louca. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Percebemos que as respostas iniciais de Alice, mais uma vez, por falta de atenção da leitura do enunciado, desconsideram os sinais que representam produtos e analisa os fatores separadamente. Após ser alertada sobre isso, refaz a análise de quais números poderiam ser quadrados perfeitos, respondendo corretamente aos oito primeiros números da lista, que são números inteiros com valores definidos. Para tal,

faz alguns rascunhos em seu protocolo para encontrar os quadrados perfeitos, como mostra a figura a seguir:

Figura 15 – Protocolo com rascunho da Questão 6 de Alice



Fonte: Dados da pesquisa

Ao ser perguntada sobre como pensou sobre o número p^3, com p sendo um número primo, ser ou não um quadrado perfeito, a professora responde “Não. […] Porque sempre vai sobrar na decomposição um primo dentro da raiz e aí não tem como tirar, porque você não vai repetir ele novamente”. Apesar de ser compreensível a fala da professora sobre sua correta conclusão, ressaltamos que a expressão correta seria “um número primo já está na sua forma fatorada”.

Sobre o número C^3, com C sendo um número composto, ser ou não um quadrado perfeito, segue o diálogo:

> A – Pode ser, que é o caso do 25^3. Eu decompus o 25, deu 5^2, o expoente é 3 e se tornou um quadrado perfeito. […] Se *C* é um número composto, depende da decomposição desse número. Por exemplo, se eu tenho lá um 15 elevado ao cubo, aí se eu for decompor o 15, não dá.
> J – Você conseguia pensar em algum número composto que daria um quadrado perfeito, se fosse elevado ao cubo?
> A – Nossa... entendi... espera aí... [sussurros na tentativa de encontrar números compostos] ... Não, porque todos vão gerar na decomposição, um primo.
> J – Vai gerar um primo, mas em relação a extrair a raiz, como é que esses primos poderiam gerar? […]
> A – Não dá, porque ‘tá’ ímpar... não dá... […] quando você chega no composto, se na decomposição geral um primo ali... não vai dar certo... na minha cabeça não dá certo isso aqui. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

Neste momento, a entrevistada apresenta corretamente os números compostos 25^3 e 15^3 como exemplos para justificar o fato de nem sempre um número composto ser um quadrado perfeito. Entretanto, mostra uma dificuldade em abstrair esta ideia ao não conseguir encontrar outros números compostos que sejam quadrados perfeitos, ainda que logo acima tenha exemplificado utilizando o número

25^3. Supomos que tal dificuldade tenha a ver com a forma de verificação de quadrado perfeito, utilizando a extração da raiz quadrada. Esta técnica, associada à existência de outro expoente no fator, pode se tornar um empecilho para o desenvolvimento da solução.

Percebemos, nesta questão, um grande esforço da professora na busca da solução para o que foi proposto. Entretanto, este esforço, não nos parece ir além por entender que seu domínio do Teorema Fundamental da Aritmética permanece principalmente no procedimento do processo de se obter a forma fatorada.

Após finalizarmos a entrevista, agradecemos a participação de Alice na pesquisa e entregamos o documento Instrumento de Coleta de Dados – Possíveis Respostas, pedindo que nos contatasse caso necessitasse de algum esclarecimento em relação às respostas descritas. A entrevista teve duração de trinta e nove minutos.

Em suma, Alice não apresentou total domínio dos conceitos básicos necessários para a compreensão efetiva sobre Teorema Fundamental da Aritmética, além de não conseguir expressar verbalmente sua compreensão sobre a definição de múltiplo e de divisor, confundindo ambos os conceitos em alguns momentos. Ainda assim, não foi necessário realizar, obrigatoriamente, procedimentos de divisão para verificar a possibilidade de ser múltiplo ou ser divisor, utilizando em diversos momentos cálculos mentais e alguns critérios de divisibilidade para se certificar de sua resposta. Apesar de explicitar conhecer alguns critérios de divisibilidade, não os utilizou de forma correta, inclusive durante as soluções das questões, já em um primeiro momento da entrevista, não deixou claro como realizou os critérios de divisibilidade por outros números que não tenham sido os critérios de divisibilidade por números ditos pequenos como 3 e 5. Além disso, mostrou um equívoco bastante expressivo ao exibir uma “regra geral” de critérios de divisibilidade para números inteiros, criada por ela.

Foi possível observar que a docente teve uma lembrança sobre a unicidade da decomposição em fatores primos em suas falas, contudo pareceu que se limita aos números primos, por ser divisível por ele mesmo e por 1 e não a números compostos, como o número k, mesmo com a informação de que os números apresentados em sua decomposição são primos.

Ao lidar com questões em que desde seu enunciado o número está na sua forma canônica, isto é, já decomposto em fatores primos, Alice não considera explorar em todos os momentos esta representação para decidir a multiplicidade ou a

divisibilidade de e por este número, apenas em situações em que o número é considerado pequeno. Nas situações com números que envolvem decomposições com fatores possuindo expoentes maiores, prefere calcular o produto indicado. A forma canônica não lhe instiga a pensar nos fatores presentes e nas possibilidades que tal representação pode trazer.

Vemos a mesma situação, quando a docente lida com questões envolvendo multiplicação de número com variável em seu enunciado, como na Questão 4. Ainda que, de certa forma, tenha respondido corretamente a questão, a maneira como "chutou" números para o valor de *A* no primeiro item da questão, indica que não pensou na decomposição em fatores primos que está intrínseca na forma genérica que todo número inteiro par pode ser escrito, isto é, *2n*, com *n* sendo um número inteiro.

Finalmente, quando saímos do contexto do Teorema Fundamental da Aritmética, como na Questão 6, em que o foco são os Números Quadrados Perfeitos, Alice consegue identificar corretamente o que foi solicitado quando se trata de números com valores já determinados, utilizando adequadamente a decomposição em fatores primos para isso. Entretanto, ao lidar com variáveis, mais uma vez, tem sua justificativa pautada em exemplos numéricos. Quando lhe são exigidos conhecimentos que necessitam um traquejo mais especializado em relação às propriedades inerentes ao Teorema Fundamental da Aritmética, Alice não consegue abstrair as ideias utilizadas nos exemplos dados por ela de modo que sejam válidas para todos os números inteiros que estão de acordo com as condições impostas no enunciado.

5.2. Entrevista com a professora Ester[64]

Para iniciar o processo de coleta de dados com a professora Ester, dirigimo-nos à escola estadual em que trabalha e, durante seu intervalo entre aulas, a convidamos para participar da pesquisa, informando nosso objetivo principal com este estudo, o tema que abordaríamos e como se daria a coleta de dados a qual estaria participando. Após isso, foram-lhe entregues o TCLE, o Formulário de Caracterização do(a) Participante e o Instrumento para a Coleta dos Dados, seguido das seis questões já apresentadas anteriormente. Tendo solicitado que Ester assinasse o

[64] Nome fictício que será utilizado durante toda a pesquisa para descrição deste sujeito de pesquisa.

TCLE, respondesse às perguntas da Caracterização e as questões contidas no Instrumento de Coleta de Dados, pedimos para que tirasse foto de cada um destes documentos e os enviasse via aplicativo. Com estas respostas em mãos para analisar previamente suas respostas, informamos a realização de um segundo encontro, com uma rápida Intervenção e esclarecimentos sobre sua resolução. Ester enviou os documentos antecipadamente, conforme combinado, o que nos permitiu perceber seu empenho em responder detalhadamente cada uma das questões, o que indicou serem necessários poucos esclarecimentos durante o segundo encontro.

Em seu Formulário de Caracterização, a professora Ester, de 43 anos, afirma ter concluído sua graduação em Licenciatura em Matemática na Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Jacarezinho, no estado do Paraná, em 1999. Além disso, possui dois cursos de especialização, um com o título “Mediações Tecnológicas em Ambientes Educacionais” e outro denominado “Educação Infantil”. Tem sua experiência profissional com Matemática, há 18 anos, exclusivamente dedicados ao ensino público, sendo 17 deles lecionado para o Ensino Fundamental II. Sobre a Teoria dos Números, Ester entende que os temas números primos, quadrados perfeitos, divisibilidade, conjuntos e números pares e ímpares estão relacionados à Teoria dos Números. Segunda ela, o estudo da Teoria dos Números no ensino Básico “é muito importante por ser a área que estabelece diferentes relações existentes entre diferentes números e sua importância na História da humanidade e na atualidade”.

No segundo encontro, nos dirigimos à biblioteca da escola para realização da entrevista, durante seu horário de ATPC. Assim, iniciamos a Intervenção, perguntando a Ester sobre suas impressões em relação às questões presentes no instrumento de pesquisa. A professora esclarece ter achado que todas as questões estavam ligadas à Divisibilidade, tendo dificuldade apenas no registro das justificativas, por serem muito longas.

A impressão que Ester teve de as questões serem apenas sobre Divisibilidade ocorreu antes de ser esclarecido sobre o tema específico da pesquisa. Acreditamos que isso tenha acontecido pelo fato de a Divisibilidade ser um conceito importante para o desenvolvimento do conceito do Teorema Fundamental da Aritmética e, portanto, tratarem de assuntos comum aos dois temas.

Explicamos, então, que as questões giram em torno do universo da Teoria dos Números, dentro da qual o GPEA entende estar esta Teoria com temas relacionados aos números inteiros com suas propriedades e parte histórica, à Divisibilidade com os

múltiplos, os divisores e seus critérios, ao Teorema Fundamental da Aritmética, às Progressões Aritmética e Geométrica e o Algoritmo de Euclides.

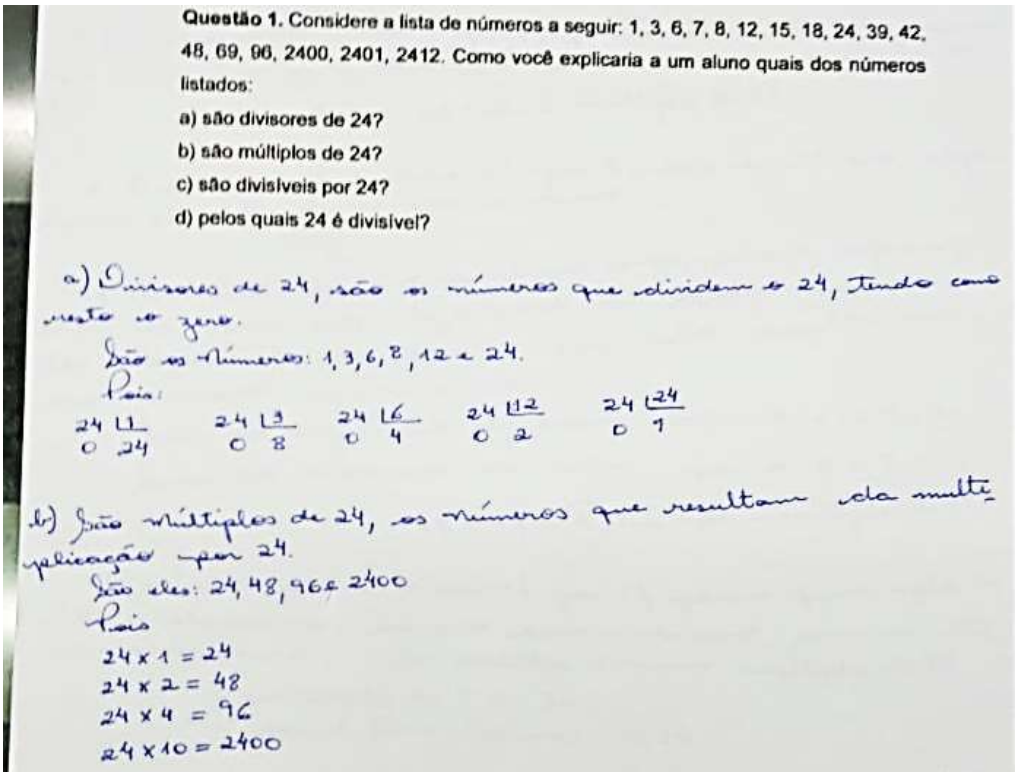
Informamos que, dentre os temas citados, escolhemos aprofundar nossos estudos no Teorema Fundamental da Aritmética, questionamos-lhe se tinha lembranças sobre ele. A entrevistada alega não se lembrar do Teorema Fundamental da Aritmética e, aproveitamos a ocasião, para mostrar o vídeo do *Khan Academy* Brasil sobre a história do Teorema Fundamental da Aritmética, preparado para este momento.

Tendo visto o vídeo, Ester se surpreende com a decomposição em fatores primos ser denominado Teorema Fundamental da Aritmética. Continuamos esclarecendo que ele determina a natureza do número e para cada número inteiro a decomposição é única. Sem que a professora tenha feito nenhum comentário sobre o vídeo, partimos para os esclarecimentos sobre as questões do Instrumento de Coleta de Dados.

Questão 1

Apresentamos o protocolo das respostas de Ester para a Questão 1.

Figura 16 – Protocolo da Questão 1 de Ester



Questão 1. Considere a lista de números a seguir: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412. Como você explicaria a um aluno quais dos números listados:

a) são divisores de 24?

b) são múltiplos de 24?

c) são divisíveis por 24?

d) pelos quais 24 é divisível?

a) Divisores de 24, são os números que dividem o 24, tendo como resto o zero.

São os Números: 1, 3, 6, 8, 12 e 24.

Pois:

24 | 1 — 0 24

24 | 3 — 0 8

24 | 6 — 0 4

24 | 12 — 0 2

24 | 24 — 0 1

b) São múltiplos de 24, os números que resultam da multiplicação por 24.

São eles: 24, 48, 96 e 2400

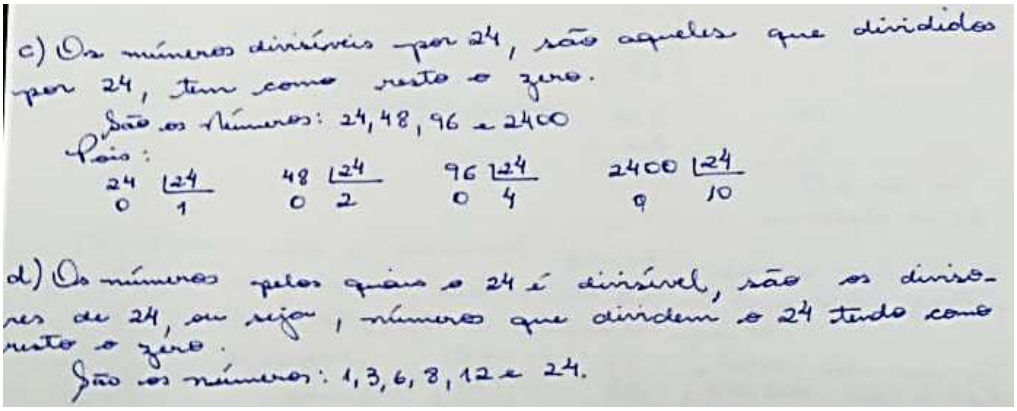
Pois

24 x 1 = 24

24 x 2 = 48

24 x 4 = 96

24 x 10 = 2400


c) Os números divisíveis por 24, são aqueles que divididos por 24, tem como resto o zero.
São os Números: 24, 48, 96 e 2400
Pois:
24 |24 0 1
48 |24 0 2
96 |24 0 4
2400 |24 9 10
d) Os números pelos quais o 24 é divisível, são os divisores de 24, ou seja, números que dividem o 24 tendo como resto o zero.
São os números: 1, 3, 6, 8, 12 e 24.

Fonte: Dados da pesquisa

Iniciamos a entrevista perguntando à Ester seu entendimento sobre múltiplo e divisor. A professora responde: “Múltiplos são resultados de multiplicação por aquele número. Divisores são os números que você pode dividir por um determinado número e a divisão tem resto zero ou a divisão é exata”. A entrevistada fornece uma definição adequada sobre múltiplo e divisores, indicando ter domínio sobre estes conceitos tanto na escrita, como mostra seu protocolo bem detalhado nas explicações de cada um dos itens, quanto na sua fala.

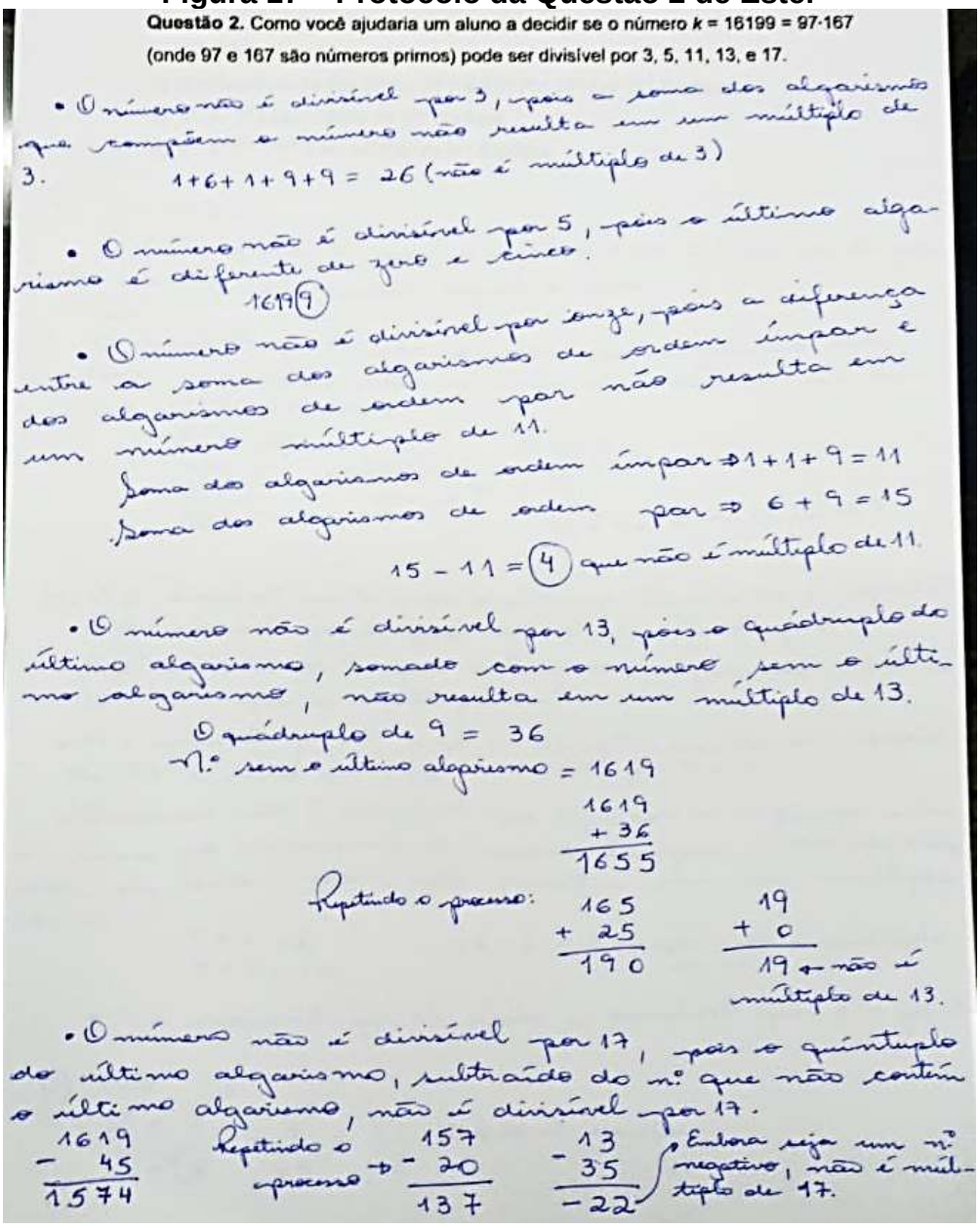
Contudo, comenta que levou muito tempo para escrever estas explicações. Supomos que seja pelo excessivo cuidado que dedicou para deixar clara todas as justificativas, porém está ligado, com o modo utilizado para resolver estas questões.

Nos itens a e c, foi escolhida a divisão exata para verificar os divisores e a divisibilidade por 24, ainda que a divisibilidade posse ser explicada pela multiplicação de números inteiros por 24; já no item b, em que são solicitados os múltiplos de 24 a professora realiza as multiplicações que resultam especificamente nas respostas corretas. Entretanto, não mostra se percebe a relação existentes entre as expressões “ser múltiplo de” e “ser divisível por”. O contrário ocorre com as expressões dos itens a e d, que tem sua igualdade identificada e citada pela professora no registro de resposta para o item d.

Questão 2

Seguimos mostrando o protocolo com o registro das respostas da Questão 2 de Ester.

Figura 17 – Protocolo da Questão 2 de Ester



Fonte: Dados da pesquisa

Observamos no protocolo da professora a grande quantidade de cálculos que precisou executar para justificar sua resposta. Na entrevista, declarou não se lembrar dos critérios de divisibilidade por 11, 13 e 17. Ainda que não seja a maneira mais econômica de solucionar a questão, valorizamos a dedicação da entrevistada na pesquisa e busca pelas informações que não recordava, o que nos mostra o interesse real na participação neste trabalho e o espírito pesquisador que é importante para todo professor no exercício de seu ofício.

Notamos, também, em sua justificativa de que *k* não é divisível por 17, que encontrou o número –22 como último número a ser analisado e escreve: “Embora seja

um número negativo, não é múltiplo de 17". Destacamos este trecho, pois pode indicar uma estranheza comum a muitos professores e alunos ao lidar com Divisibilidade com números inteiros negativos. Lembramos, porém, que a Divisibilidade não é tratada apenas no universo do conjunto dos números naturais; antes é definida no âmbito dos números inteiros, uma vez que para um número inteiro *A* ser divisível por um número inteiro *B*, deve existir um número inteiro *C* de tal forma que $A = B.C$, sendo, portanto, totalmente plausível buscar e encontrar Divisibilidade com números inteiros, sejam eles positivos ou negativos.

Voltando à entrevista, o diálogo prossegue:

> J[65] – E, pensando no Teorema Fundamental da Aritmética em que todo o número tem uma única e exclusiva decomposição e a sua decomposição são fatores primos, você pensa em alguma outra forma de fazer, além de usar os critérios de 3,5, 11...?
> E[66] – Que, aí, eu poderia ir 'pra' decomposição dos números, que seriam esses daqui [97 e 163], verificar se são primos ou não.
> J – Então, é porque aqui [enunciado] já tem informação de que eles são primos.
> E – Isso. E, aí, seria... poderia ver pela divisibilidade dos dois.
> J – Então, seria um outro caminho?
> E – Sim, seria. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ESTER, 2020)

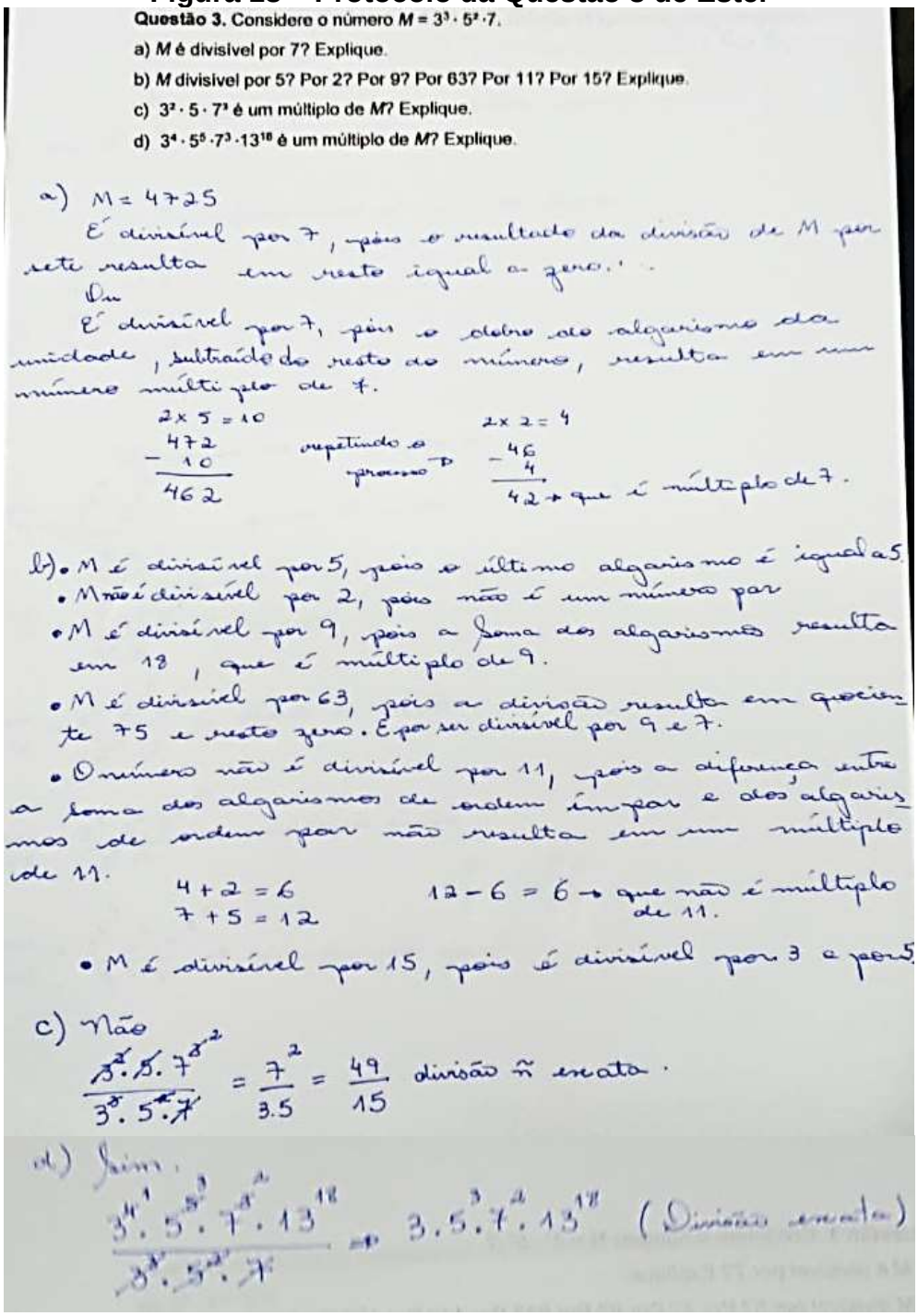
Neste trecho da entrevista, Ester percebe que a utilização do Teorema Fundamental da Aritmética poderia facilitar a definição da divisibilidade de *k* pelos números indicados. Entretanto, diz ser necessário verificar se são primos ou não, mesmo sendo dito que ambos são primos. Além disso, menciona, novamente em verificar os critérios de divisibilidade dos números 97 e 163, parecendo não estar claro que a unicidade da decomposição de um número inteiro, definido pelo Teorema Fundamental da Aritmética, não seja suficiente para garantir por divisibilidade por *k*.

Questão 3

A seguir, mostramos o registro das respostas para a Questão 3 de Ester.

[65] A letra "J" será utilizada para se referir à fala da entrevistadora Joice durante o diálogo.
[66] A letra "E" será utilizada para se referir à fala de Alice durante o diálogo.

Figura 18 – Protocolo da Questão 3 de Ester



Questão 3. Considere o número $M = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

a) M é divisível por 7? Explique.

b) M divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 63? Por 11? Por 15? Explique.

c) $3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$ é um múltiplo de M? Explique.

d) $3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^{18}$ é um múltiplo de M? Explique.

a) M = 4725

É divisível por 7, pois o resultado da divisão de M por sete resulta em resto igual a zero.

Ou

É divisível por 7, pois o dobro do algarismo da unidade, subtraído do resto do número, resulta em um número múltiplo de 7.

2 x 5 = 10
472 − 10 = 462 (repetindo o processo)

2 x 2 = 4
46 − 4 = 42 → que é múltiplo de 7.

b)
- M é divisível por 5, pois o último algarismo é igual a 5.
- M não é divisível por 2, pois não é um número par.
- M é divisível por 9, pois a soma dos algarismos resulta em 18, que é múltiplo de 9.
- M é divisível por 63, pois a divisão resulta em quociente 75 e resto zero. E por ser divisível por 9 e 7.
- O número não é divisível por 11, pois a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e dos algarismos de ordem par não resulta em um múltiplo de 11.

4 + 2 = 6
7 + 5 = 12
12 − 6 = 6 → que não é múltiplo de 11.

- M é divisível por 15, pois é divisível por 3 e por 5.

c) Não

$\frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7^2}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{7^2}{3 \cdot 5} = \frac{49}{15}$ divisão não exata.

d) Sim.

$\frac{3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^{18}}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13^{18}$ (Divisão exata)

Fonte: Dados da pesquisa

Claramente, os cálculos apresentados nos itens a e b para justificar da resposta desta questão continuam seguindo aos critérios de divisibilidade dos números propostos. Os itens c e d, porém, já mostra um método diferente do que tinha sido apresentado pela entrevistada para realizar o cálculo da divisão para verificar divisibilidade. Sobre esta questão, continuamos o diálogo:

> J – […] E, aí, como você pensou em cada uma das questões?
> E – Aqui, eu poderia, por exemplo, ter começado já mantendo o formato que está, já decomposto, e simplesmente, pelas propriedades da potenciação, fazer a divisão, mas a princípio, pensei: não, vou resolver. E fui pelos critérios de divisibilidade, mas seria muito mais rápido e muito mais fácil. Tanto que depois, os últimos, eu fui por este caminho […]. Então, a partir do momento que eu vi... aqui, por exemplo, 3^{18}, falei: não tem condições. Vamos voltar para o outro caminho, mas eu não vou apagar tudo e deixei.
> J – Ah! Sim, mas você faria dessa forma os outros também?
> E – Faria, faria. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ESTER, 2020)

Em sua fala, parece que Ester entende resolver utilizando os critérios de divisibilidade não é eficiente quando os números envolvidos não são ditos “pequenos”, como o número *M* presente do enunciado e, nos dois primeiros itens, utilizou o resultado do seu produto. Porém, ao perceber que os números presentes nos dois últimos itens possuem expoentes que o tornam “grandes”, muda sua forma de resolver e utiliza as propriedades do procedimento da divisão de potências, que, na verdade, é a forma escolhida por ela para encontrar o resultado da divisão de dois números escritos em sua forma decomposta em fatores primos. Parece que, para a docente, utilizar propriedades não resolve a questão. Somente estaria resolvida e justificada a questão quando se faz o uso de cálculos. Ainda assim, quando observamos a mudança de estratégia de resolução, passando da utilização dos critérios de divisibilidade para a utilização da propriedade da divisão de potências percebemos seu conhecimento sobre Procedimentos, categoria do MTSK, pelo uso de mais de um algoritmo na sua resolução.

Entendemos que esta é uma ideia equivocada, uma vez que os resultados de afirmações matemáticas incontestáveis, como teoremas, corolários e lemas, podem auxiliar na resolução de questões matemáticas de forma mais econômica, com menor esforço cognitivo, sem que seja necessário recorrer a cálculos extensos para sua conclusão. Além disso, acreditamos que isto pode contribuir para que os alunos pensem da mesma maneira, considerando que uma resposta “curta”, mas que se paute em verdades matemáticas já provadas, não sejam suficientes para justificar seu pensamento.

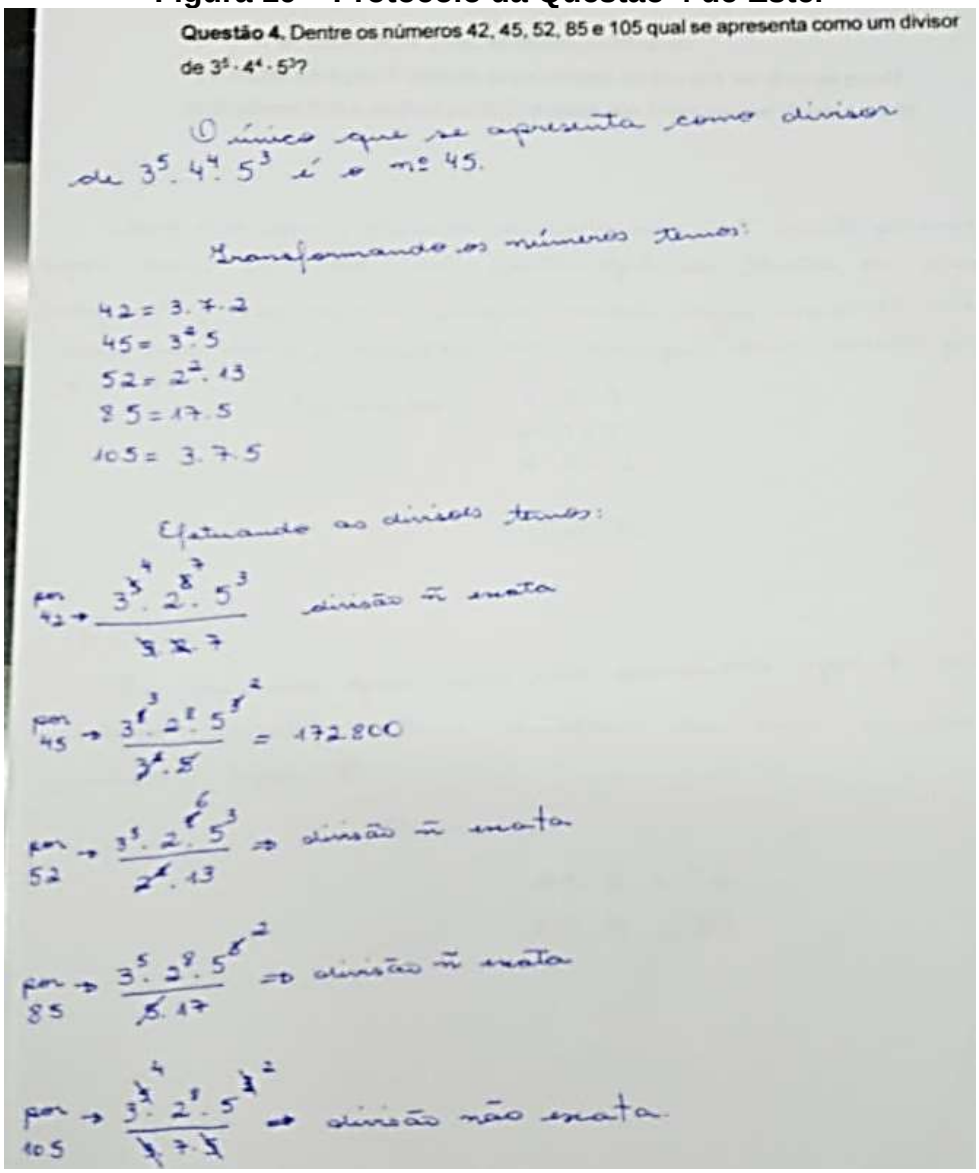
Ainda que tenha utilizado os números apresentados nos dois últimos itens na forma inicialmente proposta, não nos fica claro que a professora esteja pensando especificamente no Teorema Fundamental da Aritmética. Parece que ela está pensando exclusivamente na verificação por meio da obtenção ou não de uma divisão

exata e não observando a presença ou não dos fatores da decomposição de um número na decomposição do outro, mesmo que implicitamente esta verificação seja feita por meio do procedimento da divisão de potências. Isto se evidencia no item c, quando escreve o último número na forma fracionária, sem produtos no numerador e no denominador e escreve “divisão não exata”.

Questão 4

Seguem as respostas de Ester para a Questão 4.

Figura 19 – Protocolo da Questão 4 de Ester



Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que o procedimento para o cálculo de divisões permanece o mesmo registrado na questão anterior, por meio da propriedade da divisão de potências. Entretanto, notamos um movimento contrário do que vinha fazendo.

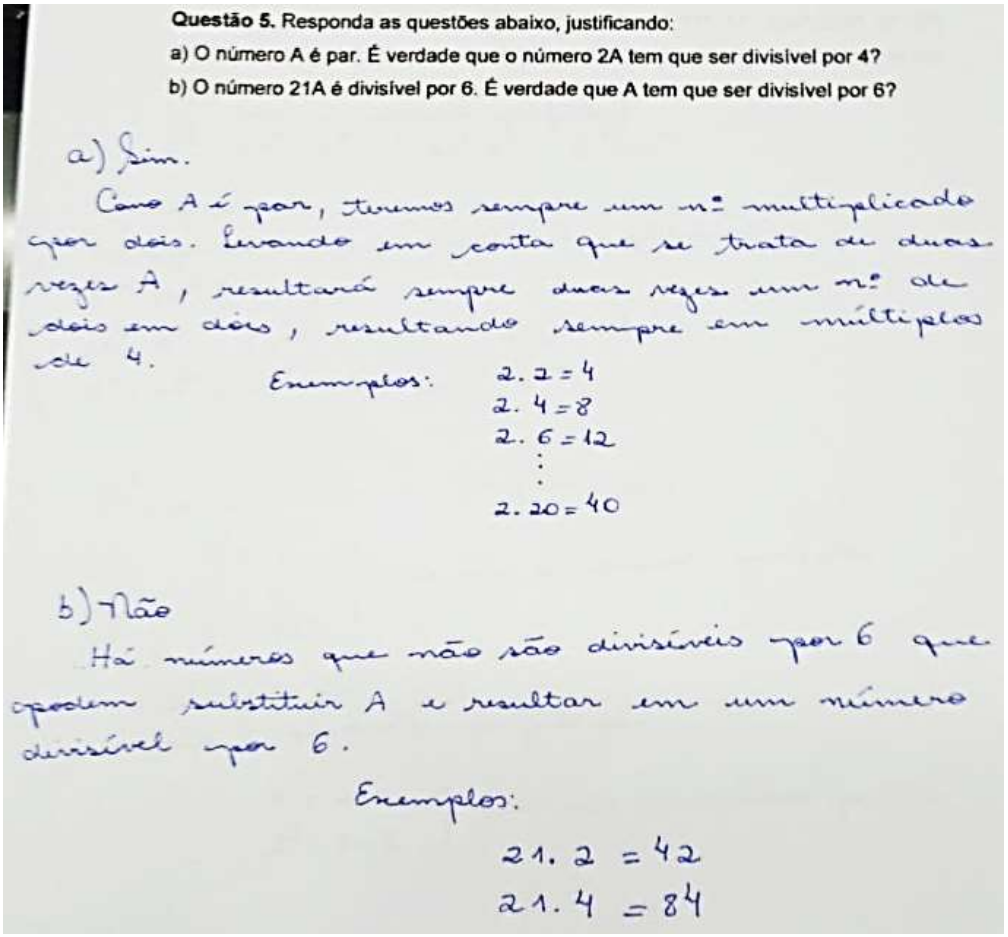
Como relatou em sua fala na questão anterior, Ester percebeu que utilizar a forma decomposta dos números facilitaria sua resolução e foi desta maneira que procedeu. Anteriormente à utilização da propriedade proveniente do procedimento da divisão de potência, a docente transformou todos os números do enunciado na sua representação decomposta em fatores primos, indicando-nos seu domínio no que diz respeito ao Teorema Fundamental da Aritmética, sem necessitar apresentar um algoritmo específico para isso. Mesmo que suas justificativas continuem sendo realizadas utilizando o procedimento divisão, entendemos que seu conhecimento sobre o Teorema Fundamental da Aritmética é concreto e claramente está interiorizado pela professora.

Esta constatação nos permite, igualmente, afirmar, que, segundo o modelo MSTK, Ester possui o conhecimento categorizado por Procedimentos, no subdomínio do Conhecimento dos Temas Matemáticos, já que a docente percebe as condições que são suficientes para resolver questões relacionadas ao Teorema Fundamental da Aritmética, reconhecendo como e quando deve utilizar determinado procedimento para a resolução das questões.

Questão 5

Para a próxima descrição, apresentamos os registros de resposta de Ester para a Questão 5.

Figura 20 – Protocolo da Questão 5 de Ester



Fonte: Dados da pesquisa

Questionando a professora sobre sua resposta do item a, continuamos com a entrevista:

> J – Agora, esse aqui. Quero que você me explique o seu sim. É porque você tem certeza de que é assim em todos os casos? Existem exceções?
> E – O sim é porque eu tenho certeza. Porque esse é duas vezes... você 'tá' falando do *A*.
> J – Isso, isso do *A*.
> E – Que um número... que se *A* é par e esse vai ser duas vezes o *A* sempre, esse 2 do vezes [*2A*] com o 2 do número par, que vai ser de 2 em 2, já resulta em quatro, então é impossível não ser múltiplos de quatro... 'tá'? (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ESTER, 2020)

Ainda que a entrevistada não tenha utilizado uma demonstração formal para justificar sua resposta, em sua fala, utilizou o raciocínio que seria a base para uma demonstração formalizada, o que é suficiente para validar sua resposta afirmativa para questão. Além disso, utilizou as propriedades inerentes ao Teorema Fundamental da Aritmética ao esclarecer que as fatorações existentes na regra geral para números pares e no número *2A*, geram sempre um número divisível por 4.

Tendo observado que no item b do protocolo de Ester possui um exemplo numérico, o diálogo segue:

> J – Ok. E no b? Sim, é esse? Não, é exatamente não? Pode ser sim, pode ser não?
> E – Pode ser. Pode ser sim, pode ser não, mas não dá para afirmar que é verdade que *A* é sempre divisível por 4... por 4, não, por 6. Por isso, eu que coloquei não, porque tem exceções: o 2, o 4 não é, não é divisível por 6 e ao mesmo tempo deu um número divisível por 6.
> J – E, pensando na decomposição de fatores no teorema você conseguiria pensar em alguma forma de explicar o b, pensando na fatoração dos números que estão presentes?
> E – De quais números?
> J – Do 21 e do 6, pensando que o número é *21A* ser divisível pelo 6... tentando justificar um pouco pelo teorema, pela decomposição deles. Porque aqui você deu um exemplo, 'né'?
> E – Uhum.
> J – Tem que resultar num número divisível por 6. […] Então eu estou pensando num número específico.
> E – Sim, específico.
> J – Mas e agora, pensando no 21 e na sua decomposição, o ser divisível por 6 tem alguma coisa a ver ou o que teria que ter esse *A* 'pra' ele ser, de fato, divisível por 6?
> E – Ah sim! Porque o 21 na decomposição seria 3 e 7, 3 vezes 7... para ser divisível por 6, teria que ter um múltiplo de 6.
> J – Múltiplo de 6, obrigatoriamente de 6? Já que você já tem um 3 e um 7.
> E – Então, não, porque o 2 e o 4 estão dentro […]. É, é... não teria que ser obrigatoriamente, não. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ESTER, 2020, grifo nosso)

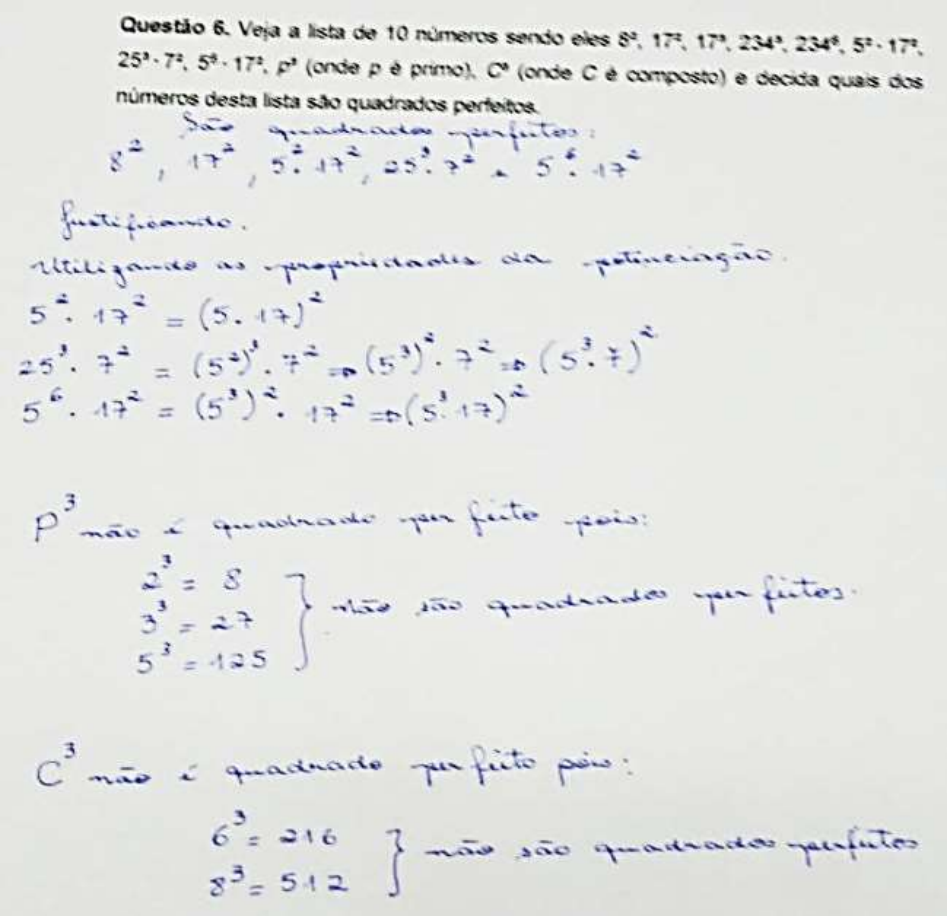
A entrevistada responde corretamente à questão, conforme observamos no registro de seu protocolo, mas utiliza o método de tentativa e erro para chegar à sua conclusão, sem citar uma possível utilização da decomposição em fatores primos dos números citados que a auxiliasse na resolução.

Mesmo tendo utilizado uma ideia de decomposição dos números envolvidos no enunciado no item anterior desta questão, a professora mostra dificuldade ao tentar desenvolver o mesmo raciocínio, quando se trata de uma situação um pouco mais complexa. Acreditamos, entretanto que, no grifo, há indícios de que o desenvolvimento de seu raciocínio poderia levar a conclusões corretas sobre a questão, utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética, mas, devido à próprio momento de possível pressão da entrevista, não houve uma conclusão.

Questão 6

Mostramos, finalmente, o protocolo com as respostas de Ester para a Questão 6.

Figura 21 – Protocolo da Questão 6 de Ester



Fonte: Dados da pesquisa

Nesta questão, Ester afirma ter resolvido tranquilamente os primeiros números da questão, porém admite ter tido dificuldades apenas com os números que apresentam variáveis. Observando seu protocolo, fica-nos evidente a preferência pela utilização das propriedades da potenciação para solução das questões, apesar de a entrevistada não perceber que o Teorema Fundamental da Aritmética, com suas consequências, da mesma forma, poderia ser utilizado.

Solicitamos, então, que informasse o que entende por quadrado perfeito. A professora responde que “um número é um quadrado perfeito quando a raiz quadrada é exata ou quando é possível formar um quadrado com o número de, de... da base, com lados da medida da base, ‘pra’ mim seria um quadrado perfeito... ou um número elevado ao quadrado”. Com esta resposta, entendemos que a entrevistada mostra compreender o conceito de quadrado perfeito de diversas formas, o que nos que a docente possui um conhecimento especializado do professor de Matemática, segundo o modelo MTSK, sobre o conhecimento de Definições que mostra seu domínio na compreensão de propriedades de um determinado conceito e modos alternativos que

que podem ser utilizadas para defini-las. Este é um conhecimento que entendemos ser importante para perceber conexões existentes nos diversos contextos da Matemática, além de ser imprescindível esta diversidade de entendimento para solução da questão.

Perguntando sobre qual a dificuldade que sentiu, continuamos o diálogo:

> E - A dificuldade que eu tive... 'peraí', deixa eu parar pensar [lendo a questão]. É, é... a dificuldade que eu tive, primeiro, foi pensar aqui e pensar em analisar números primos, mas aí pensei: se ele é elevado ao cubo dificilmente ele vai dar mesmo um quadrado perfeito e fui vendo alguns exemplos. Se tem alguns exemplos que não dão, então não é... não precisava de regra... foi isso que eu utilizei.
> J – No *p*, ok, pelo *p* ser primo. O fato de ser primo é o diferencial?
> E – Isso. Agora, no caso do número composto, já teria que ir mais além também, mas também cheguei em uns que não deu (sic), eu falei: não é e pronto! Simples assim, já que é a regra, é. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ESTER, 2020)

Vale ressaltar o raciocínio utilizado pela professora, que levou em conta a natureza do número primo para decidir sua resposta, com a utilização de exemplos numéricos para lhe ajudar em sua conclusão. E apesar de não ter explicitado a utilização do Teorema Fundamental da Aritmética, esta análise realizada por ela nos números primos nos indica entendimento que um número primo já está na sua forma decomposta.

É interessante notar que, ao perceber a existência de alguns exemplos contrários a C^3 ser um quadrado perfeito, Ester utiliza uma premissa sobre tautologias na matemática, na qual, se houver ao menos uma possibilidade contrária à afirmação inicial, a tautologia não é válida. Entretanto, neste caso, este conceito não se aplica, pois *C* é uma variável que possui condições que podem atender ou não ao que se questiona.

Ao ler rapidamente o documento, contendo as possíveis respostas preparado por nós para lhes entregar no fim da entrevista, seguimos com a conversa:

> E – Ah, 'tá'... mais rápido, mais fácil. É isso que a gente pensou: meu Deus! É muita coisa 'pra' escrever. Porque quando a gente ensina, é critério de divisibilidade, lá no sexto ano... é que faz muito tempo... e a gente vai pelas regras, pelos critérios, não vai pela decomposição do número. E outra coisa, até no Ensino Médio eles tem uma dificuldade tremenda nessa decomposição dos números. Porque, realmente, acho que deveria ser dada maior atenção, deveria ser mais trabalhado do que é. Porque, 'pra' um aluno do Ensino Médio, 2º ano... Estou dando aula 'pra' eles este ano, você sabe.
> J – Sim, sim.
> E – Segundo ano, se eu for fazer uma divisão dessa assim, ele já vai ter dificuldade.

> J – Mas, mesmo utilizando não necessariamente usando o Teorema, você acha que algumas das questões eles conseguiram resolver?
> E – Infelizmente, acho que não. “Mas são múltiplos de 24”. Eles vão dividir todos por 24, tal. Então, divisores de 24 eles iriam dividir e então, ainda sairia. A primeira acredito que daria, mas com alguma dificuldade. Por conta de não saber a tabuada, não saber fazer uma divisão por dois números, porque você saiu da sala de aula há um tempo e a coisa caiu muito no decorrer deste período. Por conta de que agora todo mundo é fruto da progressão continuada. Você ainda pegou os que não eram […]. Então, agora, a situação está mais crítica. Então, para eles, seria sim. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ESTER, 2020, grifo nosso)

Aqui, notamos que rapidamente a entrevistada percebe a facilidade e a economia trazida pela utilização do Teorema Fundamental da Aritmética na resolução das questões. Além disso, nota o quão importante seria um trabalho mais aprofundado sobre o Teorema Fundamental da Aritmética nos anos iniciais do Ensino Fundamental II, dando enfoque não apenas nos critérios de divisibilidade, mas no próprio Teorema Fundamental da Aritmética, juntamente com suas consequências.

Ao comentar sobre a dificuldade apresentada pelos alunos do Ensino Médio com temas já trabalhados no sexto ano, no grifo, inferimos que isto se dê pelo trabalho superficial dado à decomposição em fatores primos nos anos iniciais, o que pode indicar mais uma vez a ausência do trabalho com números inteiros no decorrer do percurso escolar, como Machado, Maranhão e Coelho (2013) indicam ser importante para a formação do cidadão. Além disso, entendemos que, em qualquer momento deste percurso, é possível ver e rever o estudo de temas que eventualmente não foram adequadamente estudados nos níveis indicados para a tratativa destes temas, guardadas as devidas limitações na possibilidade de aprofundamento provocadas pelas necessidades para o cumprimento do currículo.

A professora aponta dificuldades que alunos apresentam em procedimentos simples como o da divisão e a determinação de múltiplos e divisores, por não saberem o Teorema Fundamental da Aritmética e por não ter sido trabalhado adequadamente estes temas com eles. O reconhecimento sobre estas dificuldades mostra o conhecimento de Ester, segundo o MTSK, em relação às Forças e Dificuldades associadas à Aprendizagem e o fato de explicitar que temas como a determinação de múltiplos e divisores deveriam ser aprofundados em séries anteriores mostram seu conhecimento sobre Conexão de Simplificação, já que tem consciência de que este domínio facilitaria o trato de seus alunos em conteúdos atuais.

Além disso, critica o sistema atual de progressão continuada que existe, implicitamente no ensino público estadual paulista, surgido entre os anos de 1997 e 1998, com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Com os PCN, a estruturação do sistema de ensino e de retenção de alunos passou a ser por Ciclos, sendo, por exemplo, a 5ª série e a 6ª série (atuais 6º e 7º anos na BNCC) fazendo parte do Terceiro Ciclo e a 7ª e 8ª séries (atuais 8º e 9º anos) formando o Quarto Ciclo. Como, anteriormente, os ciclos de retenção eram anuais, começou-se a ser interpretado por toda comunidade escolar, incluindo pais, professores e alunos, a existência de uma progressão continuada durante os dois anos de cada ciclo.

Finalizamos a entrevista, que teve duração de vinte e um minutos, agradecendo a participação e disponibilidade da professora Ester em participar desta pesquisa.

Resumidamente, Ester apresenta ter domínio dos conceitos de divisor e múltiplo, explicitando-os de uma maneira mais genérica, sem necessariamente se apoiar nos números do enunciado para tentar exemplificar a divisibilidade ou multiplicidade de um número. Além disso, mostra ter clareza do significado dos termos de “múltiplo de”, “ser divisível por”, “divisor de” e, apesar de a maior parte de suas justificativas serem apresentadas por meio dos procedimentos de divisão, intuímos que foram usadas apenas para confirmar e justificar utilizando cálculos, em que a realização destes procedimentos foram meios imprescindíveis para que alcançasse suas conclusões.

Apesar de não parecer ser seu primeiro impulso o uso do Teorema Fundamental da Aritmética como ferramenta para soluções de questões que envolvam números primos e a fatoração, a docente consegue percebê-lo e utilizá-lo de forma correta. Entretanto, aparenta duvidar da unicidade desta decomposição, já que em alguns momentos indicou ser necessário verificar a divisibilidade de números primos produtos de um número inteiro.

A docente mostra ter domínio sobre os critérios de divisibilidade, inclusive de números que possuem critérios pouco conhecidos e os utilizou, conforme achou necessário. Contudo, mudou sua maneira de verificação da multiplicidade e da divisibilidade entre dois números inteiros, usando o Teorema Fundamental da Aritmética de forma adequada, quando os critérios de divisibilidade já não eram ferramentas eficazes para que tomasse suas decisões.

Em questões em que variáveis são envolvidas, a professora mostrou domínio na justificativa formal, ao utilizar a decomposição proveniente da forma geral de um número par combinada com a decomposição do número *2A* informado no enunciado. Porém, mostrou dificuldades em utilizar consequências do Teorema Fundamental da Aritmética para lhe auxiliar na resolução quando o número envolvido foi *21A*, apoiando-se na tentativa e erro para sua conclusão.

Quando está trabalhando em outra temática externa ao Teorema Fundamental da Aritmética, como Números Quadrados Perfeitos, Ester mostrou conhecer o tema, utilizado corretamente a decomposição em fatores primos em números com valores exatos para decidir se um número é um quadrado perfeito. Entretanto, apresentou certa dificuldade em generalizar estes resultados quando os números envolvidos foram p^3, com p primo e C^3, com C composto, apesar de mostrar em alguns momentos que compreendia as possibilidades de decomposição de um número primo e de um número composto.

5.3. Entrevista com a professora Regina[67]

Inicialmente, fomos até a escola em que Regina trabalha e, durante seu horário de ATPC, lhe esclarecemos qual o objetivo principal da pesquisa, assim como o tema abordado e como se daria a coleta de dados a qual estaria se voluntariando para participar. Foram-lhe entregues o TCLE, o Formulário de Caracterização do(a) Participante e o Instrumento para a Coleta dos Dados seguido das seis questões que já apresentamos anteriormente. Solicitamos que Regina assinasse o TCLE, respondesse a Caracterização e as questões da Coleta de Dados e que nos enviasse fotos com suas respostas para que as analisássemos antes da entrevista, em que realizaríamos uma pequena Intervenção e esclarecimentos sobre sua resolução. Regina não enviou os arquivos, conforme solicitado no encontro anterior, sem que fosse possível fazer análise prévia de suas respostas. Ainda assim, prosseguimos para o segundo encontro.

Segundo o preenchimento de seu o Formulário de Caracterização, a professora Regina, com 45 anos de idade, trabalha há apenas cinco anos como docente exclusivamente no ensino público, todos dedicados ao Ensino Básico, tanto Ensino Fundamental II, quanto Ensino Médio. Sua formação inicial na graduação em

[67] Nome fictício que será utilizado durante toda a pesquisa para descrição deste sujeito de pesquisa.

Licenciatura em Matemática foi concluída em 2009, pelo Centro Universitário Fundação Santo André, não tendo realizado nenhum curso de especialização desde então. Sobre a Teoria dos Números, Regina o considera um assunto bem abrangente, destacando como temas relacionados, os números primos, Divisibilidade e potências. Para ela, o estudo da Teoria dos Números no Ensino Básico é importantíssimo, ainda que muitos alunos avancem ao Ensino Fundamental II sem possuir este conhecimento.

Sem ter analisado previamente as respostas de Regina, fomos até à biblioteca da escola durante seu ATPC, e informamos que a entrevista seria gravada e os dados seriam utilizados posteriormente no relatório da pesquisa.

Assim, iniciamos um momento de rápida Intervenção, apresentando o tema desta pesquisa, o Teorema Fundamental da Aritmética, e explicando que ele foi o escolhido dentre o vasto conjunto de temas que compõem a Teoria dos Números e, especificamente, da Teoria Elementar dos Números.

Ao ser questionada sobre recordar-se, ao menos, do nome Teorema Fundamental da Aritmética, a professora responde negativamente e explicamos que este conceito, por vezes, é desvalorizado mesmo entendendo que ele fundamenta todos os números inteiro e pode não ser lembrado com este nome.

Informamos, então, que é mais conhecido como decomposição em fatores primos e que ainda que possa parecer simples, é possível entender a natureza de um número e suas características. A entrevistada afirma entender que é possível escrever os números inteiros como produtos de fatores primos. Acrescentamos que esta é uma verdade, exceto pela ordem dos fatores e que muitos professores não se utilizam das consequências deste Teorema.

A professora corrobora tal afirmação e acrescenta: “Realmente! Na minha formação mesmo, eu não lembro de ter tido isso”. Entendemos, então, que durante sua formação inicial não se recorda de ter estudado o Teorema Fundamental da Aritmética, ainda que este assunto, segundo Resende (2007), seja importante para a formação inicial do professor de Matemática que atuará na Educação Básica.

Comentamos que, apesar de lecionar também no Ensino Superior, preferimos voltar à base para a realização desta pesquisa, com Regina observando que “daí aquela pessoa já vai para lá já sabendo, ‘pra’ graduação”. Parece que, para Regina, é importante que se tenha uma boa qualidade no Ensino Básico, o que acarretaria um melhor aproveitamento das habilidades necessárias para um bom andamento dos

estudos exigidos no Ensino Superior. A entrevistada ainda afirma veementemente que não existe a presença do Teorema Fundamental da Aritmética nos livros de consulta que tem utilizados para apoiar a sua prática. Como no início da Intervenção não reconheceu nem ao menos o nome Teorema Fundamental da Aritmética, apresentamos o vídeo do *Khan Academy* Brasil sobre o Teorema Fundamental da Aritmética programado para este momento.

Concluída a execução do vídeo, sem maiores comentários sobre seu conteúdo pela entrevistada, questionamos quais foram suas impressões em relação ao instrumento de coleta de dados, como um todo. Ela responde:

> A princípio eu achei bem difícil. São coisas que a gente, por exemplo, eu, como eu não dou aula assim... essa matéria é mais 'pro' começo, 'né'? […]. Faz muito tempo que eu não dou aula 'pra' eles. Minha série, o meu ano, agora, é nono, terceiro ano do Ensino Médio também. Então não, né? Então eu tive um pouco de dificuldade, sim, para responder. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020)

Embora seja um assunto considerado fundamental para docentes que atuam em todo Ensino Básico e ser considerado de baixa complexidade, a professora afirma ter encontrado dificuldades para responder as questões, justificando-se por não estar atuando nos anos em que este tema é mais especificamente estudado. Entretanto, segundo o modelo MSTK, esta não poderia ser considerada uma justificativa plausível, uma vez que um elemento fundamental no conhecimento especializado do professor é o conhecimento efetivo da disciplina, propriamente dita, que se deseja ensinar, no caso o Conhecimento Matemático. Isto inclui conhecer de maneira fundamentada os conteúdos matemáticos e seus significados com um nível de aprofundamento maior do que aquele esperado para os alunos.

É compreensível que um breve esquecimento ocorra sobre conceitos que não são utilizados há tempos ou que não são pertinentes ao nível de conhecimento em que atua. Entretanto, preocupa-nos perceber que conceitos que, segundo Machado (2008), deveriam permear todo o Ensino Básico, sejam lembrados e explorados apenas nos anos em que são introduzidos. Acreditamos que conceitos antigos, tratados em anos anteriores, devem ser retomados e integrados aos conceitos a serem aprendidos sempre que possível, para que não sejam compreendidos de forma desintegrada.

Diante disso, perguntamos à entrevistada se consultou algum material que tenha lhe ajudado a resolver as questões, que respondeu: "Sim, consultei. Em casa,

consultei o Google[68]. É porque realmente tem algumas coisas aqui que eu não ‘tô’ usando mais. Então, aí eu consultei, sim.” O fato de buscar informações sobre ferramentas que a auxiliaria na resolução das questões, ainda que não tenha informado quais fontes do Google tenha consultado, mostra sua proatividade e disposição para a participação nesta pesquisa. Regina continua:

> Aí, no começo, eu fui respondendo, fui resolvendo as potências, mas quando chegou depois, lá do meio ‘pro’ fim, eu vi que tinha a questão da propriedade. Aí que eu fui me ligar. Eu falei: não, porque ‘tá’ dando muito grande. Quando começou a dar o número muito alto, eu pensei: aqui tem alguma coisa. Aí, eu falei assim: não... é, dá para resolver de outra forma, mas, a princípio, não. Eu resolvi a potência, depois eu dividi [...]. Porque no dia a dia mesmo, a gente não trabalha esses números grandes para os alunos. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020)

Quando afirma que os números eram muito grandes, a entrevistada parece entender que existe uma maneira mais econômica para resolver as questões, que não é simplesmente “resolver potências”. Podemos inferir que o costume de utilizar, tanto para si mesma quanto para seu momento de ensino, apenas números ditos “pequenos” pode dificultar a análise das possíveis formas de se resolver exercícios com números que estão em sua forma fatorada.

Regina, ainda, comenta que, ao resolver as questões e buscar formas mais rápidas de resolver o problema, pensou em utilizar a notação científica por serem números muito grande. Entretanto, a representação de números em notação científica não é uma representação que utiliza apenas fatores primos e está situada no universo do conjunto dos números reais. Isto pode indicar, segundo o modelo MTSK, a ausência do conhecimento especializado relativo à Conexões de Conteúdos Transversais, pela docente não conseguir fazer relações entre temas que, de fato, possuem características em comum.

Ainda assim, vale ressaltar o esforço de Regina na busca de referências em sua experiência por algo que poderia ajudá-la na compreensão das questões e do próprio Teorema Fundamental da Aritmética.

Terminadas as considerações iniciais da Intervenção, seguimos para análise das questões do Instrumento de Coleta de dados de forma mais detalhada.

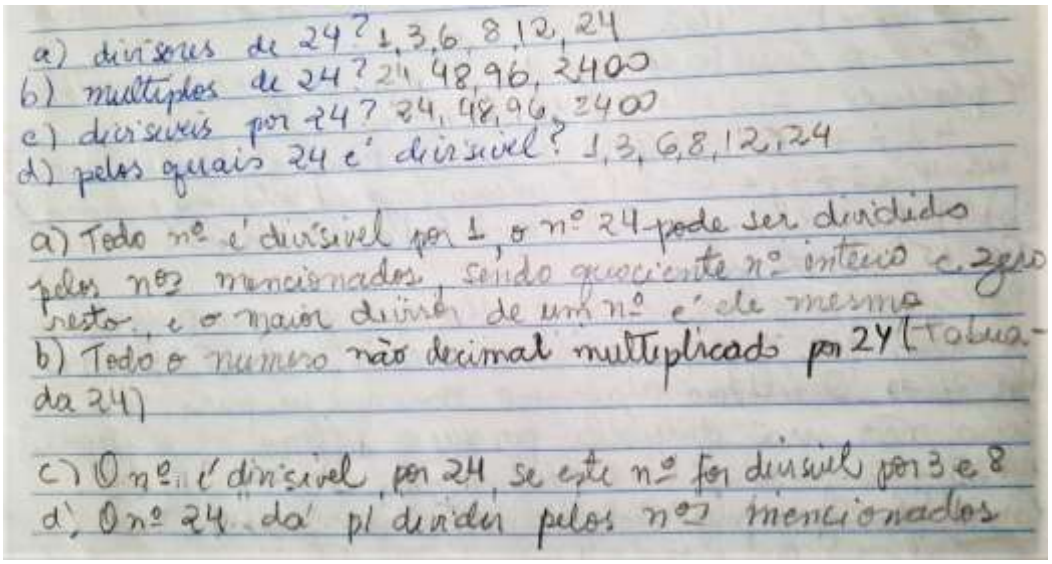
---

[68] Ferramenta de pesquisa pertencente à Google LLC, uma empresa multinacional de serviços online e *software*.

Questão 1

Apresentamos, a seguir, o protocolo das respostas da Questão 1 de Regina.

Figura 22 – Protocolo da Questão 1 de Regina



Fonte: Dados da pesquisa

Sobre como Regina resolveu a primeira questão, começamos com o diálogo:

> R[69] – Na verdade, os múltiplos eu encaro como aquilo que você acabou de falar, 'né'. Seria um número... seria a tabuada do 24 […]. Ele vai até o 24.
> J[70] – Mas é pensando no processo de multiplicação?
> R – Isso, de multiplicação.
> J – E os divisores seriam como?
> R – Os números que daria para dividir por 24. Vinte e quatro dividido por um número. Aí, no caso teria que dar um número sem ser decimal, número inteiro e, também, não ia sobrar nada.
> J – Então, aí seria um divisor? Foi isso que você fez aí?
> R – Foi. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020, grifo nosso)

No primeiro trecho grifado, ao dizer que os múltiplos de 24 vão até 24, parece que a professora confundiu o conceito de múltiplo com o de divisor, ainda que não tenha explicitado uma definição geral sobre o que é um múltiplo e um divisor, durante sua fala. Em seu protocolo, porém, esboça uma definição para divisor no item a, afirmando exatamente o que tinha dito ser múltiplo em seu discurso, o que é contraditório. Ainda assim, indica, também em sua fala, que, para verificar se um

[69] A letra "R" será utilizada para se referir à fala de Regina durante o diálogo.
[70] A letra "J" será utilizada para se referir à fala da entrevistadora Joice durante o diálogo.

número inteiro é divisor de outro, executa um processo de divisão e observa se o resto é zero.

Além disso, no segundo grifo, notamos uma linguagem inadequada na fala da docente ao comentar sobre sua maneira de encontrar um divisor. O correto seria dizer apenas que o resultado do procedimento da divisão teria de ser exato, uma vez que um número inteiro também pode ser escrito em representação decimal. A forma expressa pela professora transmite a falsa impressão de que um número ser inteiro e ter representação decimal sejam coisas opostas, sem intersecção.

Ainda em seu protocolo, sobre uma definição para múltiplo no item b, a entrevistada apresentou uma definição consistente, excetuando por ter escrito "tabuada 24" entre parênteses. Esta é uma terminologia que, possivelmente, a professora utilize com seus alunos para fazê-los entender o que é um produto de um número inteiro com 24. Porém, parece limitada, uma vez que as tabuadas são feitas costumeiramente com produtos até 10, o que pode deixar a entender que os múltiplos de 24 terminam em 240 = 10.24.

No item c, não é possível perceber se a entrevistada percebeu a igualdade existente nas expressões "ser múltiplo de" e "ser divisível por", mas apresenta corretamente o critério de divisibilidade por 24; parece, da mesma maneira, que não percebeu a semelhança entre "ser divisor de" e "pelo qual é divisível".

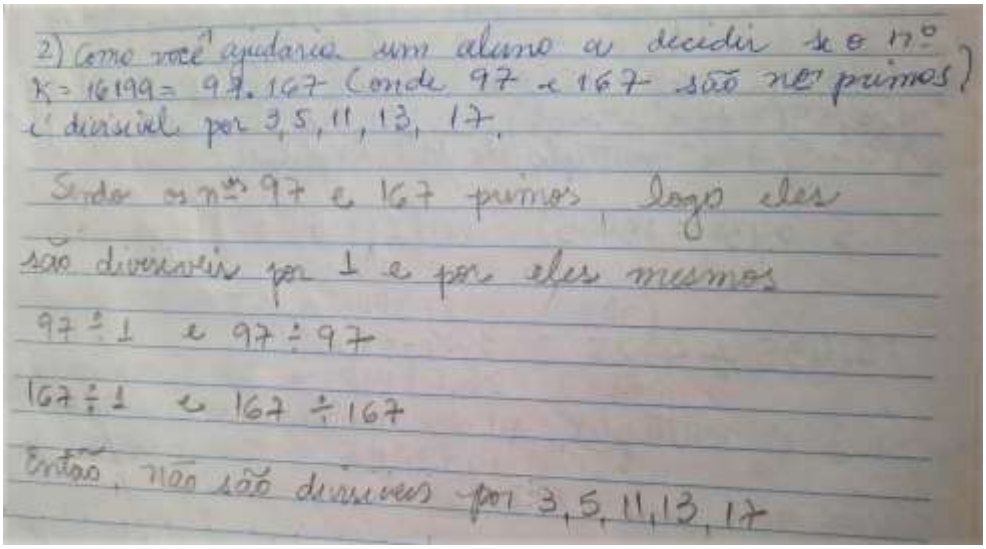
Questionada se utilizou algum critério de divisibilidade na resolução da Questão 1, Regina afirma: "[…] nesse primeiro eu não usei, mas tem. É porque na divisibilidade, na verdade, tem para todos os números só que cada número é uma situação diferente. Também, no caso aqui, eu usei a divisibilidade. Cada um, cada número tem o seu [critério] específico de resolver."

É interessante notar que a utilização dos critérios de divisibilidade é primeira reação da professora ao tentar solucionar as outras questões do Instrumento de Coleta de Dados em que são apresentados números na sua forma fatorada. Além disso, mostrou saber que, ainda que pareça estar acostumada a trabalhar com números pequenos, existe um procedimento geral para o reconhecimento da divisibilidade de qualquer número inteiro, sendo primo ou não. Este é um Conhecimento Especializado do Professor de Matemática que, segundo Flores-Medrado *et al*. (2014), está relacionado à categoria Procedimento, visto que a docente reconhece as condições e maneiras de se determinar a divisibilidade por um número inteiro, mesmo que não as tenha descrito.

Questão 2

Segue abaixo o protocolo das respostas da Questão 2 de Regina.

Figura 23 – Protocolo da Questão 2 de Regina



Fonte: Dados da pesquisa

Observando os registros do protocolo da Questão 2, percebemos que Regina justificou sua resposta, utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética, descrevendo a unicidade da decomposição apresentada ao salientar a primalidade dos números 97 e 167, conforme informado no enunciado.

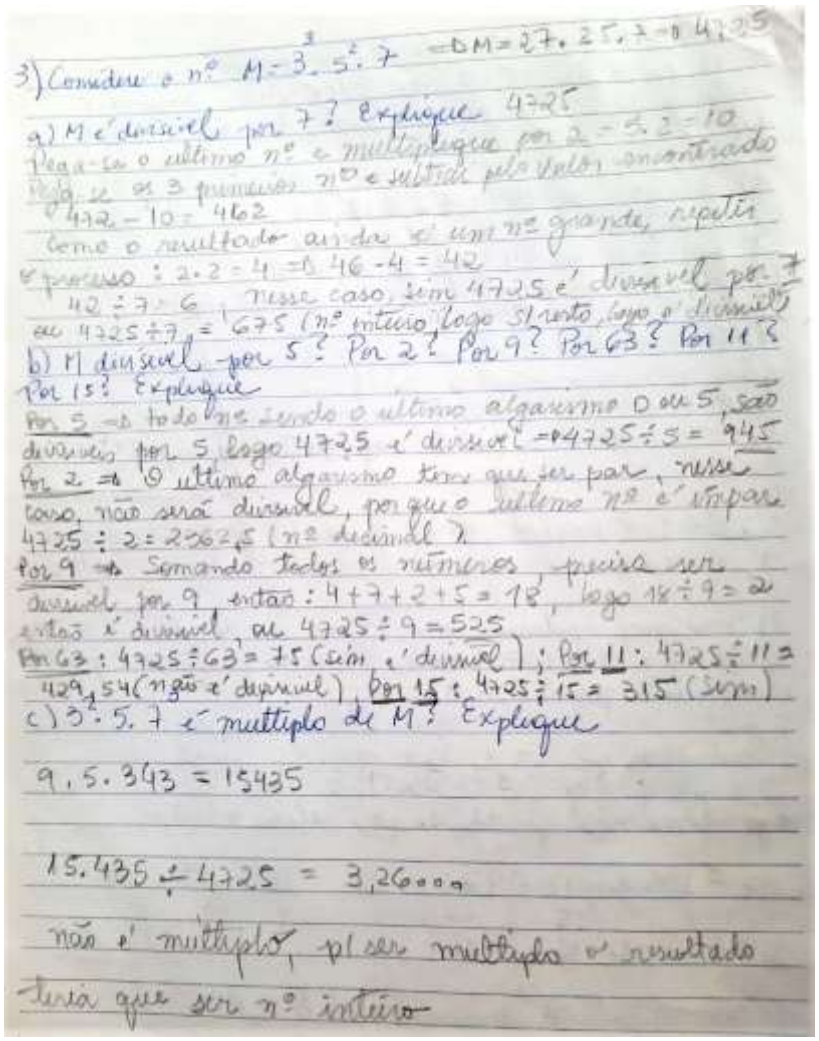
Entretanto, durante a entrevista, quando perguntamos como solucionou a questão, a professora afirma: “Pelo que eu ‘tô’ vendo agora, daria para fazer o desmembramento, no caso a fatoração e tal e calcular. No primeiro momento, eu entendi como 97 e 167 como sendo números primos e eu achei que eles são divisíveis por ele mesmo e por um […], Se está certo ou não eu não sei”. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020)

Ainda que tenha resolvido corretamente, é interessante notar a insegurança mostrada por Regina com sua resolução, ao dizer que naquele momento via a possibilidade de desdobramento [decomposição em fatores primos] dos números 97 e 167. Supomos que tal incerteza seja pela circunstância do próprio ato de ser entrevistada e questionada sobre seu raciocínio.

Questão 3

Em seguida, mostramos o protocolo com as respostas de Regina à Questão 3.

Figura 24 – Protocolo da Questão 3 de Regina



Fonte: Dados da pesquisa

Perguntamos à entrevistada sobre como respondeu à questão e o diálogo prosseguiu:

> R – Então, na terceira eu também poderia ter usado a propriedade da potência, mas eu fiz como eu faria na sala de aula. Então, o quê que eu fiz? Primeiro, eu resolvi a potência, que deu um número aqui e depois o que eu fiz... é... tem a divisibilidade por 7 para uma situação, cada número tem a sua específica, mas, também, eu fiz para você ver que 'tá' havendo a divisibilidade por 7, mas também eu coloquei que esse número que deu, eu posso dividir por 7 também, realmente.
> J – 'Pra' saber se é divisível. Até porque o critério de divisibilidade por 7, é um pouco longo, ele tem tanto passo-a-passo...
> R – É, eu coloquei aqui, o passo-a-passo.
> J – Tem tanto passo-a-passo, que é melhor dividir 'pra' saber.
> R – Eu dividi, pronto e acabou, mas dá para fazer da outra forma também.

> J – Sim. Da outra forma, com o teorema?
> R – Com a divisibilidade. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020, grifo nosso)

No grifo, parece que, ao citar a propriedade da potência, a professora tenha se referido ao Teorema Fundamental da Aritmética. É importante saber a nomenclatura correta para cada um dos conceitos que são usados, ou a qual pretende se referir para não trazer confusão ou até causar uma interpretação incorreta a quem recebe a informação.

Ouvido seu relato e observando os registros de seu protocolo, Regina mostra-se eloquente ao descrever os dois procedimentos que utilizou para justificar a divisibilidade por 7: o critério de divisibilidade por 7 e o procedimento de divisão exata. Entretanto, em nenhum momento de sua descrição, comenta sobre o Teorema Fundamental da Aritmética ou a utilização forma fatorada em que o número se apresenta para tentar se justificar, mesmo quando questionada na entrevista. Entendemos que isto se dê pelos critérios de divisibilidade estarem mais presentes no seu dia a dia do que o Teorema Fundamental da Aritmética, ainda que os conceitos de ambos estejam inteiramente ligados.

Questionada se é possível resolver a questão utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética, a entrevistada responde: “É, na verdade eu pensei aqui [aponta o item a], daí eu usaria da mesma forma aqui. Então, na verdade são três processos que dá para fazer aqui, coloquei dois, mas são três... a mesma coisa aqui [item b]”. Mesmo afirmando ser possível resolver por meio do Teorema Fundamental da Aritmética, a professora não diz como isso seria, já que em seu protocolo desta questão em nenhum momento, nos itens a ou b, a decomposição em fatores primos foi utilizada ou citada. Pelo contrário, desde o início de sua solução, como mostra seu protocolo, utilizou o produto resultante do número *M* para conduzir seus procedimentos e justificativas.

O diálogo continua, agora, com sobre o item c:

> J – E aqui embaixo [item c] que eu acho que esse aqui foi um dos entraves ‘né’?
> R – Na verdade, esse daqui eu fiz a mesma coisa que eu fiz aqui [itens a e b]. Então, eu resolvi a potência, multipliquei tudo, achei um valor, depois eu peguei o valor e dividi, aí deu um número decimal.
> J – Se fosse fazer diferente, como é que você faria?
> R – <u>Aquele critério da propriedade da potência</u>.
> […]
> J – Por isso que eu tenho essa conversa depois. Toda vez que eu falo do Teorema, abre a cabeça.

> R – Abre, abre, mas apesar que aqui... até aqui [item c] eu fiz dessa forma, mas já abriu; eu falei: “Não, não pode ser assim, tem outra forma de fazer mais fácil. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020, grifo nosso)

Mais uma vez, a solução apresentada parte da resolução do produto apresentado no item c, que a professora chama de potência, seguida do processo de divisão para encontrar ou não um número exato como seu resultado. Presumimos que este seja o seu método de preferência para resoluções de questões com esta temática.

No grifo, parece que, para Regina, o Teorema Fundamental da Aritmética é constantemente citado como o “critério da propriedade da potência”, mesmo que no momento da Intervenção e nas questões anteriores já tenha sido citado e explorado seu conceito. Entretanto, na última fala deste trecho, a professora parece convencida de que este procedimento ao qual parece estar acostumada a fazer não é suficiente para solucionar números com expoentes considerados grandes em sua representação em fatores primos. Isto fica evidenciado no protocolo do item d da questão 3.

Figura 25 – Protocolo do item d da Questão 3 de Regina

Fonte: Dados da pesquisa

Até este momento da questão, não foi utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética para a resolução das questões. No entanto, a solução do último item apresentada no seu protocolo mostra a utilização da propriedade da divisão de potências, por meio da lei do cancelamento da multiplicação, como justificativa para ser múltiplo ou não.

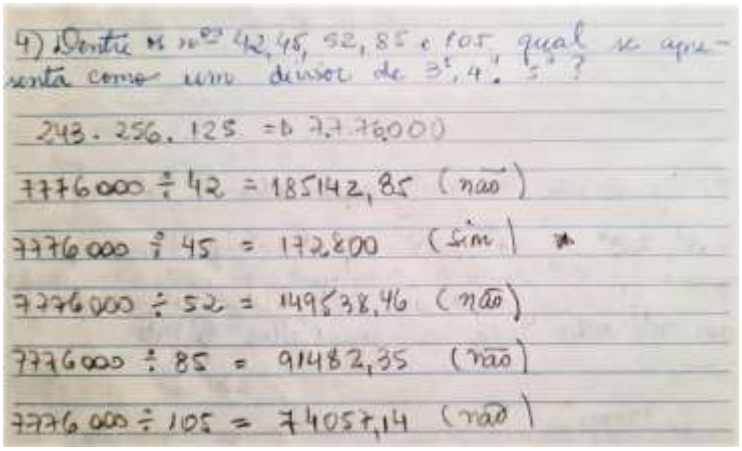
É compreensível que esta propriedade seja empregada para ilustrar um procedimento considerado aceitável para verificar a multiplicidade. Entretanto, não representa a definição matematicamente correta para se determinar se um número inteiro é múltiplo de outro, uma vez que, na definição, a divisão não é apresentada e

sim o produto, interligando os elementos que compõem a expressão *a.b* = *c*, com *a*, *b* e *c* inteiros.

Questão 4

Apresentamos os registros do protocolo da Questão 4 de Regina.

Figura 26 – Protocolo da Questão 4 de Regina



Fonte: Dados da pesquisa

Sobre a resolução desta questão, segue-se o curto diálogo:

> R – Então, aqui também ficou bem difícil, porque, 'tá' vendo, eu transformei, num valor bem alto. Depois que eu falei: "bom, eu poderia ter feito a mesma coisa". Mas eu utilizei dessa forma 'pra' encontrar a resposta.
> J – Não tem problema. Não existe forma errada, existem algumas formas que são mais econômicas e outras que são menos econômicas. Talvez com o Teorema Fundamental da Aritmética, economizaria tempo. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020)

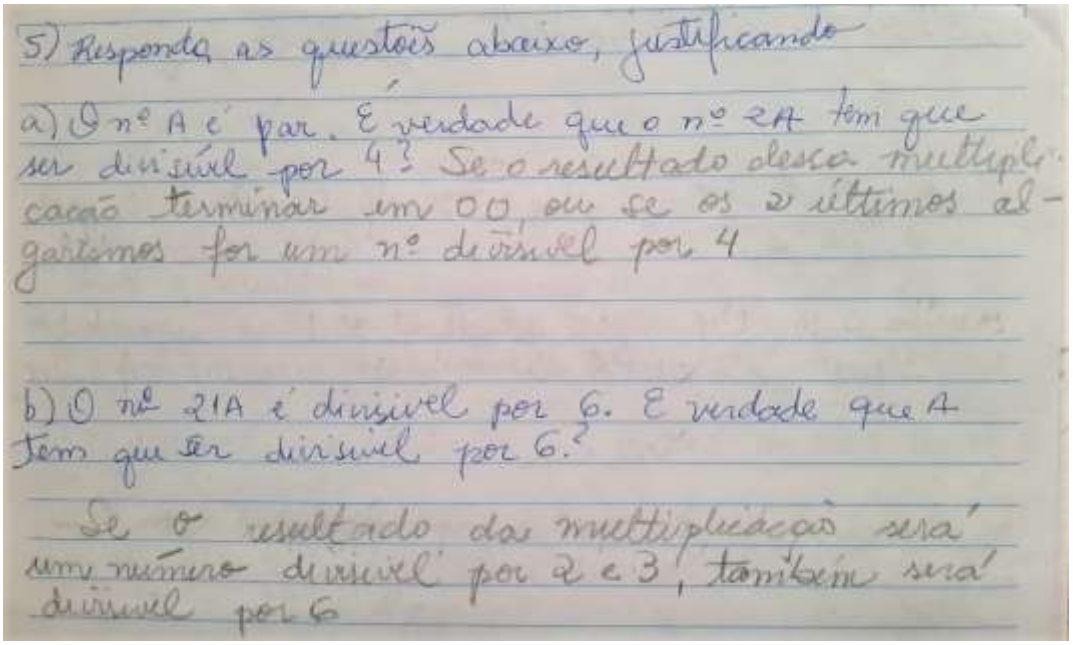
Mais uma vez, conforme seu protocolo, a professora realiza o produto apresentado no enunciado e calcula as divisões para saber sobre "ser divisor de". Ainda que não tenha sido totalmente evidente em sua fala, supomos que a Intervenção e a discussão feita nas questões anteriores possam ter aflorado o raciocínio de resolução utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética.

Contudo, é necessário salientar que as propriedades e consequências do Teorema Fundamental da Aritmética não são os primeiros a serem pensados como caminho de resolução, ainda que a representação de um número inteiro em produto com fatores primos esteja explicitada no enunciado.

Questão 5

Apresentamos o protocolo com as respostas aos itens da Questão 5 de Regina.

Figura 27 – Protocolo da Questão 5 de Regina



Fonte: Dados da pesquisa

Em resposta à forma como Regina solucionou esta questão, apresentamos o rápido diálogo:

> R – Essa daqui, na verdade, eu utilizei a resposta como sendo a divisibilidade por 4 e aqui por 6.
> J – E a pergunta aqui: é verdade ou não é, sim ou não?
> R – Se for nessas condições aqui [sua resposta do item a], sim. Nas condições que eu coloquei aqui.
> J – E pode ser que algum número não atende a essa possibilidade?
> R – Pode ser, pode ser.
> J – E na b?
> R - A mesma coisa.
> J – Mas, é sim ou não?
> R - Também nessas condições, essas condições, se não, não será não. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020)

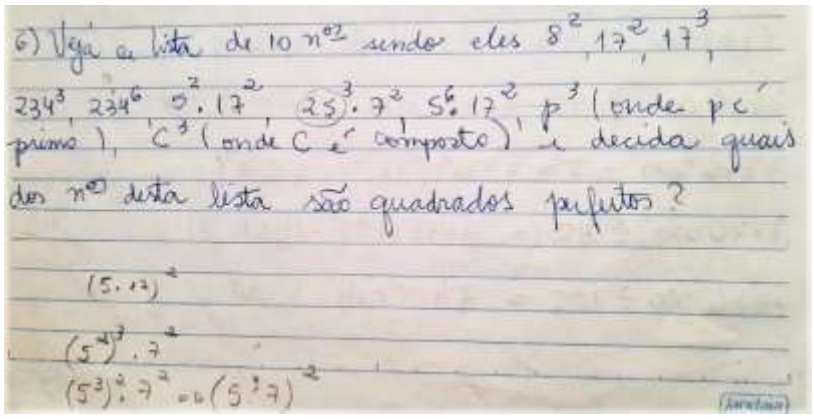
Como em todo decorrer da resolução do questionário, foram utilizadas pela entrevistada definições dos critérios de divisibilidade, tanto no item a quanto no item b, para justificar a verdade nas afirmações. Entretanto, os critérios descritos só se aplicam no caso em que resultado do produto esteja definido apenas com números inteiros em sua forma composta, o que não se efetiva no enunciado desta questão, já que suas hipóteses estão na forma de variáveis.

Parece-nos que a resposta escrita tenha sido feita por meio do método de tentativa e erro, considerando possíveis valores para *A* em ambos os itens, buscando chegar à conclusão de que os critérios valeriam para a resolução dos produtos enunciados. Além disso, suas respostas se referem apenas às características do resultado da multiplicação *2A* e *21A* e não a todos os possíveis valores inteiros que *A* pode assumir para verificar e justificar a veracidade das afirmações.

Questão 6

A seguir, apresentamos o protocolo com os registros das respostas à Questão 6 de Regina.

Figura 28 – Protocolo da Questão 6 de Regina



Fonte: Dados da Pesquisa

No momento do convite à participação da pesquisa, foi deixado claro a todos os entrevistados que poderiam consultar-se entre si ou em materiais externos, caso necessitassem de ajuda para resolução e entendimento das questões. Este esclarecimento foi necessário, pois alguns dos docentes participantes se conheciam e trabalhavam na mesma escola.

Assim, durante nossa espera para a realização da entrevista, observamos que Regina pediu ajuda de sua colega, também professora de Matemática participante da pesquisa, para a compreensão desta questão, quando escreveu a resposta apresentada no protocolo, sendo ajudada por ela, igualmente, no item d da Questão 3. Este nos parece ter sido o motivo pelo qual a professora não tenha concluído e não tenha pensado em todos os números citados no enunciado.

Após admitir que não tinha concluído a verificação de todos os números sobre ser ou não um quadrado perfeito, continuamos o diálogo:

> J – E o quadrado perfeito você entende como?
> R – O quadrado prefeito seria a multiplicação do número por ele mesmo.
> J – Então se você explicar 'pra' alguém: "Olha, verifique se ele quadrado perfeito, o que você falaria?"
> R – Multiplicaria o mesmo número duas vezes e aí faria distributiva.
> J – E aí, acabou aqui?
> R – É que eu não tive tempo mesmo. Ontem eu não fiquei nem em casa.
> J – Não tem problema. A gente tenta por aqui. Por ser quadrado perfeito...
> R – Esse [$5^2.17^2$], por exemplo, é um.
> J – Porque você transformou e o elevado ao quadrado é que deve aparecer.
> R – Isso. 'Pra' ser um quadrado perfeito tem que ser elevado ao quadrado. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020, grifo nosso)

No primeiro grifo, percebemos que seu entendimento inicial sobre verificação de um quadrado perfeito parece um pouco frágil, já que uma definição apropriada seria dizer que para um número ser quadrado perfeito deve existir outro número natural, cujo quadrado, ou seja, quando multiplicado por ele mesmo, resulta no número inicial. Da maneira como a professora expressa seu entendimento sobre a verificação sobre um número ser um quadrado perfeito, deixa entender que "a multiplicação do número por ele mesmo" seria realizada com o número a ser verificado.

Observamos, também, que, no segundo grifo, a afirmação reitera o fato de a professora não ter concluído a questão e, consequentemente, não ter pensado sobre ela antecipadamente à entrevista.

Entretanto, vemos, no terceiro grifo, parece que a entrevistada redefine o que entende por quadrado perfeito, após ser incentivada a explicar a transformação que realizou no registro de seu protocolo, mostrando que a reflexão promovida pela discussão na entrevista pode trazer à professora produção de novos saberes.

Como Regina não respondeu completamente à questão, permitimos que o fizesse naquele momento, deixando que pensasse sobre em que circunstâncias p^3, com p sendo um número primo, e C^3, com C sendo composto, são ou não quadrados perfeitos. A conversa segue sobre o número p^3:

> R – [Pausa longa para pensar] Puxa vida, não sei... [pausa para pensar] Acho que se eu desmembrar é, 'né'? Se eu fizer assim que nem eu fiz aqui [mostra seu protocolo], acho que dá, 'né'?
> J – Não sei, a resposta é sua. […] Quando você pensa em um número dado […], você consegue pensar. Aqui cria uma dificuldade maior porque eu não falo qual é o número. Eu só estou dizendo qual é a característica dele.
> R – Pode ser qualquer um, pode ser 2, pode ser 5, pode ser 3...
> J – Mas a pergunta é: sendo ali na base um número primo com expoente 3, vai ser ou não vai ser um quadrado perfeito?

> R – [Pausa para pensar] Caramba... [pausa curta] eu acredito que seja, mas eu não 'tô' conseguindo ainda... mais acredito que dá para fazer [risos] tem um jeito de fazer, mas agora, assim, te falar como…, mas eu acho que dá.
> J – Mas por conta do que?
> R – Porque o primo, como a gente já viu aí, dá para fazer vários desdobramentos.
> J – […] não estão somados, muito pelo contrário, eles, multiplicados, formam o número.
> R – É, porque aqui mesmo seria uma multiplicação, porque a gente 'tá' falando de uma potência, 'né'. Então aqui é multiplicação.
> J – O número é p^3, ele inteiro é um quadrado perfeito ou não? Essa é a pergunta.
> R – Eu acho que dá para transformar, mas como? Eu não sei ainda, mas acho que dá. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020, grifo nosso)

Entendemos que as longas pausas na busca das respostas corretas, juntamente com as perguntas feitas por Regina para buscar confirmação de suas conclusões, podem mostrar que ela não entende claramente o que pode ser feito para justificar qualquer que seja sua resposta para o questionamento se p^3 é um quadrado perfeito.

Além disso, ao falar dos desdobramentos, no grifo, acreditamos que a entrevistada tenha se referido ao conteúdo do vídeo do *Khan Academy* Brasil assistido durante o início da Intervenção. Nele, mostra-se o descobrimento do Teorema Fundamental da Aritmética, indicando que, dado um número inteiro, existem números primos que, somados em parcelas de mesmo valor, resultam neste número inteiro. Aqueles primos que atendem a esta propriedade são as bases dos fatores que compõem a decomposição e fatores primos.

Como exemplo disso, no vídeo, são mostrados os somatórios de números primos que resultam em 30: 5+5+5+5+5+5, 3+…+3, com 10 parcelas e 2+…+2, com 15 parcelas. Estes são os primos que fazem parte da decomposição em fatores primos de 30 = 2.3.5. Supomos que Regina tenha se lembrado deste momento do vídeo ao dizer que "o primo, como a gente já viu aí, dá para fazer vários desdobramentos". É possível que o fato de se lembrar dos somatórios envolvidos a tenha feito crer que estas somas referidas no vídeo se representem por 5^6, 3^{10} ou 2^{15}.

Perguntamos, logo em seguida, sobre seu entendimento em relação a C^3 ser quadrado perfeito e, mesmo com pausas em sua fala para tentar responder, a professora afirma sempre ser possível fazer assim como na situação anterior, porém não realiza nenhum tipo de inferência válida em relação à informação dada, de que *C*

é um número composto, permitindo-nos inferir que esta resposta seja apenas uma conjectura.

Mesmo já tendo concluído os esclarecimentos sobre as questões contidas no Instrumento de Coleta de Dados, continuamos a entrevista com a professora comentando que seria possível trabalhar com seus alunos questões como estas: “Sim, dá ‘pra’ dar e aí, eu ensinaria assim [com o Teorema Fundamental da Aritmética]. Eu já esqueceria isto aqui, estas contas todas malucas. […] Com certeza, no terceiro ano, eu vou dar esse daqui [Questão 6].” Neste momento, Regina parece perceber que o conhecimento e domínio do Teorema Fundamental da Aritmética pode tornar o ensino mais proveitoso, com entendimento menos complexo e com uma execução econômica em relação aos cálculos a serem feitos, melhorando tanto o ensino quanto a aprendizagem de assuntos correlatos ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Ainda no diálogo, a entrevistada continua: “Você sabe que com meus alunos, quando eu dou alguma coisa, explico e tal, eu falo para eles: resolva do seu jeito. Porque, assim, não precisa fazer como eu ‘tô’ fazendo. Tem aluno que resolve de outra maneira, ‘né’. Mas, assim, não tem uma forma correta de fazer. Neste trecho, entendemos que a professora explicita um pouco do Contrato Didático[71] que tem com seus alunos, deixando-os à vontade para apresentarem formas diferentes de resolução, incentivando o desenvolvimento do raciocínio matemático de seus alunos. Além disso, explicita o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, na categoria de Procedimentos, ao considerar que reconhece a resolução de questões utilizando algoritmos convencionais, mas compreende e aceita como corretos algoritmos alternativos usados pelos alunos como possibilidade de resolução.

Para finalizar a entrevista, entregamos à docente o documento Instrumento de Coleta de dados – Possíveis Respostas para que lesse e suscitasse algum questionamento. Percebemos, então, que Regina só se dá conta de algumas consequências do Teorema Fundamental da Aritmética após ler o documento, ainda que durante toda a entrevista tenhamos conversado e discutido sobre a natureza do número inteiro, bem como sobre a sua unicidade de fatoração em números primos, entre outras características.

A entrevistada busca ainda esclarecimentos sobre a Questão 5:

[71] Contrato Didático é “o conjunto de comportamentos específicos do professor esperado pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperado pelo professor” (ALMOULOUD, 2007, p. 89)

> R – Então, essa daqui ó [pausa para leitura]. Então, na verdade, eu coloquei certo. […] Eu coloquei isso mesmo, ó, se os dois últimos algarismos for um número divisível por 4.
> J – Se a gente pensar assim, por exemplo, o 8 já 'tá' dentro. O outro número... 12 então o 2 x 12 vai ser também.
> R – Vai ser.
> J – Aí, a forma que eu escrevi é a forma que a gente usa em demonstração.
> R – Ah, sim, você demonstrou. Aqui você colocou o mesmo que eu, 2 e 3... 'tá' certo, então. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGINA, 2020)

Mesmo lendo uma resposta com características e detalhamentos diferentes do que registrou, a professora faz a leitura da Questão 5 e claramente não entende que foi escrita uma pequena demonstração sem ter um número exato como resposta e sim, *A* como uma variável do universo dos números inteiros. Desta forma, continua acreditando que acertou o item a da Questão 5, em seu protocolo, no qual registra que se deve observar se os dois últimos algarismos do número forem divisíveis por quatro, então todo o número o será.

Para o item b, a impressão de que resolveu igualmente à resolução apresentada no documento se repete, pelo fato de aparecerem, também, em nossa solução, os números 2 e 3. Em nenhum momento, porém, faz referência à dependência do valor da variável *A* em suas respostas.

Finalmente, lendo a Questão 6, Regina fica curiosa em saber se p^3 e C^3 são quadrados perfeitos ou não. Espanta-se ao saber que p^3 não pode ser decomposto e, portanto, não pode ser quadrado perfeito e que C^3 pode ser um quadrado perfeito, dependendo dos expoentes que estiverem presentes na fatoração de *C*.

Esta entrevista teve uma duração total de trinta e três minutos e terminamos agradecendo à professora Regina por sua disponibilidade em participar.

Em síntese, Regina exibe em seus registros que consegue definir múltiplo e divisor, mas não apresenta as definições de forma generalizada, necessitando de exemplos numéricos para tal. Além disso, pareceu estar confusa ao tentar explicar oralmente tais definições, confundindo-as em alguns momentos.

No que diz respeito ao seu conhecimento sobre a Divisibilidade, a professora mostrou possuir em diversos seu domínio sobre os critérios de divisibilidade, tanto os dos números mais conhecidos quanto os daqueles com critérios menos utilizados comumente. A utilização destes critérios parece ser sua maior predileção na busca pela divisibilidade de e por um número inteiro, porém sem necessitar realizar o procedimento da divisão para tomar sua decisão. Também, não percebemos em suas

questões a utilização das consequências do Teorema Fundamental da Aritmética, resolvendo todos os produtos apresentados nas decomposições na forma canônica para, somente após isso, utilizar os critérios de divisibilidade.

Ainda assim, ao lidar com uma situação específica em que seria necessário o conhecimento sobre a unicidade da decomposição em fatores primos, a informação da primalidade dos fatores de *k* foi suficiente para guiar seu primeiro instinto de solução, reconhecendo a unicidade e resolvendo corretamente a questão.

Nas questões em que variáveis são apresentadas, Regina apresentou algumas dificuldades, apesar de responder coerentemente alguns itens. Na situação da decisão sobre a divisibilidade de *2A* e *21A*, pensou imediatamente em resolver a questão justificando somente os critérios de divisibilidade que poderiam justificar sua resposta, sem ser clara num raciocínio lógico que a leva sua conclusão.

Quando lidou com uma situação em que é apresentada outra temática, externa à do Teorema Fundamental da Aritmética, Regina executa tranquilamente transformações para a forma canônica dos números naturais com valor definido para decidir sobre serem quadrado perfeito ou não, respondendo corretamente a estes itens. Todavia, quando as variáveis p^3 e C^3 estão envolvidas, não abstrai as propriedades utilizadas por ela nos valores definidos e não consegue concluir sua resposta.

5.4. Entrevista com o professor Saulo[72]

O nosso contato inicial com o professor Saulo se deu durante a pandemia causada pelo coronavírus e, por isso, a coleta de dados foi feita exclusivamente de forma *online*, por meio de um aplicativo de conversas. Desde o início do processo, o participante relatou sobre sua impossibilidade de utilizar conversas via chamada de vídeo para o nosso contato. Assim, todas as nossas conversas foram feitas via mensagens de texto e mensagens de áudio.

Esta dinâmica fez com que nossos diálogos tomassem mais tempo que aquele planejado por nós para cada momento da coleta de dados. Como consequência, entre o primeiro contato e a finalização da entrevista foram utilizados quatro momentos, sendo o primeiro para o convite e aceitação de participação na pesquisa, via *Whatsap*[73], envio do Formulário de Caracterização, do TCLE e do Instrumento de

[72] Nome fictício que será utilizado durante toda a pesquisa para descrição deste sujeito de pesquisa.
[73] Aplicativo para envio de mensagem escrita, áudio e vídeo chamada.

Coleta de Dados, via *e-mail* e os outros três para a realização da entrevista de Intervenção.

Neste primeiro encontro *online*, explicamos o objetivo principal desta pesquisa, o tema escolhido e como planejamos realizar a coleta de dados. Após a aceitação na participação, como já dissemos, entregamos os documentos para que o participante preenchesse e nos enviasse de volta, no prazo máximo de uma semana. Infelizmente, a devolução dos documentos só ocorreu dez dias após o contato inicial, mesmo tendo sido relembrada algumas vezes deste prazo. Como entendemos que isto não prejudicaria o andamento da coleta de dados propriamente dita e por serem em circunstâncias adversas devido ao momento vivido no mundo, aceitamos os documentos e partimos para o momento da Intervenção e entrevista.

Segundo o Formulário de Caracterização preenchido por Saulo, de 39 anos, formou-se no curso de Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Interação Americana – FAINAM no ano de 2015, possuindo pós-graduação na área de Gestão e Organização da Escola; além disso, afirma ter estudado assuntos relacionados à Teoria dos Números em uma disciplina denominada de Fundamentos da Matemática Elementar, durante sua graduação. Atua na rede de ensino pública paulista como professor de Matemática há 8 anos, todos dedicados ao Ensino Fundamental II, sendo em 3 destes, concomitantemente, como docente da rede particular de ensino. Em relação à Teoria dos Números, Saulo entende que o único tema relacionado ao estudo da Teoria dos Números são os conjuntos numéricos, sendo que a importância do estudo deste tema seja para a apropriação das operações básicas.

Tendo, então, já marcado um segundo encontro para a entrevista de Intervenção, observarmos que na metade das questões propostas havia alteração na configuração dos números dos enunciados, deixando os expoentes das potências apresentadas como se fizessem parte da base, como por exemplo, o número 2^4 ter sido transformado em 24. Isso ocorreu devido ao entrevistado copiar o teor do documento para outro programa que o permitisse responder digitalmente as questões.

Assim, neste segundo encontro, sempre pautado por mensagens de texto e áudio, não foi possível discutir as seis questões sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Entretanto, aproveitamos este momento para iniciar a Intervenção sobre o tema.

Iniciamos, então, nossa entrevista de Intervenção, esclarecendo ao participante como o GPEA entende a relação não excludente entre a Álgebra e a Aritmética,

explicando que na Teoria dos Números, existe o que chamamos de Teoria Elementar dos Números que, por sua vez, possui alguns tópicos específicos relacionados a ela. Após citar quais seriam estes tópicos, anunciamos o tema escolhido por nós, o Teorema Fundamental da Aritmética.

Questionamos Saulo em relação ao seu conhecimento sobre o tema. O entrevistado alega não se lembrar deste nome, mas considera que talvez já tenha feito algo relacionado a ele. Diante disso, propusemos que assistisse naquele momento o vídeo da *Khan Academy* Brasil sobre o surgimento da Teorema Fundamental da Aritmética.

Ao concluir a visualização do vídeo, o professor comenta: “Aqui na escola, nós fazemos mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, não é isso? Pelo que eu vi, agora, aqui no vídeo?”. Com este comentário, percebemos que o professor reconhece a questão da decomposição em fatores primos mostrada e explicada no vídeo, mas imediatamente a relaciona apenas com aplicações práticas que a envolve. Desta maneira, como parte importante da Intervenção e percebendo que o entrevistado pode não ter entendido o conceito apresentado, conversamos com o professor um pouco mais a ideia que envolve o Teorema Fundamental da Aritmética, mostrando alguns exemplos de decomposição em fatores primos e enfatizando a unicidade existente em cada uma destas decomposições.

Questionamos, então, se houve algum momento em sua formação, inicial ou continuada, que tal conceito foi estudado e se, e como, este conceito é trabalhado por ele em sala de aula, uma vez que sua experiência declarada é toda no Ensino Fundamental, etapa em que este tema poderia ser bastante explorado. O docente afirma que costuma trabalhar este tema com os alunos por gostar muito, mas continua o limitando à resolução de problemas que envolvem o MMC e o MDC. Além disso, comenta que em sua formação inicial, durante a disciplina de Elementos Fundamentais da Matemática, estudou sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, mas critica a superficialidade desta formação, indicando que a grade de conteúdos do curso tinha prevalência da área pedagógica em detrimento de estudos da área matemática, como é mostrado no relato a seguir:

> Era mais parte pedagógica. Tinha os conteúdos da matemática, eram bem legais e tudo mais, mas eu achei que foi muito superficial. Eu não acho que eu saí da graduação com um nível de conhecimento matemático que eu deveria ter. Então, nesse sentido sim, tivemos Matemática, mas é uma coisa muito superficial. Por exemplo, Teorema Fundamental da Aritmética, olha que

> legal! Aprendi MMC e MDC. Então, assim... acredito que vimos... ‘Pra’ resumir, foi um Ensino Médio um pouco mais rigoroso. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA DO PROFESSOR SAULO, 2020)

Ao dizer que sua formação inicial se compara a um Ensino Médio mais rigoroso, entendemos que a superficialidade dada aos temas não fornece ferramentas ao professor para se aprofundar no seu conhecimento sobre o assunto. Isto confirma o que comenta Resende (2007) ao afirmar que as disciplinas e conteúdos trabalhados na licenciatura em Matemática não tem seu foco nas questões necessárias a serem tratadas para o professor que atuará no Ensino Básico.

A ausência deste foco ocorre tanto no excesso de formalismo, que pode trazer uma incompreensão de como tais temas se relacionam com aqueles tratados tão elementarmente no Ensino Básico, como na falta de profundidade ao lidar com esta temática, não sendo apresentadas ferramentas mínimas suficientes para o trabalho do professor em sala de aula.

Frente à aparente superficialidade do conhecimento do professor sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, intervimos alertando-o sobre a importância de o professor ter um conhecimento que vai além do que se deve ensinar, uma vez que o conhecimento das estruturas constitutivas de um conceito pode auxiliar no ensino desde assuntos considerados mais simples até os mais complexos. Comentamos que o Teorema Fundamental da Aritmética não se resume apenas a aplicações como o MMC e o MDC; o entendimento de propriedades provenientes de decomposição de um número em fatores primos ele pode trazer uma compreensão maior da natureza de um número e suas formas de representação. Sobre isso, Saulo comenta:

> Mas dessa forma, quando se analisa, seria até mais fácil dar uma aula. Por exemplo, acabo usando muito múltiplo. A finalidade nas minhas aulas é sempre chegar no mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum para resolver probleminhas do tipo: ocorreu uma eleição agora para governador, de 4 em 4 anos, ‘pra’ presidente a cada 2 anos, quando que vai rolar essa eleição de novo? Coisinhas desse tipo, né. Nem sabia dessa profundidade da relação da decomposição dos números. Quer dizer, uma noção mínima a gente tem do que a gente faz com essas coisas. Mas, ao dar aula, a gente... pelo menos eu, nunca pensei dessa forma. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA DO PROFESSOR SAULO, 2020)

Diante da declaração do professor, observamos que seu conhecimento sobre o Teorema Fundamental da Aritmética parece se limitar apenas a um viés relacionado ao tema, sem refletir que outros aspectos podem ser aprofundados com este conteúdo. Entretanto, Climent *et al*. (2014) enfatizam que o conhecimento prático do

professor é criado por meio de sua experiência, não devendo terminar em si mesma, mas sim, ser acompanhada de uma análise crítica e uma reflexão teórica desta experiência.

Ainda assim, é importante destacar que, de acordo com Flores-Medrado *et al*. (2014) o conhecimento que o professor possui sobre estas aplicações para a decomposição em fatores se enquadraria na categoria Fenomenologia do MTSK, vinculado ao Conhecimento dos Temas.

Neste momento da entrevista, informamos ao docente sobre a desconfiguração existente nos enunciados das questões que respondeu e, por esse motivo acordamos que, até o final do dia, enviaria as respostas para nós com a configuração correta dos enunciados para que continuássemos a entrevista no dia seguinte e assim foi feito.

Seguindo a entrevista, no dia seguinte, o questionamos sobre sua opinião em relação à complexidade geral das questões, considerando que já conhecia o foco de pesquisa. Apesar de afirmar que não as considerou difíceis, concordou que algumas são mais complexas que outras, mas que sem o conhecimento do Teorema Fundamental da Aritmética a resolução de algumas questões é inviável.

Diante desta resposta, entendemos que o início da Intervenção já pode ter influenciado o professor, já que no dia anterior, não mostrou a mesma consciência da possibilidade de resolução por meio da decomposição em fatores primos das questões propostas. Entretanto, após isto, assume que seu método de resolução está vinculado quase que exclusivamente às divisões para a decisão sobre divisibilidade e multiplicidade, não mostrando ter domínio ao lidar com os produtos contendo potências que o Teorema Fundamental da Aritmética, inevitavelmente, pode gerar.

Questionado, então, sobre o que entende por múltiplo e divisor, o entrevistado responde o que se segue:

> ‘Pra’ mim múltiplos, sem brincadeira nenhuma, vamos supor, os múltiplos de 2 eu sigo a tabuada... é a forma como eu penso. Então, eu sei que os múltiplos de 2 vai (sic) ser 4, 6, 8 e os divisores ‘pra’ mim seria o inverso disso. Divisores, ‘pra’ mim, é realmente que nem aquele método que eu falei quase agora: é o da chavinha lá. Deu resto zero eu sei que ele é um divisor. Cruel, ‘né’. Eu fiquei até meio assim, agora. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA DO PROFESSOR SAULO, 2020)

O professor não apresenta uma definição formal sobre múltiplos e os vincula à organização da tabuada. Em relação aos divisores, atrela a sua verificação e descoberta ao procedimento de divisão, buscando uma divisão exata, com resto zero.

Entendemos, então, que a utilização do termo “inverso”, se deu pela relação direta que faz pela multiplicação ser a operação inversa da multiplicação. Desta forma, seu entendimento sobre múltiplo está ligado à ação de multiplicar por meio da tabuada, assim como o de divisor vincula-se à execução de uma divisão exata.

Isto nos mostra o que consideramos um equívoco na interpretação da relação existente entre múltiplos e divisores, uma vez que em um único produto é possível identificar o múltiplo e seu divisor, sem a necessidade de outro cálculo para tal conclusão. Buscando, então, um esclarecimento sobre o entendimento de Saulo sobre os conceitos de divisor e múltiplo, questionamos como faria para estabelecer os divisores e os múltiplos de um número que não possui uma tabuada previamente preparada, como, por exemplo, o número 39. Em resposta a isso, seguiu-se o seguinte diálogo:

> S[74] – Bom, os divisores de 39, como eu faria? Eu ia dividir o 39 por todos os números menores que ele. Então todos os números que forem divisíveis, que a divisão fosse exata, seriam os divisores. Da mesma forma, todos esses que seriam divisores, o inverso seriam os múltiplos de 39. Eu acho que é isso.
> J – Os divisores, eu entendi. Eu não entendi os múltiplos. Você faria o que com 39 para encontrar os múltiplos? Você dividiria também?
> S – Isso, porque o resultado acaba sendo múltiplo, exemplo 39 ÷ 3. O 3 seria um divisor, não é isso? Trinta e nove dividido por 3 vai dar 13, então 3 é um múltiplo de 39.
> J - Não é... quando você faz 39 ÷ 3, você encontra que 3 é divisor de 39, porque o resto vai dar zero, como você falou, mas não que 3 seja múltiplo de 39.
> S – Ah não, falei errado! Por exemplo, 39 dividido por 3, divisor, mas o resultado é 13 não é isso? Então 13 seria múltiplo de 39... eu acho. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA DO PROFESSOR SAULO, 2020, grifos nossos)

Nos trechos destacados no diálogo, percebe-se repetidamente que o entrevistado se mostra confuso em determinar qual dos números presentes no procedimento de divisão seria o divisor e qual seria o múltiplo, chegando a afirmar, erroneamente, que 3 e 13 são múltiplos de 39. Parece-nos que o fato de ser afastado dos números que comumente formam a tabuada, trouxe incertezas e imprecisões na determinação de múltiplos e divisores. Tais dificuldades nos permitem deduzir que o docente não possui o domínio do Conhecimento Matemático que, segundo Flores-Medrado *et al*. (2014), é um elemento fundamental para quem deseja ensinar Matemática.

[74] A letra “S” será utilizada para se referir à fala de Saulo durante os diálogos.

Ousamos inferir que esta tentativa de vincular a relação entre múltiplo e divisor proveniente de um procedimento de divisão, aproxima-se daquela definida formalmente, quando no produto de números inteiros, $a = b.c$, com b e c não nulos, a é múltiplo de b e c, assim como b e c são divisores de a. Como afirmou no início da entrevista já ter estudado este tema em sua formação inicial e esta ter sido há apenas cinco anos, acreditamos que possíveis lembranças sobre esta relação possam ter vindo à tona, mas sendo analisada, erroneamente, por meio do procedimento de divisão.

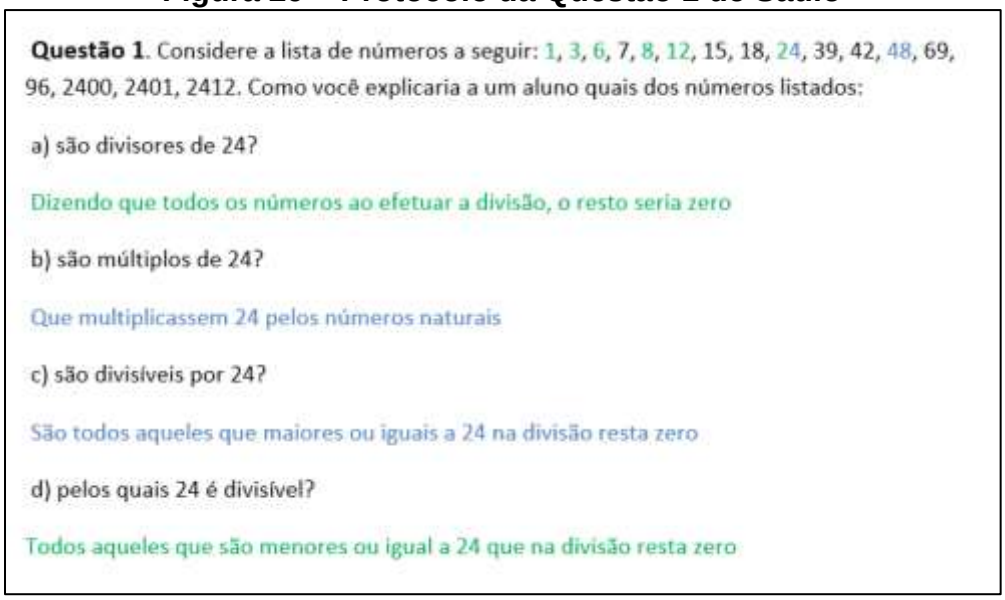
Observando tal equívoco, intervimos explicando que ambos os números, 3 e 13, são divisores de 39. Imediatamente, Saulo retifica sua resposta afirmando estar enganado e que “os múltiplos de 39 é só dobrando, ‘né’? Eu dobro o número, depois eu dobro, eu vou dobrando. São os múltiplos”. Com este comentário, percebemos que, embora tenhamos observado alguns erros em seu discurso, a Intervenção foi importante para houvesse uma mudança sobre seu entendimento sobre a forma de determinar múltiplos para algo mais próximo do que seria o correto.

Feitas estas considerações iniciais, continuamos com a análise mais detalhadas do protocolo com as respostas dada pelo entrevistado no Instrumento de Coleta de Dados.

Questão 1

Apresentamos o protocolo da resposta de Saulo para a Questão 1.

Figura 29 – Protocolo da Questão 1 de Saulo



Questão 1. Considere a lista de números a seguir: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412. Como você explicaria a um aluno quais dos números listados:

a) são divisores de 24?

Dizendo que todos os números ao efetuar a divisão, o resto seria zero

b) são múltiplos de 24?

Que multiplicassem 24 pelos números naturais

c) são divisíveis por 24?

São todos aqueles que maiores ou iguais a 24 na divisão resta zero

d) pelos quais 24 é divisível?

Todos aqueles que são menores ou igual a 24 que na divisão resta zero

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando previamente o protocolo da Questão 1 de Saulo, observamos que nos itens indicados estão apenas a descrição de como seriam determinados estes números. Entretanto, a explicitação de cores diferentes feita por ele em seu protocolo, vinculando estas descrições e os números da lista apresentada, podem indicar serem estes números os escolhidos como resposta, além de parecer explicitar o entendimento de que os pares de termos “ser divisor de”/“pelo qual é dividido” e “ser múltiplo de”/”ser divisível por” são sinônimos. Para esclarecer tal dúvida, pedimos para que o professor indicasse explicitamente quais seriam os números que, de fato, pertenceriam às respostas de cada item. A resposta foi a que se segue:

> Os divisores de 24, para mim, aqui seriam 1, 3, 6, 12 e o próprio 24. Os múltiplos de 24, ‘pra’ mim, seria o 48, na letra b... hum... espera aí só um segundo [após 2 minutos]. Os múltiplos de 24 seriam 48... é... 2400, acho que 96 também... espera aí, deixa eu fazer essa conta aqui [após 1 minuto]. E o 96 também. Aí na letra c, quais são divisíveis... divisores e divisíveis é a mesma coisa? Agora eu fiquei confuso. Espera aí, só um pouquinho [Em outra mensagem]. Acho que 48 é divisível por 24. Espera aí [após 2 minutos]. Então, a letra d, 24 é divisível por 1, 3, 6, 12 e 24, é isso? (FRAGMENTO DA ENTREVISTA DO PROFESSOR SAULO, 2020, grifo nosso)

Observe que há contradições entre a fala e o registro do protocolo do professor. Para os itens a e d, há a omissão em seu relato do número 8 como divisor de 24, mesmo sendo um dos números destacados na cor verde em sua resposta. No item b, registra com a cor azul os números 24 e 48, aparentemente indicando-os como múltiplos de 24, entretanto em seu discurso acrescenta os números 96 e 2400 de forma correta. O item c, juntamente com o grifo, nos permite dizer que não está claro para o docente a similaridade de significados de termos presente no enunciado dos itens, como tínhamos desconfiado, não percebe que os números respondidos no item b são os mesmos para o item c, excluindo os números 24, 96 e 2400 da sua fala.

Acreditamos que parte desta contradição se deu, primeiramente, pelas limitações geradas pela maneira como a entrevista foi realizada. O fato dela não ocorrer pessoalmente e, sim, por meio de mensagens de áudio, não nos permitiu observar reações e falas durante a execução dos cálculos para determinar as respostas. Ainda que tenhamos solicitado para o entrevistado que estivesse com suas respostas em mãos, percebemos que isso não ocorreu, tendo em vista as discrepâncias entre o discurso e o registro do protocolo. Além disso, em cada uma das pausas dadas, elementos sobre como o professor explicita seu pensamento podem ter se perdido, não nos permitindo confrontar, de fato, as respostas dadas.

Buscando mais esclarecimentos, questionamos sobre como realizou os cálculos nas pausas pedidas durante este momento da entrevista. O entrevistado informa que realiza alguns cálculos mentalmente, mas admite o uso de calculadora em algumas situações, o que não tínhamos previsto em nossas análises iniciais. Entretanto, a utilização da calculadora para a resolução das questões, no nosso contexto, pode ser interpretada como um agilizador de cálculos na possibilidade de já se ter uma previsão de como este cálculo vai se comportar, mas pode ser encarado como um substituto do dispositivo prático do processo de divisão, no sentido de haver a necessidade de realizar o cálculo para só então entender o resultado encontrado.

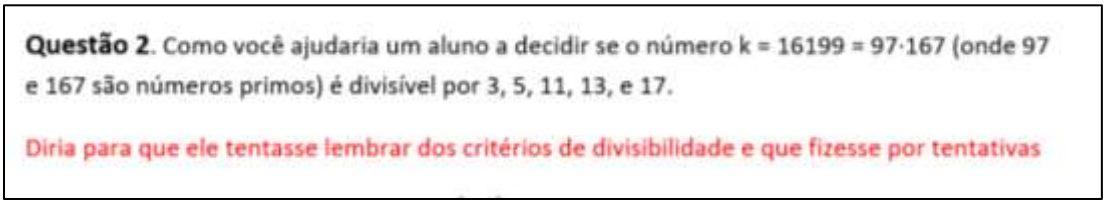
Para melhor percepção deste aspecto, perguntamos a Saulo se resolveria a questão de alguma outra maneira que não fosse por meio da realização da divisão e observando se o resto é zero. O docente responde: “Eu faço a divisão dos que eu sei, os números pequenos que eu já fiz de cabeça, porque coincide com a tabuada. [...] De outra forma não me vem à mente nenhuma outra forma de realizar estes cálculos”.

Nesta ocasião da entrevista, Saulo solicitou, novamente, uma pausa na entrevista pela impossibilidade, naquele momento, de gravar e ouvir áudios. Assim, combinamos um quarto momento para conclusão da entrevista. Este último momento, no entanto, só pode acontecer após doze dias, justificado pelo excesso de trabalho demandado ao professor como consequência da mudança do trabalho presencial para o teletrabalho, devido à pandemia da Covid-19.

Questão 2

Apresentamos o protocolo da resposta de Saulo para a Questão 2:

Figura 30 – Protocolo da Questão 2 de Saulo



Fonte: Dados da pesquisa

Assim como a resposta apresentada na Questão 1, esta mostra em seu protocolo novamente apenas a descrição de como realizar e não a resposta propriamente dita. Entretanto, vemos nesta afirmação um indicativo de que o aspecto

sobre a unicidade da decomposição em fatores primos de um número pode não ter sido considerada. Questionado sobre como solucionou esta questão, esclarece:

> Bom ‘pra’ ver se 16199 é divisível, por 3 eu já sei que não é. Seria a ideia do critério. Eu ia somar os algarismos... ‘tá’ dando 26... ele não é múltiplo de 3, não termina com 0 e nem com o 5, então não é divisível por 5. Agora 11, 13, 17, eu faria a divisões direto, aquelas divisões da chavinha. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSOR SAULO, 2020)

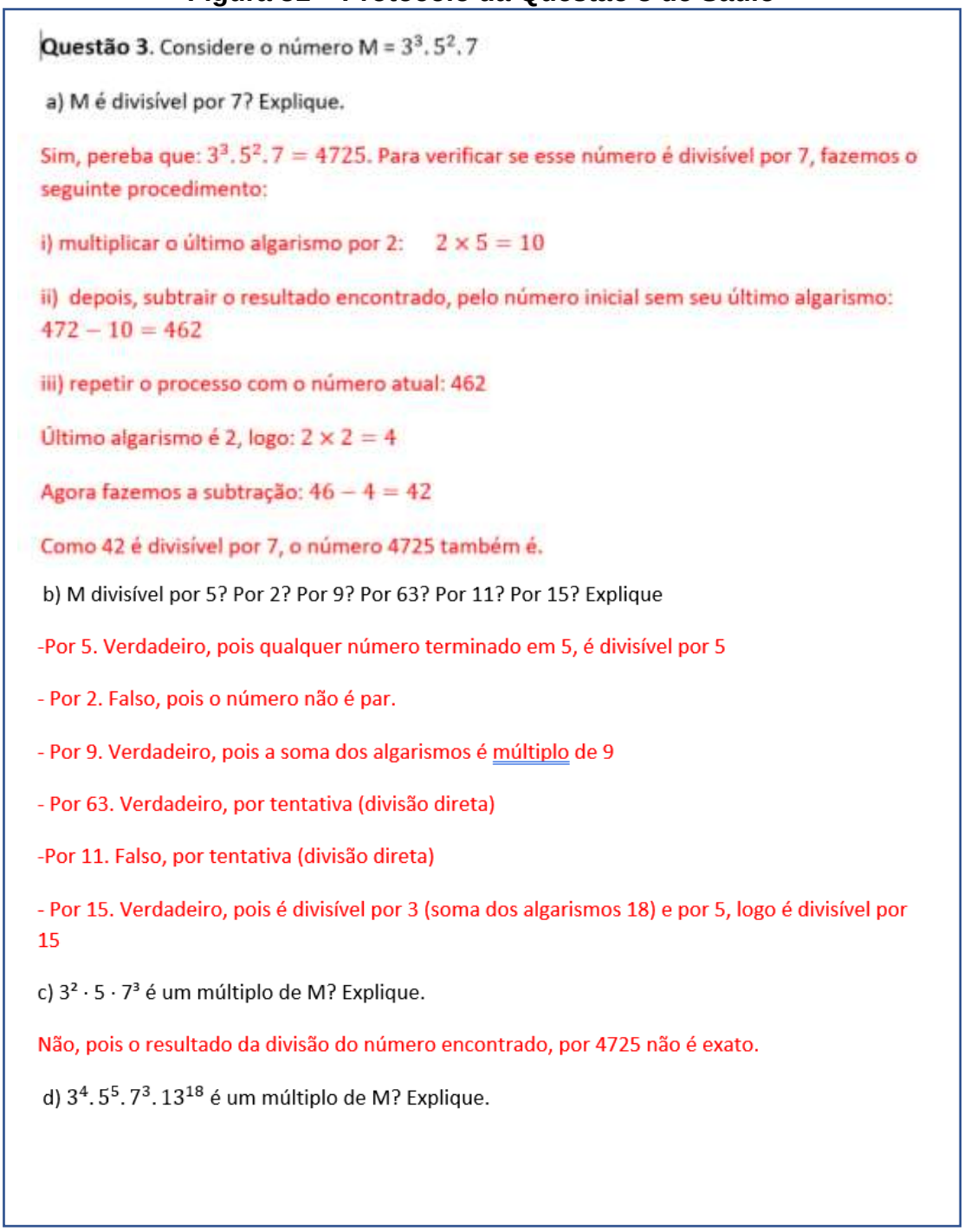
Ainda que tenha apontado conhecer alguns critérios de divisibilidade, no caso, dos números 3 e 5, o fato de não conseguir explicitar os critérios de divisibilidade de números com mais de dois algarismos mostra que não tem o domínio sobre este tema, tendo que recorrer ao procedimento do dispositivo prático da divisão, chamado por ele de “divisões da chavinha”. Salientamos, novamente, a importância de o docente utilizar adequadamente o vocabulário para termos matemáticos, ainda que a intenção seja de facilitar o entendimento.

Buscando saber, mais uma vez, se a Intervenção produziu algum tipo encorajamento para que o entrevistado repensasse a maneira longa e cansativa que conduziu sua resolução, questionamos se a informação de que os números 97 e 167 são números primos poderia remetê-lo a pensar em outra possibilidade de resolução. Saulo responde: “Agora que eu sei que, como ele é primo, esse número gerou através desses dois números, aí eu acho que... é... não, ainda assim eu faria por tentativa e erro, fazer essas divisões... que difícil né?”. O professor parece perceber que o Teorema Fundamental da Aritmética pode ser aplicado nesta situação, explicitando que agora o conhece. Entretanto, o entrevistado voltou a mostrar predileção pelo dispositivo prático da divisão como escolha para sua forma de resolução. Acreditamos que isso se dá pela compreensão sobre o Teorema Fundamental da Aritmética ser ainda muito superficial, uma vez que a Intervenção realizada tinha o objetivo de relembrar o conceito, que o próprio entrevistado comenta anteriormente já tê-lo estudado em sua formação.

Questão 3

Trazemos, a seguir, o protocolo da resposta da Questão 3 de Saulo:

Figura 31 – Protocolo da Questão 3 de Saulo



Questão 3. Considere o número $M = 3^3.5^2.7$

a) M é divisível por 7? Explique.

Sim, pereba que: $3^3.5^2.7 = 4725$. Para verificar se esse número é divisível por 7, fazemos o seguinte procedimento:

i) multiplicar o último algarismo por 2: $2 \times 5 = 10$

ii) depois, subtrair o resultado encontrado, pelo número inicial sem seu último algarismo: $472 - 10 = 462$

iii) repetir o processo com o número atual: 462

Último algarismo é 2, logo: $2 \times 2 = 4$

Agora fazemos a subtração: $46 - 4 = 42$

Como 42 é divisível por 7, o número 4725 também é.

b) M divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 63? Por 11? Por 15? Explique

-Por 5. Verdadeiro, pois qualquer número terminado em 5, é divisível por 5

- Por 2. Falso, pois o número não é par.

- Por 9. Verdadeiro, pois a soma dos algarismos é múltiplo de 9

- Por 63. Verdadeiro, por tentativa (divisão direta)

-Por 11. Falso, por tentativa (divisão direta)

- Por 15. Verdadeiro, pois é divisível por 3 (soma dos algarismos 18) e por 5, logo é divisível por 15

c) $3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$ é um múltiplo de M? Explique.

Não, pois o resultado da divisão do número encontrado, por 4725 não é exato.

d) $3^4.5^5.7^3.13^{18}$ é um múltiplo de M? Explique.

Fonte: Dados da pesquisa

Observando o protocolo desta questão, percebemos que, embora tenha respondido os três primeiros itens com certo detalhamento, o professor deixou o protocolo em branco para o último item. Ao ser questionado sobre a possibilidade de pensar em outra forma de resolução diferente daquela apresentada no protocolo nos itens a e b, seguiu-se a seguinte resposta:

> No item a o que que eu fiz? Eu peguei esse número que estava decomposto, descobri que era o número 4725, para atribuir esses critérios de divisibilidade por esse número. Mas, agora olhando aqui, eu consigo perceber com essa informação que... se *M* é divisível por 7? Ele é, porque ele faz parte da decomposição, não é isso? Vinte e cinco, por exemplo, também; por 2, não é; na letra b, é divisível por 5? Cinco aparece, na fatoração desse número, então ele é divisível; por 2 não é, porque não aparece; por 9 aparece porque tem 3 × 3 × 3, por 63, por 11 não, e por 15 eu diria que não, eu faria as tentativas... Mas [repensei] baseado no que você disse agora, porque, senão eu faria tudo... encontraria o número, e eu aí coloquei aqui o critério de divisibilidade, mas se eu não lembrasse do critério, ia dividir esse número aqui e fazer essas tentativas aqui, dividir por 2, por 5, e tal, tal. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020, grifo nosso)

O professor parece perceber alguns aspectos que envolvem o Teorema Fundamental Aritmética ao comentar corretamente os números que são e os que não são divisíveis por *M*, destacando, inclusive, que o fato de um número ser um dos fatores primos presentes na decomposição é um fator crucial na decisão sobre a divisibilidade de um número dado na sua forma fatorada. Inferimos que esta mudança de olhar tenha sido reforçada pelos momentos de lembrança e relembrança que optamos por fazer ao longo desta entrevista de Intervenção e que, de alguma maneira, o impeliu a repensar em suas maneiras de resolução.

Entretanto, no trecho presente no grifo, é interessante notar que o processo mental que realizou para decidir que 9 é divisível por *M*, observando que, se na decomposição de *M* há o produto 3.3.3, então o produto 3.3 também estaria, não foi considerado por ele ao tentar decidir sobre a divisibilidade de *M* por 15. Pelo contrário, voltou a realizar o processo ao qual está habituado a fazer. Acreditamos que tal comportamento se deu pelo entrevistado possivelmente estar interiorizando as Ações relativas ao conceito do Teorema Fundamental da Aritmética e, por isso, procedimentos que podem já ter sido realizados corretamente, não se repetem por precisar de o fornecimento de mais indicações externas do como deveriam ser desenvolvidos e observados detalhes de tais procedimentos.

Além disso, este resultado se assemelha aos resultados da pesquisa de Fonseca (2015), nos quais os participantes mantinham opacas as características e propriedades de um número, quando este não foi apresentado em sua forma decomposta e sim na sua forma composta.

Questionamos, então, sobre como resolveu o item c e o motivo pelo qual deixou a resposta do item d em branco e Saulo respondeu:

> Bom, o item d eu deixei em branco por causa dos expoentes que eu achei muito grande e eu falei: não sei nem por onde começar. Porque como eu

> ‘tava’ fazendo pegando os números, achando que número que é, por exemplo, a letra c, eu peguei 3^2, dá 9, 9.5, 45 vezes tal, tal, tal... aí esse número dividido por 4725 não dá exato. Por isso que eu deixei em branco porque eu não tenho, não me vem à cabeça como que eu faço para transformar esses números muito grandes para dividir depois por 4725, ‘pra’ poder dizer se é um múltiplo ou não. Ainda não vem na minha cabeça como faria isso com a letra d. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020)

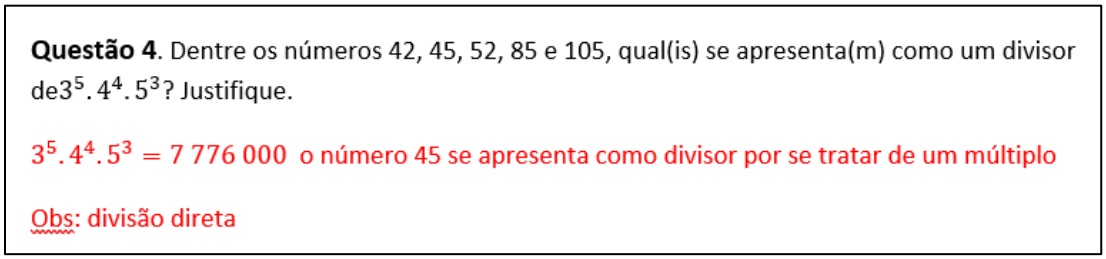
Neste trecho, o entrevistado mostra sua inabilidade de resolução da questão justificada pelos expoentes considerados de valores “altos” para que fossem resolvidas as potências presentes nos produtos. Vale ressaltar a contradição que parece ocorrer entre o discurso apresentado para estes itens, c e d, e o discurso do professor em relação à mudança de pensamento explicitada em sua resposta para aos itens a e b, no qual houve uma explicação utilizando consequências do Teorema Fundamental da Aritmética. Tal incoerência, reforça nossa análise de que o entrevistado ainda está num movimento de interiorização de Ações relacionadas ao Teorema Fundamental da Aritmética e, por isso, necessita que instruções mais específicas sobre os procedimentos corretos a serem realizados sejam explicados e explicitados para que sua utilização seja feita com maior eficiência.

Vimos, neste momento, a necessidade de intervir novamente, explicando como esta questão poderia ser rapidamente solucionada com a perspectiva do Teorema Fundamental da Aritmética e de que maneira pode ser encontrada a divisibilidade ou multiplicidade por um número, quando os números envolvidos estão em sua decomposição em fatores primos.

Questão 4

Segue o protocolo da resposta de Saulo para a Questão 4.

Figura 32 – Protocolo da Questão 4 de Saulo



Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos ver no protocolo, mais uma vez, o entrevistado recorre ao procedimento da divisão, após ter resolvido o produto $3^5.4^4.5^3$, para sua decisão sobre os números serem ou não divisores. Questionado sobre se o fato de o número estar decomposto em fatores primos no enunciado influenciaria na sua forma de resolução, segue o seguinte o diálogo:

> S – Nessa 4, eu dividi cada um. Eu achei esse número e dividi por 42, 45, todos eles..., mas pensando, agora, qual se apresenta como divisor, eu agora consigo ver que todos eles se apresentam como divisor, porque todos eles estão dentro da decomposição, não é isso?... Minto, por todos não, né. Mesmo assim, é o que eu consegui achar. Eu fico com a resposta que eu dei mesmo, analisando o número e fazendo as divisões diretas. Eu faria pelas tentativas.
> J – Na verdade, o que você respondeu está correto. Mas, se você decompuser os outros números, veria os fatores de cada um e se fazem parte da decomposição do número do enunciado ou não. Isso seria muito mais prático.
> S - Dessa forma fica mais fácil mesmo, analisando, 'né'. Mas como eu não aprendi ou não estudei, sei lá, o suficiente, então eu vou indo por tentativas e erros, até então. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020)

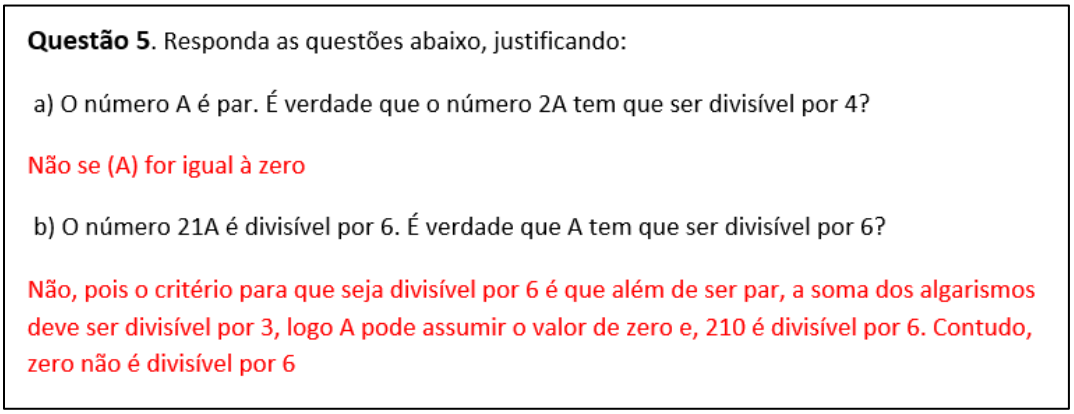
Observe que o docente tenta repensar em sua antiga resolução, buscando inserir uma propriedade do Teorema Fundamental da Aritmética em seu raciocínio, mas não o faz de maneira correta. Assim, não consegue abandonar sua maneira de solucionar a questão por meio do processo prático da divisão, ainda que a tenha respondido corretamente.

No momento em que intervimos e mostramos como a questão seria resolvida por meio da decomposição dos números apresentado em fatores, o entrevistado percebe o quanto facilitaria a sua execução. Contudo, volta a culpar as lacunas em sua formação para justificar a sua não escolha por esta maneira, o que não é uma justificativa plausível, já que, segundo Flores-Medrado *et al*. (2014), o conhecimento do professor deve ser amplo, contemplando os diversos conteúdos que envolvem a Matemática, com aprofundamento considerável que vai além daquele que será ensinado ao aluno.

Questão 5

Segue o protocolo das respostas de Saulo para a Questão 5.

Figura 33 – Protocolo da Questão 5 de Saulo



Questão 5. Responda as questões abaixo, justificando:

a) O número A é par. É verdade que o número 2A tem que ser divisível por 4?

Não se (A) for igual à zero

b) O número 21A é divisível por 6. É verdade que A tem que ser divisível por 6?

Não, pois o critério para que seja divisível por 6 é que além de ser par, a soma dos algarismos deve ser divisível por 3, logo A pode assumir o valor de zero e, 210 é divisível por 6. Contudo, zero não é divisível por 6

Fonte: Dados da pesquisa

Observando as respostas no protocolo, em ambos os itens parece que o número zero é um fator principal que motivou a resposta negativa para eles. Questionado sobre qual problema o zero traria para a resolução da questão, o docente responde: “Se *A* é par, ele pode ser zero e se ele for zero e 2 vezes *A*... eu entendi 2 vezes *A*, agora que eu ‘tô’ vendo que seria 20 né, e aí é divisível por 4, sim... É que eu entendi como uma multiplicação esse *2A*, 2 vezes *A*, entendeu?”

Com esta resposta, e observando seu protocolo para o item b, parece que o professor não compreendeu corretamente o enunciado, ora tratando *2A* e *21A* por números em que desconhece o algarismo das unidades, ora encarando-os como produtos. É, de certa forma, preocupante que confusões deste tipo possam surgir, pois entendemos que tal notação, na qual o produto se apresenta com o agrupamento entre um número e uma variável, seja amplamente conhecido e reconhecido pela comunidade matemática. Entretanto, tal dificuldade apresentada se dá, segundo Zazkis e Gadowsky (2001) e Fonseca (2015), por esta representação ser opaca para Saulo, não o permitindo perceber as propriedades e características presentes nos números apresentados, mesmo que nesta representação estejam envolvidas variáveis. Desta maneira, esclarecemos que o enunciado se refere aos produtos *2.A* e *21.A* e voltamos a questionar o professor que problema o zero traria para a solução da questão. O diálogo que se segue é o seguinte:

> S – Seria um problema, porque 2x0 é 0 e zero têm que ser divisível por 4? Não, eu acredito que nenhum número é divisível por... ou que 0 não vai ser divisível por 4. Foi isso que eu pensei. E aí, no [item] b, também seria o mesmo sentido

> da letra a, porque é 21x0 não seria divisível por 6, porque vai resultar zero e aí, é verdade que ela tem que ser divisível por 6? Acreditando que A seja zero, não, né... eu acho.
> J – Deixa eu entender o que você está querendo dizer... você está querendo dizer que zero não é divisível por nenhum número, é isso?
> S – Sim, acho que é isso sim. Porque zero não pode ser divisível por nenhum número, né? Que resulta nele mesmo, não é? [risos]
> J – Vou dizer que você confundiu, porque "ser divisível" significa que "é possível dividir". Se eu consigo tomar o zero e dividir em 6 partes iguais? Sim, a resposta é zero. O que não é verdade é que 6 é divisível por zero, ou seja, não consigo fazer 6 dividido por zero, pois não existe divisões por zero. Acho que você confundiu essa relação de divisão que existe entre o zero e números inteiros como um todo.
> S – [risos] Meu Deus! Entendi, sim! É todo confuso, mas, agora você explicando, eu consegui entender um pouco melhor..., mas é difícil, hein! (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020)

Vemos aqui, claramente, que o entrevistado se confunde sobre a divisibilidade de zero e por zero. Tal confusão o impediu de pensar mais profundamente sobre a questão, já que mostrou não ter entendido completamente a relação de divisão existente entre zero e números inteiros e vice-versa. Ainda que possa parecer um erro inesperado, Eça e Madruga (2019) afirmam em seu artigo que abordou a investigação de como professores em formação lidam com as restrições trazidas pelo zero nas operações de multiplicação e divisão, que pode existir uma "[…] lacuna em determinados saberes necessários na formação inicial do professor de matemática, em especial, sobre os saberes dos conhecimentos específicos sobre o papel do zero nas situações matemáticas levantadas na pesquisa. Aliás, se doravante não forem explorados na academia, esse quadro poderá causar danos pedagógicos aos estudantes." (EÇA; MADRUGA, 2019, p. 253)

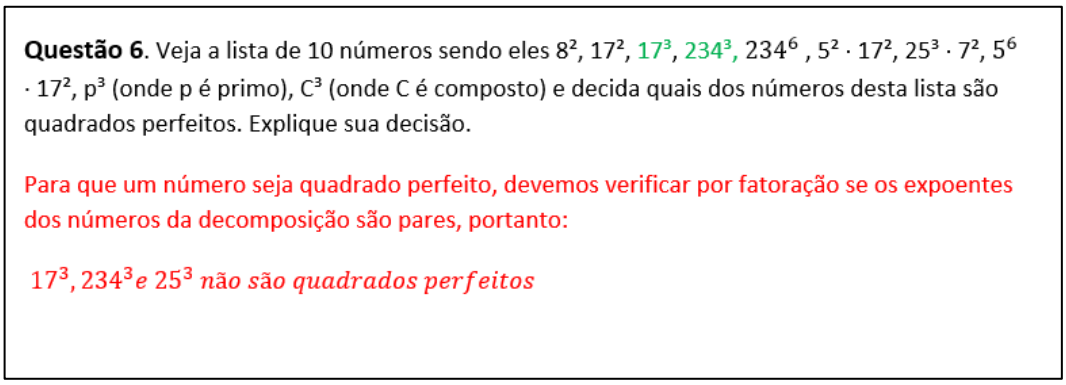
Esta consideração nos parece coerente com as dificuldades apresentadas pelo entrevistado que pode ser considerado um recém-formado, já que concluiu a Licenciatura em Matemática há apenas 5 anos. Além disso, desde o início da entrevista tem criticado a baixa qualidade de sua formação inicial, o que pode ter deixado algumas lacunas no entendimento das relações das operações com números inteiros, incluindo o número zero e possivelmente outros temas como o próprio Teorema Fundamental da Aritmética.

Mesmo percebendo que, adotando $A = 0$ em ambos os itens, as respostas para as perguntas seriam diferentes daquelas inicialmente dadas por ele, tal dificuldade ao lidar com o problema do zero faz Saulo decidir não tentar responder novamente à questão e solicitar que fossemos para a questão seguinte.

Questão 6

A seguir, apresentamos o protocolo de resposta da Questão 6 de Saulo.

Figura 34 – Protocolo da Questão 6 de Saulo



Questão 6. Veja a lista de 10 números sendo eles 8^2, 17^2, 17^3, 234^3, 234^6 , $5^2 \cdot 17^2$, $25^3 \cdot 7^2$, $5^6 \cdot 17^2$, p^3 (onde p é primo), C^3 (onde C é composto) e decida quais dos números desta lista são quadrados perfeitos. Explique sua decisão.

Para que um número seja quadrado perfeito, devemos verificar por fatoração se os expoentes dos números da decomposição são pares, portanto:

$17^3, 234^3 e\ 25^3$ *não são quadrados perfeitos*

Fonte: Dados da pesquisa

Como nos mostra o protocolo, Saulo apresenta imediatamente seu entendimento sobre como identificar um número quadrado perfeito. É importante ressaltar que, ainda que não tenha mostrado ao longo da entrevista domínio sobre elementos que compõem o Teorema Fundamental da Aritmética, sua descrição para verificar se um número é quadrado perfeito ou não passa pelo crivo da decomposição em fatores primos, mesmo que não especifique se estes fatores são primos ou compostos. Entretanto, pareceu-nos, em uma análise preliminar, que Saulo não percebeu a existência de produtos, como $25^3.7^2$, na lista dos dez números dados, analisando-os separadamente. Questionado sobre isso, o professor responde:

> Ah, 'tá'! Percebi aqui, sim! 'Pra' esse número... porque fazer 25.25.25... vezes 7^2, que dá 49 e fatorá-lo, sem saber desses critérios, 'pra' dizer se ele é um quadrado perfeito... é... apesar que fatorando-o, ainda assim ia dar 25^3 e tendo esse $25^3.7^2$, é isso? Então, ele, ainda assim, não seria quadrado perfeito, porque o expoente dele é ímpar. Aí, tem $5^6.17^2$. Esse número, 'pra' mim, é quadrado perfeito, porque tanto o expoente do número 5, que é 6, é par, quanto o do 17, que é número 2, também é par, então seria um quadrado perfeito. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020)

Percebemos que, apesar de ter afirmado em seu protocolo e em sua fala que para verificar se um número é um quadrado perfeito deve-se fatorá-lo e verificar a paridade de seus expoentes, o entrevistado não pensa nesta decomposição ser em fatores primos. Para o número o 25^3, Saulo não percebe que o número 25 pode ser decomposto em 5^2, o que transformaria 25^3 em 5^6, estando explicitamente na forma

em que sua verificação sobre um número ser quadrado perfeito teria resposta positiva para o número $25^3.7^2$.

Ao ser questionado sobre as respostas não registradas em relação aos números p^3 e C^3, com p primo e C composto, serem quadrados perfeitos, o docente responde:

> Bom, o *p*, […] não pode ser primo... quer dizer, não pode ser quadrado perfeito. […] Por exemplo, se eu pegar 2^3, vai dar 8, então já não é um quadrado perfeito, pelo critério que eu 'tô' falando que tem que ser um expoente par 'pra' que seja um quadrado perfeito. E o *C* é um número composto, né? Ou seja, não primo. Eu também acredito, pela mesma ideia, que ele também não vai ser um quadrado perfeito, porque o expoente dele, mesmo sendo um número composto, o expoente dele não vai ser par, 'né'? Que nem, 17^2 na lista... 'pra' mim é um quadrado perfeito por causa do expoente e 17^3, já não, porque o expoente é ímpar. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020)

Sobre o número p^3, a resposta do professor está correta e adequadamente justificada, por meio dos requisitos que descreveu para definir ser ou não quadrado perfeito. Além disso, o entrevistado trouxe um exemplo utilizando um quadrado perfeito, em que *p é* primo, para reforçar sua justificativa, permitindo-nos afirmar, então, que o entrevistado possui domínio sobre a temática Números Quadrados Perfeitos.

No entanto, mesmo diferenciando o número primo de um número composto, não leva isto em conta ao exemplificar seu raciocínio. O docente apresenta um exemplo no qual se equivoca ao utilizar o número 17^3, interpretando o 17 como um número composto. O domínio que mostrou ter em relação à técnica para a verificação de um número ser quadrado perfeito, parece não o ter permitido analisar sobre a informação do enunciado de que o número *C* é composto.

Diante desta resposta, intervimos esclarecendo que 17 é um número primo e solicitamos que nos informasse um outro exemplo que se encaixasse nas características de um número composto para justificar C^3 ser ou não um quadrado perfeito. Sua resposta é a que se segue:

> O 5, por exemplo... o 5 também é um número primo, né... Ah, não! Mas... espera aí... tem que ser um número composto, né? Então pode ser o 4... 4^3... 4 é um número composto e, ainda assim, não vai ser um quadrado perfeito... Eu acho isso... É isso mesmo... 4^3, ele não é um quadrado perfeito e, ainda assim, o 4 é um número composto. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020)

O fato de Saulo não se atentar às informações e características do número *C* fica claro neste trecho. Com o reconhecimento de que o número 4 é um número composto, o professor se adequa à primeira condição imposta pela questão, mas não analisa as implicações desta característica, o que, neste caso, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, traria uma resposta afirmativa ao número 4^3 ser um quadrado perfeito.

Continuamos buscando esclarecimentos sobre o raciocínio do professor e esclarecemos que 4^3 resulta em 64, que, por sua vez, é um quadrado perfeito. Imediatamente, o entrevistado informa ter executado a decomposição em fatores primos do número 64 e encontrado o expoente par, afirmando este também ser um número quadrado perfeito. Questionado sobre o seu entendimento sobre esta contradição entre sua resposta inicial, ao afirmar que C^3 não seria um quadrado perfeito e seu exemplo atual com 4^3 sendo um quadrado perfeito, Saulo responde ser "mágica dos números":

> Então, parece que quando *p* for primo acaba valendo essa premissa de que o número [p^3] não vai ser quadrado perfeito. Contudo, se o número [*C*] for composto, ele seria... não, não... não pode ser, porque 5^3 não seria, 'né'? Ah, não.... mas o 5 seria um número primo, então se o número for um número composto... e o expoente ímpar, então ele não vai ser quadrado perfeito, 'né'?... Ou se esse número *C* for um número ímpar também e ele tiver expoente ímpar, então não..., mas é isso aí. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR SAULO, 2020)

Ao tentar resumir as suas conclusões, Saulo não consegue definir o que ocorre sobre C^3 ser ou não um quadrado perfeito. Há uma última tentativa de analisar como as características de um número composto pode influenciar na forma final do C^3 ser considerado um quadrado perfeito quando o entrevistado afirma que se *C* for um número ímpar, então C^3 não será um quadrado perfeito, o que é um equívoco.

Finalizamos a entrevista, agradecendo a participação do professor Saulo e informando que enviaria o documento Instrumento de Coleta de Dados – Possíveis Respostas e solicitando que entrasse em contato caso desejasse fazer outras observações sobre suas respostas. A entrevista teve duração de quatro horas e dez minutos, devido à dinâmica de conversa via mensagens de áudio e por ter sido dividida em quatro encontros, conforme já esclarecido no início deste relato.

Em resumo, Saulo mostrou pouco domínio em relação ao conhecimento da definição de múltiplos e divisores, confundindo em alguns momentos ambas as definições. Da mesma maneira, sempre retornava ao processo prático da divisão para

verificar sobre a multiplicidade e a divisibilidade de um número, possuindo certa dependência de um resultado gerado pela calculadora para tal decisão.

Sobre a Divisibilidade, tem algum conhecimento sobre os critérios de divisibilidade, mas se limita aos números “pequenos” em que suas regras são mais simples, chegando a descrever o critério de divisibilidade por 7, que não é comumente usado devido às suas longas etapas; quando lidava com números maiores, voltada a utilizar o procedimento prático da divisão para suas decisões.

Da mesma maneira, parece não ter compreendido a unicidade da decomposição de um número em fatores primos, quando a informação de o número *k* ser produto de dois números primos não causar mudanças em sua resolução, mesmo que, após ser incentivado a pensar sobre esta possibilidade durante a entrevista, tenha percebido que algo poderia ser feito, mas não conseguiu concluir este pensamento.

Quando lida com uma questão possuindo variáveis, especificamente a que envolveu os números *2A* e *21A*, o docente apresentou dificuldades anteriores ao que foi pedindo, equivocando-se em decidir sobre uma situação relacionada à divisibilidade de zero. Devido a isso, preferiu não responder à questão.

Ao encarar a questão contextualizada em temática externa ao Teorema Fundamental da Aritmética, o Professor responde corretamente alguns dos números da lista serem quadrados perfeitos, mas não realizou a transformação dos números em que necessitavam de decomposição em fatores primos para realizar a análise ideal. Além disso, não conseguiu definir de forma satisfatória a abstração necessária para decidir se p^3 e C^3 são quadrados perfeitos, confundindo diversas vezes as definições de primo e composto, o que pode evidenciar uma falta de domínio do Conhecimento Matemático, que é um elemento fundamental para aquele que pretende ensinar qualquer conteúdo matemático.

5.5. Entrevista com o professor Leandro[75]

O nosso primeiro contato com o professor Leandro ocorreu após ter respondido a um chamado que fizemos em redes sociais procurando professores voluntários a participarem de nossa pesquisa. Assim, com seu retorno a este chamado, agradecemos o aceite e explicamos o objetivo geral da pesquisa, bem como os dois

[75] Nome fictício que será utilizado durante toda a pesquisa para descrição deste sujeito de pesquisa.

momentos que fariam parte da coleta de dados. Fizemos formalmente o convite à participação na pesquisa via *Whatsap*, enviando, por meio do mesmo aplicativo, o Formulário de Caracterização, o Instrumento de Coleta de Dados e o TCLE, solicitando que respondesse os dois primeiros, assinasse o último e que nos devolvesse depois. Demos a ele o prazo de uma semana para este envio e assim foi feito por Leandro, quando marcamos para três dias depois nossa entrevista para o segundo momento da coleta de dados.

Em seu Formulário de Caracterização, o professor Leandro, 57 anos, informa que concluiu a graduação em Licenciatura em Matemática no ano de 1988, pela Universidade Camilo Castelo Branco, cursando no mesmo local uma pós-graduação *Lato Sensu* na área de Matemática. Entretanto, afirma que, em nenhum momento, seja na graduação ou na pós-graduação, recorda-se de ter estudado disciplinas que tratassem, de forma específica, de temas relacionados aos Números Inteiros, suas operações e características. Possui 33 anos de experiência docente exclusivamente na rede pública, municipal e estadual, no Ensino Fundamental II, no Ensino Médio e na Educação de Jovens e Adultos, sendo que no momento da entrevista tinha se aposentado há poucos dias. Entende que a Teoria dos Números abrange, basicamente, o estudo dos Números Naturais e Inteiros, e seu estudo no Ensino Básico é importante para dar fundamentação ao entendimento e aplicação da Matemática.

No segundo momento da coleta de dados, a entrevista de Intervenção se deu por chamada de vídeo, via *Google Meet*[76], pedida por nós e autorizada a gravação pelo participante. Iniciamos agradecendo a Leandro sua pronta aceitação ao convite para a participação da pesquisa, esclarecemos nosso objetivo, salientando que, no GPEA, o estudo dos números inteiros e suas propriedades é denominado Teoria Elementar dos Números e que nela estão inseridos temas tais como a história e evolução dos números inteiros, divisibilidade, o MMC e o MDC, as progressões e o Teorema Fundamental da Aritmética, sendo este último o tema principal a ser investigado na pesquisa em questão.

Em seguida, perguntamos a Leandro se conhecia o Teorema Fundamental da Aritmética, o que foi respondido que “com essa nomenclatura propriamente dita não. Há um tempo, a gente chamava de Aritmética. Mas com este nome, sinceramente eu

[76] Serviço de comunicação por vídeo desenvolvido pelo Google.

não lembro, não". Apesar de não conhecer o Teorema Fundamental da Aritmética pelo seu nome, o professor parece entender que os temas que foram descritos por nós como constituintes da Teoria Elementar dos Números são chamados de Aritmética, mas acredita ser um nome antiquado, que não seria mais utilizado. Ressaltamos que este termo continua sendo usual para se referir às operações básicas e suas propriedades. Entretanto, nós do GPEA, entendemos que este termo pode ser, de certa forma, restrito aos números naturais. Assim, utilizamos a expressão Teoria Elementar dos Números para descrever o estudo dos números inteiros, suas operações, propriedades e consequências.

Diante desta incerteza do que se tratava o tema, pedimos para que assistisse ao vídeo sobre o surgimento deste conceito, elaborado pela *Khan Academy* Brasil. Ao ser concluída a execução do vídeo, questionamos novamente sobre o reconhecimento sobre o conceito e o professor imediatamente responde de forma afirmativa, complementando que "a gente encontra como Aritmética para estudar os primos, decomposição".

Perguntamos, então, como tinha o costume de trabalhar com os alunos ao lidar com a decomposição em fatores primos. Leandro comenta que, nos últimos anos, lecionou quase que exclusivamente na Educação de Jovens e Adultos e, devido às peculiaridades existentes neste nível de ensino, não pode utilizar de forma específica este conceito. Ainda assim, afirma gostar muito do estudo desta Matemática elementar, que também chama de Matemática pura. Acreditamos que tenha utilizado este termo para se referir à formalidade com que se pode lidar com assuntos matemáticos em sua forma mais teórica. E completa:

> Eu tinha uma coisa comigo assim: eu posso não explicar 100% do conteúdo do ano, mas estes 80% que eu explicar, eu quero que meus alunos entendam. Então, eu me dedicava muito a isso, a essa questão de... 'Ah, por que esse número é composto?', 'mas, é composto, porque você põe uma barrinha?'... Eu sempre gostei, e procurei demonstrar os porquês. […] Tem que entender o porquê e tal. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR LEANDRO, 2020)

O professor apresenta uma postura docente que mostra seu comprometimento com a efetividade do ensino combinada com a consciência de seu potencial e os limites que o sistema de ensino pode lhe apresentar. Mesmo com as dificuldades que passou durante sua carreira relatadas durante a entrevista, buscava o ensino

consistente, baseado na busca das respostas aos porquês da Matemática para que o aluno consiga dar significado ao que se está ensinando.

Assim sendo, questionamos se houve alguma influência da sua formação na sua prática em sala de aula, isto é, se o que foi ensinado era o que seria ensinado de fato. Sobre isso, o docente faz o seguinte relato:

> É um tanto quanto curioso, porque quando eu fui 'pro' Ensino médio, cheio de dúvidas, o que que eu vou fazer da minha vida, o que eu vou estudar, acabei indo fazer Edificações, na Escola de Artes e Ofício, no Liceu. Prestei vestibulinho, passei, na época, [...] eu até me sentia envergonhado: "'Pô', todo mundo fez cursinho, só eu que não". Mas na verdade, eu tinha que sentir orgulho, porque passei sem cursinho... só depois eu fui ter essa noção. Como o curso era voltado para Edificação, a parte de exatas era muito boa. E aí quando eu 'tava' no último ano do curso no Liceu, eu fui trabalhar como inspetor de alunos numa escola. E, quando chegava perto de provas os alunos estudando e eu perguntava: "Você não quer uma ajuda?". Aí eles olhavam: "o inspetor de alunos sabe Matemática?" […]. Tanto é que acabou pegando. Quando chegava em provas eles formavam grupinhos e vinham estudar e eu falava: "Eu não quero ser engenheiro não, eu quero ser professor!" […]. E eu sou bem sincero contigo. O meu curso de Ensino Médio, me ensinou muito mais que propriamente a faculdade. Dizer que a faculdade foi forte, exigente, não foi. Aprendi muito mais no curso do Ensino Médio que na faculdade. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR LEANDRO, 2020, grifo nosso)

Seu relato apresenta um problema sistêmico na educação pública ao citar sua sensação de ter menor capacidade que outros alunos de escolas privadas por ter concluído todo seu percurso escolar na escola pública.

Mostra, também, que uma boa qualidade do ensino que é oferecido aos estudantes durante a caminhada escolar faz toda a diferença nas habilidades e competências que levará por toda a sua vida ao lidar com o mundo do trabalho, assim como prevê a BNCC (2017), quando cita a importância do saber, considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores e do saber fazer, levando em conta a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores

para resolver demandas complexas da vida cotidiana. Além disso, notamos que a sua experiência com o ensino já se apresenta antes de iniciar seus estudos específicos em Matemática, algo que poderia ser impulsionador pela busca constante por mais conhecimento, como evidenciado em relatos anteriores.

Já no grifo, em que o entrevistado declara explicitamente a pouca contribuição dada pela sua formação inicial para o conhecimento necessário para sua docência no Ensino Médio, voltamos ao que Resende (2007) defende ao afirmar que pouca ênfase

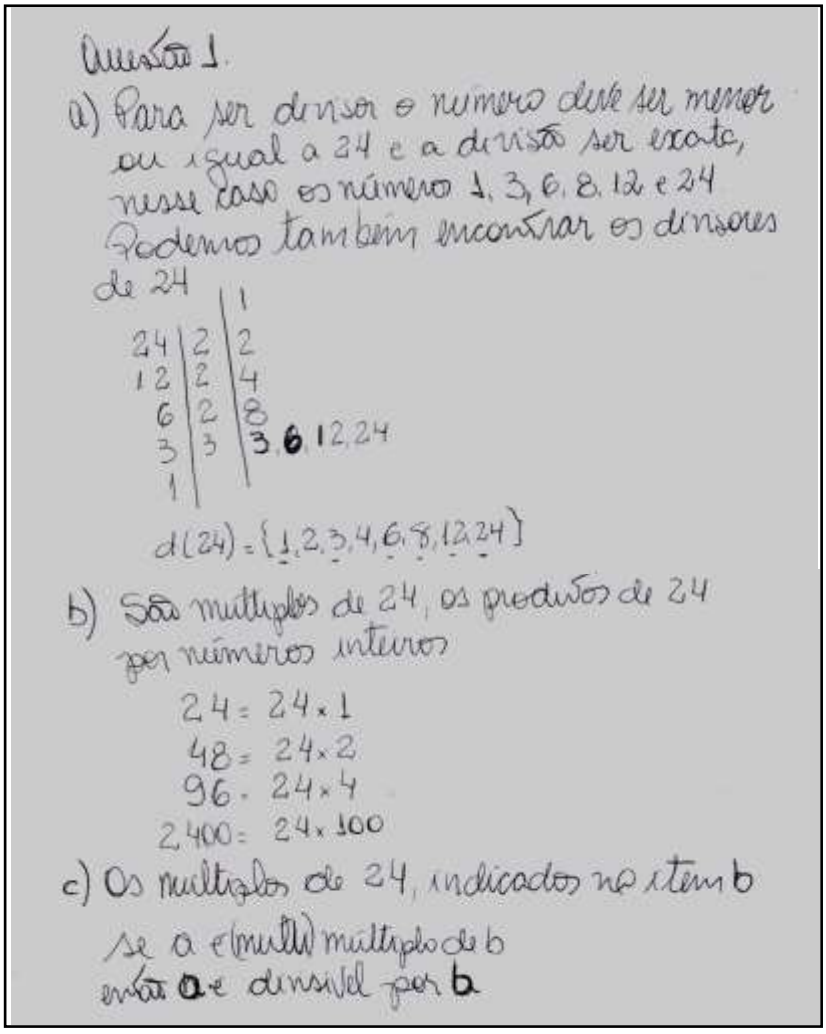
é dada nos cursos de Licenciatura em Matemática ao que é, de fato, importante para o futuro professor saber. Pereira (2016) também expõe parte deste problema, ao constatar a ausência de discussões, numa disciplina de Teoria dos Números, sobre de que forma conceitos como a divisibilidade poderiam ser trabalhados na prática da sala de aula do Ensino Fundamental. É interessante notar que o professor concluiu sua graduação em Matemática há mais de 33 anos, o que nos permite dizer que a preparação não ideal de professores de Matemática em sua formação inicial de professores de Matemática é um problema que não se explicita apenas nos cursos atuais, mas há muitos anos vem mostrando suas deficiências.

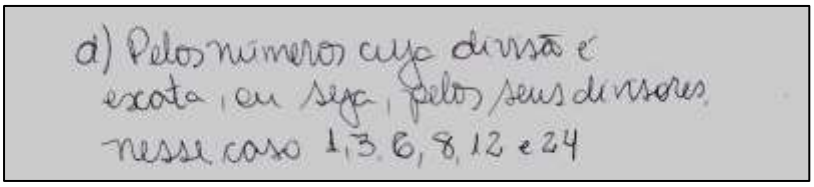
Feitas tais considerações iniciais, procedemos para análise mais detalhada das questões do Instrumento de Coleta de Dados.

Questão 1

Apresentamos o protocolo da resposta de Leandro para a Questão 1.

Figura 35 – Protocolo da Questão 1 de Leandro





Fonte: Dados da pesquisa

Analisando previamente o protocolo da Questão 1 de Leandro, percebemos que todos os itens foram respondidos de forma correta, sendo em algumas delas sendo apresentadas mais que uma forma de resolução. Este tipo de conhecimento está de acordo com a categoria Procedimentos da categoria Conhecimento Matemático, do modelo MTSK, na qual o professor pode conhecer forma convencionais e não convencionais para o ensino de determinado conceito.

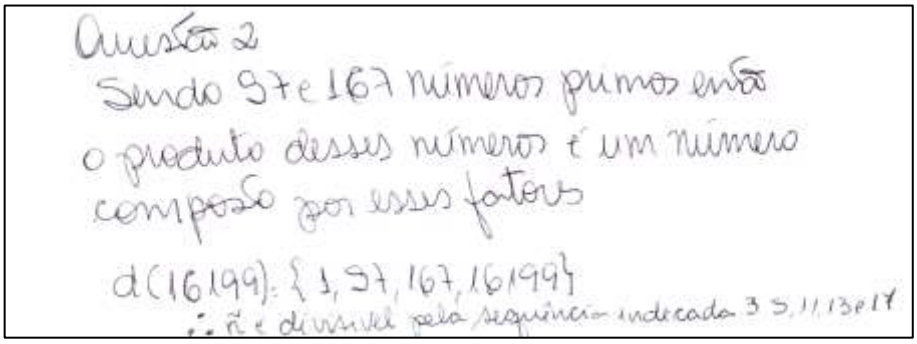
Questionado sobre seu entendimento sobre múltiplo e divisores, o docente responde: “múltiplo é o resultado de um número, é o produto de um número por um número inteiro, na primeira questão eu falei isso. […] Se *a* é múltiplo de *b*, *a* é divisível por *b*, ou seja, *b*, no meu ver, vai ser divisor do *a*”. Vemos, que, tanto em seu registro quanto em sua fala, o entrevistado explicita o seu entendimento sobre a definição de divisor e múltiplo. Para a definição de divisor, nos registros das respostas dos itens a e d, Leandro vincula o divisor à obtenção de uma divisão exata, mas considera que o divisor sempre deve ser menor ou igual ao número inteiro de referência. Ainda que tenha descrito de maneira estritamente formal, entendemos que a definição apresentada se aproxima intimamente da maneira como o divisor é definido formalmente, em que, quando um número inteiro *b* é divisor de um número inteiro *a*, sempre teremos que $b \leq a$, com $b \neq 0$. Ademais, no item a, utiliza a decomposição em fatores primos como uma alternativa à determinação dos divisores de 24.

Em relação à definição de múltiplo, o docente utiliza a multiplicação entre números inteiros para explicá-la. No item c, inclusive, acrescenta a estrita relação que existe entre ser ‘múltiplo de’, e ‘ser divisível por’ ao citar que os múltiplos de 24 já respondidos no item anterior são os mesmos divisíveis por 24, o que mostra o claro entendimento que Leandro possui sobre estes conceitos.

Questão 2

Seguimos com o protocolo da resposta de Leandro para a Questão 2.

Figura 36 – Protocolo da Questão 2 de Leandro



Fonte: Dados da pesquisa

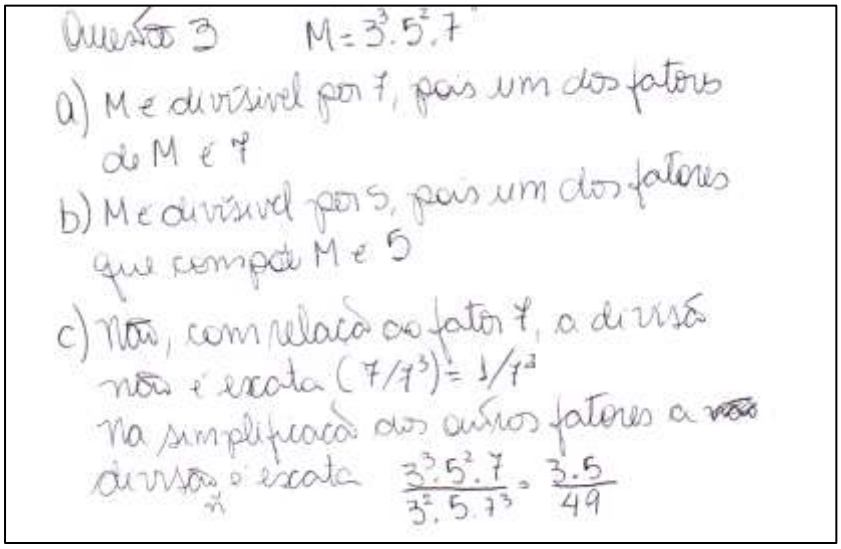
Como podemos observar em seu protocolo, Leandro responde corretamente à questão e, além de seu registro estar claro em relação à sua forma de resolução, o entrevistado explica de maneira exata e clara como pode ser entendida a unicidade da decomposição em fatores primos: “se eles são números primos, então eles estão compondo o número maior lá. Ou seja, aquele número maior só teria quatro divisores: um, ele próprio e estes dois primos. Então, aqueles outros da lista fatalmente não seriam”.

O entrevistado comenta, ainda, que se esta questão fosse apresentada aos alunos, os poucos que ousassem a tentar responder, resolveriam a multiplicação dos números 97 e 167, seguida da multiplicação por cada um dos números da lista. Ele acha pouco provável que a informação dada no enunciado sobre 97 e 167 serem números primos, os faria descartar todos os outros da lista. Antes, seria necessário uma possível lembrança ou aprendizado, de fato, deste conceito antes de prosseguir. Esta impressão do professor está de acordo com o que já temos pontuado em outros momentos desta análise, sobre a decomposição em fatores primos ser um tema pouco trabalhado no Ensino Básico e, se trabalhado, muitas vezes, é visto apenas como uma ferramenta para ser utilizada em outros contextos e, ainda assim, de forma subestimada.

Questão 3

Trazemos, a seguir, o protocolo da resposta da Questão 3 de Leandro.

Figura 37 – Protocolo da Questão 3 de Leandro



Fonte: Dados da pesquisa

Observando o protocolo desta questão, percebemos que em nenhum momento Leandro realizou o produto em *M* para saber seu valor exato. Pelo contrário, nos itens a e b, o docente justificou ambos os itens utilizando uma consequência do Teorema Fundamental da Aritmética, em que basta que todos os fatores de um número *n* estejam inclusos nos fatores do número *M* para dizermos que *M* é divisível por *n*.

Já no item c, o docente continua utilizando os fatores de cada um dos números envolvidos para decidir sobre a divisibilidade entre eles. Neste caso, porém, cita a divisão exata entre eles, por meio da simplificação de frações contendo produtos com potências no numerador e no dominador, para justificar sua decisão. Entendemos que esta é uma maneira prática para explicitar a inclusão ou não dos fatores dos números analisados, que possivelmente é utilizado por ele na sua prática em sala de aula, por esta ser uma maneira, de certa forma, mais explícita e convincente para o entendimento do aluno deste resultado.

Questionamos o professor sobre a não resposta do item d desta questão. Leandro externa que a questão “está bem tranquila de responder”, comentando oralmente sua resposta: “se você tentar fazer a divisão desse número [do enunciado do item d] pelo número *M*, é uma divisão exata, porque os fatores que aparecem aqui no numerador têm expoentes iguais ou maiores. No caso, aqui, maiores.” Novamente, Leandro apresenta o seu entendimento sobre a maneira de se encontrar um divisor, observando a inclusão dos fatores de um número nos fatores do outro, feito por meio da verificação da exatidão da divisão. Supomos que, nesta situação, a utilização da divisão não está diretamente relacionada à compreensão do professor sobre o

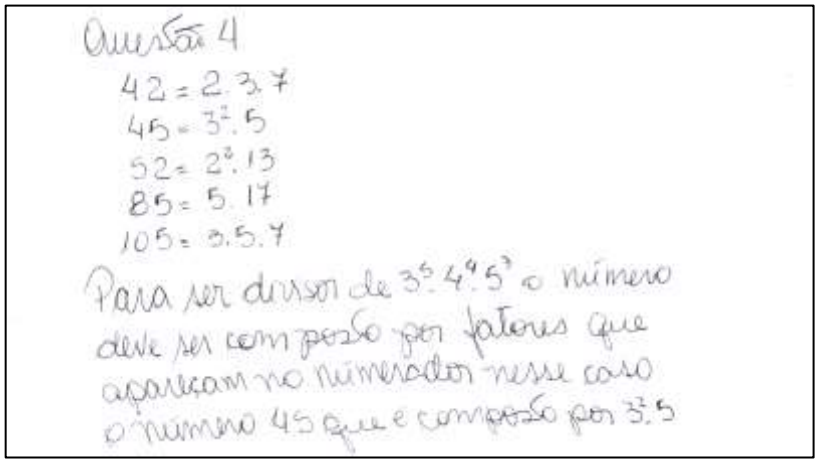
conceito de divisor e múltiplo, e sim a utiliza como ferramenta para facilitar a visualização e justificativa de sua resposta.

Buscando confirmar esta suposição, perguntamos se a simplificação de potências presente em frações traz dificuldades aos alunos. Leandro responde que “essa questão da divisão de potências de mesma base era relativamente tranquila. Às vezes, a dificuldade estava na hora de decompor. Mas, uma vez estando decomposto, era relativamente tranquilo.” Esta afirmação corrobora nossa suposição, uma vez que a maior dificuldade dos alunos é a decomposição, propriamente dita, e não, necessariamente o meio para verificação de ser ou não divisível. O professor ainda complementa que os alunos, possivelmente, teriam dificuldade com a decomposição em fatores primos justamente pela pouca habilidade que mostram ter no procedimento desta operação.

Questão 4

Apresentamos o protocolo de Leandro para a Questão 4.

Figura 38 – Protocolo da Questão 4 de Leandro



Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos ver no protocolo, Leandro realizou a decomposição em fatores primos de cada um dos números presente no enunciado, para decidir qual deles teriam seus fatores inclusos nos fatores de $3^5.4^4.5^3$. Esta resposta está em consonância com aquela sugerida por nós no documento Instrumento de Coleta de Dados – Possíveis Respostas, tendo como enfoque o Teorema Fundamental da Aritmética. Perguntamos se pensaria em outra estratégia diferente daquela presente em seu protocolo e o docente explica que “não, porque quando você vê aqui o número do enunciado 3^5 e

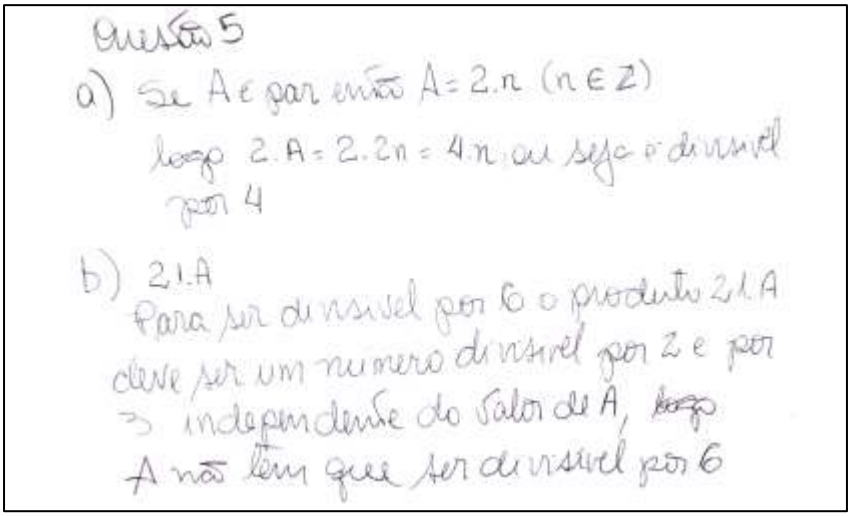
tal, se você vai tentar compor este número ‘pra’ tentar dividir, acaba complicando uma coisa que está simples, né. Então, é mais fácil fazer o quê? Fatorar a listinha lá: 48, 45, 52...”.

Vemos neste comentário do professor seu poder de análise para a resolução de problemas. Ele mostra compreender e dominar as ferramentas que possui para a solução desta questão e escolhe aquela que lhe seja mais eficiente. Ao perceber que a maneira que utilizou até o momento para verificação de divisibilidade, a divisão exata não parecia ser viável, analisou e apresentou uma outra forma de resolução envolvendo a observação da inclusão ou não dos fatores primos de todos os números da lista fatores primos da decomposição apresentada no enunciado.

Questão 5

Segue o protocolo da resposta de Leandro para a Questão 5.

Figura 39 – Protocolo da Questão 5 de Leandro



Fonte: Dados da pesquisa

Tanto na resposta no protocolo do item a, quanto na fala em sua entrevista, ao explicar sua resposta, o professor apresenta possuir domínio da linguagem mais formalizada de demonstração: “Foi isso que eu fiz. Eu chamei o *A* de *2n*, porque, se ele é par, ele é múltiplo de 2. Duas vezes *A,* acaba em *4n*, ou seja, qualquer número multiplicado por 4 é divisível por 4”. O professor acrescenta que sempre gostou de demonstrações, desde sua formação inicial, e esta preferência foi levada à sala de aula, como explicitou nesta fala:

> Eu sempre me baseei nas demonstrações, porque você chegar e jogar ‘pro’ aluno: “Olha, isso daqui tá na fórmula”. “Mas, por que esta fórmula?”. Então, se você entender o conceito, a execução fica mais fácil. E não fazer um... decorar uma fórmula e fazer. É entender o conceito. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR LEANDRO, 2020)

Leandro confirma sua predileção pelas demonstrações, tanto para seu entendimento de conceitos matemáticos, como uma ferramenta útil para dar sentido e significado aos conceitos matemáticos que ensina. Acreditamos que tal domínio possa propiciar um entendimento mais profundo de conceitos matemáticos, uma vez que o desenvolvimento de um conceito pode permitir que conexões entre concepções já conhecidas e novas concepções possam e ser concebidas com mais facilidade. Além disso, este comportamento, segundo o modelo MTSK, identifica-se na categoria Práticas ligadas à Matemática em geral, do Conhecimento da Prática, quando o professor conhece como se desenvolve a Matemática, que normalmente é utilizado para trabalhar genericamente com qualquer que seja o conceito abordado.

Sobre o item b, notamos que continuou utilizando seus conhecimentos sobre demonstração para justificar sua resposta. Entretanto, nos pareceu que esta justificativa, mesmo com uma resposta final correta, não foi suficiente para estabelecer que *A* não será divisível por 6, uma vez que em seu protocolo, sua explicação colocando o *21A* como tese e não hipótese de sua demonstração ao escrever “para ser divisível por 6, o produto *21A* deve...”. Diante disso, solicitamos ao professor que nos esclarecesse o seu raciocínio durante esta justificativa. O diálogo é o que se segue:

> J – Você falou que *A* não tem que ser divisível por 6. Por quê?
> L – Hum... Acho que eu fiz confusão aqui. Está afirmando que *21A* é divisível por 6. […] Eu não sei o que que eu fiz aqui nessa. Porque eu tinha feito algumas multiplicações que eu colocava aqui, que o *A* não era divisível por 6, mas *21A* era divisível por 6.
> J – Então pense em um valor de *A* que falharia ser divisível por 6.
> L – Deixa eu ver aqui.... por exemplo... eu acho que eu fiz besteira. Eu fiz até uma tabelinha aqui no Excel ‘pra’ saber. Por exemplo, o número 168. O *A*, aqui, seria 8. E 8 não é divisível por 6 […]. Porque se você pegar o número 6, por exemplo. Seis vezes 21, vai ser divisível por 6, mas nem todos serão. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR LEANDRO, 2020)

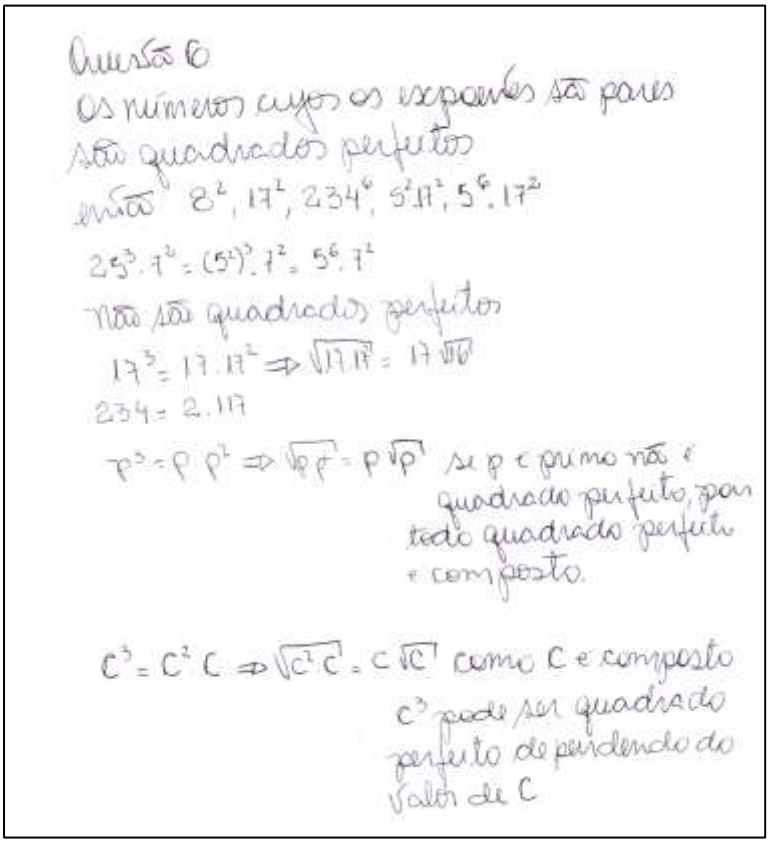
Neste trecho, percebemos que Leandro possui o conhecimento sobre o critério de divisibilidade por 6 e, por isso, recorre a exemplos numéricos para investigar a veracidade ou não da afirmação. E assim, por meio destes exemplos conseguiu justificar que não é verdade que *A* tem que ser divisível por 6. Posteriormente, quando apresentamos o documento contendo as possíveis respostas para cada uma das

questões, o docente se deu conta que sua demonstração inicial tinha se realizado de maneira equivocada, entendendo que confundiu a tese com a hipótese, conforme tínhamos inferido.

Questão 6

A seguir, apresentamos o protocolo de resposta da Questão 6 de Leandro.

Figura 40 – Protocolo da Questão 6 de Leandro



Fonte: Dados da pesquisa

Como mostra o protocolo, Leandro responde toda a questão, tanto para os números da lista com valores determinados quanto para os que contém variáveis. É interessante observar que, para o número com valores exatos e, especificamente para o número $25^3.7^2$, o docente executou a decomposição em fatores primos do número 25 para indicar a paridade de seu expoente, classificando corretamente todos os números com valores exatos da lista. Apesar de estar aparente em seu registro, questionamos sobre como encontraria um quadrado perfeito e segue-se o rápido diálogo:

> L – Pensando aqui no número já decomposto, o expoente lá da raiz...é um número par, porque você vai poder simplificar com o índice, né.
> J – Então 'pra' você verificar o quadrado perfeito, você usa a extração raiz quadrada?
> L – Isso, é. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR LEANDRO, 2020)

Ainda que tenha dito que a maneira usada por ele para determinar um número quadrado seja por meio da extração da raiz quadrada deste número, observamos em seu registro escrito que Leandro também utiliza a definição de que um número quadrado perfeito deve possuir expoente par, quando posto em sua forma decomposta em fatores primos combinada ao jeito que declara empregar.

Para o número p^3, com p primo, observamos em seu protocolo que a justificativa empregando a língua natural é dada em relação ao número p, mesmo seu registro algébrico tenha feito em relação ao p^3. Assim, perguntamos a Leandro se p^3 era um quadrado perfeito, que respondeu prontamente: "Não. Pelo mesmo motivo. Eu não escrevi que p^3 não é um quadrado perfeito. Eu coloquei toda esta explicação, mas não coloquei a conclusão". Este comentário nos leva a constatar que o docente tem conhecimento claro sobre o fato de p ser um número primo e suas consequências.

Já em relação ao número C^3, vemos no registro do protocolo que a conclusão de que C^3 poderia ser ou não um quadrado perfeito dependeria do valor de C, sem maiores detalhes sobre quais seriam as condições para isso. Assim, questionamos Leandro sobre isso e o diálogo foi o que se segue:

> L – Quatro ao cubo, por exemplo, por que você poderia também, pensando na decomposição, o 4 seria $(2^2)^3$ ou seja, você ficaria com 2^6, que volta lá no início, quando o expoente é par é um quadrado perfeito.
> J – E aí você consegue pensar em algum número que não seria quadrado perfeito?
> L – Número composto... o 6, por exemplo. Porque vai ser 2 vezes 3... esse é composto e já não dá 'pra' extrair a raiz [quadrada]. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR LEANDRO, 2020)

Diante desta resposta, acreditamos que o professor conseguiu com sucesso fazer a tematização entre um Número Quadrado Perfeito e o Teorema Fundamental da Aritmética, com certa facilidade e com detalhamento de seus procedimentos, sempre se pautando na forma fatorada dos números como sua base de análise, demonstração e cálculo.

Finalizados os questionamentos, agradecemos o professor Leandro pela sua disponibilidade para a participação na pesquisa, informando sobre o envio posterior do documento Instrumento de Coleta de Dados – Possíveis Respostas para que lesse

e nos contatasse, caso houvesse outras observações a serem feitas. A entrevista teve uma duração de uma hora e vinte e dois minutos.

Concisamente, Leandro apresentou domínio dos conceitos de múltiplo e de divisor, definindo-os de maneira formal e fazendo interrelações recorrentes entre as relações existentes entre estes elementos. Além disso, reconhece a relação existentes entre as expressões “ser múltiplo de” e “ser divisível por”, não necessitando reencontrar soluções já estabelecidas em itens anteriores.

Em relação à unicidade da decomposição em fatores primos, o docente mostrou conhecer o Teorema Fundamental da Aritmética ao deixar claro a relação existente entre o número composto *k* e seus divisores explicitados na decomposição apresentada no enunciado da Questão 2.

Ao lidar com situações que remetiam diretamente ao Teorema Fundamental da Aritmética, quando foram apresentados desde o enunciado números em sua forma canônica, o professor respondeu corretamente às questões sem necessitar encontrar em nenhum dos casos os resultados dos produtos apresentados. Antes, realizou a decomposição em fatores primos dos números compostos e decidiu sobre a divisibilidade e multiplicidade solicitada, observando apenas os fatores primos dos números em questão.

No que diz respeito à Questão 5, em que números estão multiplicados por variáveis, o entrevistado respondeu corretamente, utilizando a demonstração como uma linguagem formal adequada para sua justificativa.

Quando tratamos de uma temática externa ao Teorema Fundamental da Aritmética, entrando no âmbito dos Números Quadrados Perfeitos, Leandro evidenciou conhecer ambas as temáticas, utilizando corretamente as propriedades da decomposição em fatores primos em todas as etapas necessárias, incluindo aquelas em que foram solicitadas decisões sobre os números p^3 e C^3 serem quadrados perfeitos, mostrando possuir o domínio do Conhecimento Matemático considerado fundamental para o ensino.

5.6. Entrevista com a professora Dandara[77]

O nosso primeiro contato com a professora Dandara também se deu por meio da resposta ao chamado feito por nós, em redes sociais, na procura de professores

[77] Nome fictício que será utilizado durante toda a pesquisa para descrição deste sujeito de pesquisa.

voluntários para participação em nossa pesquisa. Tendo um retorno positivo ao chamado, agradecemos o aceite, esclarecemos nosso objetivo geral e como seriam os dois momentos que fariam parte da coleta de dados. O convite formal à participação na pesquisa foi feito via *Whatsap* e, no mesmo momento, foram enviados, por meio do mesmo aplicativo, o Formulário de Caracterização, o TCLE e o Instrumento de Coleta de Dados. Solicitamos que a professora respondesse cada um dos documentos e que nos devolvesse em um prazo de uma semana. Todavia, a devolução dos documentos demorou quinze dias para se concretizar e a entrevista foi marcada para quatro dias após este momento.

Em seu Formulário de Caracterização, a professora Dandara, de 41 anos, informa que atua no ensino público há 18 anos, dentre eles, nove anos Ensino Fundamental II e atualmente leciona Matemática para o 7º ano do Ensino Fundamental II e para o 1º ano do Ensino Médio. Possui experiência de um ano na docência na rede particular de ensino, além de ter atuado em um curso à Distância de Graduação em Matemática como tutora por três anos. Concluiu a graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Braz Cubas, no ano de 2004, possui especialização na Formação de Professores com Ênfase no Ensino Superior, pelo Instituto Federal de São Paulo e atualmente cursa o Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Matemática, na mesma instituição. Para ela, os números inteiros, múltiplos e divisores são os temas relacionados à Teoria dos Números e a importância de seu estudo se dá para que os estudantes tenham noção das propriedades e uso dos números, para que tenham um conhecimento mais amplo sobre as suas aplicações.

Após termos analisado previamente as respostas presentes no Instrumento para a Coleta de Dados preenchido por Dandara, percebemos que muitas questões deveriam ser esclarecidas, por possuírem justificativas incoerentes, incompletas ou incorretas, com algumas delas contendo apenas o registro da resposta final, sem nenhuma menção do que foi pensado para chegar em tal conclusão.

Assim, seguimos para a entrevista de Intervenção do segundo momento da coleta de dados, realizada por meio de chamada de vídeo, via *Google Meet*, quando solicitamos à participante autorização para gravação de toda a entrevista, sendo aceita por ela. Iniciamos a entrevista agradecendo o aceite de Dandara para a participação na pesquisa, que imediatamente partilhou as dificuldades em sua trajetória acadêmica e profissional, relatando um pouco sobre a influência de sua

formação inicial em sua prática docente. Entretanto, descreve ter sido insuficiente para que pudesse ter o domínio necessário de temas importantes para o seu desenvolvimento pedagógico, concluindo que na faculdade particular “não se estuda nada”. Diante disso, questionamos se havia alguma lembrança do trabalho com a Teoria dos Números na faculdade tê-la ajudado em sala de aula, culminando no seguinte diálogo:

> D – Na faculdade teve Tópicos da Matemática Elementar que fala um pouquinho sobre múltiplos, mas bem pouquinho. Esse negócio de divisíveis, por exemplo, que eu respondi ‘pra’ você, eu tive que pesquisar, porque ficou confuso. […] Ficou confuso, porque na faculdade lá, na faculdade particular é uma porcaria.
> J – Teve alguma predileção para a parte pedagógica do que para a Matemática?
> D – Não. Era faculdade de Matemática, era voltada ‘pra’ Matemática. Só que era voltado mais como se a gente fosse fazer só cálculos e não que eu fosse dar aula, entende o que eu quero dizer? Eles davam mais coisas profissionais, por exemplo, eu tive Cálculo B, Cálculo C, integral, derivada... Eles partiam do Ensino Médio para frente, entendeu? Ensino fundamental, eu tive, como eu te falei, nesse Tópico de Matemática Elementar que entrou um pouquinho de múltiplos, bem pouquinho, equação de primeiro e segundo grau, em uma aula, meia aula ele passou. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020, grifo nosso)

Notamos que a percepção revelada na fala de Dandara sobre as disciplinas de seu curso de Licenciatura serem mais teóricas, com foco em conteúdos específicos para o Ensino Superior vai ao encontro ao entendimento de Rezende (2007), ao salientar que em tais cursos não têm preparado o professor em formação inicial com assuntos que de fato utilizarão no momento de sua docência no Ensino Básico. Entendemos que o professor não deve ter um conhecimento restrito àquilo que ensinará em sala de aula, entretanto, assim como afirmam Lins e Gimenes (1997), é importante a abordagem do estudo dos números em cursos de Licenciatura que forneça embasamento teórico e metodológico que supram as necessidades dos professores de matemática. Apesar disso, é fundamental, segundo Flores-Medrado (2014) que o professor que ensina Matemática tenha conhecimento da disciplina em questão, tendo domínio dos temas matemáticos, da estrutura e da prática matemática.

Além disso, como destacado no grifo, a professora parece acreditar que há uma diferença de qualidade de ensino entre faculdades públicas e particulares, explicitando que faculdades privadas têm qualidade inferior.

Após isso, relata que quando atuou como tutora de um curso de Matemática teve a oportunidade, ainda que ínfima, de entrar em contato com assuntos referentes

à Teoria dos Números, pois, agia como docente principal, por muitas vezes, indo à lousa e esclarecendo as dúvidas dos alunos presentes, apesar de isso não fazer parte de sua função. Ainda que mostre possuir uma experiência como docente em diversos níveis de ensino, desde o sétimo ano do Ensino Fundamental da escola pública, chegando a ser tutora em uma faculdade particular, a entrevistada indica que tais experiências não lhe deram possibilidade de aprofundar seus estudos e, consequentemente, amadurecer seu conhecimento sobre números inteiros e suas propriedades.

De fato, entendemos que o movimento que o professor realiza na busca pela melhor maneira de ensinar determinado conteúdo matemático, pode trazer ganhos ao seu próprio conhecimento, o que pode fazer com que conceitos não aprendidos outrora sejam construídos e consolidados nestes momentos de estudo docente.

Seguindo seu relato sobre sua experiência profissional, Dandara comenta que no Caderno do Aluno e no Caderno do Professor do sétimo ano do Ensino Fundamental, material pertencente ao atual Currículo Paulista, já citado por nós na introdução deste estudo, há o trabalho com múltiplo e divisores, mas de forma muito superficial e continua: “Fala sobre o quadrado perfeito que eu respondi ‘pra’ você, mas […] eles partem da teoria dos números primos, porque […] dois números primos dá um quadrado perfeito, mas teoria, não tem nada assim”. Neste trecho, a professora parece ter criado uma regra para verificar um quadrado perfeito, já que não é verdade que o produto entre dois números primos quaisquer resultaria em um quadrado perfeito.

Diante do declarado pela entrevistada, ficamos intrigadas se, e como, números quadrados perfeitos seriam abordados no documento vigente no ensino público paulista. Mesmo que este não seja o foco de nossa pesquisa, entendemos ser importante analisar esta abordagem. Assim, fomos consultar o Currículo Paulista, em sua versão digitalizada, destinada ao Ensino Fundamental, e buscamos o termo “quadrado perfeito” no campo de busca do programa em que estava o documento, a fim de localizar sua paginação mais rapidamente. Entretanto, este termo não foi encontrado. Partimos, então, para o material denominado Caderno do Professor e buscamos o termo “quadrado perfeito” nos quatro últimos anos do Ensino Fundamental e, diferentemente do ano indicado pela professora, encontramos as orientações de ensino e definição para um número quadrado perfeito no material indicado para o oitavo ano. Ao analisarmos as questões de pesquisa respondidas pela

professora, voltaremos a citar e a comentar sobre a definição de número quadrado perfeito encontrada neste material.

Seguimos a entrevista, esclarecendo o objetivo da pesquisa, comentando nosso pertencimento ao GPEA em que o estudo dos números inteiros e suas propriedades é denominado Teoria Elementar dos Números e que nela estão inseridos temas tais como a história e evolução dos números inteiros, divisibilidade, o MMC e o MDC, as progressões e o Teorema Fundamental da Aritmética, sendo este último o tema principal a ser investigado na pesquisa em questão. Ao ser questionada sobre seu conhecimento sobre o tema, a professora alegou não o conhecer, quando aproveitamos para reproduzir o vídeo da *Khan Academy* Brasil sobre o desenvolvimento do conceito do Teorema Fundamental da Aritmética.

Após assistir ao vídeo, a docente comenta ter gostado do vídeo, reconhece já ter visto algumas coisas relatadas e que “no Estado, tem este negócio aí dos números primos, este quadrado com os números compostos”. Esta fala da professora nos pareceu um pouco descuidada, lidando de maneira extremamente informal ao citar os elementos do vídeo. Assim, sentimos a necessidade de aprofundar um pouco mais o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética durante este momento.

Esclarecemos que o conhecimento deste conceito traz o reconhecimento de uma representação única para cada um dos números inteiros, o que pode facilitar a resolução de inúmeras questões, já que ao realizar uma decomposição em fatores primos, como do número 6 = 2.3, o aluno que tem o entendimento da unicidade da decomposição em fatores primos deste número, saberá que nenhum outro número inteiro será representado pelo produto destes dois números, no caso, 2 e 3. Sobre isso, comenta:

> Isso que você falou do 4 e do 6, a gente trabalha em MDC, mas supérfluo. Ah, o que tem em comum entre os dois? Entre o 4 e o 6? Ah, o 2. Oh! Porque o 3 não apareceu na fatoração do 4, então você exclui. […] Mas eu não digo que a culpa é só dos professores, a culpa é de quem elaborou o material. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020)

Assim como apontam as pesquisas de Campbell e Zazkis (2002) e constatada por nós, ao observar os conteúdos abordados no Ensino Básico na introdução deste trabalho, a professora parece ter a mesma impressão sobre a superficialidade da abordagem dada aos assuntos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética no Ensino Fundamental, tendo o seu foco quase exclusivamente na aplicação e utilização deste tema em situações, ditas, do cotidiano. Aspectos importantes

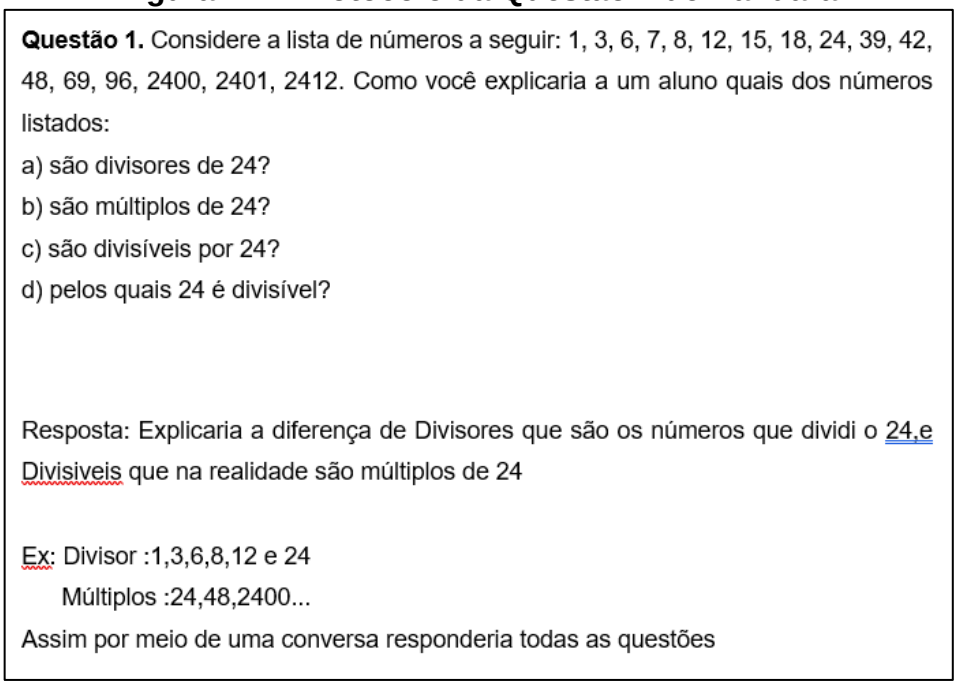
intrínsecos à definição do Teorema Fundamental da Aritmética, como o significado da decomposição de um número inteiro ser única, parecem ser totalmente desconsiderados neste contexto. Além disso, faz uma crítica sobre a responsabilidade mútua de elaboradores e de professores na superficialidade dada a este tema.

Realizadas as considerações iniciais, partimos para as análises mais detalhadas das questões contidas no Instrumento de Coleta de Dados.

Questão 1

Apresentamos o protocolo da resposta de Dandara para a Questão 1.

Figura 41 – Protocolo da Questão 1 de Dandara



Questão 1. Considere a lista de números a seguir: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412. Como você explicaria a um aluno quais dos números listados:

a) são divisores de 24?

b) são múltiplos de 24?

c) são divisíveis por 24?

d) pelos quais 24 é divisível?

Resposta: Explicaria a diferença de Divisores que são os números que dividi o 24,e Divisiveis que na realidade são múltiplos de 24

Ex: Divisor :1,3,6,8,12 e 24

Múltiplos :24,48,2400...

Assim por meio de uma conversa responderia todas as questões

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando previamente o protocolo da Questão 1 de Dandara, percebemos que as respostas não estão claras nem separadas por item, mas, sim, algum tipo de esclarecimento de seu procedimento didático. Buscando aprofundar o a compreensão do entendimento da participante sobre conceitos básicos vinculados ao Teorema Fundamental da Aritmética, solicitamos que dissesse como explicaria o que é múltiplo e o que é divisor. A resposta se deu da seguinte maneira:

> Múltiplos, primeiro eu iria na ênfase da palavra: “o que vem na sua cabeça quando eu falo múltiplos?” E, literalmente, eles me respondem: multiplicação. Aí, eu falo, sim, multiplicação. ‘Tá’ mais fácil, porque é o que eles trabalham desde o ensino básico, nas séries iniciais, a tabuada. E aí, eu colocaria qualquer tabuada e mostraria os resultados... e aí falaria assim: “Oh, estes

> aqui são os múltiplos" Então, 3 vezes 1, os múltiplos de 3: 3, 6 e ia seguindo a sequência. Depois eu falaria assim: "Olha, eu acho que desde os primórdios, vocês devem ter escutado que o contrário da divisão é multiplicação, o contrário da soma é a subtração". Aí, eu faria uma continha... continha [risos]... Vou na lousa 'pra' fazer 4 dividido por 2. "Ah, por que você coloca esse 2 aqui embaixo? O que significa esses 2, né? Por que que 2 vezes 2 é 4? E aí, eu gosto de desenhar para eles, o 2 vezes 2, 4, de fazer bem básico aos desenhos, as maçãzinhas e explicar por que o 2 cabe no 4. Porque, assim, no sétimo ano a gente trabalha um pouco de fração, números racionais e irracionais. Na realidade eu costumo dizer que no sétimo ano é a descoberta dos números. Eles saem do conjunto dos números inteiros e começa (sic) com o dos decimais. Aí que eu mostro 'pra' eles o porquê que cabe. E aí eu explicaria o que é divisor. E divisíveis, geralmente eu pulo, 'pra' ser sincera, 'tá'? (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020, grifos nossos)

Observamos, no primeiro grifo, que a entrevistada relaciona exclusivamente a ideia de múltiplos à formação da tabuada, dando ênfase na sequência resultante dela e não, necessariamente em sua definição. Entendemos que a operação de multiplicação, isto é, o produto entre dois números inteiros, está intrínseca à definição de múltiplo. Entretanto, deve-se enfatizar especificidades existentes na relação entre os números e como eles se comportam entre si, como o fato de que números negativos também admitem múltiplo e podem ser múltiplos de outro número inteiro, não sendo uma propriedade exclusiva para números positivos.

No segundo grifo, ainda que neste trecho a docente esteja descrevendo como explicaria o que é um divisor, percebemos, novamente, a vinculação quase que inteiramente à divisão. A exploração de como se dá o procedimento do algoritmo de divisão parece ser o foco de sua explicação em detrimento da definição de divisor. Cabe a nós esclarecer que, diferentemente do que afirmou a entrevistada, a divisão não é considerada operação contrária à multiplicação e sim a operação inversa da multiplicação.

Ainda que a entrevistada tenha declarado que explica a definição de divisor, a sentença contida no último grifo mostra que o fato de ela assumir, neste trecho, não explicar o conceito "ser divisível por", indica uma falta de domínio real da definição de divisor. Buscando entender se, e como, a docente compreende os conceitos de múltiplo e divisor desvinculados da tabuada, perguntamos como seria sua explicação se precisasse informar os múltiplos de um número fora da tabuada tradicional como, por exemplo, o número 13 e ocorre o seguinte diálogo:

> D – Aí eu falaria que é por causa dos números primos. Porque não sei se você percebeu no que eu disse, eu associo múltiplos aos divisores, certo? Então eu mostro a tabuada, depois faço uma operação inversa que é divisão. E aí, quais são múltiplos de 13? Por que que 13 pode ser [dividido por] ele

> mesmo e 1? Aí eu explico um pouco de números primos para eles, mas explico bem por cima.
> J – Mas quando você está falando de 13 dividido por ele mesmo e por 1, você está falando que 13 é um divisor... 13 é divisor de 13 e 1 é divisor de 13, mas o que seriam os múltiplos de 13?
> D – Então, eu estou começando a achar que não expliquei direito, porque, desculpa a sinceridade, 'tá'? Porque, eu faço, tipo, múltiplos de 13, 13 vezes 1, 13. E 13 vezes 13? Cento e sessenta e nove. E como eu faço 'pra' voltar? Faço o 169 divido por 13, entendeu? E fico nisso. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020)

Vemos que a professora claramente confunde a definição de múltiplo com a de divisor e vice-versa, pois ao ser questionada sobre os múltiplos de 13, fez vínculo imediatamente com a primalidade deste número, como forma de explicar como estes múltiplos são encontrados. Porém, ao invés de citar os múltiplos, cita os divisores inicialmente e somente após ser questionada diretamente, apresenta uma forma de encontrar múltiplos de 13. Percebemos que, ao falar dos múltiplos, considera apenas o 1 e o 13 como números inteiros aptos a serem multiplicados por 13 para encontrar múltiplos e não faz o movimento existente na tabuada que é a multiplicação por números inteiros de 0 a 10, apesar de assumir ser este o seu procedimento padrão. Isto nos permite inferir que os conceitos de múltiplo e divisor ainda estão em amadurecimento e o foco dado pela docente para o explicar como funciona o dispositivo prático da divisão e a própria operação de divisão pode indicar uma forma de fuga a ter que lidar com os conceitos propriamente ditos, uma vez que já declarou não ter segurança ao lidar com termos como "ser divisível por".

Continuamos a Intervenção, esclarecendo, mais uma vez, como os conceitos de múltiplo e divisor podem ser explorados por meio do Teorema Fundamental da Aritmética e em seguida perguntamos como teria pensado nos números que escreveu como divisores de 24 na questão 1, já que os números indicados como resposta estavam corretos. Dandara responde:

> Eu fiz aquele esquema que eu acabei de falar 'pra' você, de multiplicação. Bom, se isto eu posso multiplicar por este, qual é o inverso? Por exemplo, eu coloquei o 24 como divisor. Aí, eu pensei assim: 24x1 é 24. Então, significa que eu tenho uma divisão também que vai dar 24, então [o número 1] pode ser divisor. […] O 12 eu fiz assim: 24 dividido por 2 dá 12, dá inteiro, não sobra decimal. Então, se é inteiro, é divisor. A minha dúvida, como eu falei, é sobre os divisíveis... porque os divisíveis, desculpa, eu copiei da "net" [risos]. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020)

Neste momento, a docente enfatiza mais uma vez, de forma equivocada, que múltiplo é o inverso de divisor. Assim, a vemos pela primeira vez relacionar um produto (24.1) ao fato de 1 ser divisor de 24. Entretanto, por ter dito que o número 1 "pode ser

divisor” e não “é divisor” nos faz desacreditar da convicção em sua análise para divisores. Além disso, ao esclarecer sobre o número 12 se divisor de 24, a professora volta a relacionar seu raciocínio apenas com o procedimento da divisão exata. E, ainda, sobre a divisão exata, há um equívoco em sua fala ao dizer “não sobra decimal”, já que o correto seria dizer que a divisão é exata ou que o resto da divisão é zero. A professora, novamente, deixa claro que não sabe o que significa o termo divisível, o que a impediu de concluir os itens c e d da Questão 1.

Continuamos nossos questionamentos, pedindo que explicasse como encontrou os múltiplos de 24, ressaltando que a resposta registrada no protocolo não está totalmente correta. Dandara, mais uma vez, afirma que fez usando a tabuada explicando: “porque, o que é uma tabuada? É a multiplicação de dois números, certo? Então, 24x1 é uma tabuada, porque é o produto de dois números, entendeu?”. Ainda que a entrevistada tenha utilizado sempre o termo tabuada, notamos uma evidência, com esta última declaração, de que, para ela, os múltiplos de um número são encontrados multiplicando tal número pelos outros números inteiros.

Ainda que já tivesse explicitado algumas vezes sobre sua dificuldade em lidar com situações que envolvem o termo divisível, buscamos que a professora explicitasse sua interpretação. Influenciada pela pesquisa que havia realizado para entender o significado do termo, comenta que “divisíveis são múltiplos. Eu fiquei pensando na nomenclatura. Divisor, dividendo, quociente e resto. Eu tentei entender o que eram divisíveis. Eu pensei: bom, então deve ser essa jogada do contrário... o contrário da divisão é a multiplicação”. Diante deste comentário, sentimos, neste momento, a necessidade de intervir e esclarecer o significado do termo divisível, dizendo que a palavra “divisível” também pode ser compreendida pela oração “é possível dividir”. Exemplificamos tal aplicação, pontuando que dizer que “24 é divisível por 6” significa o mesmo que “é possível dividir 24 por 6”. E no caso desta sentença fazer sentido, 24 seria múltiplo de 6 e 6 seria o divisor de 24. Após este exemplo, Dandara disse ter entendido, exclamando que “uma vez que ele é divisível, ele é múltiplo”.

Questão 2

Apresentamos, agora, o protocolo da resposta de Dandara para a Questão 2.

Figura 42 – Protocolo da Questão 2 de Dandara

Questão 2. Como você ajudaria um aluno a decidir se o número $k = 16199 = 97 \cdot 167$ (onde 97 e 167 são números primos) é divisível por 3, 5, 11, 13, e 17.

Resp :Multiplicação de 2 números primos, incentivaria os alunos a fazerem a divisão, assim eles perceberiam na pratica que o número K também é primo

Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos observar em seu protocolo, Dandara percebe a informação de que 97 e 167 são números primos, mas não utiliza as consequências deste fato para concluir que, por esta ser a decomposição única de *k*, os números da lista não são divisores de *k*. Pelo contrário, além de sugerir uma resolução utilizando a multiplicação do produto e posterior divisão pelos números da lista, declara que *k* seria um número primo.

Quando questionamos a entrevistada sobre sua resolução, a professora continuou afirmando que esta seria a única maneira que pensaria para resolver esta questão. Comentou que, após realizar o produto, dividiu por 3 e por cinco e encontrou resto zero e concluiu que não era divisível. Como indicou ter feito apenas estes cálculos, podemos indicar que a docente não possui o domínio dos critérios de divisibilidade destes dois números, mas por considerarmos estes dois critérios de divisibilidade mais conhecidos e difundidos, supomos que não tem o domínio da regra para outros números.

Diante disto, apesar de a entrevista ter inicialmente o objetivo de identificar os conhecimentos da professora sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, entendemos que atingiu outros aspectos. Com esta Intervenção, tivemos a chance de oportunizar à participante da pesquisa o contato com um tema que, possivelmente, não seja de seu domínio ou que, em sua vivência seja em formações inicial e continuada ou durante sua experiência, não foi possível ter maior aprofundamento. Assim, este foi o momento da entrevista que entendemos ser providencial para esclarecer elementos componentes do Teorema Fundamental da Aritmética por percebermos que este conceito estava distante da compreensão global da entrevistada.

Isto posto, fizemos considerações sobre a questão proposta, ressaltando o significado da unicidade da decomposição em fatores primos do número *k*, que o limita a ter os números 97 e 167 como seus divisores, além do próprio *k* e o número 1, seus

divisores próprios. Comentamos sobre a forma decomposta em fatores primos propiciar a possibilidade de reconhecer e identificar seus divisores, sem necessariamente recorrer ao dispositivo prático da divisão, bastando, para isso, realizar os produtos com os fatores presentes nesta decomposição.

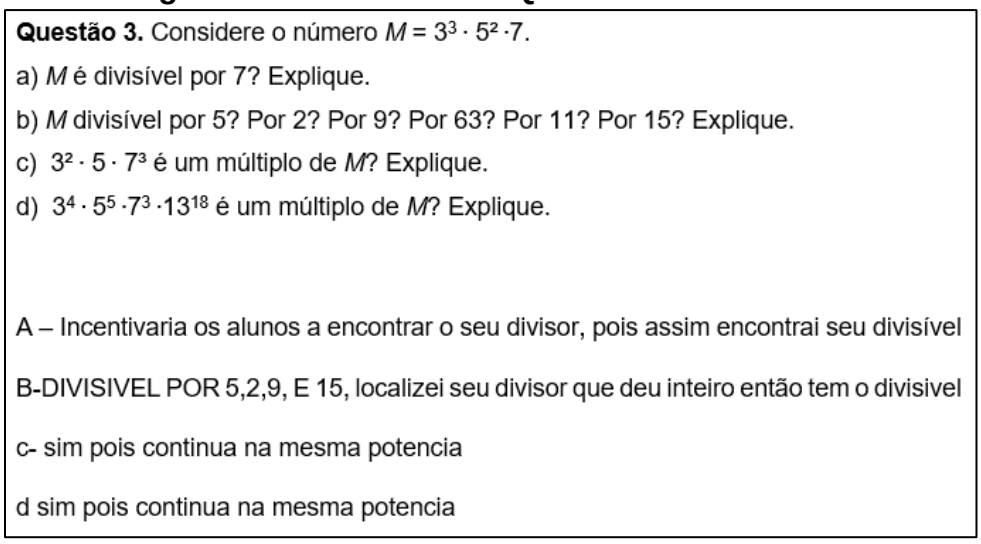
Percebemos, após isso, que a professora reagiu positivamente aos esclarecimentos dados por nós sobre a relação existente entre um número inteiro na sua forma fatorada e a determinação de seus números primos. Seus comentários e afirmações, como ficar espantada ao informarmos que não seria necessário realizar o produto e depois realizar a divisão para decidir sobre a divisibilidade de um número, parece confirmar o seu desconhecimento, tanto do Teorema Fundamental da Aritmética, quanto do conceito de divisor e, consequentemente de múltiplo.

Desta forma, fica evidente que a docente não possui o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, segundo o modelo MTSK, em relação às categorias Propriedades e seus Fundamentos e Procedimentos, por não reconhecer a unicidade da decomposição em fatores primos como uma propriedade inerente ao Teorema Fundamental da Aritmética, e consequentemente, não perceber a possibilidade de se determinar múltiplos e divisores por meio desta fatoração.

Questão 3

Apresentamos o protocolo da resposta da Questão 3 de Dandara.

Figura 43 – Protocolo da Questão 3 de Dandara



Questão 3. Considere o número $M = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

a) M é divisível por 7? Explique.

b) M divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 63? Por 11? Por 15? Explique.

c) $3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$ é um múltiplo de M? Explique.

d) $3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^{18}$ é um múltiplo de M? Explique.

A – Incentivaria os alunos a encontrar o seu divisor, pois assim encontrai seu divisível

B-DIVISIVEL POR 5,2,9, E 15, localizei seu divisor que deu inteiro então tem o divisivel

c- sim pois continua na mesma potencia

d sim pois continua na mesma potencia

Fonte: Dados da pesquisa

Observando o protocolo desta questão, percebemos que o item a apresenta uma resposta não compatível com o que foi perguntado; o item b apresenta a expressão “então tem o divisível”, que não parece ter um sentido matemático claro, quando lidamos com múltiplos e divisores e nos itens c e d as respostas se mostram incompletas, não nos fornecendo elementos para entendermos sua maneira de pensar sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, para melhor entendimento de sua resposta para ao item a, perguntamos se era possível *M* dividir 7. A docente comenta que seria necessário descobrir primeiramente o número *M* para depois dividir por 7 e acrescenta: “Foi o que eu fiz! Eu resolvi o 3^3, depois multipliquei pelo outro elevado [5^2] e no final por 7. Deu quatro mil e alguma coisa, se não me engano, e aí eu dividi por 7. Eu fiz isso. E aí fui dividindo...”.

Vemos, mais uma vez, a entrevistada admitir que resolveria da mesma maneira daquela anunciada anteriormente nas questões já analisadas, mesmo após o esclarecimento do que seria o Teorema Fundamental da Aritmética e algumas de suas consequências. Desta maneira, nos vimos na responsabilidade de esclarecer novamente a relação existente entre um número decomposto em fatores primos e seus divisores e múltiplos, explicando que o fato de o número 7 estar presente na decomposição em fatores primos de *M* implica em 7 ser divisor de *M*, isto é, 7 é divisível por 7. Diante desta explicação, seguiu-se o seguinte diálogo:

> D – Deixa eu te fazer uma perguntinha. Então, eu poderia ensinar ‘pros’ meus alunos assim? Eles têm muita dificuldade de divisão com 3 números, por exemplo, 424 ser divisível por 12, né? Eu explicaria assim: é par, então provavelmente já tem [uma chance de] 50% de ser divisível, ‘né’? Aí ele escreveria lá: 424 dividido por 2, dá 212, dividido por 2 de novo... na realidade dá um monte de 2.
> J – Seria 212 por 2 daria 106, por 2 de novo, daria 53 e aí, seria só por 53 porque ele é primo.
> D – Então daria 2^3.53. […] Nisso, eu poderia dizer que é divisível porque o 53 apareceu na fatoração?
> J - Isso significa que o 424 eu consigo dividir por 53, porque está na fatoração, eu consigo dividir por 2, porque está na fatoração, por 2 × 53, porque está na fatoração, eu consigo por 2 × 2 × 53 porque está na fatoração e assim por diante...
> D – Olha que legal isso! (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020, grifos nossos)

Neste ponto, a professora parece começar a perceber a aplicabilidade do Teorema Fundamental da Aritmética ao tentar imaginá-lo como ferramenta para buscar maneiras de encontrar um divisor. Entretanto, é possível perceber pela frase no primeiro grifo que sua expectativa de conhecimento da relação entre múltiplos e

divisores e o Teorema Fundamental da Aritmética está intimamente ligada a ajudar seus alunos com o procedimento da divisão e não, necessariamente, encontrar seus múltiplos e divisores. Entendemos que isso ocorre, pois, como já revelou em questões anteriores, o conceito de divisor que ela concebe está direta e exclusivamente ligado à divisão, sem nenhuma relação com sua definição.

Outro ponto que deve ser ressaltado é uma possível compreensão da decomposição em fatores, como mostra o segundo grifo. Apesar de a frase dita, sobre haver 50% de chance do número 424 ser divisível por 12, interpretamos que foi uma maneira de a professora se referir à possibilidade de ser possível haver outros fatores além do número 2, já que 424 é par. Além disso, no terceiro grifo, a palavra divisível, de fato, não lhe parece fazer sentido. Dandara iniciou o diálogo exemplificando sua busca para a divisibilidade de 424 por 12, mas, neste grifo vemos que a docente observou sobre ser divisível, sem explicitar quem são os atores desta relação, partindo para uma caracterização de divisibilidade envolvendo o número 53. Ainda assim, percebemos um ganho no conhecimento da entrevistada ao descrever qual seria seu processo cognitivo na busca por um divisor do número 424.

Partindo para os esclarecimentos do item b, solicitamos à entrevistada que respondesse sobre a divisibilidade de *M* pelos números 5, 2, 9, 63, 11 e 15 conforme descrito no enunciado. Apesar de parecer compreender que *M* é divisível por 5 e 9 por seus fatores estarem na decomposição de *M*, a professora não compreendeu imediatamente a mesma definição para os números 63 e 15. Percebendo esta hesitação, explicamos sobre a possibilidade de decompor ambos os números em fatores primos para explicitar a presença destes fatores na decomposição de *M*, o que justificaria a confirmação da divisibilidade de *M* por eles.

Para os itens c e d, entendemos que o registro de seu protocolo terem sido exatamente iguais vem do fato de observar as bases das potências presentes nas decomposições envolvidas, sem levar em conta seus expoentes. Assim, esclarecemos a determinação da multiplicidade, assim como explicitamos acima, mas agora reconhecendo a relação existente entre dos números $3^2.5.7^3$ e $3^4.5^5.7^3.13^{18}$ e o número *M*, salientando que os expoentes dos primeiros devem conter os expoentes de *M* para serem múltiplos.

Questão 4

A seguir, trazemos o protocolo de Dandara para a Questão 4.

Figura 44 – Protocolo da Questão 4 de Dandara

Questão 4. Dentre os números 42, 45, 52, 85 e 105, qual(is) se apresenta(m) como um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$? Justifique.

RESPOSTA; Apenas o 45 pois o resultado apresenta um numero inteiro

Fonte: Dados da pesquisa

No protocolo, não é apresentado como a entrevistada chegou à resposta descrita, ainda que seja a resposta correta. Ao ser questionada sobre como resolveu a questão, Dandara afirma ter realizado da mesma maneira que executou as questões anteriores, calculando o produto $3^5.4^4.5^3$ e dividindo o resultado por cada um dos números da lista, explicando que para "afirmar que é 45, com certeza, os outros devem ter dado quebrado, deve ter dado número decimal e o 45 foi o único que deu inteiro". Neste comentário, a professora usa uma forma equivocada para definir o resultado de uma divisão ao dizer que um número decimal é um número "quebrado", o que não estaria de acordo com uma a categoria Definições da MTSK, segundo Flores-Medrado *et al*. (2014), em que o professor conheceria sobre as propriedades dos objetos e a forma alternativa de defini-las, já que tal definição dada pela professora estaria incorreta.

Após ter assumido que não pensaria outra maneira de resolver esta questão, exceto pela já descrita acima, iniciamos o esclarecimento sobre como seria a solução tomando como base o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética. Lembramos que o caminho mais econômico seria a decomposição em fatores primos de todos os números do enunciado, seguida da verificação de qual deles possuiriam os expoentes de seus fatores inclusos nos do número $3^5.4^4.5^3$.

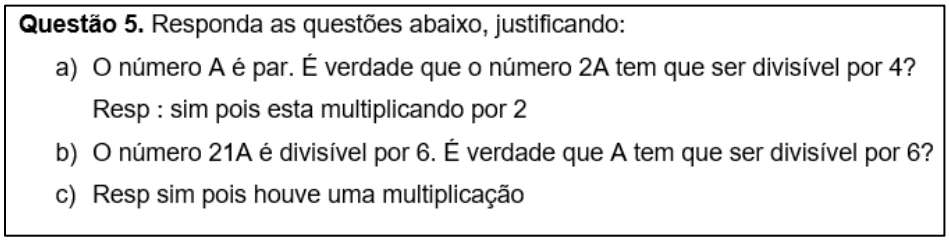
Após isso a professora comenta que um aluno "não pensaria nessa fatoração, porque ele não ia ter aprendido. [...] Como ele faria isso, se ele não aprendeu? Eu 'tô' pensando nos meus alunos". Observamos que a professora mostra certa desconfiança da capacidade de seus alunos para resolver questões como esta. Entendemos que o fato de a própria entrevistada considerar para si este tema como algo complexo, a faça acreditar que os alunos e, especificamente os seus alunos, não pensariam em resoluções baseadas no Teorema Fundamental da Aritmética. Ainda assim, o fato de reconhecer e perceber a possível dificuldade na resolução de

questões como esta, indica um conhecimento vinculado às Forças e Dificuldades associadas à Aprendizagem, do subdomínio Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática, do modelo MTSK.

Questão 5

Apresentamos o protocolo da resposta de Dandara para a Questão 5.

Figura 45 – Protocolo da Questão 5 de Dandara



Questão 5. Responda as questões abaixo, justificando:

a) O número A é par. É verdade que o número 2A tem que ser divisível por 4?
Resp : sim pois esta multiplicando por 2

b) O número 21A é divisível por 6. É verdade que A tem que ser divisível por 6?

c) Resp sim pois houve uma multiplicação

Fonte: Dados da pesquisa

Observando o protocolo acima, percebemos que as justificativas dadas, tanto no item a quanto no item b, não seriam matematicamente aceitas por parecerem incompletas. Questionada, então, sobre como teria resolvido o item a, ocorre o diálogo:

> D – Porque eu pensei assim: o *2A*... Você falou par. Aí, eu pensei... Quando você multiplica números pares, ele vira o dobro. Aí, eu pensei, 2.2, 4, dá 'pra' dividir por 2; o 6, 2.6, 12, dá 'pra' dividir por 2, e assim foi, entendeu? […] Eu peguei os números pares. Por exemplo, dos números de 0 a 10, quais são pares? 2, 4, 6, 8 e 10... e aí eu multipliquei por 2. E o que eu observei? Que quando você pega estes números pares e multiplica por 2, automaticamente você sabe que dá inteiro. Por isso poderia ser múltiplo de 2, 'né'?
> J – No enunciado, era para verificar se é divisível por 4.
> D – Por isso que eu pensei, há possibilidade de ser divisível, justamente por isso, porque quando eu multiplico eu volto em par e foi isso que eu pensei.
> J – E o 'ser par' e multiplicar por 2, tem alguma relação com o 4?
> D – Ser par e multiplicar por 2... 4 é par, 'né'? Na realidade, 4 eu posso pensar também que é uma potência de 2^2, então é um múltiplo. Sim, tem uma relação. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020)

A explicação da entrevistada sobre sua resposta foi feita com suas próprias palavras, sem nenhum requinte de formalidade, mas possuindo elementos para ser considerada correta, mesmo parecendo que estava pensando no ser divisível por 2 e não por 4. Mas o fato de, no final do diálogo, a professora ter percebido, ainda que implicitamente, que há relação entre um número ser par, multiplicar por 2 e ser

divisível por 4, nos permite, além de considerar a resposta como correta, observar o movimento de ganho cognitivo comparado ao que vinha apresentando até o momento.

Sobre a resolução para o item b, o diálogo foi o que se segue:

> D – Eu pensei assim: o número 21, só o 21, dá 'pra' dividir por 6? Não, mas o 21 pode ser multiplicado por qualquer outro número. Aí, eu pensei, 21 multiplicado por 3, vai dar... 63. O 63 tem uma divisão, que eu posso dividir por 9, existiria.
> J – Mas é por 6, a divisibilidade é por 6.
> D – Ah 'tá'! Então, eu acho que eu pensei por par. Eu sei que eu fiz uma multiplicação. Fui colocando números aleatórios no A e fui multiplicando por 21. E eu achei um número que a multiplicação de 21 por este número aleatório, daria 'pra' dividir por 6.
> J – Entendi. O problema é que está perguntando se o A precisa ser divisível por 6.
> D – Não, né? E eu acabei de te dar um exemplo... por 3, 63 não dá 'pra' dividir por 6. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020, grifos nossos)

Diferentemente do registrado em seu protocolo, Dandara responde negativamente a este item. A resposta estaria totalmente correta, não fossem por dois aspectos. O primeiro seria a confusão no raciocínio da docente, mostrado no primeiro grifo, já que inicia sua fala ressaltando a relação entre *21A* e a divisibilidade por 6, mas em seguida, relaciona o resultado 63 com o número 9. Acreditamos que tal confusão possa ter ocorrido, pois, no momento na realização da entrevista, a professora não estava com as questões propostas e suas respostas em mãos, o que poderia ter dificultado em seu processo de raciocínio.

Outro aspecto que mostra algumas lacunas em seu raciocínio é apresentado no segundo grifo, quando cita o exemplo dado anteriormente por ela, tomando $A = 3$ e chegando a $21A = 63$. Em sua análise final, a docente conclui que 63, isto é, *21A* não tem que ser divisível por 6, o que é um equívoco, uma vez que há esta hipótese verdadeira inicial neste item. O correto seria observar que $A = 3$ não tem que ser divisível por 6, sendo este um dos infinitos exemplos que justificariam esta questão. Diante disso, seguimos para uma explicação detalhada sobre como poderia ser a resolução desta questão por meio do Teorema Fundamental da Aritmética, e podemos perceber um entendimento maior sobre o conceito.

Questão 6

A seguir, apresentamos o protocolo de resposta da Questão 6 de Dandara.

Figura 46 – Protocolo da Questão 6 de Dandara

Questão 6. Veja a lista de 10 números sendo eles 8^2, 17^2, 17^3, 234^3, 234^6, $5^2 \cdot 17^2$, $25^3 \cdot 7^2$, $5^6 \cdot 17^2$, p^3 (onde p é primo), C^3 (onde C é composto) e decida quais dos números desta lista são quadrados perfeitos. Explique sua decisão.

Resp :8^2, 17^2,5^2 são números que apresentam mais de um divisivel

Fonte: Dados da pesquisa

Como mostra o protocolo, Dandara não justificou adequadamente sua resposta, parecendo não considerar os produtos presentes na lista dada, já que apresenta em seu registro apenas o número 5^2 ao invés de $5^2.17^2$. Ademais, utiliza a expressão “apresentam mais de um divisível”, que não parece ter um sentido matemático concreto, além de não ser a divisibilidade o aspecto observado nesta questão.

Na entrevista, a docente desconfiou não ter acertado, pois alegou ter consultado outros materiais para entender o que significava “quadrado perfeito” e “composto”. Após ser questionada sobre o que entendeu sobre um número quadrado perfeito na pesquisa que realizou, Dandara responde:

> Primeiro eu estudei o que era número composto, que teria que ser divisível só por dois números... leia a pergunta ‘pra’ mim, por favor. [Leitura do enunciado] Primeiro eu fui ver o que era a palavra em si, o que era um quadrado perfeito. Estava lá escrito assim: quadrado perfeito tinha que ser um número que teria que ser divisível por mais de um número. E aí, estava lá, se não me engano, o 42 que pode ser divisível por dois números. Aí, eu olhei a lista e fui dividindo. Na realidade eu não pensei em divisível, pensei em divisor, porque, como eu falei com você, divisíveis ‘pra’ mim estava complicadinho. Aliás, eu pensei, quer queira ou quer não, eu fiz errado, mas ao mesmo tempo, certo. Porque o número eu dividi, tipo 10 dividido por 2 dá quanto? Dá 5, então pertence, entendeu? Esse mesmo 10, dá ‘pra’ dividir por, sei lá, por 10? Dá 1, opa.... então tem dois divisíveis, que no caso, seria o 5 e o 1, então é um quadrado perfeito. Aí eu peguei o próximo número e fiz a mesma coisa. Eu acho que é quadrado perfeito, aí foi assim que eu respondi. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA DANDARA, 2020, grifos nossos)

Observando o relato da professora, percebemos equívocos importantes que devem ser ressaltados. Primeiramente, comparando o primeiro e o segundo grifos, parece haver uma mistura entre as definições de número primo, número composto e número quadrado perfeito. No primeiro grifo, cita que um número composto deve ser divisível por apenas dois números, o que seria, na verdade, a definição de um número primo. Já no segundo grifo, comenta que um número quadrado perfeito tem que ser

divisível por mais de um número, o que se aproximaria da definição de número composto, já que um número composto possui mais de dois divisores. Tais imprecisões certamente impediram que a professora pudesse realizar uma análise dos números pedidos, uma vez que os conceitos iniciais estariam inadequados. Mais uma vez, acreditamos que a impossibilidade de a professora ter as questões e as suas respostas em mãos possa ter dificultado suas análises. Ainda assim, defendemos que estes são conceitos importante que precisam fazer parte do conhecimento base de todo professor de Matemática.

No terceiro grifo, ainda que tenha vindo de uma interpretação equivocada, é importante ressaltar o quanto a palavra divisível foi uma dificuldade que acompanhou a docente em toda a entrevista. Neste trecho não é diferente, pois, ao utilizar a palavra divisor no lugar de “ser divisível”, que significa ser múltiplo, acaba mudando todo o sentido dos conceitos.

Tendo isso em vista, entendemos que a professora não teria condições de ao menos tentar responder corretamente à questão, se não lhe fosse explicada a definição correta dos termos envolvidos. Assim, fizemos uma Intervenção para esclarecer as conceituações corretas de número quadrado perfeito e número composto, por meio de definições formais e exemplos numéricos para mais fácil entendimento.

Após a Intervenção, pedimos a Dandara que analisasse novamente a lista de números dada e informasse quais seriam quadrados perfeitos, agora, tendo conhecimento da definição correta. As suas respostas foram mais seguras e majoritariamente corretas, ao analisar os números com valores exatos, com a exceção do número $25^3.7^2$, que não apresenta apenas números primos em sua decomposição.

Ao ser questionada sobre o número p^3 ser um quadrado perfeito, com p sendo primo, a docente comenta que “p é um número primo... não, não é, porque está elevado a 3 e 3 é ímpar”, sendo esta a resposta e justificativa correta para este número.

Sobre o número C^3, sendo C composto, a professora responde imediatamente que não, dando a mesmo justificativa já dita para p^3, ignorando detalhes inerentes às possíveis representações provenientes da decomposição dos números inteiros, já reveladas acima, quando analisava os números com valores determinados.

Dessa forma, não percebe facilmente outras características pertinentes ao número, vinculadas à representação, segundo Zazkis e Gadowsky (2001) e Fonseca

(2014), que acabam por se apresentar como representações opacas. Podemos perceber a opacidade destas representações com a não observação da docente que o número 25 pode ser escrito como 5^2 e no caso de C^3, em que não foram consideradas as possíveis decomposições que o número *C* poderia assumir.

Sumariamente, Dandara apresentou dificuldades ao tentar definir os conceitos de múltiplo e divisor, utilizando exemplos numéricos e vinculando a sua busca constantemente à estrutura de construção da tabuada e ao procedimento do dispositivo prático da divisão, com resto zero. Em alguns momentos, confundiu ambos os conceitos, sendo necessária a Intervenção da pesquisadora para esclarecer tais divergências. Além disso, desde o início da entrevista assumiu não conhecer o significado da expressão “divisível”, o que não permitiu que resolvesse algumas questões propostas. Isto apontou para a falta de conhecimento da docente de Conhecimentos Especializados do professor de Matemática em categorias como Propriedades e Fundamentos do Teorema Fundamental da Aritmética, e de Procedimentos vinculados a ele.

A docente evidenciou não conhecer a unicidade da decomposição em fatores primos quando lhe foi apresentada à representação canônica do número *k*. Para sua resolução, utilizou o valor composto de *k* e continuou utilizando o dispositivo prático da divisão para decidir sobre a divisibilidade de *k* pelos números propostos. Foi necessária nossa Intervenção para explicitar a possibilidade de resolução, utilizando apenas a informação de que 97 e 167 eram primos e decomposição única de *k*.

Ao lidar com situações em que a representação dos números enunciados estava na forma canônica, a entrevistada escolheu calcular o produto de *M* para, em seguida dividir cada um dos números apresentados. Além disso, não apresentou domínio da Divisibilidade, citando apenas alguns critérios de divisibilidade como os de 3 e 5 para tentar justificar suas respostas e, mesmo assim, utilizou-os de maneira incorreta, em alguns casos, por haver calculado erroneamente o valor de *M*. Assim, foi necessário que esclarecêssemos sobre as relações existentes na análise da divisibilidade e multiplicidade entre dois números apenas observando seus fatores primos.

Em situações em que os números envolvidos estavam multiplicados por variáveis, a professora utilizou a técnica de tentativa e erro ao escolher alguns números específicos para substituir na variável dada e tentar buscar significados nos resultados numéricos encontrados. Ainda que tenha mostrado uma tentativa de

raciocinar logicamente sobre as premissas presentes no enunciado, apresentou um equívoco ao confundir a hipótese e a tese da questão, trocando uma pela outra, não conseguindo responder corretamente a ela.

Quando propomos a temática externa dos Números Quadrados Perfeitos, Dandara evidenciou não conhecer uma forma correta para a busca de números quadrados perfeitos, sendo necessário nosso esclarecimento sobre como seria este procedimento. Com este apoio, conseguiu responder corretamente para alguns dos números pedidos, com exceção daqueles que precisariam ser decompostos para uma análise mais detalhada. Mas, ao lidar com a mesma questão envolvendo p^3 e C^3, responde corretamente sobre p^3, com p primo, não ser um quadrado perfeito, mas não consegue chegar à conclusão correta sobre C^3, com C composto, não percebendo as nuances existentes nas formas canônicas em um número composto.

5.7. Uma análise panorâmica

Neste tópico, trazemos análises comparativas entre as respostas dadas nas seis questões presentes no Instrumento de Coleta de Dados, por meio de uma compilação dos dados encontrados para verificar se e como o objetivo da questão foi atingido, observando as respostas nos protocolos dos participantes da pesquisa e os conteúdos das entrevistas realizadas. Além disso, trazemos um resumo geral das concepções, segundo a teoria APOS, apresentadas pelos participantes, além de ponderações sobre as respostas registradas no Formulário de Caracterização do(a) Participante de cada um dos professores, sobre questionamentos levantados durante a entrevista.

5.7.1. O Formulário de Caracterização do(a) Participante

Como consta no Anexo I, o Formulário de Caracterização do(a) Participante, doravante também chamado de Formulário de Caracterização, apresenta uma identificação inicial do participante, juntamente com informações sobre sua formação, sua experiência profissional e algumas definições sobre a Teoria dos Números.

No Quadro 1, consta um resumo das respostas dadas pelos participantes sobre sua trajetória acadêmica e sua trajetória docente até o momento que realizamos a entrevista, ressaltando que todos os participantes são licenciados em Matemática.

Quadro 1 – Síntese da caracterização dos(as) participantes da pesquisa

Participante	Idade	Tempo de Magistério	Pós-Graduação	Disciplina sobre o estudo dos Números Inteiros na formação	Atuação no período da entrevista
Alice	42	15	Especialização em Jogos Matemáticos	Não	Ensino Fundamental e Ensino Médio
Ester	43	18	Especializações em Mediações Tecnológicas em Ambientes Educacionais e em Educação Infantil	Não	Ensino Médio
Regina	45	5	Não possui	Não	Ensino Fundamental e Ensino Médio
Saulo	39	8	Especialização em Gestão e Organização da Escola	Sim, Fundamentos da Matemática Elementar	Ensino Fundamental
Leandro	57	33	Especialização na área de Matemática (não especificou)	Não	Educação de Jovens e Adultos
Dandara	41	18	Especialização na Formação de Professores com Ênfase no Ensino Superior e mestranda em Educação de Ciência e Matemática	Sim, Tópicos da Matemática Elementar	Ensino Fundamental e Ensino Médio

Observando as informações da coluna Tempo de Magistério do Quadro 1, notamos que os participantes tem experiências profissionais com durações diferentes, sendo dois deles, Regina e Saulo, estando no que consideramos o início da carreira docente, já que Saulo possui oito anos de experiência docente, mas concluiu a graduação há cinco anos, assim como Regina; três professoras, Alice, Ester e Dandara com um período médio de suas carreiras docentes e Leandro, já no fim de sua carreira em processo de aposentadoria.

Ao questionar sobre o tempo de carreira, conjecturamos, inicialmente, que na medida que o docente ganhe experiência, também aumentaria o seu domínio sobre os conhecimentos que podem ser considerados básicos ou elementares, como são os conceitos que envolvem o Teorema Fundamental da Aritmética. Presumimos também que as atividades pertinentes à docência como o preparo de aulas, a troca de conhecimento que certamente há entre os pares, a reflexão sobre os resultados

dos alunos, o contato com materiais didáticos como livros, documentos oficiais, Cadernos do Professor e do Aluno, entre outros, poderiam favorecer a apropriação e aprofundamento de conceitos essenciais para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Mostra-se, porém, que nossas conjecturas sobre estas relações não puderam se confirmar. Como exemplo disso, tomamos as concepções reveladas pelos docentes com menos tempo de experiência, Saulo e Regina. Saulo necessitou de muitas intervenções externas, tanto para compreender alguns elementos relacionados ao tema quanto para compreender o próprio Teorema Fundamental da Aritmética e algumas de suas consequências como a divisibilidade e a multiplicidade de um número. Regina, por sua vez, apresentou domínio destes elementos, quando definiu e utilizou corretamente conceitos de múltiplo e divisor, além de reconhecer a unicidade da decomposição em fatores primos.

Esperávamos, da mesma forma, que o fato do docente possuir alguma formação em nível de pós-graduação poderia trazer mais possibilidades de aprofundamento dos conhecimentos já adquiridos na formação inicial e, consequentemente, no conhecimento sobre o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética.

Novamente nossa expectativa não se confirmou. Basta observar as Concepções reveladas pelas docentes Ester e Dandara, ambas com 18 anos de experiencia docente, a primeira com especializações em Mediações Tecnológicas em Ambientes Educacionais e em Educação Infantil e a segunda, especialista Formação de Professores com Ênfase no Ensino Superior e mestranda em Educação de Ciência e Matemática. Ester revelou domínio das definições de múltiplo e divisor, de conceitos envolvendo a divisibilidade de números inteiros, além da unicidade da decomposição em fatores primos. Dandara, ao contrário, apresentou dificuldades em praticamente todos os aspectos observados na pesquisa.

As respostas dos participantes sobre a lembrança do estudo dos Números Inteiros em alguma disciplina da graduação ou pós-graduação estavam de acordo com o que presumimos, já que trabalhos como o de Resende (2007) já trazia que o estudo dos números inteiros na formação inicial tem sido negligenciado, sem dar a ênfase nos conhecimentos necessários ao futuro professor de Matemática do Ensino Básico.

Ainda sobre este aspecto, alguns dos docentes nos relataram se, e como, a formação inicial influenciou em sua prática profissional, tanto no que se refere a conteúdos quanto a metodologias. Apresentamos as respostas de alguns deles.

- Professora Alice:

> Você não aprende a ser professor. […] As coisas são jogadas como se elas não se ligassem umas com as outras, elas caminham individualmente. [...] Só vem com a maturidade e com o exercício da profissão, que muita coisa eu aprendi quando eu saquei sozinha, quando eu estou preparando aula. (FRAGMENTO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA ALICE, 2020)

- Professora Dandara: “Na faculdade lá, na faculdade particular é uma porcaria. […] Era voltado mais como se a gente fosse fazer só cálculos e não que eu fosse dar aula. […] Eles partiam do ensino médio para frente”.

- Professor Leandro: “O meu curso de Ensino Médio, me ensinou muito mais que propriamente a faculdade. Dizer que a faculdade foi forte, exigente, não foi. Aprendi muito mais no curso do Ensino Médio que na faculdade”.

- Professor Saulo: “[...] Eu achei que foi muito superficial. Eu não acho que eu saí da graduação com um nível de conhecimento matemático que eu deveria ter”.

Ainda que concordemos que as ementas dos cursos de licenciatura em Matemática possuem lacunas relativas ao estudo específico dos números inteiros, presumimos, inicialmente, que as ferramentas metodológicas, pedagógicas e até mesmo outros temas que foram apresentados, trabalhados e ensinados na formação inicial influenciariam fortemente as práticas do professor em sala de aula.

Os depoimentos dados pelos participantes, entretanto, apontam que nossa suposição se mostrou equivocada, independentemente do período em que foi realizada a formação inicial. Eles assinalam a superficialidade existente em suas formações iniciais, contrariando o que defende Ponte (1999), ao citar que a formação deve favorecer o desenvolvimento profissional e as potencialidades do professor, permitindo a construção de novos saberes por meio de dinâmicas coletivas e sociais.

Não temos como objetivo neste estudo nos aprofundar sobre aspectos específicos da formação inicial dos professores, mas entendemos ser importante que o tema seja levantado para discussão em outros momentos oportunos.

5.7.2. Resumo da Questão 1

Para facilitar nossa análise, vamos relembrar o enunciado da Questão 1:

> **Questão 1**. Considere a lista de números a seguir: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412. Como você explicaria a um aluno quais dos números listados:
> a) são divisores de 24?
> b) são múltiplos de 24?
> c) são divisíveis por 24?
> d) pelos quais 24 é divisível?

Esta questão teve por objetivo identificar o conhecimento dos participantes da pesquisa em relação aos conceitos de divisor e de múltiplo. Acreditamos que o entendimento apropriado destes conceitos pode favorecer a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética, além de considerarmos conceitos imprescindíveis para o acervo de conhecimentos necessários para o profissional que atua no Ensino Básico.

Perguntamos aos participantes, antes mesmo de conversarmos sobre as questões propostas, a respeito de seus entendimentos sobre divisores e múltiplos, já que este é o objetivo principal desta questão. Esperávamos que ambos os conceitos fossem corretamente explicitados, ainda que de maneira não formal, mas que fosse possível perceber seus domínios. De fato, uma parte dos entrevistados apresentou conceitos definidos corretamente, mas para outra parte dos professores, os conceitos de múltiplos e divisores parecem confundir-se entre si.

Leandro respondeu corretamente todos os itens da questão e apresentou a definição de ambos os conceitos de maneira formal, sem utilizar os números envolvidos no enunciado e, apesar de não registrar este procedimento, explicita a possibilidade de encontrar divisores por meio da observação da exatidão do procedimento da divisão para decidir. Além disso, deixa claro em suas justificativas a interrelação existente entre múltiplo e divisor.

Ester, por sua vez, também respondeu corretamente todos os itens e apresentou uma definição mais genérica ao afirmar que são números que se pode dividir por um determinado número e esta divisão é exata, sem explicar que o divisor deve ser um inteiro diferente de zero, nem alguma expressão formal que represente

este conceito. Sobre a definição de múltiplos, a última professora citada, assim como fez com os divisores, nos apresentou uma definição mais genérica que as outras participantes, mas afirmando serem aqueles que são resultados da multiplicação por determinado número.

A professora Regina definiu divisor como o número que é possível dividir por 24, sem mostrar uma definição válida para todos os números inteiros; antes, apoiou sua definição de divisor no número envolvido na questão, mesmo que a pergunta feita por nós não tenha especificado um número. Definiu os múltiplos como a tabuada de 24, num processo em que se multiplica os números naturais por 24 para encontrar seus resultados.

Assim como Regina, Alice definiu divisores como sendo os que fazem parte da tabuada do número do número 24 e apresentou uma inexistente “regra” de divisibilidade que pareceu uma generalização do critério de divisibilidade por 3. Mostrou grande confusão ao tentar definir múltiplo, utilizando a mesma definição que tinha informado sobre divisor para isso. Durante a entrevista, a fizemos entender, por meio de exemplos numéricos exatos e utilizando o número presente na questão, como os múltiplos poderiam ser encontrados.

Já Dandara e Saulo responderam parcialmente corretos os itens da questão, além de os conceitos de múltiplo e divisor não lhes parecerem claros. Utilizam o auxílio da construção da tabuada para a descoberta de múltiplos de um número e o procedimento da divisão exata para descobrir divisores. Entretanto, ao serem questionados sobre múltiplos que estão além daqueles presentes na tabuada, confundem-se e constantemente utilizam a maneira de descoberta de múltiplos para descrever divisores. Ambos os docentes não exploraram conscientemente a interrelação dos conceitos e perceberam seus equívocos apenas após nossas intervenções, indicando a existência desta relação. Dandara, ainda, mostrou uma dificuldade em relação ao termo “ser divisível por”, não o interpretando imediatamente como “ser múltiplo de”, impossibilitando sua resposta dos itens c e d.

O quadro a seguir traz uma síntese da compreensão dos docentes sobre os conceitos de múltiplo e de divisor apresentada nesta análise.

Quadro 2 – Conceitos de múltiplo e divisor dos participantes

Participante	Definição formal dos conceitos	Itens corretos na Questão 1	Conceito de Divisor	Conceito de Múltiplo
Alice	Não Apresentou	Parcialmente todos os itens	Utilizou a tabuada de 24	Confundiu com o de divisor
Dandara	Não Apresentou	Parcialmente itens a e b; não respondeu os itens c e d	Confundiu com o de Múltiplo	Utilizou a tabuada
Ester	Apresentou	Todos os itens	Números que você pode dividir por um determinado número e a divisão é exata	Resultados da multiplicação por aquele número
Leandro	Apresentou	Todos os itens	Se a é múltiplo de b, a é divisível por b, ou seja, b vai ser divisor de a	Produto de um número por um número inteiro
Regina	Não Apresentou	Corretamente itens a e b; parcialmente itens c e d	Números que daria para dividir por 24	Utilizou a tabuada de 24
Saulo	Não Apresentou	Parcialmente todos os itens	Confundiu com o de múltiplo	Utiliza a tabuada de 24

Fonte: Elaborada pela autora

Assim, entendemos que o objetivo proposto para esta questão foi alcançado, uma vez que todos os participantes expressaram suas compreensões sobre estes conceitos que, mesmo que equivocados, nos permitiram entender com mais clareza qual o domínio de cada indivíduo, suas convergências e divergências.

5.7.3. Resumo da Questão 2

Relembramos o enunciado da Questão 2:

> **Questão 2.** Como você ajudaria um aluno a decidir se o número $k = 16199 = 97 \cdot 167$ (onde 97 e 167 são números primos) é divisível por 3, 5, 11, 13, e 17.

Esta questão teve por objetivo identificar como os participantes compreendem a divisibilidade de um número inteiro, sendo informada sua decomposição em fatores primos. Este é o primeiro momento em que os docentes lidam com uma situação que tem vínculo direto com a decomposição em fatores primos e o conhecimento de suas propriedades seriam fundamentais para a resolução com pouco esforço cognitivo. Assim, o elemento principal que deve ser observado nesta questão é a unicidade da

decomposição de um número inteiro, representado pelo número *k*, com seus fatores primos 97 e 167.

Os docentes Ester, Leandro e Regina mostraram em suas resoluções e nas argumentações de suas falas entender que o fato de 97 e 167 serem fatores primos de *k* seriam seus únicos divisores, além de 1 e do próprio *k.* Leandro e Regina utilizaram esta consequência do Teorema Fundamental da Aritmética para rapidamente concluir que *k* não é divisível pelos números da lista. Ester, por sua vez, não observou imediatamente a unicidade da decomposição em fatores primos, já que em seu registro escrito, apresentou os critérios de divisibilidade de cada um dos números da lista para chegar à sua conclusão. Contudo, durante a entrevista de Intervenção, percebe que a não divisibilidade de *k* pelos números propostos poderia ser justificada por 97 e 167 serem primos, apesar de aparentemente não confiar plenamente na informação do enunciado e necessitar verificar se são, de fato, primos.

Já para os docentes Alice, Dandara e Saulo, a informação de que os números 97 e 167 são primos não alteraram as suas formas de resolução, mesmo após termos discutido no início da Intervenção esta questão da unicidade, tanto em nossas falas quanto no vídeo que pedimos para que assistissem. De forma específica, Alice pareceu lembrar da unicidade da decomposição em fatores primos, porém não conseguiu utilizá-la nesta questão; Dandara e Saulo entendem que a única maneira de responder à questão seria resolvendo o produto de 97 e 167 e dividindo o resultado por cada um dos números da lista.

5.7.4. Resumo da Questão 3

Vejamos o enunciado da Questão 3:

> **Questão 3.** Considere o número $M = 3^3. 5^2.7$.
> a) *M* é divisível por 7? Explique.
> b) *M* divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 63? Por 11? Por 15? Explique.
> c) $3^2. 5.7^3$ é um múltiplo de *M*? Explique.
> d) $3^4.5^5.7^3.13^{18}$ é um múltiplo de *M*? Explique.

Esta questão teve por objetivo analisar se os participantes entendem a forma canônica de um número inteiro como forma de representação suficiente para a decisão sobre a divisibilidade ou multiplicidade de um número inteiro. Nela, entramos

de fato na seara do Teorema Fundamental da Aritmética propriamente dita, já que a decomposição em fatores primos está explícita no número inicial do enunciado, sem oferecer previamente o resultado do produto, além de serem inseridos outros números na sua forma canônica nos dois últimos itens.

Para cinco dos participantes, com exceção de Leandro, a representação na forma decomposta em fatores dos números pareceu inicialmente insuficiente para a resolução das questões, uma vez que todos tiveram a reação inicial de resolver o produto presente em *M*, para só então começarem suas resoluções, com Alice não realizando corretamente este cálculo.

Ester e Regina, após a realização do produto de *M*, mostraram ter preferência na resolução dos dois primeiros itens da questão com foco na utilização plena dos critérios de divisibilidade dos números listados, explicando e explicitando cada um deles conforme necessário. Saulo iniciou sua análise pelos critérios de divisibilidade, entretanto, quando os números eram maiores, recorre ao dispositivo prático da divisão com resto zero. Alice, no que lhe toca, não utilizou unicamente os critérios de divisibilidade dos números envolvidos, mas se apoiou em alguns momentos tanto na representação decomposta quanto nos passos da multiplicação que descreveu para calcular o produto de *M*. Já Dandara preferiu utilizar a divisão exata para decidir sobre a divisibilidade em todos os casos dos itens a e b.

Quando tomamos a multiplicidade de *M*, as estratégias de resolução dos participantes têm certa mudança, que defendemos ter sido influenciada pelo aumento expressivo dos valores dos expoentes das potências relacionadas à representação canônica dos números enunciados. Assim, as docentes Ester e Regina, passaram a utilizar os números na forma de suas decomposições em fatores primos para realizar um procedimento da propriedade da divisão de potências para decidir se tal resultado seria exato.

Alice lembrou, momentaneamente, que existe uma relação entre os expoentes das potências da representação canônica e que, a partir delas, poderiam ser tiradas conclusões sobre sua multiplicidade, mas não conseguiu chegar à uma conclusão concreta sobre esta ideia. Saulo, por sua vez, resolveu o produto presente no terceiro item para em seguida proceder ao dispositivo da divisão para encontrar uma exata. Entretanto, esta técnica não foi possível ser feita para o último item, já que o docente não conseguiu resolver tal produto na calculadora incapaz de apresentar o resultado, e, por consequência, a deixou em branco. Dandara não conseguiu resolver os dois

últimos itens, apesar de observar que as potências poderiam indicar algo sobre a multiplicidade dos números.

Finalmente, o docente Leandro não necessitou calcular nenhum dos produtos apresentados nos itens e utilizou uma propriedade proveniente do Teorema Fundamental da Aritmética, observando a inserção ou não dos fatores primos presentes na decomposição dos números envolvidos na análise para decidir sobre a divisibilidade e multiplicidade de todos os números propostos.

O quadro traz suscintamente as estratégias de resolução desta questão, assim como a suficiência da representação para a decisão de divisibilidade e multiplicidade:

Quadro 3 – Utilização da representação canônica

Participante	Itens corretos na Questão 3	Preferência na técnica de resolução	Suficiência da representação para divisibilidade	Suficiência da representação para multiplicidade
Alice	Corretamente itens a e b; sem conclusão para os itens c e d	Observação dos fatores e critérios de divisibilidade	Parcialmente suficiente	Não suficiente
Dandara	Corretamente item a; Parcialmente, item b; não respondeu itens c e d	Dispositivo prático da divisão	Não suficiente	Não suficiente
Ester	Todos os itens	Critérios de divisibilidade e procedimento de divisão de potências	Não suficiente	Suficiente
Leandro	Todos os itens	Observação dos fatores na decomposição canônica	Suficiente	Suficiente
Regina	Todos os itens	Critérios de divisibilidade, dispositivo prático da divisão e procedimento de divisão de potências	Não suficiente	Parcialmente suficiente
Saulo	Corretamente itens a, b e c; não respondeu item d	Critérios de divisibilidade e dispositivo prático da divisão	Não suficiente	Não suficiente

Fonte: Elaborada pela autora

Diante do quadro, podemos afirmar que o objetivo da questão foi atingido, sendo possível compreender para cada um dos participantes o alcance da representação canônica em seus raciocínios, obtendo com clareza as nuances existentes em seus conhecimentos, estratégias e preferências de resolução para cada item.

Ressaltamos que a suficiência ou não da representação canônica está diretamente ligada à tal representação ser transparente ou opaca em relação às propriedades que envolvem um conceito, conforme Zazkis e Gadowsky (2001) e Fonseca (2015). Para alguns, as propriedades intrínsecas ao Teorema Fundamental da Aritmética estavam evidentes ao ponto de serem prontamente utilizadas e exploradas; para outros, o fato de tal representação não ser aquela mais utilizada em seu cotidiano, pode ter dado preferência inicial a outras estratégias, não necessariamente mais econômicas, mas que são de seu maior domínio, sendo posteriormente substituídas pela utilização da representação canônica; para aqueles que a representação é totalmente opaca, a representação canônica é praticamente ignorada.

5.7.5. Resumo da Questão 4

Vamos relembrar o enunciado da Questão 4:

> **Questão 4.** Dentre os números 42, 45, 52, 85 e 105 qual se apresenta como um divisor de $3^5 \times 4^4 \times 5^3$?

Esta questão teve por objetivo analisar se os participantes utilizam a transformação na forma canônica de números inteiros para a decisão sobre a divisibilidade por um número inteiro dado na sua forma decomposta em fatores primos. Ainda no contexto explícito do Teorema Fundamental da Aritmética, esta questão apresenta a possibilidade de decomposição dos números listados para que, a partir dos fatores primos apresentados, fosse decidido sobre sua divisibilidade.

Esta foi a forma de resolução usada por Ester e Leandro para decidir dentre os números propostos, com Leandro observando a relação entre os fatores primos presentes em todas as representações canônica dos números, enquanto Ester justificou, mostrando detalhadamente, por meio do procedimento da divisão de potências, para mostrar a possível divisibilidade por cada um dos números.

Para Dandara, Regina e Saulo a decomposição em fatores primos não foi a estratégia escolhida, sendo a primeira reação de todos o cálculo do produto apresentado no número decomposto em fatores primos para posterior execução do dispositivo prático da divisão para suas decisões. Lembramos que esta questão foi retirada da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, em que uma

resolução mais econômica seria mais indicada para sua pronta solução. Ao ter que executar longas multiplicações em busca de resultado de divisões exatas, esta prontidão estaria prejudicada. Além disso, dois dos docentes admitiram ter usado a calculadora para a esta decisão, o que normalmente seria uma impossibilidade no caso de maioria dos testes de seleção.

No que tange às técnicas utilizadas por Alice, houve um misto de possibilidades, já que foi pensando em cada um dos números possíveis por meio de eliminação de possíveis características provenientes de suas decomposições, aliada a alguns critérios de divisibilidade aleatórios. Entretanto, não decompôs, de fato, nenhum dos números, assumindo que, apesar de ter respondido corretamente à questão, não verificou a possibilidade de cada um dos números serem divisores separadamente.

Cabe aqui uma observação sobre a elaboração da questão, uma vez que inicialmente não nos atentamos ao fato do enunciado trazer, ainda que implicitamente e de forma antecipada, o número de soluções corretas, escrevendo a frase no singular. Para as outras entrevistas, reescrevemos tal questão no plural, o que levou os outros participantes analisarem todos os números propostos.

Entendemos, então, que o objetivo da questão foi atingido, sendo mais uma vez possível nos aprofundar sobre o conhecimento dos professores das propriedades vinculadas ao Teorema Fundamental da Aritmética.

5.7.6. Resumo da Questão 5

Lembramos, a seguir, o enunciado da Questão 5:

> **Questão 5.** Responda as questões abaixo, justificando:
> a) O número A é par. É verdade que o número 2A tem que ser divisível por 4?
> b) O número 21A é divisível por 6. É verdade que A tem que ser divisível por 6?

Esta questão teve por objetivo entender como os participantes lidam com situações que podem ser solucionadas pelo Teorema Fundamental da Aritmética em que são apresentados números inteiros multiplicados por variáveis. Tal questão poderia também suscitar a evidência de possíveis técnicas de demonstração de proposições dominadas pelos participantes.

Para o primeiro item, as docentes Alice, Dandara, Ester utilizam um raciocínio lógico, baseando-se na hipótese de o número *A* ser par e suas consequências ao serem multiplicados pelo número 2, concluindo corretamente que *2A* deveria ser divisível por 4.

Entretanto, o segundo item trouxe movimentos de resolução variados entre elas. Alice, apesar de buscar um caminho lógico para tentar justificar seu raciocínio utilizando as divisibilidades de 2, 3 e 6, confundiu-se entre hipótese e tese, não concluindo corretamente a questão. Dandara utiliza-se de substituições por valores numéricos em *A*, como o número $A = 3$ para observar seu comportamento, mas sua conclusão acabou sendo incorreta, já que ao observar que $21A = 63$, considerou que 63 não seria divisível por 6, o que é um equívoco, já que o solicitado seria a divisibilidade de *A* por 6. A docente Ester utilizou exemplos numéricos na substituição de *A* e concluiu corretamente a possibilidade de alguns destes números não serem divisíveis por 6, como o número 2 e o número 4.

Já o docente Leandro se ateve a uma demonstração mais formal, observando as condições impostas na tese e na hipótese, utilizando corretamente as características das decomposições em fatores primos dos números envolvidos em sua justificativa.

Regina, ao contrário, utilizou como resposta as condições vinculadas aos critérios de divisibilidade por 4, no primeiro item e por 6 no segundo item, sem discriminar, formal ou concretamente por meio de exemplos as condições específicas que os números *2A* e *A* deveriam atender para que a tese fosse comprovada em ambos os casos, nem vinculando-os às questões relacionadas à decomposição em fatores primos.

Saulo, entretanto, ao tentar utilizar zero como um dos números que poderiam ser considerados para serem substituídos por A nos dois itens, confundiu-se na questão da divisibilidade de zero e por zero, não sendo possível concluir a questão.

Acreditamos que o objetivo da questão foi alcançado, pois foi possível analisar como cada participante interage com uma situação em que além de conceitos vinculados ao Teorema Fundamental da Aritmética, abrangem conhecimentos da estrutura de demonstração matemática, ou a Práticas ligadas à Matemática em Geral, segundo o modelo MTSK, e que muitas vezes não exploradas no ambiente escolar cotidianamente.

5.7.7. Resumo da Questão 6

Vejamos o enunciado da Questão 6:

> **Questão 6.** Veja a lista de 10 números sendo eles 8^2, 17^2, 17^3, 234^3, 2346, $5^2.17^2$, $5^3.7^2$, 56.17^2, p^3 (onde p é primo), C^3 (onde C é composto) e decida quais dos números desta lista são quadrados perfeitos.

Esta questão teve por objetivo entender como os participantes lidam com situações que estão fora do contexto do Teorema Fundamental da Aritmética, mas que o tem como uma ferramenta auxiliar na resolução do problema. Para o início da resolução desta questão, é imprescindível o conhecimento sobre como descobrir e verificar números quadrados perfeitos, sendo este o primeiro aspecto a ser questionado a todos os participantes.

Todos os docentes apresentaram algum tipo de definição ou forma de descoberta de um número quadrado perfeito, seja observando o formato a^n, com a sendo um número em sua forma canônica e n úmero par, seja por meio da extração da raiz quadrada do número em questão. A exceção foi a docente Dandara, que admitiu não possuir o conhecimento sobre esta definição e, em sua busca por alguma orientação, acabou confundindo os conceitos de Número Quadrado Perfeito e de Número Composto.

Após esclarecermos a definição correta, conseguiu concluir corretamente sobre alguns dos números propostos e para p^3, mas não conseguiu concluir corretamente sobre números que necessitavam de alguma transformação em sua representação para uma melhor análise e para as condições necessárias para C^3 ser um quadrado perfeito.

Uma interpretação parecida ocorreu com o professor Saulo, que descreveu corretamente a forma de se encontrar um número quadrado perfeito, mas não observou as transformações necessárias que poderiam ser feitas em potências com bases contendo números compostos e mostrou confusão ao tentar concluir sobre os números p^3 e C^3, ora encarando C como um número composto, ora os interpretando como um número primo.

Alice utiliza a extração da raiz quadrada de um número para a verificação de um quadrado perfeito, respondendo corretamente aos números inteiros com valores definidos e para o número p^3, considerando a impossibilidade de extração de todos os

fatores da raiz. Para Regina, um número quadrado perfeito deve ser elevado ao quadrado e, com base nisso, buscou o formato a^2 nos itens para concluir sobre os números serem quadrados perfeitos. Entretanto, ambas as docentes não conseguiram chegar a conclusões concretas sobre o comportamento de C^3 e, no caso de Regina, também não obteve sucesso para a análise de p^3.

Já Ester mostrou ter domínio de ambos os procedimentos para sua resolução, além de realizar corretamente todas as transformações necessárias para analisar adequadamente os números com valores definidos e para o número p^3. Para o número C^3, entretanto, não levou em consideração que números compostos também podem ser decompostos em fatores primos de maneira a gerar um quadrado perfeito, ainda que tenha realizado tais transformações anteriormente.

O docente Leandro apresentou igualmente o domínio em relação aos ambos os procedimentos de resolução, observando, reconhecendo e transformando de forma adequada os números quadrados perfeitos com valores definidos e mostrou aspectos formais presentes em sua demonstração para a análise dos números p^3 e C^3.

Assim, acreditamos que o objetivo da questão foi atingido, sendo possível entender qual foi a maneira de como cada participante responder ao estar em um contexto externo ao que normalmente se utiliza o Teorema Fundamental da Aritmética, tendo-o como ferramenta útil na compreensão de outros temas, que não necessariamente versem sobre divisibilidade e multiplicidade.

5.7.8. Os Conhecimentos Especializados, segundo o MSTK

Como anunciamos no Capítulo 3 desta tese, utilizamos alguns elementos do modelo MTSK para identificarmos os conhecimentos especializados do professor de Matemática que não seriam suportados pela teoria APOS.

Assim, destacamos no subdomínio Conhecimento dos Temas (KoT), o conhecimento da *Fenomenologia*, apresentada por Saulo, ao mostrar o conhecimento de aplicações do Teorema Fundamental da Aritmética, como o MMC e o MDC. O conhecimento das *Propriedades e seus Fundamentos* é percebido quando Ester e Leandro mostram conhecimento sobre como se estrutura uma demonstração matemática, partindo da hipótese dada e identificando propriedades que permitam concluir a tese.

Já conhecimentos sobre *Definições* podem ser observados na resposta de Leandro, quando utiliza corretamente, na Questão 6, as definições de número primo

e número composto para estabelecer as condições para C^3 ser um número quadrado perfeito. Também é percebido na resposta de Ester, ao determinar um número quadrado perfeito, observando tanto a paridade dos expoentes presentes nas potencias da decomposição quanto extraindo a raiz quadrada do número.

Conhecimentos sobre os *Procedimentos* são percebidos quando a professora notados no instante em que Ester e Regina mudam suas estratégias de resolução da Questão 3, abandonando os critérios de divisibilidade e partindo para o uso da propriedade da divisão de potências na decisão sobre a divisibilidade e a multiplicidade de um número. Leandro, igualmente, mostrou este conhecimento ao utilizar, na Questão 1, tanto o dispositivo de decomposição em fatores quanto a noção de divisão exata para determinar a divisibilidade de um número. Não identificamos nos conhecimentos dos docentes algum que estaria de acordo com a categoria *Registros de Representação*.

Já em relação ao subdomínio Conhecimento das Estruturas Matemáticas (KSM), identificamos apenas os conhecimentos sobre *Conexões de Simplificação* nas considerações de Ester, ao relatar que seus alunos do Ensino Médio poderiam diminuir suas dificuldades se soubessem executar de forma adequada o procedimento da divisão e a determinação de múltiplos e divisores. A categoria *Conexão Auxiliar* pode ser observada quando Dandara percebe, em um dos diálogos da Questão 3, que a decomposição em fatores primos pode auxiliar o entendimento de seus alunos na decisão sobre a divisibilidade de um número inteiro. Os conhecimentos vinculados às *Conexões de Complexidade* e às *Conexões Transversais*, não foram observadas naqueles revelados pelos professores.

Sobre o subdomínio Conhecimento da Prática Matemática (KPM), identificamos o conhecimento de *Práticas ligadas a uma Temática na Matemática* quando Alice descreve passo-a-passo a maneira como explica a decomposição em fatores primos aos seus alunos, sendo considerada por ela a abordagem ideal para seu trabalho. O conhecimento sobre as *Práticas ligadas à Matemática em geral* foi identificado na forma como o professor Leandro desenvolve as suas resoluções, tendo como preferência a linguagem formal tanto nas definições apresentadas como nas demonstrações realizadas.

No subdomínio Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM), o conhecimento sobre as Fo*rças e Dificuldades associadas à Aprendizagem* é percebido, assim como na categoria Conexão de Simplificação,

quando Ester explicita sua percepção sobre a dificuldade dos alunos com procedimentos considerados elementares. Dandara, igualmente, comenta sobre não acreditar que seus alunos, especificamente, não conseguiriam resolver questões em que a decomposição em fatores primos é exigida por saber que eles não aprenderam tal procedimento. As categorias *Formas de Aprendizagem*, *Formas de Interação dos Alunos com o Conteúdo Matemático* e *Concepção de Alunos sobre a Matemática* não foram observadas, assim como também não foram observadas as categorias vinculadas aos subdomínios Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT) e Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática (KMLS).

5.7.9. As Concepções dos professores, segundo a teoria APOS

Para concluirmos, analisaremos individualmente sobre a concepção revelada por cada um dos participantes, observando os aspectos descritos e analisados em todas as questões propostas, de forma a sintetizar os dados obtidos, levamos em conta os padrões de compreensão descritos em nossa Decomposição Genética, considerando os conhecimentos, estratégias, preferências de resoluções que nos permite compreender como o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética é revelado pelos participantes.

Lembramos que, considerando as premissas da teoria APOS, não existe linearidade em relação às Concepções Ação, Processo, Objeto e Esquema, podendo um indivíduo transitar entre os elementos constituintes, de acordo com a necessidade de uso e reelaboração das estruturas mentais exigidas para execução de determinada atividade. Assim, apresentamos o Quadro 4, contendo os conhecimentos e aspectos que permearam as análises das questões durante todo o percurso da pesquisa, assim como o alcance atingido por cada um dos docentes, como um guia de referência para concluirmos sobre as Concepções dos participantes.

Quadro 4 – Conhecimentos revelados pelos professores

	Alice	Dandara	Ester	Leandro	Regina	Saulo
Definição do conceito de múltiplo e divisor e da Divisibilidade	Revelou parcialmente	Não revelou	Revelou	Revelou	Revelou parcialmente	Revelou parcialmente
Unicidade da decomposição em fatores primos	Revelou parcialmente	Não revelou	Revelou	Revelou	Revelou	Não Revelou
Utilização da forma canônica do Teorema Fundamental da Aritmética	Não revelou	Não revelou	Revelou	Revelou	Revelou parcialmente	Revelou parcialmente
Uso do Teorema Fundamental da Aritmética com multiplicação por variável	Não revelou	Não revelou	Revelou	Revelou	Revelou parcialmente	Não Revelou
Utilização do Teorema Fundamental da Aritmética em outros contextos	Não revelou	Não revelou	Revelou parcialmente	Revelou	Não revelou	Não Revelou

Fonte: elaborado pela pesquisadora

Observando o percurso de Alice, identificamos que certamente possui uma Concepção o Teorema Fundamental da Aritmética que vai pouco além da Ação, já que a docente não necessitou executar cálculos específicos por meio de dispositivos práticos, sendo suficientes cálculos mentais e alguns critérios de divisibilidade para se certificar de sua resposta. Entretanto, não apresentou domínio em relação à unicidade da decomposição em fatores primos, sem considerar a forma canônica como uma representação útil para suas análises e resoluções. Ainda que tenha expressado conhecer o procedimento de decomposição em fatores, este não foi suficiente para que conseguisse abstrair aspectos sobre as propriedades do Teorema Fundamental da Aritmética para agir em outras situações como em multiplicações com variáveis e outros contextos.

Desta forma, acreditamos que, segundo a teria APOS, Alice possui uma concepção Processo sobre o Teorema Fundamental, porém, o consideramos ainda em consolidação da interiorização das Ações que envolvem este conceito, já que ao

lidar com conceitos de múltiplos, divisores e números primos e suas propriedades, apresenta alguma dificuldade em fazê-los e pensar sobre suas consequências.

Tomando, agora, os conhecimentos, técnicas e estratégias apresentados por Dandara, podemos afirmar que a docente possui uma Concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Na maior parte dos aspectos analisados, a docente necessitou de Intervenção externa para a realização correta dos procedimentos, sendo a execução do dispositivo prático da divisão sua única ferramenta utilizada para observar multiplicidade e divisibilidade de um número. Além disso, a Divisibilidade e seus critérios não estão completamente interiorizados pela professora, o que não permite que propriedades referentes ao Teorema Fundamental da Aritmética possam ser observadas e utilizadas por ela na busca de seus resultados, não nos permitindo concluir um momento de transição entre Ação e Processo.

Já sobre a professora Ester, entendemos que revelou possuir uma Concepção Objeto, uma vez que evidenciou ter domínio das propriedades relacionadas ao conceito do Teorema Fundamental da Aritmética, desencapsulando-as quando foi necessário para utilizar nas situações propostas.

O domínio que possui em relação à Divisibilidade e seus critérios, nos mostrou ser esta sua preferência de estratégia de resolução. Mas, quando esta não pareceu suficiente, mostrou ter conhecimento necessário para evidenciar seu conhecimento sobre a decomposição em fatores primos, refletindo e agir sobre ela. Inferimos, ainda, que há algumas evidências que Ester possui a Concepção Esquema no contexto dos Números Quadrados Perfeito, já que a reflexão que apresentou sobre os aspectos presentes na questão a fez chegar a conclusões corretas, mas não utilizou necessariamente as características dos números primos e compostos para tal.

O docente Leandro, por sua vez, evidenciou possuir a Concepção Esquema sobre o Teorema Fundamental da Aritmética durante todo o percurso da pesquisa. Tendo-o como Objeto, desencapsulou as propriedades inerentes e utilizou de forma adequada sempre que lhe foi solicitado. Assim, teve a representação em fatores primos como preferencial para decisão em relação à divisibilidade e multiplicidade dos números, além de ter a descrição formal de conceitos e propriedades como seu campo de domínio. Em um contexto externo, continuou abstraindo as propriedades do Teorema Fundamental da Aritmética para utilizá-las como ferramenta para seus procedimentos e análises de resolução.

Já Regina revelou ter predileção por resoluções baseadas fortemente nos critérios de divisibilidade, inclusive em momentos em que eles não seriam suficientes para responder o que foi solicitado. Além disso, reconheceu a unicidade da decomposição em fatores primos de um número inteiro, não necessitando se apoiar exclusivamente no dispositivo prático da divisão para decidir sobre divisibilidade e multiplicidade de um número. Assim, podemos afirmar que possui a Concepção Processo sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Acrescentamos que a professora possa estar um movimento de encapsulação do Objeto, uma vez que buscou abstrair e refletir sobre algumas propriedades vindas da decomposição em fatores primos, mas não o fez com tanto sucesso.

Finalmente, o docente Saulo revelou ter como estratégia quase que exclusiva a realização do procedimento prático da divisão para a decisão sobre divisibilidade e multiplicidade de um número inteiro. Em diversos momentos, necessitou de nossa Intervenção para a indicação de procedimentos que poderiam ser realizados tendo como base o Teorema Fundamental da Aritmética, mostrando não possuir domínio das propriedades referente a ele. Entretanto, após estes momentos de esclarecimentos, percebemos um ganho cognitivo no seu conhecimento, por meio do qual pôde refletir sobre alguns aspectos pertinentes à decomposição em fatores primos. Isso nos permite inferir que possivelmente Saulo possui a Concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, mas está em vias de tornar estas Ações interiorizadas um Processo, assim que estiverem maturadas cognitivamente.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta desta tese de doutorado foi investigar os conhecimentos e as Concepções reveladas por professores de Matemática atuantes na rede pública do Estado de São Paulo sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, sob o olhar da teoria APOS.

Nossa problemática girou em torno da evidente ausência ou pouca ênfase apontada por Campbell e Zazkis (2002) do estudo de temas vinculados aos números inteiros nos currículos do Ensino Básico, e que se mostram negligenciados em documentos oficiais como a BNCC (2017). Isto também ocorre em cursos de licenciatura em Matemática, conforme Resende (2007), ao considerar que tais cursos, por vezes, não têm foco nas habilidades necessárias para a docência neste nível de ensino, sendo muitas vezes intensamente teórico, sem vínculos, de fato, com o que deve ser ensinado em sala de aula.

Tendo isso em vista, entender de que maneira este professor formado num sistema deficitário compreende conceitos relacionados à Teoria Elementar dos Números, temas considerados bases fundamentais para o estudo dos demais temas matemáticos, tornam-se importantes para ser possível pensar e propor soluções palpáveis nas deficiências existentes no nosso sistema de ensino.

Assim, este estudo seguiu os pressupostos de uma pesquisa qualitativa, em que elaboramos os instrumentos de pesquisa e coletamos os dados pessoalmente, no ambiente de trabalho dos docentes ou virtualmente, via aplicativo de mensagens e de vídeo, de acordo com a possibilidade vigente em cada momento. Além disso, na descrição e análise dos resultados, incluímos a descrição, os protocolos, as interpretações das respostas de cada docente participante, assim como considerações sobre suas impressões e dificuldades apresentadas durante a resolução das questões propostas.

Desta maneira, desde o início desta tese tínhamos por hipótese que cada professor participante apresentaria conhecimentos em níveis distintos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, tópico da Teoria Elementar dos Números escolhido, instigando-nos a buscar quais seriam estes conhecimentos, quais estratégias e procedimentos são utilizados e em que medida eles são evidenciados.

Para buscar responder estes questionamentos, nos baseamos na teoria APOS, que busca descrever o caminho que um indivíduo realiza para construir um conceito, por meio das Concepções Ação, Processo, Objeto e Esquema. Assim, realizamos um estudo teórico sobre o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética, analisamos pesquisas já realizadas sobre o tema e utilizamos nossa experiência docente para elaborar uma Decomposição Genética sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, para nos apoiar em nossas análises e nos possibilitar descrever os conhecimentos necessários para que um indivíduo conceba este conceito. Com a Decomposição Genética elaborada, construímos uma sequência de atividades, contendo seis questões que poderiam ser solucionadas utilizando conhecimentos e conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética. Como teoria auxiliar, utilizamos o modelo de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, o MTSK, para analisar possíveis conhecimentos específicos que poderiam se apresentar durante a pesquisa relacionados ao Conhecimento Matemático e o Conhecimento Didático do Conteúdo e que, eventualmente, não poderiam ser alcançados pela teoria APOS.

Para a coleta de dados, contamos com a participação voluntária de seis professores de Matemática, todos docentes ativos em sala de aula no momento da pesquisa, na rede pública de ensino do Estado de São Paulo, numa organização que se deu em dois momentos. No primeiro momento, sem que soubessem especificamente o tema que estávamos investigando, solicitamos aos participantes que respondessem às questões elaboradas e ao Formulário de Caracterização do Participante e que devolvessem os documentos. No segundo momento, realizamos uma entrevista semiestruturada, como um momento de Intervenção, destacando o Teorema Fundamental da Aritmética como tema da pesquisa e nos valendo dos protocolos de resposta para elaborar questionamentos complementares sobre as soluções apresentadas e buscar os conhecimentos explícitos e implícitos em cada estratégia e procedimentos utilizados para as resoluções.

Entretanto, a pandemia provocada pela Covid-19 trouxe mudanças e impactos significativos para a coleta de dados, impedindo que parte dos procedimentos descritos tenham ocorrido de maneira linear como inicialmente planejado. As três primeiras participações ocorreram de acordo com o esperado, de forma presencial, com a pesquisadora indo até as escolas, entregando os documentos a ser respondidos pelos professores em papel e voltando à escola para a realização da entrevista de Intervenção. Para os três últimos participantes, as dificuldades

apareceram desde o momento da busca por voluntários que, devido ao fechamento das escolas, ficamos impedidas de contatar professores presencialmente. Mudando a forma de busca por professores para a via online, nos deparamos com questões como “o estresse dos professores pela exigência rápida de novas performances, de preparação de aulas virtuais demandando mudanças em perspectivas didáticas, esforço de manejo técnico de instrumentos não habituais em sua rotina de trabalho” (GATTI, 2020), que provocou inúmeras negativas nos nossos convites para a participação na pesquisa, sendo a falta de tempo a alegação principal. E mesmo após termos encontrado voluntários dispostos a participar, o excesso de trabalho proveniente desta nova demanda não permitiu que alguns cumprissem os prazos de devolução de documentos e que necessitassem remarcar algumas vezes as entrevistas. Além disso, a própria natureza da comunicação online, não nos proporciona uma observação efetiva das movimentações, expressões, reações, registros de cálculos entre outras coisas que são inerentes ao trabalho presencial.

A análise dos dados foi realizada a partir dos protocolos de respostas dos professores participantes às questões propostas, do Formulário de Caracterização do Participante e da Intervenção realizada por meio da entrevista semiestruturada, buscando se, e como, os conhecimentos e conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética são revelados em suas falas e registros, além de observar as estratégias e procedimentos utilizados em suas resoluções.

Quanto à caracterização dos participantes, dois tinham até 5 anos de experiência docente, três professores entre 15 e 20 anos e um profissional com mais de 30 anos de vivência de sala de aula, já em vias de se aposentar, tendo a maioria deles suas experiências profissionais quase que exclusivamente na rede pública de ensino. Todos são formados em licenciatura em Matemática, com apenas um não tendo realizado algum curso de pós-graduação. Tínhamos, por hipótese, que a formação inicial e continuada, a realização de outros cursos e pós-graduações e o tempo de magistério poderiam influenciar positivamente tanto na gestão de sala de aula como na compreensão e possível aprofundamento de conceitos matemáticos. Entretanto, os resultados sugerem que, especificamente para este grupo de professores, isto não se aplica.

Evidenciamos professores com mais de 15 anos de magistério apresentando domínios discrepantes em relação à conceitos elementares, como a definição de múltiplos e divisores, sendo a docente com mais cursos de pós-graduação aquela que

evidenciou possuir um conhecimento superficial sobre eles. Dentre os professores com menos tempo de magistério, a docente que não possui formação pós-graduada evidenciou possuir um maior domínio em relação a estes conceitos elementares que o docente que possui uma pós-graduação.

Defendemos, antes de tudo, que nas formações iniciais e continuadas, o tema Teorema Fundamental da Aritmética, assim como outros temas vinculados à Teoria Elementar dos Números, seja explorado de forma constante e porque não dizer, obrigatória. Entendendo que estes conteúdos podem ser tomados como base para o desenvolvimentos de outros conteúdos e importantes para a compreensão de outros conceitos, é urgente que nossos professores estejam preparados para explorar propriedades e consequências desta temática, seja nos anos em que são efetivamente trabalhados como assunto principal de estudo, seja em anos posteriores, em que podem ser utilizados como ferramentas importantes para auxiliar o estudo de outros temas, sendo momentos oportunos para retomar as propriedades já trabalhadas.

Cabe-nos enfatizar que, diante do que se mostrou em nossa pesquisa, a aprendizagem e o aprofundamento de temas e conceitos matemáticos se consolida apenas quando o próprio docente tem a percepção de que a atualização de seu conhecimento e de seus estudos se faz necessária. E não apenas àqueles que tangem o conhecimento de conteúdos indispensáveis para a organização e planejamento do ensino em sala de aula de um ano em específico, mas em relação ao conhecimento matemático como um todo que é esperado para um profissional da área do ensino de Matemática. Assim, concordamos com Ponte (1998) quando afirma que “o desenvolvimento profissional de cada professor é algo que é da sua inteira e total responsabilidade” (PONTE, 1998, p. 38). Esta responsabilidade compreende investir na profissão, com definição de metas, balanços sobre o percurso realizado e refletir sobre sua prática e, ainda que o contexto externo não favoreça, estas atitudes estejam ao alcance de todo professor.

Partindo para a análise das entrevistas, buscamos atingir os objetivos listados por nós na introdução desta tese, sendo o primeiro deles: “*Identificar os conhecimentos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética evidenciados pelos professores durante a resolução de uma sequência de atividades*”. Para uma identificação inicial dos conhecimentos que estão relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, apoiamo-nos na análise prévia das questões contidas no

Instrumento de Coleta de Dados. Por meio dela, identificamos os seguintes conhecimentos que estariam relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética: o conceito de múltiplo e divisor, o reconhecimento da unicidade da decomposição em fatores primos de um número inteiro, a utilização da forma canônica do Teorema Fundamental da Aritmética e suas utilizações em questões envolvendo multiplicação por variáveis e em questões que estão em contexto externo ao Teorema.

Em relação ao conceito de múltiplo e divisor, três docentes definiram corretamente ambos os conceitos, dois docentes apresentaram parcialmente correto e uma docente não apresentou domínio desta definição. Dois utilizaram uma linguagem genérica para apresentarem suas definições, enquanto os demais aproveitaram os valores numéricos presentes no enunciado da questão para definir.

Uma dificuldade apresentada por alguns docentes foi a confusão entre os conceitos de múltiplo e de divisor, que se mostrou principalmente quando utilizaram a estrutura de construção da tabuada e o procedimento da divisão com resto zero para tal busca. Esta maneira de se explicar estes conceitos pode trazer este tipo de confusão, uma vez que o foco estaria na forma como se realiza a operação de multiplicação e o procedimento da divisão, ao invés de estar na relação existente entre os números envolvidos.

A unicidade de decomposição em fatores primos mostrou-se ser compreendida por três dos participantes, quando vincularam o fato de a decomposição de um número ser formada por fatores primos com a impossibilidade de haver divisibilidade por outros números que não fossem aqueles presentes na decomposição, o número inicial e o número 1. Para os demais, a decomposição única não foi identificada, pois necessitaram realizar o produto apresentado no enunciado e decidir sobre a divisibilidade do número inicial a partir do procedimento da divisão.

Ao trabalharem efetivamente com números que se apresentavam desde o começo da questão na sua forma canônica, ou seja, já decompostos em fatores primos, apenas para um de nossos docentes participantes esta representação foi totalmente suficiente para decidir sobre a divisibilidade e a multiplicidade de um número. Para duas docentes, inicialmente a representação não fez sentido, utilizando critérios de divisibilidade como sua estratégia de resolução. Entretanto, quando os expoentes das potências dos fatores da decomposição ficaram maiores, abandonaram a estratégia anterior e começaram a utilizar as propriedades do Teorema Fundamental da Aritmética para suas resoluções. Para os demais

professores, a forma canônica não foi considerada, já que resolveram todos os produtos apresentados nas decomposições em fatores primos, fazendo uso do dispositivo de divisão para a decisão da divisibilidade e da multiplicidade.

A questão envolvendo a multiplicação por uma variável foi resolvida com o apoio das propriedades do Teorema Fundamental da Aritmética por dois de nossos docentes. Como esta questão necessitava algum tipo de demonstração, dois outros docentes confundiram a hipótese com a tese e não conseguiram concluir corretamente suas justificativas, outra docente justificou utilizando apenas critérios de divisibilidade, sem responder, de fato, o questionamento solicitado, enquanto um participante não finalizou a questão. No caso do professor que não conseguiu concluir, houve uma dificuldade anterior àquela apresentada no enunciado, relacionada à divisibilidade de zero e por zero. Tal dificuldade, impediu que a questão fosse compreendida em sua hipótese e, por consequência, não permitiu que a tese pudesse ser discutida corretamente e concluída.

Quando ampliamos o contexto específico do Teorema Fundamental da Aritmética e entramos em outro contexto, no caso da questão proposta, o Número Quadrado Perfeito, apenas um docente utilizou as propriedades relacionadas ao Teorema Fundamental da Aritmética para justificar sua resposta, evidenciando também ter domínio de conceitos pertencentes a este outro contexto. Apesar de os outros cinco docentes também mostrarem conhecimento sobre alguma definição de número quadrado perfeito e maneiras de descobri-lo, a maioria respondeu corretamente somente para números que apresentavam valores definidos e que já estavam em sua forma canônica. Entretanto, quando os números apresentados necessitavam ser decompostos, apenas duas entre estes cinco docentes o executaram e responderam de maneira ideal. Quando lidavam com representados por variáveis, no caso, p^3, sendo p um número primo, e C^3, não conseguiram chegar a conclusões corretas sobre em que condições estes números seriam quadrados perfeitos.

Ainda que o objetivo específico descrito anteriormente buscasse por conhecimentos vinculados ao Teorema Fundamental da Aritmética, a escolha do modelo teórico MTSK como teoria de apoio nos permitiu identificar alguns conhecimentos específicos do professor de Matemática. No subdomínio do Conhecimento dos Temas em que considera o conhecer dos conteúdos de matemáticos e seus significados de forma fundamentada, identificamos

conhecimentos relacionados às categorias da Fenomenologia, das Propriedades e seus Fundamentos, Definições e Procedimentos. Sobre subdomínio Conhecimento das Estruturas Matemáticas, que leva em conta as conexões entre temas matemáticos, percebemos as categorias Conexões de Simplificação e Conexão Auxiliar.

No que tange ao subdomínio Conhecimento da Prática Matemática, em que se destaca a importância de o professor conhecer as características do trabalho matemático, identificamos ambas as categorias, em que são considerados conhecimentos relacionados às Práticas ligadas a uma Temática Matemática e às Práticas ligadas à Matemática em Geral. Já em relação ao subdomínio Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática, que trata sobre as características próprias do conteúdo matemático, verificamos apenas a categoria do conhecimento das Forças e Dificuldades associadas à Aprendizagem.

O próximo objetivo que buscamos atingir foi o de "*compreender se, e como, um momento de Intervenção pode influenciar na construção do conhecimento sobre o conceito Teorema Fundamental da Aritmética do professor participante, entendendo que este pode ser considerado um momento de formação*". Por termos escolhido professores atuantes em sala de aula da rede pública paulista, entendemos que cada participante se apresentaria inicialmente possuindo níveis diferentes de conhecimento sobre os conceitos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, quando solicitamos que cada participante respondesse às questões, sem saber especificamente nosso Objeto de estudo, pretendíamos conduzir a entrevista como uma Intervenção cujas discussões poderiam, de alguma maneira, propiciar a construção de novos saberes e conhecimentos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética.

De fato, alguns dos protocolos apresentados pelos participantes antes do momento da entrevista não representavam efetivamente os conhecimentos possuídos pelos professores, indicando-nos, em alguns casos, ausência de qualquer de conhecimento referente ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Entretanto, a exibição do vídeo da *Khan Academy* Brasil, mostrando o significado do conceito do Teorema Fundamental da Aritmética, e as explanações que realizamos em diversos momentos de cada uma das entrevistas, permitiram que alguns professores mostrassem um ganho cognitivo em relação aos conhecimentos apresentados em seus protocolos. Vale ressaltar que os participantes não souberam

de imediato o que seria o “Teorema Fundamental da Aritmética”, tendo sido reconhecido como a decomposição única em fatores primos apenas após a exibição do vídeo.

Como exemplo, citamos a docente Dandara, que apresentou desconhecimento quase que completo do Teorema Fundamental da Aritmética, numa análise inicial de seu protocolo. Durante o momento de Intervenção, esclarecemos sobre a relação entre um número em sua forma canônica e seus fatores primos, indicando que a presença de um fator primo da decomposição representa a divisibilidade por este número. Com base nisso, a docente consegue descrever e utilizar tal propriedade em um número aleatório escolhido por ela, estabelecendo, então, um movimento de construção de conhecimento.

Já a professora Ester, apresentou organização e detalhamento nas justificativas nas resposta de seu protocolo, respondendo corretamente praticamente todas as questões. E, apesar de algumas de suas respostas já conterem justificativas contendo a decomposição em fatores primos, mostrou predileção ao uso dos critérios de divisibilidade. Entretanto, após informarmos o tema da pesquisa, a docente revisita suas respostas e nota que a possibilidade da otimização de suas justificativas pela utilização das propriedades do Teorema Fundamental da Aritmética. Ainda que esta percepção não tenha influenciado efetivamente na construção de seu conhecimento sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, é importante sinalizar, assim como já descrito na introdução desta tese, o quanto o estudo dos números inteiros, e neste caso a decomposição em fatores primos e suas propriedades, é pouco explorado nos momentos de formação do professor e na sua vivência profissional. Isto se mostra quando ele não é considerado como a primeira preferência de utilização como estratégia de solução, mesmo que isto signifique mais agilidade e menor esforço cognitivo na resolução.

Para nosso último objetivo, “*tendo em vista que o Teorema Fundamental da Aritmética é um conceito tomado como elementar no conjunto de conhecimentos de um professor de Matemática, entender como e quais Concepções, segundo a teoria APOS, são evidenciadas pelos professores participantes*”, utilizamos os elementos componentes da teoria APOS, de acordo com as definições para as Concepções Ação, Processo, Objeto e Esquema definidas na Decomposição Genética. Desta forma, analisamos os protocolos de respostas dos participantes e as falas feitas durante a entrevista de Intervenção buscando elementos suficientes para que os

mecanismos mentais (interiorização, encapsulação e tematização) fossem percebidos a fim de que as estruturas mentais Ação, Processo, Objeto e Esquema pudessem igualmente ser identificadas segundo o que evidenciou cada um dos participantes.

Assim, identificamos que os docentes Dandara e Saulo evidenciaram possuir prioritariamente a Concepção Ação sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Em diversos momentos, ambos necessitaram de auxílio externo para transformarem o Objeto, se apoiando quase que exclusivamente do procedimento da divisão para decidir sobre divisibilidades e multiplicidades, além de ser necessário que algumas instruções externas fossem dadas para que compreendessem a utilização da decomposição em fatores primos. O docente Saulo, entretanto, mostrou algum domínio da Divisibilidade, o que nos permite dizer que está em vias de revelar uma Concepção Processo, estando prestes a interiorizar as Ações sobre o Objeto.

Já as docentes Alice e Regina, revelaram possuir uma Concepção Processo, já que não necessitavam de instruções externas para agir sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, quando este era reconhecido e mostraram um bom domínio sobre a Divisibilidade. Regina, contudo, mostrou o reconhecimento da unicidade da decomposição em fatores primos, o que pode indicar que o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética pode estar em vias de encapsulação, já que a unicidade é uma característica essencial neste conceito.

A Concepção Objeto foi evidenciada pelos docentes Ester e Leandro, uma vez que conseguiram desencapsular os processos relativos ao Teorema Fundamental da Aritmética, ao mostrarem saber utilizar suas propriedades, além de reconhecer a unicidade da decomposição em fatores primos e apresentarem domínio da Divisibilidade. Além disso, Leandro revelou possuir uma Concepção Esquema, pois no contexto dos Números Quadrados Perfeitos, contexto externo ao Teorema Fundamental da Aritmética, pôde agir na verificação de números quadrados perfeitos usando habilmente as propriedades relacionadas à decomposição em fatores primos, mesmo em situações em que os números eram dados na forma de variáveis.

Assim, diante do exposto nestas considerações e nas análises descritas no capítulo anterior, entendemos que a nossa questão norteadora foi respondida a contento, pois fornecem informações suficientes sobre os conhecimentos e as Concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética evidenciadas pelo grupo de docentes participantes da pesquisa.

Salientamos, entretanto, que as estruturas mentais aqui reveladas não são estáticas, estão em constante movimento e são passíveis de mudança. Assim, é possível que em contextos e situações diferentes daquelas que expusemos, os docentes participantes poderiam revelar evidências diferentes daquela que encontramos.

Nosso trabalho apresentou uma temática que entendemos ter sido de contribuição importante para a área da Educação Matemática, pois acreditamos ser o preenchimento de uma pequena parte da grande lacuna existente de estudos sobre a Teoria Elementar dos Números.

Ainda há, contudo, muito a ser investigado nessa temática desde no âmbito da formação inicial de professores até o ensino e aprendizagem em sala de aula. Assim, destacamos algumas questões como possíveis caminhos para pesquisas futuras: De que maneira a formação continuada pode contribuir, de fato, para o aprofundamento do conhecimento dos professores, a fim de minimizar lacunas deixadas pela formação inicial, já que esta não se configura como sendo suficiente para dar ao professor as ferramentas necessárias para o exercício do ofício da docência? Quais seriam as concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética em estudantes do Ensino Fundamental e do Médio, considerando a Decomposição Genética elaborada neste trabalho? Seria possível a elaboração de uma proposta pedagógica, baseada na Decomposição Genética aqui presente que permita um estudante construir o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética? Quais as concepções de licenciandos em Matemática quanto à aprendizagem do Teorema Fundamental da Aritmética? Como professores de formação inicial de cursos de Licenciatura em Matemática ensinam temas relacionados Teorema Fundamental da Aritmética?

Finalizando, destacamos um ponto que vou levar em consideração em minha prática docente, que é a importância do aprofundamento de assuntos que, assim como aqueles relacionados à Teoria Elementar dos Números, podem ser considerados de baixa complexidade ou de fácil entendimento. Esta tese ratificou tal importância e mostrou que tomar estes estudos como irrelevantes pode se revelar como algo muito mais complexo do que se apresentou inicialmente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. **Conhecimento Especializado sobre Divisibilidade do formador de professores que ensina Teoria do Números para estudantes de Licenciatura em Matemática**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Campinas-SP, 2020.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Editora UFPR: Curitiba, 2007.

ARNON, I.; COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; OKTAÇ, A.; FUENTES, S. R.; TRIGUEIROS, M.; WELLER, K. **APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education**. New York: Springer, 2014.

ASIALA, M.; BROWN, A.; DEVRIES, D.; DUBINSKY, E.; MATHEWS, D.; THOMAS, K. A, framework for research and development in undergraduate mathematics education. **Research in Collegiate Mathematics Education**, n. 2, p. 1-32, 1996.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of teacher education**, New York, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, G. S. **O Teorema Fundamental da Aritmética: jogos e problemas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

BETH, E. W.; PIAGET, J. **Mathematical epistemology and psychology** (Tradução de W. Mays). Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel, 1974.

BOGDAN, R., BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.pdf. Acesso em: 11 out. 2018.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BROWN, A.; THOMAS, K.; TOLIAS, G. Conceptions of Divisibility: Success and Understanding. In S. R. Campbell and R. Zazkis (Orgs.), **Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex Publishing, p. 41-82, 2002.

BURTON, D. M. **Elementary number theory**. New York: McGraw-Hill Companies, 6ª ed, 2007.

CAMPBELL, S; ZAZKIS, R. Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers' understanding, Journal for Research. In: **Mathematics Education**, v. 27, n. 5, p. 540-563, 1995.

_____. Toward Number Theory as a Conceptual Field. In MAHER, C.; SPEISER, R. (orgs.). **Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction.** (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, v. 02. Connecticut, EUA, 2002.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. A.; ESCUDERO, D.; FLORES-MEDRANO. E. (Eds.) **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas.** Publisher: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CLIMENT, N.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; ROJAS, N.; CARRILLO, MUNHOZ-CATALÁN, M. C.; SOSA, L. El Conocimiento del Profesor para la enseñanza de la Matemática. In: CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. A.; ESCUDERO, D.; FLORES-MEDRANO. E (Eds.). **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas.** Publisher: Universidad de Huelva Publicaciones, p. 43-70, 2014.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. 2019. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/tfa-problemas/. Acesso em 01 nov. 2019.

DANTE, L. R. **Coleção Teláris Matemática – 6º ano: Ensino Fundamental Anos Finais**. 3 ed. São Paulo: Ática, 2018.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: D. O. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking** Dorfrecht: Kluwer, p. 95-123, 1991.

_____. Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitária. In: **Educación Matemática**. Sociedad Mexicana de Investigación de la Education Matemática: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996. v.8, n. 3, p. 24-41. Disponível em http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/3/04Dubinsky.pdf. Acesso em 29 jan. 2019.

FONSECA, R. V. **Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética: Uma Investigação Entre Estudantes de Licenciatura em Matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC-SP, 2015.

FERREIRA, S. P. A.; LAUTERT, S. L. A Tomada de Consciência Analisada a partir do Conceito de Divisão: Um Estudo de Caso. In: **Psicologia: Reflexão e Crítica**, v. 16, n. 3, p. 547-554, 2003. Disponível em: https://www.scielo.br/j/prc/a/YCNqyHCvVT4QhhQ9GgfGhsm/?lang=pt&format=pdf . Acesso em 30 jan. 2021.

FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; MONTES, M.; AGUILAR, A.; CARRILLO, J. Nuestra modelación del Conocimiento Especializado Del Profesor De Matemáticas, el MTSK. In: CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. A.; ESCUDERO, D.; FLORES-MEDRANO. E (Eds.). **Un marco teórico**

para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas. Publisher: Universidad de Huelva Publicaciones, p. 71-93, 2014.

GARCIA, I.; PARRAGUEZ, M. Refinamiento de una descomposición genética para el concepto de inducción matemática. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28**,. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, p. 765-773, 2015.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisaem ciências humanas**. Porto Alegre: Artes Médicas; Belo Horizonte: UFMG, 1999.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI. Campinas**: Papyrus, 1997.

LÜDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **A Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2 ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C.; COELHO, S. P. **Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental**. In: Actas del Congreso Iberomericano de Educación Matemática 2005. Porto: Editora da Associação de Professores de Matemática, v. 1, p. 1-12, 2005.

MACHADO, S. D. A; MARANHÃO, M. C. S. A.; COELHO, S. P. **What algebra should be taught in preservice teachers' courses?** In: Conference of the European Society for Research in Matematics Education. Belaria, Proceedings of CERME 3, 2003.

MARANHÃO, M. C. S. A; MACHADO, S. D. A. **Capacidades algébricas fundamentais para professores**. In: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 08, n. 2, p. 50-63, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n2p50. Acesso em 20 jun. 2018.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: Uma Introdução à Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

MONTES, M.; FLORES-MEDRANO, E.; CARMONA, E.; HUITRADO, J. L.; FLORES, P. Reflexiones sobre la Naturaleza del Conocimiento, las Creencias y las Concepciones. In: CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. A.; ESCUDERO, D.; FLORES-MEDRANO. E (Eds.). **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Publisher: Universidad de Huelva Publicaciones, p. 6-25, 2014.

MOREIRA, P. C. **O Conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

NOMURA, J. I. **Esquemas Cognitivos e Mente Matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferencias na formação do engenheiro**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC-SP, 2014.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. 2010. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/1Fase_Nivel2_2010.pdf. Acesso em 01 nov. 2019.

PIAGET, J. A teoria de Piaget. In: MUSSEN, P. H. (Org.), **Desenvolvimento cognitivo**, São Paulo: EDU, v. 4, p. 71-115, 1975.

_____; GRIZE, B.; SZEMINSKA, A.; BANG, V. **Epistemology and psychology of functions** (Tradução de J. Castellanos & V. Anderson). Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel, 1977.

PONTE, J. P. Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: TAVARES J.; PEREIRA, A.; PEDRO, A. P.; SÁ, H. A. (Eds.). **Investigar e formar em educação**: Actas do IV Congresso da SPCE. Porto: SPCE, p. 59-72, 1999.

PEREIRA, R. C. **Transposição Didática: interações entre o sexto ano do ensino fundamental e a disciplina de Teoria dos Números em licenciatura Matemática sobre o conceito de divisibilidade**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação em Ciências e Matemática), Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória-ES, 2016.

PRADO, E. A. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2010.

RACHELLI, J. **Compreensão dos Conceitos de Derivada Clássica e Derivada Fraca: Análise Segundo e Modelo Cognitivo APOE.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Centro Universitário Franciscano, Santa Maria-RS, 2017.

RAMA, A. J. Números Inteiros nos ensinos Fundamental e Médio In: GARCIA, P. S. (org.). **Debates e contribuições sobre a escola pública: de professor para professor**. São Paulo: LCTE Editora, p. 153-175, 2009.

RESENDE, M. R., **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC-SP, 2007.

_____. A Teoria Elementar dos Números na Licenciatura em Matemática, Pedagogia e na Educação Básica. In: MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L.; MARANHÃO, M. C. S. A (Organizadoras). **Teoria elementar dos números da educação básica à formação dos professores que ensinam matemática**. São Paulo: Iglu, p. 1-14, 2015.

RESENDE, M. R; MACHADO, S. D. A. O ensino de matemática na disciplina a ensinar: adisciplina teoria elementar dos números. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 14, n. 2, p 257-278, 2012.

ROJAS, N; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 143-167, abr. 2015.

SÃO PAULO. Governo do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. São Paulo, 2019 Disponível em: http://www.escoladeformacao.sp.gov.br/portais/Portals/84/docs/pdf/curriculo_paulista_26_07_2019.pdf Acesso em 22 Mai. 2020.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, p. 49-76, 2007.

SOSA, L.; FLORES-MEDRANO, E.; CARRILLO, J. Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. In: **Enseñanza de las Ciencias**, v. 33., n. 2, p.173-189, 2015.

SOUZA, G. M. B. **Os conteúdos de Divisibilidade nos livros didáticos de Matemática do 6º ano e documentos curriculares do Ensino Fundamental Anos Finais**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, 2018.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth. In: **Teaching. Educational Researcher**. v.15, n. 2, p .4-14, fev. 1986.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 12. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

TRIGUEIROS, M. La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nível superior. In: **Educación Matemática**. ITAM, 2005.

ZAZKIS, R. **Releraning mathematics: a challenge for prospective elementar school teachers**. Charlote, NC: Information Age Publishing, 2011.

_____; CAMPBELL, S. Prime Decomposition: Understanding Uniqueness. In: **Journal of Mathematical Behavior**. Canadá: Simon Fraser University, n. 15, p. 207-218, 1996.

_____; GADOWSKY, K. Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In: CUOCO, A. (Ed.). **NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics**. Reston-VA, NCTM, p. 41-52, 2001.

ANEXO I

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da pesquisa: “A concepção sobre a Teoria dos Números por professores da Educação Básica do Estado de São Paulo”

O(A) Senhor(a) está sendo convidado a participar como voluntário(a) desta pesquisa, sob responsabilidade da pesquisadora Joice D’Almeida (doutoranda em Educação Matemática na PUC-SP), sob orientação da Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini (docente PUC-SP). Caso aceite participar, receberá uma via deste termo. Esclarecemos que:

✓ O objetivo deste estudo é identificar, descrever e analisar os elementos que envolvem o ensino da Teoria dos Números no Ensino Básico, analisando como o professor do Ensino Básico lida com ideias relativas ao tema.

✓ Esta pesquisa justifica-se pela importância de se desenvolver mais pesquisas tanto no âmbito do ensino quanto no âmbito da aprendizagem relacionadas ao Teoria dos Números, uma vez que experiências matemáticas podem ser utilizadas para a resolução de problemas não-triviais e em outras situações nas quais necessite o pensamento algébrico elementar.

✓ O Sr.(a) tem a liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo para o(a) sr(a). Sempre que quiser, poderá pedir mais informações sobre a pesquisa por meio do telefone e/ou e-mail da pesquisadora.

✓ Riscos e desconfortos: a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas, com riscos mínimos aos indivíduos, que terão como desconforto previsto apenas o tempo despendido para a entrevista e a participação na formação continuada. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética e Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução de nº 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde.

✓ Todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e sua orientadora terão conhecimento de sua identidade e nos comprometemos a mantê-la em sigilo ao publicar os resultados desta pesquisa, garantindo que os dados serão utilizados exclusivamente para fins didáticos e/ou científicos.

✓ Dada a natureza do estudo, não estão previstos reembolsos nem indenizações pela participação na pesquisa. No caso de ocorrerem quaisquer despesas em função da pesquisa, estas serão ressarcidas integralmente pelo pesquisador. O ressarcimento destina-se às despesas advindas pela participação exclusiva na pesquisa e que não teria se não participasse. Este item não se aplica com o gasto advindo do deslocamento e/ou transporte de casa (ou local de trabalho) ao local da formação e vice-versa.

✓ Esta pesquisa está de acordo com as normas estabelecidas pelo Regimento dos Comitês de Ética em Pesquisa da PUC-SP que, entre outros objetivos, visa apreciar os protocolos de pesquisas a serem realizadas no âmbito da Universidade e de pesquisadores externos que lhe sejam submetido, além de contribuir com seus pareceres para a valorização do pesquisador, ressaltando a adequação ética da sua proposta.

Após estes esclarecimentos, se não há dúvidas do que foi lido e explicado, convidamos o(a) sr(a). a participar da pesquisa, assinando o presente termo em duas vias, consentindo de forma livre a sua participação, autorizando a execução desta pesquisa, bem como a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

Eu, _____ dou meu consentimento livre e esclarecido para a minha participação na pesquisa descrita e também dou o meu consentimento para divulgação de trechos da minha entrevista, registros da minha participação e das minhas atividades para fins didáticos e/ou científicos.

( ) Aceito ( ) Não Aceito

São Paulo, _____ de _____ de 20___.

_____
Assinatura do(a) Participante

_____
Pesquisadora Joice D'Almeida

Pesquisadora: Joice D'Almeida.
Contato: (11)981874954 – e-mail: joicedijo@yahoo.com.br

Comitê de Ética PUC-SP: Rua Ministro Godói, 969 – Sala 63-C (Andar térreo) – Perdizes – São Paulo – SP. Fone: (11) 3670-8466 – e-mail: cometica@pucsp.br
Atendimento de segunda a sexta, das 9h às 18h

ANEXO II

CARACTERIZAÇÃO DO(A) PARTICIPANTE

Nome: _____ **Idade:** _____

Sobre sua trajetória acadêmica:

- Em que instituição fez sua graduação em Licenciatura em Matemática?

_____

- Em que ano concluiu sua graduação? _____
- Fez alguma especialização? ( ) não ( ) sim
- Se sim: Qual(is) foi(ram) o(s) curso(s)?

_____

- Havia, dentre as disciplinas estudadas durante a graduação ou pós-graduação, alguma que tratou, especificamente, de temas relacionados ao estudo dos Números Inteiros, suas operações e propriedades? ( ) não ( ) sim
- Em caso afirmativo, qual(is) seria(m) o(s) nome(s) desta(s) disciplina(s), caso se lembre?

_____

Sobre sua trajetória como docente:

- Há quanto tempo leciona Matemática no ensino público? _____
- E quantos destes anos foram dedicados ao Ensino Fundamental II? _____
- Já teve alguma experiência docente na rede particular de ensino? ( ) não ( ) sim
- Em caso afirmativo, por quanto tempo lecionou, ainda que concomitantemente ao tempo de docência no ensino público? _____

Sobre a Teoria dos Números:

- Segundo sem entendimento, quais temas estariam envolvidos em estudos sobre a Teoria dos Números? _____

_____

- Para você, qual a importância do estudo da Teoria dos Números no Ensino Básico? _____

_____

_____

ANEXO III

Instrumento de Coleta de Dados – Possíveis Respostas

Questão 1. Considere a lista de números a seguir: 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18, 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401, 2412. Como você explicaria a um aluno quais dos números listados:

a) são divisores de 24?

Para saber os números da lista que são divisores de 24, partimos da definição de divisor que os divisores de um número devem ser menores ou iguais a ele. Assim, os possíveis divisores de 24 seriam apenas 1, 3, 6, 7, 8, 12, 15, 18 e 24. O número 1 é divisor por ser o elemento neutro da operação multiplicação; os números 3, 6 = 2.3, 8 = 2^3 e 12 = 2^2.3 também são divisores, pois tem os fatores primos de suas decomposições inclusos nos fatores presentes na fatoração de 24; já os números 7, 15 = 3.5 e 18 = 2.3^2 não tem fatores coincidindo com aquele presentes em 24. Assim, os divisores de 24 presentes na lista são: 1, 3, 6, 8, 12 e 24.

b) são múltiplos de 24?

Pela definição de múltiplo, os possíveis números que podem ser múltiplos de 24 seriam 24, 39, 42, 48, 69, 96, 2400, 2401e 2412. Os números 48 = 2^4.3, 96 = 2^5.3 e 2400 = 2^5.3.5^2 incluem todos os fatores do número 24; o mesmo não ocorre com os números 39 = 3.13, 42 = 2.21, 69 = 3.23, 2401 = 7^4 e 2412 = 2^2.3^2.67. Desta forma, os múltiplos de 24 são 24, 48, 96 e 2400.

c) são divisíveis por 24?

Os números divisíveis por 24 são os seus múltiplos, ou seja, 24, 48, 96 e 2400.

d) pelos quais 24 é divisível?

Os números pelos quais 24 é divisível são seus divisores, isto é, 1, 3, 6, 8, 12 e 24.

Questão 2. Como você ajudaria um aluno a decidir se o número $k = 16199 = 97 \cdot 167$ (onde 97 e 167 são números primos) é divisível por 3, 5, 11, 13, e 17.

A resolução imediata da questão seria perceber que ambos os números presentes na decomposição de 16199 são primos, não sendo possível que algum número da lista possa ser seu divisor.

Questão 3. Considere o número $M = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

a) *M* é divisível por 7? Explique.

Como o número 7 está presente na decomposição de *M*, então é divisível.

b) *M* divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 63? Por 11? Por 15? Explique.

Os números 5, 9 = 3^2, 63 = 3^2.7 e 15 = 3.5 tem os seus fatores inclusos na decomposição de *M* e, portanto, *M* é divisível por eles. O mesmo não ocorre com os números 2 e 11 pelos quais *M* não é divisível.

c) $3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$ é um múltiplo de *M*? Explique.

Para verificar se o número $3^2.5.7^3$ é múltiplo de *M*, os fatores de *M* devem estar todos inclusos na decomposição do número proposto. Mas não é isso que ocorre, pois *M* tem os fatores 3^3 e 5^2 enquanto o número proposto tem os fatores 3^2 e 5. Portanto, o número não é múltiplo de *M*.

d) $3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^{18}$ é um múltiplo de *M*? Explique.

Neste caso $3^4.5^5.7^3.13^{18}$ é múltiplo de *M*, pois os fatores de *M* estão todos inclusos na decomposição em fatores primos do número proposto.

Questão 4. Dentre os números 42, 45, 52, 85 e 105, qual se apresenta como um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?

Como se quer saber o divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$, deve-se verificar se os fatores dos números mencionados estão presentes no número inicial. Assim, como $42 = 2^2.3.7$, $45 = 3^2.5$, $52 = 2^2.13$, $85 = 5.17$ e $105 = 3.5.7$, pode-se afirmar que o número 45 é o divisor procurado.

Questão 5. Responda as questões abaixo, justificando:

a) O número A é par. É verdade que o número 2A tem que ser divisível por 4?

Como *A* é par, então podemos escrevê-lo como $A = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $2A = 2.2k = 4k$, isto é, *2A* deve, obrigatoriamente, ser divisível por 4.

b) O número 21A é divisível por 6. É verdade que A tem que ser divisível por 6?

Considerando que 21A é divisível por 6, podemos escrever que $7.3.A$ é divisível por 6. Para que um número inteiro seja divisível por 6, em sua representação em fatores primos devem estar presentes, não exclusivamente, os algarismos 2 e 3. Assim, se tomarmos, por exemplo $A = 2$, teremos cumprida a hipótese inicial de que $21A = 21.2 = 42$ é divisível por 6, porém $A = 2$ não é divisível por 6. Logo, não é verdade que *A* deve ser divisível por 6.

Questão 6. Veja a lista de 10 números sendo eles 8^2, 17^2, 17^3, 234^3, 234^6, $5^2 \cdot 17^2$, $25^3 \cdot 7^2$, $5^6 \cdot 17^2$, p^3 (onde *p* é primo), C^3 (onde *C* é composto) e decida quais dos números desta lista são quadrados perfeitos.

Para que um número seja considerado um quadrado perfeito é necessário que em sua representação canônica, todos os fatores sejam pares para que seja possível escrevê-lo na forma a^2, sendo *a* um número natural, Desta forma, os números $8^2 = (2^3)^2$, 17^2, $234^6 = 2^6.3^6.39^6 = (2^3.3^3.39^3)^2$, $5^2.17^2 = (5.17)^2$, $5^6.17^2 = (5^3.17)^2$ e $25^3.7^2 = (5^2)^3.7^2 = (5^3.7)^2$ são quadrados perfeitos. O mesmo não ocorre com os números 17^3 e $234^3 = 2^3.3^3.39^3$, que não podem ser escritos na forma a^2 e, portanto, não são quadrados perfeitos. Já em relação ao número p^3, como *p* é primo, não há possibilidade de decompor p para se obter pares de fatores que geraria um expoente par, então p^3 não é um quadrado perfeito. Sobre o número C^3, pelo fato

de C ser composto, há a possibilidade de que seja um quadrado perfeito, caso sua decomposição em primos gere pares de fatores, em todos os seus representantes, C^3 será um quadrado perfeito; caso, algum fator esteja representado em número ímpar, C^3 não será um quadrado perfeito.