

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

ANA KARINE DIAS CAIRES BRANDÃO

**UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA O ENSINO DE
INTEGRAL DUPLA: SIGNIFICADOS E PRAXEOLOGIAS
MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DE ENGENHARIAS E DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2021

ANA KARINE DIAS CAIRES BRANDÃO

**UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA O ENSINO DE
INTEGRAL DUPLA: SIGNIFICADOS E PRAXELOGIAS
MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DE ENGENHARIAS E DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** sob a orientação da Professora Doutora **Maria José Ferreira da Silva**.

SÃO PAULO

2021

Autorizo, para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ São Paulo, __/__/__

E-mail: Karine_caires@hotmail.com

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

BRANDÃO, ANA KARINE DIAS CAIRES

Um Percorso de Estudo e Pesquisa para o ensino de integral dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de engenharias e de licenciatura em matemática / ANA KARINEDIAS CAIRES BRANDÃO. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
446p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Dissertação (Mestrado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Linguagem. 2. Semiótica peirceana. 3. Teoria Antropológica do Didático. 4. Percorso de Estudo e Pesquisa. I. Silva, Maria José Ferreira da. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

ANA KARINE DIAS CAIRES BRANDÃO

**UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA O ENSINO DE
INTEGRAL DUPLA: SIGNIFICADOS E PRAXELOGIAS MOBILIZADOS
POR ESTUDANTES DE ENGENHARIAS E DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR em Educação Matemática.

APROVADO EM __/__/__

BANCA EXAMINADORA

Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) - PUC-SP

Dra. Michèle Artigue – PARIS 7

Dr. Saddo Ag. Almouloud - UFPA

Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho - PUC-SP

Dr. Gerson Pastre de Oliveira - PUC-SP

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

À Caio e Lucas, com muito amor

.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é um ato de amor.

A minha constituição como educadora perpassa por pequenos atos de amor que vão sendo consolidados no dia a dia, adquiridos ao longo do meu processo formativo e que me faz sentir grata:

À Deus pela oportunidade de crescimento, de evolução e de me transformar em um condutor do Seu amor.

Aos meus pais pelo dom da vida, por me educar pelos princípios de honestidade, responsabilidade, dedicação, respeito e retidão de caráter.

À Sérgio, Caio e Lucas pelas renúncias que se fizeram necessárias ao longo desse caminho, ao incentivo, ao apoio e ao amor que nos uniu.

Aos amigos e as pessoas das três famílias (Dias, Caires e Brandão) que me ensinaram a respeitar a diversidade e a amar incondicionalmente.

Aos meus alunos e colegas das escolas que trabalhei. Em especial ao Instituto São Tarcísio que me fez descobri professora e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia por oportunizar o meu afastamento para os estudos do Doutorado.

Ao Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM-UESB) pelas oportunidades de colaboração, de cooperação, de discussão, de trabalho árduo e das produções acadêmicas construídas nestes doze anos como integrante. Ao PEA-MAT pelo apoio dos seus integrantes e das discussões acadêmicas que contribuíram para minha formação.

Aos professores das escolas (Colégio Nossa Senhora de Fátima, Educandário Juvêncio Terra, Instituto São Tarcísio, Colégio Sartre) e das universidades (UESB, UESC, PUC-SP) em que estudei. A minha gratidão, admiração e respeito por todo conhecimento que adquiri com cada um de vocês. Ao Cursinho Zênite e a UESB que disponibilizou o espaço físico para o desenvolvimento do curso.

Aos colegas do doutorado: Maria Teresa Mastroianni, Renata Nifoci, Cássio, Daysi, Teodora, Rafael, Lilian, Simone, Rita Lobo. Em especial, a Soele e a Cleide pelo companheirismo, o colo amigo e a compreensão das minhas limitações como um ser em desenvolvimento.

Aos meus orientadores: Maria José Ferreira da Silva, Saddo Ag Almouloud e aos professores: Marcos Rogério Neves, Claudinei de Camargo Sant'Ana, Eurivalda dos Santos Ribeiro Santana, Cileda Coutinho, Gerson Pastre, Ana Manrique, Mariana Bosch, Lúcia Santaella, Josep Gascón e Michele Artigue que se fizeram presentes nas diferentes etapas da minha formação profissional, intelectual e pessoal.

Aos professores da Banca pelas contribuições no desenvolvimento dessa pesquisa.

E para finalizar, A CAPES pelo auxílio financeiro para o desenvolvimento da tese que ora apresento.

*“Quando acreditamos apaixonadamente em algo
que ainda não existe, nós o criamos.
O inexistente é o que não desejamos o suficiente”.*

Franz Kafka

BRANDÃO, A.K.D.C. Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino de integral dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de engenharias e de licenciatura em matemática. 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021, 446 páginas.

RESUMO

Esta tese teve como objetivo analisar os significados e as praxeologias mobilizados por estudantes das engenharias e da licenciatura em matemática no desenvolvimento de um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino e a aprendizagem da Integral Dupla. Duas hipóteses foram delineadas: a de que a dimensão da linguagem envolta nos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas para o cálculo da medida de uma Superfície Quádrica, quando aplicadas em um Percurso de Estudos e Pesquisa, proporciona raciocínios abduativos capazes de desenvolverem a autonomia dos estudantes na construção dos conceitos inerentes ao objeto matemático e, a segunda, que existem diferenças nos significados, nas interpretações e nas praxeologias mobilizados por estudantes dos cursos das Engenharias e da Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um PEP. Fundamentou-se teoricamente nos pressupostos da Semiótica de Charles Sanders Peirce e na Teoria Antropológica do Didático. A pesquisa, de abordagem qualitativa, desenvolvida seguindo os procedimentos de um *Percurso de Estudos e Pesquisa* para o ensino da Integral Dupla no cálculo da medida das Superfícies Quádricas, caracterizou-se por cinco encontros presenciais, áudio-gravados e filmados, que ocorreram aos sábados, com a participação de doze estudantes matriculados nos cursos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e das Engenharias (civil, elétrica e ambiental) do Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia e que haviam cursado a disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Os resultados obtidos apontaram que os estudantes conseguiram aplicar os conceitos dos objetos matemáticos escolhidos de forma coerente e autônoma ao construir e resolverem situações-problemas envolvendo conhecimentos dos cursos do qual são egressos e do Cálculo Diferencial e Integral. As formas presentes nas obras de Gaudí facultou aos estudantes associarem os objetos matemáticos a uma linguagem estética, ao pragmatismo e ao desenvolvimento de raciocínios abduativos que permitiram alinhar o uso deles em diferentes situações. Os significados, as interpretações e as praxeologias se diferenciaram quanto ao emprego dos conhecimentos matemáticos nas duas graduações e nas interpretações das tarefas propostas, mas convergiram nas praxeologias matemáticas aplicadas.

Palavras-chaves: Linguagem. Semiótica peirceana. Teoria Antropológica do Didático. Percurso de Estudo e Pesquisa.

ABSTRACT

This thesis aimed to analyze the meanings and praxeologies mobilized by engineering and mathematics undergraduate students in the development of a Study and Research Pathway for teaching and learning the Double Integral. Two hypotheses were outlined: that the dimension of language involved in the teaching and learning processes of Double Integrals for calculating the measure of a Quadric Surface, when applied in a Path of Studies and Research, provides abductive reasoning capable of developing the autonomy of students in the construction of concepts inherent to the mathematical object and, the second, that there are differences in the meanings, interpretations and praxeologies mobilized by students of Engineering and Licentiate Degree in Mathematics in the development of a PEP. It was theoretically based on the assumptions of Charles Sanders Peirce's Semiotics and on the Anthropological Theory of Didactics. The research, with a qualitative approach, developed following the procedures of a Study and Research Course for the teaching of Double Integral in the calculation of the measure of the Quadric Surfaces, was characterized by five face-to-face meetings, audio-recorded and filmed, which took place on Saturdays. , with the participation of twelve students enrolled in the Licentiate Degree in Mathematics courses at the State University of Southwest Bahia and Engineering (civil, electrical and environmental) courses at the Bahia Institute of Education, Science and Technology and who had attended the Differential Calculus and Full The results obtained showed that the students were able to apply the concepts of the chosen mathematical objects in a coherent and autonomous way when constructing and solving problem-situations involving knowledge of the courses from which they are alumni and of Differential and Integral Calculus. The shapes present in Gaudí's works enabled students to associate mathematical objects with an aesthetic language, pragmatism and the development of abductive reasoning that allowed them to align their use in different situations. The meanings, interpretations and praxeologies differed in terms of the use of mathematical knowledge in the two grades and in the interpretations of the proposed tasks, but they converged in the applied mathematical praxeologies.

Keywords: Language. Peircean semiotics. Anthropological Theory of Didactics. Study and Research Path

.

RÉSUMÉ

Cette thèse visait à analyser les significations et praxéologies mobilisées par les étudiants de premier cycle en ingénierie et mathématiques dans l'élaboration d'un Parcours d'études et de recherche pour l'enseignement et l'apprentissage de la double intégrale. Deux hypothèses ont été esquissées : que la dimension du langage impliquée dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des Intégrales doubles pour le calcul de la mesure d'une Surface Quadrique, lorsqu'elle est appliquée dans un Chemin d'Études et de Recherche, fournit un raisonnement abductif capable de développer l'autonomie des étudiants la construction de concepts inhérents à l'objet mathématique et, d'autre part, qu'il existe des différences de sens, d'interprétations et de praxéologies mobilisées par les étudiants en Ingénieur et Licence en Mathématiques dans l'élaboration d'un PEP. Il était théoriquement basé sur les hypothèses de la sémiotique de Charles Sanders Peirce et sur la théorie anthropologique de la didactique. La recherche, avec une approche qualitative, développée selon les procédures d'un Cours d'Etude et de Recherche pour l'enseignement de la Double Intégrale dans le calcul de la mesure des Surfaces Quadriques, a été caractérisée par cinq rencontres en face à face, enregistrées filmé, qui a eu lieu le samedi. , avec la participation de douze étudiants inscrits aux cours de licence en mathématiques à l'Université d'État du sud-ouest de Bahia et en ingénierie (civile, électrique et environnementale) à l'Institut d'éducation, de science et de technologie de Bahia et qui avait suivi le cours Calcul différentiel et complet Les résultats obtenus ont montré que les étudiants étaient capables d'appliquer les concepts des objets mathématiques choisis de manière cohérente et autonome lors de la construction et de la résolution de situations-problèmes impliquant la connaissance des cours dont ils sont diplômés et du Calcul Différentiel et Intégral. Les formes présentes dans les œuvres de Gaudí ont permis aux étudiants d'associer des objets mathématiques à un langage esthétique, au pragmatisme et au développement d'un raisonnement abductif qui leur a permis d'aligner leur utilisation dans différentes situations. Les significations, interprétations et praxéologies différaient en termes d'utilisation des connaissances mathématiques dans les deux niveaux et dans les interprétations des tâches proposées, mais elles convergeaient dans les praxéologies mathématiques appliquées.

Mots-clés : Langue. Sémiotique peircienne. Théorie anthropologique de la didactique. Parcours d'étude et de recherche

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: A SEMIOSE E A INFLUÊNCIA DO MEIO EXTERNO	55
FIGURA 2: A AÇÃO DA TRIÁDE SEMIÓTICA NAS PRAXEOLOGIAS - DIDÁTICA E MATEMÁTICA	68
FIGURA 3: SISTEMA SEMIÓTICO, PRAXEOLOGIAS E REGULAÇÃO: CIENTÍFICA E NA PRÁTICA.....	72
FIGURA 4: RELAÇÃO E ASPECTOS ENTRE AS PRAXEOLOGIAS SITUACIONAL, DIDÁTICA E MATEMÁTICA...	75
FIGURA 5: EXEMPLO DO USO DA LINGUAGEM EM CURSO EM UM LIVRO DE CDI.....	100
FIGURA 6: SÍNTESE DOS QUATRO TIPOS DE LINGUAGENS E OS SABERES RELACIONADOS	104
FIGURA 7: MOVIMENTO PROPORCIONAL DAS QUATRO LINGUAGENS	105
FIGURA 8: ECOSISTEMA DAS INTEGRAIS DUPLAS.....	132
FIGURA 9: OBJETOS OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS ASSOCIADOS A INTEGRAL DUPLA	137
FIGURA 10: O MER QUE ORIENTOU O PEP.....	138
FIGURA 11: CAPA DO LIVRO INSTITUTIONUM CALCULIS E INTEGRALIS	139
FIGURA 12: TÍTULOS DOS CAPÍTULOS REFERENTES A INTEGRAL DUPLA DE EULER.....	140
FIGURA 13: O PROBLEMA 6 DO QUINTO CAPÍTULO DO LIVRO DE EULER	140
FIGURA 14: SOLUÇÃO APRESENTADA POR EULER PARA O PROBLEMA 6.....	140
FIGURA 15: O ESTUDO REALIZADO POR EULER SOBRE A INTEGRAL DUPLA	141
FIGURA 16: REGIÃO RETANGULAR R FECHADA	147
FIGURA 17: MAPA CONCEITUAL DOS TRÊS MODELOS.....	151
FIGURA 18: SEÇÕES CÔNICAS	154
FIGURA 19: ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO	155
FIGURA 20: HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA.....	155
FIGURA 21: PARÁBOLA.....	156
FIGURA 22: PARÁBOLA DE REVOLUÇÃO	157
FIGURA 23: PARÁBOLA DE REVOLUÇÃO PARA $z < 0$	157
FIGURA 24: PARABOLOIDE HIPERBÓLICO	158
FIGURA 25: ESPIRAL ARQUIMEDES	159
FIGURA 26: ESPIRAL HIPERBÓLICA.....	159
FIGURA 27 - ESPIRAL LOGARÍTMICA	160
FIGURA 28: ESBOÇO DE UMA CATENÁRIA.....	161
FIGURA 29: SÓLIDO RETANGULAR	161
FIGURA 30: FLUIDO EM UMA SUPERFÍCIE.....	163
FIGURA 31: ESBOÇO DO PONTO DE EQUILÍBRIO ENTRE DUAS MASSAS.....	165
FIGURA 32: REPRESENTAÇÃO DA MASSA M EM UM PLANO CARTESIANO.....	166
FIGURA 33: A LÂMINA L REPRESENTADA NA REGIÃO R.....	167
FIGURA 34: MAPA CONCEITUAL DO ENSINO DA DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DUPLA	169
FIGURA 35: PARTIÇÃO DA CURVA NA REGIÃO DELIMITADA	187
FIGURA 36: REPRESENTAÇÃO DAS SEIS REGIÕES	188
FIGURA 37: REPRESENTAÇÃO DAS RETAS QUE DELIMITAM A REGIÃO R	192
FIGURA 38: REPRESENTAÇÃO DO SÓLIDO NO PLANO XY	194

FIGURA 39: REPRESENTAÇÃO DO SÓLIDO NO PLANO YZX.....	194
FIGURA 40: REPRESENTAÇÃO DO SÓLIDO NO PLANO XZ.....	195
FIGURA 41: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO SÓLIDO.....	195
FIGURA 42: REGIÃO DELIMITADA ENTRE A CIRCUNFERÊNCIA E AS RETAS	200
FIGURA 43: REGIÃO LIMITADA PELA CURVA E A RETA	203
FIGURA 44: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA REGIÃO INTERNA A CIRCUNFERÊNCIA	206
FIGURA 45: REPRESENTAÇÃO DA FIGURA 9.8	219
FIGURA 46: SUPERFÍCIE CILÍNDRICA	220
FIGURA 47: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA SEMI SUPERFÍCIE CÔNICA AO LONGO DO EIXO Oz.....	224
FIGURA 48: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA SUPERFÍCIE.....	225
FIGURA 49: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM POSSÍVEL MODELO MATEMÁTICO PARA A CÚPULA DO PLANALTO	226
FIGURA 50: FOTOGRAFIAS RETIRADAS DA REPORTAGEM SOBRE O AVIÃO SUPERSÔNICO	230
FIGURA 51 - FORMATO DA SUPERFÍCIE CÔNICA	230
FIGURA 52: RESUMO APRESENTADO PELO ESTUDANTE E1.....	250
FIGURA 53: RESUMO APRESENTADO PELO ESTUDANTE E2.....	251
FIGURA 54: MENSAGEM DIVULGADA NO SITE DA UESB.....	253
FIGURA 55: SÍNTESE DOS ENCONTROS DO CURSO	255
FIGURA 56: ENCONTRO COM O CONTADOR DE HISTÓRIAS	256
FIGURA 57: FOTOGRAFIA DA PALESTRA INICIAL	257
FIGURA 58: MOMENTO DE INTEGRAÇÃO	258
FIGURA 59: ESQUEMA CONSTRUÍDO PARA O PRIMEIRO ENCONTRO – 1ª FASE DO PEP	259
FIGURA 60: IMAGEM DO GRUPO	259
FIGURA 61: CONVITE PARA O SEGUNDO ENCONTRO DO CURSO	260
FIGURA 62: IMAGEM DO AUDITÓRIO NO SEGUNDO ENCONTRO DO CURSO	261
FIGURA 63: MESA REDONDA COM PALESTRANTES.....	261
FIGURA 64: ESQUEMA DO DESENVOLVIMENTO DO PEP ATÉ O SEGUNDO ENCONTRO	264
FIGURA 65: TEXTO PUBLICADO NO SITE DA UESB	265
FIGURA 66: PRIMEIRA TAREFA DO PEP	271
FIGURA 67: SÍNTESE DO PEP ATÉ O TERCEIRO ENCONTRO	273
FIGURA 68: SEGUNDA ATIVIDADE DO PEP	276
FIGURA 69: GRUPO DA ENGENHARIA	FIGURA 70: GRUPO DA MATEMÁTICA
FIGURA 71: TERCEIRA TAREFA DO PEP - AVALIAÇÃO DO CURSO	280
FIGURA 72: GALOPANDO NAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	282
FIGURA 73: 4º MOMENTO - SOLTA O ARREIO DA CELA	284
FIGURA 74: REGISTRO DA AVALIAÇÃO DOS ESTUDANTES NO GRUPO DO <i>WhatsApp</i>	325
FIGURA 75: RELATÓRIO PARCIAL DO ESTUDANTE E3 SOBRE SUPERFÍCIE QUÁDRICA.....	327
FIGURA 76: REGISTRO ESCRITO DA PESQUISA REALIZADA PELOS ESTUDANTES E5 E E6.....	330
FIGURA 77: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E2.....	332
FIGURA 78: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E6.....	334

FIGURA 79: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E7.....	336
FIGURA 80: PROTOCOLO DA PESQUISA REALIZADA PELA ESTUDANTE E1	338
FIGURA 81: PROTOCOLO DOS ESTUDANTES E8 E E9	339
FIGURA 82: SÓLIDO CONSTRUÍDO PELOS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA.....	354
FIGURA 83: SÓLIDO CONSTRUÍDO PELOS ESTUDANTES DAS ENGENHARIAS	354
FIGURA 84: SÓLIDO CONSTRUÍDO PELO ESTUDANTE E11	355
FIGURA 85: FOTO DE COMO O ESTUDANTE E8 FEZ O PARALELEPÍPEDO	356
FIGURA 86: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E2 DA ATIVIDADE "VAGA DE EMPREGO"	359
FIGURA 87: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E8 DA ATIVIDADE "VAGA DE EMPREGO"	360
FIGURA 88: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E11 PARA A ATIVIDADE "VAGA DE EMPREGO"	362
FIGURA 89: PROTOCOLO E SOLUÇÃO DO ESTUDANTE E3 PARA A ATIVIDADE "VAGA DE EMPREGO"	364
FIGURA 90: PROTOCOLO DA ESTUDANTE E6 PARA A TAREFA "VAGA DE EMPREGO"	366
FIGURA 91: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E1.....	369
FIGURA 92: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E11	FIGURA 93: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E6 .371
FIGURA 94: PROTOCOLO DO ESTUDANTE E8.....	372
FIGURA 95: PARTE DO RELATÓRIO FINAL DOS ESTUDANTES DAS ENGENHARIAS PARA A ATIVIDADE 2 .	374
FIGURA 96: PARTE DO RELATÓRIO FINAL DOS ESTUDANTES DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	377
FIGURA 97: PARTE DO RELATÓRIO DA SOLUÇÃO DOS ESTUDANTES DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	379
FIGURA 98: PARTE DO RELATÓRIO DOS ESTUDANTES DAS ENGENHARIAS	380

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – NÍVEIS TRÓFICOS DA INTEGRAL DUPLA	84
QUADRO 2 – SÍNTESE DAS PERGUNTAS FORMULADAS PARA O PROBLEMA DIDÁTICO SOB A VERTENTE DA LINGUAGEM	107
QUADRO 3 – PRAXEOLOGIAS USADAS NO PROBLEMA 6.....	141
QUADRO 4- PRAXEOLOGIA DA FUNÇÃO REPRESENTADA POR PONTOS DE UMA SUPERFÍCIE	144
QUADRO 5 – PRAXEOLOGIA USADAS NO MODELO DE OSTROGRADSKY	147
QUADRO 6 – EMENTA DO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA	181
QUADRO 7 – EMENTA DE CDI-III NO CURSO DE ENGENHARIA CÍCIL.....	182
QUADRO 8 – EMENTA DE CDI-III DO CURSO DE ENGENHARIA AMBIENTAL	182
QUADRO 9 – EMENTA DE ÁLGEBRA VETORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA	183
QUADRO 10 – EMENTA DE CÁLCULO IV DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	184
QUADRO 11 – TAREFAS, SUBTAREFAS E TÉCNICAS MOBILIZADAS NA TAREFA 22.....	196
QUADRO 12 – TAREFAS E TÉCNICAS USADAS EM T_4	202
QUADRO 13 – TAREFAS, SUBTAREFAS E TÉCNICAS DA ATIFICADE 19	204
QUADRO 14 – TAREFAS, SUBTAREFAS E TÉCNICAS DA TAREFA 4.....	207
QUADRO 15 – QUESTÃO DA SEGUNDA TAREFA DO PEP	278
QUADRO 16 – MATRIZ DA LINGUAGEM DO PRIMEIRO ENCONTRO	306
QUADRO 17 – MATRIZ DIVERSIDADE DO PRIMEIRO ENCONTRO	307
QUADRO 18 – MATRIZ DA LINGUAGEM DO SEGUNDO ENCONTRO	323
QUADRO 19 – MATRIZ DIVERSIDADE DO SEGUNDO ENCONTRO	324
QUADRO 20 – MATRIZ DA LINGUAGEM DO TERCEIRO ENCONTRO	348
QUADRO 21 – MATRIZ DA DIVERSIDADE DO TERCEIRO ENCONTRO	349
QUADRO 22 – MATRIZ DA LINGUAGEM DO QUARTO ENCONTRO	367
QUADRO 23 – MATRIZ DA DIVERSIDADE DO QUARTO ENCONTRO	367
QUADRO 24 – MATRIZ DA LINGUAGEM DO QUINTO ENCONTRO	385
QUADRO 25 – MATRIZ DA DIVERSIDADE DO QUINTO ENCONTRO	386

LISTA DE ABREVIATURAS

AVGA -	Álgebra Vetorial e Geometria Analítica
CDC -	Cálculo Diferencial e Integral
EDRI -	Espanto, Dúvida, Rigor e Inquietação
GACV -	Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
IEBA -	Instituição da Educação Básica
IFBA -	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia
IM -	Integrais Múltiplas
MA -	Modelo Alternativo
MD -	Modelo Dominante
MER -	Modelo Epistemológico de Referência
OML -	Organizações Matemáticas Locais
OMP -	Organizações Matemáticas Pontuais
PEP -	Percurso de Estudo e Pesquisa
PPI -	Projeto Pedagógico Institucional
PUC-SP -	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
TAD -	Teoria Antropológica do Didático
TRRS -	Teoria dos Registros de Representação Semiótica

LISTA DE SÍMBOLOS

T - Tarefas

τ - Técnicas

θ - Tecnologia

Θ - Teoria

$\iint$ - Integral Dupla

SUMÁRIO

1 CASA VICENS: CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	21
2 JARDINS ARTIGAS: E AS PONTES ENTRE OS ATORES TEÓRICOS	43
2.1 SITUANDO OS AUTORES TEÓRICOS E AS TEORIAS NESTE ESTUDO:.....	43
2.2 O CENÁRIO DA SEMIÓTICA E DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO	51
2.2.1 <i>O suporte científico do cenário</i>	51
2.2.2 <i>A imersão da Semiótica na Teoria Antropológica do Didático</i>	58
2.3 DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO	76
2.3.1 <i>Dimensão epistemológica</i>	77
2.3.2 <i>A dimensão ecológica</i>	82
2.3.3 <i>A dimensão econômica</i>	85
2.3.4 <i>Dimensão da Linguagem</i>	87
2.3.5 <i>A análise das dimensões do problema didático envolvendo a Integral Dupla</i>	108
3 A SAGRADA FAMÍLIA: UM MODELO DE REFERÊNCIA PARA AS FORMAS TRIDIMENSIONAIS	116
3.1 OBJETO.....	116
3.1.1 <i>Definição de objeto para a Semiótica peirceana e para a TAD</i>	116
3.1.2 <i>O estudo das Superfícies Quádricas e da Integral Dupla</i>	118
3.1.2.1 O ESPAÇO TRIDIMENSIONAL	119
3.1.2.2 A HISTÓRIA DO SURGIMENTO DAS CÔNICAS	120
3.1.2.3 AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS.....	122
3.1.2.4 INTEGRAL DUPLA.....	123
3.2 MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DA INTEGRAL DUPLA.....	128
3.2.1 <i>Um Modelo Epistemológico de Referência para a Integral Dupla</i>	128
3.2.2 <i>Modelo epistemológico de Euler</i>	138
3.2.3 <i>Modelo epistemológico de Ostrogradsky</i>	143
3.2.4 <i>Modelo epistemológico do Livro de Leithold</i>	147
3.2.3.1 SÍNTESE DOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE EULER, OSTROGRADSKY E LEITHOLD	149
3.2.5 <i>Modelo produzido pela investigadora para o PEP</i>	152
3.2.6 <i>Inferências sobre os cinco modelos epistemológicos</i>	170
3.2.6.1 O TIPO DE LINGUAGEM QUE EFLUI DOS MODELOS	170
3.2.6.2 O TIPO DE ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA QUE É IDENTIFICADA NA APRESENTAÇÃO DO MODELO	171
3.2.6.3 CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES DOS MODELOS APRESENTADOS.....	173
3.3 ANÁLISE INSTITUCIONAL	175
3.3.1 <i>As Instituições</i>	175

3.3.2 As instituições universitárias desta pesquisa.....	178
3.3.2.1 O IFBA	180
3.3.2.2 A UESB	183
3.5 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DO CAPÍTULO 18 DE UM LIVRO DE CDI.....	184
3.5.1 Análise da seção 18.2 do livro de Leithold.....	191
3.5.2 Análise da seção 18.3 do livro de Leithold.....	198
3.5.3 Análise da seção 18.4	205
3.5.4 Análise da seção 18.5	208
3.6 PRAXEOLOGIA DO CAPÍTULO 9 DE UM LIVRO ADOTADO EM AVGA OU GACV	216
4 CASA BATLLÓ: UMA OBRA METODOLÓGICA.....	232
4.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA	232
4.2 ABORDAGEM METODOLÓGICA.....	232
4.3 O DISPOSITIVO DIDÁTICO DO PEP.....	233
4.4 SUGESTÕES DE DIRETRIZES PARA ELABORAÇÃO DA QUESTÃO GERATRIZ DO PEP:	237
4.5 O MODELO DE INSPIRAÇÃO PARA A CONSTRUÇÃO DO PEP.....	243
4.5 A ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO PEP	249
4.5.1 Primeiros encaminhamentos da Organização Didática.....	249
4.5.2 A segunda fase da O.D.	251
4.5.3 Terceira fase da OD	255
4.5.4.1 PRIMEIRO ENCONTRO - “CÔNICAS SERTANEJA”:	255
4.5.4.2 SEGUNDO ENCONTRO – PROSEANDO COM OS “HOME” DA CIDADE E DO CAMPO	260
4.5.4.3 TERCEIRO ENCONTRO – TRÁS “VENDAVAL”, O BAIXEIRO E A MANTA	265
4.5.4.4 QUARTO ENCONTRO – ARRUMA A CELA, O CABRESCO QUE EU VOU GALOPAR PARA DESBRAVAR O MUNDÃO DE DEUS.....	274
4.5.4.5 QUINTO ENCONTRO – SOLTA O ARREIO DA CELA	275
5 CASA MILÁ: UMA INÉDITA ANÁLISE DE UM PEP	288
5.1 DAS DIALÉTICAS	288
5.1.1 Dialética da pessoa e da situação.....	291
5.2 MATRIZES DE ANÁLISE	297
5.2.1 Matrizes MDL e MD.....	298
5.2.1.1 PRIMEIRO ENCONTRO - “CÔNICAS SERTANEJA”	299
5.2.1.2 ANÁLISE DOS DADOS DA MATRIZ MDL.....	300
5.2.2 Segundo encontro - “Proseando com os “home” da cidade e do campo”	308
5.2.2.1 MESA TEMÁTICA	308
5.2.2.2 SEGUNDO MOMENTO	316
5.2.3 Terceiro Encontro – “Traz “Vendaval”, o baixeiro e a manta que vamos galopar”	326

5.2.4 Quarto encontro – Arruma a cela, o cabresco que eu vou galopar para desbravar o mundo de Deus.....	350
5.2.5 Quinto encontro – Solta o arreio da cela	368
5.2.5.1 – RELATÓRIOS ORAIS E ESCRITOS PARA AS PERGUNTAS Q ₅ , Q ₆ E Q ₇	368
5.2.5.2 SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2.....	373
5.2.5.3 RESPOSTA A QUESTÃO Q ₀	381
5.2.5.4 A AVALIAÇÃO DO PEP	386
5.2.5.3 SÍNTESE DOS ENCONTROS	392
6 PUERTA DE LOS PAJAROS: ADAPTAÇÕES E TRANSGRESSÃO PARA OUTROS VOOS.....	394
PARQUE GÜELL: AS REFERÊNCIAS NOS VÁRIOS CAMINHOS	405
APÊNDICE A – FOLDER DA DIVULGAÇÃO DO CURSO.....	416
APÊNDICE B – INFORMAÇÕES DO 1º ENCONTRO ENVIADO POR E-MAIL	418
APÊNDICE C – MATERIAL DO CONSELHO DE ÉTICA	421
APÊNDICE D – SLIDES DA PALESTRA DA PROFESSORA/PESQUISADORA	423
APÊNDICE E – ORIENTAÇÕES PARA OS PALESTRANTES DO 2º ENCONTRO	425
APÊNDICE F – ORIENTAÇÕES PARA OS ESTUDANTES DO 2º ENCONTRO	427
APÊNDICE G – PROGRAMAÇÃO DO 3º ENCONTRO.....	429
APÊNDICE H – PRIMEIRA TAREFA DO PEP	430
APÊNDICE I – PROGRAMAÇÃO DO IV E DO V ENCONTROS	431
APÊNDICE J – SEGUNDA TAREFA DO PEP	432
APÊNDICE L: AVALIAÇÃO DO CURSO	433
ANEXO A – TEOREMA DE FUBINI.....	435
ANEXO B – LIVRO DE PASCAL	437

1 CASA VICENS: CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em 1908, Felix Klein (1849-1925), no Congresso Internacional de Matemáticos, defendeu a ideia de uma reforma no ensino da Matemática, tendo como objetivo diminuir o descompasso entre o estudo da Matemática científica e o seu ensino desenvolvido nas Escolas Básicas daquele período, que se caracterizou, mais tarde, como a primeira fase do Movimento da Matemática Moderna. Aquele matemático propôs que fossem construídos espaços de discussão entre pesquisadores com o intuito de socializar e de fomentar outros métodos para o ensino da disciplina, fortalecendo a perspectiva de estabelecer a Educação Matemática como uma subárea da Matemática e da Educação.

Nos dias atuais podemos verificar que as pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática perpassam por preocupações e estudos semelhantes despertados por Felix Klein, no que diz respeito a melhoria no ensino e na aprendizagem da Matemática, embora ainda não tenha adquirido, uma posição de subárea. Nesse sentido, a escolha de uma metodologia de ensino que possibilite ao maior número de estudantes aprender um determinado objeto matemático tem sido um dos desafios enfrentados na Educação Matemática.

Esse desafio fez com que estudiosos ampliassem as abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em Educação Matemática e aplicassem critérios científicos variados para atender a gama complexa de fenômenos que se apresentam em uma sala de aula. Inferimos que esses dois fatores têm provocado algumas dificuldades para a constituição da Educação Matemática como um campo de conhecimento e alguns estudiosos, como Artigue (2011) defende a “capacidade que a Teoria Antropológica do Didático possui de interagir com quadros e estruturas teóricas que, embora diferentes, admitem o que temos chamado de “sensibilidade chave”. Tal diversidade possibilita que a Matemática seja vista por diversos ângulos: cultural, social, político, econômico, estatístico, entre outros. Entretanto, esbarramos nas peculiaridades inerentes a estrutura própria dos objetos matemáticos, que tem especificidades próprias para o seu ensino e a sua aprendizagem.

Não podemos esquecer que o norte das pesquisas em Educação Matemática é o ensino e a aprendizagem de objetos matemáticos e, são eles que potencializam as representações para que o estudante possa conhecê-los. Como são objetos criados pelo Homem, idealizado por uma mente e não acessível fisicamente se faz necessário o uso de representações – algébricas, gráficas, pictóricas, simbólicas – para serem interpretados, divulgados, externados, aprendidos.

Há uma relação entre três coadjuvantes: signo, objeto e interpretante, uma tríade que Charles Sanders Peirce tomou como base para a construção da Semiótica. O signo é a mera possibilidade de ser algo, quando o torna consciente, real, passa a ser um objeto a procura de alguém para ser interpretado.

Tomemos como exemplo a representação gráfica de uma determinada curva. Ela pode ser uma possibilidade de representar uma função polinomial do segundo grau, portanto é um signo, mas assim será interpretado se os signos matemáticos que a constitui trazem indícios que a associam à função polinomial do segundo grau, tais como: o formato de uma curva parabólica, o vértice, as interseções com os eixos cartesianos, entre outras. Percebe-se que os signos matemáticos são parciais, eles estão no lugar de algo que não é ele mesmo, mas o representa, podem ser exibidos por meio dos objetos imediatos ou ostensivos que permitem se tornarem visíveis.

No exemplo dado anteriormente, a constituição de um objeto matemático mobiliza vários signos que participam de interpretações diversas, formando uma rede de significados. Essas relações semióticas, Peirce denominou-as de semiose, “uma ação ou influência, que consiste em, ou envolve, a cooperação de três sujeitos, o signo, o objeto e o interpretante, influência tri-relativa que não pode de forma alguma ser resolvida em ações entre pares” (PEIRCE, 1983, P.134) e que ocorre de forma infinita.

A semiose na matemática pode ser exemplificada no desenvolvimento de uma tarefa para sua possível solução, cada procedimento técnico que o estudante escolhe remete a outro, que necessariamente terá que finalizar. Entretanto, a partir dos resultados desta tarefa, os estudantes podem selecionar estratégias equivocadas que conduzirão a um caminho mais trabalhoso, com várias possibilidades de interpretações, que necessitarão de um processo de relações com outros signos, outros objetos iniciando outra ação.

Para a aquisição de um conhecimento são estabelecidas relações cognitivas que utilizam conexões com conhecimentos prévios adquiridos no processo formativo do indivíduo e na mobilização de signos matemáticos que favorecem os processos de semiose.

Estudos como o de Radford (2013), Presmeg (2006), D’Ámore (2015), Duval (1995) têm feito construções significativas para a compreensão dos pressupostos teóricos da Semiótica no ensino e na aprendizagem de Matemática. O significado da semiose para a Educação Matemática reside na utilização de signos nos processos de significação, interpretação e representação de objetos matemáticos.

Pertencente a um mundo simbólico, os objetos matemáticos exercem uma forte influência em outras áreas do conhecimento, pois alguns aspectos como, a abstração e o rigor, inerentes aos entes matemáticos é que tornam a Matemática uma ciência. Granger (2013, p.257) afirma que “o rigor, como explicitação dos pressupostos na construção do objeto e no encadeamento das teses, constitui-se aparentemente no traço mais significativo da cientificidade matemática”.

Entretanto, as discussões sobre rigor e exatidão atribuídos as ciências exatas hoje são questionadas, pois as verdades têm mudado com o tempo, serviram em uma determinada época para atender um objetivo específico e podem perder seu significado ao longo da história. Nesse sentido, Roque (2012) afirma que “verdades existem, só que elas mudam com o tempo. Exatidão, assim como precisão, rigor ou objetividade, são noções cujos significados mudaram ao longo da história”.

A crença do *status* superior atribuído à ciência exata em relação às ciências humanas, acirra “a dicotomia entre a ciência exata e humanas, esvazia o debate sobre a construção do saber e ofusca a necessidade de integrá-las” (ROQUE, 2018). Além desses aspectos coloca-se em questionamento a objetividade dos critérios científicos e a relatividade da verdade. Nesse sentido, Popper (1978) ao defender a objetividade lógica das ciências sociais afirma que o conceito de verdade é relativo, assim como o poder da explicação. Eles servem para o desenvolvimento de uma abordagem crítica e criativa no que tange a tentativa de eliminar as soluções, o que confere a relevância, o interesse e os significados do problema levantado e a clareza para defendê-los em uma determinada época, porém são aplicados sem a presunção de ser imutável.

O posicionamento do autor se aproxima da forma como almejamos o ensino de matemática: centrado em um problema que proporcione novas respostas e novos questionamentos ao mundo, capaz de proporcionar, aos estudantes: a elaboração de conjecturas, julgamentos de hipóteses, defesa de argumentos usando uma linguagem clara e objetiva. Como veremos, no capítulo quatro dessa tese, a metodologia de ensino desenvolvida pela Teoria Antropológica do Didático (TAD): o *Percurso de Estudos e Pesquisa – PEP*, se adapta à visão da verdade relativa, pois as respostas são sempre provisórias quando o problema é aberto, ou seja, podem possuir soluções amplas ou diferentes que precisarão ser experimentadas e validadas, ou que demandarão diálogos com outras áreas do conhecimento.

Tal visão está de acordo com as modificações sofridas ao longo do tempo pela sociedade e pelo mercado de trabalho que exige um conhecimento mais global, integrado, cada vez mais distante da compartimentação em áreas. Nesse sentido, embora a Educação brasileira tenha fomentado discussões e despertado para essa necessidade por intermédio das Leis, dos Parâmetros e das Bases Curriculares Nacionais criadas, na prática elas não avançaram. As restrições do sistema educacional brasileiro oriundas dos currículos sem flexibilidade e de uma estrutura centrada no tempo cronometrado de 50 a 100 minutos de aula, na carga horária, nos conteúdos a cumprir e nas avaliações externas e internas classificatórias acabam por estabelecer limites impactantes para o desenvolvimento do PEP que requer uma organização didática e matemática mais ampla do que as ementas estabelecidas para cada componente curricular.

Diferentes realidades são encontradas no âmbito escolar para os investigadores ou professores universitários há uma liberdade para infringir os currículos, criando espaços para a pesquisa: como cursos de extensão, oficinas, *workshops*, seminários que podem analisar, com certas restrições, os resultados obtidos empiricamente, apontar a emergência de transformações didáticas e estender o campo científico. São algumas das maneiras, entre outras, do professor se apropriar de conhecimentos fundamentais para o exercício de sua prática e adquirir o domínio epistemológico e didático dos temas e objetos de ensino.

Entretanto, para os professores do Ensino Básico, que estão acaimados em uma *noosfera*¹ que preconiza êxitos em avaliações seletivas, currículos obsoletos que não atendem aos anseios da comunidade, no qual os estudantes estão inseridos, não lhes restam muitas opções, restritas à sua percepção do que ensinar e as metodologias que utiliza. Portanto, é necessário que a noosfera legitime a interface entre o sistema de ensino *stricto sensu* e o entorno social. E a integração entre as ciências e a sociedade ocorre, muitas vezes, em situações isoladas, restritas a projetos escolares, que se concretizam pelo esforço e a iniciativa daqueles que buscam nas pesquisas universitárias um caminho. Dedicam-se, nos horários livres, a um planejamento que atenda os anseios, as determinações dos documentos oficiais, elaborando atividades que proporcionem relações com outros conhecimentos, explorem a criatividade e desenvolvam uma visão crítica da realidade que os cercam.

¹ ¹ Chevallard (1991) define noosfera, como a esfera do pensamento. A noosfera, portanto, inclui todos os professores, sindicalistas, pedagogos, líderes, até mesmo didáticos - que dedicam um pouco de seu tempo, ou que às vezes passam a maior parte do tempo, para refletir sobre questões de ensino.

São ações ínfimas para o número de escolas do território nacional que, quando divulgadas, podem fomentar o interesse de outras, recriando, impulsionando e exigindo: maior flexibilidade para os currículos, uma formação inicial que disponibilize maior quantidade de disciplinas de cunho didático e de diálogos com outras áreas.

Outro ponto a considerar é a exigência da noosfera por um ensino envolvido com articulações de conhecimentos interdisciplinares, um novo atributo a ser incluído à prática do professor, que não teve um processo formativo inicial com tal vertente. Essa fragilidade nos cursos de licenciaturas não os capacita para esse objetivo, somados a isso, a carga horária excessiva de trabalho, as mazelas da sociedade que refletem na sala de aula a desvalorização da profissão e os currículos obsoletos, entre outros aspectos, não favorecem uma mudança de atitude.

Entretanto, a ação do professor depende do estudo do objeto de ensino, da forma como ele percebe sua importância para outros contextos; do compromisso que assume com os estudantes no ato de ensinar; das pesquisas e leituras extras que necessitam ser feitas. É com esse estudo que ele percebe como os diferentes campos de conhecimento podem ser interligados e planejar suas aulas. Essa organização didática e matemática contribui para as práticas inovadoras dos professores, pois a partir delas é possível detectar a complexidade do sistema didático e verificar as condições e restrições do objeto matemático em estudo e da sua prática.

A articulação das ações propostas para a aula poderia ser vista como um contínuo estudo e uma pesquisa, que perpassa por uma escolha de uma metodologia que atenda à turma específica daquele ano ou a realidade escolar; delimitar o objetivo de se aprender aquele conteúdo; elaborar material que não esteja restrito a visão do livro didático; procurar atividades experimentadas (ou não) que facilitaram (ou facilitariam) a aprendizagem dos estudantes; situar o objeto de ensino em uma visão mais ampla - epistemológica, ecológica, econômica e semiótica.

Há, portanto, uma demanda por um ensino de objetos matemáticos aplicados a situações que podem envolver o conhecimento das razões para o qual eles foram criados e a qual necessidade humana ele contemplou ou contribuiu para o seu alcance. O discurso de que a matemática é construída a partir de hipóteses deve ser enaltecido no sentido de fomentar outras ainda não comprovadas, mas, também, deve primar pela ressignificação do objeto de ensino dentro dos objetivos e necessidades de cada curso.

Os cursos de formação de professores de matemática priorizam o conhecimento das estruturas e das técnicas relacionadas ao objeto matemático a ser ensinado, isso acarreta um desconhecimento das razões pelo qual eles foram desenvolvidos e a sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Não os conhecendo, ficam submissos ao que aprendeu nos livros e não buscam por meio da pesquisa outras formas de ensiná-lo. Por esse motivo alguns professores que lecionam em cursos para não matemáticos reproduzem as metodologias de ensino – expositivas, conteudistas – que aprenderam na licenciatura.

A falta de conhecimentos sobre as outras áreas, causa insegurança aos professores para enfrentar o desafio de ampliar a percepção do objeto matemático em vertentes não matemáticas e justificativas sobre as metodologias empregadas mantém o discurso da cientificidade, do rigor, da abstração e perde-se a beleza da criação, da conjectura, do erro e da aprendizagem de novos caminhos.

Se o objeto de ensino é a disciplina Matemática, o professor precisa conhecer o conteúdo a ser ensinado, por que razão ele é ensinado, como ele vive nas diversas instituições em que se apresenta (documentos oficiais, livro didático, outras áreas), ou seja, consiste em realizar uma análise das dimensões epistemológicas, ecológicas e econômicas do problema didático (GASCÓN, 2011), que o situaria em uma etapa pré-pragmática (KHUN, 1962). Embora, ele não tenha muita interferência nas escolhas efetuadas pela noosfera, o mesmo não acontece quanto a escolha da sua organização didática. As ações e a linguagem em torno do objeto matemático são específicas e selecionadas por ele, o que proporciona maior flexibilidade para o ensino do objeto matemático em aplicações de situações-problemas envolvendo contextos não-matemáticos.

Nessa perspectiva, os objetos matemáticos podem assumir significados diferentes em determinadas instituições, fruto da origem epistemológica ou pragmática. O primeiro, o objeto epistemológico, está de acordo com a percepção de uma matemática científica, em que os significados estão envoltos por uma linguagem histórica, simbólica, formal e rigorosa. E/ou, como objetos pragmáticos, que nem sempre estão legitimados, mas que são oriundos das relações estabelecidas com diferentes conhecimentos, com as disciplinas, com a sociedade e produzem sentidos distintos daqueles que os construíram. Estes, são empregados pelos engenheiros, arquitetos, físicos que fazem uma releitura do objeto epistemológico historicamente construído e o utilizam com uma linguagem específica para o exercício profissional.

As relações que são criadas acerca dos objetos matemáticos com as diferentes instituições, promovem ações que possibilitam os significados, as interpretações e as representações deles. Pecharromán (2014) afirma que “um objeto matemático é, ou representa uma qualidade ou ação que tem a função de organizar ou interpretar um contexto”. Sob essa vertente, o significado atribuído ao objeto matemático Integral Dupla, pode se diferenciar quanto ao contexto de uso: para o matemático puro o seu significado concentra-se em torno de um conjunto de teoremas, demonstrações, relações com outros objetos da matemática. Tal percepção não ocorre da mesma forma para o engenheiro civil que utiliza conceitos daquele objeto, no cálculo dos momentos de inércia com a finalidade de estabelecer o equilíbrio de forças em uma viga, por exemplo.

Assim, “cada significado é o resultado de hábitos interpretativos, socialmente compartilhados, (...), e que resultam da relação estabelecida por um objeto com as necessidades na vida cotidiana de cada indivíduo” (JURADO, 2015), ou no coletivo deles. Nesse sentido, o papel desempenhado pelos interpretantes, na Semiótica peirceana, contribuem para compreender a conversão dos signos e objetos matemáticos em ações, no processo das infinitas semioses, pois permitem gerar significados diversificados que circunscrevem os contextos, as circunstâncias.

Este distanciamento dos significados atribuídos a Integral Dupla na perspectiva do saber sábio e do saber pragmático reside em uma das problemáticas que são abordadas nesta pesquisa. Nesta vertente, os estudos de García, Azcárate e Moreno (2006); Romo-Válquez (2017); Romo-Válquez e Sànces Santiago (2012); Covian e Cantoral (2013); Henriques e Serodônio (2013); Farraz (2013); Carius e Ferreira (2014); Silva (2015); Trevisan (2015); Silva e Moretti (2018 a, b); Sánchez, Isabel e Domecq (2018) descrevem em diferentes perspectivas teóricas e metodológicas o uso de objetos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral para cursos de nível superior: as engenharias, as licenciaturas em matemática, a física, entre outras.

Na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999, p.4) tudo é objeto e estudá-lo de forma ampla possibilita maior segurança para um ensino que potencializa a aprendizagem. Nesse sentido, a TAD proporciona ao professor e/ou pesquisador estudar o objeto matemático em diversas instituições em que ele se apresenta, sua razão de existir, de que maneira ele é ensinado, entre outras dimensões.

Para isso, a TAD dispõe de um Percurso de Estudo e Pesquisa - PEP, uma metodologia de ensino, que consiste em disponibilizar uma questão aberta (Q_0). Na busca por uma melhor

resposta para Q_0 os estudantes criam hipóteses e questionamentos intermediários que necessitam de comprovação e de articulação de alguns conhecimentos para a elaboração de uma resposta a questão inicialmente proposta. Por isso, consiste em “gerar e fundamentar uma maneira particular de organizar o processo de estudo das matemáticas” (BOSCH; GASCÓN, 2010, p.63, **tradução nossa**)² e que poderão importar conceitos de outras áreas de conhecimentos. Esta abordagem parte do princípio de que o professor/investigador deve propor um modelo epistemológico que se contraponha ao modelo dominante nas instituições, adequando-o em cada situação. Os objetos matemáticos selecionados serão mobilizados e articulados na organização didática como uma referência, um guia para o alcance dos objetivos propostos, por esse motivo é chamado de Modelo Epistemológico de Referência (MER), passível de ser modificado a qualquer tempo.es, una).

A construção do MER proporciona analisar novos fenômenos que emergem da necessidade de romper com o modelo dominante dentro das instituições incorporando atividades, suportes técnicos, materiais que contribuirão para a “emancipação da Didática da Matemática” (GASCÓN, 2014).

É nesse contexto descrito que a Integral Dupla foi escolhida como o objeto matemático de pesquisa e criamos o nosso modelo epistemológico alternativo (MEA) didático, pautado no MER construído e analisando elementos relevantes do modelo epistemológico dominante (MED) em estudo nas diferentes instituições em que ele vive. Para isso, foi necessário verificar os documentos oficiais, as ementas dos cursos, o emprego das praxeologias matemáticas nos livros adotados e as condições e restrições para o seu ensino. Após esse percurso, aplicamos o MA em uma sala de aula que consistiu no *Percurso de Estudo e Pesquisa* -PEP.

Participaram do desenvolvimento do PEP doze estudantes matriculados nas graduações em: Licenciatura em Matemática e Engenharias da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia, respectivamente, e que haviam cursado a disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, cuja ementa contém o objeto matemático: Integral Dupla. Foi organizado um curso intitulado “(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas”, realizado em cinco encontros, aos sábados, no período de 30 de março

² Original: En dichos trabajos hemos mostrado que cada uno de dichos tipos ideales de modelos didácticos presupone implícitamente un modelo del estudio (y, en particular, de la enseñanza y el aprendizaje institucionalizado) de las matemáticas y, por lo tanto, unos criterios para generar y fundamentar una manera particular de organizar el proceso de estudio de las matemáticas (esto es, una organización didáctica). (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 63)

a 27 de abril de 2019, com duração entre 4 e 8 horas que foram áudio-gravados e filmados. Os resultados obtidos no PEP foram analisados segundo a dimensão da linguagem e as dualidades: pessoa e situação e, pessoa e significado, constructos elaborados do diálogo estabelecido entre a TAD e a Semiótica. Ao articulá-los com as praxeologias matemáticas e didáticas nos processos de regulação do nível científico para a prática em sala de aula é que se deu uma parte da transposição didática daquele objeto.

Para ambos os cursos das graduações dos quais os estudantes são oriundos a razão de se estudar a Integral Dupla está no cálculo da medida das áreas e dos volumes de superfícies com duas variáveis, entretanto, no exercício da profissão a aplicabilidade deste conceito se diferencia. Enquanto os Licenciandos em Matemática aprendem as Integrais Duplas para compreenderem o cálculo do volume dos sólidos da Geometria Plana, tais como: cilindro, esfera, cone, prismas, entre outros, os Engenheiros aprendem para a aplicação em situações profissionais, como o cálculo da medida do volume da vazão de uma barragem.

A proposta do PEP, fundamentada por uma questão aberta, proporcionou a integração entre os objetivos do Projeto Pedagógico Institucional (PPI) da licenciatura em Matemática e das Engenharias, tendo em vista, que os objetos matemáticos e não matemáticos foram articulados no intuito de construir uma resposta para a pergunta que delineia o PEP. No entanto, a escolha dos estudantes das graduações citadas e o critério de seleção a que foram submetidos se fizeram necessários para que diálogos fossem construídos expondo os diferentes objetos que foram detectados no MER, elaborado anteriormente.

Para o desenvolvimento da tarefa seguimos a metodologia de ensino do PEP, em que seguem alguns critérios, entre eles: 1. a tarefa precisa ser ampla, no sentido de proporcionar articulações com outros objetos, matemáticos ou não. 2. A tarefa precisa apresentar no desenvolvimento de sua solução conhecimentos que necessitam ser pesquisados, ampliando a rede de conhecimentos; 3. O processo de solução é construído tomando como base conjecturas, hipóteses passíveis de serem, ou não, refutáveis. 4. Existe uma relação entre o objeto matemático e a situação proposta que perfaz caminhos diversos e autônomos para a sua solução. 5. Há a necessidade de socializar os conhecimentos pesquisados em uma forma dialógica, possibilitando que os estudantes evoquem diversos olhares para o objeto matemático.

A aplicação do PEP consiste em uma ação metodológica desafiadora - para os sujeitos do sistema didático – pois desestabiliza o sistema de ensino vigente, aquele em que o docente expõe definições, teoremas, e faz alguns exercícios que servem de modelo ou exemplo para

outros. O professor ao propor uma questão aberta, advinda do mundo, ou de outro campo do conhecimento, modifica as relações e os critérios descritos no parágrafo anterior, mas também exige das instituições adaptações curriculares e uma ruptura da cultura imposta pelas instituições no que se refere a abordagem do CDI em sala de aula.

Estudos como o de Dall’Anese e Trentin (2018); Henriques; Naganine E Naganine (2012); Barufi (1999); Camarena (2013); Domec; Berenguer E Sáncher (2018) apontam para a existência de dificuldades relacionadas ao ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos que fazem parte da componente CDI. Inferimos que a ênfase dada ao objeto epistemológico, às metodologias aplicadas e à cultura de ensino institucionalizada³ no Ensino Superior ampliam a carência de discussões aprofundadas sobre a problemática.

No entanto, não deixamos de pontuar as promissoras perspectivas de ensino e aprendizagem que estão sendo delineadas nas Licenciaturas em Matemática, entre elas: a construção de uma rede de significados entre a matemática científica (pura) e a aplicada proporcionando um diálogo com outras áreas de conhecimento, o que potencializa sentido no ensino e na aprendizagem dos objetos matemáticos para os futuros profissionais. Conjecturamos que o aumento de Educadores Matemáticos nas universidades, nas últimas décadas, tem favorecido a publicação dos resultados das pesquisas realizadas nacionalmente e internacionalmente e transformado a percepção dos estudantes acerca da Matemática.

No âmbito das pesquisas no Ensino Superior, no que se refere à matemática, existem algumas considerações a serem avaliadas, entre elas: a falta de teorias e metodologias específicas para esse nível de ensino (CAMARENA, 2013) e uma abordagem excessiva de pesquisas sobre alguns objetos matemáticos em detrimento de outros (MARTÍNEZ-PLANELL; TRIGUEROS, 2017). Fato que pode ser constatado nos principais sites de busca e banco de teses nacionais e internacionais, em que, Limites, Derivadas e Integrais (principalmente as Definidas) aparecem em maior quantidade de artigos, dissertações e teses contrapondo-se a carência de pesquisas relacionadas a outros objetos matemáticos do CDI, como: Séries, Funções de Várias Variáveis, Funções Vetoriais, Integrais Múltiplas, Integrais Curvilíneas, Superfícies Quádricas, entre outros.

³ Referimos as concepções que circulam nas universidades de que: “professor bom é aquele que explica tudo no quadro, faz exercício, corrige e avalia”; “professor não pode errar”; “professor bom é aquele que reprova”; “professor bom é aquele que cumpre toda a ementa”; “professor bom é aquele que suja a mão de giz”. Ou, ainda, a distinção que ocorre entre os matemáticos puros e os educadores matemáticos, fomentando a cultura de que os últimos não sabem matemática.

Inferimos que a seleção dos investigadores por tais objetos justifica-se pelo cumprimento da ementa do CDI-I⁴, componente curricular em que ocorrem índices elevados de reprovação e evasão nos cursos de graduação em que ela se institucionaliza (BARUFI,1999). Tal seleção diminui o número de estudantes matriculados nos CDI – II, III e IV, no entanto, as dificuldades apresentadas no CDI-I podem ser ampliadas com as questões envolvendo figuras no espaço, funções com várias variáveis e vetoriais, o que requer um olhar atento dos educadores matemáticos para o ensino e a aprendizagem desses outros objetos.

Diante da lacuna percebida, empreendemos uma busca em sites e bancos de teses das principais universidades nacionais e internacionais, bem como, publicações de artigos em revistas e anais de eventos da área, por pesquisas acerca do uso das Integrais Duplas no cálculo da medida das Superfícies Quádricas. Constatamos a confirmação da hipótese do número limitado de pesquisas sobre os objetos matemáticos, na vertente da Educação Matemática, a saber: duas dissertações, duas teses e onze artigos sobre a Integral Dupla; dois artigos sobre as Superfícies Quádricas e nenhum estudo sobre o cálculo da Integral Dupla em Superfícies Quádricas - objetos matemáticos pleiteados no nosso estudo. No que tange a abordagem da análise desses objetos matemáticos na perspectiva de uma dimensão semiótica peirceana, embasados no PEP, advindo das construções metodológicas desenvolvidas na Teoria Antropológica do Didático, não foram encontradas pesquisas correlatas.

A pesquisa de doutoramento realizada por Henriques (2006) apresenta o uso do *software MAPLE* para o ensino e a aprendizagem das Integrais Múltiplas. Ao explorar o uso de diferentes registros e a conversão de um registro semiótico para outro, o professor/pesquisador estimulou os estudantes para a produção de significado e sentido dessas simbologias, exercendo uma dialética de controle e pré-estruturação de suas ações. Destaca, ainda, a dificuldade de se construir representações gráficas de figuras tridimensionais no ambiente lápis-papel, justificando o uso do *software* para tal empreendedorismo.

Farias; Funato e Cattai (2016) apresenta a análise de dois elementos institucionais: o livro didático e a tecnologia (*software* Maple), que colabora com o *software* CubeX 3D Systems e a impressora CubeX Duo, disponíveis no Laboratório de Visualização Matemática -L@VIM da Universidade Estadual de Santa Cruz, no estado da Bahia, responsáveis pela produção de

⁴ Na UESB o ensino dos objetos matemáticos que compõem o CDI foi dividido em quatro semestres e especificado como Cálculo Diferencial e Integral (CDC) I, II, III e IV. Para o IFBA só existem os três primeiros. Manteremos a nomenclatura daquelas instituições de ensino.

modelos matemáticos – PCOC, que teve como objetivo investigar as potencialidades do seu uso para o ensino e a aprendizagem do CDI e da Geometria Analítica. Um dos resultados apontados pelos autores foi um produto materializado na impressora 3D e a mobilização de diferentes registros para o alcance final daquela prototipagem.

Bisognin e Fontoura (2016) também utilizaram o *software* Maple para o ensino e aprendizagem das Integrais Duplas, desenvolveram uma sequência didática para construir o conceito utilizando o recurso do aplicativo computacional nas aplicações referentes ao cálculo da medida dos volumes de sólidos geométricos. Os resultados apontaram imprecisão ao expressarem matematicamente conteúdos básicos, como: partição, cálculo de áreas de figuras planas e cálculo do volume. Todavia, o uso do *software* proporcionou identificação da região de integração, aproximações do volume pela soma de Riemann, e a determinação do limite de integração.

Compreendemos a necessidade do *uso de programas computacionais* para a melhor visualização dos registros gráficos, entretanto, ponderamos que a linguagem do *software* MAPLE não é simples, requer noções de programação que nem sempre são acessíveis a estudantes das graduações e pós-graduações, bem como, a necessidade de maior disponibilidade de tempo para a aprendizagem e o seu manuseio o que pode limitar o objetivo da tarefa proposta. O fato de o *software* não ser gratuito inviabiliza que alguns estudantes trabalhem com eles fora do período das aulas ou que tenha acesso na própria instituição de ensino.

Diante do exposto buscamos pesquisas que agregassem o uso do GeoGebra com a impressora 3D em CDI. A escolha por aquela interface justifica-se por possuir a cápsula de linguagem compreensível, o que permite a maior interação com o sistema e a disponibilidade de acesso gratuito. Encontramos o trabalho de Lemke, Simple e Figueiredo (2016) que destacam as potencialidades das tecnologias da geometria dinâmica do *software* GeoGebra e da impressora 3D na criação de objetos de aprendizagem (OAs) para o ensino de funções de várias variáveis. O resultado dessa prática no processo de ensino auxiliou na representação gráfica de superfícies, na interseção de superfícies e na visualização de curva de nível.

Cometti (2018) discuti, em sua dissertação, as contribuições de sequências didáticas relacionadas à construção de superfícies e sólidos utilizando o *software* GeoGebra 3D para os processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis, relacionando-as aos registros de representações semióticas. Seus resultados revelaram que a

visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D se mostrou um componente indispensável para a construção de conceitos e propriedades de Integrais Múltiplas e oportunizou explorar as conversões entre registros.

A partir dos resultados obtidos na pesquisa de Henriques (2006); de Farias; Funato e Cattai (2016), de Lemke, Simple e Figuiredo (2016), Bisognin e Fontoura (2016), Cometti (2018) constatamos a necessidade que os estudantes têm de visualizarem os sólidos em espaços tridimensionais. Propomos duas tarefas em nossa organização didática: uma com o uso do *software* GeoGebra, que por motivos institucionais, não foi possível ser realizada; e a outra, a produção de um vídeo com uma entrevista com o professor Afonso Henriques sobre o desenvolvimento dos PCOC por impressoras 3D, algo abordado por um dos estudantes que participaram do curso: “(Se) Integre duplamente as Superfícies Quádricas”, promovido para a coleta de dados desta tese.

Em face da dificuldade de ter acesso a uma impressora 3D, propomos aos estudantes que construíssem representações de sólidos geométricos com massa acrílica, para que visualizassem as dimensões no espaço tridimensional. Tomamos como aporte para tal tarefa dois trabalhos de pesquisa, o de Dominguez, Boas e Barbosa (2012) e o de Neuenfeldt et al. (2018).

Dominguez, Boas e Barbosa (2012) analisam o cálculo de medidas devolumes de sólidos por seções transversais e o uso de materiais manipuláveis para construir “pontes” entre as representações verbais e algébricas. Para as autoras, a representação manipulável está para além da visualização dos sólidos geométricos, elas medeiam as ações dos estudantes. Entretanto, ao final do experimento, foi necessário que o professor legitimasse o conhecimento adquirido, pois a tarefa não proporcionou a conexão entre a representação manipulável e a algébrica. Desde trabalho, destacamos dois aspectos importantes, para o nosso estudo: a ação da semiose no processo de transposição das representações (signos) e a necessidade de institucionalização ao final da tarefa.

A pesquisa desenvolvida por Neuenfeldt et al. ; ~~Schuck, Goulart, Neuenfeldt e Rodrigues~~ (2018) menciona que diante das dificuldades e concepções dos estudantes do curso de engenharia sobre o Cálculo II, eles propuseram ao estudante uma tarefa que envolvia a elaboração, a confecção e a apresentação de uma representação de um sólido geométrico com o respectivo cálculo de medidas de área e volume a partir da Integral Dupla. Os resultados apontaram que os estudantes associaram a teoria com a prática; os estudantes tomaram o centro

do processo de ensino e de aprendizagem de forma autônoma; buscaram explorar diversos materiais manipuláveis, estabelecendo relações com madeireiras, vidraçarias etc. Destacaram que o tempo dedicado ao projeto e a falta de conhecimentos prévios foram fatores que prejudicaram o bom andamento dos trabalhos.

Este último trabalho foi fundamental para o nosso estudo, pois descreveu de forma mais detalhada como estabelecer a conexão entre o cálculo da Integral Dupla e o objeto de aprendizagem confeccionado pelos estudantes. Constatamos na prática que o objeto embora possa ser manipulável ele não proporciona alterações estruturais do objeto matemático que promoveria a interação entre a representação algébrica e a gráfica.

Henriques, Naganine e Naganine (2012) apresentam uma análise institucional em torno dos projetos acadêmicos curriculares, os livros didáticos e os estudantes enquanto elementos institucionais de uma instituição de ensino superior, considerando as Integrais Múltiplas como objeto de estudo. Henriques e Serôdio (2013) também propõe uma análise institucional em torno das Integrais Múltiplas, usando o *software Maple* e registros de representação identificando dificuldades que motivaram técnicas instrumentais, como o crivo-geométrico e as relações entre conteúdo das Instituição da Educação Básica (IEBA) com as Integrais Múltiplas (IM). Álvarez e González (2017) discutem sobre a importância dos problemas didáticos situados em contextos reais frente aos problemas propostos nos livros textos de Cálculo de editoriais mexicanos e estadunidenses. Os dados obtidos na pesquisa revelaram que os livros textos apresentam entre 65% à 87% de problemas convencionais, exercícios com aplicação de definições, teoremas e fórmulas.

Os três últimos estudos ampliaram a nossa visão acerca da análise institucional no que diz respeito a praxeologia dos livros didáticos e a relação entre as IEBA e a IM, pois serviram de guia para nossas reflexões e para elaboração de uma tarefa que foi aplicada com os sujeitos desta pesquisa.

No âmbito dos estudos do ensino e da aprendizagem do CDI nos cursos das Engenharias, destacamos os trabalhos de Domecq, Berenguer e Sánchez (2018) que aludem a necessidade de uma dinâmica interdisciplinar pautada na sistematização e funcionalidade do CDI para a Engenharia e sua generalização projetiva-estrutural, competência essencial para a aplicação dos objetos do CDI para a resolução de problemas projetivos-estruturais. Na mesma linha de pesquisa, Carrius e Ferreira (2014) propõe um modelo de situação problema que utiliza a Lei do resfriamento dos corpos, descoberto por Isaac Newton, como forma de contemplar o

objetivo de articular o ensino acadêmico da matemática com o contexto de aplicações práticas que servirão no exercício profissional dos engenheiros e propõe que deve ser repensado o currículo do ciclo básico para as engenharias.

A dissertação de Santiago (2012) trata da utilização do método de solução para a Integral Dupla na obtenção de soluções analíticas aproximadas para problemas de condução de calor unidimensional em regime transitório, ele compara o método empregado por Goodman e o método da Integral Dupla, revelando que a esse último atribuiu-se um melhor desempenho frente ao primeiro método.

Farrás (2013) destaca a importância dos conteúdos matemáticos nas aplicações práticas típicas dos engenheiros. Tomando como base o estudo da hidráulica, na engenharia civil e na engenharia sanitária, como uma parte da mecânica de fluídos. Ele mostra aplicações de cálculo das conduções uni dimensionais (aquedutos, redes de água, canais, rios), seções transversais em superfícies, volumes e registra as equações matemáticas que representam o escoamento de um volume de um líquido em um determinado recipiente.

Camarena (2004, 2013) aborda o vínculo que se pode estabelecer entre a matemática e as outras ciências, em um caminho interdisciplinar guiado por uma Teoria Educativa da Matemática no Contexto das Ciências (MCC) e por uma metodologia Dipcing (Diseño de Programa de Estudio em Carreras de Ingeniería) desenvolvida para programas de estudo das matemáticas (em geral) nas engenharias. A teoria fundamenta-se em três paradigmas: 1) a matemática é uma ferramenta de apoio para os profissionais; 2) A matemática tem uma função específica no nível universitário; 3) Os conhecimentos nascem integrados.

Romo Vázquez (2009) discuti a importância da formação matemática dos futuros engenheiros no mundo dos negócios revelando que o conhecimento matemático não aparece explicitamente, necessita reconstruí-lo com abordagens envolvendo questões abertas que ampliam o campo de conhecimento para áreas afins. Desenvolveu cursos envolvendo os objetos matemáticos: Transformada de Laplace e Equações Diferenciais Lineares com instituições de Ensino Superior, dos quais relata que obteve diferentes resultados e enfatiza a contribuição da disciplina automatização e do *software* MatLab para a adaptação das técnicas disponibilizadas pelas instituições.

Esses seis últimos estudos foram fundamentais para a organização didática e matemática do curso que propomos. Sob perspectivas diferentes a abordagem no ensino dos objetos matemáticos pleiteados deveria equilibrar os objetivos dos cursos - Engenharias e da

licenciatura em Matemática – nas quais os sujeitos da pesquisa desta tese são egressos. Nesse sentido, o estudo de Domecq, Berenguer e Sánchez (2018) e Camarena (2004, 2013) e Romo Vázquez (2009) contribuíram para uma visão sobre as especificidades do ensino da Matemática nos cursos das engenharias. Enquanto o trabalho de Carrius e Ferreira (2014); Santiago (2012); Farrás (2013) e Romo Vázquez (2009) por se apoiarem em situações-problema interdisciplinares, nos inspiraram na formação da questão geratriz aberta do PEP.

No que diz respeito às superfícies, o volume de sólidos e as Superfícies Quádricas acessamos as pesquisas feitas por Henriques (2004) e Silva e Moretti (2018b) que colaboraram para o estudo epistemológico do objeto matemático e para as condições e restrições no uso dos registros de representação semiótica. Henriques (2004) destacou a relevância do estudo de técnicas computacionais, mediadas pelo uso do *software* Maple, para o ensino e aprendizagem do Cálculo Integral, bem como, a representação gráfica e analítica de superfícies e dos sólidos tridimensionais capazes de auxiliar o estudante no cálculo de integrais de Funções de Várias Variáveis. Silva e Moretti (2018b) analisa o ensino e a aprendizagem das Superfícies Quádricas (não cilíndricas e não degeneradas) na perspectiva da Teoria dos registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, principalmente no que diz respeito a abordagem de interpretação global de propriedades figurais proporcionado pelo uso do *software* GeoGebra.

Em se tratando dos pressupostos que envolve a Semiótica peirceana encontramos indícios nas pesquisas realizadas por Silva e Moretti (2018a); Marínez-Planell e Trigueros (2017); Frota (2011) relacionados à semiose, a linguagem, a oralidade, as representações e aos registros, diferenciando na escolha dos objetos matemáticos e das interpretações teóricas.

O artigo de Silva e Moretti (2018a) analisa os registros em língua natural das Superfícies Quádricas (não cilíndricas e não degeneradas) presentes em livros do Ensino Superior. Os registros apresentados evidenciaram as variáveis visuais e propriedades globais das figuras contemplando diversas funções discursivas, além de algumas operações de conversão.

Marínez-Planell e Trigueros (2017) utilizaram a Teoria de Ação-Processo-Objeto-Eschema (APÓS) para estudar as formas geométricas no entendimento da partição de um domínio retangular e a soma de Riemann correspondente a uma Integral de Funções de duas variáveis. Entrevistaram dez estudantes que já haviam cursado o Cálculo multivariável e os resultados obtidos indicaram que os estudantes tiveram dificuldades, mesmo em construções mentais básicas, em relacionar a Soma de Riemann e a Integral Dupla; a maioria deles não conseguiram discutir a partição em um problema dado. No que diz respeito aos aspectos

semióticos, observou-se dificuldades de interpretação das representações geométricas relacionadas a Soma de Riemann e aos processos de conversão de registros.

Frota (2011) investiga as competências de leitura e escrita em Matemática, na perspectiva do letramento em Cálculo, com 35 estudantes de Engenharia respondendo questões envolvendo as Integrais Duplas. A análise dos resultados apontou que a recepção e produção do texto de Cálculo é bem complexa, pois o estudante interage com o texto e se transforma em autor de um novo texto resposta. Para isso, o processo de leitura e escrita compreende ler a informação, ler dentro da informação e além da informação para transformá-la. Os dados obtidos revelaram que a perspectiva de letramento matemático é promissora para o desenvolvimento de competências em ação necessária para a leitura e a escrita do Cálculo.

Esses artigos nos ajudaram na reflexão sobre a amplitude do estudo da Semiótica, que estende para campos amplos, como a publicidade, a Inteligência Artificial, as artes, a cultura, a sociedade, a educação, a biologia, a medicina, entre outros. Os enfoques dados a Semiótica para a matemática têm origem mais recente, destacando: 1. Aspectos ligados aos registros e as representações explorados por Raymond Duval, que formaliza a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS); 2. A Semiótica desenvolvida por Charles Peirce, que toma como alicerce o papel da ação dos signos no mundo; 3. A perspectiva do enfoque da semiótica cultural de Radford, que percebe que os signos são culturalmente elaborados e significados pela ação do homem no mundo.

No que concerne ao estudo da TRRS, o estado da arte realizado por Pontes, Finck e Nunes (2017) revelaram que a teoria tem sido aplicada, em maior quantidade, em pesquisas a nível da Educação Básica; a escolha pelos objetos matemáticos é diversificada; a metodologia empregada se aporta em aplicações de sequências didáticas e atividades matemáticas e as transformações de tratamento e conversão assumem com expressividade a maior parte dos estudos verificados. Tais resultados nos desperta para à necessidade do aumento de produções acadêmicas no nível superior de ensino com o uso da teoria, o que pode contribuir para minimizar a evasão e a reprovação nos cursos universitários.

As pesquisas no campo da matemática com abordagens na Semiótica peirceana são ainda incipientes, principalmente no que concerne ao estudo do CDI. Tal fato pode ser justificado pela dificuldade de se estudar aquela teoria (SANTAELLA, 2009), pois demanda do pesquisador conhecimentos amplos da filosofia, da história, da sociologia, da lógica para compor a leitura dos textos peirceanos; aos aspectos da generalização e da abstração referentes

aos objetos matemáticos e, o enfoque por aulas expositivas e pela matemática “pura” valorizados pelos professores do nível superior.

Como na TRRS, há um predomínio de estudos no Ensino Básico, o artigo de Drigo (2002) considera a matemática como uma linguagem constituída de ícones, índices e símbolos e que atividades contextualizadas propicia o aumento do potencial dos signos e permite que novos signos sejam incorporados a matemática no transcorrer do processo de ensino/aprendizagem. No livro de D’Amore, Pinilla e Iori (2015) identificamos um resumo sobre a construção histórica que alicerça a Semiótica e explora algumas situações do seu uso na matemática, enfatizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o enfoque semiótico-cultural de Radford.

O trabalho de Cárdenas (2012) sobre o ensino em cursos para não matemáticos discute o papel do raciocínio diagramático, tomando como base o estruturalismo matemático, defende que “as estruturas matemáticas permeiam a cognição humana em todos os aspectos e, portanto, a distinção entre aplicabilidade e a teoria é um dispositivo artificial e não um aspecto fundamental da matemática”⁵. Inferimos que essa afirmação é apropriada para as estruturas matemáticas mobilizadas no trabalho dos matemáticos puros, que tratam a matemática como ícones preservando semelhanças com os objetos, por meio da representação. No entanto, se referimos à matemática aplicada, os dispositivos artificiais são os modelos matemáticos ou não matemáticos pelos quais o raciocínio diagramático se apresenta.

Ainda, sobre o papel dos diagramas para o ensino de matemática encontramos no estudo de Jorge (2002) uma análise epistêmica e metafísica do conceito perceiano de diagrama e ele explora a questão abdutiva como uma função de generalidade, estruturando o pensamento mediador, possibilitando a construção do objeto no interior da sua representação. Tal perspectiva, contribuiu para nos assegurar que na matemática, existem interpretações a serem exploradas e que não foram institucionalizadas, o que caracteriza que a abdução é um incentivo a novas abordagens de como pode ser estudado um objeto matemático.

Presmeg et al. (2016) tratam da semiótica na Educação Matemática discutindo a função da visualização para a semiose e propõem tópicos para pesquisa sobre a Semiótica em matemática. Debatem sobre a presença da semiótica em teorias e práticas na educação

⁵ I try to defend that mathematical structures pervade human cognition in every aspect and, therefore, the distinction between applicability and theory is an artificial device and not a fundamental aspect of mathematics. (Radford, 2001)

matemática; atribuem significados para a educação matemática com relação a vários tipos de signos: personificação, gestos, corpos, teoria linguística e para outras dimensões semióticas como: as relações entre sistemas semióticos, a semiótica da intersubjetividade, a semiótica com foco na inovação. Esse trabalho, nos motivou a enxergar a perspectiva da Semiótica matemática como um campo promissor a ser explorado.

No que concerne a Teoria Antropológica do Didático esclarecemos que os seus fundamentos estarão citados ao longo desse registro textual articulando-os com as bases teóricas da Semiótica peirceana. As pesquisas envolvendo a TAD e as Integrais Duplas podem ser verificadas em Henriques (2004; 2006), Henriques, Attie e Farias (2007), Henrique, Naganine e Naganine (2012) que discutem as praxeologias dos livros didáticos do CDI recomendados nas ementas dos cursos brasileiros de graduação.

Frente à análise das pesquisas correlatas detectamos cinco problemas que incitaram o nosso interesse pela investigação:

1. as dificuldades apresentadas pelos estudantes para a compreensão epistemológica dos objetos matemáticos que compõe o CDI;
2. a quantidade ínfima de produções acadêmicas que exploram o uso das Integrais Duplas no cálculo da medida das Superfícies Quádricas;
3. a ausência de pesquisas que articulem os pressupostos da Semiótica peirceana aos da TAD, no ensino e na aprendizagem do CDI;
4. os significados e interpretações atribuídos pelos estudantes das Engenharias e da Licenciatura em Matemática para a Integral Dupla quando aplicada em uma situação real envolvendo a arte e as Superfícies Quádricas.
5. A ausência, no modelo dominante, de tarefas que proporcionem um entrelace entre o objeto epistemológico e o pragmático, o que nos conduz a construção de um modelo epistemológico de referência.

Os horizontes que se abriram frente aos cinco problemas precisaram ser limitados para a pesquisa e por isso estabelecemos como objetivo geral: **analisar os significados e as praxeologias mobilizados por estudantes de Engenharias e de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um *Percurso de Estudo e Pesquisa*, para o ensino da Integral Dupla.**

Norteados pelos cinco problemas descritos e pelo objetivo geral, elaboramos duas hipóteses de pesquisa:

1. ***A dimensão da linguagem no problema didático relacionado ao processo de ensino da Integral Dupla proporciona analisar os raciocínios abdutivos, as praxeologias e os significados mobilizados pelos estudantes de Engenharias e de Licenciatura em Matemática em um Percorso de Estudos e Pesquisa***
2. ***Há diferenças nos significados, nas interpretações e nas praxeologias mobilizados por estudantes dos cursos de Engenharias e de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um PEP.***

Essas duas hipóteses serão verificadas frente a uma análise dos dados coletados e dos elementos teóricos articulados e construídos a partir das teorias escolhidas na elaboração desta tese. Para isso, definimos os seguintes objetivos específicos:

1. Estabelecer as convergências dos pressupostos da Semiótica peirceana com a Teoria Antropológica do Didático visando construir uma dimensão da linguagem para o problema didático;
2. Construir um modelo epistemológico de referência para as Integrais Duplas aplicadas ao cálculo das medidas das Superfícies Quádricas que se opõe ao modelo dominante vigente nas instituições universitárias.
3. Descrever e analisar as organizações matemáticas que foram construídas pelo investigador e pelos estudantes pesquisados ao estudar as Integrais Duplas aplicadas ao cálculo das medidas das Superfícies Quádricas;
4. Descrever e analisar as organizações didáticas previamente elaboradas e as que foram colocadas em práticas durante a realização do PEP, pelo investigador e pelos sujeitos da pesquisa;
5. Construir e analisar a dialética pessoa e situação para análise dos dados obtidos no PEP.

Estes objetivos específicos serviram de guia para o desenvolvimento do PEP, bem como, para organizar o registro textual deste estudo que está dividido em seis capítulos. Para nomeá-los buscamos um vínculo entre a discussão realizada no respectivo capítulo e as obras de Gaudí, a saber:

O primeiro capítulo intitulado - *Casa Vicens: uma construção inicial* - retrata os primeiros passos deste estudo, uma analogia ao primeiro trabalho de Antoní Gaudí. Registramos a Educação Matemática no cenário da Educação, descrevemos a problemática do nosso estudo na área do conhecimento, relatamos as restrições tomando como aporte uma revisão das

pesquisas do tema e do objeto matemático pleiteado, estabelecemos o objetivo geral e os específicos e, por fim, elencamos duas hipóteses que guiaram a investigação científica.

Jardins Artigas: uma ponte entre duas teorias, título do segundo capítulo, reflete a ideia inicial de Gaudí de estabelecer vínculos entre margens opostas de um mesmo rio. Trazendo para o campo da tese, tecemos uma articulação entre os pressupostos teóricos de dois “mundos” da Ciência: a Semiótica peirceana e a Teoria Antropológica do Didático que tornou possível a construção de uma dimensão da linguagem para análise de um problema didático.

No terceiro capítulo - *Templo Expiatório da Sagrada Família: um modelo de referência para as formas tridimensionais* - registramos o nosso raciocínio abduutivo na construção de um Modelo Epistemológico de Referência para o ensino e a aprendizagem da Integral Dupla. Aportando-nos no estudo de três modelos matemáticos, historicamente elaborados para aquele objeto e em uma análise institucional descrevendo: os documentos oficiais vigentes, as estruturas físicas e os regimentos (Projeto Pedagógico Institucional, as ementas e as referências bibliográficas, entre outros, estabelecidos para cada curso) e, por fim, a identificação das praxeologias dos livros de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica adotados.

Casa Batlló: a obra metodologicamente planejada – consiste no nome atribuído ao quarto capítulo deste texto que retrata o planejamento e a execução de uma organização didática elaborada para o ensino da Integral Dupla. Nesse intuito, foi elaborado um curso intitulado: (Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas, estruturado para cinco encontros presenciais, aos sábados, com atividades diversificadas, tendo como objetivo responder a uma questão aberta inédita proposta a treze estudantes egressos de duas universidades públicas, matriculados nos cursos de Engenharia (civil, elétrica e ambiental) e da Licenciatura em Matemática, que já haviam cursado a componente curricular CDI -III.

O quinto capítulo – *Casa Milá: um inédito Percurso de Estudo e Pesquisa* destinou-se a análise dos dados obtidos, com tal intento, criamos duas matrizes: a da Linguagem e a da Diversidade que sintetizou as informações permitindo formular argumentos para as hipóteses deste estudo. Para a constituição da primeira matriz elegemos seis elementos de análise, a saber: as s empregadas, os raciocínios mobilizados; as semioses produzidas; a as dialéticas propostas por Chevallard (2012), acrescentando-lhes, a dialética pessoa e situação, abduzidos pelos autores, as funções didáticas e o tipo de linguagem. Para a segunda matriz, selecionamos os significados, as interpretações e as atitudes como fundamentos para o estudo dos resultados obtidos frente as tarefas propostas, os diálogos gravados e a avaliação realizada.

Puerta de los Pajáros: adaptación e transgressão para outros voos – é o nome atribuído ao sexto capítulo deste texto. Abordamos os argumentos emergidos da interpretação dos resultados da aplicação do PEP que permitirão: comprovar as duas hipóteses criadas para a pesquisa; analisar os possíveis impactos para a Educação Matemática; ajustar os significados produzidos neste trabalho aos estudos existentes e transgredir o estudo com a criação de hipóteses ou perguntas inéditas.

Parque Güell: as referências nos vários caminhos - alude as referências bibliográficas, citadas ou lidas, no percurso da elaboração desta investigação.

Posto a estrutura das partes que compõem esta pesquisa, abordamos no próximo capítulo a articulação tecida entre a Teoria Antropológica do Didático e a Semiótica peirceana, que fomentou a criação de alguns constructos para a análise dos dados coletados no desenvolvimento do PEP.

2 JARDINS ARTIGAS: e as pontes entre os atores teóricos

Com o objetivo de construir uma dimensão da linguagem para análise de um problema didático matemático, delineamos, neste capítulo, uma articulação entre os pressupostos teóricos da Semiótica desenvolvida por Charles Sanders Peirce e os da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard.

2.1 Situando os autores teóricos e as teorias neste estudo:

As contribuições advindas do século XVII e XVIII repercutirão no século XIX com grandes transformações culturais, sociais e políticas. As guerras napoleônicas, a revolução liberal na França, o Romantismo, o Realismo, o Positivismo, a invenção do telefone, do primeiro carro, a guerra de secessão e a ampliação do território americano são fatos que demarcam esse período.

Essa fase marcada por movimentos culturais, políticos, econômicos e conquistas de espaços territoriais vividos pela humanidade inspirou dois nomes importantes para o nosso trabalho: Antoní Gaudi e Charles Sanders Peirce. Postergaremos as informações sobre o arquiteto catalão Antoni Gaudí para o capítulo quatro desta tese, quando descrevemos com mais precisão a relevância de suas obras para este estudo.

Charles Sanders Peirce (1839-1914) foi um cidadão americano, filósofo, matemático, cientista, químico e lógico. Seus trabalhos apresentam importantes contribuições para a lógica, considerada como um ramo formal da Semiótica, que proporcionou alguns fundamentos para a filosofia da linguagem que iria emergir no século XX.

Autor de mais de oitenta mil manuscritos dedicou 30 anos de sua vida ao estudo da Semiótica: a teoria geral dos signos. Nesse intento, desenvolveu as três categorias universais dos signos (ou do pensamento): a primeiridade, a segundidade e a terceiridade; a relação triádica – signo, objeto e interpretante – que em ação faz surgir a semiose. Usou uma metodologia de pesquisa pautada na observação, hipótese e experimentação a fim de aproximar a filosofia das características da ciência. Se opôs ao método cartesiano, tomando o pragmatismo e o raciocínio abduutivo como fenômenos para formular seu método anticartesiano, ainda pouco explorado nas ciências.

Dividiu a Semiótica, ou lógica em três partes: a crítica, a originaliana e a transuacional. Essa classificação permitiu que ele não só construísse elementos teóricos sobre o signo, mas elaborasse uma ciência pautada na percepção dos fenômenos e na experimentação. Tomou como aporte para o estudo do raciocínio humano a divisão em: dedutivo, indutivo e acrescentou o abduutivo. Esse último, em conjunto com a ideia das interpretações infinitas que os signos em uso podem proporcionar (pragmatismo) deram origem a tese anticartesiana, ampliando os conceitos da metodêutica, levando-o a explorar a questão do método em sua teoria.

Entretanto, a diferença que consideramos significativa sobre a semiótica peirceana atualmente, consiste na forma de observar os fenômenos do mundo. A presença das categorias que a compõe é ampla, diversificada e pode ser aplicada aos diversos ramos do conhecimento o que permite avaliar sempre as interpretações, que para ele são sempre transitórias. Defensor do falibilismo ele sustenta que não se alcança a verdade, ou seja, o interpretante final é sempre revelador de novas hipóteses, que podem derrubar convicções dadas como únicas e inabaláveis.

Os signos estão em estado de devir, esperando o interpretante para atribuir-lhes um significado e estabelecer uma relação de mediação com um objeto físico ou mental. Essa associação permite o surgimento de novos signos (semiose) que podem ser: puros ou remodelados; advindos do raciocínio abduutivo e que proporcionam a mudança de hábitos ou de crenças, anteriormente concebidas.

Os raciocínios abduitivos tem sua origem nos estudos de Aristóteles (2016) e volta a ter relevância nos estudos de Peirce. No estudo deste autor, o raciocínio abduutivo é visto sob três vertentes: a epistemológica, a lógica e a ontosemântica. Na perspectiva lógica- epistemológica a abdução caracteriza-se em duas vertentes: ser capaz de gerar ideias novas (PEIRCE, 2005, p.30) e no campo científico são hipóteses, inferências que têm origem na percepção dos fenômenos reais e estão livre de julgamentos, que despontam como insights e que diferenciam dos raciocínios dedutivos e indutivos, pela liberdade de inferir julgamentos sem a preocupação de serem válidos ou não. Enquanto inferências, o raciocínio abduutivo pode evoluir para elaboração do conhecimento validado pelos raciocínios dedutivos ou indutivos, por isso, aquele “cumpre o papel chave dos processos de modelização científica”⁶(MOSCOSO, 2019. P.309). No que tange a perspectiva ontosemântica ela se explica em dois níveis: “no nível semântico

⁶ Do original: los razonamientos abductivos cumplen un rol clave em los procesos de modelización científica (MOSCOSO, 2019. P.309).

mostra o sentido e a função da linguagem na elaboração dos conhecimentos”⁷ (MOSCOSO, 2019, p.318) e no nível ontológico a abdução tem sua origem na dúvida das crenças.

A inferência abdutiva é o ponto de partida para as inferências dedutivas e indutivas e em um enfoque científico “busca a análise praxeológica das tarefas de ensino” (IBID., p.321). A influência da abdução no ensino dos objetos matemáticos proporciona o desenvolvimento de praxeologias que podem otimizar as tarefas, emergindo novas técnicas, teoremas e teorias.

O ensino da matemática prima por estabelecer técnicas que mostram habilidades na memorização de procedimentos em detrimento do sentido da aplicação dos seus objetos. Gontijo et al (2019) destaca que “na dinâmica da sala de aula, o processo de ensino-aprendizagem que tenha o desenvolvimento do potencial criativo como um dos seus objetivos precisa questionar as atitudes mecanizadas em relação ao conhecimento matemático”.

Inferimos que a formação dos licenciandos em matemática, ainda está direcionada para o ensino do objeto epistemológico nos ditames da matemática pura – com o rigor, precisão, demonstração e abstração. Alheios ao conhecimento acerca das necessidades ou dos problemas que levaram a sua construção e como eles são aplicados em outras áreas de conhecimento, tais estudantes reproduzem as práticas aprendidas, pois não foram incentivados a estudar e a pesquisar acerca do objeto, aplicando teoremas e técnicas procedimentais sem compreender seus significados.

Defendemos que o bacharel em matemática que é professor do Ensino Superior **tem que saber** a matemática pura, mas que ele também precisa ser preparado para **saber o significado** do objeto epistemológico em contextos de ensino que não visam formar matemáticos. A ênfase em uma matemática para não matemáticos contempla aos bacharelados a formação para o estudo dos problemas no ensino. Enquanto os licenciandos em Matemática são formados para atuarem na Educação Básica, de acordo com a Resolução CNE/CP nº2, de 2019, que pressupõe o desenvolvimento das competências gerais previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Destas ponderações feitas, surgem algumas preocupações: a primeira, diz respeito aos cursos de Bacharelado em Matemática que não preparam os formandos para o ensino e para os problemas que envolvem a sala de aula. No entanto, limitar as competências gerais da BNCC

⁷ Do original: El nivel semántico muestra el sentido y la función del lenguaje en la elaboración de los conocimientos. (MOSCOSO, 2019. P.318).

ao processo formativo dos licenciandos em Matemática proporciona um reducionismo dos objetos matemáticos ali estabelecidos. Como ele dominará os objetos de conhecimento não incluídos na BNCC e aplicá-los em contextos mais amplos, se na graduação ele não os estudou?

Essa regulação precisa ser revista nos cursos formativos e inferimos que os formandos não adquirem o conhecimento necessário para atuarem em cursos para matemáticos, não-matemáticos e para a Educação Básica. Isso repercute em um ensino desprovido de sentido e de significado para os objetivos dos cursos, reproduzindo as práticas que aprenderam. Atribui-se a responsabilidade de um ensino crítico, contextualizado, autônomo a quem não adquiriu por meio da experiência essa formação. Compreendemos que a matemática habita diferentes “mundos” e por isso, não pode ter a presunção de ser vista e experimentada apenas sob o olhar de uma minoria (matemáticos puros são raros nos mundos)⁸.

Dentro das instituições escolares os objetos matemáticos têm um ciclo de vida: eles nascem, evoluem e morrem. Nascem dos interesses humanos para responder um problema aparentemente insolúvel; extrapolam os muros que fragmentam o conhecimento em áreas e expandem suas estruturas quando a necessidade impõe outras construções. Eles podem desaparecer, ou “morrer”, quando deixam de existir ou de ter significado nas instituições.

A matemática é uma atividade humana que permite mostrar as ações desenvolvidas em torno dela no ontem, no hoje e planejá-las para um futuro incerto. Por ser fruto da criação humana, mediante: pensamentos, atitudes, trabalhos, relações, costumes e crenças, está condicionada a uma interpretação que atende ao desenvolvimento científico e tecnológico em um determinado tempo. Tal vulnerabilidade, produz significados frágeis de serem ultrapassados ou de permanecerem por séculos, como únicos e verdadeiros.

O ciclo de vida dos objetos matemáticos dentro das instituições associados ao processo da ação do homem frente a matemática, nos conduz à dois caminhos a explorar: o primeiro deles é o que propomos como uma Semiótica Matemática e; o segundo, ao perceber a matemática como atividade humana, que preserva o ecossistema para a sobrevivência dos seus objetos e encontra na TAD auxílio para se constituir como uma ciência didática que emerge do seu campo de práticas.

⁸ Estamos nos referindo aos matemáticos que descobrem soluções para problemas complexos, que demandam conhecimentos que precisam ser criados ou revistos. Como um dos exemplos, citamos a solução para a Conjectura de Poincaré encontrada por Grigori Perelman em 2003.

No que tange ao primeiro caminho, inferimos que a Semiótica aplicada à matemática é a linguagem usada por um sistema de signos, construtivos e específicos, que servem para comunicar por intermédio de formas, conceitos, diagramas, símbolos, gestos, estruturas, as diferentes interpretações e os inúmeros significados que são mobilizados dentro e fora da matemática, mas que potencializam as ações humanas para o desenvolvimento de raciocínios que atendam a um determinado fim ou a uma circunstância. Essas ações promovem interpretações do seu objeto epistemológico e pragmático, pois se fundamentam nas relações estabelecidas entre os indivíduos e uma determinada situação⁹.

Entretanto, a emersão da interpretação dos seus objetos: epistemológicos e pragmáticos, proporcionam discrepâncias no ensino (mencionado em parágrafos anteriores) causados pela ênfase preponderante de um sobre o outro. Nesse sentido, o poder criativo da matemática perde seu valor estético, aquele capaz de gerar satisfação em realizar uma tarefa matemática e, alheia aos sentidos e significados que promovem para o sujeito ela se desumaniza.

Por isso, pontuamos a necessidade de regulação¹⁰ no sistema de ensino¹¹, que deve comportar os dois estágios de desenvolvimento da construção da aprendizagem: o que serve de suporte para garantir a existência, a veracidade e a estrutura da matemática – o objeto epistemológico e, o outro, que consiste em uma rede de significados e usos, em que circula o saber matemático – o objeto pragmático. A coexistência regulativa pode ser um percurso promissor para desvelar no ensino da matemática o seu valor estético.

Tal proposta, nos remete ao segundo caminho, aquele que considera a matemática uma atividade humana e encontra na Teoria Antropológica do Didático os fundamentos que as justifiquem. Idealizada por Yves Chevallard, licenciado em Matemática na França, país em que nasceu, foi professor de matemática no antigo *lycée* e desde o ano de 2012 é investigador emérito da Universidade Aix-Marseille, com vários artigos publicados na área da didática

⁹ Tomamos situação como um problema que emerge do mundo ou da realidade que demanda uma solução envolvendo o objeto epistemológico matemático construído pelo homem no tempo. Mas, podemos considerar apenas uma tarefa, como por exemplo do tipo: Calcular $\int x^2 dx$.

¹⁰ Regulação: quando um sistema comporta dois estágios de organização. Um que serve de suporte, é um transformador de energia, em um sentido mais geral; o outro é uma rede na qual a informação circula (GRANGER, 2013, p.181).

¹¹ Regulação no sentido de Brousseau (1995, p.8) é quando um sistema (ou uma instituição) finaliza uma ação envolvendo um conjunto de informações, no entanto, é necessário num determinado nível, fazer adaptações e correções, determinando condições para o seu funcionamento e se as correções forem muito intensas, podem originar novos sistemas.

francesa. Iniciou sua teoria defendendo a transposição didática e ampliou o seu estudo sobre as práticas institucionais e os saberes matemáticos.

Ainda em construção por Yves Chevallard e seus colaboradores, a TAD nasce a partir da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau que provocou três rupturas na didática da matemática, como explica Almouloud (2007, p. 112):

a matemática como essência dos fenômenos didáticos; o desejo de elaborar uma ciência desses fenômenos, levando a explicitar modelos utilizados e submetê-los às leis de uma “epistemologia experimental”; os conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos através das atividades que eles permitem realizar, ou então através dos problemas que permitem resolver. Trata-se de uma atividade estruturada na qual se pode destacar diferentes fases: ação, formulação e validação, bem como, a devolução e a institucionalização.

Emerge dessa ruptura, a Didática da Matemática, uma ciência elaborada para atender aos anseios de estudar a matemática como fundamentos dos fenômenos didáticos. Para análise deles são estruturados modelos de atividades ou problemas a resolver que quando experimentados evidenciam algumas fases do desenvolvimento na ação, ou seja, dentro da sala de aula ao ensiná-la.

Neste sentido, inferimos que a atividade é semelhante à uma situação problema, pois leva em consideração o contorno social em que a instituição está inserida. A atividade é um conjunto de ações que são feitas em um determinado momento, mediante um conjunto de instruções prescritas do que deve ser feito, que são as tarefas. Para Chevallard (1999, p. 224, **tradução nossa**¹²) as tarefas são “artefatos, obras, construções institucionais, incluindo a reconstrução em tal instituição”.

Essas atividades matemáticas fazem parte de um conjunto de outras atividades humanas e sociais em que o indivíduo vai desempenhar em sua vida. Entretanto, para isso, será necessário que ele tenha um propósito (desafio, necessidade), meios de realizá-los e saberes que facultem alcançar seus objetivos. A esse percurso Chevallard (1991) denominou de praxeologia ou organização praxeológica.

A praxeologia é o estudo dos diferentes saberes que o indivíduo precisa adquirir para executar uma atividade. Ele é posto diante de uma tarefa (T) que para ser executada são

¹²Do origina: tâches, types de tâches, genres de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des construits institutionnels, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l’objet même de la didactique” (CHEVALLARD, 1999, p.224).

necessários procedimentos ou técnicas (τ) provenientes das estruturas matemáticas - teoremas, axiomas – denominadas de tecnologia (θ) que emerge de uma teoria (Θ) que justifica e valida a ação.

Esses dois blocos: o saber-fazer e o saber, formam as praxeologias que favorecem compreender como o objeto matemático vive dentro das instituições, e quais são as condições e restrições para a existência desse saber, o que viabilizará a construção de duas organizações: a matemática e a didática.

A organização matemática pauta no estudo do objeto epistemológico, determina um panorama do bioma no qual ele está inserido. O foco é revelar a sua construção, justificar a sua existência, a sua finalidade e verificar as relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos matemáticos e não-matemáticos.

A organização didática toma como aporte o planejamento das ações que devem ser elaboradas para que haja a transposição didática¹³ (CHEVALLARD, 1982) da organização matemática estudada. Consiste na escolha, ou criação, das tarefas que servirão de guia para o desenvolvimento das aulas e, dos meios e mídias disponíveis que podem ser utilizados para o acesso ao objeto matemático. Entretanto, ressaltamos que essa organização didática é flexível, pois nem sempre o que foi planejado ocorre da forma prevista e o professor ajusta o caminho na ação, ocorre um rompimento do contrato didático¹⁴.

O estudo da TAD proporciona a análise do sistema didático constituído pelos indivíduos (X) sob a direção de uma pessoa (Y), geralmente um professor, que se reúne para se estudar um objeto, uma obra. A tríade S (X, Y, O) compõe o sistema didático e demarca as “*frontière topogénétique*” (CHEVALLARD, 2010, p.7) entre professor e estudantes. Inferimos que essa fronteira demarca a posição que eles ocupam dentro do sistema didático e das relações que se estabelecem entre a tríade.

Nesse sentido, o enfoque relacional pode estar voltado para a construção do objeto matemático centrado apenas no ensino institucionalizado pelo professor com pouca participação dos estudantes ou pode ter uma dinâmica de interação em que o professor direciona

¹³ Do original : “la transposition didactique désigne donc le passage du savoir savant au savoir enseigné”. (CHEVALLARD, 1982, p. 6). Tradução nossa: “a transposição didática designa a passagem do saber matemático ao saber ensinado”.

¹⁴ Contrato didático: é a função que cada indivíduo - professor e estudante - deve desempenhar para a aquisição de saberes e um meio de controlar o tempo em sala de aula.

o estudo e a pesquisa dos estudantes, incentivando-os e norteando-os, na busca do conhecimento.

Esse último caminho conduziu Yves Chevallard (1996, 1998) a pensar como as instituições influenciam as escolhas que emergem do sistema didático e difundem socialmente o conhecimento. As condições e restrições ao conhecimento dependem da posição ocupada pelo sujeito e do tipo da instituição na qual está inserido. Esses dois fatores determinam o poder que o docente possui para modificar, ou não, a referida condição. Se estendermos isso para fora do sistema didático, observando a humanidade, a civilização, a sociedade, a escola e a pedagogia, que selecionam a difusão ou não do conhecimento, compreenderemos que o ecossistema formado é abrangente e demarca níveis em que hierarquicamente um sujeito está subordinado e as restrições estabelecidas por sua posição dentro de uma determinada instituição.

Verifica-se um paradoxo institucional que perpassa pelos campos filosóficos, políticos e sociológicos sobre esses níveis e que repercute no sistema didático sob dois polos de análise: a aceitação dos limites a que são submetidos e o acesso ao conhecimento. Ambos refletem de forma decisiva nos sistemas didáticos, pois as instituições (livros, currículos, gestores, ...) a que estão vinculados fabricam discursos, meios e instrumentos que potencializam a aceitação (ou não) do que é imposto, bem como, selecionam quais conhecimentos devem ser disponibilizados.

Essa capsulação do sistema didático, em torno daqueles níveis, promove uma dependência complexa que, por um lado, dinamiza a relação com o mundo e, por outro, limita infringir o que é imposto, visto que, há uma carência de possibilidades de acesso a outros conhecimentos diferentes dos que são institucionalizados.

Nesse sentido, Chevallard (2015) propõe o paradoxo do questionamento do mundo, em que os conhecimentos devem ser mobilizados em prol do bem-estar mundial, perpassando pelas questões ambientais, pelas desigualdades, pela inclusão, pela leitura das informações, entre outras demandas. A matemática contribui como ferramenta para o desenvolvimento dos avanços tecnológicos e científicos que emergem dos diálogos estabelecidos com as outras ciências.

Entretanto, aquele paradoxo precisa partir do princípio de um currículo dinâmico, em construção, em que o sistema didático toma uma questão original, e a partir dela se cria várias questões e respostas intermediárias para no final do *Percurso de Estudo e Pesquisa* conjecturar a solução, que pode ser provisória.

É por esse caminho de raciocínios abduativos, interpretações provisórias, criatividade, autonomia e evolução na forma de conceber o conhecimento, que se entrelaçam a Semiótica peirceana e a Teoria Antropológica do Didático e que descrevemos na seção seguinte.

2.2 O cenário da Semiótica e da Teoria Antropológica do Didático

2.2.1 O suporte científico do cenário

O cenário científico pode ser comparado metaforicamente com um quebra cabeça em que cada peça compreende os campos diferentes de conhecimento e o desenho com todas as peças é “a unidade do pensamento científico que aparece como um projeto” (Granger, 1994, p. 51). Nesta perspectiva, o desenho retrata um sistema, constituído de um conjunto ordenado de elementos (as peças do “quebra-cabeça”) que se encontram interligados e que interagem entre si formando uma organização.

A organização das peças é o cenário em que os conhecimentos se agrupam, tomam seus lugares, e se dispõem segundo sistemas conceituais ou reais. Os sistemas conceituais compreendem o conjunto de definições, símbolos e pensamentos que interagem entre si; enquanto os sistemas reais são mais instáveis, pois a organização dos seus elementos, suas partes, podem não fornecer a completude do conjunto, apresentando percas, ganhos ou trocas com o seu entorno.

Os sistemas reais, segundo Bertalanffy (1968), Capra (2006), Mariotti (2007), Morin (2008), Santaella e Vieira (2008) e Vasconcellos (2009), estariam organizados em três tipos: abertos, fechados ou isolados. Há uma visão convergente dos autores quanto aos sistemas abertos que se caracterizam pela existência de fluxos de energia com o ambiente, mas eles divergem quanto à existência (ou não) dos sistemas fechados e isolados que não há intercâmbio com o meio ambiente. Bertalanff (1968) caracteriza os sistemas como abertos, aqueles que exercem uma autorregulação e controle visando a manutenção do equilíbrio e às adaptações as alterações do meio exterior. Morin e Mariotti não expressam o sistema isolado em suas referências. Santaella e Vieira (2008), Vasconcellos (2009) e Campos (2011) ad-rogam que mesmo os sistemas fechados sofrem a interferência em algum nível do ambiente e por isso,

eles poderão também ser considerados sistemas (operacionalmente) fechados nos momentos em que por necessidade (de sobrevivência), tiverem de se ajustar, processar as informações recebidas do ambiente (*inputs*) adequando-se a este, sem, contudo, perderem suas identidades e diferenciações” (CAMPOS, 2011, p. 6).

Embora os sistemas reais estejam vinculados a Ciência em sua totalidade, podemos constatar que a escola mobiliza os conhecimentos científicos construídos, procurando ajustá-los a sociedade, processando e divulgando as informações advindas do meio externo. Nesta vertente, o sistema aberto contribui para a definição dada por Chevallard (1980) sobre os sistemas didáticos, em que situa as relações existentes entre o professor, o aluno e o conhecimento, como um “*milieu*¹⁵ de estudo” (BROUSSEAU, 1996). A instituição, escola, é pressionada por outras instituições (secretarias, ministérios, ...) ou fatores externos (políticas, economias, ...) a rever seus currículos, as metodologias aplicadas, e analisar a importância da inclusão ou supressão de alguns conhecimentos, como constata, Chevallard:

A definição de sistema aberto é notavelmente aplicada à definição do sistema didático em que ocorrem trocas entre ele e seus ambientes (que inclui a sociedade em geral, bem como subgrupos, como especialistas, pais, todas as possíveis comissões e comitês, e assim por diante); um sistema didático mantém uma entrada e saída quase contínua desse conhecimento. De fato, por razões relativas ao bom funcionamento do sistema, a pressão exercida sobre ele pelo ambiente circundante, o conhecimento a ser transmitido dentro do sistema torna-se obsoleto e acaba sendo descartado; enquanto novos conhecimentos, ou antigos conhecimentos em nova forma, são introduzidos nos currículos (CHEVALLARD, 1980, p.5, **tradução nossa**)¹⁶.

Nas trocas que ocorrem no sistema didático, a linguagem exerce um papel fundamental e é nessa vertente que o sistema semiótico, sob o ponto de vista de Peirce, contribui para a relação de significação e de interpretação de um determinado conhecimento, de uma ideia ou de um conceito. Quanto à sua classificação, podemos situá-la como um sistema operacionalmente fechado (CAMPOS, 2011), visto que ele sofre adaptações dos fenômenos externos e internos e são vulneráveis a ajustes, inserção de fatos, leis, convenções escolhidas coletivamente, em um determinado momento, que modificaram (e modificam) a sociedade.

Os signos exercem uma atração sobre os objetos para adquirirem um significado, ou seja, “é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém” (PEIRCE, 2005, p. 61). Os componentes dessa definição - o signo, o objeto e o interpretante, não podem agir de forma isolada, pois não apresentam sentido individual e a relação mútua e correlacionada entre os três elementos é uma ação, denominada por Peirce de semiose. O interpretante desencadeia

¹⁵ *Milieu*: é um conjunto de variáveis didáticas, cenários possíveis e fenômenos com a intenção didática de permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. (BROUSSEAU, 1996)

¹⁶ It is noteworthy that this definition still applies to didactic systems if we consider the exchanges which take place between them and their environment (which comprises society at large as well as specialised subgroups, such as experts, parents, all possible commissions and committees, and so on): a didactic system maintains itself in an almost continuous inflow and outflow of that particular material, knowledge. In fact, for reasons pertaining both to the proper functioning of the system and to the pressure exerted on it by the surrounding milieu, the knowledge to be imparted within the system gradually becomes obsolete and is eventually discarded; while new knowledge, or old knowledge in new form, enters curricula. (CHEVALLARD, 1980, p.5)

uma rede de conexões incalculável entre signos, em um processo que mobiliza significados diversos, tais como: crenças, hábitos que envolvem o contexto social em que ele está inserido.

Fatos, técnicas, ferramentas, ideias, conceitos, fenômenos, objetos¹⁷ são signos que dependem de um interpretante para atribuir-lhe significados, entretanto, estes estão impregnados de convenções, regras e normas socialmente construídas.

Esse enlace entre signo e sociedade pode trazer uma visão distorcida sobre aspectos da realidade social, como nos mostra Strauss (1973, p.18) ao questionar: “O que substitui um machado de pedra, e para quem?”. Na tentativa de responder as indagações, o antropólogo estabelece que o termo (machado de pedra) em si mesmo, não tem finalidade nenhuma, apenas um instrumento que sobreviveu à ação do tempo.

No entanto, consideramos o contexto, o local em que um certo tipo de objeto (machado) serviu de ambiente para o desenvolvimento de uma técnica, a possibilidade de ser interpretado por alguém como um instrumento, ele pode ser considerado como signo, pois desempenha um papel de mediação e estabelece uma relação social entre um objeto (físico ou não) com um interpretante que, por sua vez, sofre a influência das escolhas do coletivo.

É nesse sentido, que Strauss aproxima a definição da antropologia social à linguística, tomando como aporte à semiologia de Ferdinand Saussure que atribui por “objeto de estudo a vida dos signos no interior da vida social” (STRAUSS, 1973, p.17). Essa amplitude dada justifica-se nas relações que a antropologia faz com outros domínios das ciências, que observa o fenômeno em um contexto social, considerando-o como um sistema local em que alguns elementos foram retidos, excluídos e são fruto de um “sistema de escolhas significativas, compatíveis ou incompatíveis com outras, e que cada sociedade, ou cada período de seu desenvolvimento, se viu obrigada a realizar” (IBID., p.19).

É no universo das escolhas, que se toma o sentido de um signo, ou seja, aquilo que ele se refere, “por meio de um signo expressamos seu sentido e designamos sua referência” (Frege, 2011, p. 26). Estudos realizados por: Frege (1983), Russell (1905), Linsky (1967), Quine (1960), Bunge (1974) abordarão o significado atribuído ao termo referência. Contudo foi na definição dada por Gonsseth (1975, apud MORA, 2004, p.2481) de que “é preciso buscar a

¹⁷ Discutimos sobre a relação objeto e signo na seção seguinte.

referência num acordo ou mediação entre o sujeito e o mundo”, que encontramos o ponto de concordância na rede que tecemos com a antropologia e a semiótica.

O ato relacional e de mediação da tríade semiótica preserva três características importantes: ocorre de forma infinita, não é cíclica, interliga a processos cognitivos e culturais. A cada ação dos três elementos é possível gerar outras ações diferentes do original, por isso, a semiose ocorre de forma “*ad infinitum*” (PEIRCE, 2005, p.28).

Ao escolhermos a Integral Dupla para este estudo mobilizamos vários signos: as representações algébricas, as representações gráficas, os símbolos, as técnicas, os gestos, entre outros. À medida que os conceitos daquele objeto matemático são aprofundados, ampliam as relações com novos signos e objetos, que podem ser matemáticos ou não. No caso citado, o objeto escolhido promove uma ligação de conceitos provenientes da Integral Indefinida, da Integral Definida, das Superfícies Quádricas, dos Determinantes, dos Conjuntos Numéricos, da Física, das Engenharias, da Mecânica, dos fenômenos reais estabelecendo interpretações distintas para o objeto escolhido. Tal amplitude abre uma teia de possibilidades de produção de significados, que não temos como dimensionar, ou restringir, por isso, este exemplo de semiose pode ser considerado *ad infinitum*.

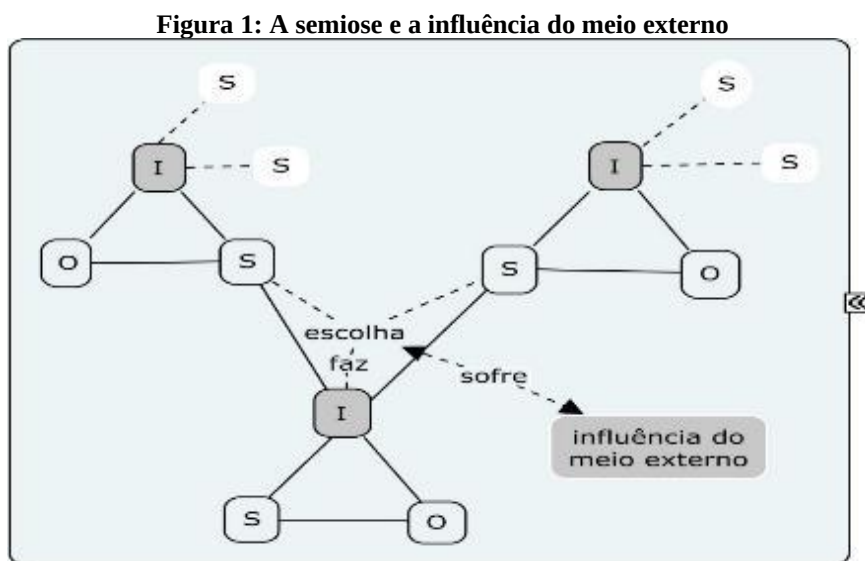
O signo ou *representâmen*, exerce um papel duplo posicional na semiose, ele pode ser o primeiro ou o último na ação. Enquanto primeiro, faz uma relação com o objeto, ou seja, aquilo que representa, o *representâmen*. Como último, sua mediação ocorre com o interpretante no ato de ser representado, por isso é considerado como uma *representação*, por “estar no lugar de algo” (IBID., p. 61). Isso leva-nos a conclusão de que o último elemento de uma tríade semiótica é o primeiro (o signo ou *representâmen*) de outra que se inicia.

No nosso estudo as Superfícies Quádricas era um signo para um dos participantes do curso, pois ele disse que desconhecia aquele conteúdo. Para conhecê-lo, o estudante teve acesso as características parciais daquele assunto, que são as representações ou signos. O indivíduo ao distingui-las passa a mediar relações entre as partes e o todo o que permite identificar o objeto matemático. O início do processo semiótico para aquele discente se dá pelos signos que mediam a relação com o objeto matemático. Esse conhecimento das partes e do todo o leva a estabelecer significados com outros contextos matemáticos ou extra matemáticos. O interpretante age sobre o objeto, o interpretando e produzindo significado, tal atitude torna a Superfície Quádrica como o último elemento na tríade semiótica.

Entretanto, no desenvolvimento do PEP desta investigação, as Superfícies Quádricas se tornam signos (ou objetos ostensivos) para o estudo do objeto matemático Integral Dupla, iniciando uma nova semiose, que tem por finalidade interpretá-la e significá-la.

Essa duplicidade posicional do signo e a forma infinita de processar a ação coloca a semiose na posição de análise dos processos cognitivos responsáveis pela aprendizagem, bem como, o deixa susceptível a mudanças de interpretações, representações e significações, pois o interpretante pode vir a ser influenciado por fenômenos externos, como por exemplo, a cultura que está em seu entorno social, o que nos aproxima do estudo da antropologia.

Na Figura 1 registramos o processo da semiose - signo(S), objeto (O) e o interpretante(I) - e a influência do meio externo¹⁸ para a escolha da próxima semiose, quando I escolhe um S sob a influência de crenças, regras, normas do meio externo, de forma *ad infinitum*.



Fonte: Produção da autora

É no processo de escolhas interpretativas que as instituições exercem direcionamentos e polarizam o modo de pensar dos interpretantes. A escola e a sua noosfera, exercem um papel decisivo sobre como o estudante aprende e como deve ser ensinado. O currículo, os livros didáticos, os professores, as políticas públicas em que a escola está imersa, não estão desvinculados do entorno social, político, econômico e cultural. Logo, o tipo de metodologia, o discurso, a escolha do livro a ser adotado segue sempre uma tendência a manutenção de um *status quo* de interesse nem sempre explícito.

¹⁸ Neste estudo estamos considerando como meio externo qualquer fenômeno que ocorre fora da mente do interpretante.

As disciplinas são compartimentadas, desvinculadas e falta o conhecimento do todo. As implicações educacionais e científicas fragmentadas em áreas do conhecimento têm sido discutidos por Fazenda (1998) entre outros, no intuito de repensar a educação. Entretanto, o processo formativo dos professores está vinculado a Universidade que ainda não encontrou um meio de resolver o problema porque, também, está inserido em uma noosfera a qual nos referimos anteriormente.

Dentro desse contexto, situamos a disciplina Matemática, que possui uma linguagem simbólica, abstrata e formal, cujo ensino tem sido desvinculado das outras disciplinas, exercendo o papel de “rainha das ciências” (GAUSS, 1856), o que para alguns dão o status de poder, de supremacia, perpetuando a crença que o seu estudo é destinado para os dotados de uma inteligência suprema, e que são destinados a um dom restrito a poucos.

Os objetos matemáticos estão contidos em um sistema simbólico, “um conjunto de signos efetivamente dados e efetivamente construtíveis” (GRANGER, 2013, p. 129) e, inegavelmente, a construção deles, enquanto objeto científico, é feita por uma minoria, que é submetida a uma comunidade para sua validação. Ao serem reconhecidos os signos se tornam convenções, ou seja, seguem regras estabelecidas, interpretadas, representadas e intercedem na mediação entre os símbolos e noções conceituais daquele objeto, com o intuito de favorecer o surgimento de outros objetos matemáticos.

Entretanto, qual seria a utilidade da matemática se ela ficasse restrita a essa minoria? A matemática como uma prática destinada à evolução do homem em um contexto social e cultural, não deve negar ou excluir a sua cientificidade, mas tem o papel de reconstruí-la para uma maioria. Nesse aspecto, a transposição didática¹⁹ auxilia no processo da transformação da linguagem do saber científico para o saber ensinado. Aqui, a ênfase é posta aos processos de ensino do objeto científico que sofre adaptações, restrições ou condições para ser ensinado em sala de aula. É nessa vertente que a Teoria Antropológica do Didático situa a Didática da Matemática, como uma ciência “dedicada a estudar as condições e restrições sob as quais as

¹⁹ Michel Verret, em 1974, na tese de doutoramento intitulada *Le temps des études*, na Université de Paris V, foi o primeiro a definir o termo Transposição Didática e a definiu como: « Toda prática de ensino de um objeto presuppõe o efeito da transformação prévia de seu objeto em um objeto de ensino » (VERRET, 1975, p. 140).

praxeologias matemáticas começam a viver, a migrar, a mudar, operar, definir, desaparecer, renascer, etc., dentro de grupos humanos” (CHEVALLARD, 2007, p.14, **tradução nossa**)²⁰.

No entanto, essas praxeologias matemáticas são compartilhadas em sala de aula, por intermédio dos signos que comunicam aos interpretantes as informações dos objetos matemáticos. Esse sistema semiótico, inclui pensamentos externos e internos a matemática, que tem o seu habitat nas instituições e é por elas que circulam o conhecimento e seus significados.

A ação daquele sistema é guiada por discursos que circulam no âmbito escolar, como por exemplo, o tema contextualização dos objetos matemáticos em situações reais. Nesse sentido, Maioli (2012, p.154) destaca que “a ideia de contextualização passou a ser incorporada ao discurso pedagógico, mas não com a explicação das teorias que as sustentam”. Portanto, discutir sobre a contextualização requer uma análise dos teóricos que abordam o tema e não perder de vista que um dos objetivos do ensino da matemática é ter acesso aos conceitos que a compõem; à linguagem simbólica que a constitui, às propriedades, às definições, os teoremas e as regras do seu jogo formal. Não os disponibilizar ao estudante o colocará a margem da compreensão do mundo em que vive. Nesse sentido,

Outro aspecto, se relaciona com a reflexão do tipo de contextualização que tem sido desenvolvido pelos livros didáticos adotados nas escolas, em que apresentam situações problemas que relacionam o objeto matemático a outras áreas de conhecimento em seu enunciado, mas que para resolvê-los aplica-se, apenas, algoritmos. Ou ainda, os projetos interdisciplinares praticados em algumas escolas brasileiras, em que a Matemática é usada apenas para atribuir uma pontuação no final da unidade e não requer nenhum conhecimento durante o seu desenvolvimento.

Defendemos que uma contextualização matemática precisa contribuir para que as noções conceituais do objeto matemático sejam construídas no decurso das ações praticadas pelo seu interpretante. O seu foco não é o contexto, mas o que ele pode proporcionar para que o estudante adquira as noções abstratas e a estrutura do objeto. Por isso, as situações propostas têm que problematizar, incitar reflexões e a busca de soluções para respondê-las. O espaço de abrangência é mais amplo do que um contexto físico, concreto, ou uma situação do dia a dia do estudante. Envolve discutir processos metodológicos, erros e acertos, a avaliação, o respeito as

²⁰ la didactique des mathématiques se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles des praxéologies mathématiques se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à déperir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des groupes humains.

divergências, e a possibilidade de não se encontrar uma resposta única para o problema proposto.

Percebe-se que a contextualização assim proposta desestabiliza algumas crenças no processo de ensino e que demanda ainda amadurecimento da sociedade brasileira. A educação exigida pelo estrato social é elitista - seleciona as melhores notas -, não lida com acertos e erros, avalia apenas acertos, os erros são transformados em incapacidade do indivíduo. É centrada na percepção de que existe uma verdade única, e que de preferência seja aquela do doutrinador. Por isso, contextualizar a matemática como a concebemos é um trabalho árduo e desafiador.

A intenção nesta seção era construir um cenário científico para situar a matemática como uma prática que mobiliza um sistema de signos construídos por uma cultura e que no processo de semiose a escolha a ser feita pelo interpretante é influenciada por uma instituição que legitima os conhecimentos. Para isso buscamos os tipos de sistemas, a base da antropologia cultural e o sistema semiótico peirceano. Na seção seguinte, discutimos a relação dos elementos da Teoria Antropológica do Didático com os pressupostos da Semiótica peirceana.

2.2.2 A imersão da Semiótica na Teoria Antropológica do Didático

Desde a pré-história o homem busca viver em grupos, para enfrentar as adversidades da natureza, se comunicarem e sobreviverem. Associaram entre si ampliando seus espaços físicos e culturais, originando as primeiras sociedades. Para o equilíbrio e harmonização entre eles fez-se necessário instituir leis que garantissem a ordem e, competia aos homens divulgá-las por meio das instituições.

São elas que oferecem condições e restrições para que disseminem princípios morais, éticos, culturais, entre outros, que servirão de base para a convivência entre as pessoas e o mundo. É nesse contexto que a escola desempenha o papel de difusora dos princípios que emanam do povo, pois, aquela é uma instituição na qual “uma sociedade oferece aos sujeitos certas disciplinas, em que certas obras serão estudadas, criando algumas condições que visam a difusão do conhecimento” (CHEVALLARD, 2013, **tradução nossa**)²¹.

Cabe às instituições estudar essas condições e restrições, propiciar ações referentes ao ensino e a aprendizagem na escola e discutir de forma crítica os aspectos da sociedade e da civilização que interferem nas instituições de ensino. Há, portanto, uma organização pedagógica

²¹ Une société donnée offre à certaines catégories de ses sujets des écoles où l'on étudie certaines oeuvres, créant en cela des conditions visant la diffusion de certaines connaissances. (CHEVALLARD, 2013)

que fórmula e elabora os currículos estabelecendo quais disciplinas farão parte do processo formativo dos estudantes; consulta e adquire os livros didáticos provenientes do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, entre outras ações.

Essas disciplinas, da forma que compõem o sistema educacional brasileiro, têm um caráter fragmentário, ou seja, elas são isoladas entre si, os conteúdos e as atividades didáticas não se relacionam, não existe um projeto universal que os interliguem para que possam ter uma intencionalidade comum. Nesse sentido, Severino (2012, p.38) evidencia que “a desarticulação fragmentária se manifesta ainda na dificuldade, reconhecidamente presente nas diversas instâncias do sistema institucional de ensino, de *articular os meios aos fins, de utilizar os recursos para alcançar os fins essenciais do processo*”.

Nesta perspectiva, a organização pedagógica precisa estar pautada em um “conjunto articulado de propostas e planos de ação com finalidades baseadas em valores previamente explicitados e assumidos, ou seja, de propostas e planos fundados numa intencionalidade” (IBID., p.39). A intencionalidade da proposta pedagógica deve priorizar a construção de um conhecimento holístico, não descaracterizando as partes, mas integrando-as para um conhecimento numa perspectiva da totalidade.

As disciplinas também estão organizadas em domínios, que são os objetos do conhecimento específico que as compõem, aqueles são ainda agrupados em setores. E os setores se organizam em temas para se alcançar um saber específico.

É sob essa base que a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (2002, 2007), finca seus fundamentos. Ao delimitar os níveis de codeterminação didática: *civilização, sociedade, escola, pedagogia, disciplina, domínio, setores, temas e sujeito*, o autor traz da antropologia seus constructos teóricos associando-os ao sistema educacional. No entanto, a hierarquia dos níveis também favorece analisar as condições e restrições da organização matemática e da organização didática dentro da instituição de ensino.

Para além da análise, ao transitar por esses níveis, percebemos que a relação de um indivíduo (X) com a instituição (I) pode articular níveis superiores (humanidade, civilização, sociedade, escola, pedagogia) com os níveis inferiores (disciplina, domínio, setores, temas e sujeito) por intermédio de atividades didáticas alternativas que envolvam infraestruturas matemáticas não pertencentes ao contexto dominante (livros didáticos, currículos).

No entanto, para atingir esse objetivo o professor ao elaborar sua organização didática precisa conhecer profundamente o objeto matemático a ensinar; a razão dele existir,

compreender as escolhas feitas pelos matemáticos ao desenvolverem os teoremas, demonstrações e regras que prevalecem como saber sábio, até os dias atuais. Destarte, é necessário questionar e explicitar a forma como os currículos se apresentam em uma instituição e desenvolver modelos alternativos de tarefas e de estudo dos objetos matemáticos.

A construção de modelos matemáticos consiste em uma aproximação da realidade, uma hipótese a ser validada que pode levar em conta os fenômenos que surgem dentro de uma sociedade. Como fenômeno didático os modelos que se aproximam de uma realidade constituem uma fonte potencial para a criação de novas teorias, novas técnicas e metodologias de pesquisa. Por intermédio da análise dos resultados obtidos ainda pode fomentar a elaboração de problemas inéditos ou de práticas ainda não institucionalizadas, conforme consideram Artigue, Bosch, Gascón (2011, p.3).

Quando um indivíduo (X) mobiliza conhecimentos nos diferentes níveis de codeterminação em prol de extrapolar as práticas vigentes nas instituições (I) e promover organizações didáticas envolvendo um objeto matemático, ele mobiliza processos abduativos, criativos e inéditos. Contudo, isso demanda um estudo epistemológico do objeto, a correlação com outras disciplinas e uma dedicação a esse fim. Compreendemos que enveredar nessa nova trilha consiste em uma quebra do paradigma educacional vigente, em que os currículos precisam ser flexibilizados e, também, faz-se necessário empoderar os professores para o desenvolvimento da autonomia em estabelecer as disciplinas, os domínios, os setores que serão mobilizados no transcorrer da sua aula colocando em prática uma atividade diferente das encontradas nos livros usuais.

Conjecturamos que tal mudança precisa transcorrer não só no âmbito escolar, mas nos níveis superiores da codeterminação. É necessário transcender os aspectos culturais vigentes na sociedade que busca na escola a uniformização do saber promovendo um ambiente competitivo e classificatório com currículos distantes da realidade do estudante, acirrando as diferenças de classe econômica. A criatividade é posta de lado em detrimento do *mimetismo cultural*²².

Diante destas restrições ressaltamos que a construção do saber por um indivíduo está pautada em um processo histórico e coletivo que tem as instituições como base para a sua difusão. Na escola os indivíduos relacionarão o conhecimento científico com as práticas

²² O mimetismo cultural é um termo usado por Chevallard (2002, p.1) o mimetismo cultural, que o professor ensina - ou seja, *mostra* - o que há para fazer, como fazer e por que fazê-lo. Do original: “et du mimétisme culturel, que le professeur enseigne – c’est-à-dire montre – ce qu’il y a à faire, comment le faire, et pourquoi le faire ainsi”.

vivenciadas, mas é na ação, por meio das atividades didáticas que o processo pedagógico acontece.

Por isso, para Chevallard (1988, p.1) “qualquer atividade matemática pode ser localizada em termos de atividades humanas e instituições sociais”, basta que haja o seu reconhecimento pela instituição, a intenção didática e a busca por um modelo único, denominado de praxeologia. Esse modelo está dividido em duas esferas: a esfera da prática que se produz o saber fazer (*know-how*), pautada em uma intencionalidade no existir na ação, e se apresentam por intermédio do tipo de tarefa (T) e da técnica (τ) e a outra, a esfera do saber (*logos*) que são as justificativas, as noções teóricas que fundamentam a prática, e compreendem a tecnologia (θ) e a teoria (Θ).

Os gêneros das tarefas são expressos por verbos no infinitivo e designam um comando para o interpretante, por esse motivo sua mensagem preserva caracteres gerais. Enquanto a tarefa (t) é mais específica e delimita algumas condições para o tipo de tarefa (T), por isso, em alguns casos, $t \in T$. Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1: Calcular a integral iterada.

Para o exemplo 1, o enunciado da questão é geral, não temos como definir qual a integral iterada que devemos calcular, nesse caso se trata de um tipo de tarefa (T).

Exemplo 2: Calcule a integral iterada $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dy dx$.

Para o exemplo 2, o enunciado da atividade é mais específico, pois delimita qual é a integral que deve ser calculada, nesse caso trata-se de uma tarefa (t) que pertence ao tipo de tarefa (T) anterior e tem o mesmo gênero de tarefa apresentado no exemplo 1.

Toda tarefa demanda uma ação que inicialmente deve ser interpretada e posteriormente executada. A forma escolhida pelo indivíduo para realizar a tarefa proposta é chamado de técnica (τ). Retornemos ao exemplo 2.

Exemplo2: Calcule a integral iterada $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dy dx$

$$\left. \begin{aligned}
 \int_1^2 \left[\int_0^{2x} xy^3 dy \right] dx &= \frac{1}{4} \int_1^2 [xy^4]_0^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_1^2 [x(2x)^4 - x \cdot 0^4] dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_1^2 [16x^5] dx \\
 &= \frac{16}{24} [x^6]_1^2 \\
 &= \frac{2}{3} (2^6 - 1^6) \\
 &= 42
 \end{aligned} \right\} \text{técnica}(\tau)$$

Os procedimentos usados podem ser resumidamente descritos:

- 1) Isolamos nos colchetes a integral cujo domínio tem variáveis ($0 \leq y \leq 2x$).
- 2) Calculamos a integral do colchete, a integração é realizada em relação a variável y , considerando x uma constante.
- 3) Em seguida, os limites da integral devem ser substituídos na variável y , obtendo uma função contínua em relação a x .
- 4) Integra essa função em relação a variável x
- 5) Substitui os valores do limite de integração da variável x ($1 \leq x \leq 2$).
- 6) Por fim, encontra-se um número real positivo constante.

A solução apresentada é reconhecida por uma determinada instituição, pode não ser a única ou pode surgir outras ao longo da execução da tarefa (t) que serão analisadas quanto a sua veracidade.

Os tipos de tarefas, as tarefas e as técnicas fazem parte das práxis, que compreendem o comando e a ação, por isso fazem parte do bloco saber-fazer. Mas, o que justifica essa técnica? Quem garante a sua razão de ser? Como pode ser generalizada?

As soluções dessas perguntas encontram-se no bloco *logos* que fundamenta de forma consistente e validada por uma academia (no caso específico: os matemáticos) e são utilizados, para tal fim: os teoremas, os axiomas e as definições que justificam a teoria. A tecnologia (θ) exerce o papel de responder matematicamente a eficácia e a funcionalidade de uma técnica, impondo as restrições e condições necessárias para sua concretização. Já a Teoria (Θ) mostra a razão de ser de uma técnica tomando como aporte a justificativa dada pela tecnologia, ela se apresenta de forma mais abstrata e generalizante, mas ela pode sofrer transformações com o tempo, como podemos constatar com o surgimento do conjunto números complexos, que alterou toda a estrutura da matemática.

No Exemplo 2, a técnica apresentada se justifica pelo teorema da integral iterada, pelo Teorema de Fubini, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, entre outros, que juntos constituem a tecnologia (θ). Entretanto, o que justificam esses teoremas, ou a razão deles existirem é a teoria (Θ), que no exemplo fornecido é a Integral Dupla, um dos conceitos do CDI. A quádrupla (T, τ, θ, Θ) consiste na organização matemática local relacionada a esse saber.

As escolhas das tarefas, que possibilitem técnicas cada vez mais criativas e diferentes das já encontradas nas instituições possibilitam que outros níveis da determinação sejam explorados e estudados evitando que seja negligenciado o papel das condições e restrições dos níveis superiores.

Essa organização didática ou praxeologia didática, precisa criar condições para que um indivíduo busque respostas para questionamentos não explícitos nas obras (ou apresentados de forma superficial). Ao criar um momento para isso, um sistema didático é formado. Vale ressaltar que embora estamos o situando em um contexto escolar ele é amplo, pois compreende relações de ensino e de aprendizagem entre indivíduos em busca de uma resposta para um problema proposto a uma sociedade.

O *sistema didático* proposto por Chevallard (2007) é constituído por um conjunto de indivíduos X (ou apenas um indivíduo), que sob a orientação de Y é submetido a uma obra O , simbolicamente representado por S (X, Y, O). A questão O , apresentada a X consiste em um signo, algo novo, sem significado e que necessita ser decifrado. Esse signo estabelece relações com objetos, físicos ou não, com o objetivo de atribuir um benefício para o signo. Três direções podem ser tomadas no sentido de revelar o potencial do signo no processo de objetivação²³: a representação, a memória e a comunicação ((DELEUZE, 1987).

Na matemática essas direções são essenciais para o ensino e a aprendizagem. A representação, na visão da Semiótica peirceana, tem o papel de trazer aspectos que se assemelham ao objeto e o faz por intermédio de ícones, signos que preservam similaridades com o objeto (PEIRCE, 2005, p. 28). Ele tem o papel de exprimir aspectos parciais do objeto, torná-lo visível ao interpretante, mas não tem a pretensão de ser uma entidade igual ao objeto real, nem tão pouco se resvala nos processos de cópias, imitações ou repetições.

²³ Tratamos aqui a objetivação como o ato do signo se aproximar do objeto ao ponto de torná-lo uma coisa física, material ou representada. (GRANGER, 2013)

Na busca por aspectos semelhantes, o interpretante mobiliza entes cognitivos: imagens, diagramas e metáforas, com o intuito de representar o objeto matemático. As imagens se dividem em dois tipos de representações: as imagens visuais e as mentais. As imagens como representações visuais são aprisionadas pelo sentido por meio de desenhos, de pinturas, de gravuras, de fotografias, entre outras, que transformam os signos em objetos materiais. Nesse sentido, há uma aproximação entre os signos e os objetos no nível da representação, papel exercido pelo ícone, que busca um esquema, para externar o visto sob a influência do interpretante. Já as imagens mentais estão presentes no mundo das ideias, da imaginação, dos esquemas, dos modelos e traz elementos cognitivos para configurar a representação (SANTAELLA, 2015). A relevância da imagem para a compreensão dos objetos matemáticos está no estágio transitório entre as ideias e o seu registro, que obriga o interpretante a transgredir do pensamento para a ação.

Ainda sob o viés da representatividade icônica, os diagramas desempenham relações entre um objeto e suas próprias partes, eles articulam representações mentais e visuais para que se materialize e se torne perceptível aos olhos do interpretante. Na matemática o pensamento diagramático contribui para a construção dos raciocínios (dedutivos, indutivos e abduativos), para o desenvolvimento de uma técnica e para a significação dos seus objetos. Nesse sentido, “todo raciocínio matemático utiliza o pensamento diagramático” (PEIRCE, 2005, p.183) para conhecer as partes de um dos seus objetos.

Na subdivisão dos ícones, se apresentam as metáforas que desempenham a função de estabelecer um paralelismo de ideias entre objetos e as representações que mantém a relação de semelhança. É por meio da construção teórica desenvolvida por culturas anteriores que o novo emerge, isso só ocorre porque existe algo anterior para que a ciência se apoie, se assegure e regule o objeto do conhecimento (CHEVALLARD, 1991). Na matemática, a metáfora representa, simbolicamente algo. Posição que se aproxima da ideia defendida por Leibniz de que o símbolo é uma economia para o pensamento racional, é a orientação do pensamento.

O símbolo tem um significado que remonta a antiguidade, os gregos já o definiam como um contrato, uma convenção e foi Aristóteles que o associou ao nome, concretizando a ideia e a relacionando com a palavra (CP 2.298)²⁴, assim toda palavra é um símbolo. Entretanto, o símbolo só terá sentido se o intérprete medeia a relação do signo com o objeto com o intuito de

²⁴ Os estudiosos da Semiótica peirceana fazem referência a coleção de manuscritos elaborado por Peirce usando a sigla CP acompanhada do capítulo e da localização do registro ao qual o autor numerou.

criar um hábito, uma lei, ou uma convenção. Para Granger (2013, p. 128) o símbolo é “uma regra convencional de evocação do significado”.

O interpretante para dar significado ao objeto semeia hipóteses advindas da observação do fenômeno, das experiências vividas em busca de uma generalização ou de uma suposta veracidade. Ao obtê-las, se desenvolve o hábito, as leis que serão alicerçadas por uma conduta racional e pelo meio social que serão difundidas como símbolos, culturalmente instituídos pela comunidade. Tal aspecto se aproxima do pragmatismo peirceano, tendo em vista que um conceito não tem em si mesmo nenhum significado, a não ser quando relaciona-se com outros conceitos.

O sistema simbólico possibilita a criação de novos signos (GRANGER, 2013, p.129), porém os vinculam a uma rede de estruturas mais complexas, o que permite um léxico finito de significados. Entretanto, a fixação de referências rigorosas e de regras elaboradas certificam o estatuto de sistema simbólico formal, possibilitando estabelecer relações transitáveis de signo para signo (sintaxe), que são os símbolos abstratos, e de signos com indivíduos (semântica). “Todos os signos lógicos-matemáticos funcionam como símbolos abstratos” (IBID., p.144).

Na matemática, o uso do formalismo, das regras, das abstrações, das demonstrações e a manipulação de símbolos constituem os aspectos sintáticos da linguagem matemática. Tais aspectos potencializam a mediação do signo (*representamen*) matemático com o objeto para que sejam representados, interpretados e possa ser atribuído uma significação, aspectos que demanda uma ordem semântica na linguagem matemática. Entretanto, o uso dos símbolos em diversas situações no seio da matemática, e em outros campos do conhecimento, faz emergir aspectos pragmáticos daquela linguagem.

Ativar o uso dos símbolos em tarefas matemáticas evoca a memória do interpretante, quer ela seja uma memória prática, pública ou do saber (MATHERON, 2004), para a produção de significados. A memória prática (*mémoire pratique*) é convocada quando a técnica demanda o uso de regras, leis ou hábitos, ou seja, os símbolos que evocam uma tecnologia e uma teoria. A memória pública (*mémoire publique*) é construída pelas diferentes memórias do meio e com a intervenção de Y. Geralmente a memória pública demanda um processo de reconstrução do conhecimento anteriormente visitado²⁵, um processo histórico, o que Chevallard (2007) chama

²⁵ A alteridade praxeológica proposta por Chevallard se enquadra neste tipo de memória, pois nada é dado inteiramente, tudo é construído, reconstruído a depender da instituição.

de alteridade praxeológica. A memória do saber (*mémoire du savoir*) está diretamente relacionado com a epistemologia do objeto matemático.

Sobre a relação entre símbolos e memória podemos destacar o caminho construído por Leibniz que associa o conhecimento simbólico com os processos semióticos desenvolvidos por uma mente ao usar abreviações e simplificações nos processos de pensamento movidos por regras e estruturas sintáticas bem definidas. Como resultado, ele: consegue afastar as interpretações dúbias que são frequentemente reveladas pela língua natural e atenuar o uso da memória, contributos essenciais na escalada da construção do CDI. Os feitos de Leibniz para o que viria ser a Semiótica, um século depois, concentra-se na forma como ele concebe a mediação entre os signos e o conhecimento e os aspectos cognitivos e lógicos do uso dos signos e de outras questões mais amplas, como a comunicação.

A representação e a evocação da memória estão diretamente ligadas ao sistema semiótico, pois, comunicam informações, significados e interpretações para a instituição de um objeto. É nesse sentido que um objeto só adquire significado se for reconhecido por uma instituição (CHEVALLARD, 1999). Existem, portanto, duas relações imbricadas: a de uma pessoa x com o objeto O , representada por $R(x, O)$ e a da pessoa x , pertencente a uma instituição I na posição p , dada por $R_i(p, O)$, ambas não são vazias, pois carregam em si elementos de uma vivência.

Uma pessoa x frente a um objeto O toma várias posições (p' , p'' , p''' , ...) em uma instituição I com o objetivo de executar uma determinada tarefa, usando uma técnica conhecida em I , esses diferentes relacionamentos de x em posições distintas, é que faz emergir a avaliação do objeto O , bem como, a intervenção do sujeito x de I em uma determinada posição. Assim dois universos cognitivos são formados: o universo do sujeito, $U(x) = \{O, R(x, O) / R(x, O) \neq \emptyset\}$, e o universo cognitivo da posição de p em I , $I(p) = \{O, I(p, O) / I(p, O) \neq \emptyset\}$.

Tomemos como exemplo uma professora x que leciona em uma universidade (posição p) e está ensinando como calcular a medida do volume de um parabolóide elíptico usando a Integral Dupla. Verifica-se a existência de uma relação do objeto matemático, com a professora x , ou seja, $R(x, \text{volume do parabolóide elíptico})$, no entanto, essa relação está ocorrendo em uma instituição de ensino em que x toma a posição de professora, $R_i(p, O)$. No entanto, essas relações não são vazias, haja visto que a professora x teve contato com esse objeto em outra instituição I' (universidade) como estudante (posição p') e na sua própria formação no Ensino

Básico, assim a relação da professora com o objeto, $R(x, O)$, emerge de relacionamentos institucionais $R_I(p, O)$, $R_I(p', O)$, ... com as quais ela teve contato.

As relações do objeto com o sujeito ou com a posição que ele toma em uma determinada instituição estão diretamente ligadas a atividade que irá exercer. Os signos ocupam o lugar de objetos que eles representam para mobilizar técnicas, tecnologias e teorias na tarefa proposta.

Esses objetos se classificam, segundo a semiótica peirceana, em imediatos e dinâmicos. Os objetos imediatos, são os veículos para externar partes do objeto dinâmico, eles sugerem, ou o representam, por isso podem ser perceptíveis e manipuláveis, são signos que caracterizam diversas facetas do mesmo objeto, evocando os ícones, os índices ou os símbolos para serem notados, “ao capturar uma faceta o objeto imediato se faz representar no próprio signo” (SOUZA E DRIGO, 2013, p. 39). Os objetos dinâmicos têm uma extensão mais ampla, para além do signo e da representação, ele não é perceptível, pode ser fictício, é “aquilo que, pela natureza das coisas, o signo não pode exprimir e que só pode indicar, deixando para o intérprete descobri-lo por experiência colateral” (CP 8.314, 1897).

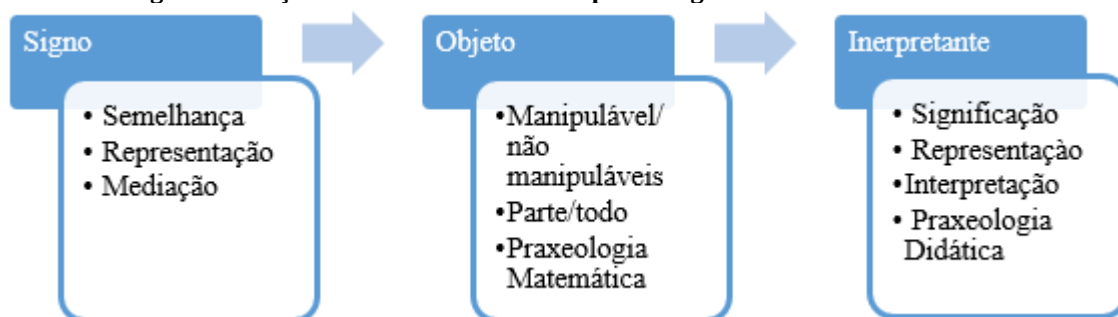
Na TAD, os objetos se classificam em ostensivos e não ostensivos. Para Chevallard e Bosch (1999, p. 16) “os objetos ostensivos são as palavras, os grafismos, as escrituras, os gestos e os objetos materiais de qualquer tipo. As noções, ideias, conceitos etc., seriam então, simplesmente, objetos não ostensivos”²⁶.

Algumas inferências podem ser levantadas sobre a articulação entre a Semiótica peirceana e a TAD a partir da construção que estamos tecendo. A primeira é a semelhança apresentada entre o objeto dinâmico e o objeto não ostensivo e, entre o objeto imediato e o objeto ostensivo. A segunda, diz respeito a posição que o signo pode assumir enquanto representação de um objeto imediato, respaldado pela ação dos ícones, dos índices e dos símbolos. A terceira inferência é decorrente da ação das duas anteriores. Como os objetos vivem em uma instituição e são mobilizados para exercerem uma atividade eles fazem parte, particularmente, de uma praxeologia matemática e didática. Nesse sentido, Chevallard e Bosch (1999) afirmam que em “toda atividade humana, há a coativação dos objetos ostensivos e não ostensivos e que eles aparecem em todos os níveis de atividades, tanto em termos de tecnologia como no seu ambiente teórico-tecnológico.

²⁶ Hemos escogido la voz “ostensivo”: las palabras, los grafismos, las escrituras, los gestos y los objetos materiales de todo tipo son objetos ostensivos; las nociones, ideas, conceptos, etc., serian entonces, simplemente, objetos no-ostensivos. (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p.16)

No entanto, no desenvolvimento de uma tarefa matemática proposta o estudante buscará em sua memória os signos que o auxiliam nas técnicas, cada procedimento usado na solução compreende um conjunto de signos que remete a outros, desempenhando várias semioses até que finalize com uma resposta. Inferimos que o sistema didático compreende uma tríade que convoca os interpretantes a atribuir um significado ou uma representação à obra ou ao objeto proposto. Nesse sentido, existe uma organização ou praxeologia didática previamente estabelecida pelo professor (ou coordenador do estudo) em torno do objeto matemático, uma organização matemática que, ao colocar em prática em um certo ambiente, determina uma praxeologia didática, conforme sintetizado na Figura 2.

Figura 2: A ação da tríade semiótica nas praxeologias - Didática e Matemática



Fonte: Produção da autora

Como vimos o objeto matemático faz parte de um sistema simbólico formal em que eventualmente podem emergir elementos novos, hipóteses que exigem a criação de teoremas, axiomas e que necessitam ser comprovados. Esses elementos podem desestruturar todo o sistema matemático e para equilibrá-lo ocorre um processo de regulação, em que uma imagem do sistema é projetada (isomorfismo), dentro do próprio sistema (GRANGER, 2013) para incluir aquele elemento e expandir o campo do conhecimento.

A regulação no nível científico ocorre quando o sistema simbólico formal desequilibra com a inserção de um elemento de fronteira ao campo matemático impondo uma reorganização das estruturas epistemológicas dos seus objetos, o que promove uma nova organização matemática, como constatado com o surgimento do conjunto dos números complexos e com a topologia que obrigou mudanças na Teoria.

No nível didático a regulação pode ocorrer em dois movimentos: o primeiro deles consiste nas adaptações realizadas pelo professor (ou pelo livro didático) para ensinar um tema matemático epistemologicamente construído pelos matemáticos, denominado por Vernet (1975) e Chevallard (1982) de transposição didática. E o segundo é a semiose (PEIRCE, 2005) desencadeada pelos estudantes no processo de interpretação e de significação do objeto

ensinado. Em ambos os movimentos, a organização didática previamente elaborada pode sofrer modificações no momento da prática, criando uma imagem (restrita ou complexa) do que foi planejado.

A amplitude dessa imagem está diretamente ligada aos procedimentos e organizações didáticas colocadas em ação, no fazer em sala de aula. Os princípios norteadores: tipo de tarefa, escolhas das técnicas, relações com outras áreas dos conhecimentos, entre outros é que farão a regulação no nível da prática é, portanto, a situação que determina as praxeologias matemáticas, didáticas que devem emergir da circunstância.

Nesse sentido, uma situação matemática²⁷ (questão geratriz, problema, tarefa) evoca praxeologias para constituir significados. No sistema didático o professor busca epistemologicamente as praxeologias matemáticas que devem ser colocadas em prática por uma praxeologia didática. Os dois níveis de regulação, a linguagem, as escolhas, os raciocínios (abduativos, dedutivos e indutivos), as crenças, os hábitos, os signos, os objetos e o interpretante colaboraram para que as praxeologias ocupem um papel fundamental no sistema didático frente a um conjunto de circunstâncias em que o ensino e a aprendizagem de um determinado objeto do saber acontecem.

Assim, diante dos entrelaces tecidos, constatamos que a semiótica tem uma função reguladora para as praxeologias. Tal afirmação se justifica pela abertura do sistema didático, em que a obra proposta (o) ao estudante e elaborada (o) pelo professor, geralmente, não é reconhecida pelos estudantes obrigando-os a interagir com o objeto por intermédio dos signos (símbolos culturalmente institucionalizados e intencionalmente articulados pelo professor ao organizar sua praxeologia) na produção de significados para aquele objeto. Essa interação é cognitiva, e percebemos que os signos podem se referir aos objetos imediatos ou ostensivos preservando uma semelhança disponibilizada pelos ícones, índices e símbolos, com os objetos dinâmicos ou não ostensivos que são mais completos. Na passagem dos objetos imediatos/ostensivos para os objetos dinâmicos/não ostensivos existe um processo regulado em que um serve de instrumento para que o outro se apresente ao interpretante.

Essa regulação ocorre com a mediação dos símbolos, que corporifica os objetos dinâmicos e assim o faz seguindo regras constituídas apenas para o sistema do objeto a ser estudado, ou seja, no seu interior, no nível da praxeologia matemática. Entretanto a situação

²⁷ Consideramos situação matemática uma tarefa que envolve contextos matemáticos e não matemáticos.

favorece uma gama de significados que podem atingir a escala dos níveis superiores da determinação (humanidade, civilização, sociedade) (CHEVALLARD, 2002) cuja abrangência do conhecimento matemático alcança patamares complexos, que não são restritos ao seu campo interno, mas (re)significados dentro de contextos: naturais, antropomórficos, semióticos, psicológicos, sociais, financeiros, sociológicos, entre outros.

As noções dadas pela TAD sobre os dois tipos de objetos são fundamentadas nos objetos da Semiótica peirceana, poderíamos abordá-los escolhendo entre uma das duas teorias. Entretanto, o que pretendemos mostrar é que a semiose, que envolve a ação da tríade, é responsável pela aprendizagem dos estudantes ao produzirem significados. Para os semiotistas peirceanos não importa apenas os tipos de objetos, mas como são feitas as mediações dele com os signos e com os interpretantes. Para eles, o sentido e o significado atribuído aos tipos de objetos são mais relevantes para o estudante do que o próprio objeto. Se os estudantes não conseguem atribuir um significado a um objeto referendado, a semiose foi interrompida, não houve a aprendizagem. Por isso, Peirce (2015, p. 163) afirma “que signo algum pode ser entendido – ou, pelo menos, que nenhuma proposição pode ser entendida – a menos que o intérprete tenha um “conhecimento colateral”²⁸ de cada um dos seus objetos”. Resumidamente, enquanto, que para a TAD tudo é objeto, para a Semiótica peirceana tudo se dá por semiose, em que a relação do objeto com o interpretante produz significados.

Por isso, definimos que existe uma praxeologia situacional em que o conjunto de ações visam uma transformação na conduta educacional para além das organizações didáticas e matemáticas e que ela favorece a ressignificação desses conhecimentos para o mundo e para o homem. Essas praxeologias envolvem os dois blocos do saber, mas não podem ser estabelecidas previamente, pois elas diferenciam a depender das circunstâncias. Consiste em um corpo flexível formado por interpretações variadas, que tomam como pressupostos as estruturas formuladas e os conhecimentos adquiridos para aventurar em caminhos incertos, em busca de novos significados.

As praxeologias situacionais possuem dois blocos do saber, que podem ou não ser científicos, mas que acontecem no exercício das atividades profissionais, não estão diretamente

²⁸ “Por conhecimento colateral entendo uma prévia familiaridade com aquilo que o signo denota”. (PEIRCE, 2005, p. 161).

associados a um objeto matemático, embora ele possa estar presente. Chevallard²⁹ (2009, p.16, **tradução nossa, grifo nosso**) discute sobre as praxeologias profissionais:

Podemos identificar três categorias alinhadas às praxeologias profissionais: categoria mais ampla e sempre aberta é a das praxeologias para a profissão, que inclui todas as praxeologias cuja profissão pode ter vantagem de equipar. Claro, esta categoria contém a subcategoria de praxeologias a ensinar, mas está longe de ser reduzido a isso: matematicamente, inclui o conhecimento matemático necessário para distinguir, por exemplo, as praxeologias para ensinar e aquelas que não são. As praxeologias a ensinar podem então ser incluídas em outra subcategoria, a de praxeologia de ensino (matemática), que inclui muito o que será chamado mais especificamente de matemática para o ensino do que praxeologias didáticas sobre uma determinada praxeologia matemática a ser ensinada, elaborada por inúmeras praxeologias para a profissão que não estão estritamente falando praxeologias para o ensino (Note que as praxeologias matemáticas para a profissão ou, mais especificamente, para a educação, **são consideradas praxeologias profissionais as praxeologias da profissão de professor da mesma forma que as outras**).

Ao descrever as praxeologias para a profissão, o autor destaca as inúmeras praxeologias envolvidas na profissão, embora ele especifique a praxeologia da profissão para a educação, ele não deixa de considerar as outras. No exercício de uma determinada profissão, ao realizarmos tarefas, técnicas, tecnologia e teorias é preciso saber quando e como usá-las, pois “em qualquer formação profissional, a questão mais importante é a da identificação dinâmica das praxeologias úteis e indispensáveis ao exercício de uma profissão” (CHEVALLARD³⁰, 2009). No entanto, elas geralmente são aplicadas em uma situação, por esse motivo defendemos a existência da praxeologia situacional.

A situação proposta abaixo é um exemplo de uma praxeologia situacional.

Um engenheiro civil é contratado para inspecionar a construção de um prédio e ao chegar à obra verificou que as janelas não estavam na medida estabelecida no projeto inicial, ao chamar o mestre de obras verificou-se que os pedreiros não haviam usado o esquadro e tiveram que ajustá-las corrigindo as falhas.

Fonte: Produzido pelos autores

²⁹ Do original: On peut repérer trois catégories emboîtées de praxéologies « professorales ». La catégorie la plus large, et toujours ouverte, est celle des praxéologies pour la profession (de professeur de mathématiques), qui inclut l'ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s'équiper. Bien entendu, cette catégorie contient la sous-catégorie des praxéologies à enseigner, mais est très loin de s'y réduire : au plan mathématique seulement, elle inclut déjà les connaissances mathématiques indispensables pour distinguer par exemple les praxéologies à enseigner et celles qui ne le sont pas. L'ensemble (flou, et évolutif) des praxéologies à enseigner peut alors s'inclure dans une autre sous-catégorie, celle des praxéologies pour l'enseignement (des mathématiques), qui subsume tant ce qu'on nommera plus précisément les mathématiques pour l'enseignement que les praxéologies didactiques relatives à telle ou telle praxéologie mathématique à enseigner, elles-mêmes élaborées à l'aide de nombreuses praxéologies pour la profession qui ne sont pas à proprement parler des praxéologies pour l'enseignement. (On notera que les praxéologies mathématiques pour la profession ou, plus particulièrement, pour l'enseignement sont regardées comme des praxéologies professionnelles : ce sont des praxéologies de la profession de professeur de mathématiques à l'égal des autres. (CHEVALLARD, 2009, p. 16).

³⁰ Do original: En toute formation professionnelle, la question primordiale est celle de l'identification dynamique des praxéologies utiles ou indispensables à l'exercice d'un métier (CHEVALLARD, 2009)

Ao analisarmos a situação identificamos que existe os dois blocos, o saber fazer, em que a tarefa (t) proposta é medir as janelas para a correção das dimensões e a técnica (τ) empregada foi usar o esquadro para a medição. No bloco saber, a tecnologia (θ) usada foi o triângulo retângulo e a teoria pode ser a Geometria Plana ou Instalações prediais.

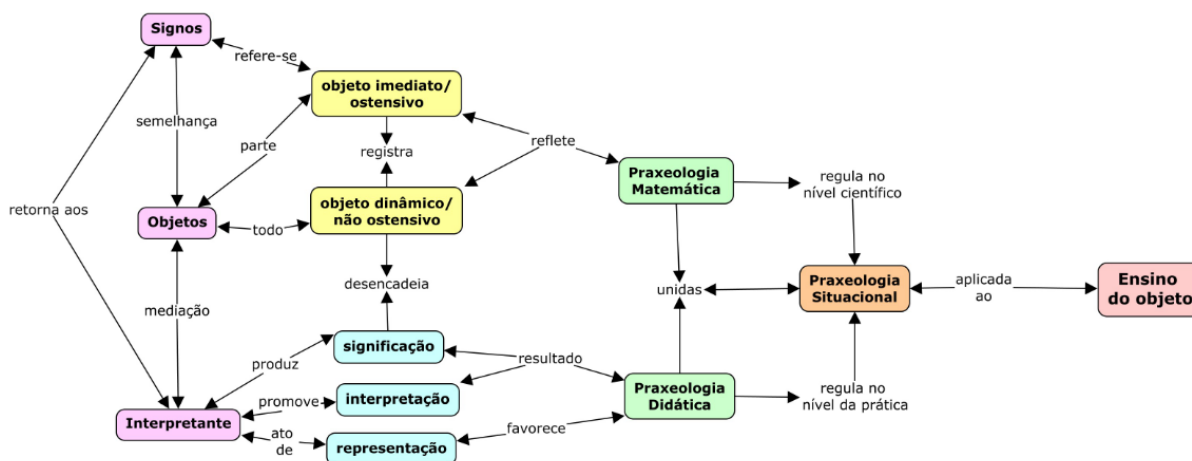
Questionar o papel da matemática nesses contextos e as ações que precisarão ser mobilizadas para expandir os significados dos seus objetos fazem parte da praxeologia situacional. Distingue-se do “*milieu*” de Brousseau, pois neste as situações didáticas ocorrem entre professor, aluno e o saber que são partes constitutivas de relações complexas entre o triângulo didático e que leva em consideração as interações com os três componentes. Na situação exemplificada, as praxeologias não fazem parte de um sistema didático formado por professor, aluno e saber, no entanto, o saber promove o encontro com tecnologias e teorias internas a Matemática. E é o interpretante que desempenha um papel relevante para a condução do conjunto das ações que irão desencadear significados em contextos mais amplos. Desta forma, o interpretante é o potencializador da praxeologia situacional, ele fornece o sentido, o (re)significado, a interpretação, a representação do objeto na ação, na escolha de condutas que maximizam os efeitos interpretativos das condições que envolvem os fatos.

Nessa perspectiva, observamos que o sistema semiótico, as praxeologias e a regulação (científica e prática) preservam uma relação coerente e lógica com as teorias que abarcam tais pressupostos: a Semiótica peirceana e a TAD, que sintetizamos na Figura 3.

O signo, o objeto e o interpretante realizam ações que desencadeiam a semiose. Inicialmente o signo associa aos objetos por semelhança, uma intervenção realizada pelos ícones, são eles que irão revelar algumas facetas do objeto não ostensivo, que serão registrados ou apresentados pelo objeto ostensivo. O resultado do conjunto das relações estabelecidas entre os dois tipos de objetos reflete na praxeologia matemática, constituído pela tarefa, pela técnica, pela tecnologia e pela teoria que envolvem o conhecimento matemático do sujeito.

No entanto, esses objetos dependem do interpretante para produzir significados, promover interpretações e representações. É o interpretante que constrói o conhecimento das praxeologias matemáticas que foi colocada em prática na organização didática e da análise do currículo, das condições e restrições para o desempenho da aula planejada, entre outros.

Figura 3: Sistema Semiótico, praxeologias e regulação: científica e na prática.



Fonte: Produção da autora

Mas é no cerne da situação dada que ocorre a regulação nos níveis: científico e prático, promovendo significados que podem ser aplicados ao ensino e a aprendizagem de um objeto matemático. Por isso, a praxeologia situacional provém de uma circunstância – um problema, um currículo, um desafio, uma graduação, um curso, um emprego, uma Lei, entre outros – que surge de forma inopinada ou previsível. Exige do indivíduo ou do grupo um posicionamento e uma atitude sustentada por dois saberes: o saber fazer e o saber, que sobrevivem da recordação de experiências ou de conhecimentos conquistados por vivência ou por estudo que se assemelham com a conjuntura apresentada. Esse vínculo propicia a ação, um redimensionamento para modificar o seu meio.

Neste estudo, estamos construindo argumentos para inferir que os estudantes dos cursos das Engenharias e da Licenciatura em Matemática desenvolvem conhecimentos distintos ocasionados pela conjuntura dos hábitos, das crenças, dos seus respectivos cursos. Esse fato é relevante para considerarmos dois aspectos: o primeiro, é que sob as duas vertentes não há alteração da epistemologia do objeto matemático; o segundo, é que para cada uma daquelas graduações faz-se necessário uma praxeologia didática que atenda aos objetivos das futuras profissões.

Emana dessa construção que a graduação escolhida pelos estudantes é, em si mesma, uma situação. Ela designa saberes que ao serem empregados faz-se necessário recorrer as praxeologias matemáticas e didáticas capazes de regular as ações de acordo a circunstância.

Veremos no capítulo cinco desta investigação, que o Percorso de Estudo e Pesquisa – PEP oferece ao indivíduo (ou ao grupo) uma questão instigadora, cujas ações são guiadas por outras questões subsidiárias que surgem no momento da aplicação do PEP, são circunstâncias, e podem conduzir a uma variedade de praxeologias provenientes dos conhecimentos do mundo.

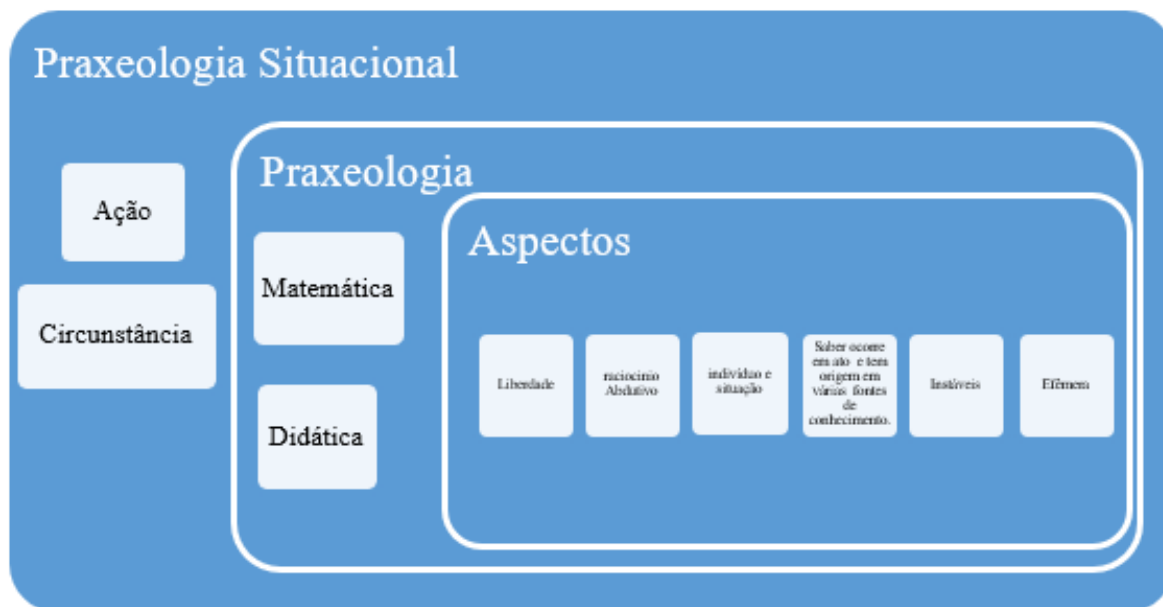
Inferimos que a praxeologia situacional é essencial no desenvolvimento do PEP, pois propicia a articulação dos saberes com a didática.

Para além das praxeologias matemáticas e didáticas, a praxeologia situacional instiga outras interpretações:

1. Ela é propulsora do raciocínio abductivo. As ações ocorrem num lapso do tempo, exige do sujeito um retorno rápido e muitas vezes não previsto. Tal aspecto, nos remete a nossa experiência como professores dentro de sala de aula, em que muitas vezes a aula previamente planejada é fluida em uma determinada turma, enquanto em outra não ocorre da mesma forma, solicitando do docente adaptações momentâneas.
2. A praxeologia situacional está impregnada de uma relação entre o indivíduo e a situação, em que se acalentam mutuamente em uma realidade conflitante e dual: “a pessoa está sempre em uma situação e a situação está à mercê da pessoa” (PINO, 1992, p.15).
3. Uma situação é livre, não está presa a padrões e podem surgir do acaso ou de uma intencionalidade. Algumas vezes elas aparecem para desmobilizar as regras, os padrões e desestabilizar o sistema, em outras, permitem serem influenciadas por eles, se aprisionando.
4. Ela é efêmera, exige posicionamentos locais ou gerais, atitudes austeras ou flexíveis e permite ampliar ou reduzir perspectivas de condutas. Não é reincidente, em cada ocasião apresenta características que a diferencia das experiências anteriores.
5. O saber-fazer em uma praxeologia situacional ocorre em ato, pode não está subordinada a uma convenção e envolver técnicas ainda não exploradas. No saber-saber as tecnologias e teorias são oriundas de várias áreas do conhecimento: científico, popular e em uso (no sentido pragmático).
6. São instáveis, pois permitem ser redirecionadas a qualquer tempo. Entretanto as escolhas de encaminhamento devem ser analisadas com cautela, para que não desvirtue o percurso e atrapalhe alcançar a meta.

Os seis aspectos destacados anteriormente são fundamentais para a aplicação no ensino e na aprendizagem de um objeto, em especial, matemático. A Figura 4, retrata os elementos que compõem a praxeologia situacional.

Figura 4: Relação e aspectos entre as praxeologias situacional, didática e matemática



Fonte: Produção da autora

A Figura 4 sintetiza a relação existente entre as praxeologias situacional, matemática e didática. A praxeologia situacional envolve contextos mais amplos que podem ser educacionais ou profissionais, estão diretamente interligados com as ações e as circunstâncias em que os objetos se apresentam. No âmbito educacional, a praxeologia situacional emprega as praxeologias matemáticas e didáticas para o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos, mobilizando seis aspectos: liberdade, raciocínio abduativo, indivíduo e situação, o saber ocorre no ato e tem origem em várias fontes de conhecimento; instáveis e efêmeros.

Considerando a situação como uma atividade matemática em que as técnicas empregadas operacionalizam a mobilidade entre os objetos ostensivos e não ostensivos. Os objetos matemáticos não ostensivos são representados em partes pelos objetos ostensivos como ferramentas para as técnicas mobilizadas em uma tarefa proposta foi o que Chevallard (1991) chamou de valência instrumental e valência semiótica. A valência instrumental tem o papel de discursar por meio de regras e expressar em um registro escrito, o que o objeto dinâmico ou não ostensivo guarda no seu interior. Enquanto para a valência semiótica é tornar o trabalho realizado na atividade visível para todos os envolvidos.

Observando que os objetos são instrumentos postos para realizar um determinado trabalho matemático e culturalmente instituídos eles são registrados por meio de palavras, que tomam emprestado da língua natural, da oralidade, no intuito de aproximar o raciocínio matemático, as noções e os teoremas de uma materialidade que toma corpo na escrita. A escrita

é um mecanismo que codifica símbolos, palavras, na intenção de preservar a fala para a posteridade, para tal objetivo utiliza a memória como aliada para o seu registro.

No entanto a fala é uma consciência instantânea do pensamento, enquanto a escrita é uma consciência elaborada por uma mente que acaba perdendo alguns resíduos semióticos que são expressos no ato da fala: um gesto, uma expressão facial, entre outros. A semântica e a sintaxe dos objetos matemáticos, registradas por ferramentas semióticas, podem trazer respostas diferentes para uma atividade matemática proposta, essa é a riqueza de se usar os instrumentos semióticos, pois “a atenção aos instrumentos semióticos do trabalho matemático possibilita, a esse respeito, renovar a análise didática” (CHEVALLARD, 1996, p.54)

A respeito da análise didática, os objetos ostensivos/imediatos e não ostensivos/dinâmicos desempenham o papel fundamental no ensino e na aprendizagem da matemática; por intermédio da criação deles, das relações que eles estabelecem com outros objetos e com as circunstâncias de sua aplicação é que surgem os problemas didáticos. Esses, na perspectiva da TAD, podem ser pormenorizados e classificados em três dimensões: epistemológica, ecológica e econômica. Estabelecemos na seção seguinte as características que se apresentam em cada uma delas e construímos uma quarta dimensão: a da linguagem, ao considerarmos que os diferentes meios de comunicação do objeto e as situações em que são empregados favorecem a construção dos significados, da interpretação e de raciocínios abduativos.

2.3 Dimensões do problema didático

A análise do problema didático desperta-nos para a existência de componentes particulares do pensamento que o estruturam, são sistemas de referências nas quais se apoiam, e estão diretamente ligados à origem do problema, a sua razão de existir e a forma como são comunicados. Não ocorre diferente em sala de aula em que o saber científico percorre os caminhos da ontogênese, da existência, da racionalidade e da comunicação. Nesse sentido, se estabelece uma relação de comensalismo entre o problema e o sistema didático em que o objeto do saber os alimenta.

Não ocorre de maneira distinta na Matemática, o objeto matemático tem uma origem, uma história, uma construção que registra o pensamento cultural e social de uma época, o que justifica a sua razão de existir no seio das instituições e a teia de relações estabelecidas dentro e fora da área.

O objeto matemático nos revela facetas que o constitui, impondo ao interpretante o olhar atento para cada dimensão que é percebida. Embora fragmentado, por representações parciais, ele tem o potencial de unir essas partes, pela auto-organização ou pela regulação do sistema no nível científico ou prático. É nesse viés que a TAD organiza o problema didático a partir das percepções que são atribuídas a esse objeto e os caracterizam sob a vertente epistemológica, econômica e ecológica. Estas três dimensões constituem elementos fundamentais para a compreensão do problema didático.

A percepção que se aflora nas relações com o conhecimento matemático, são os significados produzidos acerca de um objeto matemático no seu uso em outros contextos sociais, culturais ou em outras disciplinas. Tal perspectiva, vai ao encontro do pensamento peirceano de que a investigação científica não é apenas uma forma de *práxis* humana, mas uma forma de referenciar o cenário cósmico (MS³¹ 328, cf.1670). Por este motivo, a linguagem traz aspectos amplos que servem para analisar um problema didático. O sistema didático e as interações que ocorrem entre o professor, o estudante e a obra a ser estudada são comunicadas e transmitidas por meio de signos que adquirem significados para cada um deles. Uma dimensão da linguagem, na perspectiva da Semiótica peirceana, pode trazer contribuições promissoras para a análise do problema didático.

Assim, estamos propondo uma quarta dimensão para a análise do problema didático, a da linguagem, pois inferimos que os signos e os objetos possuem interpretações distintas para os componentes do sistema didático quando comunicados. Na subseção seguinte discutimos as quatro dimensões do problema didático.

2.3.1 Dimensão epistemológica

A caracterização dos aspectos da dimensão epistemológica para um problema didático é determinada pela origem lógica, o valor e o objetivo que se atribui aos princípios, as hipóteses e aos resultados que são formulados para a constituição dos objetos matemáticos.

Emanam desses aspectos alguns questionamentos acerca do objeto matemático, tais como: qual o objetivo de ser formulado? Qual o seu valor para a Ciência? O que ele representa? Qual sua função dentro da Matemática?

³¹ Os semiotistas peirceanos conservam um modo peculiar de fazer as referências e citações aos escritos originais de Peirce. MS é uma sigla usada pelo editor Richard Robin, em 1967, que copilou em um catálogo, o *Annotated catalogue of the papers of Charles S. Peirce*, os manuscritos e cartas de C.S. Peirce, citando-os, primeiramente com a sigla MS e seguidos pelo número de páginas e a posição de referência no catálogo.

Todavia, podemos ampliar essa dimensão inferindo que ela sofre transformações no decurso do tempo em decorrência dos significados produzidos pela sociedade e difundidos pela escola. Nesse sentido, as ações de natureza didática acabam por exercer influência sob a forma de conceber a dimensão epistemológica do objeto matemático e imprimem uma organização peculiar dentro das instituições.

A criação desses modelos pode tomar como aporte a origem e a formulação dos conceitos epistemológicos do objeto matemático em estudo, revelados em tratados e fontes históricas, que podem explicar a razão de ser daquele objeto e é nesse sentido que a “noção de variável aparece principalmente como uma ferramenta metodológica no processo de modelação, combinada à análise *à priori* de uma situação particular ou fundamental” (CHAACHOUA; BESSOT, 2018, p.110).

Nesta perspectiva, a análise das variáveis nos possibilita elaborar modelos epistemológicos provenientes de situações reais, como por exemplo, os fenômenos: meteorológicos, tectônicos, naturais, econômicos, estatísticos; as construções: artísticas, arquitetônicas, entre outros. Destacamos que tais modelos preservam similaridades, aproximações com o modelo real. São ícones, que preservam as semelhanças particionadas do real, ou seja, consideram alguns aspectos e desprezam outros, no intuito de adequar a uma teoria existente e apropriar-se das representações icônicas que o contexto favorece. Para Pecharromán (2014, p. 113), é “a partir das situações e como parte da construção do objeto matemático, que se criam signos icônicos para oferecer um suporte de percepção dos objetos que substituem o contexto e a situação particular da percepção”.

Ao mobilizar signos – ícones e símbolos – no modelo epistemológico criado o desenvolvimento de uma praxeologia ainda não pensada, ou formulada pode surgir. Essa praxeologia pode promover técnicas inéditas, formular novas tecnologias e teorias que dependem das organizações didáticas e matemáticas selecionadas e das relações que se estabelecem com os conhecimentos adquiridos no processo de investigação empreendido para a elaboração do modelo, criado a partir de visita às obras da História.

Inferimos que quanto mais ampla forem as relações dos objetos matemáticos com os não matemáticos empregados em uma situação, maior será o desenvolvimento de praxeologias inéditas provenientes do modelo epistemológico construído. Tal hipótese, favorece o surgimento de novos fenômenos didáticos, que Bachelard (1996) denomina de *fenomenotecnia*. Essa capacidade da comunidade científica de formular modelos consiste em um rompimento

com os modelos dominantes impostos pelas instituições, denominado por Gascón (2011, p.103) de emancipação institucional. A principal característica é a autonomia adquirida pela didática e a conquista de uma liberdade para o exercício das escolhas das organizações didáticas e matemáticas.

E é a transposição didática que exerce um papel fundamental nos ajustes que podem ser desenhados, preservando as características, as estruturas e os conceitos inerentes ao objeto epistêmico. Para a constituição da dimensão epistemológica faz-se necessário elaborar as unidades de análise que versam sobre a origem, a lógica, a história e a didática dos entes matemáticos e traçar objetivos a serem alcançados. Com tal intento, encontramos em Gascón (2011, p. 222-223) indícios para a possibilidade de adaptação e generalização das unidades de análise da dimensão epistemológica frente a qualquer objeto matemático, a saber:

- Estabelecer o que é o objeto matemático e o seu papel na atividade matemática;
- Relacioná-lo com outros objetos matemáticos;
- Verificar a existência de uma introdução aos conceitos do objeto matemático por uma vertente diferente da abordada nas instituições;
- Identificar o objetivo das atividades para um determinado objeto;
- Interpretar as atividades propostas dentro das condições e restrições associadas a situação que emerge do uso do objeto matemático;
- Identificar a razão de estudar aquele objeto matemático;
- Avaliar a que nível (amplo ou restrito) deve ocorrer a abordagem do problema didático acerca do objeto matemático escolhido;

Essas sete unidades de análise não são únicas, podem emergir novos questionamentos a partir do modelo epistemológico de referência elaborado. Elas servem apenas de guia para que os investigadores produzam elementos ainda não explorados no problema didático.

Na perspectiva da TAD, a dimensão epistemológica é o cerne da problemática didática, pois é o objeto epistêmico que será significado pelo sujeito no momento da aquisição e da aplicabilidade dos conceitos e das estruturas matemáticas. E um dos objetivos da Matemática, é apropriar-se das representações do objeto matemático para criar/ especular/ generalizar/ abstrair/(re)formular novos conhecimentos.

Na perspectiva da Semiótica peirceana, o objeto tem o mesmo grau de importância dos signos (ou representação) e dos interpretantes, porque a semiose, responsável pela aprendizagem, só consegue está completa quando a semiose não é interrompida. A completude

de uma semiose se dá quando o objeto matemático é representado, interpretado e adquire um significado para alguém.

O objeto matemático como um signo culturalmente construído preserva os princípios balizadores de análise, que como vimos anteriormente são: a origem, a lógica, a história e a didática. No entanto, eles sofrem transformações e por um determinado período podem ficar esquecidos, podendo ser retomados a qualquer momento. Um exemplo pode ser retirado dos livros brasileiros de Matemática da década de 80 em que estavam presentes a técnica da extração de raízes quadradas de números reais positivos não exatos e que hoje desapareceram das atuais edições.

Outra perspectiva é a abordagem realizada pelos homens ao usar o objeto matemático. A prioridade pode ser: preservar as estruturas, o rigor, as técnicas empregadas no momento, em que foram criados ou sofrer ajustes de acordo os anseios da sociedade e do tempo. Fato, por exemplo, percebido quando: comparamos tratados antigos de Cálculo com os livros atuais; à ênfase dada a prática em detrimento da teoria (ou vice-versa); o curso da graduação em que o objeto matemático será definido; entre outros.

Assim, um objeto epistemológico pode transformar e emigrar para outra instituição com uma abordagem fluída ou rigorosa e sob vertentes diferentes. Essas modificações podem comprometer a compreensão de um objeto de estudo pelo sujeito, quando muitas informações são suprimidas.

A finalidade para o qual o objeto matemático está sendo ensinado é decisivo para a eficácia da abordagem. Assim, em um curso de bacharelado em Matemática, em que a Matemática pura desempenha um papel relevante dentro do seu próprio campo é justificável a abordagem centrada no rigor, nas demonstrações e na precisão aos quais as informações são manuseadas. O mesmo não ocorre para os cursos das Engenharias, em que o objeto matemático é uma ferramenta de trabalho dentro do seu próprio campo e mantém com lisura as aplicações em contextos mais amplos. Já para a licenciatura em matemática o ensino e a aprendizagem do objeto matemático têm o principal foco.

Logo, é necessário identificar e ser coerente com as diretrizes de cada curso, a funcionalidade do objeto matemático em cada contexto é que determina a abordagem que deve

ser dada a seu ensino. Nesse sentido, Pecharromán (2014, p. 118, **tradução nossa**³²) afirma que “o reconhecimento da funcionalidade capacita para o uso do objeto em contextos e situações diversas, porque a funcionalidade permite, motiva e dirige o uso”.

Outro ponto a ser destacado é que mesmo observando o contexto de uso e a sua funcionalidade, o objeto matemático perpassa pelo processo de interpretação do sujeito que trabalha com suas representações. No processo de ensino do objeto a interpretação determina o significado atribuído pela pessoa, é na relação do sujeito com o objeto que se estabelece o significado. “O conjunto de interpretações que se pode associar a um objeto pela funcionalidade que representa é que configura seu significado” (PECHARROMÁN, 2014, p.114, **tradução nossa**³³).

Ocorre que o objeto epistemológico originalmente construído é interpretado por um sujeito que promove uma nova linguagem associando-o as suas experiências de vida e as articulações com outros objetos (matemáticos ou não) que aprendeu. Isso favorece uma releitura, uma metalinguagem própria que vai caracterizar a forma de ensinar e de aprender o objeto matemático. Nesse sentido, Chevallard (2005, p.22, **tradução nossa**³⁴) afirma que “a transposição didática designa, pois, o passo do saber sábio ao saber ensinado”.

Existe, um saber construído pelo matemático, um saber ensinado e um saber apreendido que inevitavelmente acaba por trazer interpretações que distanciam o saber original do saber aprendido. Sob vertentes diferentes isso pode causar um problema didático em que muitas vezes a distância do saber sábio se faz muito intensa causando equívocos de origem epistemológica, em outra, pode emergir do sistema didático, por parte dos sujeitos envolvidos, um raciocínio abduativo, que não descaracteriza o saber sábio, mas legitima uma didática inovadora acerca de como abordá-lo, ou seja, há o “equilíbrio da relação sujeito/ *milieu*” (BALACHEFF, 1995, p. 4).

Essa dimensão da análise do problema didático consiste em verificar como o objeto matemático em estudo vive e se relaciona dentro das instituições. Na seção seguinte,

³² Do original: El reconocimiento de la funcionalidad capacita para el uso del objeto em contextos y situaciones diversas, porque la funcionalidad permite, motiva y dirige el uso. (PECHARROMÁN, 2014, p.118)

³³ Original: El conjunto de interpretaciones que se pueden asociar a un objeto por la funcionalidad que representa configura su significado. (PECHARROMÁN, 2014, p.114)

³⁴ Do original: la transposition didactique désigne donc le passage du savoir sage au savoir enseigné, (CHEVALLARD, 2005, p.22)

descrevemos sob nosso olhar, aspectos da relação entre os saberes didáticos e o espaço em que eles vivem.

2.3.2 A dimensão ecológica

A vida de um objeto matemático dentro de um sistema didático segue alguns princípios provenientes de condições e restrições impostas pela instituição. As restrições podem ser provenientes da representação institucional; da necessidade de avaliar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática; do tempo didático e da necessidade de transparecer que o saber ensinado é definitivo e inquestionável (BOLEA; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Entretanto, requer também avaliar as condições para modificar as praxeologias matemáticas e didáticas no sentido de atingir um determinado objetivo e promover um significado para o objeto em estudo. Nesse sentido, é necessário determinar em que nível na escala de codeterminação (CHEVALLARD, 2002) ocorre as restrições que impedem ou dificultam a emergência de novas organizações matemáticas e didáticas. Quando um docente organiza didaticamente e matematicamente a sua aula, ele imprime a partir do saber sábio (científico) um saber a ensinar, que planejou. No entanto, esse saber sábio e o saber a ensinar ainda sofrem modificações no processo do ensino em sala de aula, pois o docente imprime a sua interpretação pessoal e a transmite em uma linguagem própria produzindo um significado para o saber ensinado.

Embora pareça que o docente dispõe de uma autonomia para o planejamento de sua aula, isso não acontece de fato, pois as suas escolhas perpassam por condições impostas pela noosfera, a citar algumas delas: um currículo a vencer, índices avaliativos nacionais que determinam a qualidade do ensino, um tempo cronometrado a ser vencido, um livro didático adotado. Nesse sentido, “a teoria da transposição didática mostra a existência de diferentes tipos de restrições genéricas às quais está submetido o saber ensinado e que poderia explicar, em parte, porque as praxeologias tornaram a ser como são”. (GASCÓN; NICOLÁS, 2016, p. 15, **tradução nossa**³⁵). O processo de ensino de um objeto matemático está sujeito as praxeologias que já foram desenvolvidas e legitimadas pelo âmbito científico e pela noosfera, o que torna a autonomia do professor limitada, ou seja, ele sempre estará submisso ao currículo, as leis e normas instituídas, o que “restringe o universo de ações possíveis” (LICERA; GASCÓN,

³⁵ Do original: De la teoría de la transposición didática se desprende la existencia de diferentes tipos de restricciones genéricas a las que está sometido el saber enseñado y que podrían explicar, en parte, el por qué las praxeologías han llegado a ser como son (GASCÓN; NICOLAS, 2016, p. 15)

BOSCH, 2011). Porém, como o sistema didático é aberto, a criatividade por parte do professor ao (re)significar o contexto permite desenvolver atividades que promovam praxeologias inéditas.

As restrições existem, mas é possível equilibrar e gerar condições de desenvolvimento de ações que possibilitem contornar os limites que a noosfera impõe. O desenho do MER, as organizações matemáticas e didáticas previamente definidas e que atendam a uma questão geradora, estruturada de forma coerente, favorecem o surgimento de praxeologias ainda não pensadas.

Analisar a dimensão ecológica de um problema didático requer um conhecimento das circunstâncias externas e internas do campo de estudo, avaliando as restrições e condições do desenvolvimento de praxeologias que atendam a situação em que o objeto se apresenta, particularmente, o objeto matemático. A valorização e a criação de praxeologias situacional podem ser aplicadas em atividades que promovam debates, pesquisas, reflexões acerca das diferentes realidades que estão no seu entorno, em detrimento de procedimentos técnicos que não contribuem para ampliar o escopo científico e potencializar ações e atitudes que os libertem da visão de um saber único, verdadeiro e inquestionável, que nos fizeram acreditar.

Entretanto, é necessário também analisar o *habitat* e o *nicho* em que a Integral Dupla relaciona com outros objetos matemáticos. A dimensão ecológica é responsável em estudar o habitat que designa o local em que vive o objeto e o nicho que seria a função desse objeto no conjunto de outros objetos que ele interage.

No ecossistema da Matemática, o habitat da Integral Dupla é o Cálculo Diferencial e Integral que tem como nicho o cálculo de medida do volume de funções de várias variáveis. Entretanto, dentro de cada habitat o saber possui nichos que interagem com outros habitats mantendo-se vivo. Nesse sentido, a Integral Dupla “alimenta” de outros objetos (nível trófico 1) como também serve de alimento para outros (nível trófico 2).

É possível identificar a existência de fatores bióticos e abióticos ³⁶ que compõe cada um dos níveis tróficos e são condicionados por objetos imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos. No Quadro 1 descrevemos o objeto matemático, os níveis tróficos e os fatores que auxiliam na construção da Integral Dupla. No primeiro nível trófico apresenta-se o objeto

³⁶ Vamos considerar os fatores bióticos como objetos matemáticos que alimentam a Integral Dupla e interacionam com o nível trófico e como fatores abióticos, as propriedades, os teoremas que subtem está presente nos fatores bióticos.

matemático: número, que tem como função biótica as noções de medida, quantidade e ordem e como função abiótica a unidade. No segundo nível trófico a função é aplicada aos seus fatores bióticos que são: limites, derivadas e a integral que são objetos que mantêm uma relação de interdependência com funções. No entanto, existem elementos, propriedades, teoremas, definições de funções, tais como: domínio, imagem, plano cartesiano, números, variáveis, relações biunívocas, que são elementos que compõe o objeto matemático e que chamaremos de fatores abióticos.

O Quadro 1 sintetiza as relações entre objetos matemáticos, propriedades, definições, teoremas que contribuíram para a construção do Modelo Epistemológico de Referência – MER. Foi possível identificar a relação de dependência entre os objetos que tomam significados por intermédio do conjunto de praxeologias matemáticas mobilizadas pelas instituições, que estão organizadas tomando como aporte Leis, projetos, currículos, livros didáticos, entre outros.

As interpretações provenientes da leitura dos documentos oficiais referentes a Educação precisam suscitar questionamentos da sociedade e a sua expansão ou supressão devem ser públicas e participativas. Estudar as instituições em que a Integral Dupla habita é o que discutimos na próxima seção.

Quadro 1 – Níveis Tróficos da Integral Dupla

Integrais Duplas	Nível Trófico 1	Objetos Matemáticos	Função Biótica	Função Abiótica
		Número	Medida Quantidade Ordem	Unidade
		Funções (uma e várias variáveis)	Limites; Derivadas; Integral	Domínio; Imagem; Plano cartesiano; Variáveis; Relações; Derivadas Direcionais; Gradiente; Integral definida; Integral Indefinida
		Geometria	Plana; Espacial; Analítica	Referências; Dimensões; Definições
		Superfícies	Volume; Cônicas; Áreas; Quádricas	Definições; Equações
		Matrizes	Vetores; Determinantes; Sistemas Lineares; Transformações	Operações; Teorema Jacobiano
		Coordenadas	Cartesiana; Esféricas; Cilíndricas	Lugar geométrico; Referencial
	Nível Trófico 2	Ramos da Matemática	Função Biótica	Função Abiótica
		Topologia	Funções; Derivadas	- Espaço topológico; - Teorema de Gauss-Bonnet - Teoria de Morse - Teorema do índice de Hopf - Teoria dos nós
		Campos Vetoriais	Vetores; Integrais de Linha; Integrais de Superfície	- Teorema de Gauss - Teorema de Green - Independência do caminho - Teorema de Stokes

		Variáveis Complexas	Funções; Derivadas; Integrais	-Funções hiperbólicas -Teorema de Cauchy -Equação de Euler -Equação de Laplace -Série de Laurent
		Equações Diferenciais	Equações; Derivadas; Integrais; Séries	-Equações -Derivadas -Teorema da Equação homogênea - Método do coeficiente a determinar
		Integrais Tripla	Integrais	- Coordenadas esféricas e cilíndricas - Transformações Jacobiana
		Outras Áreas	Função Biótica	Função Abiótica
		Física	Integrais	- Escalar - Vetorial - Massa - Momento de inércia
		Química	Integrais	- Pressão de um gás - Volume - Área - Reações químicas
		Biologia	Integrais	- Capacidade cardíaca - Diluição por contraste - Taxa de crescimento
		Engenharia	Integrais	-Fluxo de energia vibratória em estruturas -Volume -Momento de inércia - Centro de massa - Eletromagnetismo - Termologia
		Economia	Integrais	-Valor futuro acumulado -Fluxo de renda contínuo -Controle de qualidade

Fonte: Produção da autora

2.3.3 A dimensão econômica

Como já mencionamos, o saber ensinado em uma escola, em uma aula, não é determinado pelo docente, ele segue leis, normas e um currículo vigente que demarca o que deve ser ensinado. E os livros didáticos adotados seguem as diretrizes curriculares e as atividades matemáticas e didáticas giram em torno dos objetivos determinados pela noosfera, que é quem produz os documentos oficiais que regulamentam a Educação.

A principal função da dimensão econômica do problema didático é entender como se ensina um determinado saber na escola; o modelo epistemológico dominante no ensino em torno de um determinado objeto e os fenômenos didáticos que emergem deles.

A instituição de ensino ao escolher o livro didático, preconiza os tipos de tarefas que um sujeito deve explorar, analisar e justificar. Revela também, o modelo de ensino, as praxeologias desenvolvidas, a influência da noosfera, a cultura, os hábitos e as crenças que emergem no processo de ensino. Desta forma, o surgimento de um problema didático “deve considerar os dados empíricos que provém de todas e de cada uma das instituições envolvidas

no processo de transposição didática³⁷” (LICERA; GASCÓN; BOSCH, 2011, p.5, **tradução nossa**).

A dimensão econômica descreve como se trabalha com uma atividade em um local – aula, escola, sociedade, entre outras instituições – em que emerge o problema didático, por isso, “esta dimensão inclui questões relativas as regras e princípios que regulam – em uma instituição determinada – a organização e o funcionamento da atividade matemática e das organizações didáticas envolvidas no problema didático” (GASCÓN, 2011, p.213, **tradução nossa**³⁸).

De porte dessa informação é necessário verificar como são considerados, descritos e interpretados os modelos matemáticos e as atividades que são desenvolvidas na instituição de referência e se é possível produzir novas organizações didáticas e matemáticas a partir do problema didático. A análise detalhada da instituição e o aporte do MER construído pelo docente servem de guia para a tomada de decisão em relação a alguns procedimentos que serão efetivamente experimentados, controlados e trocados no momento da sua ação.

Gascón (2011, p. 216, **tradução nossa**) afirma que “a dimensão econômica-institucional de um problema didático planta questões sobre o resultado que, em um determinado período histórico, foi produzido a ação da transposição didática das praxeologias matemáticas e didáticas”. Assim, ao selecionar um problema didático relevante para a comunidade científica, o investigador segue critérios, condições e restrições que delimitam o tipo de resposta que serão admitidas pela instituição. Por esse motivo, é necessário analisar as dimensões fundamentais do problema didático. Consideramos que os processos semióticos que estão envoltos na interpretação dos fenômenos que se apresentam no momento da transposição didática interferem efetivamente na composição das dimensões descritas anteriormente. Aspectos como: tipos de raciocínios, objetos ostensivos e não ostensivos, regras, gestos, figuras, representações, entre outros delineiam linguagens que caracterizam de forma original as organizações matemáticas e didáticas.

Defendemos que é relevante para a TAD a relação estabelecida entre objeto e pessoa em um sistema didático, tendo em vista que no processo da transposição didática há interpretações do objeto epistemológico pelo diretor (professor, tutor,) do estudo, pelo estudante

³⁷ Do original: “debe considerar los datos empíricos que provienen de todas y cada una de las instituciones involucradas en el proceso de transposición didáctica” (LICERA; GASCÓN; BOSCH, 2011, p.5)

³⁸ Do original: la dimensión económico-institucional de un problema didáctico incluye cuestiones [...] abarca al sistema de reglas y el funcionamiento de las OM y las OD involucradas em el problema didáctico (GASCÓN, 2011, p.213).

e pelas obras que servem de uma linguagem para serem divulgados, seja ela escrita, oral, gestual, matemática, artística, formal, informal. Analisar e avaliar como a dimensão da linguagem interfere e é admitida dentro das instituições amplia o escopo da teoria levando em consideração a abertura de diálogos que o PEP promove ao levar em conta o sistema herbartiano e os questionamentos acerca do mundo. Os argumentos sobre a criação de uma dimensão da linguagem que circulam aquela hipótese foram construídos a partir das analogias estabelecidas entre a TAD e a Semiótica peirceana e que expomos na seção seguinte.

2.3.4 Dimensão da Linguagem

A definição de linguagem é muito ampla, plural e se revela por diversas vertentes: as obras de arte, a comunicação, a linguística, o design gráfico, o silêncio, o cantar dos pássaros, o sino de uma igreja, entre outros. De forma sucinta, na visão de Peirce, a linguagem seria um fenômeno³⁹ que compreende um sistema de signos e o uso que se faz deles; por este motivo, os signos estariam em um estado de devir constante, em que mudanças, transformações, adaptações, categorizações e representações que lhes possibilitariam a ser signos culturalmente instituídos.

Os signos matemáticos também coadunam do estado de devir, pois em alguns momentos as instituições os omitem ou colocam em evidência (dimensão epistemológica, econômica e ecológica). É nesse sentido, que por exemplo, a técnica de se extrair a raiz quadrada de um número real positivo usando o Teorema Fundamental da Aritmética desapareceu dos livros didáticos, ou seja, perdeu o significado para uma determinada instituição.

Logo, a semiose – ação do signo sobre um objeto para um interpretante – tem um campo de atuação nos significados e representações atribuídas nas atividades que são exercidas pelos homens quando fazem matemáticas. Assim, “todo e qualquer fato cultural e qualquer atividade ou prática social constituem-se em práticas significantes, isto é, práticas de linguagem e de sentido” (SANTAELLA, 2009, p.6). Tal posicionamento articula preceitos com a TAD que situa a matemática em um conjunto de atividades humanas e de instituições sociais, regularizadas por um modelo que implica em tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

³⁹ Todas as vezes que utilizarmos a palavra fenômeno estamos nos referindo as diferentes experiências que podem ser observadas, analisadas, descritas e vividas diariamente pelo homem em diferentes contextos: natureza, instituições, no pensamento etc.

Inferimos que a praxeologia é um meio em que a linguagem se revela para comunicar aspectos relativos dos objetos matemáticos e são os ícones em ações desempenhadas pelo interpretante que possibilitam a exteriorização do que a mente produziu, por meio das representações, como explica Santaella:

a Matemática é observativa na medida em que monta construções na imaginação de acordo com preceitos abstratos, passando, então, a observar esses objetos imaginários para neles encontrar relações entre partes que não estavam especificadas no preceito da construção. No entanto, a Matemática estuda o que é e o que não é logicamente possível, sem se fazer responsável pela existência atual desse possível (SANTAELLA, 2009, p.14).

Mesmo dentro de um campo de “observação” complexa, em que à construção dos modelos matemáticos associados aos fenômenos reais preservam limitações e restrições de algumas variáveis, existe a preocupação de deixar livre o pensamento para que a mente criativa não tenha a obrigação de provar se seu feito é possível ou não, indícios de traços que evidenciam um raciocínio abduutivo, que posteriormente conduz à verificação por meio da dedução ou indução.

Em termos de praxeologias matemáticas exige-se a demanda de uma linguagem formal, aquela provinda de técnicas, tecnologias e teorias do objeto matemático epistemológico construído ou o saber sábio. Consiste em uma linguagem matemática que tem estruturas, regras, símbolos, palavras específicas, convenções que demarcam o campo matemático como uma linguagem universal e instrumental.

Definimos a **linguagem dictarizada**⁴⁰ (LD) como aquela em que são instituídas culturalmente e ditadas por regras, normas e técnicas elaboradas para atingir um determinado resultado. Estão sujeitas à manipulação, ordenação, controle e vigilância do uso dos objetos matemáticos: imediatos/ostensivos e/ou dinâmicos/não-ostensivos. Um sistema organizativo composto de regras, teoremas, definições, símbolos que formas dois saberes: o saber fazer e o saber.

Regida por praxeologias inerentes ao próprio campo epistemológico da matemática a linguagem dictarizada mostra um conjunto de dados, procedimentos, relações, deduções, demonstrações que preservam informações para a execução de uma atividade matemática. A linguagem dictarizada é presunçosa, não permite intromissões (exceto da própria matemática),

⁴⁰ Dictãre vem do latim e significa impor, prescrever, sugerir. A língua espanhola a usa como dictare que é a forma do verbo dictar que tem o mesmo significado no latim. Tomamos como base a etimologia para criar o termo dictarizada.

se caracteriza por uma liberdade assistida – uma medida adotada para acompanhar, auxiliar e orientar o saber-fazer e o saber. É detentora de argumentos verdadeiros e cientificamente provados, legitima apenas os registros escritos como únicos e essenciais para validar sua estrutura.

Tal visão sofre pequenas rupturas, com a perspectiva pragmática que emerge no século XIX, relativizando a verdade e destacando o conhecimento advindo do contexto de uso para produção de sentido e significado. Dos estudiosos do pragmatismo, Austin (1962, 1990) propõe uma concepção para a linguagem que não está centrada no sistema simbólico como representação, mas na realização de atos que cumprem determinadas funções dentro de uma instituição humana e que intervém no mundo.

Na matemática, a vertente de Austin sob o pragmatismo resvala na linguagem dictarizada, espaço limitado ao uso do seu próprio contexto interno. O ato de fala é realizar uma ação ao pronunciar algo, sob determinadas condições que implica: o sujeito que diz, para quem diz, quando, onde, com que intenção e os efeitos do que foi dito (FLORES, 2013, p. 4).

Na TAD, o ato de fala se faz presente na praxeologia matemática, no bloco saber-fazer, composto pelas tarefas e pelas técnicas. No que tange as tarefas, percebe-se semelhanças no uso de verbos que demonstre uma circunstância, uma ordem estabelecida por uma autoridade, uma instituição, são os gêneros das tarefas, presentes nos seus enunciados: calcular, demonstrar, esboçar, desenhar, entre outros. Esse ato da fala também está presente no discurso tecnológico-teórico ao se responder as tarefas propostas.

Com relação as técnicas, encontramos indícios de similaridades quando Austin (1990, p.39) afirma: “deve existir um procedimento convencionalmente aceito que produz um efeito convencional, tal procedimento deve incluir o proferimento de determinadas palavras, por determinadas pessoas e em determinadas circunstâncias”.

Esse panorama, nos remete à sala de aula de matemática em que tarefas são propostas por uma autoridade e que para respondê-las usa-se procedimentos regulados, normalizados e convencionais. A execução correta e completa de procedimentos convencionais, reconhecidos por todos os participantes e que impliquem a enunciação de determinadas regras satisfaz os interesses da linguagem dictarizada.

Esta é operante, organizativa e pleiteada para a construção das praxeologias matemáticas envolvendo o objeto epistemológico; no entanto, inferimos que tais características não desvelam mesmo feitos nas praxeologias didáticas, haja vista os resultados de pesquisas

brasileiras e internacionais que revelam o aumento do descaço e das repulsas dos estudantes pela matemática e pelo ensino “monumentalista” (CHEVALLARD, 2005).

Ainda na vertente da praxeologia didática o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos promovem uma vigilância na linguagem para não se cometer erros ou para não causar obstáculos epistemológicos. Uma desprestigiada alteração na estrutura do objeto matemático ou no enunciado da tarefa, pode exigir do estudante interpretações, regras, acesso a memória, e modificações estruturais dos signos matemáticos a serem mobilizados.

Tomamos como exemplo uma tarefa retirada de um livro de Cálculo Diferencial e Integral, usado em algumas instituições nacionais e internacionais. Uma das tarefas encontradas no livro solicita que o estudante calcule as integrais duplas: a) $\iint 3\sin x \cdot \cos y \, dA$ e b) $\iint \sin 3x \cos y \, dA$. As tarefas a e b, aparentemente se assemelham sintaticamente, no entanto, uma breve análise matemática das definições e propriedades trigonométricas é possível revelar que as funções expressas pelas representações algébricas: $f(x) = 3\sin x$ e $f(x) = \sin(3x)$ têm propriedades diferentes: a primeira, altera a imagem da função, enquanto, a segunda o domínio. Entretanto, como afirma Silveira (2015, p.112-113) “o problema dessas semelhanças sintáticas e diferenças conceituais é de linguagem justamente porque o aluno tem dificuldade de ler um texto escrito em uma linguagem matemática”.

Para além dessa linguagem vigilante, há expressões, empregos, significados e substituições na linguagem dictarizada que pertencem exclusivamente ao mundo matemático, tais como:

- a) Palavras ou expressões que estão relacionados com símbolos, definições e propriedades e que possui um significado específico para a matemática, como por exemplo: quantificadores; octantes, iteradas, derivadas, se somente se, fração imprópria, indeterminação, “tender a”, entre outras;
- b) Emprego das letras gregas ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) para representar ângulos;
- c) Substituição de variáveis por números em equações lineares;
- d) O significado das variáveis dependentes e independentes no registro das leis de formação das funções;
- e) A compreensão da fração indeterminada quando se usa de limite de funções; entre outros.

Familiarizar com a linguagem dictarizada é adentrar no universo da matemática, sem muitas garantias de compreendê-lo, pois são necessárias outras linguagens (natural, gestos,

entre outras) que estão envoltas também em sua aprendizagem. Assim, é necessário questionar o problema didático acerca dessa linguagem: Quais expressões ou palavras estão diretamente relacionadas com o objeto matemático em estudo? Quais significados eles geram que facilitam/dificultam a compreensão do objeto epistemológico? Qual a relevância dos símbolos matemáticos para a compreensão do objeto matemático? Como e quando aplicar uma regra matemática em tarefas distintas?

Um problema didático matemático evidencia aspectos da linguagem dictarizada que são colocadas como secundárias (GASCÓN, 2011), mas que trazem indícios de uma fonte de pesquisa para as outras dimensões - epistemológicas, econômicas e ecológicas - consideradas na TAD como fundamentais.

O estudo e a análise da linguagem dictarizada podem evidenciar que os entes matemáticos apresentados em expressões, significados, empregos, signos, regras, técnicas, teoremas, caracterizam o objeto matemático são determinantes para a sua interpretação e aprendizagem. Os professores e os investigadores matemáticos ao colocarem, não intencionalmente, aquela linguagem como secundária menosprezam a influência e o papel relevante que ela possui para a compreensão do objeto matemático a ser ensinado.

O emprego de expressões, símbolos, palavras, nas praxeologias matemáticas podem se tornar um dos obstáculos para a aprendizagem do objeto matemático. Se o estudante não tem familiaridade com o sentido ou o significado dos elementos da linguagem dictarizada ele não consegue avançar para alcançar uma interpretação do objeto matemático. Para Silveira:

O aluno constrói o conceito matemático de acordo com sua imaginação e a sua memória, porém, com a mudança de contexto, o aluno projeta novos sentidos, e o conceito é reinterpretado. O professor não tem controle da imaginação do aluno e de suas analogias, mas pode ter controle do jogo de linguagem estabelecido em sala de aula. A regra é prevista, todavia, o sentido projetado na regra é imprevisível. O sentido previsto da regra se revela na linguagem, na leitura produtiva do texto e no diálogo entre o professor e o aluno (SILVEIRA, 2015, p.152-153).

O sentido das regras, das palavras apropriadas pela linguagem matemática está presente nas tarefas propostas aos estudantes, mas também está na maneira como são usadas no relacionamento entre o objeto matemático, o professor e o estudante. Nesse sentido, a linguagem dictarizada obedece às leis que pretendem ser universais, regidas por símbolos e que não podem ser modificadas pelos estudantes, pois “a matemática tem uma estrutura que lhe é própria e autônoma” (SILVEIRA, 2015, p. 157).

Entretanto, existe na interpretação do estudante a marca da sua subjetividade, ao qual o professor não tem acesso, é um ponto residual⁴¹ (GRANGER, 1969) no processo de ensino, em que a aplicação da regra matemática fica vulnerável, pois “em cada contexto, a regra pode adquirir um significado diferente e o aluno, que deveria aplicar a mesma regra, aplica outra em seu lugar” (SILVEIRA, 2015, p. 158).

Nessa rede de relações com conceitos, com objetos matemáticos o estudante busca em sua memória conhecimentos apreendidos anteriormente, emergentes de sua vivência em diferentes instituições, para fazer analogias com as novas tarefas propostas, nesse percurso é necessário que as regras tenham sentido para o estudante e que eles consigam generalizar, percebendo as alterações sintáticas, semânticas e pragmáticas.

A linguagem dictarizada também nos ajuda a compreender a **linguagem contrafactual**⁴² (LC), que definimos como aquela que emerge da elaboração do pensamento, ou dos signos na Semiótica peirceana. Esta não se revela como fatos, comprováveis e concretos, mas algo virtualmente existente na mente humana, um conjunto de especulações que emergem de uma teia de relações irracionais, que se apresentam como raciocínios sem nexos, sem preocupação de atentar para a certeza da ficção especulativa. Por isso são livres e são internos a cada ser humano, são organizações simbólicas do próprio sujeito, que tece uma malha de relações, interpretações, significados e representações dele com o mundo.

Essa organização é a rebeldia do sujeito com as imposições das instituições. É o lugar em que reside a crítica, o raciocínio abduutivo, a irreverência, a irracionalidade, a elaboração individual e solitária, mas, também, o medo, a subserviência, a covardia e a resignação, que só pode aflorar para aqueles que ousam pensar, transgredir o que está posto. Na TAD estes aspectos têm se revelado no próprio questionamento do mundo e na proposto de ensino no desenvolvimento dos PEP.

Se analisarmos dentro da própria ciência, encontramos no pensamento dos matemáticos, como: Euler, Newton, entre outros, o uso desta linguagem. No entanto as descobertas matemáticas das suas respectivas autorias farão sentido ou terão significados para a sociedade

⁴¹ O resíduo, ao qual estamos nos referindo, seria o que não fica exposto no processo da relação objeto matemático, professor e estudantes, como por exemplo: o pensamento do aluno ou do professor no ato do ensino do objeto matemático.

⁴² Contrafactual faz parte de um mundo possível que contradiz algo do mundo real. Aqui estamos propondo justamente isso, um mundo possível para a linguagem da matemática que contradiz a linguagem dictarizada com a justificativa de associar e ampliar os significados para a linguagem dictarizada.

quando elas são externadas em termos de avanços científicos para a humanidade. A linguagem Contrafactual está presente na elaboração das praxeologias didáticas por intermédio da abdução, da memória, da representação, dos registros, dos diagramas, dos esquemas, dos gráficos, das imagens, dos pictogramas, dos traços, das pinturas em tecidos, dos jogos, das artes que imprime uma marca diferente da linguagem dictarizada. Aquela não tem regras, não tem convenção, apenas imprime uma qualidade original, uma intuição. Para caracterizá-la tomamos do hindu a expressão: “ver com o terceiro olho”, que imprime a capacidade humana de ir além da realidade física, ou enxergar para além das aparências.

As linguagens dictarizada e contrafactual são instrumentos, com finalidades distintas: na primeira tem por objetivo externar e aplicar as regras, deduções e induções reconhecidas pela comunidade matemática expressas em praxeologias matemáticas e didáticas. Toma o instrumento como um símbolo, que serve de convenção para se provar algo, um hábito. Na segunda, é um instrumento que nos “faz ver”⁴³ (HERRERO, 1988, p.31, tradução nossa), contemplar, refletir, criar “inferências em que o objeto e o sujeito se sentem atingidos, capturados, sequestrados por esse saber cuja verdades são reveladas.”⁴⁴.

Estabelecemos entre as duas linguagens a tríade: *ver – equilibrar – saber*, que articula o que se percebe de uma realidade e o que se pode produzir sobre ela. Assim, um sujeito ao criar algo se desprende, se despersonaliza do “local comum”, do “ver” instituído e imigra em um mundo imaginário e particular; ao regressar age de forma a esperar reconhecimento público – um saber institucionalizado. Tal movimento pode ser comparado ao momento de inércia em que o “fazer ver” desloca do estado de *devir* para o de *porvir* (saber-fazer e saber-saber) aquele em que o criador antecipa argumentações e textos persuasivos para convencer o outro sobre uma suposta verdade, uma ação em um futuro incerto.

A linguagem contrafactual percorre um caminho em intensas transformações, é autorregulável, autocorretiva e, portanto, científica também. No empirismo, as inúmeras experiências científicas em diferentes campos do conhecimento – medicina, física, entre outros - tiveram percursos de êxito e de frustrações derivados de sucessivas hipóteses, inferências validadas ou não, que como relatado, são advindos do raciocínio abduutivo, preponderantemente dominante na linguagem contrafactual.

⁴³ Do original: “hace ver” (HERRERO, 1988, p.31)

⁴⁴ Inferencias en las que el objeto y el sujeto se sienten alcanzados, atrapados, raptados por ese saber cuya verdad han descubierto. (HERRERO, 1988, p.31)

Ela é circunstancial, em que a percepção dos fenômenos exige posturas, percepções e movimentos transformadores, agregando conhecimentos originais emergentes de outras ideias e técnicas. Nesse sentido, a definição de signo contempla a linguagem confractual, pois “um signo implica uma ideia que ele produz ou modifica. Atua como um veículo que remete à mente algo proveniente do meio exterior. Por isso ele se empenha em referir-se a seu objeto, àquilo que emerge do significado e a ideia que surge do interpretante” (GOTTDIENER, 1995, p.9-15).

O signo como uma entidade matemática, amplia o escopo de sua atuação de tal forma a contemplar os objetos do mundo e a significá-los. Exige-se que o “signo morto” preso a convenções, simbologias, regras matemáticas, imutável e valorado culturalmente seja interpretado também de forma particular, como um “signo vivo”, em que o estudante possa reinventá-lo, um ato de criação subjetivo e espontâneo. Nesse sentido, Ostrower (2014) alude:

A natureza criativa do homem se elabora no contexto cultural. Todo indivíduo se desenvolve em uma realidade social, em cujas necessidades e valorações culturais se moldam os próprios valores da vida. No indivíduo confrontam-se, por assim dizer, dois polos de uma mesma relação: a sua criatividade que representa as potencialidades de um ser único, e sua criação que será a realização dessas potencialidades já dentro do quadro de determinada cultura (OSTROWER, 2014, p. 5).

Esse pensamento de Ostrower (2014) traz o aspecto dual sobre a criatividade: individual/ coletivo, pois o homem como ser pertencente a um social, seguem hábitos, crenças e uma ordem instituída. No entanto, mesmo servindo a uma obediência imposta ao coletivo, o homem conserva o ato de pensar e é com ele que é possível transgredir. “O mundo em si não tem sentido sem o nosso olhar que lhe atribui identidade, sem o nosso pensamento que lhe confere alguma ordem” (LUFT, 2004, p. 21). Uma ordem não subserviente, pois “a desobediência é uma virtude necessária à criatividade”, como diria o saudoso Raul Seixas, sem rebeldia, mas consciente de que é necessário “escapar, na liberdade do pensamento, desse espírito de manada que trabalha obstinadamente para nos enquadrar, seja lá no que for” (p.23).

Vergani (2009, p.180, p. 244) afirma que “uma pessoa é criativa quando é capaz de remodelar a visão do mundo a que pertence”, é uma atitude, uma escolha, mas é um intenso questionamento sobre o mundo, que é indissociável do paradoxo individual e coletivo. É um ato de epifania, o “poder que temos de co-nascer com o mundo”.

Não ocorre de forma distinta na matemática, existe o coletivo marcado pelas regras e modelos impostos, mas há a presença do individual, como constata Silveira (2015) ao afirmar que “a regra é pública, entretanto, o sentido dado a ela é subjetivo. O aluno projeta sentido na regra, a interpreta e a compreende de acordo a sua sensibilidade.” No entanto, pontuamos que

a criatividade na matemática é limitada, visto que, o estudante deve seguir a linguagem formal, convencionadas por regras que não podem ser modificadas (SILVEIRA, 2015, p.209), mas, como veremos adiante, elas podem tomar um sentido, um significado a depender do contexto em que é posto aos estudantes, despertando maior interesse e aprendizagem,

Diante do exposto, como podemos falar em criatividade na matemática? Primeiramente redirecionando o olhar, se observarmos a matemática como algo estável restringimos a capacidade de manifestação de outras potencialidades que o objeto matemático pode impulsionar. “Ao desfocar a visão – ou *praticando um olhar descentrado* – entendemos a vastidão circundante emanada pelo objeto” (VERGANI, 2009, p.242-243).

Quando realizamos uma tarefa matemática usamos símbolos e regras, mas também buscamos o auxílio de outros objetos matemáticos que contribuem para chegarmos a uma solução para o desafio proposto, bem como, relacionamos com nossa experiência, com outras percepções e aprendizados advindos do mundo extra matemático, aquele que circunscreve todos os sentidos e significados para o objeto em estudo.

A matemática lida com incertezas, imprevistos, sua ação está na imaginação, um “faz de conta”, pois seus objetos dinâmicos/não ostensivos estão ausentes do olhar, “experimenta a aventura lógica do desencadear da teoria” (VERGANI, 2009, p.256), uma liberdade vigiada, uma verdade relativa, mutável, por isso está sempre aberta a criatividade. Vergani explica:

No campo das ciências, as disciplinas matemáticas são aquelas que lidam com o êxito com a natureza quântica do mundo. A conformidade quântica da matemática provém do fato de ser capaz de “saltar” de uma ordem pré-estabelecida para outra mais vasta, concebendo sistemas interativos cada vez mais elaborados para resolver os conflitos que as antigas estruturas não conseguiam resolver” (VERGANI, 2009, p. 255-256).

Há, portanto, um grau de liberdade de criatividade na matemática que desestabiliza a continuidade e traz à tona as incertezas, os problemas, as rupturas. Nesse sentido, conceber a matemática em termos quânticos é olhá-la como a sede de ilimitadas possibilidades de sentido. A verdade passa a ser transitória, um estado virtual, momentâneo, em que o homem vai atualizando por conveniências atribuídas a um determinado contexto é “o nosso olhar que determina (ou atualiza) as possibilidades da matéria” (VERGANI, 2009, p.244). Em se tratando dos fenômenos complexos que ocorrem em sala de aula, o posicionamento do professor diante do que é a matemática e para que ela serve é que direciona o seu fazer pedagógico, a forma que ele concebe é determinante para a organização didática escolhida. Segundo o autor:

Não existem “coisas”, apenas o conhecimento que temos delas. Esse conhecimento depende do tipo particular de processo que desencadeamos para as observar - contingente, relativo, parcelar, funcional. Do mesmo modo não existem

“acontecimentos”, é o nosso olhar que elabora os eventos cuja realidade acredita. O conhecimento é uma cumplicidade entre nós e o nosso olhar, uma ficção adequada às nossas conveniências atuais. (VERGANI, 2009, p. 244-245)

O conhecimento visto como algo contingente traz embutido vestígios do falibilismo⁴⁵ e do pragmatismo da Semiótica peirceana, ao qual libera o sujeito de atingir a verdade, porque a compreende como algo provisório e que em um determinado contexto, ou tempo pode ser mudada, transformada, recriada.

Resumidamente, podemos constatar em Vergani (2009, p. 252) dois tipos de conhecimento: um estável, exterior, funcionalmente partilhável ao meio social e o outro; cinético, íntimo, desviante em relação a estereótipos, um *self* quântico. Em que normalmente recebemos ou aprendemos o primeiro em uma linguagem dictarizada e descobrimos ou doamos o segundo utilizando uma linguagem contrafactual.

Será a consciência que elabora e dá visibilidade a esses conhecimentos. Por isso, conhecimento, consciência e criatividade caminham juntas no mundo, expressando uma rede renovável de uma dependência mútua entre a pessoa, o objeto e o seu significado, e é nesse sentido, que os graus de liberdade viva dos estudantes se manifestam. Priorizar a linguagem dictarizada com o jogo de memória associado a regras matemáticas terá como consequência o obscurecimento dos *insights* criativos, guiados pelo nosso inconsciente. É nesse sentido, que criar é relacionar com o termo adequação (OSTROWER, 2014, p. 162), adequar aos limites, as possibilidades, as contingências e modelar a partir do vivido, do experimentável, do prazeroso, do fugaz. Sem essa liberdade de criar, de questionar o mundo e de viver todas as possibilidades que emergem não somos capazes de extrapolar a linguagem dictarizada.

A possibilidade de questionar o mundo abre um leque de possíveis respostas que poderão ser dadas, muitas das quais contrariam a linguagem dictarizada da matemática, pois está imbuída de culturas marginalizadas e desprovidas de sentidos para os cânones científicos das matemáticas. Como podem ser constatados nos diversos estudos da Etnomatemática⁴⁶ e da

⁴⁵ Peirce afirma que por meio do raciocínio, não se pode nunca obter certeza, exatidão e universalidades absolutas sobre um objeto, posto que estão impregnados de inferências de uma parte da realidade, a essa tese ele denominou de falibilismo.

⁴⁶ Etnomatemática é hoje considerada uma subárea da História da Matemática e da Educação Matemática e é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos. (D'AMBRÓSIO, 2011, p.9)

matemática crítica⁴⁷ que tem desvelado matemáticas diferentes das que são ensinadas nas principais instituições escolares e que aparecem de forma discreta nos currículos brasileiros.

O objeto epistemológico matemático será fundamental, se ao questionar o mundo, limitarmos a condução desse paradigma a estrutura da linguagem dictarizada, na visão extremista da matemática “pura”. Inferimos que essa posição seria um paradoxo ao paradigma e ao desenvolvimento do PEP, visto que as respostas que emergirão ao questionar o mundo podem revelar outras formas de aplicação e de percepção do objeto matemático que desempenham papel diferente daquele do contexto em que foi criado originalmente, mas que não deixam de ser significativos para os que o usam, como por exemplo, a matemática para engenheiros, físicos, entre outros.

É inevitável fazer algumas indagações críticas que dizem respeito aquele paradigma:

1. Qual o “preço a pagar”, pela TAD, por respostas não institucionalizadas nos cânones científicos do saber sábio?
2. Na emergência do paradigma do “questionamento do mundo”, mudanças nas organizações dos currículos, no tempo cronológico das aulas, entre outras, seriam necessárias, é do interesse das diversas instituições fazê-las?
3. A percepção do mundo, mesmo com a globalização, está condicionada a sociedade a qual as instituições estão inseridas. Tal fato, reconhece e legitima a diversidade de contextos no qual pode-se o ensino e a aprendizagem da matemática se revelar?
4. Como serão tratados os aspectos sociais, pela TAD, que influenciam no paradigma do questionamento do mundo? O saber científico é só para alguns?

Nesse sentido, acreditamos que a Semiótica peirceana contribui para aquele paradigma, pois ela não prioriza nenhum tipo de conhecimento como fundamental, ou em uma escala hierárquica, mas traz a linguagem como a própria maneira de ver o mundo, imbuídos de aspectos sociais, culturais, políticos e econômicos que influenciam as instituições. Ela amplia a linguagem para contextos de uso, em que a ação ocorre no fazer, no lidar com a matemática em uma dimensão interdisciplinar. Tal perspectiva é pragmática e inferimos que se situa nos níveis de determinação ao qual propõe a TAD.

⁴⁷ Toma como base a ideia da matemática em ação e nas consequências do emprego da matemática na sociedade moderna, seja nas questões econômicas, administrativas, seja na tecnologia e todos os tipos de atividades humanas. A matemática em ação contribui significativamente para conformar nosso mundo-vida. Uma das preocupações da matemática crítica é reconhecer a diversidade de condições nas quais o ensino e a aprendizagem de matemática acontecem no mundo. (SKOVSMOSE, 2014, p. 12)

Inferimos, ainda, que emergem do paradigma proposto algumas rupturas e avanços na TAD, e que a diversidade das sociedades que compõe o mundo trará respostas com percas e ganhos para a teoria. Nos níveis de determinação, proposto pela TAD, o deslocamento das influências dos níveis superiores sob os inferiores, e vice-versa, é contínuo e ainda pouco explorados. Admite-se que as instituições influenciam as ações dos indivíduos, mas privilegiando um saber em detrimento do outro, estamos sendo coniventes com o *status quo* imposto e é exatamente isso que a TAD propõe romper.

O ensino e a aprendizagem da matemática continuarão sendo para pequenas minorias e excludente, se não aceitarmos em rever as posturas, as crenças e as imposições que o modelo de ensino, com organizações didáticas que não priorizam significados para o objeto epistemológico, insiste em instituir, por isso acreditamos que o novo paradigma imprimirá rupturas na TAD.

A linguagem dictarizada é preponderante nas escolas brasileiras e internacionais, rompê-la em detrimento de outras linguagens é uma tarefa ainda utópica, pois demanda mudanças nas mais variadas instituições ao qual elas não têm interesse. Se aos professores não é permitido mudar o cerne daquela linguagem, o mesmo não ocorre com o uso que se faz dela em sala de aula. Nesse sentido, a transposição didática, o PEP e o paradigma de “questionamento do mundo” são avanços que a TAD tem proporcionado para o ensino da matemática e que tem acrescido as praxeologias didáticas perspectivas promissoras.

Neste trabalho, optamos por usar o PEP, uma linguagem contrafactual, buscando a arte do catalão Antoni Gaudí como uma forma da pesquisadora ler o mundo e encontrar as superfícies quádricas (linguagem dictarizada) implícitas nas obras do arquiteto. Ocorre um redirecionamento da linguagem provocado por três fatores: o conhecimento acerca do objeto matemático; a capacidade de enxergar a matemática aplicada em contextos diversos e o desapego aos raciocínios valorados pela matemática pura, permitindo aflorar o raciocínio abdutivo e criar espaços matemáticos diferentes dos habituais.

A percepção da natureza e o desejo de representá-la fez com que Gaudi buscasse conhecimentos de outras áreas: na matemática - as superfícies quádricas; na física – o momento de inércia, o equilíbrio das tensões no corpo; na engenharia elétrica – o conhecimento da propagação da luz em ladrilhos; na engenharia ambiental – o aproveitamento de material reciclado; na engenharia civil – o cálculo das estruturas, misturando-os para compor seus

espaços. Não bastou apenas o conhecimento precisou que ele soubesse aplicá-los fora do contexto científico.

Ao trazer a matemática imbuída em suas obras, Gaudí nos desperta para a proximidade com que os ícones atuam na arte e na matemática, pois inferimos que a criatividade - artística ou matemática – é algo espontâneo e permite àquele que atinge o ápice da ação um sentimento de contentamento, de êxito e de realização. É nesse sentido, que coadunamos com os participantes do *Advances Course on Dialogue between theories in Mathematics Education*⁴⁸, sobre a dificuldade de se construir uma boa pergunta no paradigma do questionamento do mundo. Na nossa percepção, tal restrição está ligada aos aspectos culturais e ao tipo de formação implementada pelas instituições de ensino que **não**: priorizam o desenvolvimento do raciocínio abduutivo; fomentam a sensibilidade humana; estimulam a leitura e a imaginação; valorizam a arte.

Ainda, sobre as dimensões do problema didático, a linguagem contrafactual pode promover questionamentos, conjecturas, raciocínios que permitam expandi-las, tais como: Qual o sentido coletivo do ensino de um determinado objeto matemático? De qual mundo é retirado a razão de existir do objeto matemático pleiteado? O que eu posso criar com esse objeto matemático? O que já existe no mundo que eu possa usar para ensinar esse objeto matemático? Quais registros me permitem extrapolar a visão limitada que eu tenho da matemática? As pesquisas acadêmicas têm se revelado como promissoras para responder algumas delas e tomam como aporte um referencial teórico que está em contínuo questionamento e reformulando seus pressupostos, sua linguagem.

Nesse sentido a linguagem contrafactual não elabora apenas o pensamento, mas sugere à pessoa à levantar conjecturas, argumentar com os fatos, experimentar e validar as hipóteses e a criar fatos e questionamentos novos. Ela, institutivamente, fornece ferramentas mentais para a linguagem dictarizada desfrutar e condiciona a sua liberdade, dando vazão a origem da **linguagem do (dis)curso**.

A palavra (dis)curso, tem origem no latim, *Dircursus*, particípio passado de *Discurrere*, que significa “correr ao redor”, metaforicamente, “lidar com um assunto por vários pontos de

⁴⁸ Um curso ofertado pela Universidad Autónoma de Barcelona, em junho e julho de 2019, que se discutiu sobre: o diálogo entre teorias na educação matemática, a formação de professores, o currículo e o ensino universitário.

vista”. Formado pelo prefixo dis, “fora” mais o currere, “correr. O sentido de “manifestação oral formal” é do século XVI.

Ao consultarmos o significado da palavra (dis)curso nos dicionários brasileiros como está posto, é possível verificar a junção de um prefixo mais um nome masculino (dis, mais, curso). Em que os significados da palavra **curso** são amplos, pode designar: trajeto, evolução de um determinado acontecimento, rumo, caminho, desenrolar do tempo, conjunto de disciplinas que habilitam uma pessoa a um diploma profissional, entre outros, que se encaixa perfeitamente as linguagens que estamos discutindo. Enquanto, o prefixo - **dis** – exprime a ideia de dispersão, negação, contrário, separação; apropriado para o paradoxo que estabeleceremos nas linhas seguintes sobre a linguagem do (dis)curso.

Tomamos essa linguagem sob duas vertentes: em curso e em (dis)curso. Assim, admitimos a **linguagem em curso** aquela que permeia as nossas salas de aula, a linguagem instituída pelas disciplinas das diferentes áreas de conhecimento e os materiais didáticos que sustentam e guiam essa linguagem. Elas são encontradas nos livros didáticos e expomos na Figura 5 um exemplo de como essa linguagem em curso se apresentam nas organizações matemáticas ao qual os professores tomam como referências para produzirem suas organizações didáticas.

Figura 5: Exemplo do uso da linguagem em curso em um livro de CDI

de um número L , ao tomarmos partições com normas suficientemente pequenas, então L será definido como o limite dessas somas quando a norma da partição de R tender a zero. Temos a definição a seguir.

18.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida numa região retangular fechada R . O número L será o limite das somas da forma $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$ se L satisfizer a propriedade de que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda partição Δ , para a qual $|\Delta| < \delta$ e para todas as possíveis seleções do ponto (ξ_i, γ_i) no i -ésimo retângulo $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A - L \right| < \epsilon$$

Se tal número L existir, escrevemos

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = L$$

Se existir um número L satisfazendo a Definição 18.1.1, podemos mostrar que ele é único. A demonstração é similar à prova do Teorema (2.1.2) a respeito da unicidade do limite de uma função.

18.1.2 DEFINIÇÃO

Uma função f de duas variáveis será dita **integrável** numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L da Definição 18.1.1 existir. Esse número L será chamado de **integral dupla** de f em R , e escrevemos

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R f(x, y) dA$$

Outros símbolos usados para a integral dupla de f em R são

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{e} \quad \iint_R f(x, y) dy dx$$

O teorema a seguir, enunciado sem demonstração, dá uma condição suficiente para que uma função de duas variáveis seja integrável.

18.1.3 TEOREMA

Se uma função de duas variáveis for contínua numa região retangular fechada R , então R será integrável em R .

O valor aproximado de uma integral dupla é encontrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Ache um valor aproximado da integral dupla

$$\iint_R (3y - 2x^2) dA$$

onde R é a região retangular com vértices $(-1, 1)$ e $(2, 3)$. Tome uma partição de R formada pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 2$ e seja (ξ_i, γ_i) o centro da i -ésima sub-região.

Solução Consulte a Figura 2 que mostra a região R dividida em seis sub-regiões, as quais são quadrados com lados de comprimento unitário. Para cada i , $\Delta_i A = 1$. Em cada uma das sub-regiões, o ponto (ξ_i, γ_i) será o centro do

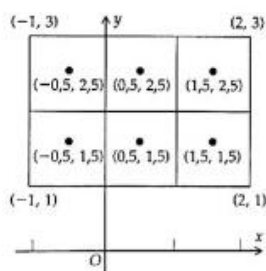


FIGURA 2

Fonte: Leithold (1994, p.1024)

Ao analisarmos esse recorte do texto original, a linguagem usada caracteriza-se por regras, símbolos e objetos que pertencem a linguagem dicionarizada, sem nenhum indício da linguagem contrafactual.

Podemos então elaborar algumas indagações em torno da linguagem em curso, a saber: quais as variações do objeto matemático em contextos de uso no próprio campo da matemática podem ser verificadas? Como são interpretadas as variações das regras envolvendo o objeto matemático em estudo?

Não temos como reproduzir a linguagem em curso que são usadas nas organizações didáticas elaboradas por professores nas universidades, pois seriam inúmeras, mas tomando como referência os planos de cursos das duas instituições de ensino ao qual pertencem os sujeitos desta pesquisa, verifica-se o livro didático (do qual a Figura 5 foi retirada) como referência bibliográfica para o estudante. Nesse sentido, CHEVALLARD (1991) afirma que existe um “metatexto” produzido pelo professor para a sua organização matemática e didática ele é pautado nos livros ao qual eles têm disponível, aqueles adotados nas escolas. Inferimos que a linguagem em curso será direcionada por este material e reproduzida para os alunos, com alguns ajustes. No entanto, existem metatextos criados por professores que se contrapõem a reprodução do que está posto no exemplo anteriormente citado, o conhecimento amplo das praxeologias matemáticas possibilita-os a produzirem organizações didáticas que tenham perspectivas de “lidar com o mesmo assunto por vários pontos de vista”, apresentando uma linguagem em (dis) curso.

Podemos então elaborar algumas indagações em torno da linguagem em curso, a saber: quais as variações do objeto matemático em contextos de uso no próprio campo da matemática podem ser verificadas? Como são interpretadas as variações das regras envolvendo o objeto matemático em estudo?

A **linguagem em (dis)curso** está centrado na análise dos diálogos produzidos pelas instituições e no exercício das atividades humanas sejam eles: orais ou escritos, proveniente da interação dialógica entre o sujeito, a sociedade e a história. Ela é contra o fluxo da linguagem em curso, relativiza a linguagem dictarizada e amplia a linguagem contrafactual, pois obriga os sujeitos a buscar outras verdades negadas para ampliar o que hoje chamamos de matemática.

Os significados mobilizados pela linguagem em (dis)curso sobre os entes matemáticos estão associados aos contextos em que os matemáticos e os não-matemáticos a utilizam. Para a matemática pura o objeto é um *fazer ver* guiado por um saber epistemologicamente construído, com fim intencional (ou não), alicerçado por praxeologias matemáticas demonstradas, validadas e representadas por uma linguagem própria - simbólica, rigorosa e precisa.

Enquanto para os não-matemáticos a linguagem é um *fazer ver* voltado para um saber pragmático (SP), aquele em que o objeto matemático epistemológico é transposto para uma finalidade prática, é um instrumento que potencializa o exercício de uma função laboral e está direcionado as escolhas perceptivas feitas pelas instituições, no que tange a intencionalidade do

saber. Ou seja, praxeologias pragmáticas compreenderão o uso prático dos conceitos provenientes de um objeto matemático epistemológico e eles serão usados como instrumentos para outros conhecimentos, outras áreas.

Há uma ação do interpretante - conduzindo o significado atribuído ao *fazer ver*. Entretanto, não pode ser desconsiderado o habitat do interpretante, a sua forma de ver, e de fazer determina a produção de significados para um conhecimento. Na linguagem em (dis)curso a interpretação, o sentido e o significado assumem as diretrizes do ensino e da aprendizagem da matemática. Na percepção pragmática da Semiótica peirceana um objeto dessa disciplina só é possível ser interpretado se adquire um sentido para o interpretante e um significado para seu uso. Entretanto, existe uma linguagem interpretativa acerca do objeto matemático que ocorre por parte do professor, bem como, do estudante, em sala de aula que está envolta por uma linguagem natural, cotidiana “que adquire sentido na situação enunciativa, e que remetem a um tipo de ato que cumpre funções, que nem sempre são gramaticais” (ARAÚJO, 2004, p.264)

No âmbito da Educação Matemática, a linguagem do (dis)curso precisa se aliar a outros campos, áreas de conhecimentos para aumentar o escopo de seu uso e produzir significados interligados e mais amplos. Em sala de aula, essas linguagens se relacionam e formam processos comunicativos, em que os objetos matemáticos perpassam por processos transacionais⁴⁹ envolvendo sempre o sistema didático S (X, Y, O).

É inegável que nesse processo comunicativo, algo será modificado, o problema da análise epistemológica e da didática acentua na ação em sala de aula, pois o professor usará a linguagem dictarizada (a proveniente do saber epistemológico) sob o olhar da sua própria linguagem contrafactual e do (dis)curso, essa interpretação subjetiva acaba por imprimir a percepção individual do professor acerca do objeto matemático aos estudantes. Como constata Bicudo (2010, p.45) ao afirmar que: “O diálogo não se dá numa continuidade de compreensões e interpretações igualmente claras pelos que o efetuam. Há convergências e distanciamentos de compreensões. Há horizontes de compreensões que revelam o mundo-viva habitado pelo sujeito”.

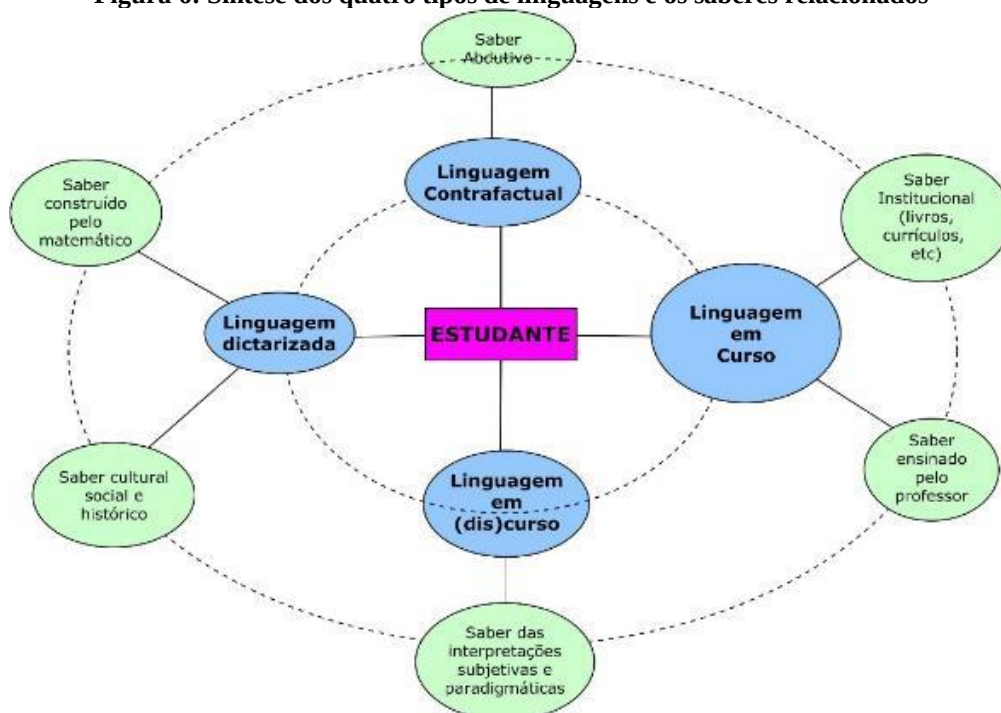
Nessa dinâmica de diálogo proferido e não proferido, compreendido e não compreendido ficam lacunas que emergem da subjetividade de um estudante, do professor, do

⁴⁹ Relativo a transação que para “é mediação, ou a modificação da primeiridade e secundidade pela terceiridade” (PEIRCE, 2005, p. 27), em que há os processos de significação, representação e interpretação.

coletivo de estudantes, das diferentes instituições, do objeto matemático, da cultura, da sociedade, da história. É fundamental compreender que na linguagem o sujeito participa de forma nuclear e que todos os saberes estão envoltos por um tipo de linguagem que condiciona a forma de perceber e de interpretar os fenômenos que acontecem no mundo. A linguagem em discurso que estabelece o saber das interpretações subjetivas e pragmáticas, que constrói uma interpretação individual, crítica e que se posiciona diante das relações de poder embutidas nos discursos, nas instituições. Diante destas reflexões, suscitamos as seguintes questões ao problema didático que envolve a linguagem do (dis)curso: Quais as interpretações possíveis podem emergir do problema didático, por parte dos estudantes e dos professores? Quais atividades podem ser construídas que possibilitem discussão e ações viáveis para a interpretação do objeto matemático?

No nível do discurso de poder estabelecidos pelas instituições, as seguintes perguntas podem ser feitas ao problema didático: Como pode o sujeito sujeitado criticar? (ARAÚJO, 2004, p.243); Qual é a importância desse objeto matemático para a sociedade? Quais significados podem ser produzidos a partir do contexto de uso desse objeto matemático? Qual o “mundo vivo” que estão inseridos os estudantes ao qual vou apresentar o objeto matemático? E como o objeto matemático pode contribuir para o desenvolvimento social do “mundo vivo” ao qual os estudantes pertencem? Os quatro tipos de linguagens que descrevemos envolvem múltiplos saberes que o estudante adquire no processo formativo, na Figura 6 os sintetizamos.

Figura 6: Síntese dos quatro tipos de linguagens e os saberes relacionados

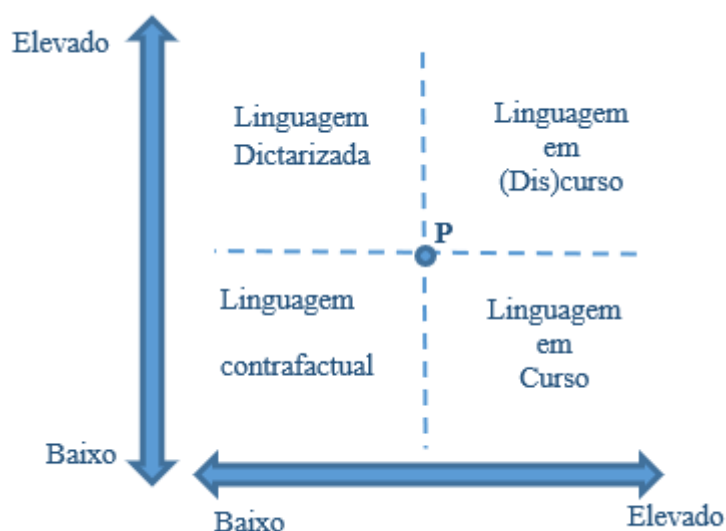


Fonte: Produção da autora

Esses saberes são adquiridos concomitantemente pelo estudante e os influenciam nas interpretações e nos significados dos objetos matemáticos, pois na linguagem dictarizada o objeto matemático dinâmico/não-ostensivo é particionado para ser representado pelo objeto imediato/ostensivo; na linguagem contraceptual o objeto assume uma posição de oriência⁵⁰, originalidade, envolto por aspectos abduativos e de criatividade; a linguagem do (dis) curso faz a mediação ou a transuasão, ao qual produz o efeito da interpretação das linguagens anteriores.

Ao chegar ao final da descrição das quatro linguagens construídas nessa dimensão do problema didático constatamos que existe uma proporcionalidade inversa em contextos de uso: na verticalidade, quanto mais se utiliza a linguagem dictarizada, menos linguagem contrafactual é produzida; de forma análoga, quanto mais linguagem em (dis)curso, menos linguagem em curso. Na horizontalidade, quanto mais baixo for a linguagem dictarizada mais elevada será a linguagem em (dis) curso; de forma análoga, quanto mais baixa for a linguagem contrafactual será elevada a linguagem em (curso). O ponto de equilíbrio, seria a forma ideal do uso das quatro linguagens, marcado pelo ponto P, no centro, em que os níveis de proporcionalidade atingem a igualdade de equilíbrio. A Figura 7 registra esse movimento proporcional das quatro linguagens.

Figura 7: Movimento proporcional das quatro linguagens



Fonte: Produção da autora

⁵⁰ Peirce denomina a sua primeira categoria de primeiridade, oriência ou originalidade, que “seria algo que é aquilo que é sem referência a qualquer outra de toda razão” (PEIRCE, 2005, p.24)

Foi exposto, nessa seção, as três dimensões do problema didático proposto por Gascón (2011), a partir delas ousamos construir uma quarta dimensão, a da linguagem. Tal proposta se justifica pelas duas visões teóricas que estamos correlacionando neste texto: na TAD, a mudança do paradigma de “visita as obras” para o paradigma do “questionamento do mundo”, proposto por Chevallard (2015), amplia o espaço de análise da matemática – do livro para o mundo. Os efeitos são também semióticos, pois demanda atribuir aos objetos matemáticos significados e sentidos que emergem da leitura dos signos culturalmente instituídos, das diversas linguagens que permitem compreender o mundo e dos contextos de uso daqueles signos.

Por se tratar da matemática a linguagem dictarizada traz os símbolos, as regras matemáticas como aquelas que são impostas como verdades pela comunidade matemática. São consideradas como indubitáveis, inquestionáveis, pois as demonstrações e a lógica estrutural dos seus entes permitem raciocínios dedutivos confiáveis o que legitima os discursos desta linguagem. Em contraposição à aquela, a linguagem contrafactual é livre, surge da mente humana inspirada pela sensibilidade, pelos *insights*, pelo raciocínio abdutivo - o único capaz de gerar ideias novas. Logo é impossível falar da linguagem contrafactual sem levar em consideração os aspectos criativos que podem ser elaborados a partir do uso desta linguagem.

Expomos também a linguagem em (dis)curso, que se divide em dois tipos: em curso e em (dis)curso, enquanto a primeira tem o campo de atuação no curso das aulas, prevendo interpretações simbólicas e uso de contexto dentro do próprio campo da matemática; a segunda – a linguagem em (dis)curso recusa a curvar-se diante das estruturas de poder que a matemática impõe, e propõe abrir o campo de discussão para as variadas interpretações advindas da intersubjetividade/ subjetividade do estudante e do professor que elaboram seus discursos e compreensões acerca do objeto matemático. Nessa última, o poder é questionado, criticado, no sentido de favorecer novas praxeologias matemáticas e didáticas que considerem o contexto social brasileiro.

Nos quatro tipos de linguagens propomos questões a serem feitas ao problema didático que contribuem para a compreensão do papel da linguagem no processo de ensino e aprendizagem de um determinado objeto matemático. O Quadro 2 sintetiza as perguntas formuladas para o problema didático sob a vertente da quarta dimensão: a da linguagem.

Procuramos construir uma dimensão que agregasse pressupostos da Semiótica peirceana aos da Teoria Antropológica do Didático. A linguagem nos pareceu um caminho

frutífero que: permite ler o mundo, sob diferentes interpretações, significados e sentidos; constrói nos atos de fala ações que são pronunciadas por palavras ou expressões e; a relatividade do discurso pode ser uma via de mão dupla, pois ou mantém o poder vigente, ou a crítica fazendo emergir outras interpretações para o conhecimento matemático estendendo para situações externas e internas ao campo.

Quadro 2 – Síntese das perguntas formuladas para o problema didático sob a vertente da linguagem

Tipo de Linguagem	Características	Perguntas Formuladas
Linguagem Dictarizada	• Simbólica • Regras e normas • Raciocínio dedutivo e indutivo	1. Quais expressões ou palavras estão diretamente relacionadas com o objeto matemático em estudo? 2. Quais significados eles geram que facilitam/dificultam a compreensão do objeto epistemológico? 3. Qual a relevância dos símbolos matemáticos para a compreensão do objeto matemático? 4. Como e quando aplicar uma regra matemática em tarefas distintas?
Linguagem Contrafactual	• Raciocínio abdutivo • Sensibilidade perceptiva • Criatividade	1. Qual o sentido coletivo do ensino de um determinado objeto matemático? 2. De qual mundo é retirado a razão de existir do objeto matemático pleiteado? 3. O que eu posso criar com esse objeto matemático? 4. O que já existe no mundo que eu possa usar para ensinar esse objeto matemático? 5. Quais registros me permitem extrapolar a visão limitada que o “eu” tem da matemática?
Linguagem em Curso	• Interpretações simbólicas • Contexto de uso interno a matemática	1. Quais as variações do objeto matemático em contextos de uso no próprio campo da matemática podem ser verificadas? 2. Como são interpretadas as variações das regras envolvendo o objeto matemático em estudo?
Linguagem em (Dis)curso	• Interpretações subjetivas e intersubjetivas do estudante e do professor • Críticas as relações de poder • Propõe novas praxeologias matemáticas e didáticas	1. Quais as interpretações possíveis que podem emergir do objeto matemático, por parte dos estudantes e dos professores? 2. Quais atividades podem ser construídas que possibilitem discussão e ações viáveis para a interpretação do objeto matemático? 3. Como pode o sujeito sujeitoado criticar? (Araújo, 2004, p.243); 4. Qual é a importância desse objeto matemático para a sociedade? 5. Quais significados podem ser produzidos a partir do contexto de uso desse objeto matemático? 6. Qual o “mundo vivo” que estão inseridos os estudantes ao qual vou apresentar o objeto matemático? 7. Como o objeto matemático pode contribuir para o desenvolvimento social do “mundo vivo” ao qual os estudantes pertencem?

Fonte: Produção da autora

As diferentes dimensões permitem ao investigador compreender, eleger e delimitar o problema didático para a tomada de decisão e para as organizações que podem ser tomadas previamente e modificadas e estudadas durante o processo de investigação. Nesse sentido,

buscamos identificar qual o problema didático que deu origem ao nosso estudo e promover os questionamentos peculiares a cada dimensão respondendo de acordo a nossa interpretação, ao qual apresentamos na seção seguinte.

2.3.5 A análise das dimensões do problema didático envolvendo a Integral Dupla

Com o objetivo de promover uma investigação didática sobre o ensino da Integral Dupla para cursos da graduação em Matemática e em Engenharias estabelecemos como problema didático: **quais organizações matemáticas e didáticas precisam ser criadas para calcular medidas de áreas de Superfícies Quádricas por intermédio da Integral Dupla na realização de um PEP?**

Para a análise da dimensão epistemológica deste problema didático, realizamos alguns questionamentos, a saber:

- O que é uma Superfície Quádrica?
- O que é uma Integral Dupla?
- Qual o papel que esses objetos matemáticos supracitados desempenham nas atividades institucionais vigentes?
- Qual o MER compatível com esses objetos epistemológicos?
- Quais são as relações que podem ser construídas entre os dois objetos matemáticos?
- Qual a razão de ser desses objetos matemáticos?

Nesse sentido, inferimos que a razão de existência da Integral Dupla está associada ao cálculo das medidas de superfícies tridimensionais, inclusive as Quádricas. Essa afinidade entre a Integral Dupla e as Superfícies Quádricas viabilizou a criação de atividades que permitam articular seus conceitos e abordá-los em uma perspectiva diferente das instituições de referência.

Ao propor um PEP tomando como aporte as Superfícies Quádricas que se apresentam nas obras de Antoni Gaudi e as utilizando para a aplicação de conceitos da Integral Dupla, percebemos nos livros didáticos e em artigos publicados que há uma descaracterização da forma como tais conceitos são abordados nas instituições de referência – o uso excessivo de técnicas e procedimentos algoritmizáveis – abrindo espaço para diálogos e para a construção de novas praxeologias. O escopo das reflexões e construções atinge patamares que estão na sociedade e o olhar atento pôde propiciar que as atividades matemáticas criadas em torno do objeto fossem

aplicadas durante o desenvolvimento do PEP compartilhando conceitos dos cursos ao qual os participantes estavam matriculados.

Neste intuito, as obras de Gaudi permitiram construir uma organização didática que abordou dois objetos matemáticos: a Superfície Quádrica e a Integral Dupla. Esse modelo se tornou uma referência em que os conceitos inerentes aos temas se apresentaram de forma implícita e revelaram-se no transcorrer do desenvolvimento do PEP.

Em termos da análise da dimensão ecológica algumas perguntas foram levantadas, tomando como aporte o estudo de Gascón (2011, p.221-222): Por que os modelos matemáticos associados a aplicação em cursos de áreas afins estão ausentes do Ensino Superior? Qual o papel desempenhado pela noosfera, pela sociedade e pela cultura na construção da relação da Integral Dupla no ambiente universitário? Como organizar um estudo que possa favorecer a relação da Integral Dupla com os cursos da graduação das áreas afins? Que condições e restrições podem ser citadas para que as OM e OD sejam implementadas nas instituições de nível superior? Quais dispositivos didáticos são viáveis para a implementação das OM e OD previamente elaboradas?

Os problemas científicos emergem de contextos: social, da natureza, da cultura, da física, da química, da biologia, da economia, entre outros, que necessitam da educação para a busca de soluções. Os conhecimentos que circulam entre os homens promovem novas perguntas e movem a busca por respostas. Entretanto, a fragmentação do conhecimento tem como objetivo criar uma estrutura que possibilite um conhecimento limitado de todas as áreas e a especialização em uma delas. Como consequência há um isolamento das áreas que proporciona a falta de diálogo entre elas impedindo que sejam divulgados alguns modelos matemáticos que são elaborados para atender uma demanda interna. Essa lentidão com que os resultados das pesquisas chegam aos espaços escolares consiste na falta de incentivo a Ciência em alguns países, como no Brasil, e o acesso fica restrito: as instituições universitárias e as ações individuais de alguns docentes.

Há nas atividades propostas nos livros didáticos um predomínio do uso de técnicas advindas das tecnologias e teorias da Matemática Pura que atendem aos interesses dos matemáticos. Não há uma preocupação efetiva daquelas obras para a produção de modelos matemáticos que atentam a demanda dos cursos universitários que utilizam como ferramentas os objetos matemáticos no desenvolvimento de praxeologias inerentes a sua própria área. Isso

demarca uma distância acentuada entre a Matemática pura e a Aplicada, estabelecendo algumas crenças educacionais prejudiciais no processo formativo dos docentes.

A exigência da noosfera por um Ensino Superior da Matemática que imbuía os estudantes de um pensamento científico e de uma linguagem rigorosa que atenda a esses anseios têm estabelecido um “crime educacional” em cursos para não-matemáticos. O ensino para essas graduações tem priorizado manter os parâmetros ditados pela Matemática pura, usam os mesmos planos de curso, as mesmas obras literárias elaboradas por matemáticos. No que tange aos cursos da Licenciatura em Matemática é perceptível nos documentos oficiais a ênfase dos docentes no desenvolvimento de demonstrações de teoremas, do uso de técnicas em detrimento da compreensão do motivo pelos quais o objeto matemático foi criado e os significados que adquiriram historicamente.

Essa abordagem estabelecida pela noosfera, pela sociedade e pela cultura demarca um ensino da Matemática desprovido de sentido e de aplicação para os não-matemáticos, e um total desconhecimento por parte de alguns dos matemáticos e futuros docentes sobre a epistemologia dos objetos matemáticos e a razão deles existirem.

Os docentes para atender aos anseios das graduações das áreas afins necessitam estabelecer diálogos e parcerias com os docentes dos cursos para não matemáticos e desenvolver modelos matemáticos que abordem os problemas provenientes daquelas áreas afins e capacitem os estudantes na execução dos projetos profissionais. Essa demanda fica comprometida quando os cursos de Bacharelado em Matemática não preparam os estudantes para ensinar de acordo as diretrizes das graduações das áreas afins, deixando-os à mercê de uma aprendizagem de como fazê-la no exercício da profissão. Ressaltamos que a Licenciatura em Matemática tem o objetivo de “atender as especificidades do exercício de suas atividades das diferentes etapas e modalidades da Educação Básica” (BRASIL, 2019). Entretanto, muitos dos professores que atuam no Ensino Superior tem sua formação em Licenciatura em Matemática com pós-graduação em Matemática ou em áreas afins.

Para a implementação de novas organizações didáticas e matemáticas no nosso estudo, identificamos algumas restrições advindas das instituições, a saber:

- O tempo restrito de cinco encontros acordados com os estudantes e desenvolvido aos sábados.
- A deflagração de uma greve durante o desenvolvimento do PEP, o que comprometeu o espaço físico e o uso da sala de computação;

- Os estudantes matriculados nos últimos semestres dos cursos das graduações não se motivaram a participar e por esse motivo os estudantes selecionados, embora tivessem estudado o CDI -III, ainda tinham pouco conhecimento das disciplinas específicas do curso de sua formação. Ressalto que para os estudantes da Licenciatura em Matemática tal afirmação não se aplica, eles estavam matriculados no último semestre.
- A visualização, a representação gráfica de funções de várias variáveis e as formas geométricas em espaço tridimensional consistem em obstáculos para a aprendizagem da Integral Dupla;
- Outro obstáculo consiste em estabelecer o domínio de Integração Dupla de funções de várias variáveis;
- O ensino do CDI nas instituições de referência – UESB e IFBA – é desenvolvido com aulas expositivas em que o docente explica as tecnologias, as técnicas e a teoria e depois aplica exercícios em que se utiliza o que foi ensinado. Esse modelo didático dificulta quando a metodologia de ensino é modificada, pois não estão acostumados em ser autônomos e produtores de seu próprio conhecimento, bem como, de questionar os saberes;
- Como nos referimos anteriormente, o tipo de atividade proposta nos livros didáticos não oportuniza questionamentos e significados para os objetos matemáticos aplicados em situações no universo extra matemático.
- Por ser um curso livre, os estudantes não eram pontuais o que dificultou o cumprimento das atividades planejadas de forma mais dialogada;

No que tange as condições favoráveis para o desenvolvimento do PEP e das OM e OD, citamos:

- A receptividade e a participação comprometida dos estudantes selecionados, que a cada encontro demonstravam maior interesse e o surgimento de questionamentos de forma gradativa;
- A escolha da questão geratriz do PEP foi decisiva para o desenvolvimento de OM e OD viabilizando atividades que atendessem aos estudantes da Licenciatura em Matemática e das Engenharias;
- O tempo disponível do investigador para a organização das atividades;

- A parceria das instituições universitárias – PUC-SP, IFBA e UESB – no desenvolvimento do projeto;
- A acessibilidade dos espaços físicos em que ocorreram os encontros;
- As Superfícies Quádricas que se apresentam nas obras de Gaudí puderam ser utilizadas para o significado da aplicação da Integral Dupla no cálculo do centro de massa e nos momentos de inércia.

Em termos de dispositivos didáticos viabilizados para o desenvolvimento do PEP destacamos a tecnologia, que proporcionou diálogos nos aplicativos de conversa e a exposição de vídeos sobre as obras do arquiteto Gaudí. A mesa redonda com a participação de profissionais dos cursos da graduação envolvidos no projeto. As entrevistas desenvolvidas com profissionais que estudam especificamente os objetos do PEP: as obras de arte e a Integral Múltipla, permitiram que as OM e OD fossem abordadas com pequenas e insignificantes modificações.

Com relação à dimensão econômica-institucional algumas questões acerca do ensino da Integral Dupla foram adaptadas de Gascón (2011, p.223), a saber: qual o âmbito institucional que devemos considerar ao ensinar a Integral Dupla? Como se considera, se descreve e se interpreta as características apresentadas na Integral Dupla por cada uma das instituições que intervém no processo da transposição didática? Que tipos de atividades podem ser propostas no Ensino Superior? O que as instituições universitárias entendem pelo ensino da Integral Dupla? Como o modelo epistemológico dominante nas instituições determinam as organizações do ensino da Integral Dupla? Quais dificuldades podem surgir ao propor as instituições universitárias a Integral Dupla como um instrumento voltado para a criação de novos modelos matemáticos? Quais possibilidades novas emergem?

As hipóteses levantadas para responder os questionamentos referentes a dimensão econômica serão argumentadas no penúltimo capítulo desta investigação quando trataremos da análise dos dados coletados. As inferências estão diretamente ligadas a interpretação do investigador e, portanto, passíveis de serem avaliadas e modificadas em qualquer período.

Em nossa pesquisa identificamos que a dimensão econômica envolta no ensino e na aprendizagem da Integral Dupla contempla a aula como a unidade de análise das obras arquitetônicas de Antoni Gaudí e por esse motivo há influência da cultura e da sociedade no PEP planejado e executado.

De forma geral, a Integral Dupla é apresentada nos livros didáticos como uma extensão da Integral Simples tal posicionamento pode ser encontrado em Leithold (1990, p.1022) ao afirmar: “aplicaremos a integral definida de uma função de uma única variável a uma função de várias variáveis”.

Ainda sob a comparação delineada entre as Integrais Duplas e as Simples observa-se que a razão de ser daquele objeto está plantada nos conceitos inerentes ao cálculo da medida da área e do volume de uma curva. A abordagem inicial nas principais obras selecionadas pelas instituições universitárias (LEITHOLD, 1990; STEWART, 2013; SWOKOWSKI, 1994) consiste em realizar partições nas superfícies apresentadas e aplicar de forma análoga os conceitos desenvolvidos por Riemann. Essa forma de expor o objeto matemático facilita a interpretação dos conceitos para o estudante, tendo em vista que no currículo a Integral Definida é ensinada e supostamente aprendida no CDI – II tomando como aporte o Método da Exaustão de Eudoxo que inspirou a definição das Integrais.

Em outros livros (PISKOUNOV, 1997; COURANT, 1958) o cálculo da medida de uma área ou do volume é abordado como uma aplicação da Integral Dupla e geralmente a exposição se encontra ao final do capítulo. Essa interpretação pode causar equívocos na aprendizagem do conceito da Integral Dupla, haja vista que a razão de ser de tal objeto e sua construção epistemológica está diretamente relacionada ao cálculo da medida da área e do volume. Ou seja, foram esses dois últimos conceitos que deram origem a Integral e, a aplicação deles consiste no motivo pelo qual foram criados. Embora, possa transparecer que a ordem linear da disposição no livro desse conceito não interfira, tal exposição pode levar o estudante a produzir significados distintos para a definição da Integral Dupla e a sua aplicação.

No que diz respeito às atividades propostas no modelo dominante, identificamos que os livros adotados privilegiam o uso de técnicas, de tecnologias e teorias previamente explicadas pelo docente, com aulas expositivas. Tal afirmação será abordada no capítulo seguinte, ao qual registramos o plano de curso das instituições universitárias da qual os estudantes fazem parte, bem como a análise praxeológica do livro de CDI adotado. Esse modelo determina as organizações didáticas e matemáticas que estão envoltas no ensino da Integral Dupla: o docente ensina o conteúdo, responde um exercício como modelo usando técnicas e tecnologias de uma teoria e solicita aos estudantes que façam outras atividades.

É possível propor tipos de atividades que promovam vínculos entre os objetos matemáticos e não matemáticos com o uso das praxeologias que atendam as expectativas e

diretrizes curriculares dos cursos originais. Talvez, essa proposta propicie mais significados para os objetos e promova novos questionamentos e respostas ainda não institucionalizadas. No entanto, os professores em formação precisam dispor de conhecimentos mais amplos sobre as áreas do conhecimento para que possam desenvolver o raciocínio abduutivo na elaboração de atividades distintas as que são apresentadas no modelo dominante.

Outro aspecto a pontuar é que se faz necessário que os livros didáticos sejam reformulados e tragam a atualização da aplicação dos objetos matemáticos em situações reais. Houve avanços históricos, científicos que tomaram como alicerce os objetos matemáticos para o seu desenvolvimento, como por exemplo: o *Global Positioning System* – GPS que é uma tecnologia de localização por satélite que é usado nos mais diversos aspectos da vida cotidiana, como: direcionamento de navegação (na aviação, marítima, automóveis) ou para encontrar uma localização específica ou, ainda, para a localização de uma área devastada, entre outros. O princípio veio da tecnologia, mas para o desenvolvimento dos algoritmos foram utilizados cálculos matemáticos na programação, no cálculo das medidas das áreas e que não são explicitados ou abordados nas edições dos livros de Cálculo. Se, a principal fonte de consulta dos docentes para modelos matemáticos provém dos livros didáticos e a sociedade tem se transformado com o decorrer do tempo, não nos parece que tais obras precisam também ser ajustadas aos anseios sociais e aos seus avanços?

Existirão dificuldades para a criação de novos modelos matemáticos advindos de uma postura científica que não pressupõe a relatividade para sistemas abertos. Culturalmente existe uma crença institucionalizada de que na Matemática temos que chegar a um resultado verdadeiro, reminiscência do raciocínio dedutivo. Entretanto, todas as descobertas matemáticas tiveram origem a partir dos questionamentos de oposição as verdades consideradas como absolutas. A criatividade e a ousadia em desafiar o que está posto conduziram a ciência aos avanços que desfrutamos atualmente.

Pouco falamos sobre a importância da criatividade, mas no Fórum Econômico de Davos, no ano de 2018, a criatividade foi indicada como uma das três habilidades necessárias para o profissional do futuro, ao lado da capacidade de resolver problemas complexos e do pensamento crítico. O ensino brasileiro tem promovido pessoas criativas capazes de competir no futuro mercado de trabalho?

Nossa hipótese é que a criatividade nas instituições escolares não é valorizada, pois buscam uma padronização, uma massificação do conhecimento não respeitando as diferenças

culturais e os conhecimentos advindos do senso comum. A soberania do conhecimento científico, instituindo o que é verdadeiro e o que deve ser vigente, tem aniquilado raciocínios abduativos originando o sentimento de comodismo e aceitação que impera e escraviza os homens. Essa perspectiva consiste em uma das dificuldades para o surgimento de novos modelos matemáticos.

O discurso científico e a linguagem que o compreende tem excluído mentes produtivas dos seus espaços, em função de manter a legitimidade e a falaciosa “verdade”. Precisamos incentivar a diversidade, pois ela consiste na maior fonte de criatividade ao qual o homem pode ter acesso. Talvez, falte nas cadeiras universitárias pessoas menos subservientes as regras e dispostas a romper com elas, propondo pensamentos não padronizados. Esse é um grande desafio para os matemáticos, que embuti um discurso de primazia das verdades alcançadas nas demonstrações dos seus teoremas, das regras aplicadas, excluindo, selecionando e menosprezando outras perspectivas para sua aprendizagem.

Nos comunicamos via celular, rompemos a velocidade do som, desenvolvemos naves espaciais, prevemos catástrofes e não conseguimos avançar nos anseios de uma educação para a liberdade, para a autonomia, para a aceitação da diversidade. Por isso defendemos que uma educação voltada para o incentivo a criatividade pode proporcionar uma mudança no sistema educacional.

Quanto à análise da dimensão da linguagem foi postergada para o quinto capítulo desta pesquisa, quando provaremos as hipóteses criadas por intermédio da interpretação dos dados coletados.

No próximo capítulo, estudamos o objeto matemático – Integral Dupla. Descrevendo a sua construção epistemológica e o momento histórico em que foi elaborado, mostrando indícios de alguns dos problemas que fizeram tal objeto emergir da mente de um matemático. Abordamos, também, como esse objeto “vive” nas instituições de ensino, fazendo uma análise dos documentos oficiais – Leis e planos de curso. Bem como, a análise praxeológica dos livros didáticos indicados nas referências bibliográficas das duas instituições de ensino ao qual pertencem os sujeitos da pesquisa.

3 A SAGRADA FAMÍLIA: Um modelo de referência para as formas tridimensionais

Neste capítulo, abordamos a definição da Integral Dupla nas diversas instituições em que ela vive; as relações que estabelece com outros objetos matemáticos e não matemáticos e, as condições e/ou restrições que emergem do processo do seu ensino.

O Modelo Dominante (MD) vigente nas universidades das quais os partícipes do curso são egressos foi delineado a partir: do Modelo Epistemológico de Referência construído pela pesquisadora; dos documentos oficiais criados para o Ensino Superior; dos planos de curso das instituições; das disposições normativas da componente curricular: Cálculo Diferencial e Integral III dos cursos das graduações dos estudantes e, da análise praxeológica dos livros didáticos adotados. Após o registro desses elementos, propomos um Modelo Alternativo (MA) para o ensino da Integral Dupla.

3.1 Objeto

3.1.1 Definição de objeto para a Semiótica peirceana e para a TAD

Vários filósofos e estudiosos se preocuparam com a definição ou o entendimento sobre o que é um objeto: Platão (380 A.C), Aristóteles (384 A.C), Descartes (1637), Spinoza (1677), John Locke (1690), Kant (1781), Schopenhauer (1818), Hegel (1821), entre outros, com diferentes abordagens e interpretações. No entanto, tomaremos as definições e relações estabelecidas pela Semiótica peirceana e pela Teoria Antropológica do Didático para compor o nosso estudo.

Segundo Peirce (1983, p.6), “o objeto é a coisa ou ocasião, mesmo indefinida, à qual o signo se há de aplicar”. É algo (material ou não) que depende do signo para chegar até a mente e do interpretante para ser significado. Tem como característica a capacidade de ser representado em facetas pelo signo, sem que esse nunca consiga representá-lo integralmente. “O signo vincula-se ao objeto a partir de um determinado aspecto, não pela totalidade dos aspectos. Caso pudesse abarcar todos eles, o signo seria o próprio objeto, o que o descaracterizaria” (DRIGO, 2013, p.38).

Essa característica é fundamental para o objeto matemático que se revela ao estudante por meio das representações analíticas, algébricas, gráficas. Porém, não o faz em sua totalidade,

pois há um resíduo para esse objeto que a qualquer momento pode emergir, revelando algo ainda não descoberto pelo interpretante.

O ícone é que “permite o uso do signo no lugar da coisa” (FABBRICHESI, 2013, p.25) ora, tal afirmação guarda similaridade com o papel que as representações (signos) exercem para expressar o objeto matemático. Tal associação só é possível, porque o conhecimento acerca do objeto se dá pela construção de um diagrama, ou seja, um esquema mental que apresenta semelhanças com o objeto do raciocínio, e que a partir da observação e da experimentação, novas verdades podem ser reveladas. Um diagrama puro é sempre matemático, pois é um ícone governado por uma regra, ou seja, um símbolo, por isso, Peirce (1983, p. 42) afirma que o “raciocínio matemático é diagramático”.

Diante do exposto, definimos com base na Semiótica peirceana, que os objetos matemáticos são esquemas mentais, ou diagramas, provenientes de construções humanas, que tem a capacidade de ser representado parcialmente por alguns aspectos, formas e estruturas valendo-se de regras e convenções simbólicas que dependem de um interpretante para a produção de seus significados.

No que concerne a definição de objeto para TAD, Chevallard afirma que

Na perspectiva antropológica adotada neste dicionário, a primeira noção fundamental nesse sentido é a de objeto. Chamamos **de objeto qualquer entidade, material ou imaterial, que exista para pelo menos um indivíduo**. A noção de objeto é aqui a noção mais geral. **Tudo é objeto, incluindo pessoas**. Os objetos são, portanto, o número sete, e o número 7, a noção de pai e esse jovem pai que acompanha seu filho, ou a ideia de perseverança (ou coragem, ou virtude etc.) ou a noção de derivada, e o símbolo ∂ etc. Em particular, todo trabalho O é um objeto (CHEVALLARD, 1998, p.1, **grifo nosso**)⁵¹.

Dois aspectos podem ser observados acerca da definição dada por Chevallard (1998) a respeito do objeto:

- o primeiro deles é que, embora não esteja explícita a relação triádica da Semiótica peirceana, há indícios da presença do signo e do interpretante em seu registro. Ao afirmar que o objeto é qualquer entidade material ou imaterial ele se aproxima da definição do signo: “é aquilo que representa **algo** para **alguém**” (PEIRCE, 2005, P.

⁵¹ Do original : Dans la perspective anthropologique adoptée dans ce dictionnaire, la première notion fondamentale à cet égard est celle d'*objet*. On appelle objet toute entité, matérielle ou immatérielle, *qui existe pour au moins un individu*. La notion d'objet est ici la notion la plus générale. Tout est objet, y compris les personnes. Sont ainsi des objets le *nombre* sept, et aussi le *chiffre* 7, la *notion* de père et aussi ce jeune père qui promène son enfant, ou encore l'*idée* de persévérance (ou de courage, ou de vertu, etc.), ou la notion de dérivée, et aussi le symbole ∂ , etc. En particulier, toute *œuvre* O est un objet. (CHEVALLARD, 1998, p.1)

46, **grifo nosso**). A palavra algo tem correlação com o significado da palavra entidade; e o pronome indefinido “alguém” comparando com a definição dada por Peirce, é o interpretante, que pode ser um indivíduo, também, mencionado na definição de Chevallard (1998).

- O segundo ponto, é que o símbolo, ∂ , mencionado na definição, é um tipo de signo da relação tricotômica estabelecida entre o signo e objeto. E por ser símbolo, ou um signo icônico especial, é legitimado por uma regra ou por uma convenção institucionalizada.

Logo, Chevallard (1998) ao afirmar que “tudo é objeto” o faz compreendendo que os objetos imediatos/ostensivos preservam as características parciais nas representações, que são os signos. A semelhança mobilizada pelos ícones se dá no nível dos objetos imediatos/ostensivos, mas não totalizam o objeto dinâmico/não-ostensivo, tais conjecturas podem ser constatadas em Chevallard (1994) e Bosch e Chevallard (1999).

Na seção seguinte, descrevemos um estudo epistemológico do espaço tridimensional, das Superfícies Quádricas e da Integral Dupla, objetos matemáticos escolhidos para a composição desta pesquisa.

3.1.2 O estudo das Superfícies Quádricas e da Integral Dupla

Como relatamos anteriormente, as obras de Antoni Gaudí foram a inspiração para o desenvolvimento de um modelo de organização didática para o ensino da Integral Dupla, pois as formas tridimensionais e as Superfícies Quádricas que compõem o design de sua arquitetura nos permitiram extrapolar o contexto original da matemática e introduzir a definição da Integral Dupla e a sua aplicação para o cálculo de medida da área das Superfícies Quádricas.

Perceber um objeto matemático em um contexto do/no mundo envolve a forma como o sujeito interpreta os fenômenos, que são os elos reais entre abduções e percepções. Por esse motivo, a criatividade para o desenvolvimento de “questões vivas” (CHEVALLARD, 1998) que abordem um determinado objeto matemático necessita que haja um distanciamento do objeto real para que a sua intencionalidade se manifeste, ou seja, revele a sua “razão de ser” (p.1).

Nesse sentido, os registros históricos sobre a formação dos objetos matemáticos podem revelar a intencionalidade e as perguntas que motivaram a sua criação. Por intermédio do estudo epistemológico é possível detectar as relações que os objetos matemáticos têm com outras áreas

do conhecimento e com outros ramos do seu próprio campo, fatos que podem ser constatados nas seções seguintes.

3.1.2.1 O espaço tridimensional

O nosso corte temporal remonta às civilizações antigas, em que a curiosidade pelos astros do céu despertava interesse e garantiam a sobrevivência da espécie. Iniciamos o percurso por volta do século IV a. C. com o astrônomo Eudoxo de Cnido (408 -355) que propôs um modelo geométrico tridimensional para o movimento planetário. Anos depois, em uma produção independente, Hiparco de Niceia (150 a.C.), também, empregou rigorosos princípios matemáticos para a localização de pontos na superfície da Terra e determinou as coordenadas celestes das estrelas, desenvolvendo um instrumento para medições de ângulos. Mas, foi Claudio Ptolomeu (90 – 168) que primeiro apresentou um modelo geométrico-numérico do sistema solar, considerando a Terra como o centro do Universo e os outros corpos celestes, planetas e estrelas, descrevendo órbitas ao seu redor.

Sobre aqueles astros, eles estão dispostos na abóbada celeste e os registros sobre a sua existência remontam as escrituras religiosas hebraicas. No livro do Gênesis, a palavra firmamento é definida como a linha que demarca o que está acima e o que está abaixo do céu. Os astros que estão no firmamento visto de qualquer posição, formam uma esfera de raio indefinido e para localizá-los foi necessário estabelecer um sistema de coordenadas envolvendo o espaço, o tempo e as distâncias em relação ao centro, ou a origem, ou um suposto referencial. A consequência desse estudo originou a astronomia esférica.

A esfera celeste (ou abóbada celeste) é uma superfície hipotética em que os astros desenvolvem uma trajetória com raios indefinidos e com o centro radial localizado no olho do observador. A impressão para ele é que as estrelas são fixas e giram em torno de uma linha que seriam os polos ou o eixo do mundo e, perpendicular a eles, o equador celeste.

Esta posição entre os polos e o equador celeste forma um plano geométrico que é determinado pela esfera celeste. Toma-se o centro de um corpo orbitado e descreve uma trajetória ao redor do centro de outro, em dois momentos distintos, originando o plano orbital. Esse, tem coordenadas esféricas determinadas por três pontos não colineares, e são formados de acordo as distâncias da trajetória: a primeira é formada em torno do centro do corpo orbitado em um dos polos e o equador celeste, situando no plano XOY; enquanto, a segunda, tem o

centro do corpo orbitado perpendicular ao plano principal, ambos em relação a um referencial. Luca (1982, p.82) explica:

Não basta especificar a posição espacial do corpo em relação a um sistema de eixo arbitrário, sendo necessário definir certos parâmetros convencionais. Admite-se que a origem, O, coincide com o centro do corpo, o plano XOY recebe o nome de plano principal, que é o plano do equador terrestre, ou é o plano da elíptica, e o eixo Oz caracteriza a orientação do polo norte (desse plano). O eixo Oz é normal ao plano orbital e sua orientação é tal que um observador olhando ao longo de Oz veria o movimento do corpo no sentido horário; o semieixo positivo Ox é dirigido para o equinócio vernal, que é caracterizado pela posição do sol ao cruzar o equador celeste, como vista do centro da Terra. Tal cruzamento deve-se efetuar do Sul para o norte; e o eixo Oy, que jaz no plano orbital, completa o sistema de coordenadas OXYZ, ortogonal e anti-horário. (LUCA, 1982, p.82)

As considerações feitas por Luca (1982) preservam semelhanças com a definição matemática da composição do espaço⁵² geométrico tridimensional, formado pelas distâncias orientadas de um ponto a três planos mutuamente perpendiculares, originado por três retas perpendiculares entre si, de mesma origem, denominadas de eixos – eixo das abscissas, eixo das ordenadas e eixo das cotas. A cada tripla ordenada, ou terna, de números reais (x, y, z) está associado um lugar geométrico no espaço tridimensional, um ponto P. O conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais é chamado de espaço numérico tridimensional, simbolicamente expresso como $\mathbb{R}^3$.

A distância orientada de P até o plano yz é chamada de coordenada x; a distância orientada de P até o plano xz é chamada de coordenada y e a distância orientada de P até o plano xy é chamada de coordenada z. Os três planos coordenados dividem o espaço em oito partes – quatro superiores e quatro inferiores – e são chamados de octantes.

No plano orbital, formado por um espaço tridimensional, a trajetória de um corpo sujeito apenas a atração da gravidade é uma cônica. Um plano ao tangenciar, com inclinação variada, a superfície cônica, determinam secções cônicas que são: a circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole, que estudaremos na seção 3.1.2.2.

3.1.2.2 A história do surgimento das Cônicas

A influência do pensamento de Eudoxo é postergada aos irmãos Manaecmus (375-325 A.C.) no estudo das cônicas. São eles os responsáveis pela descoberta de uma solução para a duplicação do cubo ao considerar que “havia uma família de curvas que podiam ser obtidas de

⁵² Um espaço pode conter n-dimensões, com $n \in \mathbb{N}$. Se $n=1$ o espaço é unidimensional, se $n = 2$ o espaço é bidimensional, se $n = 3$ é tridimensional; a partir desse, usamos 4-dimensões, 5-dimensões e assim sucessivamente.

uma mesma fonte, cortando um cone familiar reto por um plano perpendicular a um elemento do cone, parece ter descoberto as curvas que mais tarde foram chamadas de elipse, parábola e hipérbole” (BOYER, 1996, p. 65).

Tal descoberta será registrada nos tratados de Aristeu e Euclides (323-285 A.C) - *Lugares Sólidos* (o nome grego para secções cônicas) e *Lugares de superfície* – ambos perdidos e que provavelmente conteriam registros sobre “superfícies conhecidas pelos antigos – o cone, o cilindro, a esfera, os elipsoides, os paraboloides de revolução e os hiperboloides de revolução de duas folhas - ou talvez as curvas sobre as superfícies” (BOYER, 1996, p. 70).

A compilação realizada pelos Elementos, de Euclides, sobre as cônicas foi superada por Apolônio de Perga (260-200 A.C). Ele mostrou que as propriedades das curvas são independentes da inclinação dos eixos - oblíquo ou reto – para a secção do cone. Outros aspectos importantes das obras de Apolônio foram: a aplicação das retas de referência em geral e o tratado das tangências que podem ser considerados como prelúdios para a Geometria Analítica, introduzindo a noção do sistema de coordenadas – retangulares ou oblíquas – que irão compor conceitos inerentes as equações das curvas. “Coordenadas, variáveis e equações eram noções subsidiárias derivadas de uma situação específica; e infere-se que do ponto de vista grego não era suficiente definir curvas abstratamente como lugares satisfazendo a condições dadas sobre as coordenadas” (IBID., p.107).

Conhecedor das obras de Apolônio, Nicole Oresme (1323? – 1382) se dedicou a quantificar forma variáveis, traçando uma figura que descreviam como as coisas - a velocidade, a temperatura - variavam, conhecida por a *latitude das formas*. Essa figura, constituiu posteriormente aos prelúdios do que atualmente denominamos de representação gráfica de funções. Seu interesse pela área sob a curva e o modo pelo qual ela variava com relação aos referenciais forneceu alguns elementos para a construção da Integral da Função e a Equação Diferencial de uma curva.

Com o desenvolvimento da teoria heliocêntrica, por Nicolau Copérnico (1473-1543), o sol toma a posição central do sistema solar. Munido dessa informação, foi possível a Johannes Kepler (1571-1630) observar que um corpo em movimento orbita sob uma trajetória elíptica, parabólica ou hiperbólica. Essa conclusão leva-o a determinar sua primeira lei: Todo planeta do sistema solar descreve uma órbita que é uma elipse. Por dedicar-se a astronomia, Kepler alcançou êxito na óptica e no estudo dos espelhos parabólicos e desenvolveu o princípio de continuidade para o estudo das cônicas, deslocando o foco no infinito.

O movimento rotacional das secções cônicas no espaço tridimensional formou as regiões denominadas de Superfície Quádricas, que foram descritas na seção a seguir.

3.1.2.3 As Superfícies Quádricas

Na tentativa de resolver um problema⁵³ histórico proposto por Pappus (300 d.C), René Descartes “compreendeu a possibilidade de ampliar os seus métodos, aplicando-os ao espaço de três dimensões, mas não desenvolveu os pormenores. Sua geometria continha o uso sistemático das letras a ; b e c para as quantidades conhecidas e de x , y e z para as incógnitas” (SEDGWICK; TYLER, 1950, p.270). Tais simbologias serão usadas posteriormente para a sistematização das funções, por Leonhard Euler.

Embora, atribuam a Descartes o desenvolvimento de alguns conceitos da Geometria analítica, há indícios de que Fermat tenha a desenvolvido bem antes, embora, não a tenha publicado. Em Boyer (1996) há o seguinte registro sobre uma geometria analítica a mais que duas dimensões proveniente dos estudos de Fermat:

Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados de determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou curva, mas toda uma **superfície**. Assim aparecem superfícies como lugares etc. (BOYER, 1996, p.239, **grifo nosso**)

Após o estudo de Descartes e Fermat, o cientista Christiaan Huygens (1629-1695) conseguiu encontrar os pontos de máximo, mínimo e de inflexão para uma curva, bem como, o raio de curvatura de uma curva plana estimulado por preocupações práticas (como o relógio de pêndulo e a curva tautocrônica; as catenárias; entre outras). Ele foi o primeiro a achar a área da superfície de um segmento de um parabolóide de revolução (BOYER, 1996, p.260) e a achar a equação da catenária.

Mas, os conceitos da Geometria Analítica tridimensional só foram realmente desenvolvidas no século XVIII, por Leonhard Euler (1707- 1783), que estudou “sobre o uso de geometria de coordenadas no espaço, dando equações gerais para três grandes classes de superfícies: cilindros, cones e superfícies de revolução” (BOYER, 1996, p.318). Entretanto, ele

⁵³ O problema de Pappus: Dadas n retas no plano, L_i , n ângulos, θ_i , n comprimentos, m_i , medidos sobre as retas que fazem os ângulos θ_i com os L_i , e um segmento de reta a . Pede-se o lugar geométrico dos pontos C para os quais: No caso de 3 retas $m_1^2 = m_2 m_3$. No caso de 4 retas $m_1 m_2 = m m_4$. No caso de 5 retas $m_1 m_2 m_3 = a m m_5$. No caso de 6 retas $m_1 m_2 m_3 = m_4 m_5 m_6$. E assim sucessivamente.

não se limitou ao estudo das secções cônicas, dedicou a criar uma “teoria geral de curvas, baseada no conceito de função que era central no primeiro volume de *Introductio*” (BOYER, 1996, p.318). Esse livro-texto expõe as contribuições de Euler a geometria analítica no espaço, o uso de coordenadas polares, as transformações dessas coordenadas para retangulares e o uso sistemático da representação paramétrica de curvas.

Sobre as Superfícies Quádricas, Euler desenvolve as equações que as representam, como podemos constatar em Boyer (1996, P. 319):

As superfícies, tanto algébricas como transcendentais, são consideradas em geral e são subdivididas em categorias. Aqui encontramos, evidentemente pela primeira vez, a noção de que as superfícies de segundo grau constituem uma família quádrlica no espaço análoga à família de secções cônicas na geometria plana. Partindo da equação quadrática geral com dez termos $f(x, y, z) = 0$, Euler observa que a coleção de termos de segundo grau, quando igualada a zero, dá a equação do cone assintótico, real ou imaginário. E, o que é mais importante, ele usou as equações de translação e rotação de eixos para reduzir a equação de uma Superfície Quádrlica não-singular a uma das formas canônicas aos cinco tipos fundamentais – o elipsoide real, os hiperboloides de uma e duas folhas e os paraboloides elíptico e hiperbólico.

Na exposição textual acima verifica-se a importância de se encontrar uma solução para as equações diferenciais envolvendo as superfícies e uma família de curvas que as representassem. Para Barthélemy (1999, p.87) “o estudo das superfícies, no espírito da geometria analítica, exigia funções de duas variáveis, e a física levava a ter em consideração grandezas que dependem do lugar, portanto, de três coordenadas”. Quanto aos problemas da Física, ele ressalta: “ainda da parte da física, o problema da corda vibratória, a propagação do calor, a eletricidade e o magnetismo e a sua resolução induziram novas noções matemáticas” (BARTHÉLEMY, 1999, p.88).

No entanto, não foi a partir do estudo das superfícies que surgiu o Cálculo Diferencial de Funções de duas variáveis, sistematizado por Euler; mas envolviam problemas de trajetórias de famílias de curvas (DOMINGUES, 2013). Esta informação nos conduziu para o estudo da Integral Dupla, em que se apresentam as funções de várias variáveis, e que contribuiu para o estudo das trajetórias ortogonais.

3.1.2.4 Integral Dupla

Nesta seção, delineamos um recorte histórico em que registramos a origem dos primeiros conceitos da integração, até a construção da definição da Integral Dupla, por Leonhard Euler.

A multidimensionalidade já era do conhecimento dos gregos e dos egípcios. No papiro de Moscou (1890. A.C.) há indícios do cálculo da medida, por uma estimativa primitiva, da área de uma superfície curva” (BOYER, 1996, p.14), o que revela o interesse das antigas civilizações pelo cálculo das medidas de área e de volume.

Eudoxo de Cnido (408-355? a.C.) foi um célebre matemático que usou da “comparação de configurações curvas e retilíneas. Matemáticos anteriores haviam sugerido inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e fora da figura curva e ir multiplicando indefinidamente o número de lados” (IBID., p.62), mas foi Eudoxo que forneceu a conclusão para esses estudos, chamado posteriormente de “Método da Exaustão”.

As contribuições, daquele matemático, foram a base para a origem do que hoje denominamos de Cálculo Integral, ele também influenciou Arquimedes (287-212 A.C.) no desenvolvimento de instrumentos de guerra, no estudo da espiral e na Quadratura da parábola, pelo axioma que leva o seu nome, mas que toma por princípio o uso do método de Eudoxo.

O século dezesseis foi marcado por interesse na solução de problemas físicos e o desenvolvimento da álgebra. Podemos destacar as contribuições de François Viète que introduziu, nessa época, “a distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida” (BOYER, 1996, p. 208) caracterizando a “álgebra simbólica” (SEDGWICK; TYLER, 1950, p.237).

Outras descobertas como: os logaritmos por John Napier; e o interesse de Galileo Galilei pelos problemas físicos, tais como: dilatação pela ação do calor, hidrostática, estática, dinâmica, movimentos pendulares, movimentos das componentes da trajetória de um projétil, entre outros; buscando desenvolver ideias com as de quantidades infinitas, infinitesimais e contínua, o que mais tarde veio a contribuir para o Cálculo Diferencial e Integral.

Entretanto, foram os problemas envolvendo áreas que despertaram o interesse de Johannes Kepler que, na busca por soluções, introduziu o conceito de partições, preenchendo a área com infinitos pequenos triângulos, infinitamente próximo um dos outros; raciocínio semelhante ao de Nicole Oresme. Kepler dedicou-se ao cálculo dos volumes de “vários sólidos de revolução não considerados por Arquimedes” (BOYER, 1996, p.223). Sua segunda lei afirma que: “em intervalos de tempos iguais, as áreas descritas pelo raio que une o centro do sol ao centro de um planeta qualquer são, também, iguais” (LUCA, 1982, p.69). Ele também conseguiu determinar o volume de muitos sólidos limitados por superfícies de revolução

dividindo o sólido em secções, calculando a medida da área de cada secção e, por fim, somando-as. Com isso, delineia-se um cenário propício para o surgimento do cálculo das variações.

Entretanto, foi nos primeiros anos do século dezessete que ocorreram dois marcos importantes para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral: a invenção da geometria analítica por Descartes (1596-1650) e o método dos indivisíveis por Cavalieri (1598-1647).

Em relação ao trabalho de Descartes, a magnitude de suas contribuições para a matemática foi o reconhecimento da equivalência entre uma equação e o lugar geométrico de um ponto cujas coordenadas satisfazem a equação. Outro ponto a considerar, é que Descartes vislumbrou a possibilidade de estender o seu método, ao espaço de três dimensões, embora não atribuiu demasiada importância (SEDGWICK; TYLER, 1950, p.270).

O principal contributo de Cavalieri foi a criação do princípio dos indivisíveis, em que “qualquer grandeza pode ser dividida num número infinito de pequenas quantidades, as quais se podem tomar de maneira que guardem entre si quaisquer proporções desejadas” (SEDGWICK; TYLER, 1950, p.237). Admitia que a “área consistia numa soma de linhas paralelas e determinava “volumes pela consideração de secções ou elementos de pouca espessura em que é possível dividi-lo por meio de planos paralelos e tornava-se patente que o cálculo integral se desenvolveria a partir da obra de Cavalieri” (IBID., p.273), apresentando indícios do conceito de integração por uma soma.

Outros matemáticos como John Wallis, James Gregory, Pascal, Barrow também contribuíram para o Cálculo Diferencial e Integral. No entanto, os serviços prestados a matemática por Isaac Newton e Gottfried Leibniz podem ser comparados a uma revolução científica, pois conseguiu generalizar todos os conhecimentos construídos por seus antecessores e produziram o Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma única variável, usando métodos diferentes.

Um dos marcos da descoberta do Cálculo Integral foi o reconhecimento de que determinar a medida de uma área era o mesmo que resolver uma equação diferencial, conclusão retirada por Leibniz. Newton, também, usou o mesmo objeto matemático para a interpretação das descobertas na mecânica, na astronomia, na óptica. Entretanto, a utilização do Cálculo Diferencial nas ciências físicas só alcança resultados com a revolução industrial, em que o uso de máquinas com fontes extraídas independentes da energia humana ou animal, como o carvão, tornou-se uma realidade.

Entretanto, os interesses lucrativos e a ganância por um aumento na produção, exigia da máquina maior eficiência. A energia, ou capacidade de produzir trabalho, coloca o conceito e a aplicação da força em uma posição secundária, exigindo avanços no estudo do Cálculo Integral e novos instrumentos matemáticos para calculá-la, tornando-os a base da física e da química energética (ou termodinâmica) no auge, naquela época.

Nos séculos XVIII e XIX a ciência física estava envolta nos processos de produção de calor, descobre-se com a invenção da máquina a vapor que a matéria inerte é portadora de energia potencial, e que esta, tem uma quantidade desperdiçada no processo de transformação do trabalho. Para aferir o rendimento da máquina e minimizar o desperdício de energia atribui-se ao Cálculo Integral a importância prática e a ampliação dos objetos matemáticos que a compõe.

É neste cenário que os irmãos Bernoulli, sob a orientação de Leibniz, ampliaram o estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Atribui-se a Jacob Bernoulli (1604-1705) o desenvolvimento da equação da catenária (de forma independente, Leonardo da Vinci, Galileu, Huygens e Leibniz também o fizeram), bem como, a solução da equação de Bernoulli, junto com Leibniz e seu irmão, Johann Bernoulli.

Sobre os feitos deste último, Johann Bernoulli, é que se “pôde definir a função como uma quantidade composta, de uma qualquer maneira, por uma variável e uma constante” (BARTHÉLEMY, 1999, p. 87), tomando como auxílio as diferentes operações enunciadas por seus antecessores, como a diferencial e a integral. Definiu a integração como inverso da diferenciação; mostrou técnicas de integração e renunciou a linguagem usada para os problemas da geometria e da mecânica substituindo-a pela do cálculo e foi desta forma que nomeou os problemas inversos da tangente como equações diferenciais (FLOOD; WILSON, 2013).

Mas, sua maior contribuição para o surgimento de novos objetos matemáticos ocorreu ao resolver o problema da braquistócrona ⁵⁴ adicionando ao campo uma abordagem inteiramente nova, o cálculo das variações. Segundo Flood e Wilson (2013, p. 111):

A partir dos seus estudos da curva de descida mais rápida ele propôs o problema de encontrar duas famílias de curvas com a propriedade de que cada curva da primeira família cruza cada curva da segunda família em um ângulo reto. São as chamadas *famílias ortogonais*, que inspirou novos conceitos para conceber expressões que dependam de mais de uma variável.

⁵⁴ Consistia em achar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza no menor tempo possível de um ponto dado a um segundo ponto dado mais abaixo, mas não diretamente sobre o primeiro (BOYER, 1996, p.287)

Como relatamos anteriormente, foram as trajetórias das famílias de curvas que impulsionaram a mobilização de novos objetos matemáticos e, no século XIX, vários ramos da matemática sofreram críticas e reformulações que deram origem a problemas mais complexos advindos da mecânica, da astronomia, da física, que impulsionaram o descobrimento e a expansão do Cálculo Diferencial e Integral, entre eles: o cálculo das variações. Grandes matemáticos como: Maclaurin, os membros da família Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, desempenharam papéis importantes para a construção da estrutura do CDI.

Todavia, daremos ênfase as contribuições advindas de Leonhard Euler (1707-1873) que sistematizou os estudos dos seus precursores e formulou a ideia de função da forma que hoje conhecemos. Envolvido em problemas da mecânica, da física e da astronomia, ele promoveu descobertas matemáticas que serviam de instrumentos para avanços em outras ciências. Na mecânica, o seu trabalho sobre movimento de corpos rígidos resultou nas equações de movimento de Euler que demarcou o conceito de momento de inércia. Tratou, na física, das “vibrações de luz e deduziu a equação da curva vibratória em função da elasticidade e da densidade” (SEDGWICK; TYLER, 1950, p.323). No modelo de viga de Euler/Bernoulli foi usado uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem, para o cálculo de deflexão de uma viga ao receber uma determinada carga, apresentando o uso de funções de várias variáveis independentes e dependentes de suas derivadas.

Nosso interesse particular está nos seus estudos acerca das Integrais, principalmente da Integral Dupla, que foi usada “na forma $\iint V dx dy$ por Euler” (LACROIX, 1810, p. 966), no livro *Institutionum Calculi Integralis*, em 1768, ao qual tivemos acesso em um site de busca por fontes históricas primárias.

Essa abordagem histórica sobre a Integral Dupla que se inicia com as ideias de Cavalieri (1598-1647) ao pensar que um sólido pode ser considerado como um conjunto de regiões com volumes indivisíveis, o que permitiu desenvolver novas ideias sobre as superfícies, o volume e a determinação geométrica do centro de gravidade das figuras planas e dos sólidos e finaliza com a sistematização feita por Euler, tem como objetivo mostrar que a Integral Dupla tem a sua razão de existir no cálculo de volumes de sólidos. “O cálculo dos volumes de sólidos mais complicados exige subdivisão em elementos cujos volumes possam ser traduzidos diretamente por integrais duplas” (COURANT, 1958, p.264-265).

3.2 Modelos epistemológicos da Integral Dupla

Um modelo é um dispositivo racional que submete a uma linguagem de signos para interpretar e prever fenômenos que demarcam partes de uma realidade. Para ROBARDET; GUILLAND (1997) “um modelo é, portanto, uma ferramenta racional construída por meio de uma linguagem, a fim de permitir o estudo de uma realidade empírica local perfeitamente circunscrita a ensinar um número de fenômenos determinados”.

Na matemática, o modelo epistemológico de referência é “relativo a um certo domínio das matemáticas é uma reorganização desse domínio que pode representar uma árvore (no sentido da teoria dos grafos) em que cada nó é uma praxeologia matemática que amplia e completa relativamente a anterior”. (GASCON, NICOLAS, 2016). Apresentamos, a seguir, os quatro modelos epistemológicos envolvendo a definição da Integral Dupla.

3.2.1 Um Modelo Epistemológico de Referência para a Integral Dupla

Partindo do princípio da ação da semiose para a interpretação dos fenômenos didáticos, consideramos o Modelo Epistemológico de Referência (MER), como uma interpretação pessoal do professor/investigador acerca das relações estabelecidas entre os objetos matemáticos e não-matemáticos que potencializam a criação de um modelo alternativo para o ensino da Integral Dupla.

O MER é uma hipótese, um raciocínio abduutivo, caracterizado por *insights*, que estimula a criatividade, o ineditismo, a inovação. Por ser uma conjectura é passível de ser ajustado a qualquer tempo e essa flexibilidade permite um grau de liberdade ao pesquisador/investigador para a sua elaboração. Nesse sentido, ele precisa analisar de forma crítica o modelo epistemológico dominante nas instituições para modificá-lo, propondo problemas didáticos originais, no intuito de expandir o conhecimento do objeto matemático a ser ensinado.

A possibilidade crítica de análise de um objeto matemático, quer seja no âmbito matemático ou escolar, aduz a perspectiva de desestabilizar o modelo dominante e enveredar nos caminhos da elaboração de tarefas desafiadoras que extrapolam àquelas que se aplicam apenas técnicas algorítmicas, repetitivas e sem significado. Nesse sentido, a abordagem de um objeto não pode ser investigada apenas como uma ação reflexiva sobre ele mesmo, mas em atividades que favoreçam: levantar conjecturas sobre a razão da sua existência; incentivar a

elaboração de inferências criativas; estabelecer outros modelos possíveis de abordar o objeto matemático e verificar a relação de dependência com outros signos para que coexistam.

Tais possibilidades configuram, também, as condições e restrições ao qual estarão submetidos o MER e faz-se necessário avaliar as discrepâncias entre as organizações didáticas e matemáticas; a incompreensão epistemológica; o reducionismo de suas estruturas; a abnegação da relevância do formalismo e do rigor dos objetos matemáticos que tem como consequência a regulação do seu ensino. Tais ajustes tem proporcionado distorções na formação dos seus conceitos e definições que podem ter efeitos diversos nos processos cognitivos daqueles que buscam conhecê-lo.

É nessa perspectiva que a TAD coloca a dimensão epistemológica de um problema didático como fundamental, pois o conhecimento profundo do objeto matemático conduz a compreensão das suas estruturas; as regras matemáticas; as adaptações, internas e externas, ao sistema matemático; as restrições do ensino do objeto nas instituições, o desenvolvimento das organizações matemáticas e didáticas e como eles estão inter-relacionados com as outras áreas do conhecimento.

Acrescenta-se, ainda, ao MER uma busca por possíveis respostas às questões que envolvem os motivos que o levam a estar sendo ensinado de uma forma e não de outra; as possibilidades de emersão de percepções distintas do objeto; a diversidade de encaminhamentos e soluções que uma determinada tarefa proporciona ao envolver conceitos, definições, axiomas acerca do objeto. Para isso faz-se necessário estudar o objeto, a sua origem, o seu desenvolvimento, correções ou ajustes realizados, e as praxeologias matemáticas que prevalecem no modelo dominante, para que proponham um modelo alternativo. Logo, o estudo do saber matemático antes de ensiná-lo e os dados coletados em pesquisas promovidas em diversas instituições interverem no processo da transposição didática (GASCÓN, 2011).

Na TAD, o estudo do objeto epistemológico é central, pois o alvo é ensinar as estruturas que compõem as Ciências, particularmente, a Matemática. Desta forma, o problema didático circunscreve os limites, as circunstâncias matemáticas, didáticas imprimidas pelas escolhas institucionais. O MER é um importante instrumento que permite identificar e ampliar a investigação didática em torno do que acontece antes, durante e após o ensino de um saber matemático.

Para guiar a elaboração do MER é necessário identificar uma questão didática que fomenta e ampare coerentemente o que se pretende problematizar. Em nosso estudo,

pretendemos provar que a linguagem e as situações que envolvem a transposição didática de um saber matemático são diferentes a depender da graduação e, ainda, que a linguagem empregada no ensino e na aprendizagem da Integral Dupla favorece a análise de raciocínios abdutivos, praxeologias e significados quando aplicados a um PEP. Norteados por essas hipóteses, precisávamos conhecer o ecossistema matemático ao qual a Integral Dupla faz parte, ou seja, a rede de objetos associados a ela. Pensando sobre esse viés, criamos o seguinte problema didático: *como organizar os objetos imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos que caracterizam as Integrais duplas no cálculo da medida das Superfícies Quádricas, para ser usado em um modelo matemático que permita produzir significados, raciocínios abdutivos e praxeologias diferenciadas que atentam aos interesses dos graduandos das Engenharias e da Matemática?*

O acréscimo da dimensão da linguagem na formulação e na análise de um problema didático em torno de uma modelização matemática dá suporte para observarmos os significados, as condições e restrições que esse objeto fomenta quando surgem praxeologias inéditas, bem como, proporciona a divulgação dos saberes: matemático, a ensinar, ensinado e aprendido nas instituições de ensino.

Para esse percurso, procuramos construir o ecossistema matemático que gira em torno da Integral Dupla. Ele é composto por dois níveis tróficos: no primeiro nível, tece uma teia de relações com os objetos matemáticos – números, funções, geometria, superfícies, matrizes, coordenadas – que contribuem como fonte de alimento para a constituição do objeto em estudo e, no segundo nível, ele desempenha um papel secundário, pois passa a alimentar outros ramos da matemática (como por exemplo, a topologia), outras áreas de conhecimento (Engenharia, Arquitetura, Física, entre outras) e, outros objetos matemáticos: como as Integrais Triplas, as Integrais de Superfície, as Equações Diferenciais, as Variáveis Complexas, as Séries.

É possível identificar a existência de fatores bióticos e abióticos ⁵⁵que compõe cada um dos níveis tróficos e são condicionados por objetos imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos. O primeiro nível trófico apresenta-se os objetos matemáticos que “alimentam” a Integral Dupla, são eles: número, funções, geometria, superfícies, matrizes, coordenadas e integrais de Lebesgue. Cada um deles tem a sua função biótica: para o número são as noções de medida, quantidade e ordem; para as funções de uma e duas variáveis são: os limites, as

⁵⁵ Vamos considerar os fatores bióticos como objetos matemáticos que alimentam a Integral Dupla e interacionam com o nível trófico e como fatores abióticos, as propriedades, os teoremas pertencentes a Integral Dupla.

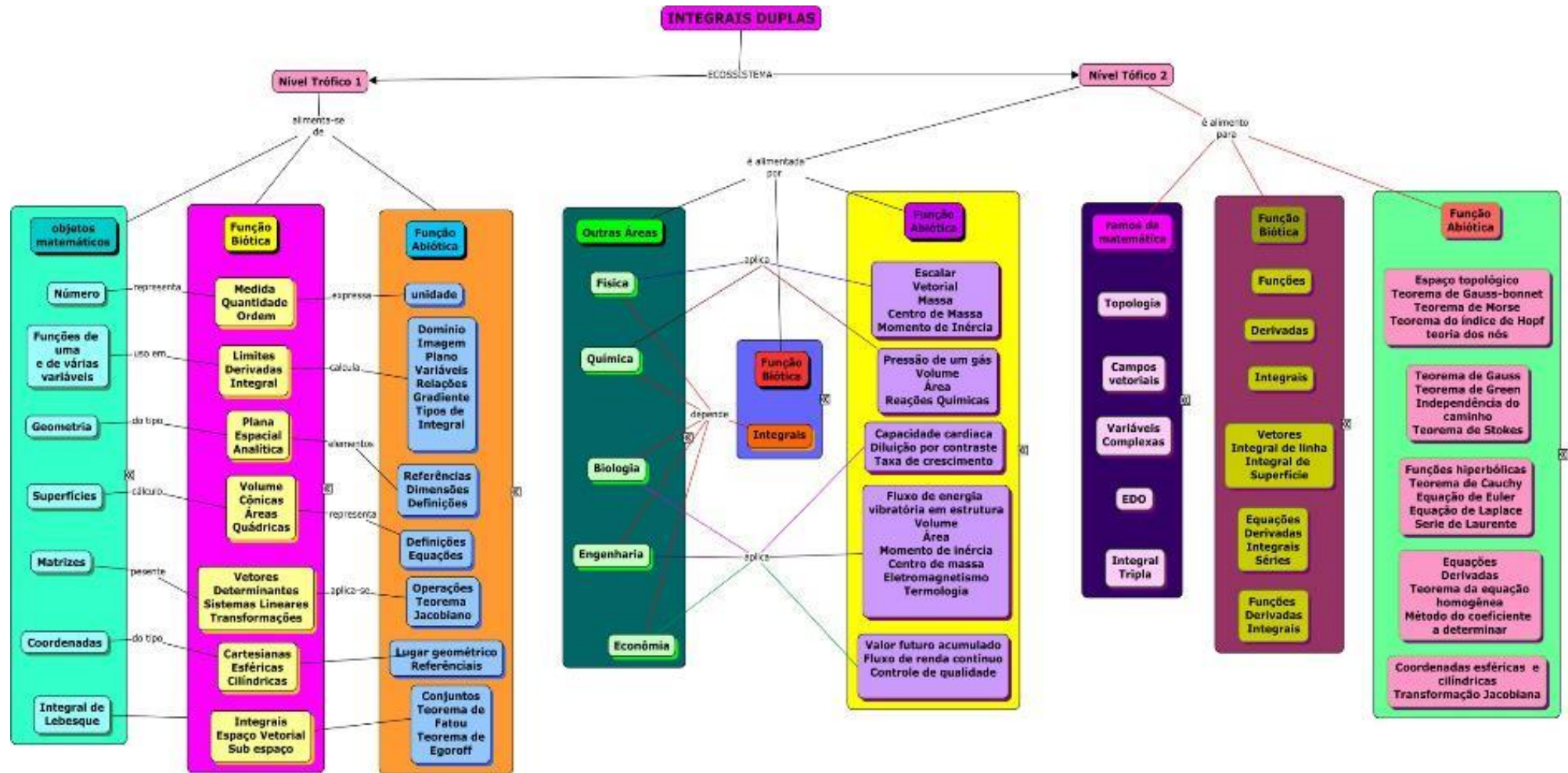
derivadas e a integral; na geometria são: a plana, a espacial e a analítica; nas superfícies: as cônicas e as quádras; para as coordenadas: cilíndricas, esféricas e cartesianas; para as matrizes: vetores, determinantes e sistemas lineares; para a integral de Lebesgue: integrais, espaço vetorial e subespaço.

No segundo nível, as integrais duplas servem de alimento para ramos dentro da própria matemática e para outras áreas. Para os ramos da matemática, como: topologia, campos vetoriais, variáveis complexas, equações diferenciais e integrais tripla, temos os fatores bióticos assim organizados: na topologia são as funções e derivadas; nos campos vetoriais são os vetores, integral de linha, integrais de superfície; em variáveis complexas são as funções, as derivadas e as integrais; em equações diferenciais são: equações, derivadas, integrais e séries e para a integral tripla são as integrais. Como fatores abióticos: na topologia são o espaço topológico, o teorema de Gauss-Bessot, a teoria de Morse, o Teorema do índice e Hopf e a teoria dos nós; para os campos vetoriais são: teorema de Gauss, Teorema de Green, Independência do caminho, teorema de Stokes; para as variáveis complexas são as funções hiperbólicas, teorema de Cauchy, Equação de Euler, Equação de Laplace, serie de Laurente; para as equações diferenciais são as equações, derivadas, teorema das equações homogêneas, método do coeficiente a determinar; para as integrais triplas são as coordenadas esféricas e cilíndricas e a transformação jacobiana.

Para as outras áreas, a integral dupla dá suporte para a física, a química, a biologia, a engenharia e a economia. A integral é a função biótica de todas elas e se diferem quanto a função abiótica: na física são: medida escalar, medida vetorial, massa e momento de inércia; na química são: pressão de um gás, volume, área, reações químicas; na biologia são: capacidade cardíaca, diluição por contraste, taxa de crescimento; na engenharia, fluxo de energia vibratória em estruturas, volume, momento de inércia, centro de massa, eletromagnetismo, termologia; na economia, valor futuro, fluxo de renda contínuo, controle de qualidade.

Na Figura 8, descrevemos o objeto matemático, os níveis tróficos e os fatores que auxiliam na construção da Integral Dupla.

Figura 8: Ecossistema das Integrais Duplas



Fonte: Produção da autora

A Figura 8 sintetiza as relações entre objetos matemáticos, propriedades, definições, teoremas que contribuíram para a construção do Modelo Epistemológico de Referência – MER. A partir do resumo, verificamos uma relação de dependência entre os objetos que tomam significados por intermédio do conjunto de praxeologias matemáticas.

Iniciamos o nosso percurso pelo número, que consegue impor a noção de quantidade, de ordem e de medida. Das três, fizemos um recorte e dedicamos ao estudo da medida que está diretamente relacionada à Integral Dupla. De acordo Lima (2011):

Um número (real) é o resultado da comparação de uma grandeza com a unidade, que é uma grandeza da mesma espécie, fixada como padrão. Há basicamente dois tipos de grandeza: as discretas (como um rebanho) e as contínuas (como o tempo, o peso e a distância). Comparar uma grandeza discreta com a unidade significa uma contagem; o resultado é sempre um número inteiro. Se, entretanto, a grandeza é contínua, compará-la com a unidade é medi-la; o resultado da comparação (medida) é um número real. Se a grandeza (contínua) que se quer medir é comensurável com a unidade escolhida, a medida é um número racional; se é incomensurável, sua medida é um número irracional. (LIMA, 2011, p.7)

Essa vertente da medida, como uma grandeza comparada a uma unidade, encontra apoiadores como Perrin-Glorian (1992) e Baltar (1996) que defendem o conceito de medida da área enquanto uma grandeza e em decorrência pode-se atribuir um número real positivo. Identificamos, para esta pesquisa, duas aplicações do número como medida de grandeza: na matemática, associado ao conceito de área e na física, relacionado com as medidas - escalar e a vetorial. A medida escalar na física está associado a um único valor numérico e a uma unidade de medida. São denominadas grandezas físicas escalares e como exemplo podemos citar: massa, tempo, volume, entre outras. A grandeza física vetorial além do valor numérico e da unidade de medida é necessário informar uma direção e um sentido e são representadas por vetores. Esses objetos contribuem para que a matemática avance na construção de novos objetos, como: a geometria vetorial, as funções de várias variáveis e evoluem apoiando na construção dos conceitos de Derivadas Parciais e Integrais Múltiplas.

A ideia de número como uma medida associada a uma grandeza dá origem a duas geometrias: a plana e a espacial. Ambas, têm seus entes matemáticos retirados da observação dos astros celestes que proporcionaram criar as noções e definições de: espaço tridimensionais, cônicas, superfícies quádricas, volume, área, entre outros. A evolução e a articulação desses conceitos despertam em Fermat e Descartes o interesse de uma dimensão analítica para o estudo dos objetos emergindo a geometria analítica. Com o avanço desta, houve o desenvolvimento das matrizes, dos determinantes, dos sistemas lineares e dos vetores fazendo ampliar o estudo

da matemática para um campo vetorial, introduzindo as transformações jacobianas e estendendo os conceitos de função de uma variável para funções de várias variáveis, objetos que contribuíram para a formação da Integral Dupla.

O conceito de área como grandeza associada a um número estabelece relação com as integrais que, por sua vez, se fundamentam nas funções de uma única variável. O limite, as derivadas vão compor o movimento em direção a uma sistematização da integral relacionada às funções sem desprender da sua razão de ser: cálculo da medida de uma área. Posteriormente, os fenômenos são percebidos por relações entre várias variáveis, o que demanda uma estrutura mais complexa entre as relações de dependência e independência das variáveis, conceito que alicerça as Funções de várias variáveis. Com isso, se faz necessário uma releitura para os conceitos de limites, derivadas e de Integrais de funções de uma variável emergindo os conceitos e teoremas que encorpam os limites de funções de várias variáveis, derivadas parciais, derivadas direcionais, gradiente e Integrais Múltiplas *locus* em que se encontra a Integral Dupla.

A teia de correlações entre objetos imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos que alimentam a Integral Dupla forma uma estrutura sólida que o transforma em um objeto potencializado a ser alimentado por outros objetos matemáticos e não matemáticos. Como alimento, a Integral Dupla passa a ser uma fonte secundária e serve para o desenvolvimento de outros ramos internos a própria Matemática, tais como: Topologia, Variáveis Complexas, Equações Diferenciais, Integral Tripla. Em uma relação mútua com outras áreas do conhecimento, a Integral Dupla contribui como instrumento de expansão para a Física, para a Biologia, para a Economia, para a Engenharia dando origem a uma diversidade de estruturas, teoremas e teorias que repercutem no avanço da sociedade.

O último caminho trilhado compreende as ideias de Henrique Lebesgue (1875-1941) que associa medida com o comprimento na reta, a área no plano e o volume no espaço, definida para uma ampla família de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Tal conceito se aproxima do estudo da análise real, e amplia o escopo da generalização da Integral de Riemann⁵⁶, para espaços mais gerais do que os euclidianos e estabelece um paralelo com séries absolutamente convergentes o que favorece o estudo das Séries de Fourier.

⁵⁶ A integral de Riemann é apropriada somente para intervalos limitados; para partições do domínio no cálculo da medida de um volume e para uma série condicionalmente convergente. Enquanto a integral de Lebesgue é usada para intervalos ilimitados (salvo, em casos em que não tenha limite $\infty - \infty$); para partições da imagem no cálculo de volumes e para uma série absolutamente convergente. (CABRAL, 2016)

Mas, no caso específico das Integrais de Lebesgue, em que as funções são mensuráveis⁵⁷, é possível utilizá-la para definir a medida apoiando-se em teoremas, como o Teorema de Fubini⁵⁸. O destaque a esse teorema justifica-se por nos permitir calcular uma Integral Dupla como duas integrais simples sucessivas, trocando a ordem de integração. Entretanto, todo o desenvolvimento da Integral de Lebesgue gira em torno dos conceitos de conjunto, subconjuntos, espaço vetorial e subespaços. No que diz respeito a integração de Lebesgue para as funções de várias variáveis, Medeiros e Mello (2008, p.101) afirmam que: para se construir a teoria da integração de Lebesgue para as funções de várias variáveis tudo o que se tem a fazer é repetir, com as devidas adequações, as definições e os métodos utilizados para o caso de funções de uma única variável”.

Um fato que nos despertou a atenção é que a Integração de Lebesgue não se apresenta nos livros didáticos referendados pelas universidades brasileiras de Cálculo Diferencial e Integral que investigamos: Leithold (1990), Swokowsky (1994), Courant (1958), Stewart (2013), Guidorizzi (2013), Thomas; Weir e Hass (2012), Pisikonov (1997). O que levou esse saber a ser esquecido por estas instituições? Para responder a essa pergunta, é necessária uma breve descrição do contexto histórico educacional vivenciado por Legendre. Com a Revolução Francesa a educação passa a ser um direito de todos e para isso a instrução uniforme por meio de um livro-texto precisava ser garantida, a fim de manter o rigor e a tradição clássica. Com a criação da primeira faculdade de formação de professores e da *École Normale* era necessário escrever um livro que envolvesse todas as matérias da escola (primária): aritmética, álgebra e geometria. Embora o livro de Legendre limitou-se a geometria, ele foi o escolhido para substituir o *Elementos* de Euclides.

No entanto, essa decisão não levou muito tempo e três são os motivos, elencados por Schubring (2003): o primeiro deles, ocorreu em 1867 com a exigência do rigor para a instrução matemática nas escolas secundárias e a visão de que o livro deveria constar: aritmética, geométrica, álgebra, tratado de mecânica formando um só corpo, são as justificativas elencadas para em 1799 o livro ser substituído pelo “curso” de Bézout e a reintegração do livro de Euclides. Especula-se que foram por questões meramente políticas: o nacionalismo que inspirou o movimento de unificação. O segundo, era a intenção de eliminar os “objetivos práticos ou

⁵⁷ De forma sucinta as funções mensuráveis são aquelas que podem ser representadas por suas componentes no contradomínio: $f(x) = (f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$. Ou seja, é uma função que associa a cada subconjunto de $\mathbb{R}^n$ um número real positivo que está relacionado ao volume ocupado por ele.

⁵⁸ Para conhecimento, o Teorema de Fubini encontra-se no anexo A.

profissionais da instrução matemática” (SCHUBRING, 2003, p.144) e instituir a matemática pura. Essa pureza conduz ao terceiro motivo, Legendre ao redigir seu texto mistura a geometria, a aritmética e a álgebra, uma postura inadequada para a instrução pretendida pelos matemáticos que tinham a concepção de que o método euclidiano era suficiente e não precisava do apoio de outros ramos da matemática.

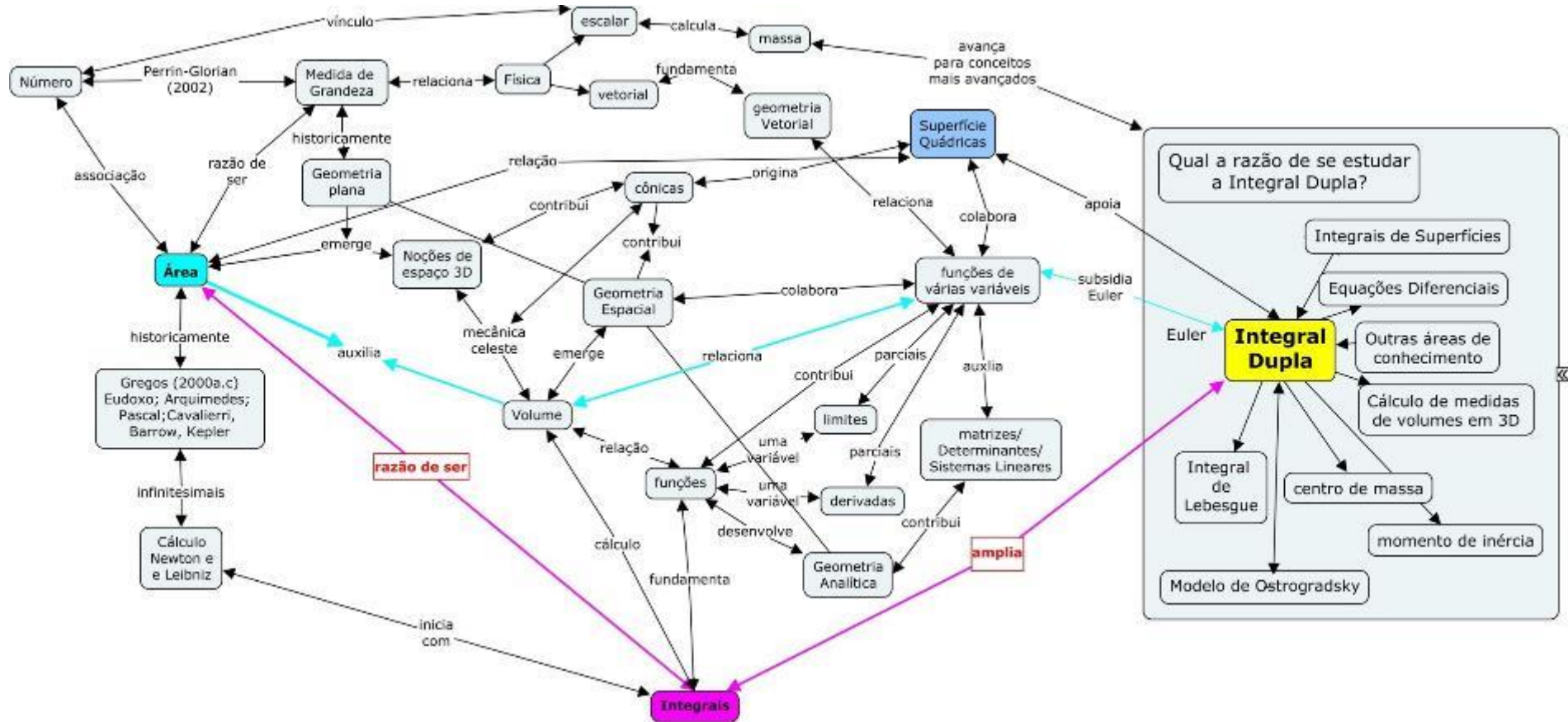
Embora as questões epistemológicas estejam conflitadas com os interesses políticos da época, as obras de Legendre são suprimidas do ensino. Agrega-se a esse contexto, a publicação do livro *Éléments de Mathématique*, de Nicolas Bourbaki, em 1930, que reestruturou a Matemática, “substituindo os tratados franceses de cálculo ainda em uso no ensino e conceitualmente “ultrapassados”” (IBID., p.161). Inferimos que esses dados históricos resultaram no obscurantismo dos estudos de Legendre nos livros didáticos atuais ao qual registramos anteriormente. Essa conclusão atende a um dos propósitos do MER, de verificar as restrições e os motivos pelos quais um saber é evidenciado dentro da instituição em detrimento de outros. Nesse sentido, Bun, Gascón e Lucas (2014, p. 116)⁵⁹ destacam:

a nova base empírica da epistemologia (ampliada) das matemáticas inclui, para tanto, dados de todas as instituições que intervêm, e que intervieram ao longo da história, nos processos de produção, comunicação, utilização e transposição institucional das praxeologias matemáticas. (**tradução nossa**).

Evidencia-se, portanto, a influência exercida pelas diferentes instituições nos processos de divulgação e de transposição dos modelos epistemológicos que se instauram no ensino e como a construção do MER torna visível aspectos que estão invisíveis no modelo dominante. Os aspectos históricos e didáticos analisados em torno da Integral Dupla destacaram as dimensões epistemológicas, ecológicas e econômicas em torno do problema didático proposto, mas, também, mostrou aspectos da dimensão da linguagem e do discurso construído, entre eles: a exigência do rigor e uma preponderância para o ensino da matemática pura em detrimento da aplicada. Apresentamos na Figura 9 uma síntese da organização matemática que delineamos em torno dos objetos imediatos/ostensivos e dinâmico/não ostensivos articulados para a construção do MER em torno do ensino da Integral Dupla para o cálculo da medida das Superfícies Quádricas e que vem ao encontro da primeira resposta dada ao problema didático: os objetos matemáticos – imediatos/ostensivos e dinâmico/não-ostensivos que podem ser mobilizados no ensino da Integral Dupla.

⁵⁹ Do original: La nueva base empírica de la epistemología (ampliada) de las matemáticas incluye, por tanto, datos de todas las instituciones que intervienen, y que han intervenido a lo largo de la historia, en los procesos de producción, comunicación, utilización y transposición institucional de las praxeologías matemáticas. (BUN; GASCÓN; LUCAS, 2014, p.116)

Figura 9: Objetos ostensivos e não ostensivos associados a Integral Dupla

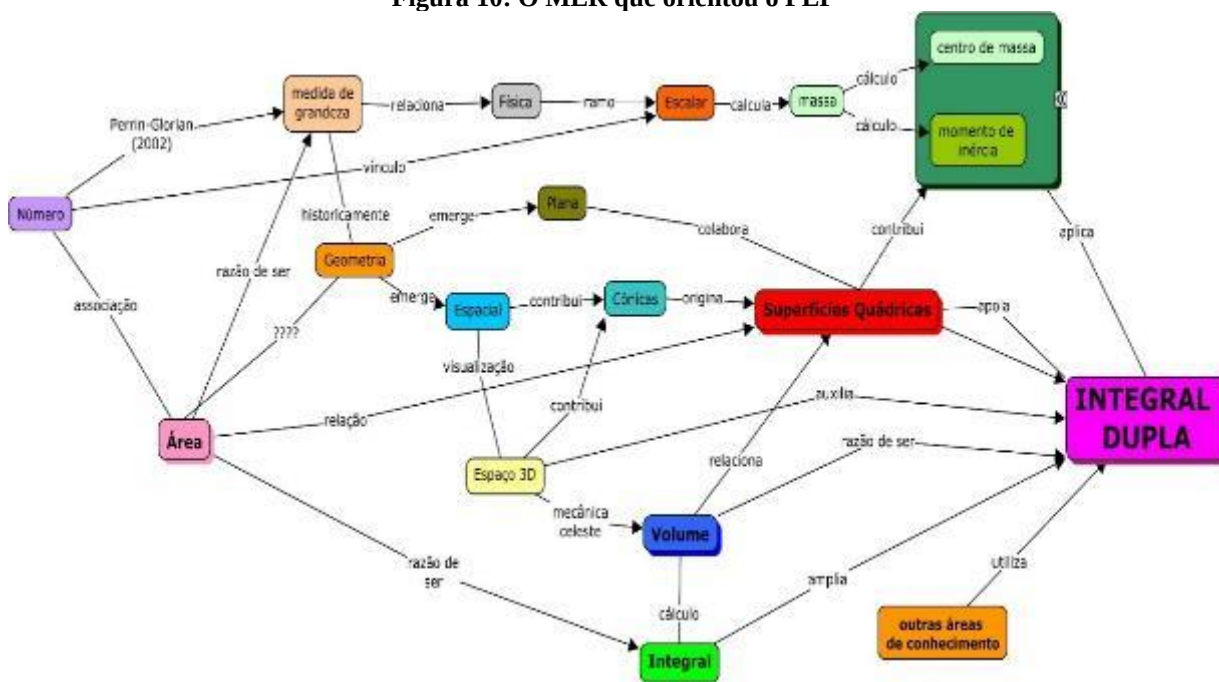


Fonte: Produção da autora

Destacamos que a razão de ser do ensino das Integrais para funções de uma única variável é o cálculo da medida de uma área, conforme o caminho percorrido pela linha rosa, na Figura 9. Mas, para a Integral Dupla, que envolve as funções de várias variáveis, incide o “fato de a integral dupla ser igual ao volume V do corpo” (PISKOUNOV, 1997), percurso percorrido pela linha azul.

O mapa conceitual registrado anteriormente engloba todos os objetos relacionados à Integral Dupla, entretanto, no desenvolvimento do PEP, apenas alguns daqueles objetos emergiram dos questionamentos dos estudantes, e então fez-se necessário modificá-lo. A Figura 10, representa o MER específico.

Figura 10: O MER que orientou o PEP



Fontes: Produção da autora

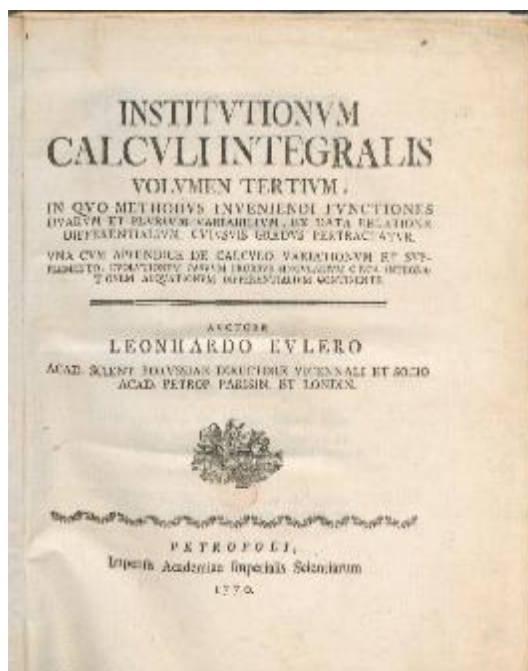
A construção do MER para o desenvolvimento do PEP se apoiou em modelos epistemológicos para a Integral Dupla construídos em diferentes contextos históricos, como pode ser constatado no modelo epistemológico criado por Leonhard Euler.

3.2.2 Modelo epistemológico de Euler

Como foi registrado na seção 3.1.2.4 o interesse por descobrir a família de curvas descritas por trajetórias ortogonais impulsionou o desenvolvimento das Funções de várias variáveis e a sua integração. Por intermédio do site www.e-rara.ch, tivemos acesso ao livro

Institutionum Calculis Integrali, de Leonhard Euler, e registramos na Figura 11 a capa da edição de 1770.f. O livro que tivemos acesso é o terceiro volume das obras do autor, possui 658 páginas e foi escrito em latim. Está organizado em quatro partes e um apêndice.

Figura 11: Capa do livro *Institutionum Calculis e Integralis*



Fonte: site e-rara.ch

A primeira parte, Investigações de funções de várias variáveis e diferenciais de qualquer ordem⁶⁰, apresenta seis capítulos; a segunda parte, Investigações de funções de várias variáveis e diferenciais de segunda ordem⁶¹ com cinco capítulos; a terceira parte intitulada Investigações de funções de várias variáveis de terceira ordem composta de três capítulos⁶²; a quarta parte, Investigação de funções de três variáveis e relações diferenciais⁶³ com quatro capítulos e, por último, o apêndice: Do Cálculo das variações⁶⁴, ao qual apresenta a Integral Dupla.

O apêndice é formado por sete capítulos, dos quais três deles tratam da Integral Dupla: o capítulo três, intitulado: Implícita variação das fórmulas de integrais de duas variáveis envolvidas⁶⁵; o capítulo quatro – Variação das fórmulas de integrais duplas de duas variáveis

⁶⁰ Do original: Inueftigation functionum duarum variabilium ex data differentialium cuiusvis graduum relatione.

⁶¹ Do original: Inueftigation functionum duarum variabilium ex data differentialium fecundis graduum relatione.

⁶² Do original: Inueftigation functionum duarum variabilium ex data differentialium tertii altiorumque graduum relatione.

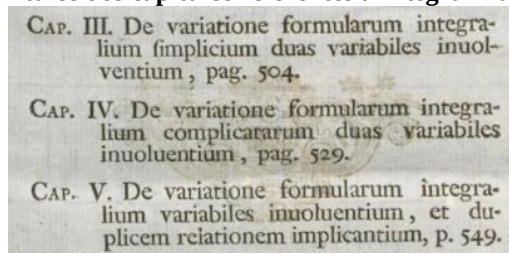
⁶³ Do original: Inueftigation functionum trium variabilium ex data differentialium relatione.

⁶⁴ Do original: Do Cálculo variationum

⁶⁵ Do original: de variatione formularum integralium implicium duas variables inuolventium

envolvidas⁶⁶ e o capítulo cinco – Variação das fórmulas de integrais de variáveis que envolvem dupla relação. A Figura 12 registra do original a composição dos três capítulos.

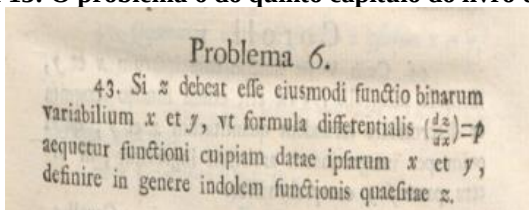
Figura 12: Títulos dos capítulos referentes a Integral Dupla de Euler



Fonte: site e-rara.ch

Euler inicia na primeira e segunda parte do livro a construção dos conceitos de funções de duas variáveis e diferenciais e em seguida aborda a integração múltipla. O Problema 6, registrado na Figura 13, solicita definir uma função geral de duas variáveis para z , dada uma equação diferencial.

Figura 13: O problema 6 do quinto capítulo do livro de Euler

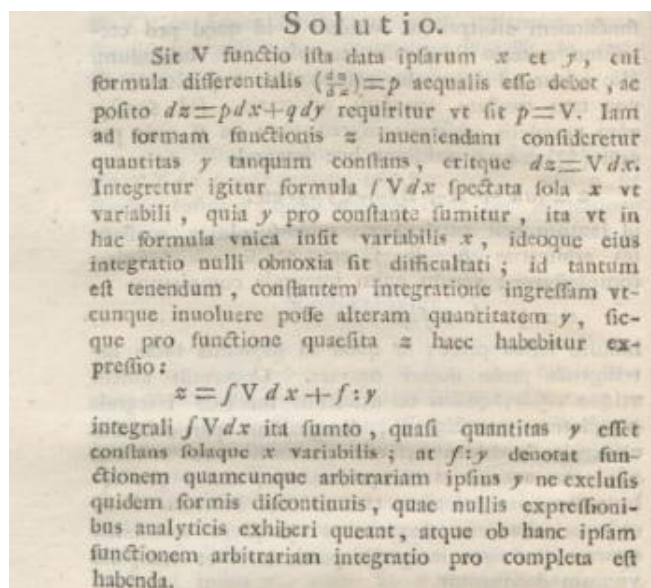


Fonte: site e-rara.ch

Podemos constatar no registro escrito a presença de uma notação simbólica no problema de Euler, usando as três variáveis: x , y , z , as noções de funções de duas variáveis e as diferenciais de x e z . A tarefa propõe no seu enunciado o uso da tecnologia do teorema da diferencial, em que a derivada da função z em relação a variável x é uma constante e a teoria utilizada é a derivada parcial do CDI. Na Figura 14, o matemático apresenta a solução para o problema proposto.

Figura 14: Solução apresentada por Euler para o problema 6

⁶⁶ Do original: de variatione formularum integralium complicatarum duas variables inuolventium



Fonte: site e-rara.ch

A praxeologia apresentada na solução realizada por Euler, descreve um raciocínio dedutivo que conduz a uma equação diferencial de duas variáveis, apresentamos a tarefa, as técnicas, as tecnologias e a teoria no Quadro 3.

Quadro 3 – Praxeologias usadas no problema 6

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Definir uma função geral para z , uma função binária de variáveis x e y	τ_1 : Igualar p a função V de variáveis x e y	Θ_1 : propriedade fundamental das proporções	Θ_1 : Proporção
	τ_2 : Aplicar a propriedade fundamental das proporções		
	τ_3 : Escrever $dz = p dx$		
	τ_4 : Substituir p por V		
	τ_5 : Escrever $dz = V dx$	Θ_2 : Teorema da Integração implícita de uma EDO	Θ_2 : Integral Θ_3 : EDO
	τ_6 : integrar ambos os termos da equação diferencial		
	τ_7 : Escrever $z = \int V dx + f(y)$		
	τ_8 : Explicar que $f(y)$ são funções quaisquer arbitrárias para a quantidade y , inicialmente considerada constante.		

Fonte: www. E-rara.ch

Embora tenha sido obtida uma resposta para o problema 6, uma lacuna ficou suspensa: a relação da variável z com a função na variável y . Euler, então promove um estudo para preencher essa lacuna, como pode ser visualizado na Figura 15.

Figura 15: O estudo realizado por Euler sobre a Integral Dupla



Fonte: [www. E-rara.ch](http://www.E-rara.ch)

Em uma tradução resumida, o autor usa de um raciocínio indutivo para constatar que para uma certa função V envolvendo duas variáveis é necessário considerar o corpo geométrico como uma superfície e duplicar a integração conforme a fórmula $\iint V dx dy$. Para a sua solução é necessário considerar primeiramente x constante e integrar $\int V dy$, escrevendo a integral na forma $dx \int V dy$. Resolvendo essa integral a função original obtida precisa se submeter a uma segunda integração, em função da variável x e com y constante, $\int dx \int V dy$. Desta forma, Euler resolve o problema da integração de uma função de duas variáveis (binária), hoje conhecida como Integral Dupla.

Anteriormente expomos as primeiras ideias compreendidas no processo da tradução do latim, com a indicação de aprofundarmos os estudos realizados por Leonhard Euler no que se refere as Integrais Duplas. Esclarecemos que o modelo de Euler, só o encontramos na semana da entrega deste texto implicando uma compreensão ainda imatura das simbologias e da tradução dos escritos.

Esta lacuna, que pretendemos sanar no aprofundamento dos modelos epistemológicos, interferiu no processo de análise da transposição didática, objetivo pleiteado para a apresentação daqueles. Nas seções 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, respectivamente, apresentamos o modelo de Ostrogradsky, o do livro de Leithold e o da professora/investigadora ao institucionalizar a

definição da Integral Dupla no desenvolvimento do PEP. No entanto, após o acesso ao modelo de Euler fez-se necessário a interrupção para uma melhor interpretação dos dados obtidos, o que não invalida a publicação dos mesmos até o momento.

O segundo modelo sobre a definição da Integral Dupla, traz conhecimentos amplos do campo da matemática: como vetores, produto vetorial, matrizes, determinantes, como podemos constatar na seção 3.2.2.

3.2.3 Modelo epistemológico de Ostrogradsky

O modelo epistemológico que se refere ao objeto de nosso estudo foi criado por Mikhail Leo Ostrogradsky (1801-1862), considerado um discípulo de Leonhard Euler, obtemos o seu registro no livro de PASCAL (1918), cujo original se apresenta no Anexo B, e expomos a seguir a nossa tradução:

Seja⁶⁷ z uma função de duas variáveis x e y . Para fixar a ideia suponhamos que tal função seja representada por pontos de uma superfície, digamos que tal ponto seja supostamente arbitrário, mas infinitesimal, isto é, supondo gerando uma nova superfície arbitrária que tem ou não o mesmo limite da primeira curva e com pontos que fazem uma relação unívoca dos pontos dela mesma, e com a distância para dois pontos correspondentes com tendência a zero, momentaneamente.

Sendo x , y e z as coordenadas de um ponto da antiga superfície que é registrada pela equação $z = f(x, y)$. A nova superfície escreve pela equação:

$z_1 = f(x_1, y_1) + \lambda(x_1, y_1) \delta\alpha$ em que x_1 , y_1 e z_1 são as coordenadas do ponto correspondente a quando essas coordenadas xyz , e $\delta\alpha$ é uma quantidade que tende a zero.

Assim a variação de z será a soma dos termos de ordem para o passo $z - z_1$ como descrito em:

$$[f(x_1, y_1) - f(x, y)] + \lambda(x_1, y_1)\alpha$$

$$\text{Sendo: } f(x_1, y_1) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \omega$$

$$\lambda(x_1, y_1)\delta\alpha = \lambda(x, y) \delta\alpha + \omega'$$

(sabendo que ω e ω' são infinitesimais de ordem superior que diz respeito a $\delta\alpha, \delta x, \delta y$ e podemos supor de mesma ordem), finalmente tem-se:

$$\delta z = \lambda(x, y) \delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$$

⁶⁷ A mudança para o itálico foi proposital, queríamos destacar a solução realizada por Ostrogradsky no corpo do texto.

Percebe-se que há uma analogia comparativa com a Integral Definida para funções de uma única variável e, é possível considerar que a segunda parte do segundo termo é uma variação de z , tomada como hipótese particular de x , y não variando, o que pode ser imediatamente descrito pela fórmula acima mencionada

Com um método simples podemos rever a fórmula para a variação e derivar parcialmente z . Assim:

$$\delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \delta \alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \delta y \right)$$

Daí qualquer forma aparece sempre a propriedade: a variação total é igual a soma das variações supostas por xy invariantes, por ser parte dependente da variação de x e de y .

Se há uma função de x, y, z e as suas derivadas parciais de z , é fácil, solicitar o cálculo diferencial, encontrar a variação dela mesma. Assim:

$$\delta F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \delta \frac{\partial z}{\partial x} + \dots$$

Interrompemos, para destacar que a explicação feita por Ostrogradsky traz os símbolos para descrever as derivadas parciais, os índices para imprimir uma indicação de que o signo ocupa o lugar de um número qualquer. Em termos de praxeologias podemos organizá-las no Quadro 4.

Quadro 4- Praxeologia da função representada por pontos de uma superfície

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Escrever uma função representada por pontos de uma superfície, com infinitesimais de ordem superior	τ_1 : Escrever a equação da superfície em função do ponto (x_1, y_1) .	θ_1 : Equação de uma superfície θ_2 : Derivadas parciais	Θ_1 : Derivadas parciais
	τ_2 : representar a superfície arbitrária por $z_1 = f(x_1, y_1) + \lambda(x_1, y_1) \delta \alpha$.		
	τ_3 : Calcular a variação de z , como $z_1 - z$		
	τ_4 : Calcular as derivadas parciais de $z_1 - z$		
	τ_5 : Escrever a variação de z em função das derivadas parciais		

Fonte: Produção da autora

Esta equação da superfície em função das derivadas dá suporte para encontrar a fórmula da variação da integral para funções ordinárias. Com tal intuito, prossegue-se a demonstração de Ostrogradsky.

A seguir, definimos imediatamente, a variação de uma Integral Dupla definida.

Se o campo de integração é fixo, de modo que podemos considerar x e y invariável, agora é fácil encontrar a fórmula de variação da integral, e proceder da mesma forma de operar as integrais simples.

A variação da integral se obtém simplificando e substituindo a função F por outro signo, a sua variação é δF . Mas não é por isso que o campo de integração é variável. Seguindo um método análogo ao que foi desenvolvido na integral simples, contudo, pode-se dizer exatamente que quando se trata de funções ordinárias, é muito longa e apresenta rigor e que precisa ser considerada os procedimentos analíticos fundamentais. Temos a integral dupla:

$$I = \iint F \, dx \, dy$$

Em F , a função z e as variáveis z' , z'' , ... substitui $z + \Delta z$, $z' + \Delta z'$, ... de Δ , $\Delta z'$... que são os incrementos dos $z, z', \dots$ para a variação de $\delta x, \delta y$ de variáveis independentes e de variável própria da função z .

Mudando o ângulo e o ponto x, y do antigo campo, de modo que corresponda ao ponto $x + \delta x, y + \delta y$ do novo, e que o ponto (x_0, y_0) do antigo contorno corresponda ao ponto $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y$ do contorno novo, e formamos a diferença para a integral, modificando a antiga. Podemos primeiramente realizar uma mudança de variáveis independentes na integral de modo a reduzi-lo a uma integral definida no mesmo campo de integração do segundo. Em efeito colocamos assim: $x = u + \delta u$ e $y = v + \delta v$ em que δu e δv são funções de u, v com condições de reduzir a $\delta x_0, \delta y_0$ quando u, v tornam respectivamente x_0, y_0 (se nota que com x_0, y_0 se intenta genericamente a coordenada de qualquer ponto do contorno do campo antigo de integração, e quando são infinitas as condições a que estão sujeitas as funções arbitrárias $\delta u, \delta v$, de duas variáveis).

A função sob o signo (supostamente natural também em $z, z', \dots$ substitui ao longo de xy a quantidade $u + \delta u, v + \delta v$) torna-se uma função de tais quantidades que chamaremos:

$$\Phi(u + \delta u, v + \delta v) = \Phi(u, v) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \delta v \right) + \dots$$

e o campo de integração se torna antigo.

Para transformar as integrais basta multiplicar a função pelo signo jacobiano das variáveis antigas em relação as novas, isto é;

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\delta(\delta u)}{\delta u} & \frac{\delta(\delta u)}{\delta v} \\ \frac{\delta(\delta v)}{\delta u} & 1 + \frac{\delta(\delta v)}{\delta v} \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\delta(\delta u)}{\delta u} + \frac{\delta(\delta v)}{\delta v} \right) + \dots$$

A integral transformada torna-se agora

$$\iint \Phi(u, v) \, du \, dv + \iint \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \delta v + \Phi \frac{\partial(\delta u)}{\partial u} + \Phi \frac{\partial(\delta v)}{\partial v} \right] \, du \, dv + c$$

Em seguida, mudando o nome das variáveis u e v e chamamos novamente de x e y :

$$\iint \Phi(x, y) \, dx \, dy + \iint \frac{d}{dx} (\Phi \delta x) \, dx \, dy + \iint \frac{d}{dy} (\Phi \delta y) \, dx \, dy + c$$

Examinando agora a função Φ :

$$F(x, y, z + \Delta z, z' + \Delta z', \dots)$$

$$\text{Donde: } \Phi(xy) = F \left[xyz z' + \left(\frac{\delta F}{\delta z} \Delta z + \frac{\delta F}{\delta z'} \Delta z' + \dots \right) + \dots \right]$$

$$\text{e sendo: } \Delta z = \delta z + \omega \text{ e } \Delta z' = \delta z' + \omega.$$

$$\text{Se há um infinitesimal, então: } \Phi = F + \partial F + \Omega$$

Sendo δF a variação de F na hipótese de variar apenas a função z e sua derivada e sendo Ω um infinitesimal de ordem superior.

Substituindo na expressão precedente da integral, encontramos os valores da integral primitiva $\iint F dx dy$

E supondo que a integral: $\iint \left\{ \Omega + \frac{\partial}{\partial x} [(\partial F + \Omega) \partial x] + \frac{\partial}{\partial y} [(\partial F + \Omega) \partial y] \right\} dx dy$ possa ser considerada de ordem superior em comparação com a integral dos outros termos, tem-se:

$$\delta I = \iint \delta F dx dy + \iint \left[\frac{\delta}{\delta x} (F \delta x) + \frac{\delta}{\delta y} (F \delta y) \right] dx dy.$$

Esta é a fórmula de Ostrogradsky e a sua extensão é abordado de forma semelhante com a Integral simples. É fácil generalizar esta fórmula quando se tem uma Integral Dupla, que de forma geral é um múltiplo.

Observa-se no desenvolvimento da Integral Dupla, por esse método, o uso do raciocínio diagramático, em que os ícones desenvolvem o papel da representação por meio de símbolos, usando processos dedutivos para comprovar as hipóteses. Para isso, a linguagem é do tipo dicionarizada, em que predomina um conjunto de regras e técnicas do próprio campo da matemática. No Quadro 5 foi descrita a praxeologia matemática mobilizada neste modelo.

Quadro 5 – Praxeologia usadas no modelo de Ostrogradsky

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Encontrar a fórmula de variação da integral dupla	τ_6 : Mudar as coordenadas do ponto $(x + \delta x, y + \delta y)$ para as variáveis pertencentes ao ponto de um contorno $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$	θ_1 : Teorema da Integral Dupla θ_2 : Matriz jacobiana θ_3 : Derivadas parciais θ_4 : Função de várias variáveis	Θ_1 : Funções Θ_2 : Derivadas Θ_3 : Matriz Θ_4 : Integral
	τ_7 : Fazer uma mudança de variável tal que: $x = u + \delta u$ e $y = v + \delta v$		
	τ_8 : Substituir as novas variáveis na equação da superfície Φ na forma escrita em τ_2 .		
	τ_9 : Usar a matriz Jacobiana para transformar as variáveis antigas nas novas		
	τ_{10} : Multiplicar a matriz Jacobiana pela função		
	τ_{11} : Escrever a integral transformada		
	τ_{12} : Mudar as variáveis u e v para as variáveis x e y na integral encontrada em τ_{11} .		
	τ_{13} : Substituir na expressão precedente da integral e, encontrar os valores da integral primitiva $\iint F dx dy$		
	τ_{14} : Considerar a integral para funções de ordem superior		

Fonte: Produção da autora

Os dois modelos anteriores datam do século XIX e percebe-se o uso dos raciocínios intuitivo e dedutivos para encontrar uma definição para a Integral Dupla. No entanto, aquela definição adquiriu, por um processo interpretativo, uma linguagem distinta dos modelos anteriores, que apresentamos na seção 3.2.3.

3.2.4 Modelo epistemológico do Livro de Leithold

O modelo apresentado nesta seção foi retirado do livro: Cálculo com Geometria Analítica, do autor Louis Leithold, volume 2, editado em 1994. A abordagem escrita na Figura 16, sobre a Integral Dupla inicia pela partição de uma região retangular fechada em $\mathbb{R}^2$, formando uma malha de sub-regiões em $\mathfrak{R}$, cada uma com uma largura $\Delta_i x$ e altura $\Delta_i y$ unidades de comprimento. Podendo ser expressa a área de uma sub-região como $\Delta A = \Delta_i x \cdot \Delta_i y$. Sendo a mesma, limitada pelo contorno, tomaremos um ponto genérico pertencente a região, e o seu valor funcional representado por $f(\xi_i, \gamma_i)$. Consideremos o produto $f(\xi_i, \gamma_i) \Delta A$ em cada sub-região, a soma de todos os produtos será expressa por: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta A$.

Figura 16: Região retangular R fechada

18.1 A INTEGRAL DUPLA

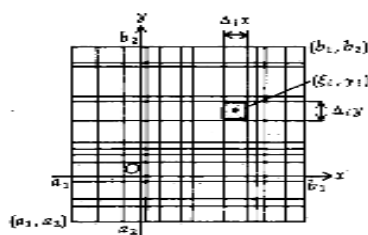


FIGURA 1

Fonte: Leithold (1994, p. 1023)

Como as partições têm dimensões infinitamente pequenas, é necessário aplicar o limite a soma, com a norma da partição tendendo a zero. Se existir o limite do somatório de todos os produtos de f pela variação das sub-regiões em $\mathcal{R}$, ele será chamado de Integral Dupla. Como afirma o autor, na definição da seção 18.1.1:

Seja f uma função definida numa região retangular fechada R . O número L será o limite das somas das formas $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$ se L satisfizer a propriedade de que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda partição Δ , para a qual $\|\Delta\| < \delta$ e para todas as possíveis seleções do ponto (ξ_i, γ_i) no i -ésimo retângulo $i = 1, 2, \dots, n$. Então $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A - L| < \varepsilon$. Se tal número L existir, escrevemos $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = L$ (LEITHOLD, 1994, p.1024).

No entanto, essa definição pode ser estendida para as integrais duplas e o autor do livro descreve na definição 18.1.2:

Uma função f de duas variáveis será dita integrável numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L da definição 18.1.1 existir. Esse número L será chamado de integral dupla de f em R , e escrevemos $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A =$

$$\iint_R f(x, y) dA \text{ (LEITHOLD, 1994, p.1026).}$$

Observa-se que a definição da Integral Dupla utilizada neste modelo, inicia pelo conceito de área, representada graficamente por uma malha particionada em sub-regiões, e em uma delas localizou-se um ponto arbitrário. No processo interpretativo do autor o uso dos signos, por meio de representações, vai adquirindo significado de forma intuitiva, compondo uma trama de argumentos que chegam até a definição da Integral Dupla. Inferimos que a abordagem está coerente com a razão de existir de uma Integral, afinal ela foi epistemologicamente criada para o cálculo da medida de uma área irregular.

A linguagem escrita permeia por palavras fáceis de serem compreendidas, e o pragmatismo, na vertente da Semiótica peirceana, se faz presente quando mostra a aplicação da definição da Integral Dupla para o cálculo da: medida de um volume; do centro de massa e dos

momentos de inércia, que se apresentam no livro analisado, respectivamente, como o Teorema 18.1.4 na seção 18.3.

O teorema 18.1.4. do livro de Leithold conclui que o volume de um sólido no espaço tridimensional é igual a integral dupla em uma região. Como registrado pelo autor:

Seja f uma função de duas variáveis, contínua numa região fechada R , no plano xy e $f(x,y) \geq 0$ para todo (x, y) em R . Se V for a medida do volume do sólido S tendo a região R como base e tendo uma altura cuja medida é $f(x,y)$ no ponto (x, y) em R , então $V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R f(x,y) dA$ (LEITHOLD, 1994, p. 1027).

O teorema 18.1.4. foi elementar para o nosso estudo, pois em uma das tarefas propostas, a de se construir um sólido com massa acrílica, proporcionou associar os conceitos das Superfícies Quádricas com os das Integrais Duplas, por intermédio do cálculo da medida do volume. Outros conceitos abordados por Leithold referem-se ao centro de massa e momento de inércia, conceitos fundamentais para que os estudantes cheguem a uma possível resposta para a questão geratriz do PEP, descrevemos a seguir como o autor abordou tais conceitos.

Suponhamos que seja dada uma lâmina tendo a forma de uma região fechada R , no plano xy . Seja $\rho(x,y)$ a medida da densidade de massa por unidade de área da lâmina em qualquer ponto (x, y) de R , onde ρ é contínua em R . Para encontrar a massa total da lâmina, iremos proceder da seguinte forma: seja Δ uma partição de R em n retângulos. Se (ξ_i, γ_i) for um ponto qualquer no i -ésimo retângulo, tendo uma área de medida $\Delta_i A$, então uma aproximação da medida da massa do i -ésimo retângulo é dada por $\rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$ e a massa total da lâmina é aproximada por $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$. Tomando o limite da soma acima, quando a norma de Δ tende a zero, expressamos a medida M da massa da lâmina por $M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R \rho(x,y) dA$. A medida do momento de massa do i -ésimo retângulo em relação ao eixo x é aproximada por $\gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$. A soma das medidas de massa dos n retângulos em relação ao eixo x é, então, aproximada pela soma desses n termos. A medida M_x do momento de massa em relação ao eixo x da lâmina toda é dada por $M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R y \rho(x,y) dA$. Analogamente, a medida M_y do momento de massa em relação ao eixo y é dado por $M_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R x \rho(x,y) dA$. O centro de massa da lâmina é denotado por $(\bar{x}, \bar{y})$ e $\bar{x} = \frac{M_x}{M}$ e $\bar{y} = \frac{M_y}{M}$ (LEITHOLD, 1994, 1035-1027).

Embora o autor tenha usado a linguagem dicionarizada ela é interrompida por uma escrita que auxilia a compreensão dos procedimentos escolhidos. Indícios de preocupação por parte do autor em que tais conceitos sejam aplicados de forma didática. Antes de apresentarmos o MER elaborado pela autora, faremos uma síntese dos três modelos apresentados.

3.2.3.1 Síntese dos Modelos epistemológicos de Euler, Ostrogradsky e Leithold

Identificamos que nos três modelos a linguagem escrita sofreu modificações e adaptações tanto na organização matemática como na didática. Em nossa interpretação

encontramos indícios do uso do raciocínio abduutivo no primeiro modelo, o de Euler, pois ao redigir o estudo 2, registrado na Figura 13 detectamos a presença de uma linguagem intuitiva/natural, que emerge de uma justificativa da forma como ele pensou e que o conduziu a resolver o problema da integração com duas variáveis. O segundo modelo, o de Ostrogradsky, a linguagem é formal desenvolvida com o uso de um sistema simbólico, predominantemente matemático, em que se identifica as praxeologias matemáticas aplicadas no desenvolvimento da definição do objeto matemático. O terceiro modelo, o de Leithold, apresenta uma linguagem mista, em que a explicação parte de conceitos intuitivos e avança para conceitos abstratos e matemáticos.

O que se pode perceber é que o caminho percorrido pelo objeto matemático – da sua origem até como é apresentado no livro didático - há semelhanças na concepção da definição da Integral Dupla, a saber: há uma relação, explícita ou não, com o cálculo de medida da área ou de uma superfície; está associada a objetos dinâmicos/não ostensivos em comum, tais como: Funções de Várias Variáveis, Derivadas Parciais, Equação das Superfície; o uso de signos eminentemente simbólicos; se caracterizam pelo uso de praxeologias matemáticas.

No primeiro e no terceiro modelo verifica-se problemas ou circunstâncias externas e internas a matemática que podem ser analisadas sob a perspectiva da praxeologia situacional. Enquanto Euler e Ostrogradsky abordam a Integral Dupla em um problema eminentemente matemático, Leithold o faz, trazendo o uso do objeto em situações internas a matemática e externas, aplicando-o em outras áreas do conhecimento. Os dois primeiros modelos foram criados por matemáticos, em um período que emergia daquela comunidade a exigência pelo formalismo e pelo raciocínio dedutivo, preponderante das ciências exatas o que acabou influenciando na organização didática planejada para um ensino voltado para o rigor, a dedução e a comprovação das hipóteses, proveniente do discurso científico operante. O terceiro modelo, mostra a cientificidade e o rigor com uma linguagem mais flexível, voltada para o ensino. A Figura 17 apresenta um mapa conceitual sobre os três modelos epistemológicos que definem a Integral Dupla.

Fonte: Produção da autora

O mapa conceitual nos mostrou as semelhanças entre os modelos apresentados anteriormente e algumas relações com objetos matemáticos que serviram de aporte para a criação do nosso Modelo Epistemológico de Referência (MER). Buscamos, com ele, estabelecer uma relação com outros objetos matemáticos e não-matemáticos, ou seja, preparamos uma organização matemática, um ecossistema de objetos, em que existe uma cadeia alimentar: ora alguns objetos “alimentam” a definição da Integral Dupla e ora outros objetos são alimentados por ela.

A análise realizada com os modelos supracitados viabilizou criarmos um Modelo Alternativo (MA) para o ensino da Integral Dupla que apresentamos no que segue.

3.2.5 Modelo produzido pela investigadora para o PEP

O modelo proposto a seguir compreende a organização matemática e didática planejada para a institucionalização dos objetos matemáticos: Superfície Quádrica e Integral Dupla e constitui em um dos momentos do desenvolvimento do PEP.

Para tal intento, realizamos uma pesquisa em livros de Geometria Analítica (WINTERLE, 2000; LEHMANN, 1970; STEINBRUCH e WINTERLE, 1986) e de Cálculo Diferencial e Integral selecionando, de acordo aos nossos interesses, as partes que poderiam promover significados distintos dos apresentados nos modelos e atender ao objetivo deste estudo. Primamos por uma aula dialogada, para isso buscamos sempre questionar os estudantes acerca dos conhecimentos adquiridos e ir avançando para conceitos e situações mais complexas. Na primeira parte, interrogamos-vos acerca do que seria uma superfície e como ela se distingue da área.

Superfície

1 – O que é superfície?

Resposta⁶⁸: É o gráfico de uma equação em $\mathbb{R}^3$ em que o conjunto de todos os pontos (x, y, z) satisfaz a equação $F(x, y, z) = 0$

⁶⁸ Esclarecemos que as respostas são do professor/pesquisador, as dos estudantes estão no quinto capítulo, quando analisamos o desenvolvimento do PEP.

2 – O que distingue uma superfície de uma área?

Resposta: A superfície está no plano $\mathbb{R}^3$ e a área pode não estar. Uma superfície pode estar no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$ e ambas têm área.

Em seguida, prosseguimos com a definição da equação das Superfícies Quádricas, fazendo algumas observações e referências a algum objeto do conhecimento para avançar no conhecimento matemático.

3 – A equação retangular em três variáveis (x, y e z) é dada na forma $F(x, y, z) = 0$, se colocarmos uma das variáveis em função das outras duas, uma possível solução seria expressa, por $z = f(x, y)$.

No intuito de explicar por que podemos colocar uma função em função de duas variáveis, tivemos que explicar o Princípio da extensão da curva:

Princípio da extensão para curva

A extensão consiste na determinação do intervalo de valores reais que x e y podem assumir na equação do lugar geométrico. Esse princípio é relevante porque dá a localização geral do lugar geométrico no plano cartesiano e indica se o lugar geométrico é uma curva fechada ou é limitada em extensão. O intervalo de valores reais de x e de y é simplesmente determinado resolvendo-se a equação dada para y em função de x e, também, para x em função de y (LEHMANN, 1970, p.32).

Após o adendo, voltamos para definir a equação geral do segundo grau:

4 – A equação Geral do segundo grau em três variáveis

Sabendo de Geometria Analítica que todo plano é representado analiticamente por uma única equação linear da forma: $Ax + By + Cz + D = 0$

Como queremos uma equação geral do segundo grau temos:

$$(Ax + By + Cz + D)^2 = 0^2 \quad (1)$$

$$[(Ax + By)^2 + (Cz + D)^2] = 0 \quad (2)$$

Devolvendo a equação (2) e fazendo as devidas transformações obtemos a equação geral:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$ (3) que é denominada Superfície Quádrica ou simplesmente, quádrica.

5 – Considere a Superfície Quádrica da equação 3 interceptada por qualquer plano paralelo ao plano xy, isto é, pelo plano $Z = K$, onde K é qualquer constante real, temos:

$Ax^2 + By^2 + Dxy + (EK + G)x + (Fk + h)y + CK^2 + IK + K = 0$ que é uma curva cônica ou uma forma limite de uma secção cônica.

Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O , ela pode ser uma:

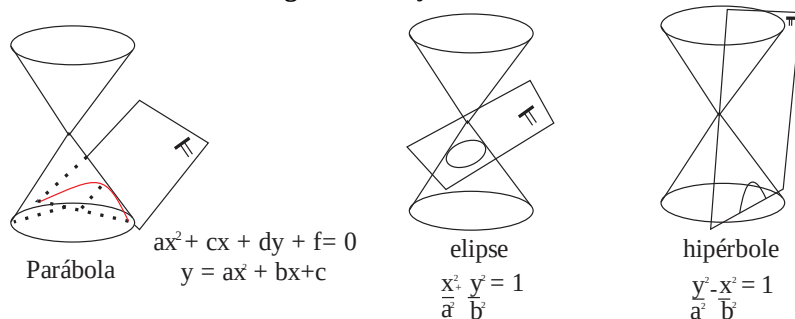
Parábola: Se π for paralelo a uma geratriz da superfície;

Elipse: Se π não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície;

Hipérbole: Se π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície.

Registramos na Figura 18 as três secções cônicas.

Figura 18: Seções cônicas



Fonte: Winterlle (2000, p.158)

Propriedade

Se uma Superfície Quádrica é cortada por qualquer plano, a intersecção é uma secção cônica. Por isso a Superfície Quádrica é denominada de uma conicoíde.

Tipos de Superfícies Quádricas.

1. Superfícies Quádricas Cêntricas: $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$ são as superfícies que tem centro de simetria na origem e seus coeficientes são diferentes de zero. Pode-se escrever a equação na forma canônica: $\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$.

O lugar geométrico vai depender dos sinais dos seus coeficientes.

1.1. Há três tipos.

1.1.1. O elipsoide – Todos os coeficientes são positivos

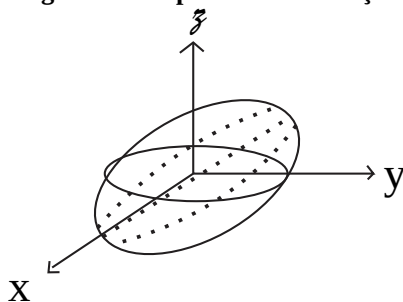
1.1.2. O hiperbolóide de uma folha – dois coeficientes positivos e um negativo

1.1.3.O hiperbolóide de duas folhas – um coeficiente positivo e dois negativos.

1.1.1. Elipsoide

Consideremos no plano yz uma elipse de equação $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $x = 0$. Ao girarmos essa elipse em torno do eixo Oy, obtemos o elipsóide de revolução da Figura 19, cuja equação é obtida da equação da elipse, substituindo z por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ temos $\frac{y^2}{b^2} + \frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{c^2} = 1$ ou seja $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. O elipsoide de forma geral é representado pela equação na forma canônica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ em que a, b e c são números reais positivos e representam as medidas dos semieixos do elipsoide.

Figura 19: Elipsoide de revolução

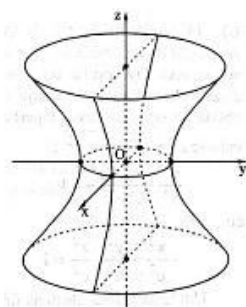


Fonte: Winterle (2000, p. 215)

1.1.2. Hiperboloide de uma folha

A rotação da hipérbole em torno do eixo Oz resulta no hiperboloide de uma folha representado na Figura 20, cuja equação será obtida da equação da hipérbole, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, substituindo y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, isto é $\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Uma equação mais geral na forma canônica do hiperboloide de uma folha é expressa pela igualdade: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. A representação gráfica do hiperboloide de uma folha está registrada na Figura 20.

Figura 20: Hiperboloide de uma folha



Fonte: Winterle (2000, p. 219)

Observação: A depender da rotação nos eixos Oy e Ox, respectivamente, podemos obter duas outras equações na forma canônica para o hiperboloide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ e } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1.1.3. Hiperboloide de duas folhas

A rotação da em torno de um dos seus três eixos resulta no hiperboloide de duas folhas.

Consideremos a rotação em torno do eixo Oy, substituindo-se z por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ na equação da hipérbole: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ temos $\frac{y^2}{b^2} - \frac{(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2}{c^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

De forma geral a equação na forma canônica de um hiperboloide de duas folhas pode ser escrita:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Observação: A depender da rotação nos eixos Oy e Ox, respectivamente, podemos obter duas outras equações na forma canônica para o hiperboloide de duas folhas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2) Superfície Quádricas não Cêntricas:

São as superfícies representadas pela equação $Mx^2 + Ny^2 = Sz$, onde M, N e S $\neq 0$.

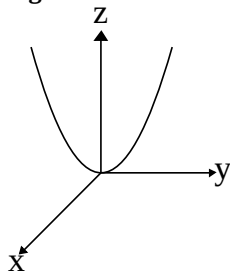
Pode-se escrever na forma canônica: $\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$ (1)

2.1 Há dois tipos distintos de superfícies: o parabolóide elíptico – os coeficientes dos termos de segundo grau concordam quanto ao sinal e o parabólico hiperbólico – os coeficientes dos termos de segundo grau são de sinais contrários.

2.1.1 Parabolóide elíptico

Considere no plano yz a parábola de equação: $Z = \frac{y^2}{b^2}$ com x=0, representada na Figura 21.

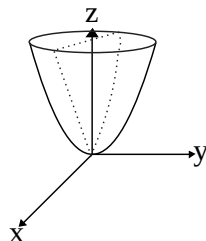
Figura 21: Parábola



Fonte: Winterle (2000, p. 221)

A rotação dessa parábola (Figura 22), em torno do eixo Oz, gera a parábola de revolução.

Figura 22: Parábola de revolução

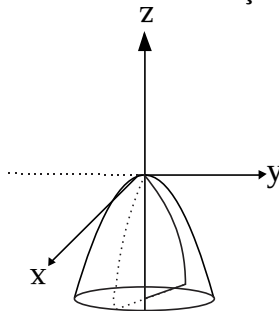


Fonte: Winterle (2000, p. 221)

Se a rotação da parábola está em torno do eixo z, então substituímos y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, já que $x=0$. Obtemos assim $Z = \frac{y^2}{b^2}$, ou seja, $Z = \frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}$, ou ainda $Z = \frac{x^2+y^2}{b^2} > Z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$; porém na forma geral pode-se; $Z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Se o coeficiente de Z for negativo a superfície se encontra inteiramente abaixo do plano xy, portanto, $-Z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ou $-Z = -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$ e é representada graficamente na Figura 23.

Figura 23: Parábola de revolução para $z < 0$

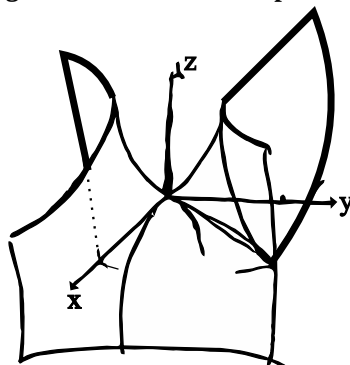


Fonte: Winterle (2000, p. 221)

Observação: A superfície não é fechada, mas se encontra infinitamente para longe do plano xy.

2.1.2 Paraboloide Hiperbólico:

O paraboloides hiperbólico é originado pela rotação da hipérbole e da parábola em torno de um dos seus eixos. Consideremos, inicialmente, a rotação em torno do eixo z e a equação das superfícies quádricas não cêntricas escrita na forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$, se os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação na forma canônica representa um paraboloides hiperbólico, registrado na Figura 24. Entretanto, precisamos provar que “o paraboloides hiperbólico é uma superfície reguada gerada por uma ou outra de duas famílias distintas de retas reversas” (LEHMANN, 1970, p.384).

Figura 24: Paraboloide hiperbólico

Fonte: Adaptado de Winterle (2000, p.222)

Tomemos a equação na forma canônica do parabolóide hiperbólico: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$. O primeiro termo da equação representa a diferença de dois termos ao quadrado, que pode ser escrita na forma: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = cz$.

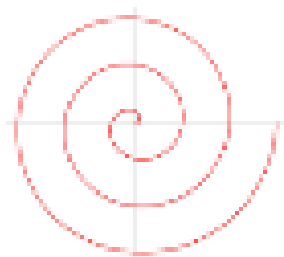
Como vimos anteriormente os traços no plano $x = k$ e $y = k$ são parábolas enquanto $z = k$ são hipérboles que se degeneram em duas retas quando $z = 0$, assim podemos escrever a equação na forma: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$, o que implica em: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ e $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$, que representam as duas retas acima referidas.

Como o modelo alternativo foi sendo construído no desenvolvimento do PEP, houve algumas perguntas intermediárias geradas pela pesquisa realizada pelos estudantes partícipes do curso sobre as obras de Gaudí. Tais perguntas envolviam a espiral e a catenária formas geométricas explorada pelo arquiteto em suas obras. Para responder as perguntas a pesquisadora estudou acerca do tema e os registros abaixo representam a síntese do estudo.

Espiral

Define-se espiral como uma curva plana que gira em torno de um ponto central dele se afastando ou se aproximando gradualmente.

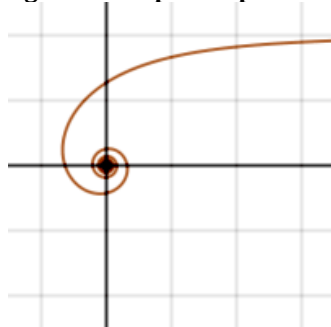
Uma das principais espirais é a espiral de Arquimedes, representada na Figura 25, que é definida como o lugar geométrico de um ponto movendo-se a velocidade constante sobre uma reta que gira em torno de um ponto fixo a uma velocidade angular constante. Ela pode ser expressa em coordenadas polares (r, θ) e sua equação geral é na forma: $r = a + b\theta^{1/x}$ com a e b números reais e θ um ângulo.

Figura 25: Espiral Arquimedes

Fonte: Construção da autora

É possível encontrar na natureza vários exemplos da espiral arquimediana como nos redemoinhos de vento, nos caracóis, bem como, foi por intermédio da espiral que Arquimedes resolveu o problema da trisseção de um ângulo, um dos problemas mais antigos da humanidade.

Outra espiral é a Hiperbólica, representada na Figura 26, ela começa em uma distância infinita do ponto central (para θ começando do zero e $r = \frac{a}{\theta}$ até o infinito) e se enrola cada vez mais rapidamente. Pierre Varignon, em 1704, foi o primeiro a estudar a derivada, em seguida Johann Bernoulli entre os anos de 1710 e 1713 e Roger Cotes, em 1722, aprofundaram o tema.

Figura 26: Espiral hiperbólica

Fonte: Construção da autora

Usando as transformações de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, obtemos:

$x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Considerando um parâmetro t , equivalente de θ em coordenadas polares, é possível representarmos parametricamente as coordenadas cartesianas, escrevendo-as: $x = a \frac{\cos t}{t}$ e $y = a \frac{\sin t}{t}$.

A espiral tem uma assíntota para $y = a$. Quando t se aproxima de zero, a ordenada se aproxima de a e a abscissa cresce ao infinito. Isso resulta nos seguintes limites:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} a \frac{\cos t}{t} = \infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow 0} a \frac{\sin t}{t} = a \cdot 1 = a.$$

Outra espiral é a logarítmica (Figura 27) também chamada de espiral maravilhosa e foi Jacob (Jacques) Bernoulli que a estudou.

Figura 27 - Espiral logarítmica



Fonte: <https://pt.wikipedia.org>

A equação em função das coordenadas polares pode ser expressa por: $\log\left(\frac{r}{R}\right) = \theta \cot(\alpha)$ com R sendo o raio associado quando $\theta = 0$.

Pode-se escrever a espiral logarítmica em função das coordenadas polares, neste caso a equação é escrita na forma: $r(\theta) = R e^{\theta \cot \alpha}$.

Na natureza são encontradas as formas da espiral logarítmica nas teias de aranha, nos ciclones tropicais, nas tempestades na Islândia e nas conchas de alguns moluscos. Outro fato interessante é que os Falcões aproximam das suas presas segundo uma espiral logarítmica para uma visão melhor. As catenárias despertaram o interesse dos estudantes, o que nos levou a pesquisar sobre ela.

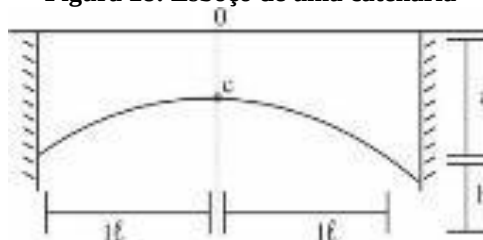
Catenárias (Jakob Bernoulli)

Em 1660, Jakob Bernoulli propôs na Acta Eruditorum o seguinte problema: “encontrar a curva formada por um fio pendente livremente suspenso a partir de dois pontos fixos”. Esse problema já havia sido abordado por Leonardo da Vinci e por Galileu Galilei, que pensavam se tratar de uma parábola. No entanto, coube a Johann Bernoulli e Leibniz a solução usando métodos analíticos.

Eles verificaram que não se tratava de parábola e sim de uma catenária, palavra de origem latina – catena - que significa cadeia. Define-se como uma família de curvas planas semelhantes que são geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades a partir de dois pontos fixos e sujeitas à força da gravidade. Alguns exemplos de catenárias podem ser encontrados em: pontes, correntes, nos cabos de energia elétrica colocados entre postes. A equação da catenária é dada pela função hiperbólica e a sua equivalente exponencial: $Y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Ela pode adquirir também uma variação a depender da altura em que ela se encontra e da distância do seu centro de gravidade, registrada na Figura 28.

Figura 28: Esboço de uma catenária



Fonte: Construção da autora

E a equação da catenária, neste caso, é dada por: $Y = a \cosh \left[\frac{2x}{l} \cosh^{-1} \left(\frac{a+h}{a} \right) \right]$.

A notação da função da catenária é igual ao produto da altura pelo cosseno hiperbólico, tal que, l é a distância entre os dois pontos fixos, a é a medida da distância vertical do ponto O situado sobre a reta, apresentada superiormente a catenária, até o ponto C (ponto que divide a catenária em duas partes iguais), h é a medida da distância vertical do ponto C até o solo e x é um número real.

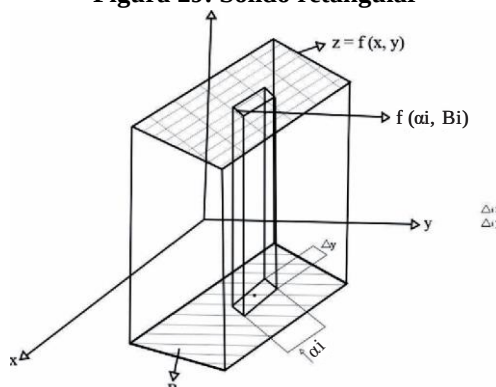
Observação: Catenóides são superfícies mínimas geradas pela revolução de uma catenária em torno de um dos três eixos. Um exemplo de catenóides são as bolhas de sabão.

A segunda parte do texto foi institucionalizada no terceiro encontro, após a construção dos objetos de aprendizagem com a massa acrílica. A pergunta que motivou uma reflexão sobre a ideia da Integral Dupla foi: Como calcular a medida do volume do sólido que vocês criaram? As respostas obtidas levaram a ideia de partição, proposta na nossa organização matemática e transcrita na sequência.

2ª parte: Integral Dupla

Suponha que uma função f seja numa região fechada R em $\mathbb{R}^2$, vamos supor que $f(x, y) > 0$ em $\mathbb{R}$. O gráfico da função definida por $z = f(x, y)$ (Figura 29) é uma superfície que está acima do plano xy ,

Figura 29: Sólido retangular



Fonte: Leithold (1994, p. 1025)

A figura mostra uma sub-região particular de IR tendo dimensões $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$. É um sólido retangular tendo sub-regiões como base e $f(\alpha_i, \beta_i)$ como a medida da altura, onde (α_i, β_i) é um ponto na i-ésima sub-região. O volume do sólido retangular é dado por: $\Delta_i v = f(\alpha_i, \beta_i) \Delta A_i$, tomando $\Delta A_i = \Delta_i x \cdot \Delta_i y$, então $\Delta_i v = f(\alpha_i, \beta_i) \Delta_i x \cdot \Delta_i y$.

Acontece que podemos ter n-sólidos e a soma aproxima da medida do volume do sólido tridimensional. O sólido é limitado acima pelo gráfico de f e abaixo pela região IR no plano xy.

Então: $\sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \Delta_i A = \Delta_1 v f(\alpha_1, \beta_1) + \Delta_2 v f(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \Delta_n v f(\alpha_n, \beta_n)$

$$\lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \Delta_i A = L = \iint_R f(x, y) dA$$

Logo, a integral dupla pode ser interpretada geometricamente em termos de um sólido tridimensional.

Definição

Uma função f de duas variáveis será dita integrável numa região retangular fechada R se f estiver definida em IR e o número L existir.

Esse número L será chamado de integral dupla de f em IR e escrevemos:

$$\lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i) \Delta_i A = \iint_R f(x, y) dA$$

Após expressarmos os conceitos inerentes a definição da Integral Dupla, lançamos as perguntas subsidiárias do PEP para serem respondidas no próximo encontro.

Perguntas

Q3: O que é um centro de massa?

Q4: O que é um momento de inércia?

Q5: Qual a influência das integrais duplas de Superfícies Quádricas para o equilíbrio nas obras de Gaudi?

Durante o desenvolvimento do terceiro encontro um estudante falou sobre fluido ao referir-se a um rio que passa por baixo de uma ponte. A partir da dúvida dele, propomos então uma pesquisa sobre o tema. O próximo texto consiste na pesquisa realizada pela professora/pesquisadora.

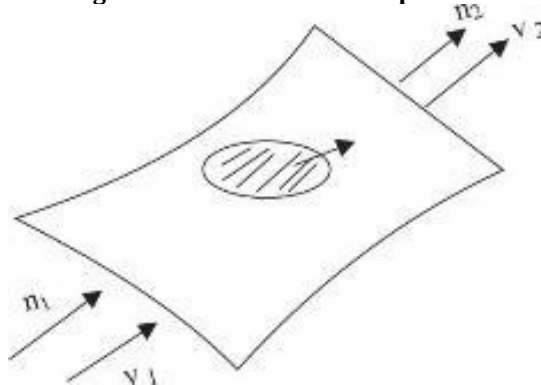
Fluido

Fluido é uma substância que se deforma quando há uma tensão de cisalhamento, ou seja, quando as forças exercidas no mesmo sentido ou opostos se submetem a distribuição de cargas por unidade de área de intensidades diferentes e agem de modo a impedir ou imprimir a movimentação do corpo e limitar a deformação.

Pode-se analisar o volume do fluido que atravessa uma seção por uma unidade de tempo, para isso se estabelece a ideia de vazão, que é corresponde a taxa de escoamento, a diferença da massa que saí e da massa que entrou.

Quantidade para volume de controle e tensões na superfície, representado na Figura 30.

Figura 30: Fluido em uma superfície



Fonte: Brunetti (2005, p. 106)

A pesquisadora refletindo sobre o problema levantado pelo estudante conclui:

No caso proposto pelo estudante, que tinha a intenção de utilizar a Integral Dupla para a tarefa 1, proposta no desenvolvimento do PEP usando a vazão de um rio, será necessário que ele considere a influência de duas variáveis para a taxa de escoamento.

Para levar o estudante a compreender tal necessidade ela criou um problema tomando como aporte um exemplo retirado do livro: Introdução aos sistemas de distribuição de energia elétrica, do autor Nelson Kagan, editado em 2005, a saber:

Existem alguns indicadores, coletivos ou individuais, que são importantes para a gestão de empresas de distribuição de energia que quando bem gerenciados e controlados promovem melhorias para os consumidores. Para isso, deve-se ser avaliado a qualidade do serviço do mercado de energia considerando fatores como: a característica física da rede, a extensão, a área de cobertura; mas também levar em conta as características do mercado: a potência, o consumo na região, o número de instalações individuais por unidade consumidora. São variantes que influenciam na gestão de uma situação.

Suponha que um dos indicadores seja o tempo de atendimento de emergência, conhecido por TA, ele representa o intervalo de tempo que transcorre desde o tempo que ocorreu a interrupção do suprimento até aquele em que o sistema foi estabelecido. Neste caso, são considerados alguns tempos parciais:

t_1 : tempo transcorrido do instante da interrupção até o tempo do conhecimento da ocorrência.

t_2 : tempo necessário para que a equipe de manutenção, ou de reparo, seja acionada.

t_3 : tempo gasto para a equipe se deslocar ao ponto de interrupção, correr a linha e identificar a causa e o ponto do defeito

t_4 : tempo de manobra para reestabelecer a distribuição fora da área em defeito

t_5 : tempo de pesquisa do defeito

t_6 : tempo médio para o reparo e o completo reestabelecimento do sistema.

Levando em conta as informações sobre a TA e buscando introduzir a ideia de se estabelecer um número de variáveis a ser analisada, perguntamos a eles: como os eventos fatores da rede, mercado de energia e os tempos parciais podem ser articulados?

Existem, portanto, um número considerável de eventos e possibilidades que interferem nos indicadores da TA. O que restringe a observar partes da situação, como por exemplo: a extensão da rede e o tempo gasto para a equipe se deslocar ao ponto de interrupção, correr a linha e identificar a causa e o ponto do defeito. Ou a área de cobertura e o tempo de manobra para reestabelecer a distribuição fora da área em defeito. São escolhas binárias a se avaliar e que poderiam ter sido três, quatro variáveis. Enfim, as escolhas das variáveis a serem analisadas determinam o indicador da TA sob uma vertente.

Na matemática, realizamos essas escolhas também e muitas vezes limitamos a uma, duas, três variáveis para conseguir um resultado para um problema. Ao falar em vazão na construção da ponte, o estudante E_1 deverá avaliar os fatores mais importantes a serem integrados na solução do problema proposto e suprimir as outras variáveis.

No quarto encontro fomentamos a discussão acerca do fluido e então solicitamos as respostas dos estudantes para as questões subsidiárias Q_3 , Q_4 e Q_5 que dizem respeito ao cálculo do centro de massa e momento de inércia. Na institucionalização de tais temas iniciamos por uma revisão ao nível da função de uma variável e, em seguida, ampliamos para funções de mais variáveis. Essa escolha metodológica faz parte da experiência da pesquisadora/professora que

a utiliza no exercício da sua profissão, partindo do princípio de que um novo conhecimento estabelece relação com outros previamente adquiridos, que está em consonância com o ponto de vista da Semiótica peirceana. Assim posto, revisitamos as definições do centro de massa para funções de uma variável.

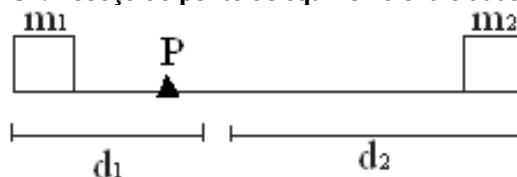
Centro De Massa- Função de uma variável

Massa Pontual

É a massa de um objeto concentrada em um ponto; independentemente de seu tamanho.

Considere duas massas pontuais m_1 e m_2 presas às extremidades de uma vara (Figura 31), o ponto P é o local onde se deve colocar um fulcro de modo que a vara fique em equilíbrio.

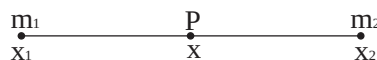
Figura 31: Esboço do ponto de equilíbrio entre duas massas



Fonte: Produção da autora

Se as distâncias de m_1 e m_2 a P são d_1 e d_2 , respectivamente, pode-se mostrar que P é o ponto de equilíbrio se: $m_1 d_1 = m_2 d_2$

Para generalizar este conceito, introduzimos um eixo x, com m_1 e m_2 localizados em pontos coordenados x_1 e x_2 .



Substitui-se na igualdade anterior $d_1 = \bar{x} - x_1$ e $d_2 = \bar{x} - x_2$:

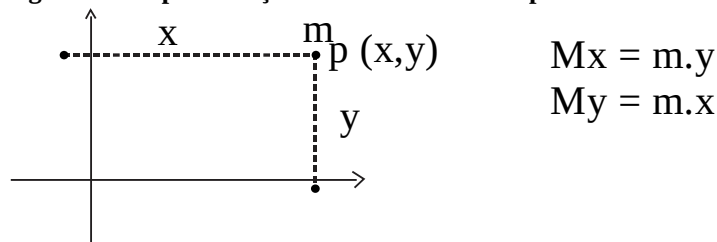
$$\begin{aligned} m_1 (\bar{x} - x_1) &= m_2 (x_2 - \bar{x}) \\ m_1 \bar{x} - m_1 x_1 &= m_2 x_2 - m_2 \bar{x} \\ m_1 \bar{x} + m_2 \bar{x} &= m_2 x_2 + m_1 x_1 \\ \bar{x} &= \frac{m_2 x_2 + m_1 x_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Se m está localizada em um ponto do eixo com coordenada x , então mx é chamado momento m_o da massa em relação à origem. Na fórmula, $\bar{x}$ representa a razão entre a soma dos momentos em relação a origem pela massa total.

O ponto $\bar{x}$ é chamado de centro de massa (de gravidade), ou de centroide. O ponto de coordenada $\bar{x}$ é o ponto de equilíbrio do sistema.

Considere uma massa m localizada em $P(x, y)$ no plano cartesiano (Figura 32). Definimos os momentos M_x e M_y de m em relação aos eixos coordenados.

Figura 32: Representação da massa m em um plano cartesiano



Fonte: Leithold (1994, p. 1025)

As coordenadas do momento em relação aos eixos cartesianos, podem ser representados por:

$M_x = m \cdot y$ e $M_y = m \cdot x$. O momento em relação ao eixo x representa o somatório de todos os momentos da massa em relação a origem: $M_x = \sum_{k=1}^n m_k \cdot y_k$. De forma análoga, o momento em relação ao eixo y é representado por: $M_y = \sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k$. O centro de massa é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, tal que: $\bar{X} = \frac{M_y}{m}$ e $\bar{Y} = \frac{M_x}{m}$.

O conceito de centro de massa e de momento de inércia são essenciais para a construção da resposta a questão geratriz do PEP, indagada aos estudantes desde o primeiro encontro, a saber: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo?

No desenvolvimento de sucessivas pesquisas acerca do tema foi possível verificar a existência de uma relação entre o cálculo estrutural, as formas tridimensionais e as Superfícies Quádricas presentes nas obras daquele arquiteto, entretanto, para que os conceitos matemáticos fossem aplicados fez-se necessário ampliar o estudo daqueles conhecimentos para funções de várias variáveis.

Ao final da revisão realizada sobre o centro de massa e os momentos de inércia com funções de uma variável, perguntamos aos estudantes: como esse conceito poderia ser estendido para funções de várias variáveis? As inferências dos estudantes foram inconclusivas, suposições do tipo: “deve ser agora no plano tridimensional”, “deve usar derivadas”, “deve ter algo relacionado com a Integral Dupla”.

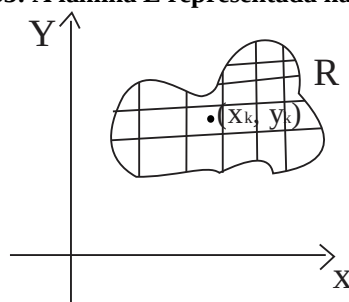
As noções intuitivas sobre o objeto matemático estavam emergindo e foi necessário que a pesquisadora ampliasse o questionamento: Por que você relacionou com o plano tridimensional? E com a Integral Dupla? De forma análoga, os estudantes conjecturavam argumentações: “as obras de Gaudí são tridimensionais”, “teve um somatório”. Essas primeiras

impressões dos estudantes foram institucionalizadas matematicamente pela pesquisadora/professora e a seguir, registramos esse momento da aula.

Centro de massa- Função de Duas variáveis

Considere uma lâmina não homogênea L que tem a forma de uma região R representada no plano xy . Se a densidade da massa por área no ponto (x,y) é $\delta(x,y)$ e δ é uma função contínua em R , então, a massa de L é representada algebricamente por: $m = \iint_R \delta(x,y) dA$ e graficamente pela superfície da Figura 33.

Figura 33: A lâmina L representada na região R



Fonte: Leithold (1994, p. 1025).

Demonstração: Seja uma partição interior $P = \{R_k\}$ de R e, para cada K , seja (x_k, y_k) um ponto arbitrário de R_k . Como δ é contínua, uma pequena variação em (x, y) acarreta uma pequena variação na densidade $\delta(x_k, y_k)$, isto é, δ é quase constante em R_k . Logo, se a norma da partição se aproxima de zero, $\|P\| \approx 0$, a massa Δm_k que corresponde R_k , pode ser aproximada pelo produto: $\delta(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$, em que ΔA_k é a área de R_k . Admitindo a massa Δm_k concentrada em (x_k, y_k) então o momento deste elemento de L em relação ao eixo x é o produto: $y_k \delta(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$.

Como a soma dos momentos em relação ao eixo é representado por: $\sum_k y_k \delta(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$, e as partições tendem a zero, então o somatório aproxima do momento da lâmina, que definimos como o momento M_x de L em relação ao eixo x e representamos por:

$$M_x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k y_k \delta(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$$

Verifica-se que M_x pode ser escrita de acordoa definição da Integral Dupla: $M_x = \iint_R y \delta(x,y) dA$

De forma análoga, o momento de M_y de L em relação ao eixo y é representado por:

$$M_y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k x_k \delta(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k \text{ ou } M_y = \iint_R x \delta(x,y) dA.$$

Definição

Seja uma lâmina com a forma de uma região R representada no plano xy , se a densidade de massa por área em (x,y) é $\delta(x,y)$ e se δ é contínua em R , então: a massa m , os momentos M_x e M_y e o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$, são expressos por: $m = \iint_R \delta(x, y) dA$, $M_x = \iint_R y \delta(x, y) dA$ e $M_y = \iint_R x \delta(x, y) dA$.

O centro de massa é o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ de uma lâmina calculado por meio das

$$\text{razões: } \bar{x} = \frac{\iint_R y \delta(x,y) dA}{\iint_R \delta(x,y) dA} \text{ e } \bar{y} = \frac{\iint_R x \delta(x,y) dA}{\iint_R \delta(x,y) dA}.$$

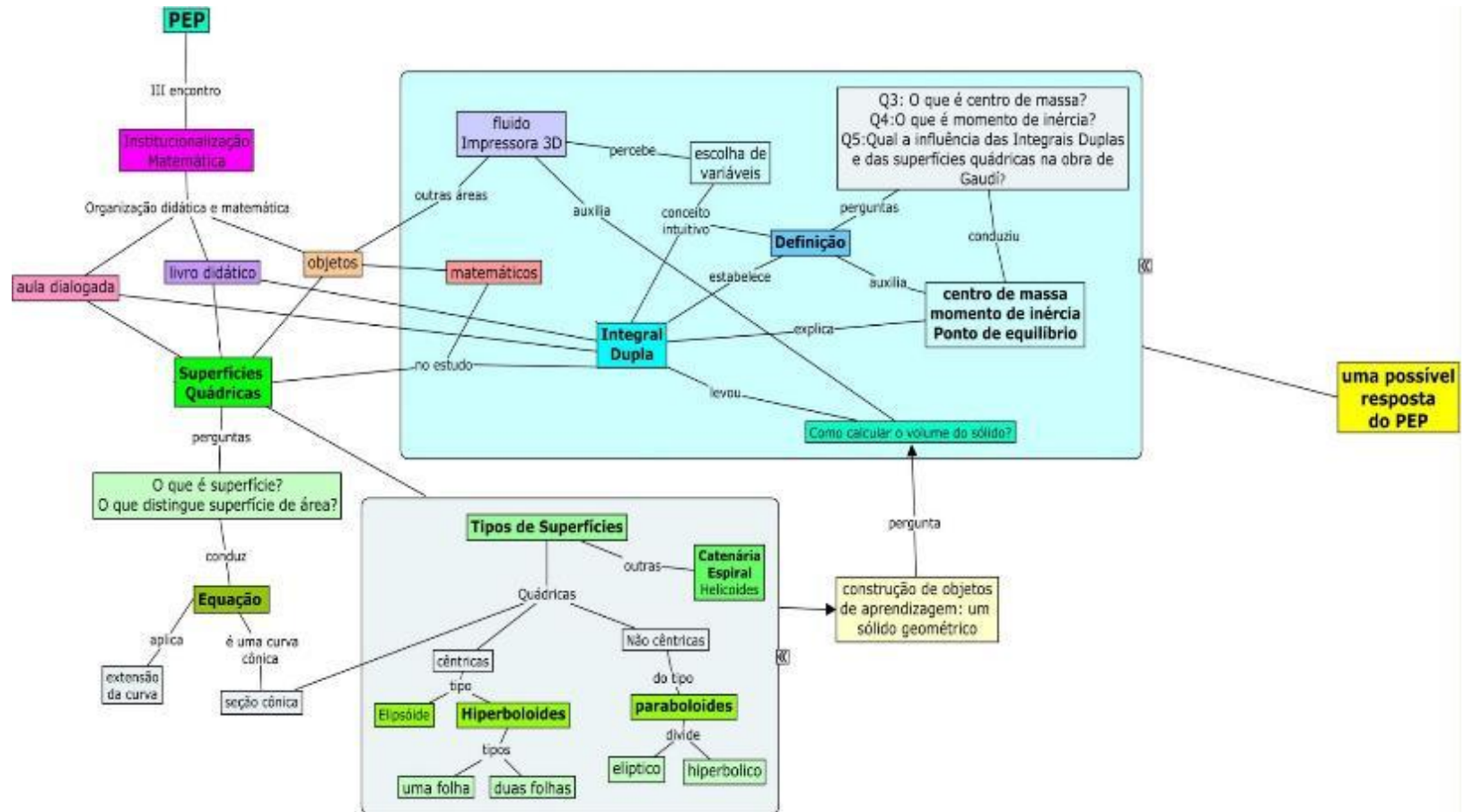
M_x e M_y são chamados de primeiro momento de L em relação aos eixos coordenados. Tomando os quadrados das distâncias dos eixos coordenados, obtemos o segundo momento, ou momentos de inércia (ou tensor). O momento de inércia em relação ao eixo x (I_x) é representado algebricamente pela fórmula: $I_x = \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_k y^2 \delta(x, y) \Delta A_k$. Aplicando a definição de Integral Dupla, obtém-se: $I_x = \iint_R y^2 \delta(x, y) dA$. De forma análoga para o momento de inércia em relação ao eixo y , I_y , temos $I_y = \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_k x^2 \delta(x, y) \Delta A_k$ ou $I_y = \iint_R x^2 \delta(x, y) dA$.

O momento de inércia total da lâmina, em relação a origem, representado por I_0 , consiste na soma dos momentos de inércia em relação ao eixo x e ao eixo y , (I_x e I_y): $I_0 = I_x + I_y$. Momento de Inércia é a medida da distribuição ao redor de um eixo fixo. Os momentos de inércia são úteis em problemas que envolvem a rotação de um objeto em torno de um eixo fixo. Como por exemplo: a rotação de uma roda.

O modelo alternativo apresentado anteriormente reúne elementos de uma organização matemática e de uma organização didática previamente construídas. Todavia, durante o desenvolvimento dos encontros do PEP, outros elementos foram emergindo que não constavam no planejamento inicial. Esses fenômenos são normais em um espaço de conhecimento complexo que envolve comportamentos, atitudes, hábitos adquiridos por um grupo de pessoas, com diferentes estágios de evolução, níveis de envolvimento e curiosidade diversificados e o sentimento de pertencimento a culturas distintas.

Ressaltamos, que a institucionalização matemática foi um dos momentos do PEP, por esse motivo, não é possível dissociá-lo das tarefas que aconteceram antes, durante e depois daquele encontro, sendo assim, todas as construções realizadas devem ser vistas como um recorte da realidade e que procuramos sintetizar os elementos anteriormente abordados e descritos em um mapa conceitual apresentado na Figura 34.

Figura 34: Mapa conceitual do ensino da definição de Integral Dupla



Fonte: Produção da autora

A Figura 34, representa resumidamente o 3º encontro do PEP quando houve a institucionalização matemática da Superfície Quádrica e da definição da Integral Dupla. Inicia pela organização didática e matemática, por intermédio do uso da aula dialogada e interrogativa e a análise dos livros didáticos. Houve uma revisão dos conceitos de área e superfície, a equação geral do segundo grau em três variáveis, a secção cônica, os tipos de superfícies quádricas, bem como, as catenárias, as espirais e as helicoides. Em seguida, os estudantes construíram um sólido, e foram questionados como calcular o volume, as inferências os levaram as ideias da definição da Integral Dupla. Diante da pesquisa e do estudo das perguntas Q₃, Q₄ e Q₅ eles associaram a definição aos conceitos de centro de massa, momento de inércia. A associação com as obras de Gaudí aconteceram no IV e V encontros quando eles formularam uma possível solução para a questão geratriz do PEP.

Na seção seguinte, registramos a nossa interpretação acerca dos modelos epistemológicos apresentados.

3.2.6 Inferências sobre os cinco modelos epistemológicos

Ao descrever os modelos epistemológicos buscamos analisá-los sob três categorias: o tipo de linguagem que eflui na formulação da definição do objeto matemático, o tipo de organização didática que é identificada na apresentação do modelo e as condições e restrições impostas por eles.

3.2.6.1 O tipo de linguagem que eflui dos modelos

O primeiro deles, o de Euler, apresenta uma linguagem simbólica, trazendo um registro que associa o conhecimento matemático com uma linguagem natural, descrevendo cada procedimento. Por ele ser o primeiro a representar a Integral Dupla, podemos identificar um raciocínio abduutivo; a presença acentuada da linguagem contrafactual e do (dis)curso sem ênfase à linguagem dictarizada.

Essa última linguagem é preponderante no modelo de Ostrogradsky que preserva o sistema formal, mobiliza regras e exige-se rigor ao usá-las. O raciocínio é dedutivo e o registro é proveniente do sistema simbólico.

Quando comparamos o modelo de Leithold com os modelos anteriores, percebermos que a parte teórica é expressa por uma mistura da linguagem natural com a dictarizada. Há um

rompimento na forma com que os objetos matemáticos são explorados, o uso das características da matemática está presente, mas há uma interpretação do autor que a utiliza de forma mais fluida preservando as demonstrações dos teoremas e as definições.

O MER elaborado consiste em descrever como historicamente o objeto matemático foi concebido, as interpretações pelas quais passou durante períodos distintos da humanidade, as relações que estabelece nos níveis tróficos e com outras áreas do conhecimento. A linguagem natural foi usada no intuito de esclarecer como a autora interpreta o ecossistema historicamente construído para a definição da Integral Dupla e identificar as condições e restrições ao qual o objeto é submisso.

O modelo alternativo caracteriza por uma linguagem mista, em que um momento se apropria da linguagem dictarizada e em curso e, em outro, de uma linguagem contrafactual e em (dis)curso, pois o desenvolvimento de um PEP imprime ao contexto da sala de aula uma articulação entre praxeologias matemáticas, didáticas, pessoais e situacional que potencializa vertentes diferentes da linguagem.

Infer-se, portanto, que a depender do sujeito e da situação o tipo de linguagem atende a um objetivo institucional e a escolha na matemática por uma das suas vertentes está relacionada com os hábitos e crenças do sujeito que a interpreta. Esse é um argumento que nos parece sólido para justificar a forma diversificada pela qual cada professor de matemática desenvolve a aula.

Essa perspectiva nos conduz a segunda categoria de análise dos modelos epistemológicos:

3.2.6.2 O tipo de organização didática que é identificada na apresentação do modelo

No modelo de Euler, a organização didática do livro é definida sempre por um problema matemático que ao ser resolvido provoca a emergência de outros problemas. Por isso, é perceptível que há interrupções frequentes no transcurso da escrita, apresentando nos estudos do autor os elementos necessários para avanços na solução dos novos problemas que despontam.

Didaticamente, a praxeologia situacional está presente na obra de Euler analisada, em circunstâncias que favorecem as praxeologias matemáticas e didáticas, esta última com características abduativas e com o uso da praxeologia pessoal.

O rigor científico, exigência dos séculos XVIII e XIX, aparece nitidamente no modelo de Ostrogradsky que o utiliza no desenvolvimento das praxeologias matemáticas e didáticas. Em termos de organização didática aferimos duas frentes: a escrita da demonstração do livro que transcrevemos e o contexto do ensino daquela época. Os interesses econômicos, com o desenvolvimento do mercado industrial, demandavam um processo educativo que permitisse ao estudante compreender técnicas e interpretar as instruções sobre elas, presume-se que o ensino era tecnicista e a organização didática era: a exposição oral, a escrita no quadro das demonstrações dos teoremas matemáticos e a aplicação deles em tarefas. Nesta perspectiva, a descoberta de novas estruturas matemáticas estava restrita a uma pequena parcela da população, que hoje chamamos de matemáticos puros.

A análise do livro de Leithold registra as praxeologias matemáticas primando por rigor na linguagem, característica da matemática pura. No entanto, o autor opta por amenizá-lo trazendo diferentes ícones para representar o objeto matemático, o que permite clarificar os conceitos abstratos e tornar o conhecimento mais acessível para os estudantes. Alia-se à organização didática do livro o uso de modelos de tarefas resolvidos que permite ao leitor identificar as técnicas, as tecnologias e as teoria aplicadas. Essas tarefas primam, quase que exclusivamente, por uma abordagem extremamente matemática não se referindo a nenhuma articulação com outras áreas afins, embora essa perspectiva é colocada como atividades propostas aos estudantes, no final do capítulo.

A construção de um MER é uma das atividades da organização didática quando se tem a intenção de aplicar um PEP, pois ele proporciona o estudo das diferentes interpretações do objeto matemático a ser ensinado, as articulações que podem ser feitas com conhecimentos diversos o que permite ao docente usar o raciocínio abdutivo para a criação de novas praxeologias ou remodelar as existentes. É um dispositivo que amplia as possibilidades de institucionalizar os elementos estruturais que compõe o objeto matemático em estudo.

O modelo alternativo tem duas etapas: aquela que foca o trabalho do docente/investigador quando organiza matematicamente e didaticamente modelando a aula e, o momento da sua aplicação. Na primeira, o professor não faz a escolha teórica do que ensinar, isto é posto por uma noosfera, ele produz apenas um metatexto a partir das anotações e do livro didático que apoia o seu planejamento (CHEVALLARD, 1982).

A partir deste registro, dois problemas podem ser identificados, o primeiro deles é que a matemática original, a usada pelos matemáticos puros, descontextualiza seus conceitos

apoiado em um discurso científico, quando assim o faz, isola o conhecimento do contexto mais amplo ao qual está inserido e as consequências é a perda do seu significado - razão de sua existência e da sua criação. O segundo, é que para manter o discurso científico ele precisa ser despersonalizado em prol da objetividade. No entanto, o docente não tem conhecimento (e se tem não avalia com profundidade) dos efeitos da despersonalização e da descontextualização na produção do seu discurso.

Se compararmos essa transposição didática com as alterações sofridas com os modelos apresentados, podemos dizer que o conhecimento acerca da Integral Dupla avançou na mesma perspectiva: o modelo de Euler consiste no conhecimento original, evolui para um conhecimento sistemático e acadêmico com o modelo de Ostrogradsky, esse é redimensionado para uma estrutura didática nos modelos de Leithold. Adquire um novo texto, uma interpretação pessoal da pesquisadora/docente que articula objetos matemáticos e não matemáticos para ensiná-lo.

Durante a análise das seções 3.2.6.1 e 3.2.6.2 observamos que os modelos epistemológicos determinam possibilidades e limites ao ensino do objeto, que serão descritos no que segue.

3.2.6.3 Condições e restrições dos modelos apresentados

Inferimos que as condições e restrições para a análise dos modelos descritos refletem os interesses das instituições que impõem diferentes tipos de linguagem ao estudo do objeto matemático por intermédio das praxeologias empregadas.

De forma geral, as condições estão associadas ao processo evolutivo da humanidade influenciando a forma de interpretar os conhecimentos e transformá-los. Tal aspecto inicia por demandas da sociedade, que busca respostas para os problemas que surgem. O ciclo - origem, aperfeiçoamento e publicação - que estão emersos os conhecimentos são divulgados por meio dos tipos de linguagens empregadas nas praxeologias. Assim, as organizações matemáticas e didáticas não estão isentas da cultura e nem do contexto social, como associamos no modelo de Ostrogradsky e percebido na espontaneidade intuitiva exposta no problema de Euler.

Frente a um movimento de criação de livros didáticos que promovesse instruções para a massa popular o ensino da matemática precisou ser revisto, usaram uma linguagem rigorosa, no entanto, simples comparado com os modelos originais, para atender aquele objetivo maior e é nesse contexto que emerge o livro de Leithold.

O modelo alternativo proposto não nasce de um problema matemático e as organizações didáticas não estão restritas às praxeologias matemáticas, elas precisaram extrapolar para outros conhecimentos de outras áreas para obter uma possível resposta para a questão proposta no PEP, sendo assim, há uma ruptura com o modelo organizacional didático que preconiza um ensino do tipo: professor expõe o conteúdo, resolve um modelo e em seguida solicita que os estudantes façam tarefas.

Resumidamente, cada modelo em seu período teve condições de ser criado ou reformulado porque o contexto social e cultural permitiu que as instituições imprimissem um tipo de organização que viabilizasse o seu ensino. E a linguagem exerceu o papel da divulgação das praxeologias almejadas.

No que concerne às restrições ao nível matemático, as rupturas dos modelos acabaram por fazer cortes epistemológicos que afetaram o ensino da disciplina, entre eles a supressão da razão de ser do objeto e a “morte” de alguns deles dentro da instituição.

Quanto à organização didática, percebe-se que os professores, que não têm escolha da organização matemática, encontram um espaço para intervir na forma que conduz as aulas. Entretanto, pertencente a uma sociedade que impõe modelos educacionais, ele acaba por ser influenciado por discursos que atrapalham a evolução dos estudantes. Inferimos que analisando os modelos epistemológicos supracitados percebemos que o criador das Integrais Duplas se usa da intuição, do raciocínio abduutivo para fluir com conhecimentos novos, dialoga com os objetos matemáticos em prol de um pensamento livre. O mesmo não acontece com o segundo modelo, que está preso ao simbolismo, às regras e a uma ausência de contextualização, tornando-a solitária, rígida e fria. Nesse caso, o ensino é voltado para um uso exacerbado da memória, das técnicas e o significado é posto como algo trivial.

No terceiro modelo observa-se uma tentativa de amenizar a linguagem dictarizada que permeia o segundo modelo, resgatando a linguagem natural, o uso de representações para facilitar a compreensão das definições e a aplicação dos conceitos, apresentando modelos resolvidos e tarefas que promovem intercâmbio com outras áreas.

O MER representa a autonomia do professor, o seu poder de investigar, de estudar acerca do tema da aula, é o momento em que livre das amarras dos currículos ele pode entender como os conhecimentos circulam dentro das instituições e como são selecionados, um em detrimento de outros.

O último modelo reflete a ideologia do professor, ao selecionar entre as obras matemática, os elementos, as associações que julgam pertinentes para a aprendizagem, momento que expressam sua leitura do mundo, da disciplina, do tema, criando um metatexto paralelo, pessoal, em que as interpretações subjetivas são suscitadas e a linguagem se torna reflexo do que acredita. Não é possível normatizar esse discurso, ele é pessoal, é a marca de sua identidade e mesmo sob a condição de uma regra, de instruções sob como proceder na sala de aula, ainda assim, será preservada sua individualidade.

Como demarcamos anteriormente a instituição é a fonte que propaga os conhecimentos e os selecionam, ao descrevê-las e analisar os documentos que a regem, podem ser identificados: a forma como ele é concebível por seus integrantes e quais praxeologias são mobilizadas no seu processo de divulgação. Assim, é imprescindível a análise institucional para compreender como o ensino e a aprendizagem são articulados internamente e quais condições e restrições inviabilizam uma possível mudança.

3.3 Análise Institucional

Tem como objetivo descrever as diversas instituições envolvidas no processo de ensinar e aprender um determinado conhecimento. Iniciamos com uma descrição do que, em diferentes perspectivas, compreende uma instituição.

3.3.1 As Instituições

No século XVIII o Iluminismo emerge na Europa como um movimento intelectual que centra em ideias de cunho racional: como liberdade, separação da Igreja do Estado, fraternidade, introspeção, entre outras. Há, portanto, uma preocupação por parte da sociedade em engajar os indivíduos no contexto social, político e cultural de forma a iluminá-los acerca das possibilidades de ação, de sentimentos, de reflexão acerca do Eu e do Outro.

É nesse viés que a Antropologia encontra um terreno fértil para se desenvolver como uma Ciência, aportando-se na perspectiva de uma análise acerca da humanidade e da cultura e em uma abordagem holística acerca da diversidade humana biológica e cultural considerando o tempo e o espaço.

Os fundamentos principais dessa corrente de pensamento tiveram contribuições advindas: da teoria evolucionista de Charles Darwin; das concepções mecanicistas da natureza de Isaac Newton; do surgimento da Sociologia francesa fundadas por David Émile Durkheim

(1858-1917) e Marcel Mauss (1872-1950), que incorporaram o método-hipotético-dedutivo para os fenômenos sociais; e de Claude-Lévi Strauss (1908-2009) que estende o campo de diálogo com as ciências sociais na pretensão de conhecer o homem enquanto integrante de um grupo, que tem potencial de criar e fomentar ideias novas, sob a vertente da cultura.

As perspectivas dessa corrente, influenciam a percepção da instituição como um *locus* da cultura de uma sociedade. Nesse sentido, Durkheim concebe instituição como todas as crenças e todos os modos de conduta estabelecidos pela coletividade, e defendia que se deve manter a integridade e a coerência social frente ao surgimento de novas instituições.

O conhecimento, na vertente de Durkheim, é um bem construído pela sociedade, no sentido de que “apropriar-se de uma ideia é um processo social” (DOUGLAS, 2007, p.55), e as instituições exercem o papel de legitimar a teoria, as crenças, a ordem social, as regras, as convenções.

Entretanto, a legitimidade e o equilíbrio das instituições perpassam pelo critério da razão e da análise da sua natureza, processos cognitivos individuais, que sofrem a influência cultural do meio em que eles vivem. Nesse sentido, “para que uma convenção passe a ser uma instituição social legítima é necessária uma convenção cognitiva paralela que lhe dê apoio” (DOUGLAS, 2007, p.56). Portanto, nesse ponto se estabelece a dualidade entre a interferência da instituição sobre o indivíduo e do indivíduo sobre a instituição.

Do ponto de vista de Strauss (1908-2009), parentesco é uma linguagem em que os objetos de análise estabelecem relações entre os termos e a sua finalidade, desenvolvendo processos comunicativos que, para ele, é a própria cultura. Outro aspecto do seu estudo é o abandono da análise centrada nos fenômenos conscientes e a dedicação às infraestruturas inconscientes do espírito humano. Essa virada de percepção faz com que ele defina cultura como um sistema de signos partilhados e estruturados por princípios que estabelecem o funcionamento e as ações de uma determinada sociedade.

A cultura, os processos de significação e a busca de sentido dos signos, se fazem presentes no convívio e nas relações sociais por meio das diversas representações: institucional, linguística, entre outras. É, portanto, possível verificar indícios de pressupostos teóricos da Antropologia e da Semiótica coabitando o mesmo espaço e que têm as instituições como um mecanismo de controle e de funcionamento desse sistema de signos que permeiam a sociedade.

Para a Educação, na vertente da TAD, a instituição não é apenas um espaço físico, mas “pode ser quase o que quer que seja” (CHEVALLARD, 1996, p.129), a família, a igreja, um

livro, um indivíduo, um trabalho, “a vida cotidiana é uma instituição (num dado meio social), o mesmo acontecendo ao estado amoroso (numa dada cultura)”. De forma geral, Chevallard (2018, p. 22) assevera que:

Uma instituição I é um dispositivo social, “total”, que certamente pode ter pequenas extensões do espaço social (existem “micro extensões”), mas que permite – e impõe – à seus *sujeitos*, isto é, às pessoas x, que nela, ocupam diferentes posições p ofertadas em I, a implementação de maneiras de fazer e pensar próprios – ou seja, as *praxeologias*. Assim, a classe é uma instituição que engloba aulas e escolas e que abunda em todos os tipos de posições, o *sistema educacional*.

A dialética instituição e indivíduo é determinada pelas relações pessoais a que se submetem os sujeitos em diferentes instituições ao se deparar com um determinado objeto. Chevallard (2018) afirma que a relação pessoal de x a um objeto o muda – ou é criada, se não existia ainda - pelo encontro de x com o objeto o nas instituições I onde ele vive e onde x ocupa uma determinada posição p que o coloca em contato com o”. (CHEVALLARD, 2018, p. 22).

É neste sentido que uma pessoa x adquire um conjunto de crenças, de costumes, de mensagens, e de praxeologias que vigoram nesses espaços, e em cada uma das instituições circula uma linguagem. “O papel das pessoas na criação de instituições é bem atestado pela linguagem atual. Mas seu papel no funcionamento das instituições não é menos essencial” (CHEVALLARD, 2018, p.22).

Para a Semiótica que “é a ciência de toda e qualquer linguagem” (SANTAELLA, 2009, p.1), os signos são instrumento pelo qual a linguagem se manifesta e as instituições exercem o papel de divulgação em um processo de comunicação envolvendo um determinado discurso, e é por meio deste que “a linguagem distende para o domínio social e institucional” (ARAÚJO, 2004, p. 12).

Inferimos que as instituições, para a Semiótica, consistem em um espaço virtual e físico que produz discursos⁶⁹ socialmente construídos influenciando as ações dos sujeitos. Porém, os discursos institucionais são passíveis de mudança, pois a linguagem “é, antes de tudo, um espaço de criação e de subversão de significados” (ARAÚJO, 2004, p.30).

Diante da articulação que estamos tecendo entre a TAD e a Semiótica peirceana verificamos que o papel das instituições se articulou de tal forma, na interpretação aqui

⁶⁹ Tomamos discurso como qualquer manifestação de uma linguagem. Assim, a nossa interpretação de discurso toma o oral, a pintura, a imagem, a escrita, os gestos, os símbolos, a arte, a técnica, a teoria, a tarefa, a tecnologia, ideologias, entre outros, como uma linguagem que se manifesta em discursos.

apresentada, que não estão distantes entre si, pois o seu papel na sociedade, nas duas vertentes, é similar.

Para as próximas seções, tomamos duas abordagens em torno das instituições: uma, como espaço físico e a outra, como espaço ideológico em que transitam as documentações oficiais, os livros didáticos, os modelos epistemológicos do objeto matemático e as praxeologias que estão presentes nos discursos em sala de aula.

3.3.2 As instituições universitárias desta pesquisa

Enquanto espaço ideológico, inicialmente, tomamos a Lei de Diretrizes e Bases -LDB, para a compreensão do discurso que impera na Educação brasileira e as diretrizes e objetivos pleiteados para o ensino na Educação Superior.

Com a promulgação da Constituição de 1988 fez-se necessário estabelecer normas para definir e regularizar a organização da educação brasileira. Um embate político sobre o papel do Estado na educação promoveu um entrave, por oito anos, da redação final da Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LDB), sancionada em 1996. Os dispositivos gerais da lei regulamentaram e objetivaram a educação escolar vinculando-a ao mundo do trabalho e ao exercício das práticas sociais.

No Art.21 a LDB faz referência a composição dos níveis escolares subdividindo-o em: Educação Básica (formada pela educação infantil, ensino fundamental e o ensino médio) e Educação Superior. Entretanto, é no seio do Art. 43 que encontramos explicitamente as finalidades do Ensino Superior: estimular a criação cultural e o desenvolvimento do espírito científico e do pensamento reflexivo; formar diplomados nas diferentes áreas de conhecimento; incentivar o trabalho de pesquisa e investigação científica, visando o desenvolvimento da ciência e da tecnologia e da criação e difusão da cultura; promover a divulgação de conhecimentos culturais, científicos e técnicos;

A Lei adiciona outras finalidades, a saber: suscitar o desejo permanente de aperfeiçoamento cultural e profissional e possibilitar a correspondente concretização, integrando os conhecimentos de cada geração; estimular o conhecimento dos problemas do mundo presente, em particular os nacionais e regionais; promover a extensão, aberta à participação da população, visando à difusão das conquistas e benefícios resultantes da criação cultural e da pesquisa científica e tecnológica geradas na instituição; atuar em favor da

universalização e do aprimoramento da Educação Básica (BRASIL, 1996). Tais prerrogativas estão presentes no desenvolvimento de um PEP.

No que se refere a Educação Básica, ela também é uma instituição como constatado por Henriques; Naganine; Naganine (2012) “a Educação Básica, como um todo, é uma instituição, as suas partes (primeiro segmento da educação, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II, Ensino Médio etc.) também o são, podendo ser caracterizadas como *instituições de referência e/ou de aplicação*”. No entanto, para que o professor possa ensinar no ensino básico ele precisa, no mínimo, ser graduado na Licenciatura de uma área específica.

A Resolução CNE/CP nº2, de 20 de dezembro de 2019 instituiu a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). No Art.4º, §1º sobre as competências específicas do conhecimento profissional, na seção II, consta que o professor precisa dominar os objetos de conhecimento e saber como ensiná-los.

Esta competência específica supracitada nos remete ao questionamento sobre quais conhecimentos necessários o professor precisa saber para ensinar? Na tentativa de buscar respostas Ball; Thames; Phelps (2008, **grifo nosso**) consideraram, entre outros, que, “o conhecimento especializado do conteúdo, para exercer a função de professor, no caso da Matemática, inclui uma perspectiva sobre a natureza da matemática e **um conhecimento aprofundado** daquilo que o professor tem de ensinar aos seus alunos”.

Se articularmos as duas informações teremos que uma das competências para a formação inicial dos professores da Educação Básica é dominar o conteúdo de forma aprofundada e saber como ensiná-los. Tal afirmativa justifica a presença dos licenciandos como sujeitos da pesquisa, pois eles poderão aprofundar os conhecimentos dos objetos matemáticos, estabelecendo correspondências entre os conteúdos da Educação Superior com os da Educação Básica.

Para tal intento, nós nos apoiamos no estudo de Henriques e Serodônio (2013), que utilizou dispositivos experimentais de práticas de estudantes do Cálculo Diferencial e Integral promovendo uma análise comparativa de tipos de tarefas propostos na Educação Superior com os da Educação Básica. E elaboramos a Atividade 2, tomando como base um dos dispositivos, para que os estudantes desta pesquisa pudessem responder.

Neste estudo vamos abordar duas instituições públicas do Ensino Superior: o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA) e a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), ambas situadas em Vitória da Conquista, no estado da Bahia. Os

estudantes das Engenharias são egressos da primeira instituição e os licenciandos em Matemática são da segunda.

3.3.2.1 O IFBA

Frente a implantação da LDB, houve profundas mudanças no sistema organizativo tecnológico profissional e os Centros Federais de Educação Tecnológica (CEFET), em 2008, foram transformadas em Institutos Federais – IFS. Essa mudança foi acompanhada por uma expansão na construção de novos campi e do quadro de professores; uma melhoria na qualidade dos cursos e das estruturas físicas dos existentes, e a criação de cursos de graduação em diferentes áreas do conhecimento.

Neste contexto, o CEFET de Vitória da Conquista foi transformado em Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, junto com os demais IFS do Brasil. Conta com um diretor geral que organiza administrativamente e financeiramente o campus e um diretor de ensino, além dos coordenadores e dos conselhos superiores. Entretanto, a unidade não tem autonomia para decisões superiores executivas, frente ao MEC e aos ministérios, delegando tais responsabilidades a uma reitoria que administra todas as IFS com unidades no estado da Bahia, situada na cidade de Salvador, capital da Bahia.

O campus de Vitória da Conquista, oferta a cidade e regiões circunvizinhas, os cursos técnicos nas modalidades: integrada e subsequente e o Ensino Superior. Para a modalidade integrada, equivalente ao nível médio, os cursos são: Eletromecânica; Eletrônica; Informática e Meio Ambiente; para a modalidade subsequente: os cursos de Edificações e Segurança do Trabalho, Técnico em Informática. No nível do Ensino Superior, oferece os cursos de Engenharia Ambiental, Bacharelado em Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Sistema de Informação e Licenciatura em Química.

Cada curso, tem o seu Projeto Pedagógico Institucional (PPI) que descreve os objetivos, as componentes curriculares de acordo as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso e a estrutura administrativa e física disponível para cada nível. Nesta pesquisa, abordamos os cursos de Engenharia, pois os estudantes que participaram do processo investigativo eram matriculados nestas graduações.

Do PPI, de cada uma das três Engenharias consultados, verificamos que a Componente curricular, CDI-III, consta na matriz curricular dos cursos. Averiguamos que ela tem pré-requisitos, ou seja, para que o estudante curse o CDI-III precisa ter sido aprovado em disciplinas

ofertadas anteriormente, que são: Álgebra Vetorial e Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral -II.

O curso de Engenharia Elétrica, tem uma duração de 18 semestres, as aulas ocorrem no período diurno, o regime é semestral e são ofertadas 50 vagas. A carga horária total da graduação é de 3780 horas e 258 créditos. No PPI, consta como objetivos gerais: i) realizar atividades de ensino, pesquisa e extensão em Engenharia Elétrica, buscando a excelência, com visão crítica e criativa, contribuindo para o atendimento das necessidades da sociedade e seu desenvolvimento sustentável, pautado nos princípios da ética profissional. ii) Realizar atividades de ensino, pesquisa e extensão, visando ao progresso científico, tecnológico, cultural e socioeconômico da região e do país, na perspectiva de um desenvolvimento sustentável, da integração com a sociedade e do exercício da cidadania (PPI, 2013).

No Quadro 6 apresentamos de acordo com o PPI do curso de Engenharia Elétrica, as disciplinas que são pré-requisito (MAT 401 se refere a Álgebra Vetorial e Geometria Analítica e MAT 404, Cálculo Diferencial e Integral II) para a componente curricular em estudo; o crédito; a carga horária; a ementa e a Bibliografia básica, daquela graduação.

Quadro 6 – Ementa do curso de Engenharia Elétrica

Código	Disciplina	Pré-Requisito	Créditos	C.H.
MATV07	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III	MAT401, MAT404	4	60(T)
Ementa	Funções de várias variáveis. Limite e continuidade de funções de mais de uma variável. Derivada direcional. Máximos e mínimos. Integrais múltiplas. Integrais de linha e de superfícies. Teorema de Green. Teorema de Gauss ou da divergência. Teorema de Stokes. Aplicações.			
Bibliografia Básica	ANTON, Howard; BIVENS, I.; DAVID, Stephen. Cálculo, v. 1. 8. Ed. São Paulo: Artmed, 2007; LEITHOLD, L. Cálculo com geometria analítica, v. 2. 3. Ed. São Paulo: Harbra, 1994; STERWART, James. Cálculo, v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2010.			

Fonte: PPI do curso de Engenharia Elétrica do IFBA

Para o curso de Bacharelado em Engenharia Civil são ofertadas 40 vagas anuais, com funcionamento diurno, com duração mínima de 10 semestres e a carga horária é de 3615 h e 241 créditos. Tem como objetivo geral realizar atividades de ensino, pesquisa e extensão com visão crítica na perspectiva de um desenvolvimento sustentável, da integração da sociedade e do exercício da cidadania.

A apresentação da ementa do componente curricular, Cálculo Diferencial e Integral III, ocorre de forma análoga ao do curso da Engenharia Elétrica, registrado no Quadro 7.

Quadro 7 – Ementa de CDI-III no curso de Engenharia Civil

DISCIPLINA: Cálculo Integral e Diferencial III
 PRÉ-REQUISITO: Cálculo II e Álgebra Vetorial e Geometria Analítica
 CARGA HORÁRIA: 60 horas
 NÚMERO DE CRÉDITOS: 4
 EMENTA: Funções de várias variáveis. Limite e continuidade de funções de mais de uma variável. Derivada direcional. Máximos e mínimos. Integrais múltiplas. Integrais de linha e de superfícies. Teorema de Green. Teorema de Gauss ou da divergência. Teorema de Stokes. Aplicações.
 BIBLIOGRAFIA BÁSICA:
 LEITHOUL, L. O cálculo com geometria analítica v. 1. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.
 LEITHOUL, L. O cálculo com geometria analítica v. 2. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.
 BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:
 GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo v. 02. 5. ed. São Paulo: Editora LTC, 2001.
 GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo v. 03. 5. ed. São Paulo: Editora LTC, 2001.

Fonte: PPI do curso de Engenharia Civil do IFBA

O terceiro curso analisado é o de Engenharia Ambiental que tem uma carga horária de 4140 horas, funciona no diurno, o período mínimo de integralização é 10 semestres e são disponibilizadas 80 vagas anuais. No Quadro 8, a ementa do CDI-III está conforme foi apresentada no PPI do curso.

Quadro 8 – Ementa de CDI-III do curso de Engenharia Ambiental

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral III
 Pré-requisito: Álgebra Vetorial e Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral II.
 Carga Horária: 60 horas (T)
 Ementa:
 Funções de várias variáveis. Limite e continuidade de funções de mais de uma variável. Derivada direcional. Máximos e mínimos. Integrais múltiplas. Integrais de linha e de superfícies. Teorema de Green. Teorema de Gauss ou da divergência. Teorema de Stokes. Aplicações.
 Bibliografia Básica:
 Boulos, Paulo. Introdução ao cálculo: cálculo diferencial. São Paulo: E. Blücher, 2005.
 LEITHOLD, Louis. Cálculo com geometria analítica, v. 1. São Paulo: Harbra, 1994.
 STEWART, James. Cálculo, v. 3. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
 Bibliografia Complementar:
 LEITHOLD, L. Cálculo com geometria analítica, v. 2. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

Fonte: PPI do curso de Engenharia Ambiental

De forma geral, os cursos são formados com a mesma estrutura, no que diz respeito a disciplina CDI -III, as ementas são similares e distribuem os objetos matemáticos de forma análoga. A disciplina Álgebra Vetorial e Geometria Analítica – AVGA, comum nos três cursos, apresenta em sua ementa o estudo das Superfícies Quádricas, como pode ser constatado no PPI

da Engenharia Elétrica, Civil e Ambiental. Para evitar repetições iremos registrar no Quadro 9, apenas uma delas.

Quadro 9 – Ementa de Álgebra Vetorial e Geometria Analítica

Código	Disciplina	Pré-Req	Créditos	C.H.
MAT401	ÁLGEBRA VETORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA	---	4	60(P)
Ementa	Álgebra de vetores no plano e no espaço tridimensional. Retas. Planos. Cônicas e quadráticas. Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.			
Bibliografia Básica	STEINBRUCH, A. & WINTERLE, P. Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1986. LEITHOLD, Louis. Cálculo com geometria analítica, v. 1. São Paulo: Harbra, 1994. REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. Geometria analítica. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. BOLDRINI, J.L., Costa, S.R., Ribeiro, V.F. & Wetzler, H.G.			

Fonte: PPI do curso de Engenharia Elétrica

Dos sete estudantes, desta instituição de ensino, que participaram da pesquisa, quatro cursam Engenharia Civil, dois Engenharia Ambiental e um, Engenharia Elétrica. Para o estudo da ementa da componente curricular, CDI -III, no curso de Licenciatura em Matemática analisaremos a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, ao qual o curso é vigente.

3.3.2.2 A UESB

A Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia tem como origem as Faculdades de Formação de Professores. Por meio dos Decreto Federais: n. 68219, n.79130 e n. 80551 foi reconhecido o curso de Letras em Vitória da Conquista em 1977, inicialmente em uma escola pública e após dois anos foi construída, em 1980, a sede que funciona até os dias atuais.

Hoje, a universidade oferta a comunidade local e circunvizinha, 47 cursos de graduação nos três campi, situados em Vitória da Conquista, Jequié e Itapetinga. O curso de Licenciatura em Matemática fundado em 1998, disponibiliza 43 vagas (20 por vestibular, 20 por SISU e 3 pelo sistema de cotas) funciona no turno vespertino e tem período mínimo de 10 semestres. Tem como objetivo geral, capacitar os alunos nos aspectos conceituais, pedagógicos, metodológicos, filosóficos, políticos e sociais atendendo assim a carência de profissionais da região na área de Ciências Exatas.

Destacamos que o ementário do curso de Licenciatura foi formulado e encontra-se para aprovação no Conselho Superior de Ensino, Pesquisa e Extensão da Universidade. Por isso, tomamos como aporte o PPI do curso de 2010, no qual o Cálculo que apresenta em sua ementa

as Integrais Múltiplas é denominado de Cálculo VI e é ofertado no 4º semestre. O Quadro 10, registra a ementa e a carga horária da componente curricular.

Quadro 10 – Ementa de Cálculo IV da Licenciatura em Matemática

CÁLCULO VI	
CÓDIGO: DCE-081	
CURSO: Licenciatura em Matemática	
PRÉ-REQUISITO: Nenhum	
C/H: 75h/a	CRÉDITO: (3,1,0)
EMENTA:	
Integrais Múltiplas. Integrais de Linha. Integrais de Superfície.	
BIBLIOGRAFIA:	
SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica . 2 ed., v. 2. São Paulo: Makron Books, 1979.	
PISKOUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral . v. I e II, 3. ed. Porto: Edições Lopes da Silva, 1982.	
LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica . Tradução: PATARRA, C. C. 3. ed. v.2. São Paulo: Editora Habra, 1972.	
LANG, Serge. Cálculo . Rio de Janeiro. V. 2. Livros Técnicos e Literário, 1977.	
ROCHA, L.M. Cálculo . v.2. São Paul. Atlas, 1978.	
MUNEM, Mustafa e David J. Foulis. Cálculo . Rio de Janeiro. Guanabara Dois s.a, 1978.	
KAPLAN, Wilfred. Cálculo Avançado . São Paulo. V. 1 e 2. Editora Edgard Blücher Ltda, 1972.	
SPIEGEL, Murray. Análise Vetorial . Rio de Janeiro. Editora Ao Livro Técnico.	

Fonte: PPI do curso de Licenciatura em Matemática, da UESB, de 2010.

A Universidade, por meio do Grupo de Estudos em Educação Matemática, colaborou fornecendo o auditório, a inscrição e a divulgação online, no site oficial da UESB, do curso ofertado nesta pesquisa, ao qual detalhamos nos capítulos 4 e 5 deste estudo. Daquela, inscreveram seis estudantes matriculados no curso da Licenciatura em Matemática.

Na próxima seção, apresentamos a análise praxeológica do capítulo 18 do livro de Leithold (1994), com o objetivo de identificar a organização matemática e didática vigente nas instituições (IFBA e UESB).

3.5 Análise praxeológica do Capítulo 18 de um livro de CDI

A praxeologia do livro didático tem o intuito de verificar quais são as tarefas (t), as técnicas (τ), as tecnologias (θ) e a teoria (Θ) de que o estudante dispõe para executar uma atividade envolvendo um tema matemático. Esta ação caracteriza o modelo dominante do ensino que permeia na instituição. O docente ao adotá-lo como uma referência bibliográfica, sinaliza que tomará como aporte as praxeologias que constam em suas páginas e as mesmas diretrizes que o autor escolheu. No entanto, haverá na transposição didática, no exercício da docência a sua própria organização didática.

Em nosso trabalho, o estudo do capítulo 18 de um livro de Cálculo Diferencial, se justifica por apresentar uma abordagem acerca da Integral Dupla e tem como objetivos:

identificar e analisar as praxeologias institucionalizadas; identificar as condições e restrições ao qual potencializam e/ou restringem às mudanças; identificar e analisar as organizações didáticas que emergem dos documentos oficiais; e propor modelos alternativos para as tarefas acerca das Superfícies Quádricas.

Com tal intento, buscamos nos planos de curso das Engenharias e da Licenciatura em Matemática, disponibilizados nos sites das duas instituições de Ensino Superior – UESB e IFBA – as referências bibliográficas recomendadas para os estudantes. Ao analisarmos observamos que elas não se diferenciam quanto às ementas propostas para o ensino da componente curricular CDI-III. Entretanto, no que diz respeito a recomendação dos livros didáticos, a Licenciatura em Matemática da UESB expande as indicações e trazem uma “referência de aporte”, aquela em que o estudante pode investigar conceitos mais avançados.

Para a análise praxeológica do livro de CDI, usamos como critério o exemplar comum nas duas instituições: O Cálculo e a Geometria Analítica, de Louis Leithold, terceira edição, publicado em 1990 pela editora Habra, em dois volumes. O primeiro volume tem 11 capítulos e 685 páginas e o segundo, tem um total de 536 páginas e nove capítulos, que são sequenciados com a continuação numérica do volume um. Em ambos existem os apêndices e anexos: fórmulas, índice remissivo e respostas dos exercícios de número ímpar. A Integral Dupla, foco do nosso estudo, está situada no capítulo dezoito, do volume 2, intitulado Integrais Múltiplas, que tem um total de 47 páginas, das quais 27 são sobre o tema.

Na página de apresentação do capítulo tem uma síntese que retrata a aplicação da integral para função de várias variáveis, destacando que definirá a Integral Dupla e mostrará como as integrais iteradas contribuem para encontrar “volumes de sólidos, calcular massa, centro de massa e momentos de inércia” (LEITHOLD, 1990, p.1022). Estende a sua análise informando que demonstrará como as coordenadas polares contribuem para o cálculo de áreas de superfícies.

Destacamos dois pontos: o primeiro deles, é que não se calcula o volume, nem a massa, nem a área, pois se trata de grandezas, objetos dinâmicos/não ostensivos, que como vimos é uma ideia mental. O que se pode atribuir é um número que expressa a medida dessa grandeza, como pode-se constatar nos estudos de MORAIS, BELLEMAIN e LIMA (2014, p.11). Logo, há um equívoco conceitual no registro, que deveria ser: o cálculo da medida do volume (da mesma forma para as demais grandezas citadas). O segundo ponto que queremos destacar é que o capítulo se refere as Integrais Múltiplas e, portanto, no resumo inicial a referência à definição

e aplicação das Integrais Triplas deveriam ser mencionadas na capa inicial e não na posterior, o que pode deixar a impressão para o leitor de que aquele capítulo só trata das Integrais Duplas.

Para a organização da análise praxeológica dividimos as explicações de acordo com as seções do livro em análise. Tal escolha se justifica pela compreensão que se faz necessária de quais subtarefas, técnicas e tecnologias estão sendo mobilizadas em cada parte do livro, originando praxeologias pontuais e globais.

Análise da seção 18.1

O capítulo inicia com a seção da Integral Dupla distinguindo a Integral Simples da Integral Múltipla quanto ao número de variáveis na função. Em seguida, explica o tema matemático usando a definição de região em $\mathbb{R}^2$, norma, sub-regiões advindas de partições e do somatório delas apresentando a definição por limite e a definição da Integral Dupla. Segue, apresentando o teorema da continuidade para funções de duas variáveis.

Para explicar a interpretação geométrica em termos de volume de um sólido tridimensional, o autor usa a representação gráfica de uma superfície que está acima do plano xy e registra em uma Figura localizada ao lado do texto. O registro algébrico correspondente a essa superfície é colocado de forma genérica, $z = f(x, y)$, em seguida, apresenta uma figura que mostra uma sub-região retangular de R , com o formato de um prisma (informação não mencionado pelo autor) e então ressalta que a medida⁷⁰ do volume do sólido retangular é determinada pelo produto da função em um ponto qualquer do espaço pelo diferencial da área naquele ponto. Expressa posteriormente que a soma das medidas dos volumes de n sólidos se aproxima do número dado a uma Integral Dupla. Descrevendo seis teoremas (sem a demonstração de nenhum deles), que circunscrevem a definição daquele objeto matemático. Ao final é exposto apenas um tipo de tarefa: Calcular o valor de uma Integral Dupla e 23 tarefas envolvendo as tecnologias mencionadas no texto, ao analisá-las verificamos que as técnicas, as tarefas e a tecnologia eram sempre aplicadas as mesmas e então escolhemos dentre aquelas a que mais se adequava ao nosso objeto de estudo. O enunciado da tarefa 2, da seção 18.1, página 1027, apresenta o seguinte registro:

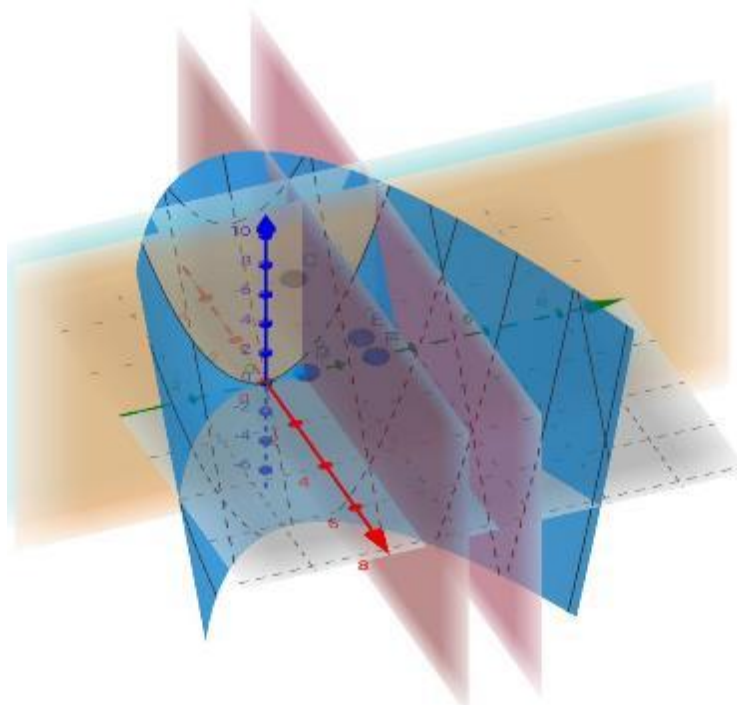
Ache um valor aproximado da integral dupla $\iint_R (y^2 - 4x) dA$ onde R é a região retangular com vértices $(-1, 0)$ e $(1, 3)$. Faça uma partição de R com as retas $x = 0$, $y = 1$ e $y = 2$ e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i -ésima sub-região (LEITHOLD, 1990, p.1027).

⁷⁰ O acréscimo da palavra medida se justifica pela discussão anteriormente defendida de que os conceitos de área e volume são grandezas.

Em termos semióticos os objetos imediatos/ostensivos apresentados pelo enunciado da tarefa, são os símbolos matemáticos $\iint$, as variáveis y e x e os números. Os objetos dinâmicos/não ostensivos envolvidos são função de duas variáveis, pares ordenados, integral dupla, retângulo, retas, partição, centro de uma região.

A solução desse tipo de tarefa “calcular a integral dupla”, perpassa pela interpretação do enunciado da tarefa e depende das relações que precisam ser estabelecidas entre o signo e o objeto. Desta forma, os signos $(-1, 0)$ e $(1, 3)$ ao ser associados a um plano cartesiano, conduzirão o interpretante a associá-los a uma representação geométrica de um retângulo, cuja extensão ao longo de x é de 3 u.c e em torno de y será de 2u.c. Particionando cada lado do retângulo formado pelos intervalos dados, tomamos o intervalo de $[-1, 1]$ em torno do eixo x e $[0, 3]$ em torno do eixo y , e a interseção com a reta $x = 0$, registrado na Figura 35.

Figura 35: Partição da curva na região delimitada

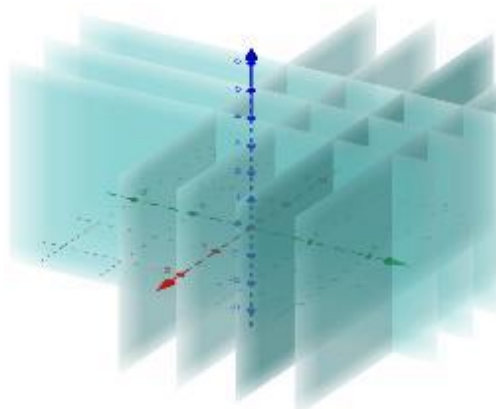


Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Originam-se seis sub-regiões com retângulos de comprimento uma unidade, para cada i da sub-região o $\Delta_i A = 1$. Tem-se para cada sub-região da partição um centro, cuja coordenada é a média aritmética entre os lados. Assim, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6 são as seis sub-regiões e C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6 são seus respectivos centros. Desta forma, pode-se calcular o centro para a região: $R_1 = [-1, 0] \times [0, 1]$ o $C_1(R_1) = (-0,5; 0,5)$; para a região $R_2 = [-1, 0] \times [1, 2]$ o $C_2(R_2) = (-0,5; 1,5)$; para $R_3 = [-1, 0] \times [2, 3]$ o $C_3(R_3) = (-0,5; 2,5)$; para $R_4 = [0, 1] \times [0, 1]$ o $C_4(R_4) = (0,5$

; 0,5); para $R_5 = [0,1] \times [1,2]$ o $C_5(R_5) = (0, 5; 1,5)$ e para $R_6 = [0,1] \times [2, 3]$ o $C_6(R_6) = (0,5; 2,5)$, representadas na Figura 36.

Figura 36: Representação das seis regiões



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Com esses dados, o interpretante precisa ter conhecimento que pode ser calculado a medida do volume aproximado, usando o Teorema 1⁷¹:

$V \approx f(-0,5; 1,5). 1 + f(-0,5; 1,5).1 + f(-0,5; 2,5).1 + f(0,5; 0,5).1 + f(0, 5; 1,5).1 + f(0,5; 2,5).1$, logo $V \approx 17, 5$ u.v.

Entretanto, verificamos que a tarefa (t) é composta por um conjunto de subtarefas (t' , t'' , t''' , ..., t^n) que unidas, totalizam a tarefa $t = \{t' \cup t'' \cup t''' \cup \dots t^n\}$. De forma análoga, se para cada subtarefa exige-se uma técnica, então a técnica (τ) é formada por outras técnicas intermediárias, representada por: $\tau = \{\tau' \cup \tau'' \cup \tau''' \cup \dots \tau^n\}$, que na atividade podem ser descritas por: t' : determinar a região R formada pelos vértices (-1, 0) e (1, 3); cujas são: τ' : representar geometricamente o retângulo; τ'' : verificar a extensão dos seus lados subtraindo os valores das extremidades.

t'' : calcular a área de cada sub-região.

τ'' : particionar os lados, com comprimento unitário, em seis sub-regiões.

τ^4 : calcular a medida da área de cada sub-região.

⁷¹ Teorema 18.1.4 apresentado no livro: Seja f uma função de duas variáveis, contínua numa região fechada R , no plano xy e $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em R . Se V for a medida do volume do sólido S tendo a região R como base e tendo uma altura cuja medida é $f(x, y)$ no ponto (x, y) em R , então $V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R f(x, y) dA$. (LEITHOLD, 1990, p.1026).

τ^5 : calcular as coordenadas do centro de cada sub-região, usando a média aritmética.

τ^6 : encontrar o valor atribuído a função de duas variáveis para cada centro.

τ^7 : fazer o somatório do produto do valor encontrado em τ^5 pelo diferencial da área de cada sub-região.

Para a solução dessa tarefa $t = \{t', t''\}$ foi usada uma técnica, $\tau = \{\tau', \tau'', \tau''', \tau^4, \tau^5, \tau^6, \tau^7\}$ uma tecnologia – o teorema 18.1.4 (registrado no rodapé) e uma teoria, a Integral Dupla. Na organização local dessa seção detectamos que 17 das tarefas propostas podem ser resolvidas com a mesma técnica, tecnologia e teoria.

Para as seis últimas questões da seção, a tarefa, a técnica e a tecnologia se alteram, permanecendo a mesma teoria. Tomamos (de forma aleatória) uma tarefa entre as seis, cujo enunciado é:

Nos exercícios de 17 a 22, aplique o Teorema 18.1.8⁷² para encontrar um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada.

17. $\iint_R (2x + 5y) dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ e $(0,2)$.

Para resolver a tarefa proposta analisamos a lei de formação da função: $f(x, y) = 2x + 5y$ e verificamos que os expoentes das variáveis têm grau um, o que determina uma função linear. Em decorrência, pode ser reduzido o número de procedimentos a ser executado, comparando com a tarefa 2. Do exposto, se faz necessário dispor de uma outra tecnologia (um outro teorema) que justifique a técnica empregada.

Por se tratar de uma função definida por $f(x, y) = 2x + 5y$ linear, podemos calcular $f(0,0) = 0$; $f(1, 0) = 2$; $f(1, 2) = 12$ e $f(0, 2) = 10$. Desses resultados, verificamos que o menor valor é $m = 0$ e o maior valor $M = 12$, pelo teorema 18.1.8 (expresso no rodapé) a integral deve estar situada entre tais valores, $0 \leq \iint_R (2x + 5y) dA \leq 12$. Entretanto, o mesmo estabelece que para todo (x, y) existe uma região R , retangular que possui uma medida de área que deverá ser multiplicada pelos valores de m e M , em decorrência, calculamos a medida da área da região R proposta e obtemos 2u.a, a partir dessa informação efetuamos o produto $0.2 \leq \iint_R (2x + 5y) dA \leq 12.2$; então $0 \leq \iint_R (2x + 5y) dA \leq 24$. O interpretante, após o processo de semiose deverá

⁷² Teorema 18.1.8: Seja a função f integrável numa região fechada R e suponha que m e M sejam dois números tais que $m \leq \iint_R f(x, y) dA \leq M$ para todo (x, y) em R . Então, se A for a medida da área da região R , $mA \leq \iint_R f(x, y) dA \leq MA$ (LEITHOLD, 1990, p.1026).

interpretar essa resposta como algo bastante impreciso, pois o valor da integral dupla dada poderá ser qualquer número real compreendido entre zero e vinte e quatro, objetivo pelo qual a seção se dispõe a conjecturar valores possíveis, pois refere-se a aproximações desde o seu início.

De forma análoga a tarefa 2, descrevemos as subtarefas com suas respectivas técnicas:

t' : calcular os valores da função de duas variáveis em um determinado ponto.

τ' : verificar a linearidade da função dada.

τ'' : substituir as coordenadas dos pares ordenados na função de duas variáveis.

t'' : verificar nos valores encontrados o menor (m) e o maior(M) valor.

t''' : calcular a medida da área da região formada pelos pares ordenados que representam os vértices.

τ''' : fazer o produto das medidas dos lados do retângulo formado.

t^4 : aplicar o teorema 18.1.8.

τ^4 : fazer o produto do menor valor pela medida da área, proceder de forma análoga com o maior valor encontrado.

τ^5 : substituir os valores no teorema.

A partir da solução descrita, uma segunda organização pontual foi originada, tal que: a tarefa t_2 é formada por quatro subtarefas, $t_2 = \{t', t'', t''', t^4\}$, que usam uma técnica (τ_2) constituída por cinco técnicas intermediárias, $\tau_2 = \{\tau', \tau'', \tau^3, \tau^4, \tau^5\}$, uma tecnologia e a mesma teoria.

Considerando as duas organizações matemáticas pontuais (OMP) apresentadas na primeira seção do livro, temos a primeira organização local (OML₁) que é constituída por $OML_1 = \{OMP_1; OMP_2\}$ que possui um tipo de tarefa (T), 23 tarefas (t), duas técnicas (τ_1 e τ_2), duas tecnologias empregadas (θ_1, θ_2) e uma teoria (Θ), representamos por $OML_1 = \{(t_1... t_{23}), (\tau, \tau_2), (\theta_1, \theta_2), \Theta\}$.

Pode-se observar que a linguagem dictarizada foi empregada nesta organização local, com aplicações de regras, normas, padrões da matemática que são comuns no registro e no significado atribuído à tecnologia e à teoria. Ao ser interpretada ela passa ser algo rotineiro em todas as tarefas, mobilizando poucas diferenças no desenvolvimento da técnica e das

tecnologias, por isso, entendemos que há nuances da linguagem em curso. Para a semiose, percebe-se que o ciclo de interpretações estagna nas soluções algorítmicas, pois ao responder e encontrar a solução favorecida pelo uso da técnica, da tecnologia e da teoria, a situação não extrapola para contextos mais amplos.

3.5.1 Análise da seção 18.2 do livro de Leithold

Na seção, Cálculo de Integrais duplas e Integrais iteradas, o autor compara o segundo teorema fundamental do cálculo das Integrais simples, com o desenvolvimento rigoroso de um método proveniente do curso de Cálculo Avançado (ele se refere ao uso do Teorema de Fubini, que se encontra no Anexo A deste texto, embora não registre tal informação). Ressalta que usará o método intuitivo para interpretar geometricamente a Integral dupla como medida de um volume. Em seguida, afirma que em uma integral iterada pode-se alterar a ordem de integração ($dx dy$ ou $dy dx$) sem modificar o resultado, mas para isso, a função deverá ser contínua na região retangular R .

Prossegue apresentando cinco tarefas resolvidas e 36 tarefas como atividade para os estudantes, mas mantém o tipo de tarefa da seção anterior, alterando as tarefas propostas. Entre os exemplos resolvidos 3 e 4 da página 1033, o autor registra que a medida da área de uma região R é expressa como uma Integral Dupla.

As tarefas de 1 a 14 do livro analisado, situados na página 1034 do volume 2, apresentam a mesma técnica (τ_3), composta por técnicas intermediárias:

τ' : integra em função de uma das variáveis.

τ'' : aplica o teorema fundamental do cálculo.

τ''' : integra a nova função em relação a outra variável.

τ^4 : aplica o teorema fundamental do cálculo.

τ^5 : obtém-se o resultado desejado.

Tal procedimento envolve duas tecnologias: a definição da Integral dupla usando as Integrais iteradas e o Teorema Fundamental do Cálculo. Verifica-se a permanência da mesma teoria. A OMP_3 é composta por $\{(t_1, \dots, t_{14}), \tau_3, (\theta_3, \theta_4), \Theta\}$

Para as atividades de 15 a 36 acrescenta-se à técnica a determinação dos domínios da função que não foram definidos, o que requer do interpretante alguns conhecimentos prévios

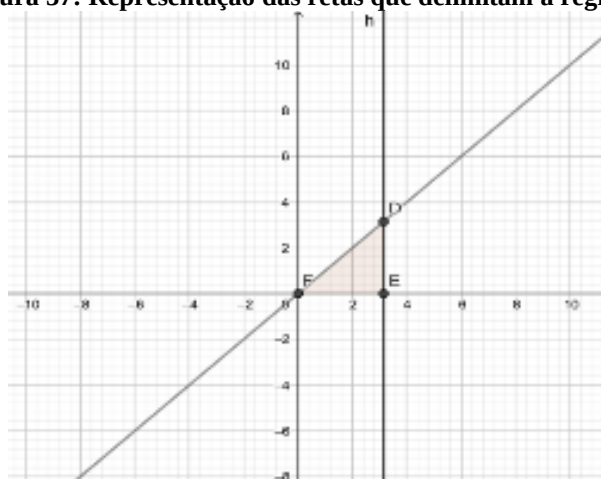
de funções de uma única variável, tais como: cálculo dos pontos de interseção das curvas representadas algebricamente; representação gráfica no plano cartesiano de uma função. Como ocorre na tarefa 16:

Nos exercícios de 11 a 18, ache o valor exato da integral dupla.

16. $\iint_R \cos(x + y) dA$; R é a região delimitada pelas retas $y = x$, $x = \pi$ e o eixo x .

Inicialmente, deve-se esboçar o gráfico das retas que delimitam a região R (Figura 37), para facilitar a visualização do domínio.

Figura 37: Representação das retas que delimitam a região R



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Na representação gráfica, a região R é delimitada em x pelos pontos E e F que possuem abscissas $x = 0$ e $x = \pi$, respectivamente. Desta feita, o domínio de integração da variável x é $0 \leq x \leq \pi$, enquanto para a variável y a região está delimitada pela interseção das retas com os pontos D e E, igualando a equação das retas definidas por $y = x$, $x = \pi$, teremos $y = \pi$. Pode ser visualizado na Figura 37, que o ponto E ou F tem ordenada igual a zero. A partir desses dados determinamos o domínio da função na variável y , cujo registro é dado por $0 \leq y \leq \pi$. Dispostos os domínios da função de duas variáveis podemos definir a Integral dupla expressa por $\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x + y) dA$ e proceder com a mesma técnica usada nas tarefas de 1 a 14.

Na praxeologia pontual as subtarefas e as técnicas respectivamente se resumem da seguinte forma:

t₄: achar o valor exato da integral dupla.

t': estabelecer o domínio da função de duas variáveis.

τ' : representar no plano cartesiano as retas fornecidas pela tarefa.

τ'' : verificar os valores extremos da região R, determinando os domínios para as variáveis x e y.

A subtarefa (t') origina t_4 .

$t_3 = t''$: calcular a integral.

τ' : integra em função de uma das variáveis.

τ'' : aplica o teorema fundamental do cálculo.

τ''' : integra a nova função em relação a outra variável.

τ^4 : aplica o teorema fundamental do cálculo.

τ^5 : obtém-se o resultado desejado.

A subtarefa t'' é proveniente da tarefa t_3 .

Na perspectiva da semiótica matemática cada um dos signos mobilizados na tarefa irá estabelecer vínculos entre o registro algébrico para o cálculo dos domínios com o registro gráfico, o que demanda do interpretante uma relação de semiose entre os signos e os objetos usados em ação. Percebe-se ainda que a tecnologia envolta na atividade permanece estável em relação as tarefas de 1 a 14. Conclui-se que a organização pontual é a $OMP_4 = \{(t_{15}, \dots, t_{36}), (\tau_3, \tau_4), (\theta_3, \theta_4), \Theta\}$

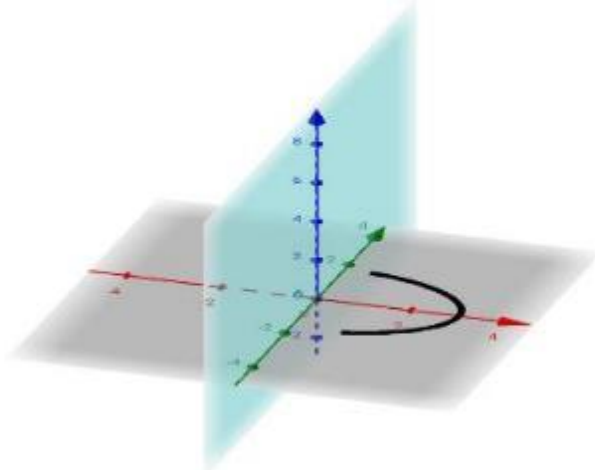
Nas tarefas de 19 a 36, para além da mesma técnica (τ_3), existem procedimentos que envolvem especificidades para as curvas que delimitam a região R, pois elas também são funções de várias variáveis, o que demanda subtarefas e técnicas intermediárias. Neste caso é necessário dividir a região R em n faixas com uma determinada largura Δy ou Δx unidades de comprimento, expressa por uma lei de formação que contém uma das variáveis (x ou y) e, registrar o domínio em função da lei de uma das curvas inicialmente fornecidas com os devidos ajustes, como será feito a seguir, na resolução da tarefa 22.

22. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - 3y^2$. Faça um esboço do sólido.

O primeiro octante tem todos os termos da terna com sinais positivos, isto é, os valores de $x > 0$, de $y > 0$ e de $z > 0$. Para uma melhor visualização do domínio da função, representamos o que ocorre com a função em cada plano, xy, xz e yz. Para o plano xy a coordenada z é igual a zero. Substituímos essa informação na função dada, representada algebricamente pela lei $x = \pm\sqrt{9 - 3y^2}$, como está situada no primeiro octante, então $x = 0$ e $x = \sqrt{9 - 3y^2}$ são os limites

inferior e superior da Integral do parabolóide em função de x , com $0 \leq x \leq \sqrt{9 - 3y^2}$. A Figura 38 traz a representação da função no plano xy .

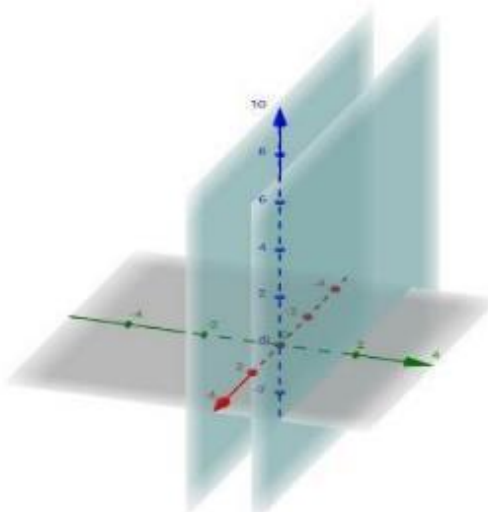
Figura 38: Representação do sólido no plano xy



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Para o plano yz a coordenada x é igual a zero. Substituindo na função $z = 9 - x^2 - 3y^2$, obtém-se $z = 9 - 3y^2$. Os valores de y que anulam z são $y = \sqrt{3}$ e $y = -\sqrt{3}$, como a curva está localizada no primeiro octante, então $y = \sqrt{3}$ e $y = 0$, valores que determinam o domínio do parabolóide com $0 \leq y \leq \sqrt{3}$. A Figura 39 apresenta a representação do sólido no plano yz .

Figura 39: Representação do sólido no plano yzx



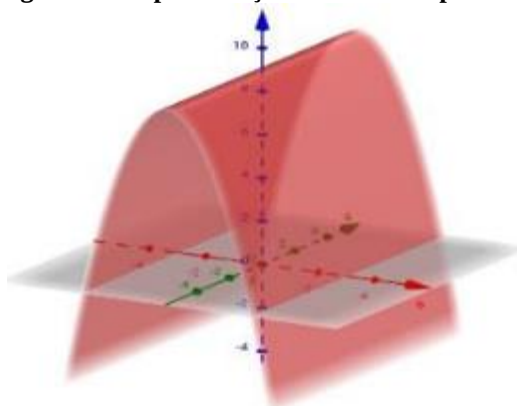
Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Com os domínios estabelecidos a Integral a ser calculada é expressa por $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{9-3y^2}} (9 - x^2 - 3y^2) dA$ que utilizará a mesma técnica das tarefas anteriores. Para essa tarefa temos a organização pontual, $OMP_5 = \{(t_{19}, \dots, t_{36}), (\tau_3, \tau_4), (\theta_3, \theta_4), \Theta\}$

Entretanto, a tarefa solicita o esboço do gráfico, o que faz necessário conhecer o comportamento da função no plano xz . A primeira condição é que os valores de y são iguais a

zero, fato que resulta em $z = 9 - x^2$, cuja representação gráfica no plano xz será uma parábola que intercepta o eixo x nos pontos $x = -3$ e $x = 3$, em decorrência da localização no primeiro octante, o x será igual a 3. Conforme representado na Figura 40.

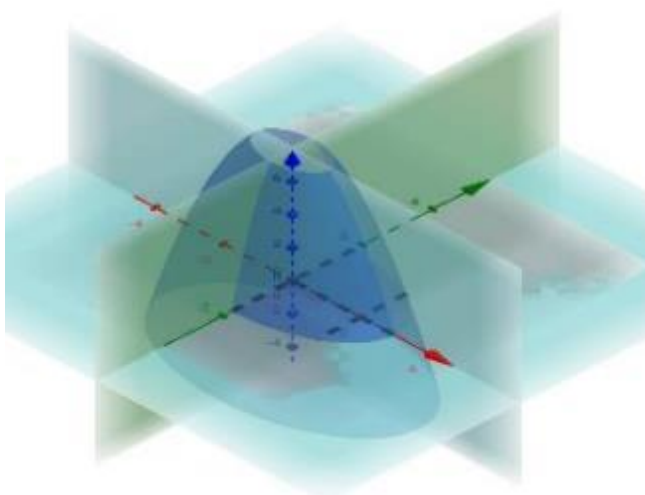
Figura 40: Representação do sólido no plano xz



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Munidos das representações gráficas da função nos planos xy , yz e xz e os seus domínios é possível fazer o esboço do sólido gerado, conforme solicitado na tarefa. Para isso, a representação gráfica (Figura 41) ocorrerá em um plano espacial tridimensional.

Figura 41: Representação gráfica do sólido



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

A solução anterior proposta para a tarefa 22 do livro nos permite analisar as praxeologias desenvolvidas. Apresentamos no Quadro 11 as tarefas e subtarefas mobilizadas para tal objetivo.

Quadro 11 – Tarefas, subtarefas e técnicas mobilizadas na tarefa 22

Tarefas (t) e Subtarefas (t', t'', ...)	Técnicas (τ' , τ'' , ...)
t_4 : Achar a medida do volume do sólido. t' : Estabelecer o domínio da função para cada variável.	τ' : Igualar x a zero na função de várias variáveis quando o referencial for o plano yz; de forma análoga, igualar y a zero para o plano xz e igualar z a zero, para o plano xy. τ'' : Com os valores encontrados determinar os domínios para cada variável; τ''' : Representar graficamente o comportamento da função de várias variáveis, separada em cada plano bidimensional.
$t_3 = t''$: Calcular a integral.	τ' : Integra em função de uma das variáveis; τ'' : aplica o teorema fundamental do cálculo; τ''' : integra a nova função em relação a outra variável; τ^4 : aplica o teorema fundamental do cálculo; τ^5 : obtém-se o resultado desejado.
t_5 : Esboçar o sólido.	τ' : construir o plano tridimensional; τ'' : localizar no plano 3D os domínios das funções; τ''' : unir as representações encontradas nos planos xy, yz e xz.

Fonte: Produção da autora

Do Quadro 11 pode-se verificar que ela é composta por t_3 , t_4 e t_5 tarefas e por duas subtarefas: t' e t'' . A subtarefa (t') origina t_4 . A partir dos pontos levantados em t_4 a tarefa t_3 surge como necessidade para prosseguir na solução de t_{22} . A subtarefa t'' é proveniente da tarefa t_3 , que por sua vez, complementa t_4 concluindo a primeira demanda da tarefa 22. Entretanto, outra tarefa é solicitada a t_5 que por meio das técnicas, τ' , τ'' , τ''' concluem a tarefa encontrando a solução.

Registramos que o eixo y está representado pela cor verde e limitado entre 0 e $\sqrt{3}$. O eixo x está representado pela cor vermelha e limita entre 0 e $\sqrt{9 - 3y^2}$ e o $z \geq 0$, a região R do primeiro octante é o sólido na cor azul, em destaque.

Em termos de tecnologia(θ), foram verificadas duas, a saber:

θ_3 : Teorema Fundamental do Cálculo.

θ_4 : Definição da Integral dupla e iterada.

A organização pontual OMP₆ descrita na tarefa 22 é semelhante a OMP₅ no que se refere as tecnologias, mas são diferentes na tarefa, nas subtarefas e nas técnicas.

Na análise das praxeologias destacamos que o processo semiótico de visualização em cada plano é uma opção do investigador principal desta tese, tal procedimento é justificado pela escolha do uso de lápis e papel para o esboço de gráficos ao lecionar a componente curricular CDI-III. Com essa afirmação, não minimizamos os efeitos benéficos que o uso de programas

computacionais gráficos pode proporcionar, principalmente, quando se trata da visualização de objetos em espaços tridimensionais. Porém, os obstáculos que se revelam pela instituição para a referida prática demandam buscar uma alternativa mais viável e menos dependente das burocracias vigentes.

Outro aspecto a ponderar é que “O confronto das diversas representações do mesmo objeto traz variáveis e escolhas icônicas motivadas pela ordem do raciocínio lógico” (BROUSSEAU, 2004, p.17, **tradução** nossa)⁷³. Nesse sentido, os signos icônicos - os diagramas e as imagens - são importantes para promover semelhanças entre o que irá ser representado algebricamente e graficamente, são eles que promoverão a relação entre o raciocínio e a sua representação. Mas, há rupturas acentuadas ao esboçar a representação gráfica, pois embora estamos situados em um espaço tridimensional em que os objetos se apresentam com largura, comprimento e altura, em nosso cotidiano não somos convocados visualmente a percebê-los em octantes, sistematizados por um plano com eixos coordenados. Essa percepção entre o que é visto no mundo e o que se representa graficamente na matemática tem uma distância cognitiva que permeia estabelecer uma rede de conhecimentos interligados necessários para efetuar a representação, que nem sempre é realizado pelos estudantes.

Na tarefa 22, os registros em planos distintos não garantem que os estudantes irão construir o esboço do gráfico, é necessário que o conhecimento e a intuição estejam aliados no processo de interpretação. Sobre isso, Brousseau (2004, p.15, **tradução** nossa)⁷⁴ desperta-nos que “o interesse das representações reside no que pode ser feito em um universo que não pode ser feito em outro”. Nesse sentido, um objeto se apresenta da forma que é por trazer signos semelhantes e característicos que determinam partes dos objetos, mas é no processo de interpretá-los para se formar o objeto como um todo que os obstáculos surgem. O estudante pode compreender cada representação em um plano bidimensional, entretanto, quando é necessário juntar as partes, faltam procedimentos que vão para além da representação, é necessário astúcia para extrapolar a percepção do espaço 2D para o 3D, um processo heurístico ou em termos semióticos, o uso do raciocínio abdutivo.

⁷³ La confrontation des diverses représentations données d'un même objet fait apparaître des variables iconiques et des choix motivés par des raisonnements d'ordre logique. (BROUSSEAU, 2004, p.17)

⁷⁴ *l'intérêt des représentations réside dans ce qui peut être fait dans un univers et qui ne peut pas être fait dans l'autre.* (BROUSSEAU, 2004, p.15, destaque do autor)

Do exposto acima há algo mais do que apenas transitar por registros, pois eles não garantem que os estudantes irão usar um raciocínio que demanda sintetizar todas as informações em uma só, para a construção de algo além do que já foi representado. É uma transformação que depende do sujeito e que consiste em um movimento de síntese e de esquemas mentais, aos quais os ícones desempenham um papel de conciliar os signos aos objetos em um processo de mediação com a situação e com o sujeito. Desta forma, “a função de representação deve responder apenas às necessidades do sujeito para sua ação” (BROUSSEAU, 2004, p. 13, **tradução nossa**)⁷⁵

O algo mais, ao qual referimos pode ser uma intuição, uma conjectura, a visualização, um *insight*, um conhecimento, um movimento com o papel, um gesto que permite interligar as representações com o esboço do gráfico. Assim, existe uma distinção entre a representação: como um objeto de ensino e como maneiras heurísticas a priori (BROUSSEAU, 2006). Para representar o esboço do gráfico da função de duas variáveis o estudante precisa usar de algumas representações a priori que, em conjunto com os diversos conhecimentos da situação, facultam o sujeito mobilizar a ação.

O centro de massa e os momentos de inércia contribuíram para a solução da questão aberta do PEP, por esse motivo, faremos a análise da seção 18.3 do livro de Leithold, em que consta tal abordagem.

3.5.2 Análise da seção 18.3 do livro de Leithold

Na seção 18.3, da página 1035 do livro analisado, o autor registra que o cálculo do centro de massa e o momento de inércia das Integrais simples e das Integrais duplas, se diferem quanto à densidade da massa por unidade de área, enquanto para a primeira, ela é constante em toda a lâmina, para a segunda ela será não homogênea.

Em seguida, explica que para encontrar a massa total da lâmina terá que considerar uma partição da região retangular fechada, R . Tomar um ponto qualquer (ξ_i, γ_i) do i -ésimo retângulo de área $\Delta_i A$ realizar uma aproximação da medida da massa fazendo o produto do valor do ponto (ξ_i, γ_i) substituído na função pelo $\Delta_i A$, representado por $\rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$. Fazendo tal procedimentos com todas as partições de R , a medida da massa da lâmina será dada pelo limite do somatório desses produtos quando a partição (Δ) tender a zero, representado algebricamente

⁷⁵ La fonction de la représentation ne doit répondre qu'à des besoins du sujet pour son action. (BROUSSEAU, 2004, p. 13)

por $\lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i; \gamma_i) \Delta_i A$, que em conformidade com a definição da Integral dupla em R , pode ser registrado por $M = \iint_R \rho(x, y) dA$, na região R .

Descreve ainda que a medida do momento de massa poderá ser calculada em relação aos eixos x e y . Entretanto, quando se referir à medida do momento de massa em relação ao eixo x da lâmina a função de duas variáveis deverá ser multiplicada por y , representada por $M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA$. De forma análoga, quando se quer determinar a medida do momento de massa em relação ao eixo y o produto também será feito com a variável x . Assim, $M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA$. Para o cálculo do centro de massa, representado pelo par ordenado $(\bar{x}, \bar{y})$, basta dividir o valor da medida do momento de inércia para cada plano, pela medida da massa da lâmina.

O autor resolve um exemplo aplicando a tecnologia descrita anteriormente e, imediatamente, dá a definição para o momento de inércia e logo depois a estende para o cálculo da medida do momento de inércia em torno: do eixo x , do eixo y , da origem e o momento de inércia polar. Resolve dois exemplos envolvendo o momento de inércia e registra a definição do raio de giração, aplicando-o em um exemplo e resolvendo-o.

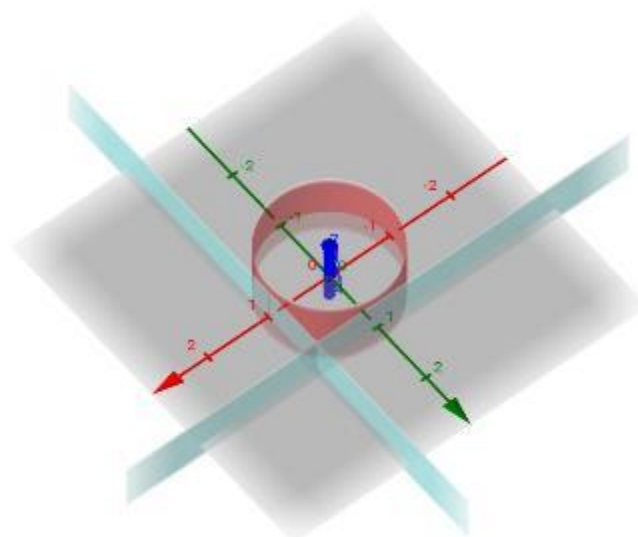
Constata-se naquela seção a existência de 29 tarefas, seis técnicas, sete tecnologias e uma teoria. Entretanto, para o enunciado abaixo a tarefa não se alterava, mas as doze subtarefas eram diferentes; na solução delas foi identificado que a técnica, a tecnologia e a teoria eram sempre as mesmas.

Nos exercícios de 1 a 12, ache a massa e o centro de massa da lâmina, se a densidade de massa por unidade de área for a indicada. A massa é medida em quilograma e a distância em metros.

12. A lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelas retas $x = 1$ e $y = 1$. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $xy \text{ kg-m}^2$.

Para resolver a situação é necessário conhecer os domínios da função de duas variáveis. Optamos em iniciar a solução pelo esboço do gráfico, registrado na Figura 42, que sob o nosso ponto de vista favorece a visualização dos limites.

Figura 42: Região delimitada entre a circunferência e as retas



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Na representação é possível visualizar que a função está limitada pela circunferência e pelas retas no primeiro octante (considerando o gráfico em 3D) ou no primeiro quadrante (considerando o plano xy). O Teorema para a Integral iterada nos permite escolher a variável a qual calcularemos primeiramente. Então, optamos por exprimir a equação $x^2 + y^2 = 1$ em função da variável y , escrita na forma $x = \sqrt{1 - y^2}$, pois localiza-se no primeiro octante. Em conformidade, o domínio da integração para a variável x será o intervalo de $0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$. Para a variável y , verificamos que os valores a serem considerados estão no intervalo real, $0 \leq y \leq 1$. A medida da massa poderá ser calculada pela Integral dupla substituindo aqueles intervalos do domínio:

$$M = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 xy \, dx \, dy$$

$$M = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 xy \, dx \, dy$$

$$M = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{1-y^2}}^1 y \, dy$$

$$M = \frac{1}{2} \int_0^1 y(1 - (1 - y^2)) \, dy$$

$$M = \frac{1}{2} \int_0^1 y^3 \, dy$$

$$M = \frac{1}{8} \text{ kg-m}^2$$

Para o cálculo do centro de massa procedemos de forma análoga, usando o cálculo da Integral dupla, com a função sendo multiplicada por uma das variáveis a depender do eixo trabalhado.

Para o eixo de x, o momento de massa é representado por:

$$M_x = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 y[xy] dA$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 xy^2 dA$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 [x^2]_{\sqrt{1-y^2}}^1 dy$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 [1 - (1 - y^2)] dy$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 y^4 dy$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 y^4 dy$$

$$M_x = \frac{1}{2} \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^1$$

$$M_x = \frac{1}{10}$$

A coordenada x do centro de massa é calculada por $\bar{x} = \frac{M_x}{m}$. Substituindo os valores obtidos temos $\bar{x} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{8}}$ fazendo as operações $\bar{x} = \frac{4}{5}$. De forma análoga, e usando a definição de Integral iterada para funções contínuas, ao qual garante que ao mudar a variável de integração não se altera o resultado, temos então: $M_y = \frac{4}{5}$ para $\bar{y} = \frac{M_y}{m}$ cujo resultado também é $\bar{y} = \frac{4}{5}$. Assim, o centro de massa é $\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Justificando a praxeologia desenvolvida na tarefa, percebe-se o uso de cinco tecnologias (θ):

θ_3 : Definição da Integral dupla e iterada

θ_4 : Teorema Fundamental do Cálculo;

θ_5 : Definição da medida da massa de uma lâmina

θ_6 : Definição do momento de massa em relação aos eixos

θ_7 : Definição do centro de massa;

No Quadro 12 apresentamos as subtarefas e as técnicas necessárias para resolver a tarefa.

Quadro 12 – Tarefas e técnicas usadas em t_4

Tarefas (t) e Subtarefas (t', t'', ...)	Técnicas (τ', τ'', ...)
t_4 : Calcular o centro de massa t' : Estabelecer o domínio da função para cada variável;	τ' : Representar graficamente no plano xy a circunferência e as retas. τ'' : Identificar o domínio a partir da representação;
t'' : Encontrar o valor da medida da massa	τ'' : Substituir os domínios na Integral Dupla τ^4 : Integrar usando a definição de integração τ^5 : Aplicar o teorema Fundamental do cálculo τ^6 : Resolver as operações aritméticas.
t''' : Encontrar a medida dos momentos de inércia	τ^7 : Multiplicar a expressão da lei da função pela variável x, procedendo da mesma forma para a variável y. Repete-se as técnicas τ^4 , τ^5 e τ^6 .

Fonte: Produção da autora

O procedimento é análogo para o cálculo da medida do momento de massa na variável y. Seguimos descrevendo a subtarefa (t^4):

t^4 : calcular o centro de massa.

τ^8 : dividir o momento de massa de cada eixo pelo valor da medida da massa.

τ^9 : expressar o centro de massa como um par ordenado das duas variáveis.

Verifica-se na análise da tarefa que a $OMP_7 = \{t, (\tau_3, \dots, \tau_4), (\theta_1, \dots, \theta_7), \Theta\}$ aumenta o número de técnicas e tecnologias e permanece na mesma teoria. Em termos da análise Semiótica peirceana há um predomínio de representações signícas, por intermédio dos símbolos mobilizando as regras. Os significados giram em torno dos conhecimentos provenientes do campo matemático. A linguagem é dictarizada e em curso, não há indícios de uma linguagem contrafactual, visto que, a tarefa está envolta em procedimentos algoritmizáveis, sem necessidade de criar nenhuma relação com contexto fora da situação inicialmente proposta.

Inferimos que se perde, em termos didáticos, de configurar uma rede de relações com outros campos de conhecimento em que tais conceitos são aplicados, como: na Física, nas

Engenharias, na Arquitetura. Tal posicionamento favorecerá os estudantes para terem uma visibilidade maior da aplicação daquelas tecnologias.

Para as praxeologias usadas em torno do momento de inércia descrevemos a seguir, os procedimentos para solução da tarefa 19, da página 1040 do livro:

Nos exercícios de 19 a 22 ache para a lâmina dada, cada um dos segmentos: (a) o momento de inércia em torno do eixo x ; (b) o momento de inércia em torno do eixo y ;

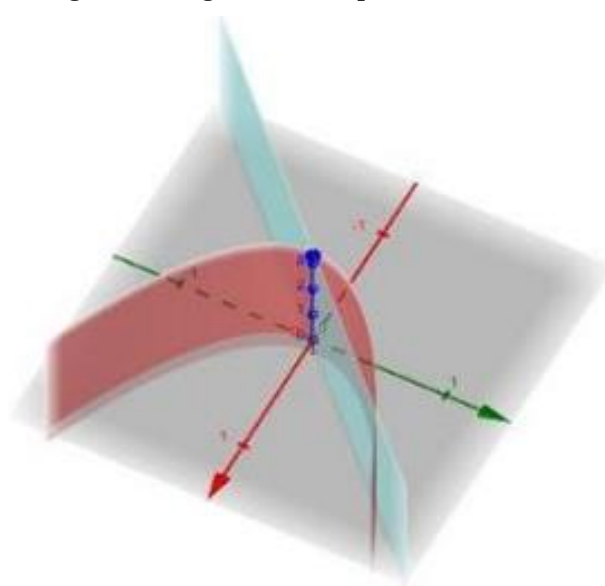
(c) o raio de giração em torno do eixo x ; (d) o momento polar da inércia.

19. A lâmina do exercício 10.

10. A lâmina na forma da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pela reta $y = x$. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância ao eixo y .

Inicialmente deixaremos a curva em função de x , $x = y^2$ (tal escolha é apenas para economia de procedimentos ao resolver a integral dupla). Calculamos os pontos de interseções entre a curva e a reta, igualando as funções, $y^2 = y$. A solução da equação polinomial do segundo grau incompleta origina os valores de y que anulam a equação: $y=0$ e $y=1$, estabelece-se a partir deles o domínio da função em relação a variável y é $0 \leq y \leq 1$. No entanto, para o domínio da função em relação a variável x será a região localizada abaixo da reta e acima da curva: $y^2 \leq x \leq y$, destacada na representação gráfica da curva e da reta, na Figura 43.

Figura 43: Região limitada pela curva e a reta



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Determinado os domínios das variáveis, pode-se calcular o momento de inércia utilizando a Integral dupla e variando o produto da função de duas variáveis pelo quadrado da variável correspondente ao eixo que se quer trabalhar. Assim, para a letra:

$$I_x = \int_0^1 \int_{y^2}^y y^2 kx \, dx dy = \frac{k}{2} \int_0^1 x^2 y^2 \Big|_{y^2}^y dy = \frac{k}{2} \int_0^1 (y^4 - y^6) dy = \frac{k}{35} \text{ kg-m}^2$$

$$I_y = \int_0^1 \int_{y^2}^y x^2 kx \, dx dy = \frac{k}{2} \int_0^1 x^3 \Big|_{y^2}^y dy = \frac{k}{2} \int_0^1 (y^4 - y^8) dy = \frac{k}{45} \text{ kg-m}^2$$

Primeiro calculamos a medida da massa:

$$M = \int_0^1 \int_{y^2}^y kx \, dx dy = \frac{k}{2} \int_0^1 x^2 \Big|_{y^2}^y dy = \frac{k}{2} \int_0^1 (y^4 - y^2) dy = \frac{k}{15} \text{ kg-m}^2$$

$$\text{O raio giratório é calculado por } r^2 = \frac{I_x}{M} = \frac{\frac{k}{35}}{\frac{k}{15}} = \sqrt{\frac{15}{35}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ m.}$$

O momento de inércia polar é dado pela soma dos momentos de inércia em torno dos eixos: $I_0 = I_x + I_y = \frac{k}{35} + \frac{k}{45} = \frac{16k}{315} \text{ kg-m}^2$

Em termos de praxeologia a tarefa preserva semelhanças com a tarefa anterior:

θ_3 : Definição da Integral Dupla e iterada

θ_4 : Teorema Fundamental do Cálculo;

θ_5 : Definição da medida da massa de uma lâmina

θ_6 : Definição do momento de inercia em relação aos eixos e polar

θ_7 : Definição do raio rotacional;

O Quadro 13 sintetiza as tarefas e técnicas usadas na atividade 19.

Quadro 13 – Tarefas, subtarefas e técnicas da atifidade 19

Tarefas (t) e subtarefas (t', t'', ...)	Técnicas associadas
t: Calcular o momento de inércia	τ' : Representar graficamente no plano xy a circunferência e as retas
t': Determinar o domínio para cada variável da função.	τ'' : Identificar o domínio a partir da representação;
t'': Encontrar o valor da medida da massa	τ^3 : Substituir os domínios na Integral Dupla τ^4 : Integrar usando a definição de integração τ^5 : Aplicar o Teorema Fundamental do cálculo τ^6 : Resolver as operações aritméticas.
t''': Encontrar a medida dos momentos de inércia	τ^7 : Multiplicar a expressão da lei da função pela variável x^2 , procedendo da mesma forma para a variável y. Repete-se as técnicas τ^4 , τ^5 e τ^6 .
t ⁴ : Encontrar o raio rotacional	τ^8 : Dividir o momento de inércia em torno do eixo x pela medida da massa.
t ⁵ : Determinar o valor do momento de inércia polar	τ^9 : Somar os valores dos momentos de inércia dos eixos x e y

Fonte: Produção da autora

A praxeologia pontual OMP_8 é composta de uma tarefa, cinco subtarefas, nove técnicas e cinco tecnologias, representada assim: $OMP_8 = \{(t_{19}, \dots, t_{25}), (\tau^1, \dots, \tau^5), (\theta_3, \dots, \theta_7), \Theta\}$.

Na análise das tarefas propostas na seção 18.3 do livro, verificamos que a organização praxeológica regional é formada por organizações pontuais que primam pela aplicação direta das tecnologias desenvolvidas no texto, tomando algumas subtarefas e técnicas intermediárias para chegar ao resultado. Como relatado, há um predomínio da linguagem dictarizada e em curso, que se justificam pela presença de símbolos, regras e algoritmos.

Na análise semiótica a interpretação das semioses mobilizadas na execução da tarefa proposta é conhecer os signos (as representações), usar os objetos dinâmicos correspondentes, operar com os resultados e chegar ao significado: uma medida. Não demanda do sujeito que mobilize conhecimentos exterior ao campo da matemática, o que traz um grande prejuízo para os estudantes de áreas afins que aplicam essas tecnologias como ferramentas para a execução dos seus trabalhos.

3.5.3 Análise da seção 18.4.

A seção é iniciada mostrando como a Integral dupla de uma função de duas variáveis localizada em uma região fechada, pode ser indicada em coordenadas polares. Para esse intuito, descreve uma região R limitada por raios, ângulos e circunferências atribuindo variáveis quaisquer. Depois faz uma partição (Δ) da região traçando raios e circunferências com centro na origem do plano cartesiano originando uma malha de sub-regiões, denominado de retângulos curvos. A partir das partições calcula-se n números de sub-regiões com a medida da área do i -ésimo retângulo curvo, expresso por $\Delta_i A = r_i \Delta r \Delta_i \theta$. O somatório de todos os retângulos curvos é dado por $\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta r \Delta_i \theta$. Se f for contínua na região R , então o limite dessa soma quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ será escrita pela Integral dupla $\iint_R f(r, \theta) dr d\theta$. Em seguida, o autor registra que podemos interpretar a Integral dupla de uma função de n variáveis em uma região fechada no plano coordenado polar como a medida do volume do sólido, usando coordenadas cilíndricas. E então, descreve as partições de R construindo n sólidos de base formada pelos retângulos curvos e como medida de sua altura, $f(r, \theta)$, onde (r_i, θ_i) está na i -ésima sub-região. A soma das medidas dos volumes das sub-regiões será expressa por: $\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta r \Delta_i \theta$, aplicando o limite dessa soma quando a partição tende a zero $\|\Delta\| \rightarrow 0$, obtém-se o volume total, registrado por: $V = \iint_R f(r, \theta) dr d\theta$.

Após a explicação, o autor dá cinco exemplos respondidos e 28 tarefas, das quais escolheremos de forma aleatória para a análise praxeológica, as tarefas 4 e 7.

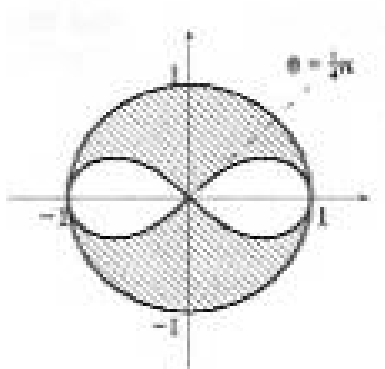
A tarefa 4 da seção 18.4 tem o seguinte enunciado:

Nos exercícios de 1 a 6, use integrais duplas para encontrar a área da região dada.

4. A região dentro da circunferência $r = 1$ e fora da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.

Para calcular o domínio da função determinamos os valores do limite para o ângulo θ , para isso resolve-se a equação $\cos 2\theta = 0$, uma das soluções estará no primeiro quadrante, com $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianos, o intervalo real é $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. A Figura 44, representa graficamente a região interna da circunferência.

Figura 44: Representação gráfica da região interna a circunferência



Fonte: www.pt.slideshare.net

A região R está limitada entre $r = 0$ e $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, em decorrência, a medida da área de R é expressa por: $A = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta = \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$. Como a área da lemniscata compreende quatro regiões, então $4A = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

E a área do círculo é πm^2 , então a região dentro da circunferência e fora da lemniscata é a diferença da área da circunferência pela lemniscata $(\pi - 1) m^2$.

As subtarefas e as técnicas necessárias para resolver a tarefa, são apresentadas no Quadro 14. As tecnologias empregadas foram a definição da integral dupla (θ_3) e o teorema fundamental do cálculo (θ_4). A organização pontual, $OMP_8 = \{t, (\tau', \dots, \tau^9), (\theta_3, \theta_4), \Theta\}$ não traz elementos de análise diferenciados em relação às tarefas anteriores.

Quadro 14 – Tarefas, subtarefas e técnicas da tarefa 4

Tarefas (t) e subtarefas (t', t'', ...)	Técnicas associadas
t: Calcular a área da região dentro da circunferência $r = 1$ e fora da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.	τ^1 : Representar graficamente no plano xy a circunferência e as retas
t': Determinar o domínio para cada variável da função.	τ^2 : Identificar o domínio a partir da representação;
t'': Encontrar o valor da medida da área	τ^3 : Substituir os domínios na Integral Dupla τ^4 : Integrar usando a definição de integração τ^5 : Aplicar o Teorema Fundamental do cálculo τ^6 : Resolver as operações aritméticas τ^7 : Multiplicar o resultado da medida da área por quatro, pois a região R pertence aos quatro quadrantes. τ^8 : Calcular a área da circunferência τ^9 : Subtrair da área da circunferência a área de lemniscata

Fonte: Produção da autora

A análise semiótica da tarefa mostra que a representação gráfica auxilia na interpretação do sujeito no que se refere a totalidade da área distribuída nos quatro quadrantes do plano cartesiano. Tal feito produz ao interpretante a necessidade de multiplicar a medida da área encontrada por quatro.

Como a seção trata das Integrais Duplas em coordenadas polares, optamos em escolher uma tarefa cujas variáveis da função estão expressas em coordenadas cartesianas, com o intuito de revisar tais conhecimentos, a saber:

27. Calcule por coordenadas polares a integral dupla $\iint_R e^{x^2+y^2} dA$, onde R é a região limitada pelas circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$.

Tomemos da função de várias variáveis o expoente da base neperiana, $x^2 + y^2$, e comparando com a definição da equação da circunferência, temos a igualdade $r^2 = x^2 + y^2$, o que auxilia na primeira transformação das coordenadas retangulares para a polar. A segunda diz respeito a região R limitada pelas duas circunferências: a primeira de raio unitário e a segunda de raio igual a 3 unidades de comprimento, esses dados determinam o domínio da função em relação a variável r, sendo expressa por $1 \leq r \leq 3$. Como a circunferência cobre todo o plano cartesiano então o ângulo θ , está situado no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Substituindo esses dados na integral dupla, encontramos: $\iint_R e^{x^2+y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_1^3 e^{r^2} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{r^2} \Big|_1^3 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^9 - 1) d\theta = \frac{(e^9-1)}{2} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = (e^9 - 1)\pi$.

A tarefa demandou as subtarefas e técnicas que registramos a seguir.

t': Determinar o domínio para cada variável da função.

τ' : Transformar o expoente da função de várias variáveis da base neperiana de coordenadas cartesianas para polares.

τ'' : Identificar os raios das circunferências e a variação do ângulo θ .

t'' : Calcular a Integral dupla

τ''' : Substituir os valores do domínio

τ^4 : Colocar a função em coordenadas polares

τ^5 : Usar o método da substituição para integrais duplas

τ^6 : Usar o teorema fundamental do cálculo

τ^7 : Operar aritmeticamente.

A praxeologia pontual $OMP_9 = \{(t', t''), (\tau', \dots, \tau^7), (\theta_3, \dots, \theta_4), \Theta\}$ é formada por uma tarefa composta de duas subtarefas, sete técnicas e quadro tecnologias: definição da integral dupla (θ_3), teorema fundamental do cálculo (θ_4), o método da substituição (θ_5) e as definições de coordenadas polares (θ_6) e a mesma teoria.

O enunciado da tarefa solicita calcular por coordenadas polares a integral dupla, o que direciona o interpretante a usar delas. No entanto, nos indagamos se não houvesse essa informação no enunciado quais conhecimentos seriam mobilizados pelo estudante que os levariam a solução por coordenadas polares?

Ao longo da seção o autor não deixa explícito que a Integral Dupla por coordenadas polares reduz o número de técnicas mobilizadas quando comparadas com as coordenadas cartesianas. Outro aspecto a ponderar diz respeito ao seu uso associado a limitação da região R por uma circunferência.

3.5.4 Análise da seção 18.5

Intitulada como: área de uma superfície, a seção traz na primeira linha o objetivo de se trabalhar com esse tema, a saber: “A integral dupla pode ser usada para determinar a medida da área de parte da superfície $z = f(x, y)$ que está acima de uma região R , no plano xy ” (LEITHOLD, 1990, p.1045). Em seguida, mostra como “obter uma fórmula para calcular a medida da área da superfície” (p.1045-1046) usando uma representação gráfica de z no plano tridimensional.

Ao usar os procedimentos técnicos obtém a “fórmula”, o autor introduz conceitos advindos do modelo epistemológico de Ostrogradski, que havíamos descrito neste capítulo, tais como: derivadas parciais, vetores, produto vetorial, matrizes, determinantes. Ainda, nos

despertou a atenção do uso da medida da área do paralelogramo, quando afirma: “achamos uma fórmula para calcular $\Delta_i\sigma$ como a medida da área do paralelogramo” (LEITHOLD, 1990, p.1046). Em parágrafos anteriores o autor ao descrever uma partição de uma região R , em sub-regiões retangulares registra suas dimensões por $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$ e que ao projetar verticalmente um i -ésimo retângulo sobre o plano tangente, o $\Delta_i\sigma$ é a medida dessa projeção. Prossegue afirmando que $\Delta_i\sigma$ é uma aproximação da medida da área da parte superior da superfície do i -ésimo retângulo, aplicando os conceitos de limite e somatório.

No delinear dessa construção é que o autor faz uso do estudo dos vetores para chegar ao teorema do cálculo da medida da área da superfície $z = f(x, y)$. Recorre a três exemplos respondidos para mostrar o uso da “fórmula” aplicada. Destacamos que o exemplo 2 da página 1047, mobiliza conhecimentos sobre a Superfície Quádrica ao solicitar no enunciado: “ache a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$ ” (LEITHOLD, 1990, p.1407).

O estudo das Superfícies Quádricas foi exposto no volume 1, capítulo 15. Por ser um suposto conhecimento prévio o autor apenas aplica, sem preocupações em fazer uma abordagem sintética, mesmo que fosse no apêndice do livro.

Para finalizar a parte teórica da Integral dupla, o autor busca construir elementos que comprovem o teorema da medida da área de uma superfície de revolução, que expõe ao final da página 1049, aplicando-o em um exemplo envolvendo o parabolóide de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x .

Em seguida, propõe 25 exercícios cuja tarefa é calcular a medida da área da superfície, originada por uma região fechada ou pela revolução de uma curva em torno de um eixo. Das tarefas propostas, escolhemos a de números 20 e 24, cujo critério de seleção está diretamente relacionado com os objetos matemáticos mobilizados para o estudo da tese: a Catenária, as Superfícies Quádricas e a Integral. Apresentamos, a seguir, o registro escrito da tarefa 20:

Ache a área da superfície de revolução obtida girando-se a catenária $y = \operatorname{acosh}(x/a)$ de $x = 0$ até $x = a$, em torno do eixo x .

Calcula-se inicialmente a derivada da lei que define a função $f(x) = \operatorname{acosh}(x/a)$, que é igual a $f'(x) = \sinh(x/a)$. Em seguida aplica-se o Teorema 18.5.2⁷⁶,

⁷⁶ Teorema 18.5.2: Suponha que a função f seja positiva em $[a, b]$ e f' seja contínua em $[a, b]$. Se σ for a medida da área da superfície de revolução obtida girando-se a curva $y = f(x)$, com $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , então: $\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx$

$$\begin{aligned}
\sigma &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} \, dx = 2\pi \int_0^a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) + 1} \, dx \\
&= 2\pi \cdot a \int_0^a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \, dx \\
&= 2\pi a \int_0^a \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) \, dx \\
&= 2\pi a \int_0^a 1 + \cosh\left(\frac{2x}{a}\right) \, dx \\
&= \pi a \left[x + \frac{1}{2} a \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) \right]_0^a \\
&= \pi a \left(1 + \frac{1}{2} a \sinh 2 \right) \text{ u.a}
\end{aligned}$$

Conclui-se que a medida da área da superfície é igual a $\pi a \left(1 + \frac{1}{2} a \sinh 2 \right)$ unidades de área.

Vamos analisar as praxeologias correspondente a tarefa:

t': Calcular a derivada da função

τ' : igualar x/a , a uma variável qualquer;

τ'' : derivar implicitamente em relação a variável qualquer e em relação a x .

τ''' : substituir na função $f(x)$;

τ^4 : Derivar a função em função da variável qualquer

τ^5 : substituir a variável qualquer por x .

t'': Calcular a medida da área da catenária

τ^6 : Substituir as funções $f(x)$ e $f'(x)$ no σ ;

τ^7 : Usar a fórmula do arco dobro de funções trigonométricas

τ^8 : Escrever $\cosh^2(x/a) = 1 + \cosh(2x/a)$ na integral

τ^9 : Integrar usando o método da substituição

τ^{10} : Usar o teorema fundamental do cálculo

τ^{11} : operar aritmeticamente

Do exposto acima a organização pontual é formada por $OMP_9 = \{(t', t''), (\tau', \dots, \tau^{11}), (\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6), \Theta\}$, que consiste em uma tarefa que utiliza de duas subtarefas para desenvolver onze técnicas em torno de quatro tecnologias – derivada implícita, método da substituição, teorema fundamental do cálculo, medida da área da superfície - que são justificadas pela mesma teoria.

Na tarefa 20 o uso da Integral demanda buscar os conhecimentos de outro objeto matemático, a derivada. Isso se justifica pela própria ecologia dos saberes, em que um conhecimento matemático “alimenta” outro conhecimento matemático. Na semiótica peirceana esse fato justifica-se pelo processo semiótico em que o signo após passar por uma semiose, se transforma em outro signo que de novo promove uma nova semiose.

Se tratarmos de observar o desenvolvimento das técnicas usadas para resolver a tarefa, perceberemos que foram sendo acrescentadas novos signos, objetos distintos e interpretações do sujeito para chegar até uma resposta. Todas as técnicas foram justificadas pelas tecnologias da mesma teoria.

Finalizado a praxeologia da tarefa anterior, descrevemos na sequência o aparato praxeológico mobilizado para a solução da tarefa 24 da página 1050, que tem como enunciado: Ache a área da superfície delimitada pelo parabolóide hiperbólico $y^2 - x^2 = 6z$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 36$.

Vamos escrever a função de duas variáveis em função da variável z , então $z = \frac{1}{6}(y^2 - x^2)$, as derivadas parciais são: $f_x(x, y) = -\frac{1}{3}x$ e $f_y(x, y) = \frac{1}{3}y$. Do teorema 18.5.1⁷⁷, colocaremos a parte da raiz de σ em coordenadas polares: $\sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} = \sqrt{\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{9}(x^2 + y^2) + 1} = \sqrt{\frac{1}{9}r^2 + 1}$.

Em seguida, da equação da circunferência encontramos que o raio é 6 u.c. e como passa pela origem então o limite de integração para o raio é $0 \leq x \leq 6$, para o ângulo da região R , iremos considerar de $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Aplica-se o teorema 18.5.1 substituindo as derivadas parciais e os domínios das coordenadas polares r e θ :

⁷⁷ Teorema 18.5.1: Suponhamos que f e suas derivadas parciais sejam contínuas na região fechada R , no plano xy . Então, se σ for a medida da área da superfície $z = f(x, y)$ que está sobre R .

$$\sigma = \int_0^6 \int_0^{2\pi} r \sqrt{\frac{1}{9}r^2 + 1} dr d\theta$$

$$\sigma = \int_0^6 r \left(\sqrt{\frac{1}{9}r^2 + 1} \right) [\theta]_0^{2\pi}$$

$$\sigma = 2\pi \int_0^6 r \sqrt{\frac{1}{9}r^2 + 1} dr$$

$$\sigma = 6\pi \left[\sqrt{\left(\frac{1}{9}r^2 + 1\right)^3} \right]_0^6$$

$$\sigma = 6\pi(5\sqrt{5} + 1) \text{ u.a.}$$

Da solução da tarefa 24, pode-se verificar que:

t': Calcular as derivadas parciais da função

τ': Usar a derivada para funções com expoentes;

τ'': Derivar em função de x e depois em função de y

t'': Escrever a função em coordenadas polares

τ''': Substituir as derivadas parciais apenas para o cálculo da raiz em σ

τ⁴: Fazer as operações aritméticas

τ⁵: Escrever $x^2 + y^2 = r^2$

t''': Determinar o domínio das coordenadas polares

τ⁶: usar a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 6^2$ para obter o intervalo do raio.

τ⁷: analisar o θ como o ângulo total da circunferência de centro na origem.

t⁴: Calcular a medida da área da superfície: $\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dx dy$

τ⁸: substituir o domínio e a raiz em coordenadas polares em σ

τ⁹: integrar em relação a θ

τ¹⁰: aplicar o teorema fundamental do cálculo

τ¹¹: usar o método da substituição para integrais

τ^{12} : integrar em função do raio

τ^{10} : aplicar o teorema fundamental do cálculo

τ^4 : Fazer as operações aritméticas

A praxeologia pontual $OMP_{10} = \{(t', \dots, t^4), (\tau', \dots, \tau^{12}), (\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_7, \theta_8, \theta_9), \Theta\}$ é constituída de uma tarefa com quatro subtarefas, doze técnicas, seis tecnologias – derivada do expoente, derivadas parciais, coordenadas polares, teorema fundamental do cálculo, método da substituição, medida da área da superfície – e uma mesma teoria.

Constata-se ao final do capítulo 18, na parte referente a Integral Dupla um total de 150 tarefas, dividida em cinco seções, ou cinco organizações locais, analisamos duas tarefas em cada uma delas, totalizando 10 organizações pontuais.

No que tange ao número de tarefas verifica-se que em cada praxeologia pontual a tarefa se divide em algumas subtarefas que corroboram para a aplicação de técnicas. No total das 10 praxeologias pontuais identificamos: de duas a cinco subtarefas que aplicaram de cinco a doze técnicas, justificadas por nove tecnologias.

Para a tecnologia observa-se que, com exceção da seção 18.1, todas as demais usam a definição da integral dupla iterada (θ_4) e o teorema fundamental do cálculo (θ_4). A técnica de representar graficamente o domínio da função de várias variáveis e determiná-lo esteve presente em sete das dez tarefas analisadas. O método da solução de integrais por substituição de variáveis, ocorre com frequência nas técnicas mobilizadas ao responder as tarefas.

O autor é um matemático e professor americano que ao escrever o livro usou e interpretações variadas que modificaram o modelo epistemológico acerca da integral dupla, tal afirmação pode ser constatada ao compararmos com o modelo epistemológico de Ostrogradski. Esse fato, foi previsto por Chevallard (1980) quando afirma que mudando a instituição muda-se algumas características do saber.

Ocorre de forma análoga, a interpretação dos enunciados das tarefas conduzidas pela investigadora da tese, ao fazer a sua própria transposição didática, usando a linguagem escrita, formal e simbólica para descrever a solução conforme ia criando esquemas mentais e registros escritos. A quantidade de subtarefas e de técnicas podem ser reduzidas ou ampliadas a depender das relações estabelecidas pelo sujeito, com outros objetos matemáticos. Entretanto, as tecnologias e as teorias para o capítulo, mantêm-se menos flexíveis, visto que o objetivo a que se dispõem a maioria das seções é o emprego da definição da Integral dupla.

Na análise semiótica, constatamos que os objetos matemáticos são empregados de forma a contemplar procedimentos padronizados no âmbito simbólico das regras matemáticas, sem extensão para outros campos do conhecimento. Não emergem das tarefas um raciocínio mais elaborado, ou que conduza a interpretações distintas com o intuito de produzir novos conhecimentos ou relacioná-los com os adquiridos. As técnicas são padronizadas, como se fossem “receitas” e segui-las garantem o resultado para a tarefa.

Quanto às semioses, inferimos que elas sofrem um processo de interrupção brusca em todas as tarefas propostas, pois ao obter o resultado o ciclo da semiose se finaliza, não produzindo matematicamente ou fora da área, nenhuma outra interpretação.

No que concerne a subtarefa: determinar o domínio da função de várias variáveis verifica-se um predomínio da representação gráfica nos planos x e y como uma técnica, que promove a visualização dos limites da integração da função. Entretanto, suscitamos a partir da nossa experiência profissional que a mobilização dos signos que se concretizam em objetos imediatos/ostensivos registrados no processo da representação determinam relações conflituosas para o interpretante que não os conseguem projetá-los para o plano tridimensional. Essa última consideração pode ser verificada nos estudos de Lemke, Simple e Figueredo (2016) e por Cometti (2018) que discutem sobre a necessidade e as dificuldades de os estudantes visualizarem as representações de sólidos no espaço tridimensional.

Quando representamos parcialmente o objeto matemático usamos objetos imediatos/ostensivos para registrá-los, são os signos, que ao se aproximarem do objeto dinâmico/não ostensivos promovem semelhanças pontuais que os representam, mas não é o objeto em si mesmo.

Como signos, eles precisam se assemelhar a algo e serem reconhecidos por alguém, em um processo de mediação. A ilação que defendemos é que a representação dos sólidos no espaço tridimensional requer associar o conhecimento espacial com outros signos, advindos da intuição, da experiência e de raciocínios abduativos, que podem ser originais e/ou oriundos de relações com conhecimentos prévios.

Mesmo tendo acesso a todas as representações parciais acerca de um determinado objeto não há garantias que um novo signo pode ser mediado a partir daqueles signos construídos. Há elementos cognitivos que devem ser acrescidos a essa mediação do sujeito com o objeto: esquemas mentais, imaginação, criatividade, *insights*, que potencializam a ação representativa.

No que tange à representação espacial para a análise em outros campos de conhecimento, o seu estudo é uma ferramenta de trabalho capaz de transformar situações reais em modelos mentais, em um processo inverso ao matemático. O engenheiro civil é um exemplo de interpretante que em atividade laboral, transforma um signo real em um signo mental. Diante de um terreno o engenheiro consegue projetar mentalmente a construção a ser executada naquele espaço. Para Doria (2019)⁷⁸, isso ocorre porque eles conseguem “juntar o conhecimento espacial adquirido nos anos de estudo mais a experiência e a criatividade”.

Essa percepção reflete o que denominamos do “algo mais” que pode se revelar na matemática e em outras componentes curriculares, não são explicitadas nos livros adotados. A técnica padronizada, ao qual nos referimos anteriormente, não proporciona ao estudante meios de desenvolver raciocínios abduativos e a criatividade proporcionada pela linguagem contrafactual, ao qual defendemos no capítulo 1 deste estudo, ela é posta como secundária, ou como uma “passagem natural”, ao qual o indivíduo deve adquirir realizando várias tarefas.

Em síntese, ao desenvolver a análise praxeológica do capítulo do livro, referente ao objeto matemático em estudo, identificamos algumas regulações no nível científico e no didático, pois averiguamos a existência de uma transposição didática realizada pelo autor do livro frente ao modelo epistemológico de Ostrogradski. E uma regulação no nível didático, que compreende uma organização de técnicas e tecnologias mobilizadas pela investigadora para responder uma tarefa. Por não ser única, consideramos que foi uma escolha didática haja visto que outros indivíduos podem reduzir ou ampliar o número de técnicas e tecnologias usadas.

O conjunto dessas regulações que emergem das ações do indivíduo (ou de um grupo) em uma determinada circunstância promovendo semioses a serem interpretadas com a produção, em algum momento, de significados distintos, é o que denominamos de praxeologia situacional.

No desenvolvimento do nosso modelo epistemológico alternativo sobre a Integral Dupla, verificamos a necessidade de abordar o estudo das Superfícies Quádricas, formas usadas por Gaudí em suas obras arquitetônicas. Tal tema encontra-se na matriz curricular dos cursos de graduação da UESB e do IFBA nomeada, respectivamente, pela componente curricular:

⁷⁸ Trecho de uma entrevista semiestruturada com a professora e engenheira civil, Mariluce Cidade França Doria, cujo tema versava sobre a relação entre a Engenharia e a Matemática, realizada na cidade de Salvador, no estado da Bahia, no dia 11 de outubro de 2019, com duração de 2 horas. Destacamos que a docente autorizou o uso das falas para este estudo.

Álgebra Vetorial e Geometria Analítica (AVGA) e Geometria Analítica e Cálculo Vetorial (GACV). Analisamos como essa disciplina se apresentam em um dos livros didáticos, adotados em ambas as universidades, e que estão referendados no PPI.

3.6 Praxeologia do Capítulo 9 de um livro adotado em AVGA ou GACV

Nesta seção, apresentamos uma análise praxeológica do livro didático adotado pelas duas instituições universitárias (UESB e IFBA) acerca das Superfícies Quádricas, que tem como objetivos: identificar a praxeologia matemática proposta pelo autor e construir modelos alternativos que se aderem a praxeologia situacional.

Para o alcance desses anseios apoiamos na organização matemática descrita no livro: Vetores e Geometria Analítica do autor Paulo Winterle, ano 2000, da editora Pearson, por se encontrar como referência bibliográfica nas ementas dos quatro cursos. Esse livro tem 232 páginas, nove capítulos e o nono é destinado ao estudo daquele objeto matemático, que é explanado em 12 páginas com oito subseções; a saber: Introdução, Superfície de revolução, Elipsóides, Hiperbolóides, Parabolóides, Superfícies Cônicas, Superfícies Cilíndricas e Problemas Propostos.

Na Introdução o autor inicia registrando a equação geral do 2º grau nas três variáveis x , y e z e explica que a equação dada representa uma Superfície Quádrica. Em seguida, menciona que se ela “for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de intersecção será uma cônica. [...] daremos ênfase ao estudo das quádricas representadas por equações denominadas canônicas” (WINTERLE, 2000, p.213).

O autor ao introduzir o objeto matemático, não menciona a origem daquela equação do 2º grau e nem como foi desenvolvida, ela aparece subitamente, sem nenhuma definição ou sem desenhos que registrem o seu uso, o que nos fez refletir: Como um estudante estabelece relações com um conhecimento adquirido a partir daquela equação? Ele será capaz com essa informação de produzir um conhecimento mais amplo, que o leve a fazer relações com contextos não-matemáticos? Como aquela equação pode contribuir para que o estudante venha futuramente aplicar o objeto matemático em situações extra matemáticas? Qual o propósito daquela equação está ali?

Não há a presença de uma intencionalidade explícita para o uso com aquela equação, pois não é disposta nenhuma tarefa em que ela seja aplicada, mesmo no âmbito matemático. Se

o objetivo era definir a Superfície Quádrica constata-se que ficou evasiva, tanto para a formalidade matemática quanto para uma provável aplicação.

Sobre as superfícies de revolução o autor assevera que:

é a superfície gerada por uma curva plana (chamada geratriz) que gira de 360° em torno de uma reta (chamada eixo) situada no plano da curva. Neste caso, o traço da superfície num plano perpendicular ao eixo é uma circunferência e a equação da superfície de revolução é obtida através da equação da geratriz (WINTERLE, 2000, p.214).

Após a definição, o autor resolve um exemplo de uma superfície gerada pela revolução de uma parábola em torno do eixo y, encontrando a equação da superfície. Em seguida, apresenta uma síntese do que acontece com a curva ao girar em torno de cada eixo (x, y e z).

Neste caso, percebe-se que o autor traz uma linguagem natural, embora com o uso de termos específicos da matemática. A ideia apresentada não disponibiliza ao estudante o acesso aos ícones correspondentes para a elaboração de um esquema mental, ou a construção de uma imagem associada ao que foi expresso na linguagem natural. A generalização ocorre de forma abstrata, sem intermediações explicativas para a passagem de uma etapa para outra e para minimizar tais efeitos o autor particulariza, por intermédio de um exemplo. Inferimos que didaticamente, uma das soluções seria introduzir, após a definição, algumas representações gráficas que auxiliassem o estudante na visualização da definição.

Na página 215, na seção referente ao elipsoide, a explicação inicia a partir da equação de uma elipse (tema abordado no capítulo oito do livro) que é rotacionada em torno do eixo Oy, obtendo um elipsoide de revolução. Essa é representada por uma equação, ao qual é registrado com a lei: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Em seguida, faz duas observações: a primeira é que se $a = b = c$, a equação toma a forma de uma superfície esférica, representada por: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de centro (0, 0, 0) e raio a. A segunda, é que se os eixos forem transladados e o centro genérico for do tipo (h, k, l) a representação da equação será na forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$. Termina a seção com três exemplos respondidos.

Ao analisarmos a explicação acerca do elipsoide não identificamos nenhuma aplicação do objeto matemático em situações que auxiliassem aos estudantes relacioná-los com contextos de uso não matemáticos.

O autor introduz uma nova seção relativa aos hiperboloides, iniciando com a lei da equação que representa a hipérbole, destaca que os hiperboloides de revolução são obtidos por rotações em torno de um dos seus eixos. Aborda o hiperboloide de uma folha, ao qual explica que este se origina da rotação da hipérbole em torno do eixo Oz. Em seguida, descreve a lei da equação que a representa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e registra em uma figura a representação gráfica do sólido. No entanto, o autor destaca que há outras duas formas de representar a lei da equação: a primeira ocorre se a rotação for em torno do eixo Ox que será representada pela lei: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; a segunda, se a rotação ocorre em torno do eixo Oy, representada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Para os hiperboloides de uma folha não detectamos no livro a sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos, a abordagem do objeto matemático é vinculada a uma exposição de objetos imediatos/ostensivos com o uso de símbolos e regras e dos objetos dinâmicos/não ostensivos com definições. Os ícones são apresentados nas imagens da representação gráfica do hiperboloide de uma folha.

Destacamos que a associação do sólido a um objeto com aquele formato, como por exemplo: um banco de plástico, facilitaria a visualização do estudante e promoveria o processo de semiose para a interpretação e significação dos objetos dinâmicos/não ostensivos.

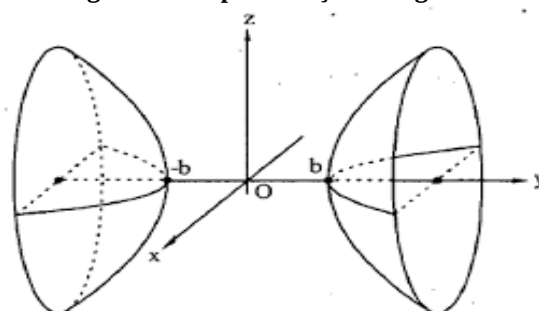
No que concerne aos hiperboloides de duas folhas o autor destaca que ocorre uma rotação de uma hipérbole em torno do eixo Oy. Para obter a lei da equação que e representa, solicita que substitua na equação da hipérbole $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, resultando em $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. De forma análoga ao hiperboloide de uma folha destaca as duas outras leis da equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, se a rotação ocorre ao longo do eixo Ox e $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, se a rotação for ao longo do eixo Oz.

Percebe-se que ao longo da explicação a mobilização da técnica para a substituição de z na lei da equação que representa a hipérbole é reduzida, deixando a cargo do leitor fazer as etapas paulatinamente para chegar a lei que define a equação do hiperboloide de duas folhas. A supressão das etapas, pode atrapalhar o processo de interpretação do estudante, acarretando a noção de que apenas a lei é o que importa, não atribuindo significado algum ao desencadear da

mobilização de objetos (imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos) necessários para a construção da definição.

Na página 220 há um registro da Figura 9.8 (de acordo a sequência original) que representa graficamente a hiperboloide de duas folhas, todavia, não há nenhuma relação com objetos do uso cotidiano do estudante com aquela superfície. Ressaltamos também, que não há aplicação de tarefas matemáticas sobre o tema. A Figura 45 traz a representação da Figura 9.8 do texto original.

Figura 45: Representação da figura 9.8



Fonte: Winterle (2000, p. 220)

Após a explicação dos hiperboloides, o autor dá sequência ao estudo das Superfícies Quádricas explorando os paraboloides. Não o define, indo diretamente para a classificação do paraboloides elíptico. Considera-o a partir da rotação de uma parábola em torno do eixo Oz e registra que a sua equação é obtida da equação da parábola ao substituir y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, que resulta na lei da equação que representa o paraboloides elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Se for em torno do eixo Oy, a lei da equação é registrada por $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ e se for em torno do eixo Ox, será: $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, em seguida, há um exemplo respondido pelo autor com a aplicação no âmbito da matemática.

Os paraboloides hiperbólicos é a segunda classificação feita pelo autor do livro, ele inicia com a lei que representa a equação daquela superfície: $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ ao longo do eixo Oz. De forma análoga, a lei que representa a equação dos paraboloides hiperbólicos ao longo do eixo Oy e Ox, respectivamente, são: $y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$ e $x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

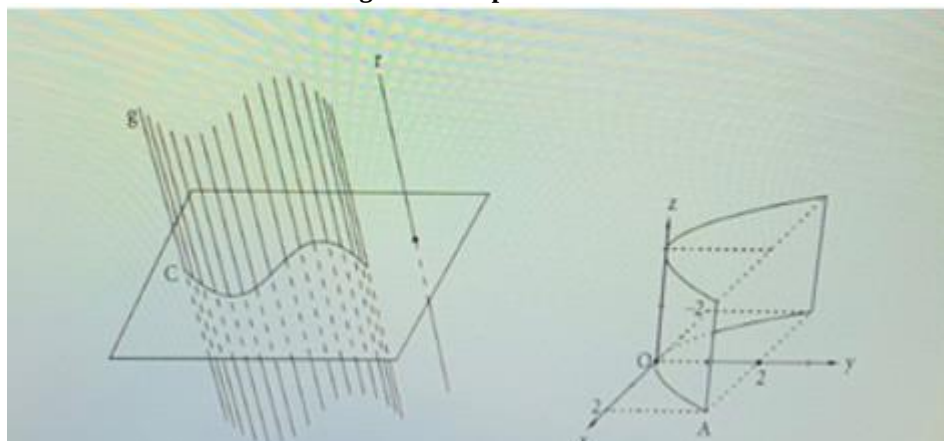
Representa graficamente no espaço tridimensional o paraboloides hiperbólico e destaca os traços nos planos x , y e z . Não traz nenhuma aplicação na matemática e nem em contextos extra matemáticos.

A Superfície Cônica é definida como uma rotação no plano yz da reta g de equações $z = my$ e $x = 0$, em torno do eixo Oz, que é representada pela lei de equação $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, denominada de superfície cônica elíptica. Destaca, acerca da representação da lei da equação, ao longo do eixo Oy e Ox, respectivamente: $y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ e $x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

Há um registro de uma figura que representa uma superfície cônica circular, no espaço tridimensional, destaca: que os traços da superfície no plano xy são elipses; que a reta g é a geratriz da superfície; o ponto O, origem do espaço é o seu vértice. Ao final da explicação é colocado um exemplo respondido em apenas uma linha, uma aplicação imediata da lei que define a equação daquela superfície.

A Superfície cilíndrica é a última definição explorada pelo autor, que assim o faz: “é a superfície gerada por uma reta g que se move paralelamente à reta fixa r em contato permanente com a curva plana C. A reta g que se move é denominada de geratriz e a curva C é a diretriz da superfície cilíndrica. Esta superfície pode ser vista como um conjunto de retas paralelas que são as infinitas posições da geratriz” (WINTERLE, 2000, p.224). A explicação é seguida da Figura 46 (no original esta nomeada como Figura 9.15):

Figura 46: Superfície cilíndrica



Fonte: Winterle (2000, p. 224)

O autor, registra que irá considerar “apenas as superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva que se encontra num dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo perpendicular ao plano da diretriz” (WINTERLE, 2000, p.224).

Em seguida, não faz uma generalização para a superfícies cilíndricas e particulariza com um exemplo respondido. Ao final, registra que “conforme a geratriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada circular, elíptica, hiperbólica ou parabólica” (WINTERLE, 2000, p.224-225).

É proposto doze tipos de tarefas ou problemas (como o autor atribui), em que se emprega as tecnologias desenvolvidas no capítulo acerca da Superfície Quádrica. De forma geral, elas estão sendo aplicadas no âmbito da matemática, não existe nenhum questionamento que emerja de uma situação do mundo, da vivência do estudante. São desprovidas de uma significação que extrapole o conhecimento da matemática pura limitando-o a cientificidade em detrimento da aplicabilidade em contextos mais amplos.

Como educadores matemáticos, precisamos repensar sobre a abordagem dos objetos da matemática nos livros didáticos e propor modelos alternativos para o seu ensino. Se propomos um ensino em que se valorize conjuntamente com as praxeologias matemáticas e didáticas as situacionais, não podemos ter atitudes antagônicas com relação ao ensino dos objetos matemáticos que estão no nível trófico em relação a Integral Dupla. Nesse sentido, optamos por usar o raciocínio abdutivo para a criação de novos modelos de tarefas para o estudo das Superfícies Quádricas. Tal demanda, justifica a razão de se acrescentar dois tipos de tarefas relacionadas com outros contextos em que se busca desenvolver por partes dos estudantes a linguagem contrafactual, reformulados a partir dos tipos de tarefas propostas em Winterle (2000), obra adotada pelas instituições do qual os estudantes fazem parte.

O tipo de tarefa de número 6, da página 226 do livro, apresenta o seguinte enunciado: *Identificar e representar graficamente as superfícies expressas pelas equações nos intervalos dados.* São dadas 14 tarefas nomeadas por letras do alfabeto (a, ..., n). Escolhemos a letra j cuja tarefa é $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 4$, por se tratar de um parabolóide elíptico, objeto ao qual propusemos a criação de um modelo de tarefa que se contraponha ao estilo das que são propostas pelo livro. Para solucionar usaremos as subtarefas, as técnicas e as tecnologias inerentes a teoria.

t': Comparar a equação da superfície registrada no enunciado com as equações das superfícies quádricas.

τ' : $z = 4 - (2x^2 + y^2)$ é semelhante a $z = x^2 + y^2$, lei da equação que representa um parabolóide elíptico quando $a = b = 1$.

τ'' : Há um deslocamento da concavidade do parabolóide em torno do eixo z, pois a expressão foi multiplicada por -1 e todos os valores de z foram adicionados a 4 unidades.

t'': Calcular o vértice do parabolóide

τ''' : Quando $x = y = 0$ o vértice ao longo do eixo de z é (0,0,4).

t''': Esboçar o gráfico da superfície

τ^4 : Usar o GeoGebra 3D para representar graficamente a superfície

t^4 : Estabelecer uma resposta para a tarefa

τ^5 : A superfície descrita pela lei $z = 4 - 2x^2 - y^2$ é um parabolóide elíptico, limitado em torno do eixo z , no intervalo de $0 \leq z \leq 4$.

Analisando a praxeologia da tarefa, constatamos que a solução realizada pelos autores apresenta quatro subtarefas (t' , ..., t^4), cinco técnicas (τ' , ..., τ^5) que justificam pela lei que define a equação de um parabolóide elíptico que consiste em apenas uma tecnologia θ_1 que toma como aporte a teoria Θ das Superfícies Quádricas que está contido no CDI. Assim, a praxeologia local é formada por $OMP_1 = \{(t', \dots, t^4), (\tau', \dots, \tau^5), \theta_1, \Theta\}$.

Entretanto, sob o viés da praxeologia situacional propomos uma reformulação da questão, trazendo a luz um raciocínio abdutivo e semioses que podem ampliar as técnicas mobilizadas e incluir tecnologias de outras áreas de conhecimento. No que segue apresentamos o modelo de tarefa reformulado.

Oscar Niemeyer em 1951, projetou o Pavilhão Lucas Nogueira Garcez localizado no Parque Ibirapuera, na cidade de São Paulo no Brasil, carinhosamente “batizado” como Oca, por ter o formato semelhante as ocas indígenas. A base da oca é circular e tem 78 metros de diâmetro e a medida desde o chão até o ponto mais alto é 18 metros. É um importante local para exposições culturais, como por exemplo, a maior exposição de LEGO do mundo a: The Art of the Brick: DC Super Heroes, do artista plástico Nathan Sawaya, que recriou mais de 100 heróis e vilões da Dc Comics, realizada no período de 13 de setembro a 30 de novembro de 2019.

A partir da obra arquitetônica de Niemeyer, responda:

- Identifique a superfície definida na obra do arquiteto.
- Considere a superfície definida pela equação $78z = 1404 - 18x^2 - 18y^2$. Esboce o gráfico dessa superfície dizendo ao longo de que eixo ela ocorre.
- Comparando a equação expressa na letra b com a Oca do Parque Ibirapuera, quais restrições poderiam ser adotadas ao esboço do gráfico para que tenha o mesmo formato do projeto de Niemeyer?
- A partir das informações obtidas elabore uma maquete da Oca, usando uma escala numérica apropriada e uma planta baixa da construção.

Na tarefa acima inferimos que as técnicas e teorias que foram mobilizadas pela investigadora ao resolvê-la foram:

t': Pesquisar acerca da construção do pavilhão

τ' : Nos sites de busca encontra-se a comparação do formato da Oca a um parabolóide elíptico.

t'': Colocar na forma canônica a superfície:

τ' : Dividir ambos os termos da equação por 78

$$z = 18 - \frac{3}{13}x^2 - \frac{3}{13}y^2$$

t''': Comparar o resultado com a lei que representa a equação do parabolóide.

t⁴: Avaliar o sinal de z

τ^4 : $z > 0$, pois a medida da altura é 18 desde o chão até o ponto mais alto da Oca.

t⁵: Calcular o vértice do ponto mais alto

τ^5 : ocorre quando $z = 18$ e $x = y = 0$, logo o vértice é a terna (0,0,18)

t⁶: Esboçar o gráfico da superfície

τ^6 : usar o GeoGebra para o esboço do gráfico

t⁷: Estabelecer uma resposta para a tarefa

τ^7 : A Oca tem um formato de um parabolóide elíptico, para os valores reais de $0 \leq z \leq 18$.

t⁸: Elaborar a maquete

τ^8 : Usar material que possibilite a criação do modelo arquitetônico.

τ^9 : Usar uma escala apropriada que viabiliza a construção do modelo projetado.

A escolha pela elaboração de um modelo diferente dos que são propostos pelo livro envolvendo o objeto matemático explicitado, perpassa pelo interesse dos autores em propor atividades que mobilizem praxeologias situacionais que estejam interligadas as profissões dos futuros engenheiros e que possam ampliar a visão dos licenciandos em matemática sobre a aplicabilidade dos objetos matemáticos em contextos não matemáticos. A adaptação da tarefa j do livro tem como alcance estender a percepção daquele objeto em uso, na visão paradigmática e, portanto, produzir significados mais amplos.

Para além do contexto matemático, o uso de maquetes pelos estudantes das engenharias contribui para praxeologias situacionais que demanda o uso e a leitura de escalas numéricas, a construção da planta baixa, que são técnicas relacionadas ao exercício futuro da sua profissão. Há, portanto, a mobilização de praxeologias (tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) que não são restritas ao uso da matemática, mas de outros campos do conhecimento, um argumento sólido para a defesa da existência das praxeologias situacionais.

Na página 226 o tipo de tarefa, número 7, proposto está registrado da seguinte forma: *Identificar as superfícies definidas pelas equações, dizendo ao longo de que eixo elas ocorrem, conforme o caso.* Em seguida, o autor elenca 12 tarefas, identificando-as por letras alfabéticas (a, ..., l), a ser realizada a partir do tipo de tarefa descrita no enunciado. Optamos pela letra j, descrita pela superfície $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

t': colocar a lei da equação dada na forma canônica, escrevendo-a: $z - 3 = -\sqrt{x^2 + y^2}$

τ': Eleva ambos os termos da equação ao quadrado: $(3 - z)^2 = x^2 + y^2$

τ'': Resolvendo o primeiro termo e fazendo os ajustes necessários, obtém-se: $9 - 6z + z^2 = x^2 + y^2$

τ''': Dividindo a equação por 9: $\frac{z^2 - 6z}{9} + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

t'': Comparar o resultado com a lei da equação de uma semi superfície cônica ao longo do eixo oz.

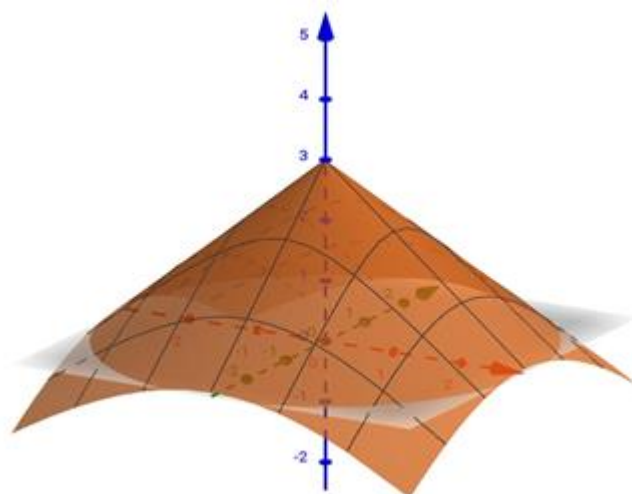
t''': Avaliar o sinal da variável z:

τ⁴: $0 \leq z \leq 3$.

t⁴: Esboçar o gráfico

τ⁵: usar o GeoGebra para visualizar a representação gráfica da superfície (Figura 47).

Figura 47: Representação gráfica de uma semi superfície cônica ao longo do eixo Oz



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

t⁵: Calcular o vértice

τ⁶: o vértice é (0, 0, 3)

t⁶: Estabelecer uma resposta

τ^7 : pode-se concluir que a superfície é uma semi-superfície cônica ao longo do eixo Oz, para $0 \leq z \leq 3$.

Analisando a praxeologia da tarefa identificamos seis subtarefas (t' , ... t^6) que utilizam de sete técnicas para serem executadas, envolvendo três tecnologias, a saber: θ_1 : equação irracional, θ_2 : Lei da equação que define um hiperboloide e θ_3 : Cálculo do vértice de uma hipérbole e a teoria é Superfícies Quádricas. A organização pontual é formada por $OMP_2 = \{(t', \dots, t^6), (\tau', \dots, \tau^7), (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \Theta\}$.

Nosso segundo modelo elaborado foi para a letra h, descrita pela superfície $z = \sqrt{4 + 4x^2 + 4y^2}$, que também foi fonte de inspiração para compor exemplos da praxeologia situacional, inicialmente, a resolvemos conforme foi registrado pelo livro.

t' : colocar a lei da equação dada na forma canônica, escrevendo-a: $z = \sqrt{4 + 4x^2 + 4y^2}$

τ' : Elevando ambos os termos da equação ao quadrado, obtém-se: $z^2 = 4 + 4x^2 + 4y^2$

τ'' : Acrescentando $-4x^2 - 4y^2$ em ambos os termos da equação e simplificando-a: $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

τ''' : Dividindo a equação por 4: $\frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 1$ ou $-x^2 - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

t'' : Comparar o resultado com a lei da equação do hiperboloide

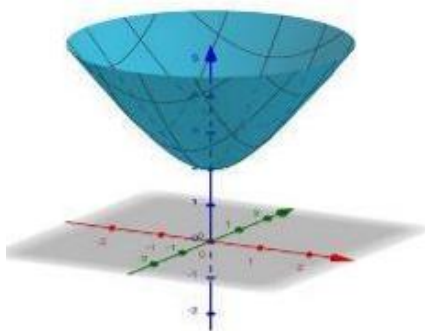
t''' : Avaliar os sinais das variáveis x, y e z:

τ^4 : $x < 0$, $y < 0$ e $z > 0$

t^4 : Esboçar o gráfico

τ^5 : usar o GeoGebra para visualizar a representação gráfica da superfície (Figura 48).

Figura 48: Representação gráfica da superfície



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

t^5 : Calcular os vértices

τ^6 : os vértices são $(0, 0, -2)$ e $(0, 0, 2)$

t^6 : Estabelecer uma resposta

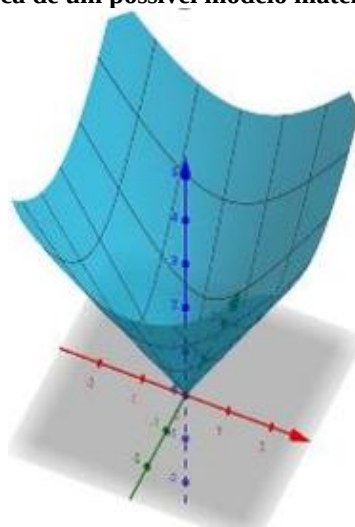
τ^7 : pode-se concluir que a superfície é uma semi-hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Oz, para $z > 0$.

No modelo que adaptamos, a tarefa anterior foi estruturada a partir de outra obra arquitetônica de Oscar Niemeyer, *o imponente edifício do Congresso Nacional, denominado de Pavilhão Nereu Ramos composto por duas cúpulas: uma voltada para cima, representando a Câmara dos Deputados; a outra para baixo, representando o Senado Federal. Entre elas, no centro, localiza as duas torres com vinte e sete pavimentos.*

- Identifique a Superfície Quádrica que se assemelha a cúpula da Câmara dos Deputados.
- Suponha que a lei que define a equação da superfície da cúpula da Câmara dos Deputados é expressa por $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0$, faça o esboço do gráfico.
- Quais restrições precisam ser determinadas para que o gráfico da superfície esboçada na letra b, torne semelhante a Câmara dos Deputados.
- O arquiteto Niemeyer inovou na construção do Pavilhão usando o concreto armado em uma maior proporção de metais comparando com a de ferro, material usado nos prédios daquela época. Investigue qual a repercussão do uso do concreto armado e qual essa proporção atualmente?

Na letra a o objetivo da tarefa é identificar o formato da Superfície Quádrica como uma semi-hiperboloide de duas folhas. O propósito da alternativa b da tarefa é estabelecer uma semelhança entre o formato da obra arquitetônica com a representação gráfica construída a partir do registro da equação da superfície. Usamos o *software* GeoGebra para o esboço do gráfico, representado na Figura 49.

Figura 49: Representação gráfica de um possível modelo matemático para a cúpula do Planalto



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Para a alternativa c o intuito foi: promover uma análise da situação proposta na tarefa comparando-a com a obra arquitetônica; preservar possíveis semelhanças na forma e selecionar as condições viáveis para uma representação mais fiel e que esteja de acordo com a praxeologia matemática e a situacional. Nesse sentido, a tarefa conduzirá o interpretante a restringir a representação gráfica ao semieixo positivo para os valores reais da variável z , tendo em vista que a superfície é um hiperboloide de duas folhas. Para atender a situação proposta na tarefa é necessário considerar:

- apenas a abertura da região côncava que está voltada para cima fazendo $z \geq 0$.
- estabelecer que os eixos do plano tridimensional se assemelham a base do teto do pavilhão Nereu Ramos;
- tomar a origem do plano 3D como o centro da cúpula que tem a concavidade voltada para cima;
- Usar as praxeologias matemáticas associadas ao registro da equação matemática fictícia.

Na letra d, espera-se que a tarefa promova uma discussão no nível do curso ao qual o estudante está matriculado. Para isso, os encaminhamentos na solução da tarefa devem enaltecer a perspectiva de mudanças na forma de conceber uma ideia nova (o raciocínio abdutivo) e agregá-la ao conhecimento teórico adquirido durante a formação do sujeito, como foi feito por Oscar Niemeyer. Nesse sentido, inferimos que as praxeologias: matemática e a situacional, envoltas em um objetivo comum é a fonte para soluções criativas e emancipadoras.

Em uma análise *a priori* dos modelos construídos conjecturamos que:

- tais modelos podem promover contribuições para os estudantes da engenharia civil no estudo do cálculo estrutural aplicado: às lajes, às vigas, aos pilares e às fundações, como fez Oscar Niemeyer ao trabalhar com engenheiros e calculistas.
- As pesquisas em outras obras podem conduzir a interpretações mais abrangentes envolvendo elementos de origem mais ampla para a formulação da resposta da letra d, tais como:
 - a. A composição do concreto armado: cimento, água, agregado miúdo (areia), agregado graúdo (pedra ou brita);
 - b. A alta resistência as tensões e compressões e a baixa resistência a tração (10%) o que promove a resistência e a durabilidade das estruturas;

- c. O fenômeno de aderência, essencial entre a armadura (feita com o aço) e o concreto em um trabalho conjunto.
- d. Um exemplo, pode ser registrado na pesquisa realizada pela autora no site: <http://veja.abril.com.br/especiais/brasil/poesia-concreta-joaquim-cardozo-p-058.html>, em 30/ 12/2019, que apresentou a seguinte informação: “No fim dos anos 50, as regras de engenharia estabeleciam o uso de no máximo 6% de barras de ferro nas estruturas de concreto. Cardozo pôs 20% de ferro na trama das colunas, rompendo com os modelos de cálculo em voga. Hoje, com o avanço da tecnologia e da resistência dos materiais, é possível conseguir o mesmo efeito com apenas 3% de metal” (ALTMAN, 2009, p.58-61). O recurso permitiu que as colunas fossem mais resistentes para sustentar o peso da laje do palácio. Tal informação poderia ser explorada em um contexto em conjunto com os professores que ministram a componente curricular: Resistência de materiais, pertencente a matriz curricular dos cursos das engenharias.

Dando sequência ao processo de criação de modelos, “que tem uma função metodológica, heurística”(GASCÓN; NICOLÁS, 2016, p.6) e que possibilita empregar as praxeologias matemática e situacional em conjunto, criamos uma questão a partir de uma reportagem transmitida no programa Fantástico da Rede Globo de televisão, exibido no dia 22 de dezembro de 2019, disponível em: <https://g1.globo.com/fantastico/noticia/2019/12/22/aposta-da-nasa-avião-supersonico-pode-reduzir-viagens-pela-metade-do-tempo.ghtml>.

A matéria associa duas pesquisas que estão sendo desenvolvidas acerca dos efeitos das ondas de choque que são produzidas pelo avião supersônico pela NASA e o desprendimento de uma rolha de uma garrafa de champanhe, pela Universidade Reims Champagne em Ardenne, na França. Embora os temas são distintos o estudo do pesquisador francês Gérard Liger-Belair concluiu “que o que acontece neste estrondo realizado pela rolha ao desprender da garrafa é o mesmo dos aviões super-rápidos”.

Após assistir a reportagem e a seguinte alusão do repórter: “as ondas de choque que o avião supersônico produz ao “rasgar o ar” se somam atrás do avião como uma espécie de cone”, nos fizeram buscar mais informações acerca do tema. Em torno da pesquisa surgiu uma questão que pode guiar o estudo das superfícies cônicas, objeto de estudo do capítulo 9, do livro analisado, que formulamos assim: Qual a relação que se pode estabelecer entre a matemática, um avião supersônico e o estouro de uma rolha de uma garrafa?

O estudante pode encontrar facilmente a reportagem em qualquer site de busca usando apenas as palavras avião supersônico e rolha de garrafa. Entretanto, as perguntas que poderão ser construídas a partir da questão inicial é que conduzirão o percurso investigativo. Nesse sentido, criamos, a partir da pesquisa realizada, as seguintes perguntas:

Q1: Qual superfície pode ser identificada pelas ondas de choque produzidas pelo avião supersônico e a rolha ao desprender da garrafa?

Q2: E por que ela se apresenta com aquele formato?

Como relatamos a reportagem já menciona que as ondas de choque se somam na parte de trás do avião como uma superfície cônica. Entretanto, para responder a segunda parte é necessária uma pesquisa mais criteriosa sobre as ondas de choque.

Buscamos no artigo: Ondas de choque não colisionais no espaço interplanetário dos autores Escher; Alves, Gonzalez (2006) informações sobre o comportamento impresso pelas ondas de choque. Segundo eles:

os movimentos ondulatórios, de energia e de momento ocorrem sem o transporte de matéria de um ponto para outro. O ar, é constituído de uma infinidade de moléculas que se colidem, quando uma onda de compressão sonora é emitida, as moléculas mais próximas da fonte são empurradas na direção do movimento. Quando um objeto se desloca na atmosfera, ocorre um processo similar, em que as ondas se propagam por expansão esférica, e as ondas se propagam em um espaço tridimensional, as ondas geradas em gases ordinários podem ocorrer, por exemplo, quando o ar é empurrado para os lados pelas asas e pela fuselagem de um avião ou projétil supersônico. Em regimes supersônicos em que a velocidade do projétil é maior do que a do som, a fonte geradora das ondas percorre distâncias maiores que as perturbações geradas em virtude de sua maior velocidade, isto é que explica o surgimento de **uma região cônica** onde as perturbações serão percebidas. Fora dessa região, tudo se passa como se não houvesse nenhuma perturbação no escoamento. (ESCHER; ALVES; GONZALEZ, 2006, **grifo nosso**)

Como pode ser constatado no estudo dos autores, o deslocamento da fonte geradora das ondas em função da alta velocidade do projétil é que determina a região cônica o que responde a segunda parte da alternativa a. Para continuidade, pode ser solicitado a busca pela resposta a pergunta Q3:

Q3: Quais imagens são capazes de reproduzir a região cônica que surgem quando o avião supersônico ultrapassa a velocidade do som e quando a rolha se desprende da garrafa?

Na pesquisa realizada pela investigadora as imagens aqui apresentadas foram retiradas da reportagem que foi ao ar no dia 22 de dezembro de 2019, por meio das fotografias registrada na Figura 50.

Figura 50: Fotografias retiradas da reportagem sobre o avião supersônico



Fonte: Fotografias do arquivo pessoal da investigadora

A partir das imagens pode-se fazer uma outra pergunta:

Q4: Considere o registro algébrico da superfície cônica gerada pelas ondas de choque do avião supersônico expresso por: $36x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 0$. Em torno de qual eixo ele deve ser representado para que se assemelhe as imagens da pergunta Q3?

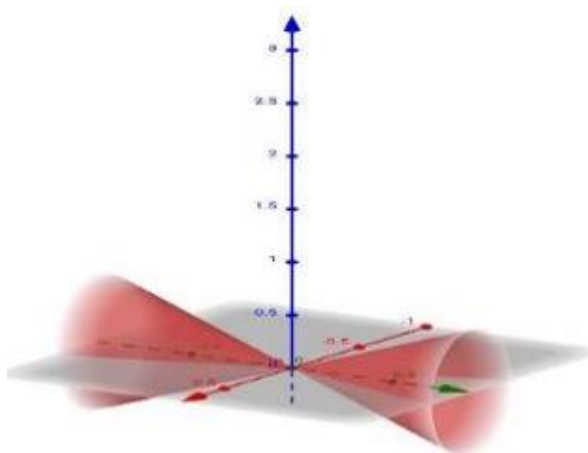
Q5: Esboce um gráfico para a superfície apresentada em Q4.

As questões Q4 e Q5 foram adaptadas da tarefa 5 do livro didático em análise, que se encontra na página 226 do capítulo referente as Superfícies Quádricas, expressa pelo enunciado: *Reduzir cada uma das questões a forma canônica (caso não esteja), identificar a superfície e construir seu gráfico.*

Em seguida o autor propõe 22 tarefas, descritas em ordem alfabética, envolvendo equações de superfícies. Escolhemos a letra “l” por trazer características que melhor se adaptam ao modelo matemático proposto e favorece agregar as praxeologias: matemática e situacional.

De acordo a imagem da foto registrada na questão Q3, o formato da superfície cônica está desenhado ao longo do eixo Oy e deve ser escrita na forma: $y^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{z^2}{\frac{4}{9}}$, para o esboço do gráfico usamos o *software* GeoGebra, representado na Figura 51.

Figura 51 - Formato da Superfície Cônica



Fonte: Produção da autora no GeoGebra

Para avançar para campos mais amplos de análise, pode-se propor.

Q6: O que acontece com as ondas de choque em espaços interplanetários?

Tal pergunta pode mobilizar respostas mais precisas dos estudantes do curso da Engenharia Elétrica, pois envolvem objetos do conhecimento daquela formação acadêmica. Apoiamos a hipótese anterior em uma pesquisa realizada por Escher; Alves, Gonzalez (2006) ao afirmarem que em espaços interplanetários as colisões entre partículas são raras e a densidade é baixa. Como o caminho é livre e muito grande, há interações eletromagnéticas que ocorrem entre as partículas do plasma, são as interações Coulombianas que permitem a formação dos choques. O plasma é tratado como um único fluido condutor e por isso as partículas são carregadas de densidade de carga e de corrente que podem ser representadas pelas equações de Maxwell e da Lei de Ampère. Estas informações podem proporcionar uma interlocução entre objetos do conhecimento da matemática e da engenharia. Podemos destacar, de antemão, que a importância do estudo do fluido para a interlocução foi percebido por um dos estudantes no desenvolvimento do PEP acerca da Integral Dupla.

As atividades formuladas não foram aplicadas, pois o objetivo a que propomos é mostrar a existência da aliança que pode ser construída entre as praxeologias matemáticas e situacionais que emergem da realidade do mundo ao qual o estudante está inserido. O que pretendíamos com tal atividade é mostrar que é possível minimizar os efeitos da forma tecnicista, desprovida de significado com o qual os objetos matemáticos são apresentados nos livros didáticos, apenas usando a criatividade e o interesse por um ensino emancipador e uma aprendizagem com mais significado. Tais modelos matemáticos podem ser indicadores para a formulação de questões geradoras de futuros *Percursos de Estudos e Pesquisas*, acrescentando outras questões subsidiárias que conduzam a novas respostas.

4 CASA BATLLÓ: uma obra metodológica

Descrevemos, neste capítulo, os procedimentos metodológicos de ensino que tomamos como princípio do instrumento do *Percurso de Estudo e Pesquisa*. Para a organização didática do PEP foi planejado um estudo sobre o cálculo de medidas das Superfícies Quádricas usando a Integral Dupla envolvendo as obras de Antoni Gaudí.

4.1 Os sujeitos da pesquisa

Participaram deste estudo um total de doze discentes egressos dos cursos de licenciatura em matemática de uma universidade estadual e de engenharias de um Instituto Federal, ambos no interior do estado da Bahia, participaram dos cinco encontros que ocorreram aos sábados no período de abril a maio de 2019. E todos eles já haviam estudado a Integral Dupla em seus respectivos cursos.

4.2 Abordagem metodológica

No capítulo dois, registramos os pontos de convergência entre a TAD e a Semiótica e verificamos que a linguagem seria um terreno fértil para aplicarmos os conceitos de signos, objetos, interpretantes e entendermos as relações existentes entre os significados, as interpretações e o pragmatismo que estão envolvidos quando se aplica o dispositivo do *PEP* em torno de uma questão aberta.

Esse entrelaçamento proporcionou uma abordagem qualitativa, do tipo experimental, para o desenvolvimento desta pesquisa, pois permitiu interpretar de forma subjetiva os fenômenos e identificar os significados atribuídos pelos estudantes a uma situação proposta. Essa perspectiva está de acordo com Creswell (2010, p.26) ao salientar que “a pesquisa qualitativa é um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano”.

Encontramos nas obras do arquiteto Antoni Gaudí a inspiração para problematizar as formas trabalhadas pelo artista e verificar os significados matemáticos e pragmáticos mobilizados pelos licenciandos em matemática e pelos graduandos em engenharia. Uma escolha didática que atenderá os pressupostos da Semiótica peirceana e da TAD ao aplicar o PEP.

No intuito de comprovar as nossas hipóteses elaboradas para a pesquisa, adequamos o estudo em duas organizações ou praxeologias: as matemáticas, descritas no capítulo três deste texto e as didáticas que tiveram como foco a aplicação do dispositivo do PEP, que serão esclarecidos na próxima seção.

4.3 O dispositivo didático do PEP

A educação promove ao ser humano: o acesso ao conhecimento, a igualdade e o direito as informações, a melhoria na qualidade de vida, escolhas conscientes para tomar decisões, ampliar o espaço do diálogo e de possibilidades de abordagem diversificadas sobre um mesmo tema, mas, também, é uma forma de controle do poder exercido pelo Estado, quando impõe Leis, Decretos e Ementas formulados sem participação dos envolvidos diretamente com o processo educacional, instituindo currículos que não valorizam as diferenças culturais existentes em uma determinada sociedade.

A falta de autonomia escolar no que tange a seleção do currículo apropriado a demanda da comunidade não é restrita ao poder econômico ou político de alguns países. Mesmo em países desenvolvidos, como na França, em que existem os debates acalorados entre as duas correntes ideológicas (as conservadoras e as descentralizadoras) sobre o assunto, mana ao Estado o atributo de selecionar àquele que melhor atende aos anseios contingenciais políticos vigentes. Foi no palco destas discussões francesas que nasceu o PEP, inicialmente motivado por uma reforma educacional imposta pelo Ministro da Educação, que consistiu em oferecer uma alternativa para o ensino formal, instituindo ao ensino, a introdução à pesquisa.

Tal abordagem pedagógica denominada *Travaux Personnels Encadrés*⁷⁹ – TPE, nasce no ano 2000, e consiste em oferecer aos estudantes do Liceus⁸⁰ atividades obrigatórias, que são desenvolvidas em torno de uma questão problematizadora, envolvendo os temas estabelecidos nacionalmente e com a participação de no mínimo duas disciplinas. Para atender a tal demanda, Yves Chevallard (2001) inicia a elaboração de *Activités d'Etude et de Recherche* – AER para a Matemática, tomando como aporte pedagógico as situações fundamentais que envolvem o saber e as variáveis didáticas desenvolvidas por Guy Brousseau na *Théorie des Situations Didactiques* (TSD).

⁷⁹ Tradução: seria um Trabalho pessoal supervisionado.

⁸⁰ No contexto educacional brasileiro seria o Ensino Básico e Técnico.

No entanto, Chevallard (2001) percebe a extensão que o TPE adquire quando se analisa a hierarquia dos níveis de codeterminação de uma organização didática, o que fez com que ele ampliasse seu olhar para a necessidade de extrapolar o limite das investigações envolvendo a TAD de monodisciplinar para codisciplinar, pois a resposta a questão pode emergir de uma outra área do conhecimento. Para o autor era necessário constituir um sistema didático (S) formado por três elementos: X que seria aquele que estuda (estudante, classes, equipes, jornalistas); Y é o diretor do estudo (professores, pesquisadores, diretores da redação) e Q uma questão problematizadora, representado por $S(X, Y, Q)$, com o objetivo de formular uma possível resposta para Q.

Mas, o sistema didático demanda uma infraestrutura matemática e didática que possibilite o desenvolvimento da AER envolvendo um objeto matemático, o que constitui o *milieu* de trabalho. Esta mudança de perspectiva, faz com que Chevallard perceba a importância de uma análise praxeológica da tarefa proposta aos estudantes; da cultura instituída; das obras visitadas (livros, artigos, Leis, currículos, internet); das práticas sociais que influenciam na construção da resposta a uma questão inicial (Q_0).

Emerge desse *milieu* um conjunto de variáveis matemáticas e didáticas que permeiam a AER e ao longo do seu desenvolvimento suscitam perguntas ($Q_1, Q_2, Q_3, \dots$) e respostas ($R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond \dots R_n^\diamond$) intermediárias que são elaboradas por aqueles que dirigem o estudo (Y) ou pelos que os estudam (X), ao examinarem as diferentes obras ($O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m$) em busca da melhor resposta ($R^\heartsuit$) para a questão inicialmente proposta (Q_0). Tal dispositivo didático é registrado pelo *esquema herbatiano*⁸¹: $[S(X, Y, Q) \hookrightarrow M] \leadsto R^\heartsuit$ em que o *milieu* M é o conjunto de respostas intermediárias e consultas a diferentes obras, representado por $M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond \dots R_n^\diamond; O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m\}$. Fazendo os ajustes no que diz respeito ao *milieu*, temos:

$[S(X, Y, Q) \hookrightarrow \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond \dots R_n^\diamond; O_{n+1}, O_{n+2}, \dots, O_m\}] \leadsto R^\heartsuit$ que vem a constituir um *Percurso de Estudo e Pesquisa* - PEP.

Tal esquema é sujeito às condições e restrições na sua aplicação que podem alterar a organização previamente elaborada, ou seja, o sistema fica aberto para interferências que incitam novas perguntas, consultas as obras diversificadas e respostas. Nesta dinâmica podem surgir questões que ultrapassam os limites da própria disciplina como constatam Barquero, Bosch e Gascón (2011), o que requer dos envolvidos interpretações dos signos (matemáticos

⁸¹ Esquema elaborado por Johann Friedrich Herbat

e/ou outros) mobilizados em relação ao contexto em que vivem os objetos matemáticos, ampliando os conhecimentos dos fenômenos didáticos.

Mesmo pairando sobre o PEP, a imprevisibilidade do percurso, os aspectos epistemológicos, ecológicos e econômicos acerca do objeto matemático escolhido devem ser dimensões essenciais a serem analisadas pelo diretor de estudo que precisa conhecer o objeto matemático, como ele vive nas instituições, qual a razão de ele existir e as relações que estabelecem com outras áreas. Tais exigências impõe ao diretor (Y) a criação de um Modelo Epistemológico de Referência, que retrata o habitat do objeto matemático pleiteado, as relações que estabelecem com outros objetos matemáticos e não-matemáticos, as restrições e condições epistemológicas suscetíveis e que podem ser advindos do modelo dominante do seu ensino dentro das instituições.

O MER, analisado sob o viés da Semiótica peirceana, consiste em uma construção que envolve um raciocínio abdutivo, presente na criatividade do diretor do estudo (y), e na disponibilidade de tempo e esforços para pesquisar sobre os diferentes “habitats”, em que o objeto matemático escolhido vive, bem como suas restrições. Quanto mais elementos são destacados no MER, mais amplas são as possibilidades de prever os caminhos que o *PEP* pode tomar; entretanto, tal fato não é uma garantia de que não existirão outros caminhos no decorrer da aplicação.

O MER e o PEP favorecem uma conexão entre signos matemáticos e não matemáticos que aparentemente são desconectados e que podem pertencer a áreas de conhecimentos distintas, mas que quando interpretados e analisados estabelecem uma rede de conexões entre eles, processando novas informações, ampliando a comunicação, alterando a percepção do conhecimento fragmentado e das atuais posturas metodológicas dominantes nos contextos escolares. Há uma ruptura das práticas que demandam o uso de representações dos objetos sob perspectivas diferentes, assim, um arco de uma ponte em que os estudantes transitam para chegar até a escola em uma determinada avenida pode se transformar em um estudo sobre a catenária ou ainda, uma catástrofe natural, como o “Tsunami”⁸², pode contribuir para o estudo

⁸² Tsunami ou maremoto é o deslocamento de uma grande quantidade de água que forma ondas muitas altas, geralmente com maior incidência no Oceano Pacífico. Esse tema foi usado, pela primeira autora, em uma aula para um concurso de professor substituto no IFBA, no ano de 2011, em que o ponto sorteado foi processos estocásticos. Sensibilizada com a morte de várias pessoas no tsunami do Japão, ocorrido um mês antes da aula pública, a tragédia foi utilizada para explicar sobre eventos determinísticos.

de eventos determinísticos e não determinístico ou no cálculo da medida da área devastada usando a Integral.

Nos desvela um novo olhar sobre como podemos fazer novas perguntas para o mundo e dele emergir relações ainda não exploradas pelas instituições, ou exploradas sem considerar as diferentes vertentes dos seus significados. Neste ponto, não nos passa despercebidos os tipos de tarefas (T) presentes em livros didáticos que, na intenção de contextualizar os entes matemáticos, priorizam praxeologias matemáticas que enfatizam o uso das técnicas (t) como procedimentos mecanizados a serem desenvolvidos, mas não promovem a construção dos conceitos presentes na tecnologia (θ) e são justificadas por uma Teoria (Θ).

Os questionamentos dos fatos que circunscrevem e inscrevem o homem no mundo é um dos grandes feitos da TAD, pois os transformam em uma nova forma de ensinar e de pesquisar objetos matemáticos, mas sobretudo, amplia e alcança outros níveis de determinação (humanidade, civilização, sociedade, pedagogia, escola, disciplinas, ...) que incidem sobre novas praxeologias a serem elaboradas.

No sistema herbatiano, há uma ruptura nas posições ocupadas pelos estudantes (X) e pelo professor (y), em que ambos, tomam o conhecimento como algo ainda não descoberto, pois novas perguntas podem encaminhar o percurso para respostas não pensadas anteriormente, são hipóteses, raciocínios abduativos que florescem demandando comprovações e validações. Assim, a “boa” resposta é aquela que conduz de forma coerente ao questionamento inicial, requer dos envolvidos uma decisão que deverá ser analisada coletivamente, proporcionando argumentações, reformulações, reconhecimentos de novas formas de se resolver um conjunto de questões, proporcionando o uso do raciocínio dedutivo para a seleção das inúmeras hipóteses que emergirão no processo.

Desta forma, existem nas organizações praxeológicas e no desenvolvimento do *PEP*, elementos semióticos – raciocínio abduativo, argumentação, signos, objetos, interpretantes, semioses, significados, pragmatismo, ícones, pensamentos diagramáticos, entre outros, - que sustentam a análise dos resultados obtidos ao ser aplicado, mas que estão diretamente ligados a relação do sujeito com o objeto matemático, $R(X, O)$, ao qual pode ser analisadas sob as vertentes: cognitivistas, antropológicas, sociológicas, entre outras.

Essa relação da pessoa (X) com o objeto (O), $R(X, O)$, na TAD é analisada de forma circumspecta, não dando margem para contrapontos advindos das teorias cognitivistas. Chevallard (1996) esclarece que o conjunto de relações estabelecidas por X em uma instituição

é que determina a existência do objeto; essas relações se modificam com o passar do tempo e com as influências do pensamento das várias instituições ao qual fará parte no decurso da sua existência. Tal escolha, em colocar o objeto e as instituições em posições sublimares na sua teoria remete a uma falsa impressão de que não há a presença do sujeito. Entretanto, constatamos nos estudos de Cavalcante; Lima e Andrade (2016) e Cavalcante (2018) argumentações coerentes que permitem assegurar que a $R(X,O)$ está presente na TAD, entre elas: o papel das praxeologias para favorecer o discurso e as práticas desenvolvidas pelos sujeitos e promover, por intermédio das tarefas propostas, o fazer matemático das pessoas nas diversas instituições; uma visão da cognição sob o viés do papel das instituições para a sociedade, da qual as pessoas fazem parte.

Os esclarecimentos advindos dos autores supracitados nos transportaram para a interpretação de que a posição de X frente ao objeto matemático, O , pode adquirir significados diferentes a depender da instituição ao qual ele está inserido. Tal posição nos remete a dialética do objeto epistemológico e do objeto pragmático que desenvolvemos anteriormente, pois inferimos que o sujeito terá relações diferentes com o objeto matemático quanto ao uso que se faz dele nos cursos escolhidos para a graduação. Essa hipótese será aprofundada no transcorrer do próximo capítulo, quando analisaremos os resultados obtidos no desenvolvimento do *PEP*.

Destacamos, nessa seção, o que é um MER e um *PEP*, como eles funcionam, quais são os seus objetivos e como eles refletem nas relações entre as instituições, os sujeitos e os objetos: matemáticos ou não. A seguir, construímos alguns princípios que nortearam a construção do nosso MER e do *PEP*, tomando como base as leituras e relações estabelecidas entre a TAD e a Semiótica peirceana.

4.4 Sugestões de diretrizes para elaboração da questão geratriz do *PEP*:

Há alguns anos, um canal de uma rede televisiva brasileira vinculava uma propaganda com o *slogam*: “Não são as respostas que movem o mundo, são as perguntas!” Frase apropriada para guiar as discussões acerca da formulação de uma questão aberta que tem como um dos seus objetivos promover um conjunto de perguntas e respostas acerca da situação que favoreça levantar hipóteses para sua solução. Se atentarmos para a história da sociedade, perceberemos que ela vem sendo construída pelos homens e é marcada por avanços e retrocessos que tomaram como ponto de partida algumas indagações à natureza, a arte, a cultura, aos astros e que nos

conduziram as diversificadas, sábias, insensatas e estranhas respostas, científicas ou não, que vêm sendo construídas no nosso planeta.

Indagar sobre o que nos cerca sempre foi uma “mola propulsora” para o homem perceber o mundo, conjecturar sobre os fenômenos e interpretá-los. Movidos pela curiosidade, pela ambição, pela competição, ou por interesses diversos, o número de perguntas aos diferentes fenômenos tem ampliado o espectro de respostas e gerado outras questões – tal constructo se assemelha ao esquema herbatiano – que inspirou Chevallard (2013) na construção do *PEP*, e deu suporte para propor o paradigma de questionamento do mundo, em oposição ao paradigma de “visitas as obras”, vigente no sistema educacional de vários países.

A reformulação do ensino francês, os desenvolvimentos da *TPE*, da *AER*, que depois evoluíram para o *PEP*, fomentaram a criação desse paradigma, inicialmente desenvolvido para o ensino e a aprendizagem da matemática, mas que tem ampliado o escopo da disciplina e atingido patamares codisciplinares. Em fase embrionária, o paradigma de questionamento do mundo, ainda precisa percorrer um longo caminho, com algumas pedras a transpor, entre outras, as restrições inerentes aos elementos constituintes das instituições: currículos, livros didáticos, entre outros.

Só é possível questionar o mundo na educação se as pessoas dispõem a refletir sobre os currículos, as políticas públicas nacionais e internacionais, a natureza, as relações pessoais, os interesses econômicos e reivindicar pela mudança de postura ao que está vigente, não aceitando passivamente as ordens e exigências daqueles que não conhecem e não convivem com os problemas da educação.

Quando se questiona um mundo, os conflitos e problemas sociais emergem nas respostas. Como serão tratadas essas respostas na visão do novo paradigma? De qual mundo estamos nos retratando? O paradigma de questionamento do mundo tem interesse em despertar as restrições que são inerentes as instituições? Qual discurso acerca do objeto matemático o paradigma irá tomar? As instituições influenciam os pensamentos dos homens e esses, mantêm viva as instituições. Diante disso, não parece ideologicamente contraditório questionar o mundo sem promover mudanças em quem nos influenciam?

Ao propor o rompimento do paradigma de “visita às obras” em detrimento do questionamento do mundo há uma série de rupturas que definirão auto-organizações e autorregulação do sistema educativo com novos padrões de ordem. Não se propõe uma mudança sem subsidiar mecanismos que facultem, no mínimo, um direcionamento para os

indivíduos que pretendem adaptá-lo a sua realidade. Ao delegar a eles a responsabilidade dos ajustes a serem feitos causam-nos a impressão de que: não tendo princípios que norteiam a ordem a ser estabelecida atribui ao indivíduo (investigadores, professores, ...) a adaptação que melhor lhe convier e o enfrentamento, solitário, às instituições que não atendam ao novo paradigma.

Ora, isso já ocorre com professores e/ou pesquisadores que aplicam metodologias em sala de aula distintas dos padrões monomentalistas ao qual uma maioria prefere seguir. São os ajustes e as adaptações que eles escolhem fazer frente a uma situação sob o seu controle, mas a qual não alcançam resultados sob a noosfera. Não consistiria então em uma mudança de paradigma, visto que, não transforma os padrões de ordem da instituição educacional de forma a imprimir mudanças significativas e unânimes.

À primeira vista, esta abordagem pode emitir uma posição contraditória ao que foi construído na dialética pessoa e situação, em que defendemos que as escolhas dos indivíduos interferem nos significados atribuídos à situação e que essa também direciona o sujeito para a ação. Valoramos a autonomia do professor em sala de aula para planejar sua organização didática visando ampliar o ensino e a aprendizagem, mas não nos passou despercebido que seu poder de atuação e de ação mais profícuas é restrito aquele espaço.

Para o professor, a existência de algumas crenças institucionalizadas são difíceis de serem rompidas porque emanam de uma cultura enraizada, de valores ao qual a sociedade insistem por mantê-los, tais como: as avaliações classificatórias, “aula boa é aquela que o professor usa o livro, o caderno e explica no quadro o conteúdo”, “metodologia diferente da aula expositiva é o professor querendo enrolar a aula”, “o professor não fez todas as tarefas do livro” e tantos outros discursos que circulam no meio escolar. Desafiá-los é uma escolha consciente do enfrentamento conflituoso que terá de se impor em diferentes instâncias (pais, gestores, colegas de profissão etc.).

Ressaltamos que a recompensa para esses professores não é o reconhecimento e a publicidade dos seus feitos, mas é identificar que no universo de quarenta estudantes, ao menos um deles, desenvolveu o potencial crítico de questionar a realidade que o cerca, ampliar o conhecimento adquirido para a sua profissão e para a sua vida, respeitar a diversidade e se tornar um cidadão bom no e para o mundo. É na situação proposta em sala de aula e as organizações planejadas que a ação do professor acontece e não temos a pretensão de assumir responsabilidades as quais as estruturas de poder querem manter.

Para a institucionalização daquele paradigma seriam necessárias algumas transformações, tais como: a flexibilidade na estrutura do currículo; delegar autonomia e legitimidade aos professores; uma cronologia temporal distinta da que está posta; promover diálogos entre as diferentes áreas; capacitá-los ao uso de tecnologias disponíveis e uma mudança de valores, de hábitos e de crenças na cultura escolar.

Ainda, precisamos abordar dois outros contextos acerca do paradigma do questionamento do mundo: primeiramente, temos consciência de que ele foi elaborado para a matemática e que os níveis de determinação e o campo codisciplinar apresentaram como emergentes para auxiliar a busca por uma resposta a uma questão geratriz. No entanto, o modelo epistemológico de referência é construído a partir do objeto matemático criado pelo matemático puro e comprovado nos mais rigorosos métodos científicos. Há interesse da comunidade matemática de se ter respostas que não estejam no *milieu* restrito e científico? Esse paradigma continuará privilegiando o objeto epistemológico como visto pelo matemático puro ou flexibilizará outras formas de concebê-lo, advindos de um mundo não científico? Resistirá as pressões científicas quando as respostas forem dadas por outras matemáticas ou por outros campos do conhecimento?

Também é relevante considerar a fragilidade a que está exposta a criação de uma questão geratriz. Quais critérios o investigador toma para elaborar uma questão que proporcione atender ao paradigma? Como conduzir o *PEP*, visto que os currículos não foram modificados, exigindo o cumprimento do tempo cronológico e dos objetos matemáticos a ser ensinados?

São nervuras que o novo paradigma terá que lidar e que, cedo ou tarde, exigirá dos investigadores posturas bem definidas, ações proativas e argumentações sólidas. Não queremos nos opor a esse paradigma, mesmo porque acreditamos que ele traz contribuições interessantes para as instituições, com reflexos para a humanidade, tendo em vista, que a formação dos indivíduos guiados por ele redimensiona o seu contato com o mundo e com os conhecimentos. Apenas levantamos algumas lacunas para estudo e ajuste acerca do novo paradigma que emergem das diferenças culturais e sociais ao qual o mundo está repleto. E ao questioná-lo assumiremos a possibilidade de que respostas podem surgir contrárias aos interesses da própria teoria que a sustenta demandando fazer alguns recortes ou limitar o poder de atuação que poderá colocar em risco a própria mudança do paradigma.

Em síntese, o dispositivo do *PEP* é um instrumento que potencializa a proposta da mudança do paradigma de “visitas às obras” para o de questionamento do mundo, porque

faculta ao sistema didático condições de ampliar as questões e as praxeologias que podem ser criadas em torno da matemática levando em conta o *milieu*, o modelo epistemológico dominante e a elaboração de um MER apropriado para conduzir a escolha de uma melhor resposta para a questão geratriz.

A questão deve promover espaços para o debate que extrapola os conteúdos da disciplina e alcance outros níveis de determinação. O pesquisador/investigador, consciente das ações que promove, desestabiliza o sistema didático e os resultados podem não ser imediatos. A lentidão do processo educacional nem sempre é bem-vista pela sociedade atual, que apresenta um nível de expectativa alto para os seus efeitos, fruto de uma concepção consumista e empresarial em que visa o produto instantâneo. Entretanto, o “produto” da escola é o conhecimento e para adquiri-lo a “moeda de compra” é a paciência, pois o tempo de aprendizagem de cada pessoa é distinto.

Outro ponto a ser discutido é que elaborar uma questão demanda muita leitura, pesquisa, estudo e dedicação ao objetivo proposto. É necessário empreender uma análise prévia das condições e restrições da questão; das organizações praxeológicas - matemática (nesse caso) e didáticas – que precisam ser delineadas; prever possíveis rupturas do contrato didático e estar aberto e disposto a aprender, tendo em vista, que a metodologia é sempre para estudo e para a pesquisa.

Para o pesquisador/investigador iniciante, se faz necessário um direcionamento de como elaborar uma questão geratriz, é preciso esclarecer que o *insight*, a criatividade, não emerge como apenas uma iluminação divina, mas ela é fruto de uma crença individual, da forma de perceber o mundo e das experiências vividas.

Esta situação proposta pode ser inspirada dentro do próprio campo da matemática ou extrapolar os limites desta disciplina. Ela ainda, pode ser direcionada para atender o ensino de um determinado objeto matemático cumprindo o tempo cronológico de um trimestre, semestre ou ano letivo ou pode fazer parte de um projeto de uma disciplina. Como, por exemplo, o CDI. Entretanto, a existência do currículo pode restringir o campo de atuação e as condutas a serem tomadas.

Para uma sociedade imediatista, em que a cultura é o de “achar tudo pronto” nos causa impacto ao perceber que não existe um caminho para a criatividade, ela em si é o caminho. Nesse sentido, ela não pode ser considerada como padrões a serem seguidos com promessa de

êxito ao segui-los, ela nasce do desprendimento do olhar, da sensibilidade e do desejo, por isso, tem um impacto de surpresa, de *insights* momentâneos.

No entanto, podem ser articuladas situações vividas tanto no campo pessoal como no profissional, agregando os conhecimentos adquiridos da teoria e da prática. Como vimos, não existe uma regra fixa, mas podemos estabelecer algumas diretrizes para nortear sua elaboração, a saber:

- Tome uma atitude pessoal: querer desapegar dos cânones científicos. Para se criar algo é preciso que uma situação seja percebida sob perspectivas diferentes que inspire raciocínios abduativos. O movimento de uma forma, um passeio inusitado, assistir um filme, participar de uma conversa, analisar uma pintura, visualizar um objeto, ler um livro podem ser inspiradores para o desenvolvimento da questão.
- Em seguida, pesquise situações em que o objeto matemático possa ser explorado, incluindo a busca por conhecimentos de outras áreas;
- Caso não encontre, busque na história da matemática e das ciências elementos que possam fazer emergir a questão;
- Se mesmo por essa via não encontrar informações, pesquise em livros de edições, antigas ou atuais, situações em que o objeto aparece aplicado em contextos externos a matemática;
- Procure estabelecer relações com as experiências vividas particularmente ou coletivamente que de alguma maneira assemelham-se com algum aspecto do objeto ou da sua aplicação;
- Selecione as informações obtidas que permitem conhecer o universo da questão proposta. São as variáveis dependentes e independentes que estão associadas ao contexto em que a situação irá se apresentar;
- Manipule essas variáveis, levantando hipóteses, observando as várias direções que podem emergir e reduza ou amplie a sua quantidade, se fizer necessário;
- Considere um número de variações possíveis do tema escolhido, obtendo informações parciais que consistirão em perguntas e respostas durante o percurso;
- Verifique se as variáveis escolhidas se encaixam no objetivo maior da aula ou da investigação;
- Munidos de todos os dados crie ou (re) crie a questão. Ao redigi-la observe se a apresentação está coerente com o seu objetivo, se ela está redigida de forma clara, coesa e sem erros ortográficos ou gramaticais.
- Avalie as condições e restrições da questão proposta e do *Percurso de Estudo e Pesquisa*;
- Elabore as organizações matemáticas e didáticas para o desenvolvimento do *PEP*.

- Se possível, simule e discuta a proposta original com outros investigadores ou grupos de estudo, para ampliar a percepção das dimensões do problema (epistemológico, ecológico, econômico e da linguagem).

Destas diretrizes, ficou marcante em nossa interpretação que a questão geratriz é sempre uma abdução, uma ideia nova, que desponta como uma heurística, um lampejo, um desequilíbrio na forma de pensar que permite ao investigador estimular a sua criatividade. Ela é um desafio ao qual os resultados são imprevisíveis para a humanidade, pois a formação de indivíduos que questionam, gerencia dados, formulam perguntas e respostas ainda não pensadas, desestabilizam as instituições e promovem mudanças.

Para o desenvolvimento desta pesquisa o dispositivo foi essencial para a articulação que promovemos com os pressupostos da Semiótica peirceana e a TAD, ao qual só foi possível pela escolha criteriosa da questão geratriz que proporcionou um diálogo entre as linguagens (visual, matemática, gestual, virtual, ...) e as teorias. Na seção 4.5 esclarecemos qual a fonte inspiradora para a questão elaborada e os primeiros ajustes feitos antes da aplicação do PEP.

4.5 O modelo de inspiração para a construção do PEP

No ano 2017, ocorreu na cidade de Madrid, na Espanha, o VIII Congresso Ibero-americano de Educação Matemática - CIBEM, após a apresentação de várias conferências públicas distribuídas em uma semana, a organização do evento destinou um dia livre para que os partícipes pudessem “turistar” pela cidade ou pelo país. Foi a oportunidade que a investigadora principal desta tese teve de conhecer a cidade de Barcelona, e ter o seu primeiro contato com as obras de Antoni Placid Gaudí (1852-1926), um modernista catalão que imprimiu originalidade a sua arquitetura, espelhando-se em modelos da natureza e da religião.

É impossível não se encantar com a disposição dos arcos, das curvas, das cores e das cerâmicas que se desvelam e se harmonizam aos olhos dos admiradores ao adentrar no mundo criado pelo arquiteto. Uma sensação de primeiridade explícita, que desponta e inunda a visão. Tal brevidade é interrompida pela mente que insiste em reagir ao encantamento a procura da percepção das formas que se descortinam, da reação às cores, do equilíbrio e da delicadeza dos detalhes, de uma religiosidade posta intencionalmente pelo artista, para aproximar o homem de uma entidade maior, divina. Uma segundidade, que busca na reação uma interpretação pessoal do artista, e uma significação profunda para o admirador, imprimindo uma terceiridade.

Um sentimento de proximidade com a matemática se fortalecia a cada local visitado. As formas envolvendo as Superfícies Quádricas se desmembravam das paredes e dos tetos e mostravam suas facetas ao investigador desse estudo, uma mistura da experiência profissional com uma sensibilidade artística, de quem vê as entidades matemáticas se abrir em diferentes perspectivas dinâmicas e abstratas. Nesse contexto, podemos nos encontrar com os escritos de Peirce (1958), ao opinar⁸³:

Parece-me que enquanto no prazer estético nós atendemos à totalidade do sentimento - e especialmente à totalidade resultante da qualidade de sentimento que é apresentado na obra de arte que nós contemplamos - é, no entanto, um tipo de simpatia intelectual, uma sensação de que há um sentimento de que se pode entender, um sentimento razoável. Eu não posso dizer exatamente o que é, mas é uma consciência que pertence à categoria de representação, embora represente algo na categoria de qualidade de sentimento. (CP 5.113, 1958, tradução nossa)

De fato, é algo instintivo, natural, que desperta e que nos fez ir em busca da confirmação da hipótese: a existência de objetos matemáticos naquelas obras. A visita à Casa Museu de Gaudí e no The Gaudí Exhibition Center, constatamos o uso de conceitos matemáticos pelo arquiteto frente à exposição dos documentos e maquetes ali apresentados.

Os arcos catenários, os paraboloides, os hiperboloides, os helicoides, as conóides, as espirais estão projetadas nos tetos, nas fachadas, nos corrimãos das escadas, nas ondulações do telhado, enfim, nas diversas obras de Gaudí espalhadas em Barcelona e cidades circunvizinhas, como: nas Casas Batlló e Millá, no Parque Güell, na Sagrada Família, na Casa Vicent, na absíde do monastério de Montserrat, entre outras.

Gaudí dispunha de grande conhecimento da engenharia civil, observável na disposição de vigas duplas com o objetivo de sustentar as superfícies curvas, que são superfícies regradas obtidas pela união de várias retas, as geratrizes, e a que se move sobre uma curva, a diretriz. Quando jovem, ele estudou a Geometria e as formas das superfícies: no plano, nas curvaturas simples (cilindro e cônicas), nas curvaturas deformadas (cilindroides, conóides, parabolóide hiperbólico e hiperbolóide de revolução) que se fizeram presentes em suas obras, ora utilizando as helicoides para imprimir movimento, ora os hiperboloides para emitir e irradiar a luz.

⁸³ It seems to me that while in the aesthetic enjoyment we attend to the totality of the feeling - and especially to the totality of the resulting feeling quality which is presented in the work of art that we contemplate - is, however, a kind of intellectual sympathy, a sense that there is a feeling there that one can understand, a reasonable feeling. I can't say exactly what it is, but it is a consciousness that belongs to the category of representation, although representing something in the category of quality of feeling. (CP 5.113, 1903)

Explorou com maestria o seu conhecimento sobre o cálculo estrutural, um grande marco da mecânica em sua vida profissional, que o possibilitou projetar colunas, ramificações, bóvetas, catenárias que suportavam as tensões e distribuía as cargas de forma equilibrada, permitindo assim construções firmes que resistiram a algumas guerras: a Guerra Civil Espanhola e a Segunda Guerra Mundial.

No que diz respeito ao conhecimento acerca da resistência dos materiais, ele empreendeu: novos processos de técnicas de tratamento, *trencadís*⁸⁴, presentes na Casa Batlló; ele também estudava o solo e o aproveitava como fez na Casa Botine usando as rochas catalisa e a pizarra⁸⁵ e modelava o terreno como fez no parque Guell usando ferro fundido e argamassa. O que nos permite inferir que Gaudí tinha consciência do seu papel ambiental, pois sempre preocupava com o reaproveitamento de materiais em suas obras.

Estudou sobre os raios de incidência do sol, que para ele deveria ter uma inclinação de 45° devido a influência do mar mediterrâneo, e os efeitos deles em suas obras. Por esse motivo soube utilizar os ladrilhos na Casa Batlló empreendendo um engenhoso projeto de distribuição gradual das cores nas paredes começando com uma cor azul cobalto na parte mais alta do prédio e com branca, na parte mais baixa para que compensasse a variação da luminosidade. Ele preocupou-se também com a ventilação natural que deveria circular por suas obras e usou o sistema de iluminação a gás. Possuía conhecimento da engenharia elétrica e trabalhou num projeto para uma linha de elétrico em Montjuic.

A cada obra visitada se desenhava um contexto propício para um questionamento mais amplo sobre as relações que as obras gaudinenses estabelecia com áreas diferentes do conhecimento: matemática, física, as engenharias: civil, ambiental, elétrica e arquitetura. E foi desse despretenso passeio turístico que emergiu a questão geratriz do *Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP*.

Inicialmente, assim elaborada: **com a finalidade de reproduzir as formas da natureza, Antonio Gaudí usou Superfícies Quádricas em suas obras. Como podemos estudar os modelos arquitetônicos gaudinenses em função do objeto matemático?**

⁸⁴ Trancatís são mosaicos montados a partir de fragmentos das cerâmicas

⁸⁵ A rocha caliza é uma rocha sedimentar composta por carbonato de cálcio (CaCO_3), calcita e apresenta traços de magnesita (MgCO_3). A pizarra é, também, uma rocha sedimentar homogênea de grão fino formada por sericita, moscovita, clorito e quartzo.

Ao formular esta pergunta deparamos com uma surpresa: a implícita relação entre a arte gaudinense, a Semiótica peirceana e a TAD, um conjunto que delineou perspectivas de amplitude das situações em que um indivíduo vivencia e articula teoria e prática. É o que descrevemos na seção seguinte.

Influência das obras de Gaudí e a relação com a Semiótica peirceana e a TAD

O processo de criação de Gaudí é, em termos semióticos, uma abdução, de pura originalidade, uma mistura da estética: da arte e da natureza, ao qual traz também uma representação e uma significação para cada imagem que enaltece sua obra. Existe uma linguagem que flui das imagens, das diferentes representações que coabitam o mesmo espaço. São ícones que buscam formas tridimensionais para transmitir leveza; índices para se fazerem presentes e símbolos para demarcar regras. Uma semiose marcada pelos signos, os objetos e os interpretantes para a sua existência.

A presença das formas tridimensionais na arquitetura gaudinense, as quais são denominadas pela matemática de superfícies regradas, nos direcionou para a organização das praxeologias didáticas e matemáticas, com chances de estabelecermos uma interação entre a Semiótica e a Teoria Antropológica do Didático.

Permitiu também reconstruir significados e interpretações aos objetos matemáticos, transpondo da sua posição epistemológica para a pragmatista. Segundo Herrero (1988)⁸⁶:

Os processos semióticos, porque são precisos, passam por toda fixação da experiência seja comum, prática, ou científica, será sempre por isso necessariamente parcial, sempre incompleta; nem mesmo o aspecto mais criativo da experiência pode aspirar, conjurar esta incompletude, embora se trate da criação de supostas verdades. (HERRERO, 1988, p.20, **tradução nossa**)

Essa posição do autor nos remete ao falibilismo, em que Peirce defende que não existem certezas sobre as verdades, pois elas podem ser frutos de crenças, ou interpretações equivocadas, sujeitas à mudança a qualquer tempo. Nesse ínterim, a verdade é assíntota ao tempo (no mesmo sentido usado na matemática). Ela será o limite quando o tempo estiver “tendendo” ao infinito. Assim, as experiências vividas não nos permitem estabelecer verdades únicas, elas serão em algum momento repaginadas, reconfiguradas.

⁸⁶ Los procesos semióticos, precisamente por serlos, atraviesan toda fijación, y la experiencia, sea común, práctica o científica será siempre por ello necesariamente parcial, siempre incompleta; ni siquiera el aspecto más creativo de la experiencia puede aspirar a conjurar esta incompletude, aunque se trate de la creación de supuestas verdades.

Com relação ao ensino e à aprendizagem da matemática destacamos que desmistificar supostas verdades, nos parece algo longe de acontecer, as crenças, os mitos e expectativas criadas transformam o seu ensino em um procedimento estático, em que o professor explica e os estudantes fazem exercícios. São as pedagogias “monumentalistas” (CHEVALLARD, 2007), em que cada disciplina vive soberana no seu universo individual, questões formuladas com a intenção de prever o resultado de uma questão matemática, aplicando sempre a *práxis* e o *logos*, determinado no interior da disciplina, das obras visitadas e estabelecido pela *noosfera*.

O PEP é um diferencial para o (re)significado pedagógico, pois alcança níveis mais altos de incertezas, promove uma mudança de percepção do objeto matemático, um movimento que sai de uma zona de conforto - o seu habitat epistemológico da matemática pura – para transitar no uso que se faz dele: um habitat paradigmático, que pode alcançar o conhecimento de outras disciplinas, abordar problemas da sociedade e das civilizações. Aqui não estamos considerando sob a perspectiva de “eficiência de habilidades profissionais”, em uma visão tecnicista de produzir conteúdos que atendam ao mercado de trabalho, mas há que se questionar também para que serve um objeto em que se usa uma linguagem pouco compreensível, elitista e excludente.

A matemática pura tem historicamente ocupado uma posição hierárquica de destaque no mundo e aqueles que a estudam são os privilegiados, superdotados, valorados pela sociedade; os demais, são postos como subservientes, incapazes e que para desencanto prevalecem a margem do mundo das rigorosas demonstrações e abstrações “iluminadas”. A matemática aplicada, relegada a uma segunda posição, tem tomado a frente em vertentes diferentes, reconhece a importância dos objetos matemáticos epistemológicos, os usam, mas tem a consciência do papel de “ferramenta” que eles desempenham em outros espaços: nas engenharias, na arquitetura, na física, na medicina. Sobre isso, Chevallard⁸⁷ destaca:

Durante séculos, a matemática como instituição cultural prosperou em uma dupla apresentação: foi entendido como sendo composto, por um lado, de matemática “pura”, e, por outro lado, da matemática “mista”, com a sua difundida *ethos* e toque levemente imperialista. A parte “mista”, mais tarde chamada matemática “aplicada”, tem diminuído constantemente na escola durante as últimas décadas, enquanto

⁸⁷ For centuries, mathematics as a cultural institution thrived on a twofold self-presentation: it was understood as being composed, on the one hand, of “pure” mathematics, and, on the other hand, of “mixed” mathematics, with its pervasive *ethos* and slightly imperialistic touch. The “mixed” part, later called “applied” mathematics, has steadily declined at school during the last decades, while what remained of the former part— pure, though elementary, mathematics— tried to symbolize and maintain the old “empire”. It is my belief that this time has now come to an end. Today, we have to revive the epistemological spirit of mixed mathematics, although without any cultural arrogance, but with the political and social will necessary to revitalise the idea that mathematics is for us, human beings, a solution, not a problem.

permaneceu da primeira parte - matemática pura, embora elementar – tentou simbolizar e mantém o antigo “império”. É minha convicção que desta vez, terminou. Hoje, temos que reavivar o espírito epistemológico das matemáticas mistas, embora sem qualquer arrogância cultural, mas com a política e com vontade social necessária para revitalizar a ideia de que a matemática é para nós, seres humanos, uma solução, não é um problema (CHEVALLARD, 2015, p. 15 – **Tradução nossa**).

São mundos matemáticos coabitando um único mundo matemático. O que não justifica a sobreposição de nenhum deles, mas um relacionamento imbricado, em que a relevância e o significado vão depender do lugar que eles ocupam: na matemática ou em outras áreas. Ao retratar esses aspectos percebemos a extensão desses “locais” para a sociedade e os reflexos das conquistas dos dois mundos: enquanto os conhecimentos inerentes a própria matemática – teoremas, axiomas – provados cientificamente, proporcionaram inovações para a sociedade, muitos deles não foram inicialmente criados para uma finalidade específica, surgiram não com uma meta, mas como um desafio dentro do próprio campo, como por exemplo, o surgimento da Topologia. Em contraposição, houve a criação de alguns instrumentos práticos que impulsionou e mobilizou os matemáticos na busca de explicações para o seu funcionamento, como ocorreu com os feitos de Arquimedes e com alguns relatos antigos descritos em tratados históricos.

Do que foi posto, verifica-se que são percepções distintas para o mesmo objeto, o que não inviabiliza o diálogo entre eles. Tal postura, de estender o olhar nas bifurcações que o conhecimento matemático tem tomado frente ao uso e a epistemologia dos seus objetos, é um dos aspectos que propulsionam o rompimento do paradigma dominante de “visitas as obras” (CHEVALLARD, 2015), que são os recursos utilizados para ensinar e aprender matemática (livros, cadernos, entre outros). Este paradigma colabora para perpetuar a visão dominante da existência de apenas uma única matemática: a pura⁸⁸, que se tornam monumentos, sem vida dentro destas obras, com maior ênfase de demonstrações, nos livros do ensino superior.

Nesse aspecto, a Semiótica peirceana favorece que relações de semioses possam ser articuladas em redes de significados, interpretações e representações sob os diferentes fenômenos do mundo e, auxilia na análise e interpretação dos discursos⁸⁹ institucionalmente aceitos. Santaella (2009) afirma que “a semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação

⁸⁸ Não vamos entrar no mérito desse adjetivo, mas não nos passa despercebido uma metáfora implícita a “raça pura”, que tanto marginalizou e segregou em um período da história da civilização humana.

⁸⁹ Aqui referimos a análise do discurso, como aquele que tem como objeto de estudo a linguagem, em uma relação de troca com o mundo e com aspectos que vão para além dela (da linguagem).

todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame de modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e sentido”.

Semioticamente, o discurso dominante da matemática pura é uma interpretação pandêmica, em que se descreve um julgamento de valor coletivamente instituído, todavia ela não é a única, visto que, o potencial de gerar infinitas semioses proporcionam interpretações variadas para a mesma ação, basta lançar novas perguntas ao mundo.

Nesse sentido, a articulação dos pressupostos da Semiótica peirceana com o PEP da TAD apresentou condições para o desenvolvimento das organizações matemáticas e didáticas que embasaram a aplicação do PEP, em torno da questão formulada. É o que se pode constatar na seção 4.5.

4.5 A organização didática do PEP

Na seção 4.3 descrevemos a fonte inspiradora para a elaboração da questão aberta e apresentamos a sua primeira versão, ao qual foi posteriormente modificada. Em seguida, na seção 4.4 justificamos como as obras de Antoní Gaudí, a Semiótica peirceana e a TAD apresentavam elementos que poderiam ser unidos em prol do objetivo ao qual propusemos.

Desta feita, planejamos uma organização didática para o desenvolvimento do PEP que se concretizou em um curso formativo com estudantes dos cursos das Engenharias e da Licenciatura em Matemática, que será descrito no que segue.

4.5.1 Primeiros encaminhamentos da Organização Didática

No Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPGEM) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) é disponibilizada a componente curricular Fundamentos da Didática da Matemática para estudantes matriculados no curso de Mestrado em Educação Matemática, que acontece semanalmente com duração de 3 horas.

No ano de 2018, a autora desta tese foi convidada pela professora doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho para palestrar sobre os pressupostos da Semiótica Peirceana naquele curso e falar sobre a pesquisa de doutorado que estava sendo desenvolvida em torno daquela teoria.

No dia combinado, 10 de maio de 2018, apresentamos os slides que registravam os principais conceitos da Semiótica Peirceana e alguns exemplos de como aplicá-los na

matemática. Durante o período da exposição a professora e os estudantes fizeram perguntas que foram sendo respondidas ao longo da apresentação. Ao final, registramos o desenvolvimento da pesquisa do doutorado ao qual, naquela época, encontrava-se delineada de acordo com o esperado para o período.

Com o consentimento da professora, lançamos para os seis estudantes da disciplina a questão aberta criada. Estimulando-os a pesquisarem sobre o tema, registrarem por escrito as informações obtidas entregando-as na aula da semana seguinte.

No dia 18 de maio, retornamos a aula e iniciamos com uma palestra do professor doutor Saddo Ag Almouloud sobre a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gerard Vergnaud. Após a palestra, a professora solicitou que os estudantes explicassem como responderam à questão proposta na aula anterior sobre as obras de Gaudí. Dos seis estudantes, três deles fizeram a pesquisa e, entre esses, apenas dois registraram por escrito.

O estudante E₁, fez uma pesquisa detalhada das relações das obras de Gaudí com a natureza, com a estrutura arquitetônica, destacando as formas tridimensionais que ele explorava. Em seguida, o estudante registra as leis que definem as equações do parabolóide hiperbólico, do hiperboloide de uma folha e do elipsoide e menciona ser exemplos de superfícies quádricas. Seu resumo é apresentado na Figura 52.

Figura 52: Resumo apresentado pelo estudante E1

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO - PUC-SP
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Disciplina: Fundamentos da Didática da Matemática – 1º semestre – 2018
Professora: Cibele de Queiroz e Silva Costa
Aluno: E1
Data: Março
Mentor: Mikko Saksvirtti e Delfino Kozanovic

Superfícies Quádricas nas obras de Antoni Gaudí

Os grandes arquitetos da história, desde os antigos egípcios até os atuais, preferiram usar a linha reta e as formas elementares da geometria plana e sólida que, devidamente organizadas, conseguiram representar no plano uma série de figuras elementares tridimensionais, como a esfera, o prisma ou o cilindro, que representam a natureza em sua essência. Gaudí utilizou desde o início do seu trabalho o arco parabólico, "o mais natural e racional dos arcos, o único que adapta com perfeição a forma do prédio, que utiliza os arcos para o equilíbrio para o espaço sob o efeito e sentido do movimento do tempo" (CAUDEL, sem data).

A principal inspiração de Gaudí é a natureza. Ele estudou com profundidade as formas orgânicas e geométricas presentes na natureza, procurando uma linguagem capaz de capturar essas formas e estruturas. Algumas das suas maiores inspirações vieram da natureza de Montserrat.

Por isso, a natureza é traduzida no uso de formas geométricas naturais, como o parabolóide hiperbólico, que é uma superfície quádrica. A sua equação é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Parabolóide hiperbólico, por sua representação gráfica, é denominado "sela de montar". Uma das suas características é de possuir raios na sua superfície.

Outro exemplo, amplamente reconhecido nas obras de Gaudí, é a hiperbolóide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolóide é a superfície de revolução gerada pela rotação de uma hipérbole em torno de um dos eixos dos seus dois eixos de simetria.

A terceira superfície quádrica de destaque nas obras de Gaudí é o elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

A Terra é uma elipsóide.

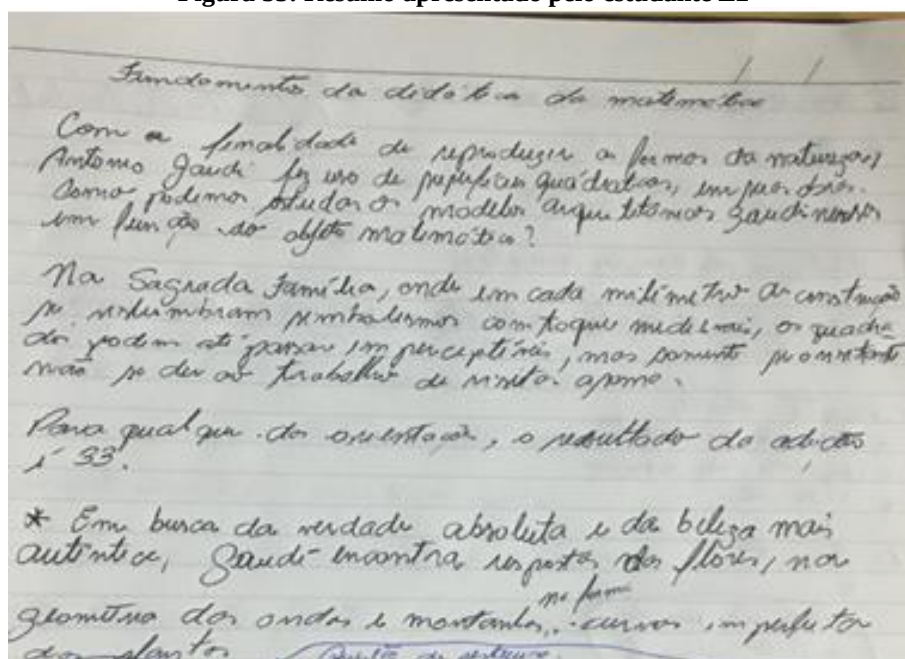
Estudo sobre Gaudí explora superfícies naturais e quádricas, e, portanto, interpretar o significado do exemplo escolhido em cada coleção contextualizando de objetos que o fazem, como o movimento físico de um determinado elemento geométrico. Dessa forma, o ponto a ser relacionado é o registro em que uma superfície geométrica tridimensional se desenvolve.

Tanto no parabolóide como no hiperbolóide e elipsoide, Gaudí trata muitas vezes alguns de seus objetos. Essas formas são funcionais e estéticas, e Gaudí as usa com

Fonte: Material disponibilizado pelo estudante

O estudante E2, registrou apenas a semelhança das estruturas arquitetônicas, destacando a Sagrada Família e a relação das curvas com a natureza, como pode ser constatado na Figura 53.

Figura 53: Resumo apresentado pelo estudante E2



Fonte: Material produzido pelo estudante

Os resultados foram discutidos com os estudantes que verbalizaram a conexão entre as obras de Gaudí e a matemática. Confirmando a nossa hipótese de que a partir daquela pergunta poderíamos desenvolver o PEP.

4.5.2 A segunda fase da O.D.

A partir da experiência vivida na situação descrita anteriormente, passamos então a estudar o objeto matemático e a buscar modelos epistemológicos para a Integral Dupla e o seu uso no cálculo de medida das superfícies quádricas, com o intuito de estruturar a organização matemática e construirmos paralelamente o Modelo Epistemológico de Referência apresentado no Capítulo 3, deste estudo.

Nesse período a professora doutora Mariana Bosch participou presencialmente de uma banca de qualificação no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP ao qual a autora desta tese, teve oportunidade de discutir sobre a sua pesquisa. Ao mencionar sobre a questão, ela propôs que ela fosse mais ampla, sem um direcionamento tão explícito para a matemática, sugerindo: **Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo?**

Frente a proposta do PEP, decidimos por modificá-la, visto que, ela possibilitaria atender aos interesses dos públicos que queríamos focar, estudantes: da Licenciatura em Matemática e Física e dos graduandos das Engenharias e da Arquitetura.

Iniciamos então a preparação da organização didática do curso ofertado para aqueles sujeitos, que descrevemos nas subseções seguintes.

Divulgação, inscrições, seleção e a estrutura do curso

A partir da questão aberta do PEP estudamos as relações com outras áreas do conhecimento e as possíveis perguntas e respostas que poderiam emergir. Para esse fim, planejamos um curso com parecerias entre o Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Tal feito foi possível pela posição que a primeira autora deste texto ocupa nestas diferentes instituições: é professora efetiva na primeira; estudante do PEPGEM e integrante do grupo Processo de Ensino e Aprendizagem (PEA-MAT) na segunda e, integrante do Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM) na última.

De acordo com as hipóteses desta pesquisa que primou por identificar os significados e as respostas que os estudantes atribuíam a questão aberta do PEP, foi organizado um curso intitulado: (Se) Integre Duplamente a Superfície Quádrica realizado em cinco sábados, no período de março a abril de 2019 na modalidade presencial.

A divulgação do curso ocorreu por duas maneiras: virtualmente usando o site da UESB e presencialmente, com a panfletagem nas instituições. No primeiro, a mensagem ficou no ar por um período de quinze dias e havia um link que conduzia os interessados ao formulário de inscrição. A Figura 54, apresenta a chamada do site.

Os interessados clicavam no link (Aqui) e o sistema os conduziam a uma página da web eventos para fazer a inscrição, preenchendo uma ficha com dados pessoais e institucionais.

Simultaneamente, ocorreu a divulgação por meio das redes sociais (Facebook, WhatsApp, Instagram, ...) o convite para participarem do evento, para isso foi utilizada a notícia elaborada pela Assessoria de Comunicação da UESB, apresentada na Figura 54, bem como, a exposição do folder.

Figura 54: Mensagem divulgada no site da UESB

Curso debaterá Integrais Duplas e suas análises | UESB 30/10/19 02:21

 **UESB** Universidade do Estado da Bahia
Assessoria de Comunicação da UESB - tel: 77 3424.8645

Notícias Curso debaterá Integrais Duplas e suas análises

por Ascom - 20.03.2019

Entre os dias 30 de março e 27 de abril, acontece no campus de Vitória da Conquista o curso “(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas”. A atividade, promovida pelo Programa de Extensão Atividades Colaborativas e Cooperativas em Educação (ACCE) e pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática (Geem), é voltada para estudantes das graduações nas áreas de Engenharias e Arquitetura, além das licenciaturas em Física, Química e Matemática.

O evento, que será ministrado pela professora Ana Karine Dias, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Bahia (Ifba), tem como objetivo analisar as Integrais Duplas e o que elas podem ensinar por meio das suas análises. A atividade, que será realizada no Laboratório de História do Ensino de Matemática (antigo prédio da Reitoria), contará com cinco encontros presenciais, sempre a partir das 8 horas.

Os participantes terão um certificado emitido pela Uesb e pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). As inscrições podem ser feitas [aqui](#). Para mais informações, acesse o [site do Geem](#), ou ainda entre em contato pelo telefone (77) 3425-9375.

COMPARTILHE

! [Twitter](#) " [Facebook](#) # [WhatsApp](#)

Fonte: www.uesb.br/noticias/curso-aborda-o-uso-do-calculo-no-cotidiano

A outra forma, presencial, se deu com o convite da investigadora principal desse estudo em salas de aula daquelas instituições e foi anexado nos murais o folder em que constava a programação do evento e o site para acesso as informações. No Apêndice A, apresentamos o folder da divulgação do curso, pois compreende a divulgação do curso e é uma das partes da organização didática.

Houve no total 32 inscrições, uma delas era de uma professora e gestora de uma unidade escolar municipal da cidade, as demais, eram de estudantes dos cursos de Física, Arquitetura, Engenharia Ambiental, Elétrica e Civil e da Licenciatura em Matemática, egressos do IFBA, da UESB e da Faculdade Maurício de Nassau. Ressaltamos que não teve inscrições dos estudantes da PUC-SP porque essa instituição está localizada em outro estado do Brasil e especulamos que a desistência devido a distância poderia ser um fator que prejudicaria o PEP. Dos 32 inscritos selecionamos 20 estudantes que haviam cursado o CDI-III e, portanto, encontravam-se em um semestre mais avançado. Essa escolha justifica-se por dois motivos: precisávamos que os estudantes conhecessem os objetos matemáticos em estudo - Superfícies Quádricas e Integral Dupla ministrados, geralmente, no primeiro, no terceiro e no quarto

semestres das graduações supracitadas. O outro motivo, deve-se ao fato de que teriam adquirido, minimamente, um conhecimento específico da área de atuação dos seus respectivos cursos. Quanto a professora inscrita avaliamos que nosso objetivo se concentrava na participação de estudantes ainda em processo formativo, ela havia terminado o curso de Ciências com Habilitação em Matemática no ano de 2002, motivo pelo qual não a incluímos.

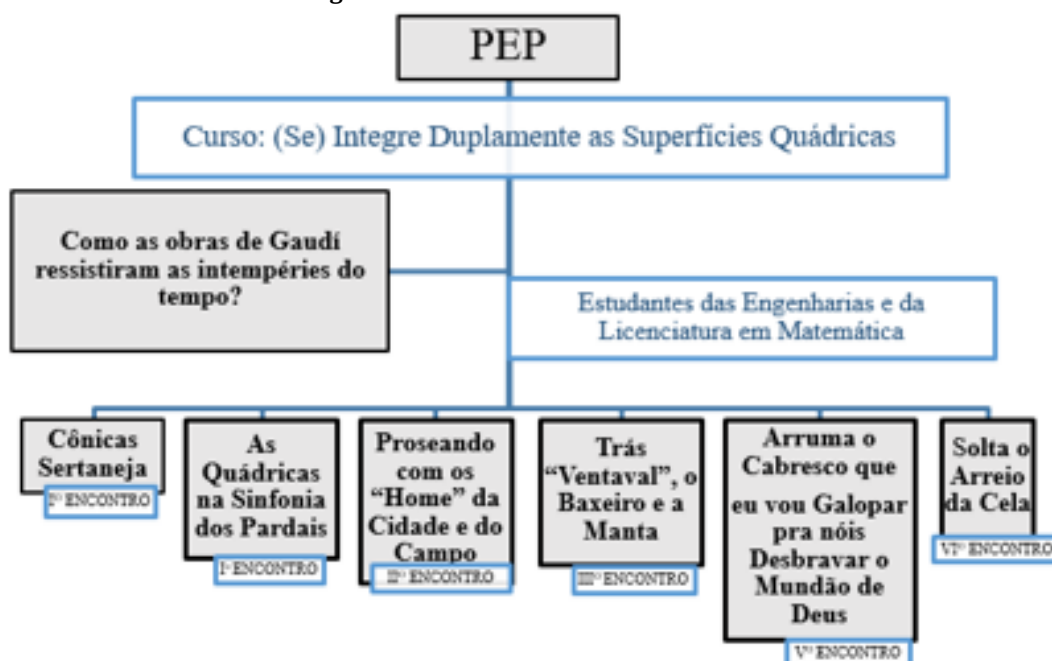
Dos 20 estudantes, um era estudante da Licenciatura em Física da UESB, uma era estudante do curso de Arquitetura e Urbanismo da Faculdade Maurício de Nassau, nove eram estudantes da Licenciatura em Matemática e 9 estudantes das Engenharias do IFBA. Houve oito desistências, entre eles, a estudante de Arquitetura e Urbanismo, o estudante da Física, um da Licenciatura em Matemática e dois das Engenharias, que ocorreram antes e depois do início do curso. Alegaram como justificativas: problemas pessoais, demanda do trabalho e a greve que ocorreu durante a realização do curso.

A comunicação do resultado da seleção ocorreu por e-mail, feito de duas formas: para os não selecionados agradecemos o interesse e justificamos os critérios da escolha efetuada. E aos aprovados foram enviadas as informações do primeiro encontro, disponível no Apêndice B.

Como anteriormente relatado organizamos o curso em cinco encontros que procuramos relacioná-lo com a natureza, como foi feito por Antoní Gaudí. Também, propusemos uma mesa redonda com profissionais renomados das áreas das graduações dos inscritos, expondo a relação entre o Cálculo e o exercício das suas atividades laborais. A institucionalização dos objetos matemáticos escolhidos para o desenvolvimento do PEP ocorreu nos dois últimos encontros com atividades diversas que serão detalhadas nas subseções seguintes. Na Figura 55, retratamos uma síntese dos cinco encontros do PEP.

De forma sucinta, o esquema apresentado na Figura 55, retrata o caminho inicial do desenvolvimento do PEP, com a elaboração do curso, a questão aberta, a escolha dos sujeitos da pesquisa e, em seguida, os cinco encontros que foram nomeados de acordo a perspectiva campestre e do contato com a natureza. Os detalhes de cada encontro serão expostos separadamente e ao final esboçaremos um esquema que retrata as etapas desenvolvidas.

Figura 55: Síntese dos encontros do curso



Fonte: Produção da autora

4.5.3 Terceira fase da OD

Nessa fase descrevemos como ocorreu o desenvolvimento do PEP durante o curso, detalhando os procedimentos metodológicos planejados e executados para cada encontro.

4.5.4.1 Primeiro encontro - “Cônicas Sertaneja”⁹⁰:

O primeiro encontro tinha como objetivos: apresentar a proposta do curso; explicar a metodologia de ensino do PEP e promover a integração dos estudantes. Para isso, enviamos, previamente, um e-mail para os selecionados, doze deles se apresentaram, em frente ao pavilhão da antiga reitoria da UESB, as oito horas da manhã, do dia 31 de março de 2019.

Após cumprimentos nos deslocamos para a fazenda “Larga Nova”, situada a 25 km da cidade de Vitória da Conquista, onde passaram o dia. A escolha por este local se deve a articulação e sensibilização em torno da inspiração que Gaudí teve ao se conectar a natureza para produzir suas obras. O ônibus foi fretado de uma empresa particular e foi disponibilizado a alimentação no período. Ressaltamos que o ônus financeiro de todo o curso veio de recursos

⁹⁰ O sertão nordestino é uma região brasileira sem água e com uma vegetação muito escassa. As crônicas sertanejas é uma narrativa que retrata a vida, os mitos e a realidade do sertanejo. Na intenção de associar a matemática com a situação e o local em que ocorreu o curso, usamos um trocadilho e denominamos o encontro de “cônicas sertanejas”.

próprios da primeira autora, advindos da bolsa de estudos do doutorado fornecida pelo governo federal por intermédio da CAPES.

Ao chegar à fazenda foram recebidos pelo proprietário e por um repentista que recitou versos improvisados acerca da importância dos estudos, da natureza e da existência humana, cantou e tocou violão durante o café da manhã fornecido na varanda externa. A atividade teve como objetivo recepcioná-los de uma forma amorosa e alegre.

Ao término do café da manhã foi destinado um passeio de 10 minutos pela fazenda, para que situassem acerca da cozinha, banheiros e o pomar. Enquanto isso, o projetor, os gravadores e a filmadora estavam sendo organizados para o início do curso.

Figura 56: Encontro com o contador de histórias



Fonte: Fotografia do arquivo pessoal da investigadora

No retorno, iniciamos com os esclarecimentos acerca do curso e a importância do preenchimento dos documentos exigidos pelo Conselho de Ética para a pesquisa e para o uso das imagens e gravações (Apêndice C). Destinamos, 10 minutos para que lessem e assinassem, se estivessem de acordo.

Em seguida, foi proferida uma palestra pela professora Ana Karine, autora principal desta tese, com o objetivo de situar o contexto do ensino da matemática e do CDI na atualidade, as relações estabelecidas entre alguns objetos matemáticos e formas geométricas com a natureza e com as artes, incluímos as obras arquitetônicas de Oscar Niemeyer na exposição. Registrado nas imagens da Figura 57.

Durante toda a explanação, houve questionamentos direcionados pela palestrante aos estudantes, no intuito, de que eles expressassem oralmente os significados, os hábitos e as crenças sobre a matemática adquiridas, por eles, no processo formativo. A exposição oral seguida dos slides projetados suscitou várias reflexões e debates nas diferentes perspectivas

acerca da matemática pelos estudantes, que serão registrados e analisados no próximo capítulo. Entre tantos outros, gostaríamos de destacar a percepção que os estudantes despertaram sobre a falta de relações dos objetos matemáticos estudados com a proposta do curso, “a teoria e a prática” como mencionaram nos relatos. Eles serão analisados no próximo capítulo.

Figura 57: Fotografia da palestra inicial



Fonte: Fotografias do arquivo pessoal da investigadora

Dando sequência à programação, convidamos o segundo palestrante da manhã. O professor doutor Claudinei de Camargo Sant’Ana, mestre em Engenharia Mecânica e professor do curso de Licenciatura em Matemática da UESB e dos Mestrados em: Educação; em Ensino; e em Formação de professores nos campi da UESB de Vitória da Conquista e de Jequié, cidades do interior da Bahia. Essa comunicação teve como objetivo apresentar cientificamente as contribuições do CDC para a sociedade. A explanação do investigador adentrou-se para as descobertas científicas que só foram adquiridas por meio do avanço e construção de novos objetos matemáticos que se fizeram necessários; deu alguns exemplos envolvendo situações das engenharias elétrica, civil e nas artes. Ao final fez alguns questionamentos aos estudantes e encerrou.

Foi dado o intervalo para o almoço e descanso. Após esse momento, como alguns deles não se conheciam, espontaneamente acabaram se integrando por meio de jogos, passeios de cavalo, bate papo. Outros preferiram andar e alguns cochilaram. Registramos também esse momento de integração nas imagens da Figura 58.

As 14 horas retornamos para a atividade intitulada: As quádras na sinfonia dos pardais. Esse momento tinha como objetivo relatar, na visão de uma historiadora da arte, o período histórico que viveu Antoní Gaudí. Colocamos o vídeo da professora mestre em Estética e História da Arte, Adriana Palma, que discutia as obras de Gaudí e o contexto histórico do

período em que ele viveu. Entretanto, devido a problemas de ordem técnica não conseguimos transmiti-lo e postergamos para o terceiro encontro.

Figura 58: Momento de Integração



Fonte: Fotografias do arquivo pessoal da investigadora

Após esse inconveniente, demos sequência ao planejado e explicamos para os estudantes, mostrando os objetivos, as nossas hipóteses, as teorias usadas nesta pesquisa e por fim, o dispositivo PEP.

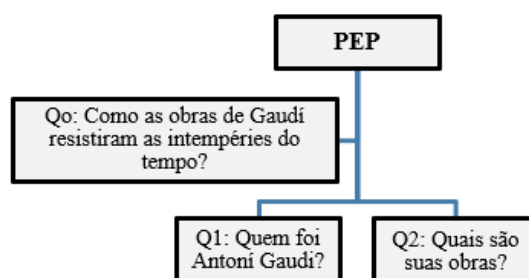
Destacamos a importância da presença deles até o quinto encontro e a participação efetiva deles, com compromisso e responsabilidade perante as pesquisas, o estudo, as perguntas e as respostas intermediárias que iriam surgir no desenvolvimento do PEP. Alguns estudantes pediram mais informações sobre os procedimentos, pois não haviam compreendido como se dariam as pesquisas. Esclarecemos que eles as fariam buscando informações na internet, nos livros, em conversa com outros professores e retornariam no encontro seguinte com os registros escritos sobre os seus achados. Discutiríamos coletivamente ajustando o que não haviam compreendido e criando novos questionamentos para serem respondidas nos próximos encontros, isso se repetiria até que encontrássemos elementos suficientemente coerentes para responder a questão aberta, inicialmente proposta.

Ao verificarmos que eles haviam compreendido o processo formativo que iriam se submeter, lançamos a questão aberta Q₀: **Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo?**

A primeira impressão emitida pelos estudantes era de surpresa com aquela pergunta. Alguns deles exprimiram que não sabiam quais eram as obras de Gaudí e nem a história dele. De fato, foi uma conjectura que também havia considerado, visto que, nas aulas de arte e de literatura nas escolas brasileiras não há uma ênfase relevante para as obras gaudinenses. A partir daqueles discursos foi questionado por eles as seguintes perguntas intermediárias: **Q₁: Quem foi Antoní Gaudí? E Q₂: Quais são suas obras?** Após esse momento, fomos construindo,

sincronicamente, um esquema semelhante ao da Figura 59, mostrando a questão aberta, Q₀, e as ramificações com as duas perguntas que foram construídas naquele momento, Q₁ e Q₂ que foi projetado na parede.

Figura 59: Esquema construído para o primeiro encontro – 1ª fase do PEP



Fonte: Produção da autora

Interrompemos para o lanche da tarde e ao retornarmos perguntamos: qual seria o meio que utilizaríamos para comunicarmos durante a semana? De forma unânime responderam que criássemos um grupo no aplicativo WhatsApp. Então, passou-se a lista de presença para que assinassem e adicionassem o número do telefone ao qual tinha acesso ao aplicativo.

Após o registro, solicitamos que eles esprimissem oralmente como foi aquele dia para eles e então, por volta das 16 horas e 30 minutos, retornamos para a UESB, conforme havíamos previamente informado. Registramos o grupo formado, registrada na imagem da Figura 60.

Figura 60: Imagem do grupo



Fonte: Fotografias do arquivo pessoal da investigadora

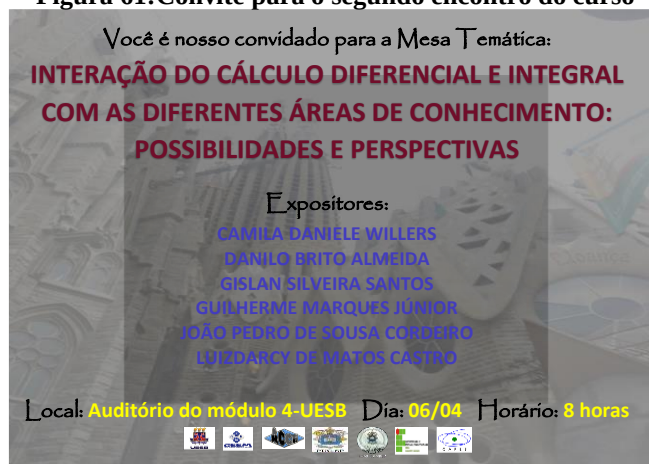
Durante a semana, convidamos os estudantes a participarem do grupo: Integre + ação do WhatsApp e alguns vídeos iam sendo colocados por eles acerca das questões Q₁ e Q₂ à proporção que o 2º encontro se aproximava.

4.5.4.2 Segundo encontro – Proseando com os “home” da cidade e do campo⁹¹

Para esse encontro organizamos uma mesa redonda, com a temática: *Interação do Cálculo Diferencial e Integral com as diferentes áreas de conhecimento: possibilidades e perspectivas*, que contou com a presença de: um arquiteto, um engenheiro civil, um engenheiro elétrico, uma engenheira ambiental, um físico e um matemático, todos atuantes em suas respectivas áreas profissionais e são professores ou foram durante um determinado período. Entendemos que um sistema didático pode ser formado por um conjunto de professores, estudantes e visitantes e uma obra, simbolicamente representado por $(p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, \dots, x_n, O)$ e que o ensino deve promover diferentes formas de aprendizado.

O evento foi divulgado da mesma forma que o curso em geral (online e presencialmente), entretanto, a mesa temática foi aberta ao público. Essa programação tinha como objetivo expor como o objeto matemático, Integral Dupla, é aplicado em diferentes áreas de conhecimento. Foi aberto ao público, pois entendemos que como os espaços físicos e os recursos materiais (energia, água, projetores, funcionários, mídia, entre outros) disponibilizados pertenciam a uma Universidade, mantida com recursos públicos, não deveríamos restringir o acesso dos que compareceram. Elaboramos um convite registrado na Figura 61, que foi distribuído nas instituições durante a semana.

Figura 61: Convite para o segundo encontro do curso



Fonte: Produção da autora

Como descrito no convite, a mesa ocorreu no dia seis de abril de 2019, no auditório do Módulo IV da UESB, local em que funciona a Licenciatura em Matemática. O tempo destinado

⁹¹ Na linguagem sertaneja, quando os homens do campo se deslocam para as cidades, eles dialogam sobre política, economia, agricultura, seca etc. A metáfora usada relaciona com o terceiro encontro do curso no que se refere as interações de diferentes pontos de vista.

para cada expositor foi 15 minutos e o tempo para debate com a plenária foi de 30 minutos. O horário previsto foi das 8 horas às 10 horas daquele sábado. Contamos com a presença de vinte e sete convidados, desses, 12 eram partícipes do curso e os demais, ouvintes. A Imagem do auditório está registrada na Figura 62.

Figura 62: Imagem do auditório no segundo encontro do curso



Fonte: Fotografia do arquivo pessoal da investigadora

Esclarecemos que no decorrer da semana foi enviado aos palestrantes e aos participantes do curso um documento contendo o objetivo geral, o tempo de apresentação e algumas instruções para os encaminhamentos da mesa, que foram incluídos no Apêndice E e F, respectivamente. Houve um atraso na entrega da chave do auditório pelo setor responsável e a mesa iniciou as atividades uma hora depois do previsto. A professora Ana Karine, convidou a mesa apresentando individualmente os convidados e descrevendo as linhas de pesquisa que atuam, a formação, informações retiradas do curriculum lattes deles. Momento registrado na Imagem⁹² da Figura 63.

Figura 63: Mesa redonda com palestrantes



Fonte: Fotografia do arquivo pessoal da investigadora

⁹² Registramos que todos os convidados da mesa assinaram os documentos do Conselho de Ética que autorizam o uso de suas imagens e falas para esta tese.

Após compor a banca, a primeira a expor foi a professora e engenheira ambiental, Camila Daniele Willers, do IFBA, que mostrou o uso da Integral para calcular a medida de uma área devastada, mas foi franca ao dizer que existem programas computacionais apropriados para aqueles cálculos e que ela compreende que de forma subtendida há a presença daquele objeto

O segundo, foi o professor e engenheiro elétrico, Danilo Brito Almeida, do IFBA e na empresa de energia do estado da Bahia – Coelba. Ele mencionou a aplicação da Integral no cálculo da medida da distribuição de postes e da equação dos cabos suspensos em uma determinada área. Relatou ainda um estudo feito, por ele, quando trabalhou na empresa de energia de São Paulo – a Eletropaulo – para a instalação de uma linha de metrô que foram utilizados alguns cálculos envolvendo a Integral.

O terceiro, foi um professor de matemática que leciona no IFBA, Gislân Silveira, e relatou que no início da sua profissão docente não conseguia articular os objetos matemáticos com suas aplicações. E que a partir de uma orientação realizada com uma estudante do curso de engenharia civil, participante do programa de iniciação científica, despertou para a necessidade da interlocução entre a teoria e a prática.

O engenheiro civil, Guilherme Marques Júnior, foi professor substituto no IFBA, atualmente trabalha na Secretaria de Arquitetura e Urbanismo da Prefeitura Municipal de Vitória da Conquista discorreu sobre as lembranças do tempo em que estudou cálculo, mencionando que o conhecimento era teórico e que só foi entender a sua aplicação anos depois no exercício da sua profissão. Mencionou o uso da integral no cálculo do equilíbrio de algumas estruturas, como as vigas. O convidado fez a sua apresentação oral sem uso do projetor.

O arquiteto, João Pedro de Sousa Cordeiro, foi professor por um período pequeno e hoje atua como profissional liberal. Discorreu sobre o uso das formas geométricas aplicadas em fachadas e em design de interiores, sobre as integrais relatou que a utiliza para o cálculo de medidas de superfícies para o desenvolvimento dos projetos arquitetônicos.

O professor da Licenciatura em Física, Luizdarcy de Matos Castro é físico e expôs de forma didática e divertida a aplicação da Integral para o cálculo: do momento de inércia; da energia total de um sistema fechado; do fluxo total de campos eletromagnéticos.

Após o tempo previsto de exposição dos convidados da mesa eles abriram espaços para que a plenária participasse. Houve perguntas para todos os palestrantes e eles responderam de

forma dinâmica, mostrando uma sincronia de posturas e raciocínios bastante semelhantes. Fato constatado por uma professora ouvinte que se encontrava no auditório.

Solicitamos que os palestrantes assinassem os documentos do Conselho de Ética, recolhemos e finalizamos a atividade da mesa temática, as 11 horas e 30 minutos, com os agradecimentos da organização, a entrega do certificado para os palestrantes e uma pequena lembrança. Em seguida foi ofertado um lanche para todos os presentes. Após essa atividade os participantes do curso: (Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas retornaram ao auditório para a segunda etapa daquele encontro.

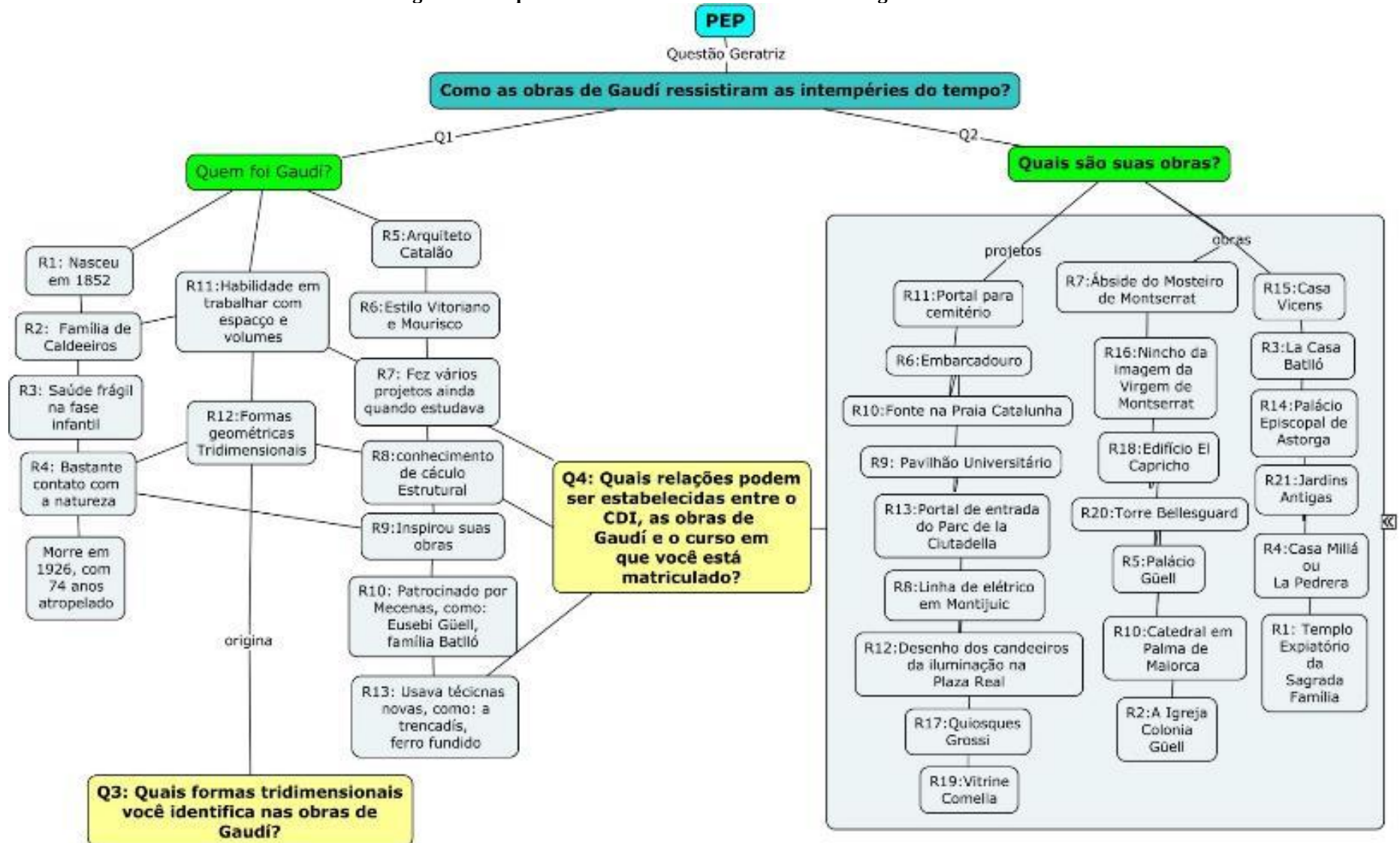
Nesta etapa, os estudantes deveriam apresentar a pesquisa e o estudo em torno das duas questões intermediárias, Q_1 e Q_2 , propostas no encontro anterior. Cada um deles expressou oralmente a resposta encontrada, direcionadas muito sob o olhar de cada curso, o que para nós não nos causou surpresa; um deles relacionou com as formas tridimensionais, que serão descritas com mais detalhes no próximo capítulo. Tal resposta, nos proporcionou abertura para conduzi-los a terceira e quarta questões intermediárias, que de forma indireta partiu daquela resposta obtida. Assim, formulamos as duas questões:

Q3: Quais formas tridimensionais você identifica nas obras de Gaudí?

Q4: Quais relações podem ser estabelecidas entre o Cálculo Diferencial e Integral, as obras de Gaudí e o curso que você está matriculado?

A Figura 64, registra um esquema do desenvolvimento do PEP, até esse segundo encontro.

Figura 64: Esquema do desenvolvimento do PEP até o segundo encontro



Fonte: Produção da autora

Finalizamos aquela manhã de sábado com perspectivas positivas para o terceiro encontro, visto que ocorreria a institucionalização dos objetos matemáticos que se apresentam nas obras do arquiteto catalão.

Na segunda-feira, dia 08 de abril de 2019, a ASCOM publicou no site da UESB uma matéria acerca das duas atividades desenvolvidas nos dias 30 de março e 6 de abril, disposta na Imagem da Figura 65.

Figura 65: Texto publicado no site da UESB



Fonte: Site da UESB

Na subseção 4.5.4.3 discorreremos sobre o terceiro encontro do curso: (Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas.

4.5.4.3 Terceiro encontro – Trás “Vendaval”, o baixeiro e a manta⁹³

Durante o transcorrer da semana, a comunidade acadêmica da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia deflagrou greve, após a negação do comando grevista sobre a continuação do curso tivemos que procurar um outro local para dar prosseguimento ao curso. Em contato

⁹³ Vendaval é o nome de um cavalo que pertence a família da investigadora principal. Baixeiro é uma armação que coloca sobre a pele do cavalo e a manta é um tecido que o protege, antes de ser colocada a cela. A apologia daqueles termos com o curso se dá na importância do uso de objetos apropriados para avançar na aquisição do conhecimento.

com o proprietário do curso pré-vestibular - o Curso Zênite, ele nos cedeu uma sala de aula que dispunha de: projetor, som, ar-condicionado, microfone que atendeu aos nossos anseios.

Comunicamos aos participantes a mudança do local no grupo Integre + ação do WhatsApp. No dia 13 de abril de 2019, as oito horas do turno matutino, no Curso Zênite iniciamos o terceiro encontro. Entretanto, fez-se necessário ajustar a programação do dia e disponibilizar para os partícipes a nova versão. O documento encontra-se para acesso no Apêndice G.

Para dar continuidade as atividades, iniciamos pelo vídeo da Adriana Palma, mestre em História da Arte pela Universidade de São Paulo (USP), em que ela descreve a vida de Gaudi, o contexto histórico daquela época e registra as principais obras do modernista catalão.

Ao final, discutimos acerca do vídeo e constatamos que não o ter transmitido no primeiro encontro foi mais coerente, pois acabaria por influenciar as respostas dos estudantes. Apresentá-lo naquele momento foi um elo entre os dois encontros anteriores, pois a palestrante esclarece aspectos das obras de Gaudi, que descrevem as situações sociais, culturais que influenciaram a forma diferenciada com que o arquiteto imprimiu irreverência ao estilo estético daquela época. No entanto, um estudante divergiu dessa opinião afirmando que para ele faria mais sentido no primeiro encontro.

Dando sequência a programação, discutimos sobre as respostas do estudo e da pesquisa para as questões propostas, Q3 e Q4⁹⁴. Da mesma forma, os estudantes iam expressando oralmente o que haviam registrado no papel. Para Q3: quais formas tridimensionais você consegue identificar nas obras de Gaudí? As respostas obtidas permearam em torno: das catenárias; dos cilindros; das Superfícies Quádricas: elipsoide, paraboloides, hiperboloides; as espirais e dos helicoides.

Nesse momento, um estudante relatou que a impressora 3D imprime sólidos com precisão e que eles poderiam ser disponibilizados em sala de aula o que melhoraria a qualidade da percepção visual dos estudantes acerca das formas tridimensionais e da aquisição das noções de alguns dos seus conceitos. Tal relato, nos remete aos estudos de Henriques (2004; 2006; 2007) que pontuamos no Capítulo I desta pesquisa. Para além disso, ele nos inspirou na elaboração de uma tarefa a ser desenvolvida para o próximo encontro.

⁹⁴ Esclarecemos que as respostas serão descritas com mais precisão no próximo capítulo.

Acerca das respostas a Q4, registramos, resumidamente, os relatos dos estudantes, de acordo a graduação a qual eles pertencem: para os futuros engenheiros elétricos eles associaram a luminosidade com a disposição das cores do azul e do branco no emprego de lajotas nas paredes internas da Casa Batlló. Ainda sobre isso, os graduandos em engenharia ambiental destacaram o aproveitamento dos pedaços desses ladrilhos para formação de mosaicos; o estudo da melhor posição no terreno para a construção arquitetônica observando a corrente marítima do Mar Mediterrâneo. Nesse momento, foram interrompidos por um dos futuros engenheiros elétricos que acrescentou acerca do impacto, atualmente, na economia de energia elétrica, com tal escolha. Ao retorno da palavra, destacaram ainda, a estabilidade do solo e a forma de aproveitamento dos espaços avaliando os riscos de danificar a natureza, como ocorreu no Parque Güell. Relataram, ainda, a composição química do tipo do gesso que Gaudí usava para dar forma, deixando-a estável e resistente.

Os estudantes da engenharia civil destacaram o emprego do ferro fundido, que Gaudí usava em suas instalações, a preocupação no equilíbrio dos centros de massa das formas espaciais usadas, destacando a importância dos cálculos estruturais, aos quais Gaudí demonstrou ter bastante conhecimento.

Obtidas as respostas para Q3 e Q4, foi possível perceber que o caminho ao qual eles estavam percorrendo traziam, de forma implícita, elementos para a resposta a questão geratriz, no entanto, os estudantes não expressaram tal relação.

Um estudante relatou que era interessante como havia estudado as Superfícies Quadricas, ao final do primeiro semestre na disciplina Álgebra Vetorial e Geometria, mas havia concebido apenas conceitos teóricos e vê-los aplicado em uma obra de arte era uma sensação diferente. A partir dessa síntese a investigadora foi até o quadro branco para institucionalizar os conceitos envolvendo as Superfícies Quádricas, que consta no nosso modelo alternativo, embora todos os presentes tivessem estudado em seus respectivos cursos.

Destacamos que algumas perguntas subsidiárias foram formuladas a partir da questão Q3, que destacamos na sequência.

Q3.1. O que é uma superfície?

Q3.2. O que distingue uma superfície de uma área?

Q3.3. Só existem Superfícies tridimensionais?

Destacamos que em Q3.3. uma estudante perguntou:

Q3.3.1. Em espaços acima de três dimensões como essas formas são representadas?

Q3.4. Qual a relação entre: a elipse e o elipsoide? A hipérbole e o hiperboloide? E entre a parábola e o paraboloides?

Q3.5. Quais os tipos de espirais?

Q3.6.1. O que distingue a catenária da parábola?

Q3.6.1.1. O que é um catenóide?

Ao longo da exposição oral as questões eram respondidas pelos estudantes com o uso de uma linguagem natural e a investigadora convertia para uma linguagem formal e simbólica da matemática, colocando tais conceitos no quadro branco. Destacamos que para explicar o formato do paraboloides hiperbólico utilizamos como material concreto uma batata frita que tem aquele formato, que vem disposta em uma vasilha cilíndrica. Depois passamos para que eles saboreassem aquelas curvaturas, comendo-as.

As 10 horas e 30 minutos interrompemos a atividade para um pequeno lanche, fornecido pela organização, visto que a lanchonete do Curso Zênite não estava aberta. Ressaltamos que naquele dia o curso não teria atividades no turno matutino, pois no vespertino haveria um simulado para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), prova que classifica os estudantes para o ingresso ao Ensino Superior.

No retorno de 10 minutos, propomos a atividade intitulada: “Mão na massa”, em que eles teriam que construir um objeto de aprendizagem em 3D. Para a execução foi disponibilizado alguns recursos materiais, tais como: massa acrílica, tinta, palitos de churrasco, papel cartolina, régua, papel ofício. Agrupamos em dois grupos: os licenciandos em Matemática e os engenheiros, um estudante da licenciatura em matemática começou fazendo sozinho, depois agregou-se ao grupo do mesmo curso, mas terminou o sólido que estava construindo. Uma hora depois eles apresentaram os sólidos construídos.

Após a apresentação a investigadora perguntou-lhes⁹⁵:

Q3.7. Como faríamos para calcular a medida da área e do volume desse sólido que construíram?

⁹⁵ Descrevemos o diálogo estabelecido para expor como surgiram durante a aula as noções elementares que fundamentam a Integral Dupla, as análises ficaram para o capítulo 5.

Apenas um aluno arriscou a responder sugerindo usar a Integral, no entanto, quando perguntado:

Q3.7.1. Me explique aqui, nesse sólido, como você faria?

A investigadora pegou um dos sólidos construídos e apontou na direção do estudante, ele levantou-se, pegou o sólido sob as mãos e balançou a cabeça afirmando não saber.

Outro estudante sugeriu que fizesse uma somatória de quadrados, como se faz na soma de Riemann. A professora, questionou:

Q3.7.2. Mas porque quadrados?

Q3.7.3. O espaço não é tridimensional?

Então, o primeiro aluno questionado responde que poderiam ser cubos ou paralelepípedos. Outro diz lembrar de algo assim em CDI -III.

A investigadora pega alguns palitos de picolé, previamente, colados e mostra um paralelepípedo, vai até o sólido e o perfura, mostrando, por simulação, uma noção do processo do cálculo da medida da área, ou do volume de um sólido. Então, pergunta-lhes:

Q3.7.4. Quantos paralelepípedos poderíamos colocar para uma resposta mais precisa?

Um estudante da licenciatura responde que usaria um limite tendendo ao infinito para uma aproximação mais precisa.

Q3.7.5. Uma aproximação mais precisa de que?

O estudante volta a responder dizendo ser do número de paralelepípedos que deveria ser usado, com a medida de seus lados bem pequenos, quase próximo do zero.

Q3.7.6. E depois?

Um outro estudante responde que se na Integral de Riemann usávamos a somatória, faremos o mesmo. No entanto, a investigadora questiona:

Q3.7.7. Mas é possível fazer isso com uma Integral?

Uma estudante afirma que pode, usando as Integrais Duplas ou Triplas.

Satisfeita com aquele diálogo a investigadora vai até o quadro e institucionaliza o conceito de Integral Dupla, disposto no quarto modelo epistemológico exposto no capítulo 3 desta pesquisa.

Mostrou também o modelo epistemológico construído por Ostrogradsky, em um slide e pergunta:

Q3.8. Esse modelo apresenta alguma semelhança com o que foi discutido?

De forma unânime, responderam não haver similaridades. Mostrei então, que a demonstração feita por aquele matemático usava conceitos de Geometria Analítica e de Cálculo Vetorial como: produto escalar, vetorial, matrizes, entre outros.

A investigadora explica então que diferentemente de Riemann, outro matemático, Henri Léon Lebesgue havia generalizado a Integral de Riemann, estendendo para funções definidas em um espaço de medidas para valores reais ou complexos. E que aquele modelo apresentado aproximava mais do conceito de Lebesgue.

Um dos estudantes, comentou que aquela forma era muito complicada porque além de usar demonstrações, que ele não sabia fazer, ainda envolvia conhecimentos do Cálculo Vetorial e variáveis complexas, que eles não compreendiam.

Explicamos que o nosso intuito com aquele curso era chegar até a construção dos conceitos da Integral Dupla, mas que não poderíamos deixar de mostrar a existência de outros caminhos da matemática que não são explorados por algumas instituições. Isso se justifica pela disposição e estrutura curricular linear aos quais os objetos matemáticos devem ser ensinados, excluindo outros modelos.

Naquele momento destacamos a presença de alguns conceitos das componentes curriculares: Álgebra Linear, Geometria Analítica e Cálculo Vetorial (na UESB) ou Álgebra Vetorial e Geometria Analítica (no IFBA), Matrizes e Determinantes, entre outras, mostrando as relações da Integral Dupla com outros objetos matemáticos.

Finalizada a institucionalização da Integral Dupla, entregamos em papel ofício A4, uma tarefa xerografada, para que eles respondessem em casa e trouxessem no próximo encontro que seria no dia 27 de abril. Essa tarefa intitulada: “Vaga de emprego para pessoas criativas”, descrevia as regras de um concurso para o preenchimento de uma oportunidade de trabalho em uma editora de livros de Cálculo Diferencial e Integral. O anúncio solicitava que o candidato criasse uma questão inédita sobre o tema: Integral Dupla aplicada aos paraboloides hiperbólicos. Essa construção deveria ser respondida pelo autor e estar coerente com os conceitos estudados na componente curricular e no curso da graduação ao qual estavam matriculados. A tarefa está apresentada na Figura 66 e no Apêndice H.

Figura 66: Primeira tarefa do PEP

VAGA DE EMPREGO PARA PESSOAS CRIATIVAS



Você foi escolhido para ministrar uma aula sobre o tema: **Integral Dupla aplicada aos parabolóides hiperbólicos**, o seu desempenho te garante uma vaga de emprego para uma empresa que está escrevendo livros de Cálculo Diferencial e Integral.

Remuneração: R\$ 25000,00 mensais, mais uma comissão de 2% em cada livro vendido e um valor relativo aos seus direitos autorais.

Banca examinadora: é formada pelas cinco pessoas mais criativas do mundo, certificadas por órgãos internacionais de credibilidade idônea.

Critério de seleção: formulação de uma questão inédita sobre o tema e aplicada a graduação em que está matriculado.

Crie a questão e garanta esse emprego!

Fonte: Produção da autora

Nosso objetivo ao propor esta tarefa era: Investigar se os conhecimentos adquiridos no processo formativo dos estudantes os possibilitariam desenvolver um raciocínio abdutivo para a formulação da questão. Em uma análise *a priori*, suscitamos que eles terão dificuldades em articular os conceitos matemáticos com a graduação a qual estão matriculados, por três motivos: o primeiro, é que os livros didáticos ao qual eles têm acesso nas bibliotecas não promovem essa articulação, como podemos constatar na análise praxeológica do capítulo 18 do livro de Leithold, apresentado no capítulo 3 deste estudo. O segundo, é que uma análise dos livros adotados pelos cursos das Engenharias traz o objeto em estudo de forma implícita, sem uma abordagem mais nítida da Integral Dupla, conforme constatou a professora palestrante da mesa redonda do segundo encontro. O último, é que em *sites* online de busca não conseguimos encontrar nenhum exemplo que pudessem auxiliá-los, o que demandará deles o uso da criatividade e dos conhecimentos adquiridos.

Dando sequência, os informamos que não teria o encontro no dia 20 de abril, pois era o feriado da Semana Santa, e que o próximo encontro seria em período integral, no turno matutino

no Curso Zênite e no vespertino no Condomínio Residencial Morada do Bem Querer. Essa medida adotada justificou-se pela impossibilidade do uso da sala no período vespertino, devido a segunda etapa do simulado do ENEM que aconteceria nas instalações daquela instituição.

Encerrando as atividades da manhã, a investigadora relembrou das respostas dada pelos estudantes da engenharia civil acerca da questão Q4, com o seguinte discurso: “você mencionaram que a relação do curso com as obras de Gaudí estava associada ao cálculo estrutural, ao centro de massa, e ao equilíbrio das forças que atuam na superfície. Então, para o próximo encontro quero que estudem e pesquisem as respostas para as questões Q5, Q6 e Q7, descritas abaixo:

Q5. O que é um centro de massa?

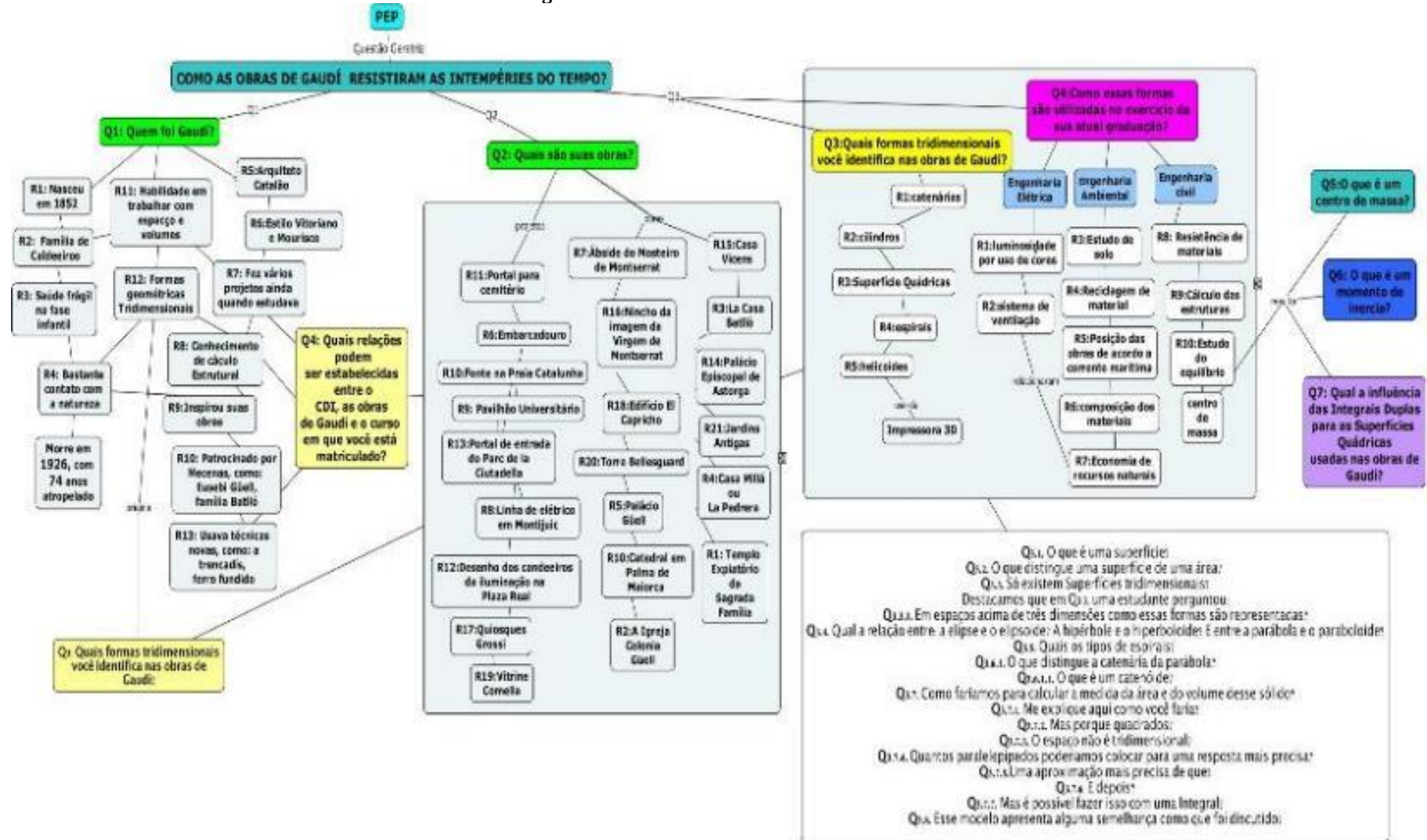
Q6. O que é um momento de inércia?

Q7. Qual a influência das Integrais Duplas nas Superfícies Quádricas usadas nas obras de Gaudí?

Em seguida encerramos o encontro, desejando-os uma boa semana.

A Figura 67 apresenta um esquema do PEP desenvolvido até o terceiro encontro.

Figura 67: Síntese do PEP até o terceiro encontro



\ Fonte: Produção da autora no Cmap Tools

4.5.4.4 Quarto encontro – Arruma a cela, o cabresco que eu vou galopar para desbravar o mundo de Deus⁹⁶

Como registrado ao final da subseção anterior, o IV^o e o V^o encontros ocorreram no mesmo dia, 27 de abril de 2019, iniciando as atividades as 8 horas. O atraso partiu dos estudantes que demoraram a chegar.

Durante a semana foi postado no grupo Integre + ação do WhatsApp, a programação daquele dia e algumas instruções acerca da pontualidade, transporte e deslocamento. O texto foi incluído no Apêndice I.

A primeira atividade da manhã foi inspirada na resposta da questão Q3, quando um dos estudantes menciona a relação entre a visualização das formas tridimensionais e o potencial da impressora 3D para tal intento. A busca por aprofundar os conhecimentos acerca do uso de ambientes computacionais para o ensino e a aprendizagem do CDI e a investigação das pesquisas correlatas registradas no capítulo 1 deste estudo, nos conduziram a entrar em contato com o professor doutor Afonso Henriques, da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), situada na rodovia BR415, entre as cidades de Itabuna e Ilhéus, no estado da Bahia, para solicitá-lo uma entrevista.

O docente nos recebeu no dia 26 de abril de 2019 para a entrevista, realizada nas instalações do Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) situada na UESC, com duração de uma hora, áudio-gravada e filmada. Nesse período ele discorreu sobre a importância da perspectiva da Educação Matemática para o CDI, falou sobre as superfícies e mostrou os protótipos dos objetos concretos elaborados com o uso da impressora 3D cubeX Duo e a gestão de códigos para os Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC) desenvolvidos pelos pesquisadores e estudantes do: Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC) e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM).

Durante a entrevista ele fez uma simulação de como o *software* MAPLE instalado no computador codifica os códigos informando-os a impressora 3D. Sobre ela, o entrevistado

⁹⁶ Expressão usada no sertão baiano que se refere as possibilidades que uma pessoa pode ter para se libertar de uma situação imposta e sair em busca de outras conquistas, soltando apenas o que o prende.

explicou as partes que a constitui, o material usado para a formação do sólido e o seu funcionamento.

Como a entrevista ocorreu um dia antes do último encontro do curso e a UESC está situada a 254 km da cidade de Vitória da Conquista, local em que o curso estava sendo desenvolvido, não foi possível editá-la. No entanto, foi transmitida aos participantes na forma original, no período matutino e ao final da sua exibição discutimos sobre a importância daqueles protótipos para a sala de aula no que se refere a visualização dos entes do CDI.

Dando sequência as organizações didáticas para aquela manhã, solicitamos as respostas dos estudantes acerca das questões Q5, Q6 e Q7. Nas respostas obtidas, identificamos a linguagem natural no discurso dos futuros engenheiros, acerca da aplicabilidade daqueles conceitos, explicitando o que eles representam no âmbito do exercício profissional. Contrário a essa perspectiva, os estudantes da Licenciatura em Matemática abordaram suas respostas em uma linguagem formal e simbólica descrevendo as equações para os cálculos do centro de massa e para os momentos de inércia.

As respostas formuladas pelos estudantes da Licenciatura nos conduziram a institucionalização dos conceitos referentes ao centro de massa, aos momentos de inércia que foram registrados pelo investigador no quadro branco, destacando as equações matemáticas que proporcionam um valor numérico: pontual para o centro de massa e uma coordenada cartesiana para o momento de inércia.

Identificamos nas respostas dos estudantes das engenharias elementos que potencializam a resposta a Q7, pois descrevem o uso da Integral Dupla no cálculo do centro de massa e do momento de inércia com o intuito de distribuição da força da gravidade exercida nas superfícies quádricas ao qual Gaudí projetou em suas obras.

Solicitamos a entrega da tarefa “Vaga de emprego para pessoas criativas” e nos deslocamos para o Condomínio Morada do Bem querer, local em que almoçamos e desenvolvemos as atividades previstas para o turno vespertino, descritas na próxima subseção.

4.5.4.5 Quinto encontro – Solta o arreio da cela

Inicialmente, destacamos que nesse último encontro os estudantes estavam mais envolvidos, atuantes, questionadores e críticos, o que nos surpreendeu, pois haviam transcorridos até o início das atividades daquele período, cinco horas de curso.

Como relatado na seção anterior, nos dirigimos para o local em que ocorreu o último encontro, o almoço foi servido e foi estabelecida uma conversa informal até as 14 horas. Quando iniciamos as atividades daquela tarde.

Foi proposto aos estudantes uma atividade impressa, entregue em folha de ofício A4, em que constavam duas tarefas, elaboradas pelos autores desse texto, registrada na Imagem da Figura 68 e no Apêndice J.

Figura 68: Segunda atividade do PEP



ATIVIDADE 2

QUESTÃO 1

1. Uma reserva ambiental localizada no vale do “Xuxui” tem uma cadeia de montanhas no formato de um parabolóide hiperbólico. Uma companhia elétrica precisa instalar uma torre de transmissão de energia no centro daquela superfície para otimizar a distribuição da carga elétrica. Para isso, vários fatores são observáveis tanto na questão ambiental como na questão elétrica: impacto na fauna, na flora e no social; emissões atmosféricas, faixa de segurança, espaço entre os cabos e os obstáculos. Desprezando alguns deles e considerando apenas os dois fatores mais relevantes destacados nos itens a e b, calcule:

a) A medida da área da faixa de segurança para a supressão de vegetação efetiva considerando x como a área em hectares de vegetação prevista para ser suprimida na fase de licença ambiental prevista (LP) variando de $[0; 6,93]$ e y como a área em hectares de supressão de vegetação solicitada na fase de Licença Ambiental de Instalação (LI) variando de $[0; 16,17]$.

b) A medida da área da faixa de servidão para a instalação da torre de transmissão com 138kV considere a variável x como a distância, em metros, de segurança do “cabo – vegetação”, que varia de $[0; 4,30]$. Para a variável y considere a área em hectares de supressão de vegetação solicitada na fase de Licença Ambiental de Instalação (LI) variando de $[0; 16,17]$.

c) Para o cálculo da posição central da torre, os engenheiros consideraram dois fatores de riscos mais preponderantes na região: as unidades de conservação de proteção legal, variável x , que apresentou na mesma fase a variação $[0, 4]$ em hectares e os processos erosivos do relevo causados pela remoção da vegetação, variável y , que apresentou uma variação na fase LI entre $[0, 25]$. Qual deve ser a localização da torre?

Fonte: Autoria própria

QUESTÃO 2

2. Um professor de Cálculo Diferencial e Integral propôs a situação abaixo aos seus estudantes da Licenciatura em Matemática:

Considere a região R do plano- xy delimitada pela curva de equação $x^2 + y^2 = az$, para calcular a integral dupla de $f(x, y) = h$ sobre R , onde a e h são constantes reais positivas.

a) Resolva a situação proposta

b) Reelabore esta tarefa de modo que ela possa ser realizada pelos seus alunos da Educação Básica.

c) Quais conclusões você chegou?

Fonte: Dispositivo experimental para análise de práticas de estudantes do PPGEM – UESC, elaborado pelo prof. Dr. Afonso Henriques.

Fonte: Produção da autora

A primeira questão foi elaborada pela autora principal dessa pesquisa, que escolheu seguir o princípio da linearidade em relação a formulação de questões inéditas e relacionadas aos cursos em que os participantes são egressos. Os argumentos tecidos, neste estudo, sobre as possibilidades de atribuir significados distintos para as tarefas envolvendo objetos matemáticos aplicados a situações abertas nos conduziu a uma temática relacionada aos problemas ambientais. Essa situação tornou-se oportuna, pois aduziu a uma rede de significados e

conhecimentos sobrevivendo dos objetos do CDI, das noções gerais das variáveis que influenciam no cálculo da medida da faixa de segurança para instalações elétricas, na distância entre os postes, na preservação da flora e da fauna, entre outros.

Para formulá-la a autora pesquisou sobre as normas acerca da Licença ambiental, observando: os fatores que influenciam na otimização das instalações elétricas, o limite do risco aplicável a faixa de segurança em espaços montanhosos, as unidades de conservação em hectares para uma espécie da flora etc. Houve também uma pesquisa nos livros adotados nas três Engenharias que favoreceram o *insight* da elaboração. A partir dos dados coletados acrescentamos, ao contexto, os objetos do CDI: inicialmente a Superfície Quádrica no formato da montanha e, em seguida, introduzimos elementos que possibilitassem a aplicação da Integral Dupla no cálculo da medida da área da faixa de segurança, da área de servidão e da posição do centro da montanha, local onde ocorreria a instalação da torre.

Para que os estudantes respondessem à questão foi disponibilizado os seguintes livros de Cálculo do volume 2: O Cálculo e a Geometria Analítica de Louis Leithold e Cálculo de James Stewart e o acesso ao *wifi* e avisamos que teriam uma hora para encontrarem uma solução. Os estudantes optaram por fazer a atividade em grupo, formando um grupo dos estudantes da Licenciatura e o outro das Engenharias, registradas nas Figuras 69 e 70.

Figura 69: Grupo da Engenharia



Figura 70: Grupo da Matemática



Fonte: Fotografias do arquivo pessoal da investigadora

O objetivo da tarefa 1, da segunda atividade do PEP, era apresentar uma tarefa inédita envolvendo a aplicação da Integral Dupla em um contexto das Engenharias. Em nossa análise *a priori* esperávamos que os estudantes aplicassem diretamente a definição da Integral Dupla e

que não avaliassem que se tratava do cálculo da medida da área de uma superfície. O levantamento dessa hipótese se justifica por que até aquele encontro não havíamos abordado o cálculo da medida da área de uma superfície de forma institucionalizada, seguindo as mesmas condutas anteriores de deixar com que o estudante busque o conhecimento necessário para responder as tarefas solicitadas. Apresentamos o modelo matemático da tarefa inscrito no Quadro 15.

Quadro 15 – Questão da segunda tarefa do PEP

Uma reserva ambiental localizada no vale do “Xuxui” tem uma cadeia de montanhas no formato de um parabolóide hiperbólico. Uma companhia elétrica precisa instalar uma torre de transmissão de energia no centro daquela superfície para otimizar a distribuição da carga elétrica. Para isso, vários fatores são observáveis tanto na questão ambiental como na questão elétrica: impacto na fauna, na flora e no social; emissões atmosféricas, faixa de segurança, espaço entre os cabos e os obstáculos. Desprezando alguns deles e considerando apenas os dois fatores mais relevantes destacados nos itens a e b, calcule:

a) A medida da área da faixa de segurança para a supressão de vegetação efetiva considerando x como a área em hectares da vegetação para ser suprimida na fase de licença ambiental prevista (LP) variando de $[0; 6,93]$ e y como a área em hectares de supressão de vegetação solicitada na fase de Licença Ambiental de Instalação (LI) variando de $[0; 16,17]$.

b) A medida da área da faixa de servidão para a instalação da torre de transmissão com 138kV considere a variável x como a distância, em metros, de segurança do “cabo – vegetação”, que varia de $[0; 4,30]$. Para a variável y considere a área em hectares de supressão de vegetação solicitada na fase de Licença Ambiental de Instalação (LI) variando de $[0; 16,17]$

c) Para o cálculo da posição central da torre, os engenheiros consideraram dois fatores de riscos mais preponderantes na região: as unidades de conservação de proteção legal, variável x , que apresentou na mesma fase a variação $[0, 4]$ em hectares e os processos erosivos do relevo causados pela remoção da vegetação, variável x , que apresentou uma variação na fase LI entre $[0, 25]$. Qual deve ser a localização da torre

Fonte: Autoria própria

Fonte: Produção da autora

No enunciado da questão foram apontados alguns fatores que devem ser observados ao se instalar uma torre de transmissão de energia. A relevância deles está associado ao local e as circunstâncias em que ocorrerá o evento. Tais informações foram elencadas em uma entrevista com um engenheiro florestal, especialista em gestão ambiental, Thiago Dias Caires, que atua como gerente corporativo de meio ambiente em uma multinacional do setor de energia elétrica.

As alternativas a e b da tarefa 1 consiste em interpretar a situação proposta como uma integral dupla para o cálculo da medida da área de uma superfície, os limites de integração foram disponibilizados e a função é a lei algébrica que exprime um parabolóide hiperbólico, informação que os estudantes obtiveram no terceiro encontro.

Para a letra c da tarefa 1, tentamos produzir conhecimentos tomando como aporte aqueles advindos das questões Q_5 e Q_6 apresentadas no início do quarto encontro: calcular o centro de massa de uma superfície, considerando dois fatores acerca da questão ambiental e elétrica.

A segunda tarefa proposta, emergiu dos dispositivos elaborados pelo professor e doutor Afonso Henriques e aplicados no Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, na cidade de Ilhéus, ao qual a investigadora principal deste estudo participou e resolveu, como estudante no ano de 2015 ao fazer o curso.

O objetivo da tarefa consiste em mostrar como os objetos do CDI do Ensino Superior se apresentam no Ensino Básico e aquele dispositivo tem a intencionalidade de ser uma interfase entre os dois níveis escolares. Pontuamos que a aplicação desta tarefa para o nosso estudo, consistiu em:

- a) despertar nos licenciandos, como o objeto matemático vive em duas instituições distintas e;
- b) mostrar que alguns conceitos da Integral Dupla são construídos desde o Ensino Básico.

Em uma análise *a priori*, conjecturamos que os estudantes irão interpretar a tarefa e estabelecer significados, entretanto, excitarão na técnica, pois para estabelecer os limites de integração terão que usar das coordenadas polares. Especulamos também que ao final, ou durante a execução, eles identificarão que o objeto matemático no nível da Educação Básica trata do cálculo da medida do volume de um cilindro. Esse objeto de estudo está incluso na Geometria Espacial, que de acordo o currículo brasileiro, é ensinado na 2ª série do ensino médio.

Findo o prazo destinado a execução da tarefa os estudantes abriram para a socialização das respostas, apresentando resultados diferentes entre os dois grupos, cada um deles argumentando como havia respondido e chegando a um consenso, fato que será explicado posteriormente, no capítulo 5 deste texto.

Após um pequeno intervalo, retomamos solicitando aos estudantes que respondessem individualmente e depois oralmente a questão Q_0 : Como as obras de Gaudi resistiram as intempéries do tempo? Após um tempo, cada um falou sobre a sua resposta, e a investigadora

chamou atenção que para cada um deles, a resposta tinha um significado. Um dos estudantes chamou a atenção de como todos os conhecimentos adquiridos nos cinco encontros proporcionaram a construção das respostas.

Após a solução de Q_0 solicitei aos estudantes que avaliassem o curso oralmente e em seguida, respondessem um questionário com a avaliação do curso. A primeira página do modelo elaborado está registrada na Figura 71 e no Apêndice L.

Figura 71: Terceira tarefa do PEP - avaliação do curso



“(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas”

AValiação DO CURSO

1º Momento: Cônicas Sertanejas

1. A experiência de discutir sobre o Cálculo Diferencial e Integral em um ambiente diferente da sala de aula teve algum significado para você? Se sim, qual?
2. Quais foram as contribuições das palestras iniciais para a compreensão dos procedimentos do curso? Explique e justifique sua resposta.

2º momento: Mesa Temática

1. Os esclarecimentos iniciais enviados no WhatsApp foram relevantes para o desenvolvimento da mesa temática? Justifique.
2. Os palestrantes abordaram de forma coerente e alinhada à proposta do curso?
() Sim () Não.
Justifique.
3. Para seu conhecimento profissional a mesa temática ampliou a sua percepção sobre Cálculo? Comente.
4. Descobrir as formas tridimensionais nas obras de Gaudí foi:
() fácil () difícil () usei a internet para descobrir
5. As superfícies quádricas são ensinadas na disciplina AVGA (ou GACV) e no CDI. Na sua opinião o desenvolvimento dos conceitos usando contextos reais, como foi feito com as obras de Gaudí, facilitaria ou não a compreensão dos seus entes? Justifique.

Fonte: Produção da autora

A intenção do questionário foi registrar na forma escrita, a avaliação de alguns elementos específicos de cada encontro do curso. Dividimos o questionário da avaliação em cinco setores, a avaliação dos 4º e 5º encontros ocorreram juntamente, pois aconteceram no mesmo dia. Ressaltamos que o questionário continha questões abertas que designavam ser justificadas pelo participante.

O primeiro momento, denominado Cônicas Sertaneja aquele em que os estudantes se deslocaram para uma fazenda, foi avaliado com duas perguntas:

1. A experiência de discutir sobre o Cálculo Diferencial e Integral em um ambiente diferente da sala de aula teve algum significado para você? Se sim, qual?

2. Quais foram as contribuições das palestras iniciais para a compreensão dos procedimentos do curso? Explique e justifique sua resposta.

A primeira pergunta tínhamos como intenção identificar se o local em que ocorreria o ensino produziria algum significado para o estudante. Prevíamos que teríamos um número maior de respostas afirmativas, embora haveria outras. Quanto as justificativas especulamos que seria do tipo: relaxante, prazeroso, divertido, informal, entre outras.

Em relação a segunda questão objetivamos: identificar se as orientações iniciais sobre a metodologia a ser aplicada durante o curso, com o uso do dispositivo do PEP foi bem conduzida e se as palestras contemplaram a relação da matemática com outras áreas do conhecimento. Aludimos que as respostas seriam afirmativas, embora suponhamos que haveria também críticas e sugestões.

O segundo momento intitulado: *Proseando com os “home” da cidade e do campo*, teve como uma das atividades, a mesa temática com engenheiros, professores da matemática e da física e um arquiteto. Acerca desse encontro, interrogamos:

1. *Os esclarecimentos iniciais enviados no WhatsApp foram relevantes para o desenvolvimento da mesa temática? Justifique.*
2. *Os palestrantes abordaram de forma coerente e alinhada à proposta do curso? Justifique sua resposta.*
3. *Para seu conhecimento profissional a mesa temática ampliou a sua percepção sobre o cálculo. Comente.*
4. *Descobrir as formas tridimensionais nas obras de Gaudí foi:*
 () fácil () difícil () usei a internet para descobrir
5. *As superfícies quádricas são ensinadas na disciplina AVGA (ou GACV) e no CDI. Na sua opinião o desenvolvimento dos conceitos usando contexto reais, como foi feito com as obras de Gaudí, facilitaria ou não a compreensão dos seus entes? Justifique.*
6. *Destaque os pontos positivos e negativos deste momento.*

Tínhamos como intuito ao formular as questões obter informações acerca dos encaminhamentos, conhecimentos adquiridos com a mesa temática. As duas primeiras perguntas a intenção era verificar se as organizações didáticas previamente elaboradas para

aquele encontro foram alcançadas. A terceira pergunta teve como fim: investigar as possíveis contribuições da mesa temática para ampliar a percepção do cálculo na futura profissão dos estudantes. Esperávamos que as respostas obtidas estariam elencando aspectos pontuais, tipo: uso das catenárias nos fios condutores de energia, o uso dos satélites para o cálculo de áreas devastadas, entre outras.

O propósito de identificar nas obras de Gaudí as formas tridimensionais foram suscitadas na pergunta quatro daquele questionário. Na nossa análise *a priori*, almejávamos que os estudantes considerassem fácil, visto que os sites de busca na internet exploram a diferença das obras gaudinense para outros artistas, justamente no que se refere a forma espacial ao qual suas obras são construídas. A intencionalidade da pergunta cinco foi verificar se a aplicação de objetos matemáticos em situações reais favorece a compreensão deles. Frente ao posicionamento de aceite de participação em um curso que os convida a se integrar duplamente as superfícies quádricas acreditávamos que a resposta sim seria unânime. Uma análise *a priori* para as justificativas sobreviriam da dificuldade de compreensão da linguagem formal usada pelos matemáticos. A sexta pergunta teve como meta verificar a criticidade dos participantes, destacando os pontos positivos e os não relevantes para o encontro. Sobre as respostas esperávamos boas contribuições no que se referem aos aspectos irrelevantes para aquele momento.

O terceiro momento atribuído o nome: Traz “vendaval”⁹⁷, o baixeiro e a manta, pra eu galopar”, teve como objetivo revisar sobre as Superfície Quádricas e verificar os conceitos adquiridos anteriormente pelos estudantes acerca da definição da Integral Dupla foi referendado nas perguntas de 1 a 5, conforme registro na Figura 72.

Figura 72: Galopando nas Superfícies Quádricas

3º momento: Galopando nas Superfícies Quádricas
1. Na sua opinião o vídeo da Adriana Palma foi relevante? E o de Afonso? Justifique. 2. Quais significados foram mobilizados por você quando houve a inversão do ensino das superfícies quádricas: primeiro o estudo da obra de Gaudí e em seguida a explicação formal dos seus conceitos? 3. Quais foram as contribuições da exposição da pesquisadora sobre a explicação formal das superfícies quádricas por meio das representações algébricas e gráficas? 4. Destaque os pontos fortes e os aspectos que poderiam ter sido mais aprofundados neste momento? Explique as razões. 5. Quais conhecimentos/saberes você mobilizou entre o ensino dos aspectos formais da Superfície Quádricas e a aplicação em contextos reais?

Fonte: Produção da autora

⁹⁷ Vendaval é o nome que atribuímos ao cavalo, disponível na fazenda, local do Iº encontro.

Em relação a pergunta um, tínhamos como objetivo verificar quais as contribuições podem ser suscitadas a partir de entrevistas realizadas com investigadores acerca das obras de Gaudí e da Integral Dupla. Para atendê-lo buscamos uma professora mestre em História da Arte, Adriana Palma, que discorreu sobre a vida, a arte do arquiteto e a influência do contexto cultural e social do período em que viveu.

O outro entrevistado foi o professor doutor, Afonso Henriques, da Universidade Estadual de Santa Cruz no estado da Bahia, que desenvolveu sua tese sobre as Integrais Múltiplas e continua sua pesquisa, até os dias atuais, na mesma vertente de incluir as tecnologias para o seu ensino. Ele buscou enfatizar aspectos sobre o ensino, a relevância, as representações dos sólidos em espaços tridimensionais. Ele apresentou modelos de sólidos desenvolvidos pela impressora 3D e demonstrou todos os processos desde o *software* usado (MAPLE) até como é processado as informações para a impressora.

Em nossa análise prévia esperávamos que os estudantes iriam questionar o momento em que foi apresentado o vídeo da professora. A atividade estava proposta para o primeiro encontro, e por questões técnicas não pode ser transmitido. Do primeiro encontro para o terceiro, grande parte das informações reveladas pela expoente já haviam sido adquiridas nas pesquisas realizadas pelos estudantes.

O vídeo do professor Afonso Henriques, foi muito extenso, não houve tempo hábil para a edição, pois a entrevista foi realizada na tarde do dia anterior ao terceiro encontro, em uma cidade situada a 300km do local onde o curso ocorreu. Tínhamos como expectativa que esse ponto fosse abordado pelos estudantes e que como sugestão surgisse a ideia de conduzi-los até a Universidade para conhecer de perto o projeto de pesquisa do docente.

A segunda pergunta primou em verificar a opinião dos estudantes acerca da abordagem do curso, que inicia por uma situação retirada de uma realidade arquitetônica e artística e vai sendo desenvolvida até chegar a um objeto matemático.

Em nossa análise prévia aspectos como: criatividade, imaginação, surpresa, desafios iriam ser apresentados como significados para o desenvolvimento metodológico do curso.

A terceira pergunta - Quais foram as contribuições da exposição da pesquisadora sobre a explicação formal das Superfícies Quádricas por meio das representações algébricas e gráficas? – tinha como objetivo identificar os significados mobilizados pelos estudantes ao

mostrar nos slides a fórmula de Ostrogradsky, um modelo que aborda conceitos como o cálculo das Integrais Duplas usando derivadas parciais, produto vetorial, entre outros.

Esperávamos que os estudantes da Licenciatura em Matemática identificassem os conceitos abordados naquele modelo de forma mais significativa do que para os estudantes das Engenharias. Haja visto que, a linguagem formal apresentada na demonstração é frequentemente utilizada no desenvolvimento das aulas do curso ao qual estão matriculados os licenciandos.

O enunciado da quarta pergunta foi: Destaque os pontos fortes e os aspectos que poderiam ter sido mais aprofundados neste momento? Explícite as razões. Teve como intenção propor aos estudantes uma avaliação do terceiro encontro. Nesse sentido, em nossa análise previa esperávamos contribuições que pudessem trazer aspectos sobre as entrevistas, as discussões e a quantidade de tarefas e questionamentos propostos. Nesse terceiro encontro deveria emergir a institucionalização das Superfícies Quádricas e a definição da Integral Dupla.

A quinta pergunta - Quais conhecimentos/saberes você mobilizou entre o ensino dos aspectos formais da Superfície Quádricas e a aplicação em contextos reais? – tinha como objetivo verificar se os estudantes identificam os objetos matemáticos que estão envolvidos na construção da definição da Integral Dupla e das Superfícies Quádricas.

Nesse intuito, contávamos que surgisse conceitos envolvendo as Cônicas, as derivadas parciais, o espaço tridimensional, os sólidos, as equações das superfícies cônicas.

Para avaliação o quarto e o quinto encontros, intitulados respectivamente: “Arruma a cela e o cabresco que vou galopar para nois desbravar o mundão de Deus e Solta o arreio da cela”, foram desenvolvidas cinco perguntas explicitada na Figura 73.

Figura 73: 4º momento - solta o arreio da cela

4º momento: Solta o arreio da cela
1. A atividade manual e o uso do <i>software</i> GeoGebra contribuíram para arquitetar a definição da Integral Dupla? Quais significados foram mobilizados?
2. Sobre a atividade “vaga de emprego”:
2.1. Compare o enunciado desta atividade com os enunciados das atividades dos livros.
4º momento: Solta o arreio da cela
2.2. Descreva o seu sentimento ao criar uma questão que articula o CDI com seu curso da graduação.
2.3. Quais dificuldades você sentiu para resolver a questão elaborada por você?
3. Comente sobre as questões inéditas elaboradas pela pesquisadora e respondida por você.
4. Quais semelhanças e diferenças você pode perceber na definição da Integral Dupla fornecida pelo livro didático e por um dos modelos epistemológicos construídos pelos matemáticos puros?
5. Na sua opinião o curso ofereceu elementos fundamentais para responder à questão: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? Justifique.

Fonte: Produção da autora

O enunciado da primeira questão: A atividade manual e o uso do *software* GeoGebra contribuíram para arquitetar a definição da Integral Dupla? Quais significados foram mobilizados? - pretendia identificar quais contribuições emergem das tarefas propostas: a construção, com massa acrílica, de um objeto de aprendizagem e a outra usando o *software* GeoGebra.

Para nós, a visualização dos sólidos tridimensionais e seus elementos seria a contribuição mais citada pelos estudantes matriculados no curso. Essa hipótese está fundamentada no estudo dos resultados apontados por Henriques (2006) em que ele destaca a importância do uso de programas para o ensino e a aprendizagem das Integrais Múltiplas.

A atividade “vaga de emprego” trouxe uma perspectiva em que os estudantes iriam elaborar a atividade e respondê-la. Tínhamos como objetivo avaliar a influência que as tarefas propostas nos livros didáticos exercem sobre o estudante quando posto em uma situação de criar sua própria tarefa. A pergunta 2.1 - Compare o enunciado desta atividade com os enunciados das atividades dos livros – Esperávamos que eles identificassem o quanto o ato de criar uma tarefa mobiliza mais conhecimentos matemáticos e não matemáticos do que as que são propostas nos livros didáticos.

A pergunta 2.2. solicita que o estudante descreva o seu sentimento ao criar uma questão que articula o CDI com seu curso da graduação; esta pergunta tem como objetivo revelar as crenças institucionalizadas quando se exige que procedimentos criativos e não algoritmizáveis sejam valorados para a criação de tarefas distintas das que são encontradas nas instituições de ensino. Espera-se que o sentimento mais revelado pelos estudantes seja o de dificuldade, haja vista que o modelo dominante das praxeologias do livro adotado nas duas instituições não prioriza a elaboração de questões que articulem contextos reais, ou da graduação, com a definição e estruturas da Integral Dupla. Acreditamos que será uma tarefa que um número ínfimo de estudantes desenvolverá.

Quais dificuldades você sentiu para resolver a questão elaborada por você? Consiste no enunciado da questão 2.3 da avaliação proposta que tinha como objetivo identificar as dificuldades para a criação de uma tarefa. Para nós, o estudante revelaria: a falta de habilidade em articular conceitos dos diferentes campos de conhecimento que pudessem emergir uma pergunta; a falta de tempo para a criação; a padronização de tarefas no livro didático e nas metodologias de ensino que não primam pela exploração da criatividade dos estudantes.

A questão três - Comente sobre as questões inéditas elaboradas pela pesquisadora e respondida por você – tinha como intuito verificar se os enunciados das tarefas apresentavam clareza e coerência com a proposta do curso. Em nossa análise, não haveria nenhum problema com o enunciado da tarefa, mas com os procedimentos para resolvê-los, haja vista que as praxeologias mobilizadas para a tarefa proposta pela pesquisadora envolve outras praxeologias diferentes das que são encontradas no livro didático.

Para a pergunta quatro - Quais semelhanças e diferenças você pode perceber na definição da Integral Dupla fornecida pelo livro didático e por um dos modelos epistemológicos construídos pelos matemáticos puros? – ao elaborá-la, previamente, tínhamos como intenção identificar os significados que os dois modelos epistemológicos exercem na formação dos graduandos identificado as similaridades e diferenças que podem ser encontradas.

Uma das nossas inferências a ser pontuada sobre as respostas emergem da diferença da linguagem formal e do rigor na demonstração de um dos modelos apresentados. As técnicas apresentadas se assemelham, embora o modelo matemático puro apresente estruturas matemáticas mais complexas proveniente da álgebra linear.

A última pergunta - Na sua opinião o curso ofereceu elementos fundamentais para responder à questão: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo?)? Justifique. – Tem a intencionalidade de verificar se o curso promoveu elementos que favoreçam responder à questão geratriz do PEP desenvolvido. Inferimos que 80% dos estudantes matriculados responderão que o curso ofereceu elementos para responder à questão principal do PEP. As justificativas podem emergir de acordo os conceitos dos objetos não matemáticos advindos das suas respectivas graduações, tais como: luminosidade, o solo, conhecimentos matemáticos, as estruturas e vigas, entre outros.

A última parte do questionário solicita que os estudantes deixem comentários e sugestões. Consistiu em deixar um espaço para que o estudante registrasse as impressões e sugestões acerca do curso ministrado.

Ao finalizar a avaliação descrita acima, solicitei que cada estudante presente respondesse oralmente à questão geratriz do PEP: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? Esta última tarefa proposta tinha como objetivo avaliar se os conhecimentos propostos e debatidos durante o curso possibilitaram construir uma resposta

para a questão inicial. As respostas obtidas foram gravadas e ao final, juntamos em uma única que será descrita na análise do PEP.

Findo o registro do material e a determinação do objetivo e da análise prévia dos possíveis resultados das tarefas propostas, descrevemos no capítulo 5 as dialéticas criadas por Chevallard e seus colaboradores para análise de um PEP. Entretanto, como supomos que existam significados e interpretações distintas para os licenciandos em Matemática e os graduandos em Engenharia, construímos na seção 4.6.2 a dialética pessoa e situação, com o objetivo de identificar as interpretações que emergem de uma pessoa quando está submetida a uma determinada situação. Inferimos que essa dialética em conjunto com a dimensão da linguagem pode trazer elementos que nos auxilie a provar a segunda hipótese deste estudo, relembrando-a: **Há diferenças nos significados, nas interpretações e nas praxeologias mobilizados por estudantes dos cursos das Engenharias e da Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um PEP.**

5 CASA MILÁ: uma inédita análise de um PEP

Este capítulo tem como objetivo analisar os dados coletados na aplicação do PEP. Optamos por trabalhar com as dialéticas proposta por Chevallard e a linguagem na vertente da Semiótica peirceana. Para comprovar as duas hipóteses desta pesquisa fez-se necessário criar a dialética da pessoa e da situação, que propõe descrever as atitudes e ações empregadas especificamente no desenvolvimento do PEP proposto. Bem como, trouxemos indícios que auxiliaram na identificação das diferenças das praxeologias e dos significados produzidos e mobilizados por Licenciandos em Matemática e estudantes das Engenharias.

5.1 Das Dialéticas

No sentido semiótico inferimos que o PEP é um modo de expressar uma experiência vivida e é organizado sob um desenho investigativo que possibilita conexões com questões abertas de dimensões mais amplas: sociais, culturais, entre outras e está diretamente relacionado com a teoria que lhe dá suporte. O PEP é um trajeto em que emergem as práticas sociais, culturais de uma instituição evidenciando e evocando registros passíveis de interpretações, de mudanças de paradigmas e encontros dialógicos entre pessoas, coisas e o mundo.

No PEP o diálogo provém da interação entre professor, aluno e saber e ocorre em um fluxo constante de complementariedade, de busca por decisões e atitudes que serão avaliadas e significadas. No percurso são extraídas as informações, as ações, as praxeologias que formam os saberes construídos na participação, na interação, na investigação e no estudo, são essencialmente dialéticos, pois progridem em uma alternância de movimentos sutis, quando novas questões alimentam o dispositivo.

Para a análise de um PEP, Chevallard (2007, 2009a, 2013) criou dez dialéticas que podem emergir no transcorrer da sua aplicação, a saber:

1ª Dialética: do estudo e da pesquisa

Consiste na busca por respostas às perguntas que emergem no desenvolvimento do PEP. Para o alcance desse objetivo são visitados algumas obras, meios eletrônicos, conversas com profissionais de diferentes áreas do conhecimento, palestras, artigos científicos, cultura popular, entre outros, no intuito de elaborar possíveis respostas para os questionamentos formulados.

2ª Dialética: indivíduo e coletivo

O indivíduo ao realizar a pesquisa em diferentes meios de investigação elabora um conhecimento que será debatido, avaliado e aceito (ou não) pela comunidade de estudo. São debates orais que promovem acordos consensuais entre os integrantes, no intuito de possibilitar a tomada de decisão para a construção de um modelo ou de um resultado a ser difundido.

3ª Dialética: da análise (e a síntese) praxeológica e da análise (e a síntese) didática

A comunidade de estudo realiza uma seleção das praxeologias da área do conhecimento investigado para decidirem o que serve para responder uma determinada questão. Os procedimentos de análise e síntese ocorrem no decorrer das decisões tomadas e são denominadas de praxeologias econômicas. Elas emergem da escolha coletiva do que, quando e como irão estudar as praxeologias (matemáticas, didáticas ou de outra área).

4ª Dialética: do tema e fora do tema

O registro individual das técnicas empreendidas na hora de responder uma questão são necessárias para análise das respostas obtidas, bem como, para identificar as relações estabelecidas entre temas da mesma área do conhecimento e àquelas que estão fora delas.

5ª Dialética: do paraquedista e os buscadores de trufa

No estudo, o sujeito/grupo pode realizar movimentos de aproximação e distanciamento do problema proposto para ampliar/reduzir a visão de pontos globais/específicos. Nesse processo há uma inspeção em possíveis áreas do saber que permite responder uma pergunta e geralmente ocorre durante todo o desenvolvimento de um PEP.

6ª Dialética: a das caixas pretas e claras

Consiste em ter clareza do que se vai selecionar, as obras a serem estudadas, os saberes pertinentes para responder as perguntas, os temas relacionados e as possíveis decisões a serem tomadas para realizar o estudo.

7ª Dialética: da leitura e da escrita

Durante o desenvolvimento de um PEP são realizadas leituras em diferentes meios (livros, internet, museu, entre outros) que precisam ser transcritas e registradas. Todo o material escrito e lido deve fazer parte de um relatório final, constando as interpretações dos resultados obtidos da área do conhecimento específico.

8ª Dialética: da conjuntura e da prova (da mídia e meios)

Em um PEP, a escolha por uma questão aberta proporciona um saber construído durante o percurso, e consiste na formulação de uma conjectura, um raciocínio abdutivo, passível de mudanças, logo precisa ser colocado à prova. Nesta etapa da análise são construídos argumentos, tomados dos diferentes meios pesquisados, que assegure a possibilidade de que a resposta obtida é válida nos cânones científicos.

9ª Dialética: da difusão e da recepção

Consiste na difusão e defesa das respostas, que surgem em diferentes momentos do percurso. Para isso, utiliza-se a linguagem escrita (no caderno, na lousa, no chat, entre outros) e da linguagem oral na exposição parcial/final de cada grupo apresentando os resultados parciais/ totais e a avaliação do PEP. Destacamos, ainda, que aqueles resultados (escritos e orais) que não responderam às perguntas (parciais ou final) também devem ser registrados.

10ª Dialética: dos objetos ostensivos e não-ostensivos

São os objetos que proporcionam ao sujeito representar as ideias mentalmente ou simbolicamente. Quando os objetos estão apenas no campo das ideias, nos esquemas mentais, internos ao cognitivo do sujeito eles são denominados de objetos não-ostensivos. Os teoremas, as hipóteses, os axiomas são exemplos destes objetos. Enquanto, que, os objetos ostensivos são aqueles que podem ser registrados e são acessados pelo sentido da visão do sujeito. As pinturas, os símbolos matemáticos, as formas geométricas, as equações matemáticas, entre outras, são exemplos dos objetos ostensivos.

No estudo do PEP, verificamos que a questão aberta favorece a observação de uma situação que pode, ou não, pertencer a uma área específica, pois é ela que determina a abrangência dos saberes. No entanto, inferimos que outros fatores também interferem no percurso do PEP: as ações e atitudes provenientes do contexto, do tempo e do grupo que participam do desenvolvimento do PEP. Assim, os resultados obtidos podem ser distintos quando aplicados em classes diferentes, ou em anos posteriores. Nesse sentido, Salgado afirma:

o contexto que enquadra o encontro entre investigador e interlocutor (em confronto com o desenho da investigação) contém e é afetado por se realizar numa determinada circunstância, demarcado por se realizar num determinado local e num tempo próprio (com todas as contingências ou imprevistos que podem acontecer e que o investigador tem que estar preparado em lidar); é no encontro que se situa e acontece a história partilhada (SALGADO, 2015, p.28).

O desenvolvimento do PEP promove uma história compartilhada constituída por intermédio do diálogo, do uso de praxeologias específicas para cada situação. Um conjunto de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que estão diretamente relacionadas àquela situação e sob a interpretação do grupo que participa. Os sujeitos agem e tomam atitudes de acordo ao equipamento praxeológico disponível para responder uma situação proposta.

Nesse sentido, é que defendemos a existência da décima primeira dialética – da pessoa e da situação, que abordamos na próxima subseção.

5.1.1 Dialética da pessoa e da situação

Tomamos, de modo intencional, dois significados para a palavra “pessoa”: um ser individual, que preserva sua própria subjetividade e seu modo de perceber o mundo que o cerca e, um ser coletivo integrante de um espaço social que dialoga, troca informações e aprende com o outro. Os dois seres que vivem dentro da pessoa caminham de mãos dadas para atingirem um equilíbrio e se relacionam de forma dinâmica, em um movimento de trocas intensas em uma determinada situação que requer seu posicionamento, ou seja, há uma relação de dependência entre as duas partes, “a pessoa está em uma situação e esta, por sua vez, à mercê da pessoa” (PINO, 1992, p.19, **tradução nossa**)⁹⁸.

Nesta correlação é possível detectar que existe a pessoa na sua singularidade, a realidade que a envolve e “a situação (que) é sempre a síntese da oposição sujeito-realidade” (PINO, 1992, p.97)⁹⁹. Ela será percebida como um fato, uma circunstância, um momento, uma tarefa e que tem o potencial de fazer emergir diferentes interpretações, abduções e significados ainda não pensados, não institucionalizados. A situação não tem vínculo com apenas uma área do conhecimento, mas se expande para as necessidades amplas da ciência e do mundo.

Na perspectiva antropológica, a dialética da pessoa e da situação coloca o sujeito como descobridor da realidade que o cerca, em um processo de interpretá-la e dirigi-la em torno das práxis e da normalização dela. Tal abordagem, posiciona a situação como algo coletivo, vivenciado por sujeitos, em um determinado momento. Os pensamentos, às ações, às atitudes tomadas individualmente, refletem o *lócus* do espaço em que está inserido e reverbera no outro, no ser social.

⁹⁸ Original: en este caso la persona está em situación y está, a su vez, a merced de la persona. (PINO, 1992, p.19)

⁹⁹ La situación es siempre la síntesis de la oposición sujeto-realidad. (PINO, 1992, p.97)

A superação de uma situação posta pela realidade do seu entorno se dá com a troca com/no coletivo, no entanto, a singularidade da pessoa é que seleciona a sua própria percepção das variáveis deste entorno, a depender das experiências adquiridas, observando àquelas que interessam momentaneamente. Há, portanto, um “recorte” da realidade, uma escolha daquilo que o eu, crê importar e as atitudes por ele tomadas, “mediante atos de consciência, tais como: recordar, imaginar, fantasiar, comparar, raciocinar, analisar, refletir, organizar, articular, expressar” (BICUDO, 2010, p.30).

O “dar conta” dessa realidade, por intermédio da percepção será o primeiro ato da consciência, um processo individual, que está associado a unidade do ser. A primeiridade ressalta aos olhos, e revela o fenômeno que se faz notar para a pessoa. A consciência exige uma reação ao percebido, a segundidade, que por sua vez o obriga articular essa percepção com o outro, com a coisa fazendo emergir a terceiridade, para a busca de uma generalização no processo de empatia, de comunicação, de aprendizagem.

Essa dimensão da linguagem que perpassa a história, a cultura, o social comunicado, estruturado pela sintaxe, pela sintática e pela paradigmática é constituído por um sistema de referências (linguística, Leis, regras, cultura, história, experiências, entre outros) e por uma realidade compartilhada que possibilita uma pessoa adquirir atitudes de grupo, modelar as ações e influenciar as reações e formas de condutas nas situações em que é submetida.

As circunstâncias que irão determinar a ação, a atitude e a interpretação na busca de sentido ou de uma significação para as praxeologias empregadas no transcorrer do percurso. Porém, será na seleção “por meio dos atos que atualizam expressões mediante signos, que a linguagem encontra maneiras de se manifestar” (BICUDO, 2010, p.37).

A dialética da pessoa e da situação consiste em atitudes e ações a serem tomada por um sujeito ou por um grupo em uma circunstância. Em um sentido filosófico, as atitudes imprimem ao olhar um espanto e um rompimento com o senso comum, com o trivial diante de uma realidade. Por esse motivo, as atitudes podem ser auto-organizáveis e criativas originando ações, que são as escolhas e as decisões tomadas no ato e que ajudarão a solucionar uma situação. Durante o processo da seleção de atitudes e a ação o interpretante faz inúmeras correlações entre pensamentos (signos) e objetos produzindo infinitas semioses. Estas duas componentes promovem um rompimento das crenças coletivas e possibilitam gerar outras. Nesse sentido, “a criatividade constitui um processo de auto-organização, no qual o raciocínio

abdução ocorre, possibilitando a expansão de crenças bem estruturadas” (GONZALEZ; HASELAGER, 2002, p.28).

A situação impõe ao sistema de crenças já instituído, que ele seja revisitado, se organize e se ajuste possibilitando significados para o que emergiu. Entretanto, atitudes e ações empregadas por uma pessoa em uma situação determinam os seus efeitos. Elegemos, do quadro filosófico, as quatro atitudes necessárias para a análise da dialética da pessoa e da situação, a saber: o espanto (E), a dúvida (D), o rigor (R), a insatisfação (I).

Aristóteles defendia que o ser social não pode estar alheio a realidade em seu entorno. É preciso se indignar, causar desconforto, se estranhar, para só então contestar. O espanto é o ponto de partida para a formulação crítica e racional. Consiste em uma primeira impressão, que se enquadra na categoria da primeiridade, saltitando aos olhos do interpretante como uma sensação. O sentimento de espanto pode ser exemplificado com a visualização pela primeira vez da obra “O Grito” do artista Edward Munch (1893). Um exemplo na matemática da estranheza ocorre quando um indivíduo depara com as formas geométricas aplicadas nas obras de Niemeyer, que o permite suscitar a dúvida sobre a intencionalidade do arquiteto ao usá-las: consiste em uma revelia a naturalização dos conhecimentos matemáticos? Ou a defesa da naturalização?

A dúvida, a segunda atitude filosófica, é a revelação de um pensamento oposto ao percebido. Ela é desencadeada após o indivíduo tomar consciência da estranheza, da perplexidade ao que o incomoda, para então, passar a discordar do que está posto. É a categoria da segundidade que flui, exigindo uma reação ao acontecimento e posteriormente, a possibilidade de transformação.

Mesmos em contextos específicos, uma pessoa pode questioná-la de forma crítica. Como por exemplo, ao verificar a expressão corporal do movimento da bailarina Ana Botafogo apresentando o espetáculo “o lago dos cisnes”, no Teatro Municipal do Rio de Janeiro, emerge daquela realidade a dúvida: é uma representação ou algo real?

Entre vários exemplos, sobre as dúvidas que abarcam a aplicabilidade dos conceitos matemáticos, retornamos ao exemplo das obras de Niemeyer, para destacar que o indivíduo ao perceber as formas geométricas reage diante do conhecimento adquirido na sua formação, identificando os objetos matemáticos presentes: as curvas, as superfícies quádricas, as linhas, os ângulos, entre outros. Essa suposição pode ser verificada por intermédio de consultas na

internet, na biografia do autor que descreve as motivações e o uso da matemática pelo arquiteto. Tal comprovação evidencia a busca da autenticidade das hipóteses iniciais e o rigor das argumentações identificando a terceiridade, categoria da Semiótica peirceana, que busca significado, generalização e representação.

Nesse sentido o rigor, terceira atitude filosófica, consiste em estabelecer argumentos convincentes que garantam a coerência, a não contradição e a veracidade das informações, consiste no ato de “colocar em xeque” o conhecimento. O rigor garante ao indivíduo que ele não use falsas informações (*fake News*) e sustentem, embasados por princípios científicos, as críticas impostas ao modelo social.

Todavia, é necessário que o indivíduo “visite” sempre as respostas obtidas, avaliando e duvidando de suas próprias conclusões e certezas. Essa insatisfação garante o sucesso provisório das suas atitudes, ou um resultado preciso. Um exemplo de persistência diante de um resultado insatisfatório pode ser encontrado na invenção da lâmpada elétrica por Thomas Edison (1847-1931), que após ter realizado mais de mil experiências, sempre buscando aprimorar e criticar seu próprio modelo o conduziu ao alcance do seu objetivo. Exemplo semelhante pode ser vislumbrado por alguns matemáticos que se debruçaram sobre a demonstração dos teoremas que criaram.

O conjunto das quatro atitudes, o EDRI, é uma das componentes da dialética da pessoa e da situação que promoveu a análise dos dados obtidos no desenvolvimento do PEP. Para além disso, pode-se detectar indícios de sua importância para a ascensão do novo paradigma do questionamento do mundo, constatados por Chevallard ao afirmar:

A investigação exige suposições por parte do investigador e de certa forma “a incorporação” de certas atitudes que se revelam decisivas na mudança de paradigma didático escola-universidade ainda dominante, o da “visita às obras”, ao paradigma emergente conhecido como do “questionamento do mundo” (CHEVALLARD, 2012, p.4, **tradução nossa**).¹⁰⁰

A afirmação supracitada revela que não passou despercebido aos olhos de Chevallard a importância das atitudes filosóficas para o modelo do paradigma emergente. Inferimos que ao descrever as cinco atitudes: problematizadora, herbartiana, procognitiva, exotérica, da enciclopédia comum (CHEVALLARD, 2012, p.4-5) objetivando a mudança do paradigma nas

¹⁰⁰ Do original: Enuqêter appelle de l'apart de l'enquêtur l'assomptiton et em quelque sorte « l'incorporation » de ceretaines *attitudes* qui se révèlent determinantes pout passer du paradigme didaticque scolaire – universitaire encore dominant, celui de a « visite des ouvres », ao paradigme aujourd'hui émergent dit « du questionnement du monde» (CHEVALLARD, 2012, p.4).

escolas e nas universidades, ele apresenta uma releitura das atitudes filosóficas defendidas por Aristóteles.

Tal suposição pode ser justificada por meio da análise comparativa estabelecida entre as atitudes filosóficas descritas por Aristóteles e as de Chevallard (2012). Neste intuito, verificamos que a primeira atitude, a problematizadora, consiste em reconhecer-se diante da problemática da situação vivida ou observada e se assemelha a dúvida da atitude filosófica; a segunda, a herbartiana, um indivíduo diante de uma questão não deve aceitá-la sem primeiramente, negá-la, ignorá-la dos conhecimentos adquiridos buscando devolvê-la transformada, ampliada, em um contínuo processo de questões e de supostas respostas. Constata-se na descrição anterior, características do espanto - a primeira das atitudes filosóficas. A terceira atitude, a procognitiva, reconhece a total incompletude do saber, pois diante de uma questão pode haver conhecimentos ainda não adquiridos, conduzindo a pessoa a tomar a postura de não se considerar anormal por desconhecê-los. Essa perspectiva se enquadra nas atitudes filosóficas de espanto, de indignação e de rigor.

A quarta, a exotérica, consiste em permitir olhar para si mesmo e projetar o conhecimento para a frente como um processo evolutivo. Em que as supostas verdades, precisam ser avaliadas com um certo rigor e uma incessante insatisfação pelas respostas parciais obtidas. E a última das atitudes, da enciclopédia comum, revela o espanto, a dúvida e a insatisfação ao se ver como um estranho diante do conhecimento que ainda não se sabe. Aquelas atitudes filosóficas conduzem situar o indivíduo no processo de questionamentos, sem ter a pretensão de aceitá-los como únicos, verdadeiros. As incertezas diante da possibilidade de se alcançar a totalidade de todos os conhecimentos produzidos é eminente.

Ao compararmos as atitudes, tecemos alguns argumentos para a elaboração da décima primeira dialética: 1. as ações e as atitudes pertencem aos pressupostos teóricos abordados nesta pesquisa; 2. elas são interpretadas segundo a perspectiva da pessoa que está emersa na situação; 3. A ação, na Semiótica peirceana, se dá por infinitas semioses, enquanto, na TAD ela ocorre nas escolhas das praxeologias mobilizadas para exercer uma tarefa, que em nossa leitura, adquirem um significado próprio ao seu contexto, ao qual denominamos de praxeologia situacional; 4. Sobre as praxeologias, elas não são mobilizadas apenas em torno da Matemática, envolvem outras áreas e situações diferentes daquela componente curricular.

A dialética pessoa e situação acaba por promover “o reencontro do homem consigo mesmo e o situa no mundo ao qual pertence”¹⁰¹ (PINO, 1992, p. 172, **tradução nossa**). Inferimos que a inserção da perspectiva do objeto pragmático na matemática, por intermédio da criação de situações que reposiciona o lugar que ocupa o objeto matemático na estrutura científica, alinha-se ao paradigma do questionamento do mundo e ao desenvolvimento do PEP, expandindo as ações dos signos para campos que integram os conhecimentos de várias áreas do conhecimento e facultam processos semióticos pouco explorados na matemática, como: as linguagens, os gestos, o pragmatismo, as semioses que proporcionam a aprendizagem.

Pautados nos alicerces da Semiótica peirceana, definimos ação como um certo tipo de coisa que um indivíduo é habilitado a fazer. O signo é reconhecido como um objeto favorável à realização de uma situação, o que promove no interpretante a atitude de colocá-lo em prática, em ato. Entretanto, a ação coerente é precavida, parte da observação das respostas dadas nas diferentes instituições, analisando-as, avaliando-as para só então atuar na produção de uma resposta simples e limpa, passível de ser transmitida e defendida com coerência e lisura, são os “gestos básicos” descritos por Chevallard (2012, p. 4).

A ação é uma das componentes que integram a dialética da pessoa e da situação e proporcionam analisar os dados obtidos no desenvolvimento do PEP, verificando as atitudes selecionadas pelos estudantes e quais ações foram realizadas. Para além disto, a ação estabelece o ato interpretativo de um indivíduo, ou de um coletivo, diante de uma situação, que pode ser uma tarefa, uma questão aberta, um problema, por isso, é pautado no conceito de semiose. Ao interpretá-la o indivíduo estabelece atitudes a serem tomadas, como por exemplo, “visitar” tarefas, conhecimentos e experiências vividas em um dado momento que auxiliam na solução da nova situação. Ao executar esta “visita”, o interpretante coloca a atitude selecionada em prática, no ato do fazer, promovendo a ação.

Diante do exposto, as atitudes e as ações são as unidades de análise da dialética da pessoa e da situação no desenvolvimento de um PEP. Para colocá-las em prática são mobilizadas pelos estudantes as praxeologias que se adaptam à situação proposta, que definimos como praxeologia situacional, específicas para aquela circunstância e são provenientes das escolhas efetuadas por uma pessoa (ou um grupo) promovendo uma rede de significados e de interpretações momentâneas, que podem ser mudadas a qualquer tempo.

¹⁰¹ Original: El reencuentro del hombre consigo mismo dentro del mundo em que él está. (PINO, 1992, p. 172)

As onze dialéticas descritas são uma das fontes de entradas das duas matrizes criadas para análise dos dados coletados no desenvolvimento do PEP realizado com estudantes da Licenciatura em Matemática e das Engenharias: civil, elétrica e ambiental. Na seção seguinte, há uma descrição destas matrizes de análises.

5.2 Matrizes de Análise

A palavra matriz significa origem, fonte e tem o papel de organizar uma quantidade de dados em uma determinada ordem, no formato de “bloco”, de tabela. Na matemática, matriz é um objeto matemático e em outras áreas do conhecimento, como: economia, administração de empresas, engenharia da computação a exploram para controle, gerenciamento, avaliação e criação de informações.

Nas ciências sociais a matriz¹⁰² consiste em uma tabela que auxilia na priorização da resolução de problemas externos ou internos a um ambiente. A organização avalia a origem da situação: a gravidade, a urgência e a tendência de evolução priorizando ações (corretivas, preventivas) com o objetivo de eliminá-la ou (re)significá-la. Essa modalidade de matriz proporciona uma análise de uma situação e, por espelhamento, elegemos este formato como um esquema propício para organizar e analisar os dados coletados no desenvolvimento do PEP.

Adotamos esse conceito administrativo, tendo em vista as organizações matemáticas e didáticas elaboradas e gerenciadas durante o PEP, que buscou uma resposta para uma questão problemática proposta aos estudantes. As atitudes e ações no processo de construção daquela, fez com que a comunidade de estudo mobilizasse praxeologias, “dialéticas” (CHEVALLARD, 2012), funções didáticas, raciocínios, semioses e tipo de linguagem, visando o alcance do objetivo. Estes conceitos estão em consonância com a primeira hipótese¹⁰³ desta tese e os agrupamos em uma primeira matriz de análise – Matriz da Dimensão da Linguagem (MDL), representada por:

$$MDL = \begin{bmatrix} \textit{praxeologias} & \textit{dialéticas} & \textit{funções didáticas} \\ \textit{raciocínios} & \textit{semiose} & \textit{tipo de linguagem} \end{bmatrix}.$$

¹⁰² Matriz é usada em administração de empresas para organizar dados coletados em torno de um problema organizacional, interno ou externo à empresa. Com tal intuito, duas matrizes são utilizadas: a Matriz GUT e a SWOT. A Matriz GUT, é uma tabela que prioriza avaliar um problema de acordo com três critérios: gravidade (G), urgência (U) e tendência (T), enquanto, que a Matriz SWOT firma as estratégias para o alcance com êxito nas ações administrativas em torno da avaliação do problema, realizada pela Matriz GUT.

¹⁰³ Hipótese da pesquisa: A dimensão da linguagem no problema didático relacionado aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Dupla proporcionam analisar os raciocínios abduativos, as praxeologias e os significados mobilizados pelos estudantes de Engenharia e de Licenciatura em Matemática em um PEP.

A dimensão da linguagem (dictarizada, contrafactual, em curso e (dis)curso) é a fonte a qual analisamos as praxeologias, as dialéticas, as funções didáticas, os raciocínios, a semiose e o tipo de linguagem empregadas pelos estudantes durante o PEP. Na representação da MDL posicionamos na primeira linha dois conceitos provenientes da TAD, enquanto na segunda àqueles advindos da Semiótica peirceana. Na análise procuramos empreender um exame por encontros, analisando cada unidade da matriz separadamente e depois articuladas entre si, para identificação dos significados produzidos.

Todavia, no processo de análise destes significados foi necessário criar uma segunda matriz de análise - a Matriz da Diversidade (MD), que revelou ser apropriada para a confirmação da segunda hipótese¹⁰⁴ desta tese. Ela possibilitou estabelecer quais as diferenças de significados, interpretações e atitudes foram mobilizados pelos estudantes dos cursos de Engenharias e de Licenciatura em Matemática no transcorrer do PEP. Representamos a MD

$$\text{por; } MD = \begin{bmatrix} \textit{significados} \\ \textit{interpretações} \\ \textit{atitudes} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz está diretamente relacionada com os anseios de cada curso da graduação para o exercício da profissão dos estudantes, por esse motivo, a análise das praxeologias será situacional, voltada em analisar as tarefas, as técnicas, a tecnologia e a teoria empregadas nas atitudes e nas ações desempenhadas pelos dois grupos (estudantes da engenharia e da licenciatura) de acordo os interesses, as interpretações e os significados que fizeram sentido para eles.

Inferimos que as duas matrizes contemplarão os elementos fundamentais para a comprovação das duas hipóteses de pesquisa elaboradas e buscamos confirmá-la, por intermédio da análise das informações presentes em cada uma das componentes matriciais descritas na próxima seção.

5.2.1 Matrizes MDL e MD

O PEP ocorreu em cinco encontros presenciais com estudantes dos cursos de Engenharias (civil, ambiental, elétrica) e de Licenciatura em Matemática de duas instituições

¹⁰⁴ Há diferenças nos significados, nas interpretações e nas praxeologias mobilizados por estudantes dos cursos de Engenharias e de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um PEP.

públicas de uma cidade do interior da Bahia. A análise da linguagem e dos significados convocados por eles durante o período experimental consiste no objetivo deste estudo.

Cada um dos encontros foi filmado e áudio gravados para restituir e reconstruir as linguagens e significados que constituíram as interpretações dos partícipes. Será, portanto, analisada a presença de cada uma das duas matrizes criadas nos cinco encontros. Como registrado nas seções seguintes.

5.2.1.1 Primeiro encontro - “Cônicas Sertaneja”

Após o processo de seleção dos partícipes e as organizações didáticas e matemáticas previamente selecionadas, passamos a fase da elaboração do primeiro contato com os estudantes.

Para o primeiro encontro, levamos em consideração três aspectos fundamentais na formação da equipe de estudo: o primeiro, consistiu na heterogeneidade dos cursos ao qual eles pertenciam: licenciatura em matemática, arquitetura, engenharias: civil, elétrica e ambiental; o segundo, a falta de entrosamento entre eles, tendo em vista, que estudam em instituições de ensino diferentes e, o conhecimento prévio dos estudantes em torno do objeto matemático escolhido e da sua praxeologia, condição estabelecida na seleção.

Esses três aspectos nos conduziram a construir um ambiente que proporcionasse a integração entre eles e os acolhessem de forma prazerosa, tendo em vista que a proposta do curso ofertado não integrava o currículo e, portanto, não trazia a obrigatoriedade de participação, o que nos deixava bastante vulnerável a desistência daqueles sujeitos da pesquisa.

Outras restrições puderam ser avaliadas, a saber: a investigadora encontrava-se afastada das atividades laborais para cursar o doutoramento, o que dificultou a formação de uma turma para a realização do trabalho proposto; a segunda, diz respeito à inviabilidade posta pelos colegas da área, da investigadora assumir a disciplina de CDI-III durante o período do desenvolvimento do PEP, alegando motivos institucionais (Lei, justificativa da carga horária, o tempo destinado ao PEP, entre outros); a dificuldade de reunir estudantes de uma mesma instituição que abarcasse cursos distintos.

Entretanto, foi no seio do grupo de estudo e pesquisa, ao qual pertence a investigadora, que encontramos as condições estruturais propícias para o desenvolvimento do curso: sala de aula, material didático, certificação, divulgação no site institucional, entre outros.

Diante das restrições/condições optamos por um curso, com um encontro semanal, aos sábados. A organização didática para a realização, nos conduziu a tomada de decisões específicas para o desenvolvimento do PEP elaborado, tais como: encontros em ambientes abertos, mesa redonda com profissionais de áreas de atuação distintas, entre outras. Mas, não nos passou despercebidos que seriam necessárias adaptações, reformulações e organizações didáticas se o PEP proposto fosse aplicado em situações adversas: salas de aula com uma quantidade maior de estudantes matriculados; instituições com uma infraestrutura ínfima de materiais didáticos e de ambiente físico; carga horária limitada para as componentes curriculares; verbas reduzidas para pesquisa de campo que inviabilizam o transporte dos estudantes e o seguro viagem para tais eventos, entre outros.

O primeiro encontro ocorreu em uma fazenda situada fora do perímetro urbano. Tal escolha, teve um significado previamente relacionado com a questão geratriz proposta para o PEP - Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? – Ao estudar as obras do arquiteto catalão identificamos as formas da natureza como parâmetros para a criação das estruturas físicas e espelhamos naquela inspiração para que os participantes tivessem o primeiro contato com a pergunta motivadora do dispositivo didático.

A organização didática para aquele encontro contou com a estrutura física, materiais didáticos (papel ofício, classificadores, canetas, projetor, filmadora, gravadores, computador, documentação do Código de Ética, entre outros), bem como, os slides produzidos para o encontro (APÊNDICE D).

A apresentação da proposta do curso intitulado “Se Integre Duplamente as Superfícies Quádricas”, foi realizada pela investigadora principal desta pesquisa que discorreu sobre: como surgiu a ideia do curso; os empecilhos encontrados na trajetória; a visão da pesquisadora da matemática; reflexões sobre a sua ajuda para o ensino da Matemática; explicação sobre o PEP; a implícita relação da matemática com as outras áreas do conhecimento; a relação de alguns objetos do CDI com as áreas do conhecimento; e algumas perspectivas. Durante toda a explanação, alguns questionamentos do investigador e dos estudantes surgiram, eles serão transcritos parcialmente na análise das componentes das matrizes.

5.2.1.2 Análise dos dados da matriz MDL

Todo o primeiro encontro foi marcado por uma linguagem do tipo contrafactual e do (dis)curso, momento em que as percepções e significados dos estudantes a respeito da

matemática foram evidenciadas. Como um dos objetivos era a interação eles, os conceitos, as regras, os teoremas e as definições dos objetos matemáticos abordados em uma linguagem dicionarizada não foram priorizados.

Após o acolhimento e o café da manhã, a investigadora principal iniciou a apresentação do curso “Se Integre Duplamente a Superfície Quádrica”. Relatou as dificuldades encontradas no exercício da profissão de professora, as principais indagações dos estudantes acerca da matemática e os empecilhos que ainda encontra para “conversar” com as outras áreas de conhecimentos.

Durante a exposição sobre a amplitude e a incapacidade de se ter o conhecimento sobre todas as coisas existentes no mundo, alguns questionamentos foram surgindo, tanto da investigadora como dos estudantes, momento em que identificamos a dialética das perguntas e respostas e que descrevemos no que segue.

A professora pergunta para o estudante E_1 ¹⁰⁵:

*Q_{1.1}. Você saberia me dizer qual o fertilizante que foi colocado naquela planta?*¹⁰⁶

R_{1.1}. Não. Respondeu o estudante.

Q_{1.2}. Você saberia demonstrar para mim, no quadro, o Teorema de Gauss?

R_{1.2}. Não. Sem consulta, não.

Um aluno da engenharia civil, intervêm e pergunta:

Q_{1.3}. Como se calcula a viga Guerbera?

R_{1.3}. Não sei. Responde o aluno.

A investigadora conclui mostrando a importância de se desenvolver um percurso em que as respostas emergem da curiosidade, da busca e do estudo. E continua a exposição relatando sobre as crenças matemáticas. Nesse interim, a investigadora pergunta aos estudantes:

Q_{1.4}. Como vocês veem a matemática?

R_{1.4.1}. A forma de ver o mundo. Responde a estudante E_2 da licenciatura

R_{1.4.2}. Estuda os fenômenos. Responde outro estudante E_3 da licenciatura

R_{1.4.3}. É uma forma de achar uma resposta, que a gente precisa saber, uma resposta exata. Responde a estudante de arquitetura E_4

¹⁰⁵ Ao transcrever as falas dos estudantes preservamos suas identidades e expressamos pela letra E, oriunda da palavra estudante seguida de um número, ao qual registra a ordem em que eles se expressavam durante o discurso. Assim E_1 foi a primeira estudante a se expressar oralmente.

¹⁰⁶ Optamos em registrar a descrição das falas dos estudantes no modo itálico por considerarmos que há um destaque visual para a formatação do texto.

Q_{1.4.1}. *Você ver como uma exatidão, um certo rigor?*

R_{1.4.3}. *Sim.* Responde a estudante E₄.

R_{1.4.4}. *Nem todo mundo vê a matemática do mesmo jeito.* Responde o estudante de engenharia elétrica E₅.

(silêncio)

Q_{1.5}. *Vocês já pensaram em Matemática como algo criativo?* Pergunta a investigadora

R_{1.5.1}. *Eu vejo a questão da imaginação associado as coisas que os engenheiros civis fazem. Está associado a curiosidade, a imaginação e a inovação. Em relação à matemática, nós temos mais imaginação do que outros estudantes que conseguem pegar a matéria, temos mais facilidade. Por exemplo, nós conseguimos enxergar um plano, um cubo, como uma equação tripla para calcular o volume com mais facilidade. A gente consegue visualizar a construção de um prédio, como vai ser, quais problemas podem ocorrer e conseguir resolver essas problemáticas melhorando. Então a gente tem o potencial pela imaginação de criatividade maior.* Responde o estudante E₅ da engenharia civil.

Q_{1.5.1}. *E para vocês da Matemática?* Pergunta a investigadora.

Fez-se silêncio, seguido de sorrisos.

Q_{1.5.2}. *Você está perguntando se o potencial criativo é criar a partir da matemática?* Pergunta a estudante E₃ da licenciatura.

R_{1.5.1}. *Também.* Responde a investigadora.

R_{1.5.2}. *O matemático faz sem saber para que vai servir aquilo um dia. Para criar cálculo, às vezes, a gente cria no escuro sem saber. Nem sabe que criou. A priori, desconhece.* Responde E₃.

A investigadora continua a questionando:

Q_{1.5.3}. *Você acha que pode ser construído algo a partir da matemática?*

R_{1.5.3}. *Sim.* Responde E₃.

Q_{1.5.4}. *Você teria condições de me dar um exemplo disso?* Indaga a investigadora.

Q_{1.5.4.1}. *De algo criado a partir da matemática?* Questiona E₃.

O estudante E₅ da engenharia ambiental interrompe com a afirmação:

R_{1.5.4}. *Há um contraste da matemática tanto para licenciatura quanto para a gente que é um pouco mais a aplicabilidade. Então para a gente é mais fácil enxergar. O caso do engenheiro civil vai fazer os cálculos e saber quanto de massa vai usar para fazer a viga (aquela que o colega falou...). Ou então, usar em projetos elétricos ou ambientais. Para a gente é a aplicabilidade, para vocês, já não é tão visto. Então, a gente tem uma deficiência tanto em uma área como na outra.*

A estudante E₃ explica:

R_{1.5.5}. *O que estou querendo dizer é que na hora que as pessoas, os matemáticos, estavam criando estas teorias que vocês aplicam, não estavam imaginando o potencial criativo da criação em si.*

R_{1.5.5.1}. *Sim.* Responde o estudante E₅.

A investigadora intercede comentando:

R_{1.5.5.2}. A matemática foi criada a partir da observação de alguns fenômenos astronômicos e a partir disso foi se desenvolvendo o estudo de alguns conhecimentos. Mas houve também os matemáticos que criaram a matemática, seus teoremas e as suas teorias, sem se preocupar como aquilo ia ser aplicado a Engenharia. Eles criaram a partir da imaginação e da abstração dos conceitos.

Após o comentário a investigadora pergunta:

Q_{1.6}. Na percepção de vocês a matemática é criativa?

R_{1.6.1}. Eu penso na criatividade de forma pedagógica, explicar um assunto de forma diferenciada. Por exemplo, criar um jogo, uma estratégia de aplicação. Eu vejo assim. Eu sei que tem outras formas de ver. Mas na licenciatura eu vejo a criatividade como uma forma de explicar o assunto da aula, uma didática diferente, sei lá...Uma abordagem diferente. Eu vejo criatividade nesse sentido.

Neste primeiro momento foi possível detectar por intermédio dos diálogos descritos que há significados distintos sobre a percepção da Matemática para os estudantes das Engenharias e da licenciatura em Matemática, expressos na fala dos estudantes E₃, E₅ e E₆. O registro oral destes estudantes indicam que nas Engenharias, a Matemática é aplicada no exercício da profissão de forma subjetiva e que para eles as formas, os conceitos emergem com mais facilidade fazendo com que eles sejam reelaborados em estruturas físicas, previamente imaginadas e criadas. Enquanto para os estudantes da licenciatura em Matemática a criatividade emerge da criação das teorias matemáticas e da metodologia do seu ensino.

Identificamos no debate da comunidade de estudo um confronto por parte dos dois grupos de estudos – engenheiros e licenciandos – quanto ao papel da matemática nas futuras profissões. Pontuando, também, as questões do currículo na perspectiva dos cursos e sob vertentes diferentes. Nesse sentido, foi possível averiguar a presença da dialética indivíduo e coletivo, bem como, da caixa preta e da branca.

No que tange a dialética pessoa e situação, verificamos que há uma maior interação da matemática com a realidade por parte do grupo das engenharias. Ou seja, os contextos reais em que os conceitos dos objetos matemáticos são aplicados e visualizados são mais perceptíveis pelos futuros engenheiros. No que se refere as atitudes, componentes da análise daquela dialética, foi possível perceber, no ato da fala, a insatisfação da estudante E₃ ao não conseguir ter clareza quanto ao seu posicionamento a respeito da criatividade matemática, expressa na proposição – “*O que estou querendo dizer é que...*”. Outra atitude foi da dúvida, em que a mesma estudante devolve uma pergunta a investigadora: *Você está perguntando se o potencial criativo é criar a partir da matemática?*

Ainda no diálogo foi possível detectar as atitudes de espanto, de dúvida e de insatisfação do estudante E₅ ao afirmar: “*Para a gente é a aplicabilidade, para vocês, já não é tão visto. Então, a gente tem uma deficiência tanto em uma área como na outra*”. O registro oral do estudante revela uma semiose em que sobressai, a partir das falas dos dois grupos de estudante, a interpretação do sujeito sobre a sua percepção do uso da matemática em diferentes contextos.

Assim, o signo, *matemática*, associado ao objeto, *aplicabilidade*, permitiu que o interpretante (estudante) adquirisse uma relação com outras semioses produzidas durante o discurso levando-o à conclusão de que há uma deficiência na produção de conhecimento por ambas as áreas. Os resultados também apontaram para a existência de uma praxeologia situacional, em que as tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias em torno do objeto matemático têm um uso pragmático, a depender da situação empregada, apresentado no discurso do estudante E₅.

No período da tarde, foi apresentado a questão do PEP e oralmente a estudante E₆ fez o seguinte comentário: “*sabia que a coisa não seria tão simples! Como em uma obra de arte identificarei um conteúdo matemático?*” Essa indagação tem um significado peculiar para o nosso estudo, pois a percepção, atitudes problematizadora e herbartiana, de que os conhecimentos são isolados em áreas de conhecimentos e não se articulam entre si, tem sido um empecilho para o ensino do CDI em cursos para não matemáticos. Como também é constatado por Severino (2012, p. 38) ao afirmar que “os conteúdos dos diversos componentes curriculares, bem como atividades didáticas, não se integram. Os alunos vivenciam a aprendizagem como se os elementos culturais que dão conteúdo a seu saber fossem estanques e oriundos de fontes isoladas entre si”. Essa desarticulação torna as “práticas educacionais puramente mecânicas e transitivas” (p.39).

Aquela desarticulação revela a impressão mencionada pelo estudante E₇: “*às vezes dá a impressão de que a gente não sabe nada, né?*”. Inferimos que isso acontece devido a forma fragmentada em que o conhecimento é apresentado ao estudante, não articulando-o com o seu entorno, causando a impressão de que é necessário apenas aplicar as técnicas do tema matemático sem justificá-las, que a aprendizagem se concretiza. O estudante ao revelar que “não sabe nada” está diante de uma situação que o coloca a produzir significados para as praxeologias apreendidas e associá-las com outras áreas, tal intencionalidade resulta na identificação da dimensão vasta do conhecimento que apodera os seus sentidos.

Oposta à reação do estudante E₇ de contemplar a vastidão do conhecimento, o estudante E₈ procurou uma ação particular tendo em vista o todo, quando propõe: “Ana, podemos inicialmente conhecer as obras do artista e então identificar alguma relação com a matemática.”

A professora responde:

Ótima ideia. Então proponho duas perguntas: Q₁: Quem foi Gaudi? e Q₂: Quais são as suas obras?

O caminho a ser desenhado para a busca da resposta é delineado pelo estudante, frente a sua percepção da atitude a ser tomada naquela situação proposta. O que atende a intencionalidade proposta na investigação deste trabalho. Entretanto, as restrições didáticas como: o número de encontros previstos e a carga horária proposta para o curso nos encaminharam para um direcionamento de um PEP mais restrito e focado no tema matemático.

A escolha da investigadora foi decisiva para circunscrever o limite do estudo, pois detectamos que existiam variáveis e temas matemáticos amplos que poderiam ser abordados com a pergunta Q₀, mas que não atingiriam o objetivo proposto e nem o tempo previsto para o curso. Logo, verificamos que a função didática da cronogênese, em que “o tempo didático é assim reduzido a um pequeno número de encontros”, que fixam o ritmo coletivo de estudo” (CHEVALLARD; LADAGE; 1999, p.6)¹⁰⁷ foi uma das restrições impostas ao sistema didático proposto.

Foi necessário estabelecer alguns encaminhamentos para que as informações do curso, as dúvidas, os comentários e sugestões fossem construídas durante a semana. Mas, antes que a professora sugerisse, a estudante E₇ antecipa e faz a seguinte pergunta: *Acho legal conhecer primeiro o artista e as suas obras, pois não tinha nem ouvido falar dele. A propósito professora, como nos manteremos informados?*

A professora pergunta: *por e-mail, turma?*

O estudante E₅ sugere: *Prof. Acho melhor criar um grupo do WhatsApp, pois acessamos mais rápido e em qualquer lugar. Isso não impede de usar também o e-mail.*

Houve um consenso dos estudantes e a professora solicitou que colocassem na lista de presença o número do WhatsApp para que ela pudesse criar o grupo.

¹⁰⁷ Do original: However, it is of utmost importance to emphasize that didactic time is thus reduced to a small number of “gatherings”, which fix the collective pace of study” (CHEVALLARD; LADAGE, 2009, p.6).

Pode-se constatar que no período vespertino foi identificada a presença da dialética do paraquedista, que emergiu quando o estudante propõe o estudo das obras do artista. A indicação revela uma inspeção em torno do tema, para responder à pergunta inicial: investigar o autor, a obra, o contexto cultural, entre outros e não apenas o assunto matemático. Também foi detectável a dialética pessoa e situação, pois o estudante após o efeito do EDRI (espanto, dúvida, rigor, insatisfação) toma a ação de propor uma investigação sobre o tema, extrapolando o olhar para outras direções.

A dialética da difusão e da resposta e da mídia e dos meios surgem quando eles defendem oralmente as respostas inqueridas, mas também, quando sugerem o WhatsApp como um instrumento de difusão das informações referentes ao curso e o meio de se comunicarem.

Após a conclusão dos trabalhos daquele dia retornamos a UESB. No ônibus, os estudantes estavam mais socializados e as conversas fluíram sobre temas diversos, inclusive sobre o curso. Um dos estudantes mencionou: “*estou animado para as outras etapas deste curso. Achei muito interessante!*”. Os outros estudantes concordaram com o colega.

Após a análise do primeiro encontro, construímos as duas matrizes: a da linguagem e da diversidade, compondo-as pelos caracteres anteriormente mencionados.

A Matriz Da Linguagem¹⁰⁸ (MDL) é composta por: praxeologia, dialética, funções didáticas, raciocínios, semioses e tipos de linguagem. No Quadro 16 agrupamos esses elementos, na matriz MDL₁.

Quadro 16 – Matriz da Linguagem do primeiro encontro

MDL₁ =	Elementos da Matriz	Especificação na situação
	Praxeologia	Didática e situacional
	Raciocínio	Abduativo e dedutivo
	Dialéticas	D2, D5, D6, D7, D8, D9, D11
	Semioses	Nas percepções e articulações
	Função Didática	Cronogênese
	Tipo de linguagem	Contrafactual e (dis)cursiva

Fonte: Produção da autora

A especificação dos elementos da Matriz da Linguagem sintetiza aspectos discutidos na TAD e na Semiótica Peirceana. As conclusões retiradas a partir de várias semioses geram um raciocínio dedutivo que conectam com vários raciocínios abduativos, para a comprovação do texto, expresso oralmente pelos participantes.

¹⁰⁸ Esclarecemos que existe um livro intitulado Matrizes da linguagem e do pensamento da Lúcia Santaella (2005), no entanto, nossas matrizes abordam elementos distintos do que a autora propõe.

Quadro 17 – Matriz Diversidade do primeiro encontro

MD ₁	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
	Criatividade	- Para os futuros engenheiros: matemática aplicada ao exercício da profissão - Para os licenciandos em Matemática: emerge da criação das teorias e dos teoremas, bem como, de uma metodologia de ensino diferenciada para as aulas.
	Interpretações	- Abordam sobre o currículo e as perspectivas diferentes para os cursos da graduação. - A necessidade de relações do CDI com situações reais no curso das Engenharias.
	Atitudes	- Problematicadora ou do Espanto - Herbartiana ou da Dúvida - Procognitiva ou do Rigor - Exotérica ou da Insatisfação

Fonte: Produção da autora

Em decorrência dos raciocínios dedutivos os interpretantes são capazes de expressar os significados, as interpretações e tomar atitudes advindas de uma determinada situação, originando os elementos que compõem a matriz da diversidade (MD₁ – Quadro 17).

No que tange as atitudes, podemos perceber vários momentos expressos na oralidade e citados anteriormente em que os estudantes por intermédio das semioses se estranham com os questionamentos que são levantados, tomam consciência da questão proposta e começam a criar argumentos para convencer da certeza de sua resposta, no entanto, sempre se colocam a avaliá-la ou repensá-la.

Os elementos desta segunda matriz trazem os primeiros indícios da comprovação da segunda hipótese deste estudo, no que tange aos significados distintos mobilizados pelos estudantes das diferentes graduações em torno do ensino de CDI.

Durante o intervalo do primeiro para o segundo encontro foi criado o grupo intitulado: Integre + ação no aplicativo de *WhatsApp* para as comunicações, conforme a escolha dos participantes.

Para a organização didática do 2º encontro – Proseando com os “home” da cidade e do campo – foi escolhido uma mesa temática com professores/profissionais dos cursos das graduações dos participantes para a exposição do tema: Interação do Cálculo Diferencial e Integral com as diferentes áreas de conhecimento: possibilidades e perspectivas. Bem como, um segundo momento em que os estudantes trouxeram as respostas para as perguntas suscitadas no final do primeiro encontro.

5.2.2 Segundo encontro - “Proseando com os “home” da cidade e do campo”

Este encontro teve como objetivos desenvolver um diálogo com as diferentes áreas do conhecimento em torno da aplicação dos conhecimentos provenientes do CDI no exercício da profissão e, dar continuidade ao desenvolvimento do PEP.

Para atender a estes anseios, foram organizados dois momentos: o primeiro, uma mesa temática com a presença de palestrantes, convidados e os estudantes cursistas e o segundo, apenas com os estudantes que participam da pesquisa. Ocorreu em um dos auditórios da UESB, no dia 6 de abril de 2019, com a presença de 31 pessoas.

5.2.2.1 Mesa Temática

O sistema didático formado para esse encontro foi composto por estudantes (matriculados no curso e convidados), professores (das engenharias: civil, elétrica, ambiental; da arquitetura; da física e da matemática) e teve como objetivo mostrar como o objeto matemático Integral é aplicado em diferentes áreas do conhecimento. A organização didática escolhida foi uma mesa temática, intitulada: “Interação do Cálculo Diferencial e Integral com as diferentes áreas de conhecimento: possibilidades e perspectivas”.

A divulgação da mesa ocorreu pelo site da UESB e por meio de panfletos (Apêndice A) entregues nas instituições de ensino superior da cidade. Todos os palestrantes, bem como os participantes receberam durante a semana, no seu e-mail pessoal, as normas e diretrizes para a atividade (Apêndice E e F)

A investigadora deste estudo abriu os trabalhos agradecendo a presença de todos e compôs a mesa chamando cada palestrante descrevendo as áreas de pesquisa e estudo de acordo os seus respectivos currículos. Iniciou-se a palestra pela professora e engenheira ambiental, Camila Willers, que destacou a importância das Integrais definidas no cálculo da área alagada da barragem do rio Bonito, mostrou o mapa da barragem usando o *google maps*, a planificação da área e a coleta dos pontos inserindo em um plano cartesiano para posteriormente analisá-lo e ajustá-lo utilizando o *software graph*, explicou a necessidade de rotacionar a figura para obter as demais áreas, explicando que se utiliza de várias ferramentas para obter os dados, como o uso de GPS. Finaliza mostrando que as Integrais está presente no Geoprocessamento, na Topografia, na Gestão das bacias hidrográficas, na avaliação do impacto ambiental, na poluição atmosférica, no tratamento da água e efluente e na modelagem, destacando a EIA/RIMA nas petrolíferas.

Em seguida, o professor Danilo Brito de Almeida apresentou um projeto de rede de distribuição de energia elétrica urbana em que o uso das Integrais Duplas estava presente no dimensionamento de estruturas (postes, entre outras), nos cabos de suspensão, equação de cabos suspensos, equação das catenárias, efeitos do peso nos cabos, sobrecargas adicionais, parâmetros condutores, variação de temperatura, variação com a elasticidade, Lei de Hooke, equação de mudança de estado, Tabela de flechas.

O terceiro palestrante, o professor Gislân Silveira Santos, situou a modelagem computacional como uma das ferramentas eficaz para transformar um problema físico em um modelo matemático. Mostrou alguns projetos de iniciação científica que coordena e orienta, aplicados em um cursos das engenharias envolvendo o estudo do comportamento de equações diferenciais aplicadas ao fluxo de água no maciço de uma barragem de terra; verificação e avaliação do comportamento das EDO que regem um sistema de percolação no maciço de uma barragem de terra; estudo de modelos matemáticos aplicados ao fluxo de entrada e saída de água em barragens de abastecimento; simulações numéricas e computacionais de modelos matemáticos aplicados ao gerenciamento de recursos hídricos e estudo de modelos matemáticos aplicados a dispositivos eletrônicos.

O quarto palestrante, professor e engenheiro civil, Guilherme Marques Júnior, discorreu sobre como se sentia na universidade ao estudar o CDI sem a articulação com a prática. E que só conseguiu entender a aplicação quando avançou nas componentes curriculares de resistências de matérias e análise de estruturas. Discorre sobre a importância das Integrais para o estudo das vigas, da construção de pontes, de prédios.

O arquiteto João Pedro de Souza Cordeiro, explora a questão do que é um projeto arquitetônico, destacando o uso do ponto, da linha e da forma, as etapas do projeto: concepção, forma e função e a execução. Destaca a importância das superfícies, das projeções ortogonais para representar as formas tridimensionais na concepção do projeto e para a produção, a Integral pode estar presente na área, no volume, no dimensionamento de peças e na logística.

O professor, Luizdarcy de Matos Castro, expõe sobre a interação do Cálculo Diferencial e Integral com a Física: possibilidades e perspectivas. Inicialmente, aborda a questão histórica do Cálculo e como a física estava presente, por meio do limite, da taxa de variação, a eletricidade, o magnetismo, a massa, a inércia, o fluxo total de campos eletromagnéticos, a força gravitacional, as equações de Maxwell, a lei da eletricidade e do magnetismo de Gauss. Lei da indução de Faraday, Lei de Ampere de Maxwell. Ao final discorre que em séculos anteriores

o desenvolvimento da matemática estava atrelado às necessidades da física, mas que a partir do século XIX a matemática passou a se tornar mais independente da física. Finaliza apresentando monografias, dissertações que apresentaram o tema relacionado a mesa temática. E discorre sobre a falta de motivação e de querer aprender dos estudantes atuais, registra: “*O prazer pelo conhecimento está se perdendo nessa sociedade*”.

A professora Camila, solicita uma intervenção e registra:

como eu sou bacharel, eu não tive a mesma formação que vocês. Logo ela é mais empírica, tive que ir para a prática para a gente ver o que funcionava e o que não funcionava. E hoje em dia esta questão do que acontece, está atrelada à questão da metodologia muito expositiva ainda. Eu acredito que estamos em um momento que o que vai motivar o aluno a buscar mais conhecimento é quando a gente trabalha em cima de lançar um problema, dar uma pergunta e ele tiver que construir a resposta, sem que eu explique passo a passo tudo, isto tem tornado o ensino cansativo. Quando ele constrói a resposta, tem que entender aquilo, ele vai ter que ler, tentar fazer várias vezes. Essa é a minha crítica ao ensino.

Esta fala da professora registra aspectos semelhantes com a metodologia de ensino do PEP, que propõe uma questão problematizadora e que incita os estudantes a buscarem respostas por meio da pesquisa em diferentes meios.

O professor Luizdarcy responde: “insisto que quando o aluno quer ser coautor do seu conhecimento isso se torna muito “gostoso”. Sobre a metodologia, acredito que nem as instituições e nem os estudantes estão preparados para isso”.

Um dos convidados solicitou a palavra e fez duas perguntas:

C₁: Gostaria de perguntar a prof. Camila, sobre a lagoa das bateias aqui em Conquista. Queria saber quanto tempo ela vai levar para se tornar uma praça de verdade? (risos) Já que o mato tomou conta. O que faltou ser feito ali? As duas outras perguntas são para o professor Danilo: a primeira, o que faz com que o poste envergue daquela forma (o convidado refere a imagem apresentada no slide pelo professor). A outra pergunta: qual seria a diferença do custo entre a rede elétrica instalada da forma que é hoje e a subterrânea?

Prof. Camila responde:

Sobre a lagoa das bateias, ali o que acontece é o excesso de nutrientes, provavelmente esgotamento sanitário ligados na rede de drenagem fluvial e os bairros daquela região depositam ali. Algumas pessoas não sabem a importância daquela lagoa: ela é uma rota de pássaros que fazem migração ali. O que aconteceu ali é um excesso de nutrientes que provoca o crescimento das algas, que irão fazer o sombreamento, diminuindo a radiação solar e a produção de oxigênio até chegar ao ponto de não ter formação aquática naquela região. Como a gente resolveria aquele problema? Primeiro, é agir nas causas. Identificar as ligações que estão ligadas inadequadas. Ou seja, fiscalização pelos órgãos ambientais. No entanto, como a região a população tem um poder aquisitivo baixo e não teria como custear as despesas, então usa-se a política de deixar para lá, para não causar impopularidade. O que pode ser feito? Retirar as algas, desobstruir os canais.

Entretanto, se não resolver o problema do esgoto é um gasto desnecessário. O mesmo acontece com a nascente do Rio Verruga aqui em Conquista e a Serra do Periperi. A população precisa entender a importância de se preservar os biomas.

Professor Danilo:

Hoje em dia, os fabricantes hoje só fazem os postes sob encomenda e como fabricam de maneira rápida eles não respeita o tempo de cura dos postes e ele começa a fletir. E a outra é a qualidade dos fabricantes, desconheço a que tabela de qualidade eles estão seguindo. Quanto a rede de distribuição ser área ou subterrânea, esta chega a custar de 10 a 15 vezes mais do que a área. Ela é muito cara, ela precisa de uma alta proteção, pois ali você tem uma bomba enterrada. Você precisa de sensores, de disjuntores, cabos específicos para controlar esses riscos. A avenida paulista, em São Paulo, é toda subterrânea.

Foi possível identificar várias semioses estabelecidas entre a pergunta feita pelo convidado e as respostas dos professores. Destaca-se as relações estabelecidas entre a lagoa das bateias com questões sociais, políticas, econômicas e culturais.

O estudante E₃ pergunta:

Prof. Danilo, nós temos alguns problemas para a transmissão de energia e esses é um dos grandes problemas que a gente pode tentar melhorar. Entretanto, eu gostaria de saber sobre a possibilidade do uso de fios supercondutores e a possibilidade de em um futuro, próximo, haver a transmissão através desses supercondutores? Visto que isso diminuiria bastante esta perda de energia. Sobre a automação para controlar estas percas

Professor Danilo:

Quanto as perdas temos dois tipos: as técnicas e as não técnicas. A primeira conseguimos mensurar e fazer todo o trabalho da engenharia para diminuir. Agora as perdas não técnicas é que é o problema! Esse é o famoso “gato”. Para você ter uma ideia, existe nas empresas setores só para tentar descobrir isso. E elas são pagas na conta de energia. Essas perdas giram em torno de 25 a 30%. Quanto aos supercondutores, o professor de física pode explicar melhor. O trem bala tem supercondutores. O que acontece é que quando você esfria você tem menos agitação molecular e aí então, você consegue um transporte maior de energia elétrica, menor resistência do condutor e aí você consegue conduzir maior corrente elétrica, campo magnético para deslocar o trem. Mas, na transmissão elétrica é mais complexo, pois tem alta tensão e baixa corrente, então vamos precisar de isoladores mais sofisticados para conter essa alta tensão, os altos campos elétricos, a isonização.

O professor Luizdarcy intervém: para gerar o resfriamento dos condutores se gasta muito. Então a ideia de não gastar, acaba “saindo pela culatra”. O custo desses materiais de supercondutores é ainda muito caro.

O estudante E₃ também se posiciona:

Existem também o estudo das planilhas nos horários de ponta para saber quanto se está gastando e analisar essa perda. Aí entra a questão do cálculo, pois a partir dos dados da planilha você monta a equação e consegue saber de onde está havendo a perda.

O professor Danilo retoma a fala:

Quanto a automação, existe o self-healing, aqui em Conquista já existe isso, foi implantada tem um mês aqui. O self-healing é uma rede autorregenerativa. Por exemplo, faltou energia em sua casa, então ela faz um processo de autorregeneração que vai tentar através de aberturas e fechamento de chaves diminuir o número de pessoas sem energia. Ela, vai fazer uma reprogramação da rede, para tentar isolar o ponto do defeito. Isso envolve muito a matemática, a teoria das falhas, muito a Estatística. Isso está sendo organizado para você comprar a sua energia, a partir de 2026.

O estudante E₄ levanta a mão:

Minha pergunta é para o prof. Gislan. O senhor disse que durante a preparação das suas aulas você teve que estudar as teorias das engenharias. Eu queria saber em que isso refletiu em suas aulas de Cálculo, de Álgebra? Você consegue fazer um paralelo do professor Gislan antes e depois de ter começado a estudar isso? Você consegue passar isso para seus alunos?

O professor Gislan, responde:

Tem alguns deles aqui. Eles seriam melhores para responder (risos). Mas assim, quando eu comecei a desenvolver esses projetos, e visualizar essa matemática mais palpável eu senti que as aulas ficaram mais motivadoras, de você reinventar. Eu sinto que quando eu vou explicar um assunto, uma equação diferencial de primeira, segunda ordem e eu coloco por exemplo, um circuito elétrico de RC você tem uma equação de segunda ordem. Percebi que quando vou falar sobre qualquer tópico da matemática eu consigo mostrar assim, mesmo falando, onde ela está. Isso melhorou muito. E acaba que motiva para aquele que só precisa dela da forma aplicada. Desse ponto, que eu comecei a aplicar em projeto para aplicar no ensino. Houve sim, uma melhora! Logo quando comecei a exercer a docência eu era muito limitado. Oh! Teorema tal, demonstrava e não tava muito preocupado se estavam me entendendo ou não e aí ficava por isso mesmo. Mas depois que eu percebi que dentro de um curso precisa que use ela como ferramenta, se você começa a mostrar algumas aplicações, e se você trabalha com isso, aí fica algo a mais. Fica mais motivador. Claro! Sem não deixar todo o formalismo matemático.

A fala do professor Gislan e da professora Camila retrata aspectos importantes que são discutidos no desenvolvimento profissional da formação do professor, em que se constitui como professor durante o exercício da sua atividade, ao longo dos anos. Como foi discutido por RIOS (2010); SHÖN (1983, 1992a, 1992b), LIBÂNEO (2012).

Uma convidada solicita a palavra.

C₂: Primeiro achei interessantíssimo, essa ideia. Porque a gente vê a dificuldade dos alunos em Cálculo, no curso de física, praticamente em Cálculo 1, 50% não passa. E aí, eu tenho certeza, que se eles tivessem essa palestra aqui, no início do curso, sobre as aplicações eu tenho certeza, que diminuiria a reprovação. Porque motiva, por mais que você vê a aplicação do Cálculo na Física, mas você ver o próprio profissional falando, eu achei excelente a ideia. Estou aqui parabenizando! Ficou bem claro a apresentação e esses alunos que estão aqui, vão ajudar bastante nos seus espaços.

A fala da convidada C₂ registra as porcentagens elevadas das reprovações em Cálculo Diferencial e Integral, aspecto discutido nos artigos de Iglioni (2009), Rezende (2003), Barufi (1999).

Outro convidado, um engenheiro civil, pediu também a palavra:

C₃: Também queria parabenizar. Eu, como engenheiro, me senti contemplado com a palavra do professor Guilherme, porque resume basicamente o que acontece. Não se usa a matemática na forma com é ensinada, pois existem ferramentas que nos proporciona o cálculo. Mas o uso dessa ferramenta, tem por trás dela a matemática que proporcionou a sua criação. Olhar para a ferramenta como algo muito bom, mas para o seu desenvolvimento tem o uso de muita matemática. A matemática contribui para muitos setores da sociedade. Sempre fica como pergunta para o estudante: Por que eu estou vendo essa matéria? Ou esse conteúdo? E acho a iniciativa aqui, muito boa, pois mostra que é essa conversa que se deve ter. Isso deixaria os estudantes mais motivados, diminuiria o número de reprovação e a evasão. Pois tem estudos que comprovam o maior índice de evasão nos primeiros semestres dos cursos das exatas.

O estudante E₆ pergunta ao arquiteto:

Na sua época de estudante qual era a relação dos seus colegas com a disciplina de Cálculo? E depois de formado, qual a sua relação com o Cálculo na hora de fazer um projeto?

Professor João Pedro, responde:

Eu me senti contemplado pela fala do professor Guilherme, que disse que vem aquela enxurrada de Cálculos e que a gente fica perdido sem saber a aplicação deles. Assim como vocês, como estudante, eu acho que é importante sempre levar o Cálculo para aquilo que você vai utilizar e na arquitetura, que é mais artística, você pega muita coisa das humanas. Você não tem muito essa compreensão inicial e aí realmente você só consegue ver isso na parte aplicada. Depois que forma vai projetar uma estrutura, e aí verifica o custo muito alto ou muito baixo e não sabe dizer por que aconteceu. E a matemática é uma das explicações.

A estudante E₆ registra que:

Isso vai também da instituição e do professor mostrar isso desde o princípio, ajudar o aluno a visualizar isso. Porque eu acho, que falta muito também, é a viabilização da instituição em fazer isso. Quando você está lá dentro da instituição, você não encontra mecanismos para fazer isso. Mas se você não buscar o professor e pedi: me orienta. Vamos fazer um projeto. O estudante não é incentivado.

O estudante E₃:

É interessante ver essa discussão aqui. Porque se você vai construir algo, é necessário a interação entre as engenharias. Entender o projeto elétrico, o ambiental.

Professora Camila articula:

No IFBA, hoje os TCCs das engenharias procuraram estabelecer diálogos com os outros cursos, convidando professores das diferentes áreas. Alguns antigos

estudantes do IFBA têm retornado ao instituto para palestrar para os calouros. Mas, quanto a motivação, acho que os estudantes também precisam mudar a postura do Ensino Médio. E buscar sim, motivação por conta própria e não apenas esperar da instituição.

O estudante E₂ perguntou:

Professor, Danilo, as equações catenárias são utilizadas nas redes mais complexas?

Professor Danilo, responde:

Não. Para rede primária. A rede multiplexada agora está vindo com um cabo de aço, pois a dilatação é bem menor do que com o cabo de alumínio.

O signo catenária é associado ao objeto matemático – equações – realizando uma interpretação pragmática da Engenharia Elétrica. A ação do pensamento do estudante E₂ revelada a partir da articulação dos conhecimentos traz indícios de que a aprendizagem do objeto extrapolou as praxeologias matemáticas e direcionou para as praxeologias determinadas por uma situação, que podem ou não compreender o campo matemático.

O estudante E₅ volta a perguntar:

Quero perguntar para o professor Gislan. Você não acha que no ensino médio também não deveria dar noções de limites e derivadas como é dado no Cálculo I?

O professor Gislan responde:

Eu acho que seria interessante. Mas, por exemplo, lá no IFBA, na modalidade Integrado, com os currículos como são hoje estruturados, se ele quiser seguir a área de matemática, ele tem condições. Acho que devemos sempre responder essas perguntas localmente, lá no IFBA, se o estudante for comprometido, estudar direitinho ele não sentirá tanta dificuldade no CDI.

O estudante E₉ se posiciona:

Acho que isso vai também da maturidade do estudante do Ensino Médio. Se ele só estuda para a prova, ele não aprende para o futuro. Se o estudante aprende funções e trigonometria ele não sentirá dificuldades. Por isso acho que a mudança comportamental deve acontecer desde o Ensino Médio.

Nos relatos anteriores foi possível observar uma análise em conjunto dos participantes em torno dos aspectos curriculares que influenciam o ensino e a aprendizagem, um exemplo da dialética caixa preta e branca em que todos eles confrontam com a questão do currículo. No entanto, a questão problematizadora causa desconforto para o estudante E₃ que pondera:

Para a licenciatura em matemática acho que na teoria tudo acontece, mas na prática não funcionaria. Você chega em uma escola pública do Ensino Médio de uma periferia, o professor está trabalhando matrizes, determinantes e passa o ano todo com isso. Eu mesmo, não vi trigonometria, no Ensino Médio. Entendeu? Então isso depende muito da instituição, mas trazer essa perspectiva do CDI para outras instituições, não funcionaria. Às vezes você chega para trazer um jogo, um

aplicativo como o GeoGebra e não rola. Não sou pessimista, sou realista. Na teoria seria legal, mas na prática não funciona.

A tomada de consciência da realidade das escolas brasileiras incomoda o estudante E₃ que se pronuncia com argumentos convincentes e coerentes que o fazem duvidar da funcionalidade da proposta da inclusão de objetos matemáticos do CDI no Ensino Médio. A resposta do estudante revela atitudes do EDRI, em que o estudo da problematização abarca questões mais profundas de abrangência nacional que estão envoltas no currículo e na finalidade do ensino no Ensino Médio, como destaca a professora Camila:

Acho que o objetivo do Ensino Médio hoje está voltado para preparar para o ENEM. Estas questões precisam ser reavaliadas.

Essa última discussão traz aspectos relevantes para a formação dos Licenciandos em Matemática, pois questões relativas ao currículo, ao sistema avaliativo classificatório e a querela entre teoria e prática se apresentam como pontos críticos e conflitantes na Educação, também abordados nas pesquisas desenvolvidas por PERRENOUD (1999), HOFFMANN (2000), LUCKESI (2001).

A investigadora termina as discussões explicando aos participantes que os cursistas terão ainda um segundo momento e devido ao tempo escasso, a mesa temática precisava encerrar (aspectos relativos a cronogênese). Agradeceu a todos e propôs um lanche para encerrar o primeiro momento.

No que tange a análise do primeiro momento, verificamos duas praxeologias: a didática, na organização dos documentos, do sistema didático, do ambiente físico, entre outros e a situacional, em que o tema, os conhecimentos dos expositores, as perguntas realizadas descrevem ações em que a semiose é específica para aquela circunstância. Das dialéticas apresentadas, destacamos a dialética dos meios e mídias, perguntas e respostas, difusão e da recepção, do tema e fora do tema, a do indivíduo e do coletivo e a do indivíduo e a situação.

Das funções didáticas é possível observar o conjunto delas. O meio didático é formado ao se construir a mesa temática com expositores discutindo sobre suas áreas de atuação profissional e os estudantes como participantes/ ouvintes, o que caracteriza a topogênese. No entanto, esse meio ocorre com um tempo didático estabelecido, aspectos relevantes para a função cronogênese e, por último, as palestras e a construção do meio propiciou gerar perguntas e respostas internas ao meio didático, o que favoreceu a mesogênese.

As interações realizadas entre as diferentes áreas do conhecimento revelam uma semiose de rede aquela em que o estudante é favorecido pelo meio, capaz de fazer com que ele relacione diferentes signos com múltiplos objetos na produção de um significado para o estudo das Integrais. Essa semiose é complexa, pois mobiliza fatores externos e internos ao campo da matemática, envolvendo o raciocínio abdutivo e dedutivo. Esses raciocínios são expressos por meio de uma linguagem contrafactual e do (dis)curso.

5.2.2.2 Segundo momento

Após o lanche, o segundo momento tinha como objetivo discutir sobre as respostas das questões intermediárias criadas no final do primeiro encontro, a saber:

Q1: Quem foi Gaudi?

Q2: Quais suas principais obras?

Q3: O que você identifica nessas obras com o curso ao qual está matriculado?

A professora investigadora começou o debate lembrando sobre a questão geradora e as questões intermediárias, em seguida, lança a pergunta:

P: Solicitei que vocês pesquisassem as obras e tentassem produzir significados com os cursos de vocês. Quem gostaria de falar sobre o que pesquisou?

E4: Eu pesquisei e achei alguns artigos em espanhol falando sobre a utilização da catenária em pontes.

P: Vocês viram que hoje o professor Danilo também falou sobre a catenária. Quando mencionou que o fio condutor da rede elétrica de um poste para outro tem a forma curva da catenária.

E4: Eu vi. E lembrei que na ponte ocorre o mesmo, a força de tração faz com que os fios da ponte tomem um formato de uma catenária.

Na fala do expoente E₄ é possível identificar as dialéticas do estudo e da investigação ao mencionar a pesquisa em artigos; das caixas pretas e brancas, quando o estudante decide a obra que vai estudar; do paraquedista e os buscadores de trufas, quando realiza várias inspeções em possíveis áreas do saber para associar com as teorias da Matemática. Bem como, apresentam as características das atitudes do EDRI diante de uma questão problematizadora.

No entanto, outras percepções surgiram na sequência das falas:

P: Isso. Vocês chegaram a ver a diferença entre a parábola e a catenária?

E4: Ela é diferente porque a catenária descreve um conjunto de funções.

P: Acho que tem outros elementos, que talvez os estudantes da Engenharia Civil poderiam trazer para mim.

E7: A gente viu também que Gaudí tinha um padrão nas estruturas dele. Ele usava bastante as estruturas treliçadas, no Templo da Sagrada Família e na Cripta é possível verificar. E a gente sabe que essas estruturas conseguem distribuir melhor as tensões, como se fosse uma estrutura linear.

P: Exatamente. A questão da diferença entre a catenária e a parábola, alguém sabe me dizer?

E1: Acho que é porque uma é um cosseno hiperbólico e a outra é um polinômio de segundo grau.

P: Tá. Você está olhando matematicamente, ótimo! Como pedi para que vocês produzissem significados a partir do curso de vocês. Mas existe uma diferença! Muitos professores de matemática ao abrir alguns livros se deparam com uma figura de uma ponte ligadas por arcos e colocam como se fossem exemplos de parábolas. E não são!

E1: Eu tenho uma dúvida: Tem alguma coisa a ver com a distribuição de massa igualmente na parábola do que na catenária?

P: Isso! Você acabou de responder. É como se na parábola ela fosse mais chata, ou seja, a força aplicada, a distribuição das flechas na catenária e na parábola são diferentes. Na parábola quando chega no seu centro a força da gravidade exerce mais força, por isso, que a parábola fica mais certinha, mais arrumadinha, às vezes, simétrica e a carga é distribuída uniformemente em linha reta. Enquanto, que nas catenárias a carga é distribuída uniformemente em torno do seu comprimento com o objetivo de equilibrar o sistema.

E2: Quando eu cheguei aqui hoje, a primeira coisa que eu perguntei ao arquiteto foi isso: se o arco parabólico era igual ao arco catenário? Ele virou para mim e falou: não! Ele me disse: Deixa, eu te explicar: se você cortar um cone assim, horizontalmente, eu teria uma parábola. Lógico pegando apenas uma parte do arco. Mas e se eu cortasse assim (mostra com a mão, a posição mais inclinada) eu teria uma catenária.

P: Acho que tem um equívoco que preciso constatar: para mim, a secção do cone se for horizontal é uma circunferência. E você terá um arco parabólico, se o plano for seccionado paralelamente a geratriz do cone.

No relato exposto anteriormente podemos identificar que existe uma ação do sujeito E_2 que buscou respostas para os conhecimentos adquiridos com o arquiteto, uma atitude que revela característica da EDRI. Caracteriza-se por uma semiose que aparece diante da dúvida e o leva a atitude de ser protagonista da construção de um conhecimento que ele desejou saber e que emergiu da situação de confronto entre dois conceitos que são tomados como semelhantes. Sob a perspectiva da TAD, pode ser considerada como a dialética tema e fora do tema, que servirá como uma futura busca para os conceitos matemáticos que surgirão.

Neste trecho, há um raciocínio abdutivo, pois diante de uma inferência realizada pelo estudante E_1 acerca da diferença entre a catenária e a parábola ele traz elementos que garantam parcialmente o que leu sobre o tema. Todavia, precisa de uma confirmação, para elaborar o raciocínio dedutivo. O que garante a presença da dialética média e meio, que especula uma

suposição e busca provas para uma determinada conjuntura e da dialética perguntas e respostas que são decorrentes da construção para as respostas de Q_0 .

Sobre essa última dialética é possível perceber que uma das possíveis respostas para a pergunta Q_0 aparece como resposta para a pergunta da professora/investigadora:

P: Alguém fez mais outras associações?

E2: Além das catenárias é possível verificar que ele (Gaudí) utiliza bastante a espiral e observando as obras dele eu vi mesmo a “pegada” dele da natureza em cada parte, assim. E o mais interessante ele trabalhou muito com a Geometria, como já foi citado aqui, ele não começou da matemática, ele observava a natureza e pegava aquilo e modelava para o projeto dele, inclusive ele morreu sem terminar a obra.

P: A previsão é que só termine em 2026.

E7: Inclusive assistir um vídeo falando como será o término parcial em 2022 da fachada e uma previsão de como será no final de 2026.

P: Ótimo. Você então trará esse vídeo para que possamos assistir (risos). Com relação a vocês dentro da perspectiva das engenharias e da matemática, é possível identificar como eles criavam aqueles modelos?

E4: Como eles faziam os projetos dele?

P: Sim.

E5 começou a responder.

E5: Ele modelava intencionalmente cada peça e depois ele invertia.

P: Isso.

E7: Ele usava os barbantes em cada peça para controlar o peso

E9: Que é a questão do equilíbrio das forças.

E7: Depois ele inverteu.

O estudante E_9 fala sobre o equilíbrio de forças que atuam sobre a maquete construída por Gaudí, tomando como alicerce as leis da Física. Nesse sentido, uma teia de significados está sendo tecida pelos estudantes articulando conhecimentos de vários campos disciplinares com os objetos matemáticos. Como se pode constatar no seguinte trecho.

P: Na fazenda alguns de vocês andaram a cavalo. Para andar no cavalo vocês tiveram que colocar a sela. Alguém no estudo que fez identificou a sela na obra de Gaudí?

E7: Eu li um artigo que falava sobre isso. Que Gaudí usou algo semelhante a sela em uma das suas estruturas. Mas não me atentei muito para isso.

P: Certo. Não tem problema, estou tentando buscar o que vocês construíram.

E5: Em um artigo, se não me engano eu li que isso era um hiperboloide rotacionado.

P: Chegamos ao espaço tridimensional e você nos trouxe a questão dos hiperboloides.

No diálogo e nas relações conduzidas pela pergunta da professora foi possível detectar que o conceito das Superfícies Quádricas e do espaço tridimensional naquele instante começou a ganhar notoriedade de forma sutil, por meio da pesquisa realizada pelo estudante na internet sobre o tema (dialética da mídia e do meio).

As funções didáticas que vinculam como se ocupam os espaços do professor e do aluno (topogênese) e o processo de construção desse meio para gerar possíveis respostas (cronogênese) vão sendo delineados no transcorrer do diálogo, em que o uso da linguagem contrafactual e do (dis)curso direcionou o olhar dos participantes para o uso dos objetos matemáticos: catenária, parábola, espiral, cones, hiperboloides, constituindo em uma busca por respostas para Q_0 no âmbito da matemática (dialética do tema e fora do tema).

No entanto, o meio didático retorna a procura por respostas para Q_0 em possíveis áreas do saber (dialética do paraquedas e das trufas), quando se estabelece as relações:

E1: Foi difícil achar algo relacionado com o meu curso, engenharia elétrica. Mesmo porque eu tenho mais conhecimento da ambiental do que da elétrica¹⁰⁹. Percebi a questão geométrica, a questão de resistência de materiais, a questão do equilíbrio e da dissipação térmica também. Ele tinha cuidado com a dilatação para não desequilibrar as estruturas.

P: Tem alguém de Engenharia Ambiental?

E9: Eu aqui (levanta o braço). Como as obras dele está concentrada em Barcelona, observei a posição geográfica, o movimento das placas tectônicas e os vulcões. Na Espanha, mais na região Sul acontecia muito. Então, as estruturas dele conseguiam resistir. Não consegui dados que me dissessem se ele já pensava nisso, mais na prática as estruturas dele eram fortes. Outra coisa que observei era a reciclagem de azulejo para revestimento de algumas paredes e usava novas técnicas chamada de trencadís, ele pedia as pessoas que trabalhavam com ele para juntar resto de materiais de construção: cerâmicas, cacos e ele acabava reciclando. Outra, foi a questão da chuva ácida e ele aproveitava a substância reciclada para proteger de uma possível erosão.

P: De fato, descobri a relação entre a matemática e a engenharia civil de forma rápida nas obras de Gaudi. Mas confesso, que para a Engenharia Elétrica e Ambiental foi mais difícil associar. Pensei no clima, no solo, na reciclagem como vocês.

Na fala dos estudantes é possível trazer elementos, tais como dilatação, dissipação térmica, movimento de placas tectônicas, resistência de materiais, técnicas de revestimento de paredes provenientes de outras áreas do conhecimento. Relações que voltam a surgir no diálogo:

E6: Pesquisando as obras dele, eu vi que na casa Batlló ele usa muito a luz natural. A fachada do prédio é com muitas janelas e tem dois salões de luzes. O revestimento

¹⁰⁹ O estudante tinha pouco tempo que tinha mudado do curso de Engenharia Ambiental para o de Elétrica.

interno também é muito interessante. Nos andares superiores, onde reflete a luz de cima os azulejos são azuis escuros, que não precisa de tanta iluminação, mas à proporção que vai descendo vai sendo usado um azulejo na cor azul mais claro para conservar a iluminação, para os raios solares se espalhar mais uniformemente, e tal. O ponto mais relevante, que a gente achou da Engenharia elétrica foi isso.

P: Vocês chegaram a pesquisar na Casa Batlló a estrutura que ele utiliza para obter maior circulação de ar sem usar a energia?

E8: Eu vi, que ele tinha uma sociedade com uma fábrica de fios, mas não me levou a nenhuma conclusão.

P: Na verdade, ele criou um sistema semelhante a refrigeração do ar-condicionado, mas usando a circulação de ar natural.

E6: Eu vi isso. Ele projetava usando muitas janelas, portas, espaços amplos e vazios, vidros, formas e cores que proporcionassem maior circulação de ar aproveitando o vento do mar mediterrâneo.

E8: Eu vi que ele explorava bastante a circulação do ar natural.

P: Isso. Quando você entra na Casa Batlló eles mostram para a gente a canalização do vento que entrava na casa, de forma que distribuisse para todos os cantos da casa. A casa está situada na região turística de Barcelona, em volta existem outras casas antigas, mas é possível verificar que internamente toda a estrutura preserva a luminosidade e a circulação do ar natural. É interessante porque naquela época ele já percebia a necessidade do aproveitamento dos recursos naturais e hoje, para vocês desperta a necessidade de avaliar esses aspectos nos projetos futuros.

E6: Hoje tenho visto muito essas salas de luz em algumas construções e percebo que é um pensamento bem antigo, de se economizar a energia elétrica favorecendo a entrada de luz natural. Se as obras de Gaudí está de pé até hoje é porque ele conseguiu o equilíbrio entre aspectos da natureza e suas estruturas.

Os estudantes, com a ajuda da professora/investigadora, trazem novos elementos: circulação do ar natural, luminosidade, cores, para a construção da possível resposta a Q₀ e é possível perceber que o estudante E₆ dá indícios de que começou a vislumbrar o caminho para a construção daquela resposta. Ele está visitando as respostas obtidas no percurso para assegurar que seus argumentos são coerentes, evidenciando que existe uma atitude exotérica (ou insatisfação), proveniente das outras que compõe o EDRI.

Na sequência do diálogo perguntas individuais emergem e são respondidas pela comunidade de estudo (dialética indivíduo e o coletivo), como pode ser constatado na transcrição seguinte:

E10: O que eu queria perguntar era bem isso: o que isso afeta na resistência, utilizar a parte do azulejo para aproveitar a natureza.

P: Alguém pode respondê-la?

E2: O azulejo é um material cerâmico, e Gaudí utiliza na maioria de suas obras, porque ele tem alto poder de resistência as intempéries. Porque a chuva, a chuva ácida não vai alterar a estética e a estrutura, pelo contrário, ele protege ao usar materiais deste tipo.

P: Gaudí equilibrou todo o sistema de forças que poderia atuar naquela casa: a temperatura, o ar, a chuva, o tempo, a luminosidade.

E2: A questão da luminosidade, ele usa da eficiência energética. Até o uso da não energia é uma forma de eficiência energética. Entendeu? O uso de aquecedores solares para tomar um banho ao invés de usar a energia elétrica, o aproveitamento de energia, o consumo consciente de certa forma diminui o uso da energia elétrica.

P: Hoje, eles devem economizar bastante a energia naqueles espaços construídos por Gaudí.

E6: A gente sabe que o clima daquela região é um pouco mais úmido e a gente sabe que a umidade afeta muito a estrutura. Pode ser que ele tenha avaliado também isso, buscando alternativas para que a luz solar fosse acessível na maior parte dos cômodos da casa. Essa quantidade de janelas foi pensando nisso, preservar a estrutura desse aspecto também.

E10: O interessante é que ele primeiro fazia o projeto estrutural, tinha um engenheiro que o acompanhava, e depois desse projeto ele aplicava as suas ideias. Tanto é que você vendo as obras dele você só vê a estética, mas está tudo em cima do projeto estrutural. Diferente do que a gente faz hoje: primeiro faz o projeto arquitetônico para depois procurar um engenheiro para fazer o estrutural.

E2: Queria falar também da questão da água da chuva. Gaudí aproveitava a água da chuva para a construção, mas também para aproveitamento dos usuários dos espaços

P: Isso, ocorre esse processo no Parque Güell.

E3: Outra questão de aproveitamento de espaços, ocorre no último andar. Como Barcelona é muito quente no verão e ele tinha aproveitado todo o terreno na construção da Casa Batlló, ele colocou no último andar, um espaço, que hoje chamamos de espaço Gourmet, onde fazemos o nosso “churrasco”. (Risos)

E2: O nosso churrasco na laje! (risos)

P: Isso. Nesse local ele também faz a captação de água, tem uma fonte, um laguinho, para aproveitar a água da chuva, outra coisa: o espaço é todo feito de mosaico de pedaços das lajotas.

No relato anterior as respostas foram acrescidas de uma releitura da história, estabelecendo associações entre o passado e o presente, questões relativas ao aproveitamento da energia produzida, captação e reutilização da água de chuva. Tais significados trazem ao palco desta discussão que a questão Q_0 promove reflexões e questionamentos do mundo, não se limitando apenas a Matemática. Como percebido por duas discentes que conversavam:

P: Meninas dividam com a gente o que estão discutindo.

E1: Nós estávamos pensando o que isso contribui para a resistência, a durabilidade das obras dele, porque é lógico que a corrosão está lá agindo, mas se você utiliza o material natural a favor. Por exemplo, o sol não está ali para prejudicar está para trazer luminosidade, a chuva não está ali para morfar, ela está ali para aproveitar a água, então o que poderia prejudicar não está prejudicando, tem estrutura suficiente para ser a favor e não contra.

E2: Estamos associando estrutura com sustentabilidade e elementos da natureza.

A sustentabilidade ambiental e as estruturas físicas mencionadas pelas estudantes E_1 e E_2 são os indícios dos significados mobilizados entre o tema e os cursos das suas graduações. Para além deste contexto de sala de aula, os estudantes extrapolaram para questões externas amplamente debatidas nos meios de comunicação, atualmente. O que coloca em jogo uma semiose articulada entre o signo, o objeto e o interpretante para a produção dos raciocínios descritos na oralidade das depoentes.

Foi possível também verificar que os estudantes desencadeiam um processo evolutivo para a resposta de Q_0 ; interagem com a realidade do passado e atual e com o meio social em que vivem; tomam a atitude de estudo e pesquisa; agem no momento que se deparam com o problema; tomam como referência alguns modelos da matemática; relacionam conflituosamente com a liberdade da arte e a matemática; têm o insight para escolher o meio de pesquisa e as possibilidades de conduta e promovem significados que são os aspectos que evidenciam a dialética da pessoa e da situação.

Ao criar a questão Q_0 tínhamos consciência que seu enunciado era amplo, pois várias respostas poderiam emergir de áreas distintas do saber, como podemos constatar nos elementos apontados pelos estudantes. Optamos por direcionar o PEP de acordo com o MER, previamente elaborado (embora passível de ser modificado durante o PEP) para este estudo, em que as Integrais Duplas surgem como objeto matemático apropriado para uma das respostas possíveis para Q_0 . Relatamos a seguir, como a pesquisadora encaminha o desenvolvimento do PEP para chegar até o objeto matemático:

P: Agora eu quero que vocês pesquisem para o próximo encontro: as obras de Gaudí, mas em uma vertente matemática, ou seja, quais são os elementos lá de Gaudí associados com a matemática, só que no espaço tridimensional? Os elementos físicos vocês acharam, quer dizer a luz, a água da chuva, mas agora eu quero que vocês visualizem os elementos matemáticos. Estudem as equações matemáticas envolvendo o que visualizaram, as formas geométricas, as integrais, as derivadas o que for aparecendo. E a partir do próximo encontro nós chegaremos ao Cálculo Diferencial e Integral associado aos cursos de vocês. Como é que a luz nessas obras atende ao que aprendemos em Cálculo sob a perspectiva da Engenharia Elétrica? Como o solo, a escolha do material que são componentes estudadas na Engenharia Ambiental estão relacionadas com o Cálculo? Em Civil (Engenharia) como as estruturas matemáticas contribuem para a construção das obras de Gaudí? Para a licenciatura, quais são as disciplinas que vocês estudam as formas que vocês encontram lá, nas obras de Gaudí? Você já começou (A professora refere a E_1). Quais as equações que estão relacionadas com essas obras? Vamos verificar se as equações que as Engenharias vão trazer são as mesmas que vocês (refere-se aos estudantes da licenciatura) irão trazer. Para os licenciandos, será que essas obras podem ser utilizadas para ensinar matemática também lá no Ensino Básico? De que

forma? Quais elementos podem ser utilizados para isso? Bom, então podemos finalizar aqui as atividades de hoje.

Este direcionamento está intimamente relacionado com o tempo didático proposto para o curso, que como relatamos em outro momento, não poderia ser extenso (cronogênese). Tal aspecto promove a dinâmica do relacionamento do professor e do estudante com o conhecimento na perspectiva de mobilização de significados para o objeto matemático em diferentes áreas do conhecimento e não para a aprendizagem da linguagem dictarizada, amplamente utilizada nestas graduações.

Nesta vertente, as praxeologias matemáticas serão revisadas e institucionalizadas no 3º encontro, mas o desenvolvimento do PEP será direcionado para a construção dos argumentos que comprovem as hipóteses deste estudo. Ao final daquele momento algumas perguntas sobre o próximo encontro foram feitas pela comunidade de estudo:

E5: Professora, como ficará os encontros se houver a greve?

P: Ótima pergunta. Vamos aguardar o que o comando de greve decidirá. Mas se deflagrar a greve, já tenho o espaço da sala de aula das instalações do Curso Zênite, na Olívia Flores. Mas confirmo tudo durante a semana. Certo?

Todos: Certinho prof.

P: Bom final de semana e nos vemos no próximo sábado.

Tais perguntas revelam alguns problemas (ou restrições) educacionais que emergem do contexto social e político que atravessam as paredes da sala de aula, entre outros, a greve. Na situação descrita havia a eminência de uma greve que atingiria a disponibilidade de usufruir das dependências físicas da UESB, uma possível interrupção no contrato pedagógico afetando a organização didática previamente elaborada, como por exemplo, o uso dos laboratórios computacionais.

Quadro 18 – Matriz da Linguagem do segundo encontro

MDL₂	Elementos da Matriz	Especificação na situação
	Praxeologia	<i>didática e situacional</i>
	Raciocínio	<i>abutivo e dedutivo</i>
	Dialéticas	<i>D₁, D₂, D₄, D₆, D₈, D₁₀, D₁₁</i>
	Semioses	- <i>Relacional: lagoa da bateias e questões sociais, econômicas, políticas e culturais;</i> - <i>Complexa: mobiliza fatores externos e internos a matemática. Catenária, equação e instalação de redes elétricas.</i> - <i>Na atitude: dialogar com um dos expoentes sobre dúvidas matemáticas.</i> - <i>Articulada: sustentabilidade e estrutura física com a questão Q_o</i>
	Função Didática	<i>topogênese, cronogênese e mesogênese</i>
	Tipo de linguagem	<i>Contrafactual e do (dis)curso</i>

Fonte: Produção da autora

Finalizadas as atividades, apresentamos uma síntese das análises elaboradas no contexto do 2º encontro, registradas nas duas matrizes: a da linguagem e a da diversidade. Permanecemos com os mesmos elementos criados para a segunda matriz da linguagem (MD₂), a saber: praxeologias, raciocínios, dialéticas, semioses, funções didáticas e tipos de linguagem do problema didático que estão registrados no Quadro 18.

As especificações da situação que compõe os elementos da matriz da linguagem não estão desarticuladas das interpretações que são mobilizadas no transcorrer das falas dos participantes e conservam os significados que emergiram das praxeologias naquela circunstância. Fato, perceptível no contexto da Mesa Temática, em que os participantes por intermédio de perguntas e do debate trouxeram questões problematizadoras, revelando as impressões sobre o tema, o que os incomodam e criaram argumentos convincentes para defenderem seus posicionamentos e avaliarem suas respostas. Por esse motivo a segunda Matriz Diversidade (Quadro 19) traz como elementos os significados e as relações estabelecidas pelos estudantes com o mundo em que estão inseridos.

Quadro 19 – Matriz Diversidade do segundo encontro

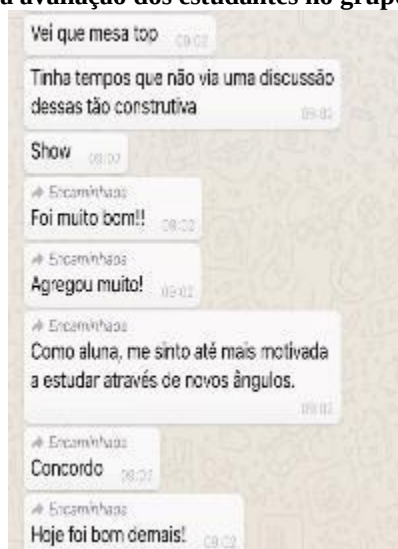
MD ₂	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
	Relações com o mundo	- Para os futuros engenheiros: relações que estabelecem entre a teoria e a prática no exercício da função profissional - Para os licenciandos em Matemática: questões relativas ao currículo; sistema avaliativo classificatório; conflito entre a teoria e a prática em sala de aula; metodologia de ensino.
	Interpretações	- Abordam sobre o currículo e as perspectivas diferentes para os cursos da graduação. - A necessidade de relações do CDI com situações reais no curso das Engenharias.
	Atitudes	- Problematizadora ou do Espanto - Herbartiana ou da Dúvida - Procognitiva ou do Rigor - Exotérica ou da Insatisfação

Fonte: Produção da autora

As matrizes MDL₂ e MD₂ apresentadas relacionam as contribuições da TAD e da Semiótica peirceana para a interpretação dos dados coletados. Entretanto, um aspecto surgiu de forma espontânea no grupo Integre + ação do WhatsApp, a avaliação do 2º encontro, como registrado na Figura 74. Os registros escritos são dos estudantes E₁, E₂, E₃, E₄, E₅, E₇, E₈ e E₁₀ que trazem as percepções positivas para a mesa temática. A estudante E₂ da licenciatura em matemática, relata a motivação para estudar sob novos ângulos, inferimos que esta afirmação

trata das interações tecidas entre o CDI e as outras áreas do conhecimento, como debateram os expositores.

Figura 74: Registro da avaliação dos estudantes no grupo do WhatsApp



Fonte: Arquivo pessoal da investigadora

A mesa temática favoreceu ampliar o *lócus* em que o objeto matemático vive para a estudante E₂ que teve o seu bioma acrescido de relações externas à matemática. Esta perspectiva possibilita que no futuro ela faça outras associações com outros objetos matemáticos para ensinar a componente curricular.

Registramos ainda que durante a semana, o estudante E₅ postou um vídeo que retrata a previsão de como ficará a fachada externa do Templo Expiatório da Sagrada família após a conclusão da obra, disponível no link: <https://youtu.be/luCo12YHdHA> e um outro sobre a casa Batlló acessado pelo link: <https://youtu.be/YF9ns51d9l4>.

Na mesma data, a professora/ investigadora acrescentou outros vídeos para que os estudantes pudessem acessá-los pelos links: <https://youtu.be/utaTcNq2mhs>, <https://youtu.be/LOKOYkP6Lss>, https://youtu.be/HP_bOvoUr90, <https://youtu.be/DVvUYfoeWA8> em que retratam as obras de Gaudí.

Os vídeos tinham como objetivo ampliar as leituras realizadas pelos estudantes, trazendo a visualização dos aspectos que envolvem as obras de Gaudí, tais como forma, estruturas, cores, materiais usados, entre outros. O aspecto visual proporcionava aos estudantes que eles encontrassem as formas possíveis de serem representadas algebricamente por equações matemáticas, como foram registradas no 3º encontro.

5.2.3 Terceiro Encontro – “Traz “Vendaval”, o baixeiro e a manta que vamos galopar”

O encontro ocorreu no dia 13 de abril de 2019, no período matutino, nas dependências físicas do Curso Zênite, situado no interior da Bahia. A mudança do local ocorreu devido a deflagração da greve pelos professores da UESB.

Tal situação promoveu um rompimento do contrato pedagógico, previamente organizado, que ocasionou alteração na atividade que utilizaria o aplicativo GeoGebra para a construção de gráficos em 3D, originando uma nova organização didática, em que inserimos o vídeo da professora Adriana intitulado “História da Arte e as obras de Gaudí”. Tal quebra se justifica pela ausência de laboratórios computacionais que abarcassem as finalidades expressas anteriormente.

Após os estudantes assistirem o vídeo um deles mencionou:

E₄: Achei interessante como a época que Gaudí viveu foi rica em desenvolvimento no campo das artes e o valor que ela tinha para os mecenas. Outra coisa que percebi era que Gaudí tinha uma expressão artística diferente para a sua época.

P: Realmente, ele buscava a sua inspiração na natureza, enquanto os movimentos artísticos encontrados com mais expressividade no século XIX eram o romantismo, o realismo e o expressionismo

A avaliação feita pela estudante E₄ tem um olhar de modo intencional para a situação social, cultural e econômica da época em que o arquiteto viveu. Essa leitura, a partir do vídeo, desperta para a abrangência em que a situação Q₀ está inserida, promovendo o encontro entre o passado e o presente. A apresentadora do vídeo destacou o contexto dos movimentos artísticos que surgiram no século XIX e o papel dos mecenas que financiavam os artistas, mas não comparou com as obras gaudinenses.

A releitura da estudante sobre aqueles movimentos revelou que ela possuía conhecimentos prévios das diferenças das expressões artísticas do romantismo, realismo e expressionismo (estudadas geralmente na literatura no Ensino Médio das escolas brasileiras) e comparou com as empregadas por Gaudí. Na visão da Semiótica peirceana, a estudante promoveu uma rede de articulações entre diversos signos e objetos que conhecia para expressar sua percepção naquele momento, ou seja, a sua interpretação associativa, “desdobradas pelos atos do pensamento em movimento, aqueles atos intencionais efetuados pela consciência” (BICUDO, 2010, p.33), o que revela a completude de um ciclo de semiose.

Seguindo a organização didática, solicitamos as respostas referentes as perguntas definidas no final do 2º encontro, como registrado:

P: Bom dia! Após assistirem os vídeos enviados durante a semana sobre as obras de Gaudí gostaria que respondessem: Quais foram as formas tridimensionais que vocês identificaram nelas?

E3: Prismas. Tive dúvidas de algumas representações de elipses, parábolas, hipérboles, mas deu para entender de modo geral. Hiperboloides...Eu pensei que era uma coisa e depois vi que era outra. Vou ter que consertar aqui (o estudante está se referindo aos apontamentos escritos por ele sobre a resposta). Algumas formas que achava que era um hiperboloide era um colicóides, como as formas que apareciam na escada da Casa Batlló. Mas não consegui encontrar as equações algébricas matemáticas delas. O hiperboloide de uma folha eu encontrei a equação, o paraboloides circular, que você pega a parábola e gira, eu vi na igreja lá: o paraboloides hiperbólico que é a cela.

P: Onde você encontrou o paraboloides hiperbólico?

E4: Eu vi na chave (o estudante refere-se a chave das portas da Casa Batlló) e na sacada da Sagrada Família.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 13/04/2019.

Esse primeiro diálogo apresenta a investigação realizada pelo estudante E₃ que evoca as Superfícies Quádricas presentes nas obras de Gaudí. O licenciando ao realizar, em diferentes meios (dialética meio e mídias), a leitura sobre aquele objeto matemático, formula um relatório escrito em que apresenta as representações algébricas para as equações das superfícies encontradas (dialética da leitura e da escrita). O modelo é registrado na Figura 75.

Figura 75: Relatório parcial do estudante E3 sobre Superfície Quádrica

E₃: Eu fui ver na perspectiva de função mesmo em Cálculo VI, aí a gente viu algumas superfícies, de alguns sólidos, mas não na mesma ideia, vi na visão da Álgebra Linear e do Cálculo mesmo, usando o software GeoGebra e desenhando na mão mesmo, ou na forma algébrica mesmo.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 13/04/2019.

Outro aspecto apontado no relato é a questão dos registros de representação semiótica, ou os ícones na perspectiva da Semiótica peirceana, que servem para tornar as ideias, os conceitos matemáticos visíveis por intermédio dos diagramas, dos esquemas no desenvolvimento do raciocínio diagramático.

O diálogo é interrompido pelo estudante E₅ que associa a resposta de E₃ ao seu curso da graduação:

E₅: Ele falou do parabolóide hiperbólico não só na sacada, mas nós vimos no cálculo estrutural. A gente achou um artigo que falava que a concepção estrutural das obras, ele usava a forma geométrica também para a concepção estrutural. O parabolóide elíptico e o hiperbólico tem a mesma formatação, muito parecido, com as barragens. Como as barragens são fixas nas laterais, geralmente elas são feitas assim: você faz uma modelagem em cima de um parabolóide elíptico e a partir disso faz um molde estrutural.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 13/04/2019.

O relato oral do estudante revela a dialética do paraquedista e dos buscadores de trufas, pois ao emergir nas leituras e investigações ele se encontra com a matemática e associa o uso dos seus objetos para a construção de elementos dentro do campo da sua graduação. A estudante E₆ complementa a abordagem realizada por E₅:

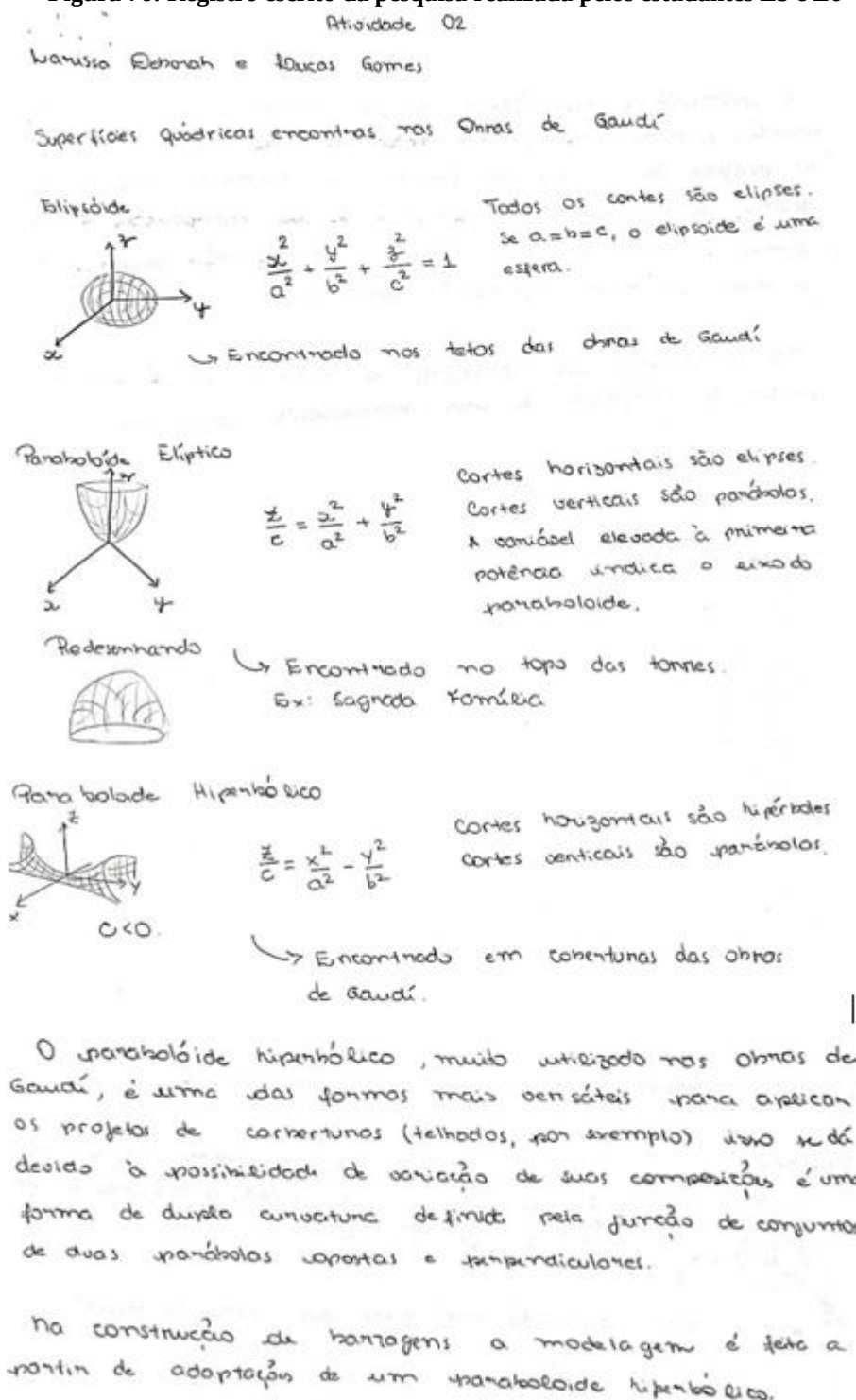
O parabolóide hiperbólico é uma das formas mais indicadas para se aplicar a telhados, em coberturas na verdade, devido a possibilidade de variação de suas composições, alturas, ou seja, da combinação de duas parábolas opostas.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 13/04/2019.

Os dois últimos estudantes, E₅ e E₆, apresentaram a pesquisa realizada em um único registro escrito, apresentados na Figura 76.

Identificamos no registro escrito dos estudantes E₅ e E₆ o uso das representações gráficas e algébricas das Superfícies Quádricas, apontadas por eles, como presentes na obra de Gaudí, foram registradas lado a lado pelos estudantes. Inferimos que essa formatação do texto estabeleceu associações entre os dois registros dos ícones, uma abordagem muito comum em livros didáticos.

Figura 76: Registro escrito da pesquisa realizada pelos estudantes E5 e E6



Fonte: Material produzido pelo estudante

O estudante E₂ prossegue trazendo sua pesquisa e registra oralmente:

E₂: Eu vi em um artigo de 1980 que relaciona com a questão do magnetismo, usando as integrais. E que a partir disso houve evoluções na Engenharia Elétrica que conseguiu avançar todas as áreas, como por exemplo, a impressora 3D que

disponibiliza as formas, com o uso da Geometria Dinâmica, que auxilia tanto a educação, como a Engenharia Civil com a construção de moldes na impressora 3D.
Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 13/04/2019.

Essa contribuição do estudante E_2 pode parecer fora do contexto da discussão, mas o uso da impressora 3D para o estudo de sólidos tem se revelado promissora para pesquisas no campo da matemática. Nesse sentido, as investigações desenvolvidas no Grupo de Pesquisa em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Santa Cruz, em um município da Bahia, sob a coordenação do professor Afonso Henriques, tem trazidos avanços significativos para a Educação Matemática. O que nos despertou para a criação de uma atividade para o nosso 4º encontro.

O registro escrito do estudante E_2 apresenta as formas encontradas nas obras de Gaudí, a potencialidades da impressora 3D e algumas sugestões do emprego das Superfícies Quádricas em situações de aplicabilidade na Engenharia Elétrica. Conforme a Figura 77.

cone. Eles são diferentes entre eles: a textura, a cerâmica e tudo mais. Embora pareçam diferentes, mas é similar a um cone e a gente poderia trabalhar isso.
Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 13/04/2019.

Há um encontro da estudante com a matemática na situação proposta (dialética da pessoa e da situação). Ela consegue visualizar na arquitetura de Gaudí as formas geométricas e relaciona com a possibilidade de trabalhar na perspectiva apresentada, o mesmo acontece com o estudante da Engenharia Elétrica que pontuou:

E2: A questão do cilindro também pode ser “trabalhada”, lá no Ensino Médio.

P: Isso. Observe que você pode propor fazer projetos interdisciplinares que envolvem a matemática e a arte, ou estender para outras áreas do conhecimento.

O estudante E₂ propõe uma discussão para ser feita também com o Ensino Médio, trazendo formas geométricas presentes em circunstâncias reais para o seu ensino (dialética das caixas pretas e das brancas), da TAD identificamos aspectos inerentes ao currículo. Nessa mesma linha de pensamento, a estudante E₆ faz uma consideração relevante e expressa no seu registro escrito que pode ser visualizado na Figura 78.

Figura 78: Protocolo do estudante E6

(Se) Integre duplamente as superfícies
quadricas

polite Lma Oliveira

Discussão sobre as questões.

1) Quais formas tridimensionais conseguem identificar nas obras de Gaudí?

- Pesquise a forma e a equação algébrica que a representa

* Esfera $\leadsto [C(a,b,c), \text{raio } r] \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

* Hiperbóide de duas folhas $\leadsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$

* Conóide semi-elíptico $\leadsto z = \cos(\frac{\pi}{b})$

* Parabolóide elíptico $\leadsto z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

* Parabolóide hiperbólico $\leadsto z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

2) Como essas formas são utilizadas no exercício da sua atual graduação?

Normalmente vemos apenas no curso de Cálculo IV no estudo de integral de várias variáveis e, para quem deseja, no curso de Geometria diferencial no estudo de curvas.

Como as obras de Gaudí podem ser trabalhadas no ensino básico? Os alunos não seriam capazes de identificar todas as figuras porém conseguem discernir com o que se assemelham, em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, e assim, realizar o estudo.

Por exemplo, no terraço do Palácio Guell, há 80 chaminés (cada uma uma forma, cor, textura) que se assemelham a figura de cones.

Se trabalhado no Ensino médio, o conhecimento das fórmulas gerais permite que estudem as figuras conforme suas coordenadas são atribuídas.

Há softwares que auxiliam nestes processos como o Geogebra.

O parabolóide é uma superfície quadrática de tipo especial. No caso das obras de Gaudí, podemos perceber os parabolóides do Tipo hiperbólico, que é uma superfície duplamente determinada em forma de sela. Sendo assim, pode ser representado em um sistema de coordenadas apropriado pela equação

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Por $c > 0$, isto é um parabolóide hiperbólico que se abre para baixo ao longo do eixo x e ao longo do eixo do y .

Já relacionando esses assuntos no Ensino Médio, talvez a melhor forma de introduzi-los seria pela obra arquitetônicas mesmo.

Essas formas citadas não são vistas no curso de matemática de forma aplicada. Nas disciplinas de Cálculo vemos algumas delas para tridimensionais apenas para realizar cálculos diferenciais e integrais.

Temos ainda uma superfície chamada como Superfície de Gaudí e é definida como sendo toda superfície definida por

$$z = kx \sin \frac{y}{a}$$

Fonte: Material produzido pelo estudante

No registro a estudante considera que os alunos não seriam capazes de identificar todas as formas da figura (inferimos que ela se refere as figuras das obras de Gaudí). Nós, entretanto, consideramos que a capacidade do estudante está muito associada a forma como é ensinada as formas geométricas. Inferimos que, se ele é estimulado previamente a investigar sobre o tema matemático proposto, as respostas podem ser surpreendentes e os espaços bi e tri dimensionais podem emergir.

Nesse sentido, se faz necessário a mudança na percepção do olhar metodológico ao ensinar as formas geométricas, desmistificando a crença de que apenas a linguagem dicionarizada - com suas regras e representações gráficas e algébricas - conseguem expressar um conceito matemático. Elas estão presentes, mesmo de forma implícita, em muitas das atividades humanas e precisam ter significados e relações com o *locus* em que o estudante vive, tal proposta encontra o respaldo nos níveis de determinação debatidos na TAD.

Se um estudante da licenciatura em Matemática não é estimulado na sua graduação a perceber as formas geométricas fora do contexto da matemática, levará muitos anos para conseguir estabelecer essas relações com seus futuros estudantes, no exercício profissional. Essa desarticulação é pontuada pelo estudante E7 no seu texto escrito, apresentado na Figura 79.

Figura 79: Protocolo do estudante E7

Aluno: Matheus Loquene Teixeira
 Curso: (52) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas

Respondendo a questão 2 que foi proposta.

Em todas as suas obras, Gaudí aplicou a geometria. Podemos perceber em algumas obras como as abóbodas convexas; conóides sinusoidais; conóides helicoidais; colunas arbores; arcos em catenária; abóbodas hiperbólicas; colunas de giro duplo; entre outras.

As formas geométricas tridimensionais na Igreja da Sagrada Família é formada por quatro superfícies distintas: a helicóide, a hiperbolóide, a conóide e a parabolóide, ou seja, formas semelhantes a todas, com e sem.

A helicóide é uma superfície em formato de hélice. Sua parametrização é dada por $X(u,v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ em que $(u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

A hiperbolóide é uma quádrica, um tipo de superfície em três dimensões, descrito pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{hiperbolóide de uma folha})$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{hiperbolóide de duas folhas})$$

No caso das obras de Gaudí, o hiperbolóide é de uma folha.

O conóide é uma superfície não desenvolvel e é gerado por uma reta que se desloca paralelamente a um plano diretor e se apoia em duas direttrizes: uma reta e uma curva que não pertencem ao mesmo plano.

Fonte: Material produzido pelo estudante

Observa-se no registro escrito do texto a presença das atitudes que compõem o EDRI - o espanto, a dúvida o rigor e a indignação. As semioses que o estudante constrói para expressar o seu raciocínio, associando vários signos e objetos externos e internos ao campo da matemática trazem a perspectiva da necessidade de um outro tipo de abordagem para o ensino das formas.

Na análise dos registros dos estudantes é possível identificar as dialéticas do paraquedista e os buscadores de trufas em que eles registram o encontro com a matemática para responder uma pergunta; das caixas pretas e brancas, pois eles selecionam a obra que vai estudar; da leitura e da escrita ao redigir por escrito o seu relatório; da análise (e síntese) praxeológica e da análise (e síntese) didática selecionando as praxeologias matemáticas e decidindo o que serve para responder as perguntas.

A professora/investigadora continuou questionando os estudantes.

P: Até o momento foram registrados os paraboloides elípticos e hiperbólicos, cilindros, cones, esferas. Quem encontrou outras formas diferentes.

E10: Hiperboloide de uma e de duas folhas

E11: Helicoide

E1: Catenária

E2: Elipsoide

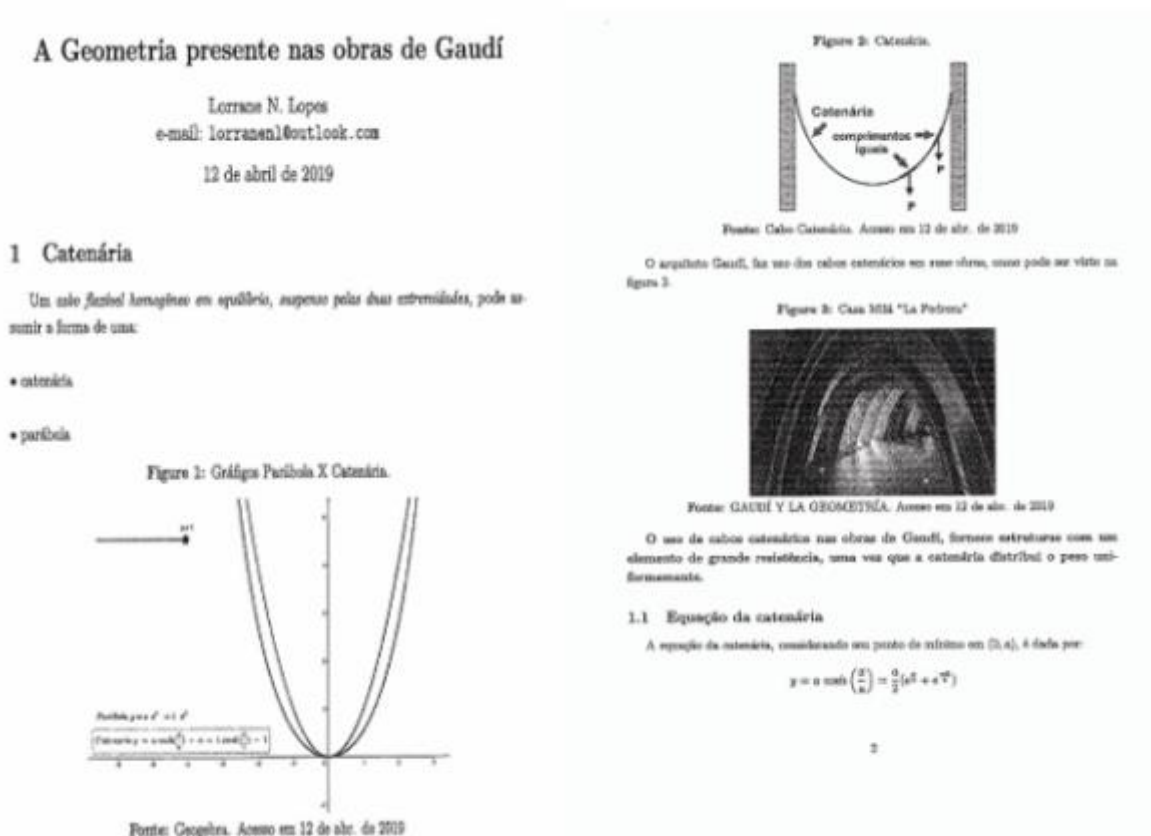
A estudante E_1 ao falar da catenária, registra sobre os arcos que existem na Casa Milá (“La Pedrera”) aspectos oriundos da leitura e do registro escrito apresentado na Figura 80.

No registro escrito da estudante é possível visualizar na Figura 80 a aplicação das Superfícies Quádricas nas obras de Gaudí. Ela o faz colocando a superfície estudada pelos matemáticos com as suas respectivas representações algébricas e gráficas e em seguida, a forma como é encontrada na obra do arquiteto. Esse modelo de atividade evidencia que a estudante identificou o objeto matemático na situação proposta, apresentando aspectos das praxeologias didática, situacional e matemática.

Como estudante da Licenciatura, ela revela a capacidade de olhar para além do conhecimento matemático, buscando na teia dos significados interpretações e aplicações para o objeto matemático. Essa linguagem contrafactual que surge no registro escrito desta estudante revela o que chamamos do “terceiro olho”, no capítulo II, deste estudo.

Um raciocínio abduutivo sob o olhar do próprio da estudante. É possível identificar que ela avança no sentido de extrapolar a linguagem dictarizada, se desfazendo das crenças instituídas pela graduação as quais ela mesma descreve na Figura 80, anteriormente registrada.

Figura 80: Protocolo da pesquisa realizada pela estudante E1



Fonte: Material produzido pelo estudante

Os estudantes E₈ e E₉ respondem juntos a atividade e elaboraram uma tabela que apresentam as componentes: forma geométrica, fórmula e figura¹¹⁰ na sua configuração. O registro escrito apresenta-se na Figura 81.

As informações apresentadas na Figura 81 correlacionam as três componentes supracitada, mas os discentes não as associam com a localização em que elas são modeladas nas obras de Gaudí, o que revela uma restrição na percepção dos estudantes para a análise e síntese da praxeologia situacional em detrimento da importância dada para as praxeologias matemáticas.

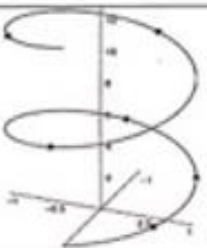
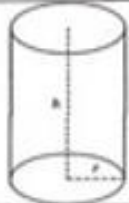
Inferimos que este detalhe, que pode ser julgado como insignificante, revela a ausência do raciocínio abduutivo na semiose tecida pelos dois estudantes no ato de resolver a atividade

¹¹⁰ As palavras: forma geométrica, fórmula e figura foram usadas pelos estudantes. Não houve nenhuma correção para se adaptar as teorias que as registram com outros nomes.

proposta. Identificamos que a ideia ficou circunscrita às praxeologias matemáticas e o *insight* que promoveria a regulação na ação (ou na situação) não se concretiza.

Figura 81: Protocolo dos estudantes E8 e E9

Desde as primeiras obras, Gaudí, mostra sua originalidade e é marcado por seus projetos que apresentavam formas complexas e com aplicações matemáticas, geométricas e em várias áreas da engenharia.
É possível enxergar formas tridimensionais nas obras de Gaudí, como:

Forma Geométrica	Fórmula	Figura
Helicoide circular	$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$	
Hiperboloides	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Paraboloides	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	
Cilindro	$A_T = 2\pi r(h + r)$	

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Após as respostas dos estudantes, a professora inicia o processo de institucionalização das Superfícies Quádricas. As organizações didáticas e matemáticas elaboradas pela professora foi descrita no capítulo 3 na seção 3.2.5 em que apresentamos o modelo produzido pela investigadora para o desenvolvimento do curso. As respostas dos estudantes serão apresentadas no diálogo promovido durante a aula:

P: O que é uma superfície?

E3: É uma região do plano curvado.

P: Só um plano curvado?

E3: É que toda curvatura pode ser retificada.

E1: Quando se fala em superfície eu penso em área.

P: Ótimo, E1! O que é uma superfície e o que é uma área?

(risos)

E1: Área tem largura e comprimento e a superfície a gente também vê isso.

P: É só isso que você vê em uma superfície? Só largura e comprimento?

P: Pense em um cubo...

E6: A área é de uma face enquanto a superfície seria todo ele.

P: E por que alguns livros didáticos usa a expressão superfície lateral?

(risos)

E6: Essas expressões são usadas em sólidos. Quando queremos usar em retângulos, triângulos, hexágonos usamos a expressão área.

P: Isso garota! O cálculo da medida da área é usado para as figuras planas, enquanto as superfícies envolvem dimensões superiores: 3D, 4D...

Nessa primeira parte do diálogo a diferença entre área e superfície parece que não vai ser estabelecida, entretanto, a estudante E₆ articula argumentos ao construir mentalmente um cubo, o ícone exercendo a função de mediação entre pensamento e imagem. As perguntas que são acrescidas pela professora a faz ir modelando a resposta até chegar naquela mais coerente. As atitudes do EDRI vão se delineando na semiose elaborada pela estudante e a dialética das perguntas e respostas estabiliza o sistema que tendia para uma ausência da generalização.

O raciocínio empregado no registro oral do diálogo é desenvolvido de forma abduktiva, pois as estudantes vão levantando conjecturas acerca da problematização. Quando a professora intervém indicando o cubo a ser mentalmente visualizado, a estudante E₆ parte de um caso particular para generalizar, revelando aspectos pertinentes ao raciocínio indutivo. Desafiada novamente ela então expressa o raciocínio dedutivo generalizando a distinção entre área e superfície.

Há a presença dos quatro tipos de linguagens: contrafactual, dictarizada, em curso e (dis)curso, tendo em vista, que a tecnologia e a teoria da praxeologia matemática, expressas geralmente em uma linguagem dictarizada e em curso, se apresentam de forma não simbólica e as regras, embora existam, não se revelam explicitamente. Essa espontaneidade é que proporciona o aparecimento da linguagem contrafactual e em (dis)curso que articula as regras implícitas com a situação proposta.

É essa capacidade de “conversar” fazendo articulações no campo da matemática ou fora dela que há um enriquecimento e um aprofundamento do conhecimento matemático por parte

dos estudantes, em que não se prioriza a habilidade de justificar o raciocínio apenas com a matemática formal¹¹¹.

A produção de significados para os objetos matemáticos é expressa por uma linguagem natural em que há uma liberdade “vigiada” para o uso das regras sintáticas e semânticas da linguística. Granger (2013) defende que a “linguagem natural não é um sistema formal”, pois se assim fosse, ela perderia a habilidade de comunicação entre as pessoas. Talvez, esse seja um ponto crucial para a relação conflituosa entre professor, aluno e o conhecimento, três tipos de linguagem que se misturam: a científica proveniente do conhecimento; uma releitura da linguagem científica empregada pelo professor na transposição didática e a linguagem natural, usada pelo estudante.

A professora/investigadora dá sequência à organização didática planejada definindo superfícies. Para mostrar o parabolóide de uma folha, a professora usa uma folha de papel ofício e mostra o modelo, aproximando as extremidades formando uma curva. O manuseio da folha traz a representação do sólido para o campo da visualização e o objeto corporifica ao solicitarem que os estudantes visualizem mentalmente uma telha colonial de cerâmica, afirmando que ela representa um parabolóide, uma ação que promove a generalização, a representação visual e um significado de aplicação real do sólido (semiose visual, comparativa, gestual). Nesse momento, o estudante E_3 pergunta:

E3: Entendo que essa superfície é composta por três dimensões. Mas se fosse no R^4 você poderia usar isso para calcular o que por exemplo?

P: Os fractais é um exemplo de figuras que comportam dimensão superior a 3.

E3: E como eu resolveria uma Integral de n dimensões?

P: A resposta poderia ser dada no próprio campo da matemática ou em uma situação específica. Matematicamente teríamos como resolver uma a uma, ou usar o cálculo de funções vetoriais. Aplicado a uma situação tivemos um exemplo na mesa temática, quando o professor do curso de engenharia elétrica disse que ao analisar uma situação real de atendimento a uma rede elétrica, as vezes é necessário desprezar algumas variáveis por ser ínfimo o impacto dela sobre o modelo, assim também podemos selecionar as variáveis mais relevantes para o problema matemático.

O diálogo relatado mostrou que embora o curso tinha como foco dois objetos matemáticos: Superfícies Quádricas e a Integral Dupla, a questão aberta proposta no PEP deu

¹¹¹¹¹¹ Quando nos referimos a matemática formal tomaremos o conceito de GRANGER (2013) para sistemas simbólicos formais: são sistemas compostos por regras – explícitas ou não - em que o conjunto de significantes pode ser transferido a um conjunto finito de significantes elementares capazes de concatenar símbolos auxiliares que desaparecem nas produções finais.

subsídios para estudar outros objetos matemáticos, como o cálculo de funções vetoriais (dialética do tema e fora do tema).

Mas esse diálogo despertou em nós, investigadores, uma das restrições para o desenvolvimento de um PEP: as matrizes curriculares brasileiras que determinam uma sequência de conteúdos didáticos instituídos pelos livros didáticos adotados no Ensino Superior. Essa ausência de flexibilidade e o tempo didático fragmentado em horas aula (cronogênese) são os principais entraves que o professor precisará administrar no desenvolvimento de um PEP nos cursos das graduações nas universidades brasileiras.

A professora retoma a discussão sobre superfície.

P: Como se origina um cilindro? Ou seja, qual elemento do cilindro deve ser rotacionado para lhe dá origem?

E7: O círculo.

P: Não. Aí seria a secção transversal do cilindro. Pense em um salame, cada fatia seria uma seção transversal do cilindro, no caso horizontalmente.

E1: Seria uma reta paralela ao plano z , ou melhor, um plano.

P: Isso. Seria um plano retangular que rotaciona em torno de um dos seus lados.

A professora pega um cesto de lixo no formato de um cilindro e mostra a seção transversal e uma folha de papel ofício para mostrar o plano retangular, em seguida faz o movimento de rotação em torno de cada lado, separadamente. Realizando a mesma metodologia para a rotação do cone, só que em torno de um ponto.

E2: Então você pode rotacionar a figura como o ponto?

P: Isso, podemos rotacionar um plano em torno de um dos seus lados ou em um ponto fixo.

O estudante E7 faz o movimento de rotação com as mãos enquanto a professora explica.

P: Isso! Faz isso para a turma vê.

E7: Ah... Não sei não. Então ele rotaciona e mostra aos colegas.

Na análise da transcrição da linguagem oral e na visualização da filmagem, a semiótica gestual é frequente naquela aula de CDI descrita anteriormente. Elas apresentam características peculiares, como poder proporcionar o movimento de rotação para a construção de sólidos, descrever o formato de uma curva, entre outros.

O equívoco conceitual do estudante E₇ é colocado em confronto quando a professora propõe uma situação comum do cotidiano em que o faz refletir sobre a seção transversal. Imediatamente, ele refaz o processo de semiose conectando a outros signos mentalmente elaborados e previamente aprendidos, consertando o equívoco e dividindo com os colegas o que generalizou.

Após este momento, a professora define a equação geral do 2º grau com três variáveis. No entanto, para encontrar a representação algébrica, formula o seguinte questionamento:

P: Da Geometria Analítica sabemos que todo plano tem uma equação algébrica que a representa. Vocês lembram da equação do plano?

E3: Eu sei que tem a geral e a paramétrica.

P: Eu preciso da equação geral do plano.

E3: $Ax + By + Cz + D = 0$

P: Isso. É a partir dela que eu posso encontrar a equação geral do 2º grau com três variáveis. Como eu posso fazer isso?

(silêncio)

P: Eu preciso de termos elevados ao quadrado.

E11: Eleva então a equação ao quadrado.

P: Isso. Vou elevar o primeiro e o segundo termo da equação ao quadrado para equilibrar (e vai escrevendo no quadro). Lembrem que o A, B, C e D são números reais, tá? (Escreve de forma simbólica), e registra oralmente que eles podem ser nulos, porém para a demonstração não irá considerá-los nulos.

O questionamento promovido pela professora suscitou o encontro dos estudantes com uma organização matemática – equação geral do 2º grau com três variáveis – com outra organização matemática – a equação geral do plano, aspecto pertinente a dialética do tema e fora do tema. Ao registrar as observações descritas anteriormente a professora volta aos questionamentos:

P: Acontece que ficou uma soma de quatro termos elevado ao quadrado. Então eu faço o que?

E6: Agrupa!

P: Isso! Escreve na lousa o agrupamento da soma do Ax com o By seguida da soma do agrupamento aditivo de Cz com D. E expressa por $[(Ax + By) + (Cz + D)]^2 = 0$. Então agora posso usar o produto notável ou o binômio de Newton para grau 2.

E8: Ax ao quadrado mais duas vezes AxBy + By ao quadrado.

E6: Vai ficar enorme!

A professora continua desenvolvendo o produto notável.

P: Vai mesmo! Em seguida somamos duas vezes (Ax + By) vezes (Cz + D) e acrescentamos, ainda, Cz ao quadrado mais duas vezes CzD mais D ao quadrado.

E9: Prof. Esse A, B, C e D ao quadrado são constantes, então como faremos?

P: Continuam constantes. Então usaremos A ao quadrado como uma letra qualquer, tipo $A^2 = A = M = P$, entende?

E9: Verdade. O mesmo para os outros coeficientes, né?

P: Isso.

E3: Prof. não dá para cancelar nada?

P: Não, todos os termos têm coeficientes positivos.

E3: Esse AC, AD, BC, BD pode ser substituído por uma constante?

E9: Uê! Se pode para A2 pode também para AC, é um produto também.

A professora continua arrumando os termos da equação.

P: Pronto! Agora vamos fazer as substituições, $A2 = A$; $B2 = B$; $C2 = C$; $2AB = D$; $2AC = E$; $2BC = F$; $2AD = G$; $2BD = H$ e $2CD = I$; $D2 = K$. Ela inicia a substituição na equação $A2x^2 + 2ABxy + B2y^2 + 2ACxz + 2ABxy + 2BCyz + 2ADx + 2BDy + C2z^2 + 2CDz + D2 = 0$.

P: Agora reescrevo a equação geral do segundo grau em três variáveis assim: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$.

E10: Ufa!

P: Uma Superfície Quádrica pode ser cortada por qualquer plano, e a interseção será uma secção cônica denominada de conicóide.

E11: Nunca tinha ouvido essa palavra: conicóide!

No desenvolvimento da equação geral que representa uma superfície do segundo grau em três variáveis, as técnicas permitiram a mobilização de objetos ostensivos e não ostensivos. Verifica-se a participação dos estudantes no processo de construção daquela representação algébrica, uma ação realizada em conjunto com a finalidade de se construir um modelo matemático (dialética do indivíduo e o coletivo).

Nesta situação específica é possível identificar as três praxeologias: a didática, a matemática e a situacional. Para essa última, registramos que ela ocorre na ação didática específica, para aquela circunstância, com aqueles indivíduos e com uma finalidade predefinida. Outras situações, outros indivíduos poderão evocar outras praxeologias distintas do momento relatado.

O processo da construção daquela equação emerge de perguntas que proporcionam elementos para a sua composição, um exemplo da semiose sendo exposta oralmente. Ao perguntar sobre a equação do plano, a professora instiga os estudantes a usar a sua memória prática (MATHERON, 2004), aquela em que a técnica aplicada demanda o uso de regras, de lei ou hábitos, de símbolos para serem evocados.

A partir disso, a construção da equação mobiliza objetos ostensivos e não ostensivos para representar o objeto matemático. Todo o desenvolvimento das técnicas teve como objetivo a generalização da equação das Superfícies Quádricas, o que permite afirmarmos que o raciocínio é dedutivo.

Ao retornar de um pequeno intervalo, a professora/investigadora continuou institucionalizando os objetos matemáticos expressando as representações gráficas e algébricas do elipsoide. O estudante E₇ correlaciona-o:

E7: Essa superfície é o que mais se vê no Parque Güell.

A relação que o estudante estabelece com o objeto matemático e a situação problema revela uma semiose, em que o estudante expressa oralmente seu raciocínio dedutivo. A visualização do objeto matemático representado na forma artística da obra de Gaudí é um raciocínio abdutivo relevante para que outras semioses sejam realizadas pelo estudante. Inferimos que essa frase do estudante rompe com algumas crenças instituídas pela comunidade matemática que utiliza a linguagem dictarizada.

Outro aspecto relevante é que esta visualização e posteriormente a relação estabelecida entre a matemática e a arte foi proveniente de um estudante da Licenciatura em Matemática. Inferimos que essa percepção promove um despertar para a linguagem contrafactual, em que a terceira visão é estimulada para criar relações originais.

A repercussão deste raciocínio abdutivo, em que revelou um novo direcionamento para o olhar sobre um objeto matemático pode ser revisitado em algum momento no futuro no exercício profissional do estudante E₇, pois o conhecimento adquirido é uma mola que impulsiona em um movimento para frente, expandindo as ideias e ações. Neste sentido, coadunamos com Holmes¹¹² (1858) quando afirma que “de vez em quando a mente do homem é esticada por uma nova ideia ou sensação e nunca mais volta as suas dimensões anteriores”. Por isso, aquele que tem acesso a um conhecimento desencadeia um movimento cognitivo que permiti com ele aprenda e modifique a si mesmo e o espaço em que vive.

No transcorrer do curso a professora/ investigadora expôs os tipos de espirais e destacou alguns exemplos de como seu formato se apresenta na natureza: no centro do girassol, na concha do caramujo, nos movimentos do ciclone e do pavão, quando quer abater a sua presa, entre outros. Em seguida, a professora fala da catenária e da equação algébrica que a representa. Registramos o diálogo que se estabeleceu:

E8: A catenária foi uma das superfícies que mais aprendi. Pois o professor Danillo na mesa temática abordou muito bem.

¹¹² Oliver Wendell Holmes Filho foi um jurista, advogado que escreveu o livro: *The Autocrat of the Breakfast-Table*, em 1858, em que apresenta a frase original: “from time to time the mn’s mind is stretched by a new idea or sensation and never returns to its previous dimensions”. Mais tarde pronunciada por Albert Einstein (1879-1955).

P: Verdade. Quando ele fala que os fios das redes colocadas entre um poste para outro desenvolvem aquela curva e que há um padrão da metragem. Acho que de 80m em 80 metros.

E2: Não prof. Pode ser de 30, 50 e 60 metros.

P: Obrigada E2 pela correção.

E1: Prof., vi muito o uso das catenárias por Gaudí, em suas obras. Ele usa na Casa Milá, na casa Batlló e no Parque Güell.

P: Muito bom E1! De fato, ele as utiliza bastante na sua arquitetura.

E1: Prof., foi uma das coisas que percebi de primeira nas obras de Gaudí. Tanto que o meu resumo só falei das catenárias, achei bem legal!

P: Realmente E1, são muito lindos os arcos catenários que Gaudí arquitetou dentro daqueles espaços.

E9: O interessante é como ele projetava com os sacos de areia. Sei que já mencionamos, mas fiquei impressionada como ele sabia Física e Matemática.

P: Alguém pesquisou a equação algébrica que representa uma catenária?

E1: Eu professora! (levanta a mão)

P: Pode dizer?

E1: Pera aí! Deixa olhar aqui onde escrevi. E menciona: y é igual ao produto da variável a multiplicado pelo cosseno hiperbólico, abre parêntese, coloca x sobre a e fecha parêntese.

P: Muito bem.

A professora escreve a representação algébrica da equação que E₁ mencionou oralmente, $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. O estudante E₂ interrompe:

E2: Eu lembro de cosseno hiperbólico é igual a uma base “e” elevado a x , somado a uma base “e” elevado a menos x , tudo sobre 2.

A professora registra a representação algébrica da fala de E₂,

P: Isso. Escreve assim, $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Mas observe que o parêntese lá na função do cosseno hiperbólico está x dividido por a . Precisamos substituir. Então, ela escreve na lousa com pincel, $y = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$.

E1: Prof. Mas a equação tem um a na frente do cosseno hiperbólico.

P: Verdade! Esquecemos. Então ela volta e escreve: A equação da catenária pode ser representada por $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ou por $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

A professora registra por escrito na lousa a representação algébrica da catenária conforme falou oralmente. Em seguida, a estudante E₆ pergunta:

E6: Quando eu substituo os valores aí eu encontro a catenária?

P: Você substitui valores numéricos para a , para x e o resultado do y vai sendo associado a um ponto no gráfico. Ao unir todos os pontos você descreve um arco catenário. Lembra que o professor Danilo mencionou que eles usam uma tabela

para padronizar as medidas. Os valores desta tabela são provenientes desses valores numéricos, que são substituídos um a um.

E9: A catenária é sempre formada a partir de dois pontos fixos. Em Gaudí os arcos catenários eram construídos primeiro em maquetes para evitar a instabilidade que poderia ser ocasionado pelo desnível do terreno.

P: Muito bem E9! Existe na sua fala uma associação da catenária, um objeto que pode ser representado matematicamente com a sua graduação. E é sobre isso, que proponho a atividade a ser elaborada e entregue no nosso próximo encontro.

A pergunta da estudante E₆ revela que ela precisa da confirmação de que as variáveis que compõe a função (registrada no quadro branco) deverão ser substituídas por valores numéricos. Esta atitude revelou uma articulação de proposições específicas para o processo da generalização, um raciocínio indutivo.

No entanto, inferimos que a hipótese levantada a fez duvidar sobre a mediação que fez entre os conhecimentos prévios relativos à função e a função cosseno hiperbólico. O raciocínio construído por ela, inicia de suposições especulativas livres de julgamentos que caracterizam o raciocínio abdutivo para a confirmação da generalização tecida – o raciocínio dedutivo.

Para finalizar o encontro, a professora/investigadora faz a leitura da atividade “Vaga de Emprego”, esclarecendo o que ela propõe e o que se espera para a sua solução. Solicita que os estudantes pesquisem respostas para as seguintes perguntas do PEP:

Q4: O que é um centro de massa?

Q5: O que é um momento de inércia?

Q6: Qual a influência das Integrais Duplas de Superfícies Quádricas para o equilíbrio nas obras de Gaudí?

E finaliza o terceiro encontro. Entretanto, o estudante E₅, pergunta:

E5: Eu sei como calcular uma Integral Dupla, mas o que eu quero saber é o que isso representa de fato? O que diferencia da Integral Simples? Por que lá eu calculava a área e o volume e agora, o que eu faço com a Integral Dupla?

P: Qual a diferença da Integral Simples para a Integral Dupla, E5?

E5: Uma é no espaço bidimensional e a outra é no espaço tridimensional.

P: A primeira você calcula a medida da área e do volume em 2D e a outra em 3D.

E5: É porque quando estudei esse assunto, vi várias vezes o professor colocar um sólido dentro do outro, e desenvolvia a Integral Dupla estabelecendo o domínio para definir o limite de integração. Mas nunca entendi direito porque usava a Integral Dupla.

P: Vou te explicar, usando a aplicação no seu curso. Imagine que você queira passar uma tubulação de cano pvc por dentro de uma coluna cilíndrica, para canalização da água da chuva de uma varanda. No entanto, esse cano precisa ficar centralizado no meio da coluna. O pedreiro para fixá-lo na posição preencheu o espaço vazio com concreto. A quantidade de concreto que deverá ser usado para aquele

preenchimento é calculada pela Integral Dupla, pois são sólidos tridimensionais. Deu para entender?

E5: Então o volume do concreto seria a diferença entre o volume do cilindro e o volume do cano?

P: Sim. Para calcular essa diferença teria que empregar a Integral Dupla.

E5: Agora entendi!

Para a análise do 3º encontro construímos as duas matrizes de análise: a Matriz da Linguagem 3 (MDL₃) e a Matriz Diversidade 3(MD₃) e registramos a síntese dos elementos que a compõe. Os resultados obtidos da linguagem oral e dos registros escritos realizados pelos estudantes, foi possível identificar os seis elementos que compõe a matriz MDL₃ e registramos a síntese no Quadro 20.

Quadro 20 – Matriz da Linguagem do terceiro encontro

MDL ₃	Elementos da Matriz	Especificação na situação
	Praxeologia	<i>Didática, matemática e situacional</i>
	Raciocínio	<i>Abduativo, indutivo e dedutivo</i>
	Dialéticas	<i>D₁, D₂, D₃, D₄, D₅, D₆, D₇, D₈, D₉, D₁₀, D₁₁</i>
	Semioses	- <i>Relacional: arte de Gaudi e questões sociais, econômicas e culturais;</i> - <i>Complexa: mobiliza fatores externos e internos a matemática. Catenária, equação e instalação de redes elétricas.</i> - <i>Na ação: estabelecem ações questionadoras e participativas.</i> - <i>Articulada: dentro do próprio campo da matemática relacionando objetos ostensivos e não ostensivos.</i> - <i>Reveladas na forma: gestual, visual, oral e escrita.</i>
	Função Didática	<i>topogênese, cronogênese e mesogênese</i>
	Tipo de linguagem	<i>Dictarizada, Em Curso, Contrafactual e do (Dis)curso</i>

Fonte: Produção da autora

A matriz MDL₃ apresentou um aumento de elementos nas especificações da situação, pois a quantidade de registros escritos mobilizados pelos estudantes nos permitiu, identificar as praxeologias matemáticas; os outros dois tipos de linguagens ainda não usadas; semioses reveladas nos gestos, nas visualizações, oralmente e na escrita. As ações ocorrem de forma mais sistemática e adaptadas ao processo, por isso são ações questionadoras e participativas. A linguagem é composta de regras que pertencem à Matemática, por esse motivo, observa-se o uso da linguagem dictarizada e em curso. Todavia, os raciocínios abduativos proporcionaram aos estudantes, em diferentes momentos, que refinassem o olhar para as situações do entorno da matemática e então foi possível que a linguagem contrafactual e a do (dis)curso fosse externada concomitante com as outras duas.

Os espaços que ocupam os estudantes e o professor constituem um meio didático em que algumas vezes o questionamento era criado pelo professor, em outros, pelo estudante, com o objetivo de buscar respostas. No entanto, a restrição na regulação do tempo didático promoveu a ruptura no contrato pedagógico estabelecido na programação do dia, que se encontra no Apêndice I.

As definições da Integral Dupla construídas no final da aula e externadas oralmente como dúvidas pelo estudante E₅ mostra que os significados dos objetos matemáticos precisam ser explorados nas quatro diferentes linguagens que apresentamos no capítulo anterior deste estudo. Dos significados mobilizados pelos estudantes foi possível detectar os elementos da Matriz Diversidade 3 que sintetizamos no Quadro 21.

Quadro 21 – Matriz da Diversidade do terceiro encontro

MD3	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
	Significados	- Para os futuros engenheiros: Identificam os objetos matemáticos em estudo, na construção de telhados, barragens, redes elétricas. Mas demonstram também conhecimento no campo interno do componente curricular. - Para os licenciandos em Matemática: a visualização dos objetos matemáticos em situações externas ao seu campo.
	Interpretações	- Dentro do próprio campo da matemática quando associam as superfícies quádricas com outros objetos matemáticos. - Relacionam as formas encontradas nas obras de Gaudí com os objetos matemáticos e os representam na forma algébrica e gráfica. - Mobilizam objetos não ostensivos que mediam o papel desempenhado pelo registro dos ostensivos.
	Atitudes	- Problematizadora ou do Espanto - herbartiana ou da Dúvida - Procognitiva ou do Rigor - Exotérica ou da Insatisfação

Fonte: Produção da autora

No capítulo 2 deste estudo, inferimos que o aumento da linguagem dictarizada em um meio didático diminuiria o uso da linguagem contrafactual. A análise realizada do desenvolvimento do terceiro encontro, por meio dos registros orais e escritos, nos conduz a afirmar que a hipótese é verdadeira. Naquele processo, as regras, as representações, os raciocínios, as semioses provenientes do estudo das Superfícies Quádricas giram no entorno da linguagem dictarizada e em curso e são empregadas com mais proeminência na institucionalização.

As duas outras linguagens, contrafactual e em (dis)curso se revelam por parte dos estudantes em alguns momentos específicos, porém com menos frequência se comparados à linguagem dicionarizada, como havíamos suposto.

Nas duas semanas que precederam¹¹³ o quarto e o quinto encontro, o contato da professora com os estudantes ocorreu por meio do WhatsApp e do e-mail individual. Em ambos foram enviados os esclarecimentos e a organização didática e matemática prevista para o desenvolvimento do quarto e do quinto encontro. Estes documentos se encontram nos Apêndices G e H, respectivamente. Também foi anexado a atividade “Vaga de Emprego: para pessoas criativas”, cujo objetivo era aplicar os conhecimentos da Integral Dupla em Superfícies Quádricas.

Os dois últimos encontros aconteceram no mesmo dia, 27 de abril de 2019 e os dados obtidos foram apresentados na próxima seção.

5.2.4 Quarto encontro – Arruma a cela, o cabresco que eu vou galopar para desbravar o mundão de Deus.

Para a realização do quarto e quinto encontro, outras restrições envolvendo o espaço físico emergiram: durante o espaço entre o terceiro e os últimos encontros fomos informados que as instalações físicas do curso Zênite só estariam disponíveis para o curso no período matutino, pois a tarde os estudantes fariam um simulado e ocupariam todas as salas de aula.

Para administrar a situação elaboramos uma organização didática que primou pela institucionalização da Integral Dupla no período matutino, devido a disponibilidade do quadro branco e do projetor de slides que nos possibilitou o registro escrito e a transmissão da entrevista realizada com o professor e doutor Afonso Henriques.

Iniciamos o encontro com a apresentação do vídeo da entrevista semiestruturada, perguntas no Apêndice M, realizada com o Dr. Afonso Henriques, professor da Universidade Estadual de Santa Cruz, situada na cidade de Ilhéus no estado da Bahia. Ele apresentou o trabalho que executa no Grupo de Pesquisa da Matemática em Ambiente Computacional, com a criação de sólidos usando a impressora 3D.

¹¹³ Quinze dias foi o tempo transcorrido entre o terceiro e o quarto encontro. Esse espaço extenso de uma aula para outra ocorreu devido ao feriado da Semana Santa.

O vídeo foi uma atividade motivacional para a tarefa da criação de um objeto de aprendizagem, com o objetivo de mostrar a definição intuitiva da Integral Dupla aplicada a um sólido, feito com material concreto. Para isso, foram disponibilizados massa acrílica, tinta, pincel, palitos de picolé e de churrasco e destinamos uma hora para a elaboração.

De forma espontânea foram feitos dois grupos: os do licenciandos em matemática e o das engenharias e um estudante da licenciatura que quis fazer sozinho. Registramos a seguir alguns dos diálogos e decisões tomadas pelos grupos; iniciaremos com o grupo de matemática.

O grupo dos licenciandos iniciaram a atividade sem muito planejamento, enquanto amassavam a massa acrílica, discutiam sobre qual sólido iam gerar. E o refizeram por duas vezes, pois a falta de apoio para que ele ficasse equilibrado e o tempo de endurecimento da massa não foram levados em conta por eles. Dos trechos áudio gravados, por este grupo, descrevemos esse momento:

E1: Vou fazer ele aqui só para apoiar. (refere-se a apoiar entre dois cadernos).

E6: Vai, isso vai quebrar.

E1: Você não está entendendo. A gente abre ele primeiro (refere-se a massa) e quando

estiver esticado a gente modela ele.

E6: Deixa ela inteira e tenta colocar do jeito que ela fique em pé.

E1: teremos que segurar ela até secar.

E6: Faz o molde. E3 faz alguma coisa!

E3: Fazer o que?

E1: Bota uma coisa aqui para segurar.

Interromperam a conversa por um tempo

E1: está modelando. Isso pode ser tudo (riram). Se disser que é um cubo, será um cubo.

E3: Estou me sentindo um Gaudí da vida!

E6: Ele era um gênio! Fazer um trabalho desse!

Passou alguns minutos

E1: Destruiu sozinho...

E6: Vixe!

E1: Eu acho que virou uma esfera.

E6: Destruiu mesmo! Eu estava tentando fazer certinho, mas destruiu.

Neste momento a estudante E6 toma o sólido de E1 e começa a modelar.

E3: A arte é abstrata... É um cubismo. (Risos)

E1: Você não colocou palitos?

E6: Pra que? Está firme. (refere-se a estrutura criada)

E1: Você está afinando demais. Se colocar aqui, aí ele racha.

Fonte: Trechos da áudio-gravação no dia 27 de abril de 2019.

Deste recorte podemos constatar que o diálogo em torno das praxeologias usadas no desenvolvimento da atividade estavam centradas na execução de apenas três estudantes do grupo. É possível verificar a presença da dialética do indivíduo e do coletivo, pois as decisões estão sendo tomadas pela comunidade e emergem dos aportes individuais de cada um deles. Outro aspecto consiste na relação que o estudante faz com as obras de Gaudí, identificando-o com a sensação do artista. Esse momento relata uma semiose, pois o estudante vai buscar estabelecer associações com diferentes signos mediando com o objeto de aprendizagem que estava sendo construído e a interpretação que ele chegou. Esse momento, também descreve uma praxeologia escolhida por eles para aquela situação, a qual permitiu que executassem a tarefa. A referida situação não envolve apenas as praxeologias matemáticas, ou o meio em que estão inseridos, mas todo os conhecimentos anteriormente adquiridos: a forma, a habilidade motora, os esquemas mentais, as relações associativas com outros objetos e estruturas que são usadas para aquela circunstância.

O segundo grupo, iniciou os trabalhos de forma diferente. Primeiro, discutiram a forma como iam fazer, trabalharam em conjunto e obtiveram uma forma mais precisa comparando-a com um das Superfícies Quádricas, como relatado na sequência.

E8: Então, decidimos que vamos primeiro esticar toda a massa para depois modelar?

E5: Engenheiro que se preze vai sempre para o molde primeiro. (Risos)

E8: É porque fica mais fácil de modelar!

E10: Comecei a amassar a massa.

Ficaram uns minutos em silêncio. Após a massa ser esticada voltaram a discutir.

E8: Vamos usar aquela garrafa de água ali para dar o formato.

E10: Então segura a garrafa. É tipo isso! Vamos esperar secar.

Aguardaram alguns minutos até a massa secar.

E9: A gente vai sustentar com o palito?

E4: Atravessa cruzado. Será que a tinta deixa ele ficar mais firme?

E9: Já está saindo.

E8: Parece a cela! Se tivesse isopor a gente fazia os apoios para ele endurecer.

E9: Passa durex aqui.

E10: Agora segura aí.

E5: Passa mais para endurecer.

E8: Eu só estou melhorando a modelagem aqui. Agora ficou massa! É isso aí.

E10: Aqui é engenharia pura!

Fonte: Trechos do áudio gravado no dia 27 de abril de 2019.

Das atitudes dos estudantes deste grupo foi possível identificar um planejamento anterior à ação, que ocorreu de forma mais participativa e com o empenho de todos os integrantes do grupo. As decisões foram tomadas de comum acordo e cada um ajudou na constituição do objeto. Os procedimentos adotados eram acordados e o individual não sobrepôs a vontade do coletivo. A dialética do indivíduo e do coletivo que emergiu deste diálogo nos faz inferir que as semioses individuais quando organizadas em conjunto, associadas à uma situação específica acontece de forma mais uniforme e produz um resultado satisfatório.

Identificamos nos dois grupos que a praxeologia situacional foi impregnada das quatro atitudes – problematizadora ou do espanto; herbartiana ou da dúvida; procognitiva ou do Rigor; exotérica ou da Insatisfação que apareceram nos discursos daqueles estudantes. Identificamos também uma linguagem contrafactual e em (dis) curso em que apareceram as noções intuitivas dos objetos matemáticos. Em ambos os grupos, as noções de sólidos geométricos (cubos, esferas) e de Superfícies Quádricas (paraboloides hiperbólicos – “cela”) surgiram associadas ao sólido construído.

O estudante E₁₁ preferiu fazer a atividade sozinho e foi o primeiro a terminar a tarefa proposta. Após o fim do período destinado a tarefa, a professora solicitou aos estudantes que arrumassem a sala, lavassem às mãos sujas de tinta e retomou o desenvolvimento do encontro, perguntando aos estudantes:

P: Qual a sensação de fazer o sólido?

E10: É complicado! Mas saí!

E1: Prefiro no computador.

E6: Larga lá a equação e ele faz!

E10: Para modelar na impressora 3D também é massa! Como vimos lá na entrevista.

Embora tenham entendido a proposta da atividade, eles estabelecem outros recursos didáticos favoráveis ao desenvolvimento da atividade. Percebe-se que o acervo de conhecimentos dos estudantes está intimamente relacionado ao desenvolvimento tecnológico e o uso que eles fazem deles. São outras praxeologias situacionais que surgem diante da experiência que estavam vivenciando.

Para a socialização do sólido produzido, a professora os convida a apresentarem suas obras:

P: Poderiam apresentar o sólido de vocês?

E1: Prof. não sei bem que sólido produzimos, nos parece um hiperboloide de duas folhas.

E8: Parece mesmo!

E3: Um pouco assimétrico! Mas valeu!

Fonte: Transcrição do áudio gravado em 27 de abril de 2019

Ao falar a estudante apresenta o sólido, representado na Figura 82.

Figura 82: Sólido construído pelos licenciandos em matemática



Fonte: Fotografia do arquivo pessoal da investigadora

Em seguida, os estudantes das Engenharias apresentaram o sólido construído.

E10: Nós tentamos representar o paraboloide hiperbólico, a cela.

O estudante mostra para a turma o sólido criado, ao qual registramos na Figura 83.

Figura 83: Sólido construído pelos estudantes das engenharias



Fonte: Fotografia do arquivo pessoal da investigadora

O terceiro sólido construído foi do estudante que preferiu fazer sozinho. A professora solicita:

P: E você E11 apresente seu modelo.

E11: Eu fiz esse sólido e coloquei os palitos de churrasco para representar o plano tridimensional. Eu acho que é um hiperboloide de duas folhas.

Fonte: Áudio-gravação realizada no dia 27 de abril de 2019

A apresentação do estudante ocorre ele mostrando o sólido sob a carteira, conforme a Figura 84.

Figura 84: Sólido construído pelo estudante E11



Fonte: Fotografia do arquivo pessoal da investigadora

A estética apresentada pelos sólidos tem semelhanças com as Superfícies Quádricas estudadas no encontro anterior. Os estudantes apropriaram da forma visual e a representaram. Um processo semiótico usado pelos artistas que transformam o signo em um objeto com o objetivo de representar a ideia da sua mente. O raciocínio é puramente abdutivo, em que os signos sugerem por meio da forma modelada, as qualidades e semelhanças com os objetos matemáticos finalizando com a interpretação associativa feita por cada grupo/indivíduo.

A divulgação e exposição, oral e gestual, realizada por cada grupo ao apresentarem o sólido consistiu na dialética da difusão e da recepção em ação.

Para a institucionalização do conceito da Integral Dupla a professora/pesquisadora então pergunta aos estudantes:

P: Agora, olhando para os sólidos que fizeram, como vocês fariam para calcular a medida do volume deles?

Um silêncio de alguns minutos se estabeleceu e foi rompido pelo estudante E₈ quando afirma:

E8: Como esse sólido tem largura, comprimento e altura eu faria vários recortes na forma de paralelepípedos, em todo ele.

O estudante juntou na fita adesiva quatro palitos de picolé e deu forma a um paralelepípedo, em seguida vai até a professora e pediu para que ela segurasse o sólido que

criaram e mostra o movimento do paralelepípedo inserido em diferentes locais ao longo do modelo criado. A Figura 85 mostra o material que ele criou.

Figura 85: Foto de como o estudante E8 fez o paralelepípedo



Fonte: Fotografia do arquivo pessoal da investigadora

O estudante ainda registra:

E8: Para calcular o volume do sólido eu somaria o volume de cada paralelepípedo que inseri.

P: Muito bem! O que esse conceito intuitivo que E8 apresentou representa matematicamente?

E7: A Integral.

E1: A Integral Dupla, pois envolve o volume em três dimensões.

P: Isso E1!

Fonte: Transcrição do áudio gravado em 27 de abril de 2019

A atividade proposta que tinha o objetivo de instigar a introdução da definição da Integral Dupla atingiu a finalidade, o que nos surpreendeu foi a atitude do estudante em protagonizar a ação, mostrando aos colegas e a professora como ele compreendia o conceito volume. A correspondência com paralelepípedos e depois com a Integral Dupla aconteceram de forma natural e gerando significados para a atividade proposta. Os estudantes também perceberam e externaram os seguintes aspectos:

E6: Que legal ver a Integral Dupla assim! Diferente de como vi na Universidade.

E1: Eu como futura professora me sinto até motivada a vê a Matemática assim.

E3: Verdade! Fica mais fácil para o estudante aprender a definição formal apresentada nos livros de cálculo.

Fonte: Transcrição do áudio gravado em 27 de abril de 2019.

Em nossa análise desta atividade inspirada no trabalho desenvolvido por Neuenfeldt et al. (2018) que havíamos apresentado no Capítulo 1 deste estudo, verificamos que os resultados obtidos foram semelhantes ao dos autores supracitados, pois assim como o deles, os estudantes

do nosso curso foram protagonistas dos significados atribuído aos objetos matemáticos envolvidos na tarefa, agiram de forma autônoma e associaram a teoria à prática.

Entretanto, ao compararmos o nosso resultado com o de Marínez-Planell e Trigueros (2017), obtivemos resultados antagônicos. Na pesquisa realizada pelas autoras, dez estudantes que haviam cursado o cálculo multivariável foram submetidos a resolução de um problema envolvendo partições e tiveram dificuldades em relacionar a Soma de Riemann e a Integral Dupla. Em nosso estudo, com estudantes sob as mesmas condições, o resultado obtido não revelou dificuldades naquela relação, pois a ação do estudante E₈ ao inserir os paralelepípedos no sólido conduziram os estudantes E₇ e E₁ até o objeto matemático Integral Dupla. Inferimos que a diferença está no uso da linguagem, a primeira empregou a linguagem dictarizada, enquanto, o segundo, a contrafactual.

Este resultado aponta a relevância que as tarefas elaboradas com o intuito de construir intuitivamente os conceitos matemáticos têm para os estudantes na produção de significados. Todos os aspectos semióticos (gestos, formas, cores, estética, esquemas, moldes, materiais, entre outros) favoreceram o alcance do objetivo.

A professora/pesquisadora então dirigiu ao quadro para institucionalizar a definição da Integral Dupla, apropriando das definições e teoremas que são inerentes a linguagem dictarizada. Para o processo de uma parte da transposição didática interna sobre o conceito, utilizamos a organização matemática apresentada no modelo 3.2.5 elaborado pela pesquisadora principal e apresentado no Capítulo 3 deste estudo. Em seguida foi apresentado por intermédio de slides o Modelo de Ostrogradsky, com o objetivo de aprofundar o conceito e mostrar outras formas de linguagem usadas por matemáticos para a definição da Integral Dupla. Sobre isso, comentamos:

P: Alguns matemáticos utilizam de uma linguagem mais rigorosa para expressar o conceito que vocês construíram intuitivamente e que depois registrei por escrito no quadro branco.

E3: Prof. eu vou precisar saber essa linguagem, pois quero me submeter ao Mestrado na UFMG e lá é matemática pura¹¹⁴.

P: Que bom! Desejo sucesso! Realmente, essa linguagem mais detalhada será necessária para você.

E6: Também vou tentar!

E1: Eu também!

¹¹⁴ Registramos que o estudante foi aprovado no processo seletivo 2020/21 no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em 2º lugar e está cursando.

Durante a institucionalização da Integral Dupla algumas perguntas foram feitas relacionadas as técnicas que a docente havia empregado, como por exemplo, um mínimo múltiplo comum (m.m.c.) feito entre duas frações, um jogo de sinal em uma representação algébrica, entre outras. Todavia o estudante E₈ ao interromper a explicação fez a seguinte indagação:

E8: Professora, nós vimos a obra de Gaudí e a construção dos sólidos na atividade de hoje que configuram representações tridimensionais. Mas tenho dúvidas agora sobre: como seriam as representações em espaços acima de três dimensões?

P: Para esses casos usamos cálculos de campos vetoriais. Você já ouviu falar em fractais? E filme em 6D?

E8: Sim.

P: Então, são representações em outras dimensões.

E8: Valeu prof. Entendi!

Fonte: Transcrição do áudio gravado em 27 de abril de 2019.

Esta pergunta realizada pelo estudante poderia ter proporcionado novos questionamentos para o PEP em desenvolvimento, abordando os conceitos inerentes aos Campos Vetoriais, as Integrais curvilíneas, entre outros, que fazem parte da componente curricular Cálculo Diferencial e Integral -III. Optamos em responder de forma simples, devido ao tempo cronológico do curso. Mas, inferimos diante da pergunta, que o PEP que elaboramos abre possibilidades para que outros objetos matemáticos que fazem parte do currículo sejam explorados. Fica aqui registrado uma possibilidade para a realização de futuras pesquisas a serem comprovadas em um ambiente de sala de aula com estudantes cursando CDI-III.

Ao final do encontro, a professora/pesquisadora solicitou que os estudantes entregassem a atividade “Vaga de Emprego”. Dos onze estudantes que participaram do curso, apenas quatro deles responderam a tarefa proposta. A professora os questionou por qual motivo eles não fizeram e alguns deles responderam que sentiram muita dificuldade em elaborar a situação proposta. A seguir fizemos a análise das respostas obtidas.

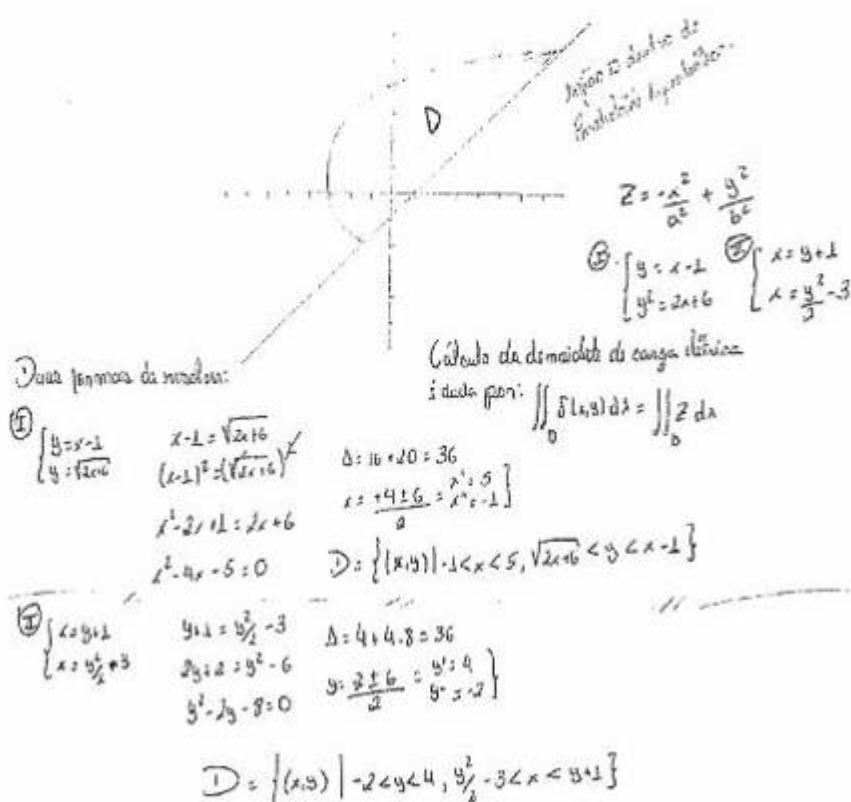
O estudante E₂ apresentou uma situação problema relacionada com o curso ao qual era egresso, Engenharia Elétrica. O registro escrito foi apresentado na Figura 86.

Figura 86: Protocolo do estudante E2 da atividade "vaga de emprego"

Questão "vaga de emprego"

A densidade de carga linear, superficial ou volumétrica é uma quantidade de carga elétrica em uma linha, superfície ou volume respectivamente. Ela é medida em coulombs por metro (C/m), metro quadrado (C/m²), ou metro cúbico (C/m³), respectivamente. Como existem cargas positivas e negativas, a densidade pode tomar também valores negativos. Assim como qualquer densidade, ela depende da sua posição.

Quando temos uma superfície de $z = (y^2/a^2) - (x^2/b^2)$ e uma região D limitada por $y = x-1$ e $y^2 = 2x+6$, qual a densidade da carga elétrica da região D, que está contida no parabolóide hiperbólico?



Fonte: Material produzido pelo estudante

Para a criação do modelo, o estudante fez pesquisa, articulou conhecimentos de áreas distintas e procurou sintetizar a sua escrita. Em termos das praxeologias, ele situa o problema no contexto no qual desenvolveu o modelo matemático, apresenta-o por representações e inicia mobilizando signos e objetos matemáticos para construir o raciocínio dedutivo, com o intuito de produzir significados tanto para a matemática quanto para a engenharia elétrica. No que tange as técnicas empregadas pelo estudante há uma interrupção do seu emprego quando ele estabelece os domínios para a integração, mas não resolve a integral, embora tenha conhecimentos das tecnologias e teorias a serem empregadas no desenvolvimento da questão.

O registro escrito do estudante E₂ nos proporcionou a análise das dialéticas do estudo e da investigação; do tema e fora do tema; do paraquedista e dos buscadores de trufas; das caixas pretas e brancas; da leitura e escrita; da difusão e da recepção, das perguntas e respostas, ostensivos e não ostensivos, da pessoa e da situação. Para além, foi possível identificar a mistura das linguagens, pois a situação problema proposta parte de uma realidade vivenciada por ele e, portanto, contrafactual expandindo para a linguagem dictarizada em que os signos e os objetos são então trabalhados.

A escrita do enunciado revela que E₂ promoveu semioses, com várias relações internas e externas ao Cálculo, as atitudes de espanto, dúvida, rigor e indignação são reveladas por meio da própria criação do enunciado como pela interrupção dos cálculos.

O estudante E₈ também traz uma proposta envolvendo vazão de uma queda d'água aplicando o conceito de Integrais Duplas, como consta na Figura 87.

Figura 87: Protocolo do estudante E8 da atividade "vaga de emprego"

O Rio Negro e o Rio Solimões são dois rios localizados no estado do Amazonas que constituem o chamado Encontro das Águas, inicialmente, devido a vários fatores, as águas não se misturam, esse fenômeno dura por cerca de 6 km. Foi introduzido nesse encontro uma usina hidroelétrica no formato de um parabolóide hiperbólico.

A usina foi construída de modo em que um dos lados da hipérbole é a barragem do Rio Negro, enquanto o outro lado é a barragem do Rio Solimões. E entre o solo e o vértice da parábola existe uma vazão d'água que formará um novo curso para o que virá a ser o Rio Amazonas.

Nesta vazão ocorre queda d'água de ambos os rios fazendo com que os geradores centrais funcionem, gerando assim energia elétrica.

Utilizando integral dupla, calcule o volume máximo permitido para a vazão d'água entre uma das barragens e as turbinas de geração de energia.

Tomando $a=1$; $b=1$; $c=3$; $k=2$

$S(x,y) = y^3 - x^2$

$\iint y^3 - x^2 \, dy \, dx \Rightarrow \int_{-x^2}^{x^2+4} y^3 - x^2 y \, dy \int_{-x^2}^{x^2+4} dx$

Curva 1 $\rightarrow -x^2$
Curva 2 $\rightarrow -x^2 + 4$

$I \Rightarrow (x^4 - 8x^2 + 16) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + 4 \right) + x^4 - 4x^2 - \left(-\frac{x^6}{3} + x^4 \right)$

$I \Rightarrow \frac{(-x^6 + 4x^4 + 8x^4 - 32x^2 - 16x^2 + 64)}{3} + x^4 - 4x^2 + \frac{x^6}{3} - x^4$

$I \Rightarrow \frac{12x^4 - 48x^2 + 64}{3} - 4x^2$

$I \Rightarrow 4x^4 - 20x^2 + \frac{64}{3}$

$\int 4x^4 - 20x^2 + \frac{64}{3} \, dx \Rightarrow \frac{4}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{64}{3}x \Big|_0^1$

$\Rightarrow \frac{4}{5} + \frac{44}{3} = \frac{12 + 220}{15} = \frac{232}{15} \text{ U.V}$

Fonte: Material produzido pelo estudante

Na solução da questão elaborada o estudante se apodera das praxeologias matemáticas para responder à questão. Apresenta domínio nas técnicas, na tecnologia e na teoria apresentada. Em termos semióticos usa os signos, representando-os com objetos ostensivos/imediatos e não ostensivos/ dinâmicos. A linguagem permeia pela dictarizada/em curso e contrafactual/(dis)curso ao trazer o conteúdo matemático em uma situação em que usou o raciocínio abdutivo e dedutivo.

Diante da tarefa, o estudante demonstra atitudes do EDRI, ao qual são revelados no próprio desenvolvimento da ação, em que registra destacando de forma retangular a integração primeiro em relação a variável y . Ao analisar o protocolo do estudante é possível identificar as dialéticas: estudo e da investigação; do tema e fora do tema; do paraquedista e dos buscadores de trufas; das caixas pretas e brancas; da leitura e escrita; da difusão e da recepção, das perguntas e respostas, ostensivos e não ostensivos e do indivíduo e a situação.

O estudante E₁₁ busca no formato das batatas fritas industrializadas a inspiração para a situação proposta, comparando-a a uma parabolóide hiperbólico e, para a embalagem, a forma cilíndrica, conforme registrado na Figura 88.

Figura 88: Protocolo do estudante E11 para a atividade "vaga de emprego"

Suponhamos que uma batata, da marca pringler, é descrita pela fórmula $f(x,y) = \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}x^2$ (aproximadamente) e que sua lata cilíndrica possui 7cm de diâmetro na base e 25cm de altura. A batata intercepta um cilindro de 5cm para que ela entre na lata, ela passa se locomover. Dado que as batatas deixam um espaço entre elas e a varela de 5cm em relação a altura e que as batatas possuem 2mm de espessura. Quantas batatas há nessa lata? Qual a superfície total que uma batata possui? (considerar apenas um lado da batata). Precisamos determinar um máximo global e um mínimo global no função para encontrar a altura de cada batata e por consequência a quantidade de batatas no pacote.

Com a quantidade de batatas, calculamos a área de cada batata e depois a área total que uma batata possui em conjunto (do total).

Posterior hipótese

$$z = f(x,y) = \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}x^2$$

Cilindro
 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 3$

$$A(s) = \int_b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

$$x = n \cos \theta$$

$$y = n \sin \theta$$

$$dA = n dn d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq n \leq 3$$

$$A(s) = \int_b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

$$A(s) = \int \int \sqrt{1 + \frac{1}{16}n^2 + \frac{1}{16}n^2} n dn d\theta$$

$$A(s) = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1}{8}n^2} n dn d\theta$$

$$8 \cdot \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8}n^3 \right]_0^3 d\theta = \frac{16}{3} \cdot 5,13 \cdot 2\pi = 55,36 \pi$$

Área da superfície da batata (apenas um lado).

Geometricamente e algebricamente podemos verificar que não tem função $f(x,y) = \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}x^2$

A função tem máximos para $x=0$ e $y=3$, pois o coeficiente x^2 é negativo e

tem máximos para $y=0$ e $y=3$, pois o coeficiente de y^2 é positivo

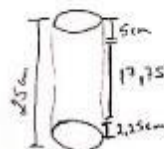
$$\text{Máximo: } f(x,y) = \frac{9}{8} = 1,125$$

$$\text{Mínimo: } f(x,y) = \frac{-9}{8} = -1,125$$

Logo o altura da batata é dada por 2,25cm

Área total da superfície =

$$88 \times 55,36 = 4.869,28 \text{ cm}^2$$



$$\frac{17,25}{0,2} = \text{número de batatas} = 86$$

Guilherme Botelho de Oliveira

Fonte: Material produzido pelo estudante

É possível observar na Figura 88, que o estudante utiliza a praxeologia matemática para responder à questão criada. A imagem do cilindro feito pelo estudante representa um raciocínio

diagramático em que ele externa a imagem mental, um ícone exercendo o papel de mediação entre um objeto e o interpretante.

Conceitos pertinentes a Coordenadas Polares, Área de superfície, Integral Dupla, valores máximos e mínimos são explorados pelo discente para chegar ao resultado que ele obteve. A linguagem é bem explicativa e utiliza as quatro linguagens – dictarizada, em curso, contrafactual e em (dis)curso.

Embora a questão não seja totalmente original, tendo em vista encontrar a comparação em alguns sites da internet, podemos perceber que a situação ao qual ele elabora traz a questão da embalagem para diferenciar do que é encontrado no meio online. A percepção dos elementos que ele compõe para o enunciado revela indícios do raciocínio abduutivo que posteriormente se torna dedutivo. As atitudes na ação do estudante mostram as características do EDRI e as mesmas dialéticas apontadas nos protocolos dos estudantes E_2 e E_8 .

O estudante E_3 apresentou a solução da Atividade 1 conforme Figura 89.

Figura 89: Protocolo e solução do estudante E3 para a atividade "vaga de emprego"

Bruno Antônio da Silva Santos
 Atividade Integral dupla aplicada as parabolóides hiperbólicos
 Imagem disponível em: www.karl-mueller.blogspot.com/2011/14/monumem-ant-limes-fis-for-continuidade.html

A maior obra PH (parabolóide hiperbólico) tipo arco foi arquitetada por Mito Kitchum para o hangar de manutenção de TWA no aeroporto da cidade de Kansas. Esta estrutura é composta pela interseção de duas arcos, com um vão entre os arcos de, aproximadamente, 27,6 m com a espessura de 10 cm de concreto. Tal estrutura permitiu que naquele lugar fosse usado como hangar para aviões, e mais, o perfil PH possibilitou a adaptação ao volume a ser protegido.

Vamos considerar um volume para tal estrutura. Considera o vão de 100 m, e pela imagem estimamos que o perfil formado tenha um formato quadrangular. Calcule o volume do sólido que se encontra acima do plano parabolóide hiperbólico $z = \frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{324}$ e abaixo do retângulo

$$R = [-100, 100] \times [-100, 100].$$

Resolução

Para calcularmos tal volume, volume citado no texto, iremos utilizar os conceitos da integral dupla, como tal possibilidade tem simetria nos 4 quadrantes, portanto, iremos calcular a integral sobre o seguinte domínio de integração

$$R' = [0, 100] \times [0, 100]$$

$$\int_0^{100} \int_0^{100} \left(\frac{x^2 - y^2}{324} \right) dx dy = \frac{1}{324} \int_0^{100} \int_0^{100} (x^2 - y^2) dx dy = \frac{1}{324} \int_0^{100} \left[\frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_0^{100} dy =$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{324} \int_0^{100} \left[\frac{100^3}{3} - y^2 \cdot 100 - 0 \right] dy &= \frac{1}{324} \int_0^{100} \left(\frac{100^3}{3} + 100y^2 \right) dy \\
 &= \frac{1}{324} \left(\frac{100^3 y}{3} + \frac{100y^3}{3} \right) \Big|_0^{100} \\
 &= \frac{1}{324} \cdot \left(\frac{100^4}{3} + \frac{100^4}{3} \right) = \frac{1}{324} \cdot \frac{2 \cdot 100^4}{3} \\
 &= \frac{2 \cdot 100^4}{972} \text{ m}^3 \\
 &= \frac{100^4}{486} \text{ m}^3 \\
 &\approx 206.263,52 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Como calculamos no 3º estante, assim
 multipliquei o valor por 4 e obtive o volume corresponden-
 te aos estantes correspondentes a 3 pavimentos.
 Buscamos uma alternativa do volume para uma
 estrutura porosa com a mesma altura.

$$V = 823.045,27 \text{ m}^3.$$

Comentários:

- 1- Não calculamos o volume do solo.
- 2- As dimensões não são fiéis às originais, uma vez que não conseguimos encontrar as medidas oficiais.
- 3- Poderíamos atingir melhor a altura e assim obter outra equação para a PH.
- 4- A equação foi conseguida através de manipulação no gráfico.
- 5- Essa questão tem muito a melhorar.

Fonte: Material produzido pelo estudante

Para o modelo da situação problema elaborado pelo estudante E₃, identificamos que o hangar de manutenção de TWA do aeroporto da cidade de Kansas, havia sido explorado por FONTES (2005) em seu trabalho de pesquisa da pós-graduação associando-o ao formato de um paraboloide hiperbólico.

Entretanto, algumas atitudes do estudante E₃ nos desperta para o raciocínio abduativo e dedutivo empregado na execução da atividade, como: registrar que as dimensões não são fiéis a estrutura original; ter usado um *software* GeoGebra para a obtenção da representação algébrica da equação matemática utilizada por ele; colocar a fonte da pesquisa online que realizou e levantar futuras possibilidades de trabalhar com a questão elaborada.

No que diz respeito à praxeologia matemática empregada observa-se que o modelo da equação matemática é coerente com a Superfície Quádrica explorada; o desenvolvimento das técnicas condiz com a tecnologia e a teoria solicitada na tarefa. O discente mobiliza uma

linguagem natural para explicar a escolha das técnicas e tecnologias empregadas, bem como, para a resposta obtida. Ademais, as dialéticas identificadas são semelhantes à dos estudantes E₂, E₈ e E₁₁.

O relato escrito da estudante E₆ mostra uma tentativa de criação da situação problema usando coberturas estruturais com um formato de dois paraboloides hiperbólicos, como apresentado no registro escrito na Figura 90.

Figura 90: Protocolo da estudante E₆ para a tarefa "vaga de emprego"

Tentativa de uma questão aplicada à integral dupla nos paraboloides hiperbólicos!

Questão: Para economizar cimento armado, utilizam-se coberturas que auxiliem tal economia. Para isso, uma cobertura pode se utilizar de paraboloides hiperbólicos, como no caso do Pavilhão dos Raios Cósmicos em 1951 que faz uso dessas superfícies regradas. O arquiteto responsável foi o espanhol Felix Candela (1910-1997).

Este pavilhão, situado na Cidade Universitária, na cidade do México, tinha como fim albergar um laboratório que requeria uma cobertura não ultrapassasse 1,5

centímetros. A cobertura é dada por dois paraboloides hiperbólicos acoplados a uma parábola principal.



Diante disso, deseja-se calcular qual a quantidade de cimento armado utilizado na área dessa superfície.

Porém, não achei nada a respeito da equação específica que rege essa cobertura, sendo impossível a realização do cálculo.

Fonte: Material produzido pelo estudante

De forma geral, os protocolos entregues atenderam a solicitação da tarefa, alguns dos estudantes a exploraram em contextos existentes e promoveram outros significados para a situação. Outros, tomaram circunstâncias reais para criarem enunciados de própria autoria. No que se refere aos objetos matemáticos mobilizados pelos estudantes eles eram condizentes com a atividade e com as técnicas, tecnologias e teoria do qual se constitui. Para finalização deste encontro registramos a seguir as matrizes: da linguagem e da diversidade que sintetizam os elementos observados na análise e apresentados no Quadro 22.

Quadro 22 – Matriz da Linguagem do quarto encontro

MDL ₄	Elementos da Matriz	Especificação na situação
	Praxeologia	<i>Didática, matemática e situacional</i>
	Raciocínio	<i>Abdutivo e dedutivo</i>
	Dialéticas	<i>D₁, D₂, D₃, D₄, D₅, D₆, D₇, D₈, D₉, D₁₀, D₁₁</i>
	Semioses	- <i>Relacional: arte de Gaudi, objetos ostensivos e não ostensivos.</i> - <i>Complexa: mobiliza fatores externos e internos a matemática para criar uma situação problema.</i> - <i>Na ação: estabelecem ações questionadoras e participativas no momento da criação do objeto de aprendizagem.</i> - <i>Articulada: dentro do próprio campo da matemática relacionando objetos ostensivos e não ostensivos.</i> - <i>Reveladas na forma: gestual, visual, oral e escrita.</i>
	Função Didática	<i>topogênese, cronogênese e mesogênese</i>
	Tipo de linguagem	<i>Dictarizada, Em Curso, Contrafactual e do (Dis)curso</i>

Fonte: Produção da autora

Ao registrar por escrito as tarefas intituladas: “Vaga de emprego” e “Criação de um Objeto de Aprendizagem”, os estudantes forneceram mais informações que nos possibilitaram verificar a presença de todas as dialéticas propostas pela TAD e a dialética da pessoa e da situação que acrescentamos. Bem como, houve a mobilização dos quatro tipos de linguagem que expressaram os raciocínios empreendidos pelos estudantes e as interpretações produzidas.

Constatamos que o objeto de aprendizagem elaborado pelos cursistas proporcionou compreender a definição abstrata da Integral Dupla em uma situação concreta e manipulável. Percebemos também que os estudantes quando estimulados produzem situações-problemas relevantes para o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral empregando praxeologias matemáticas de forma coerente. Tais significados foram sintetizados na Matriz Diversidade 4 registrada no Quadro 23.

Quadro 23 – Matriz da Diversidade do quarto encontro

MD ₄	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
	Significados	- <i>Compreenderam a definição abstrata da Integral Dupla por intermédio da construção de um objeto de aprendizagem manipulável.</i> - <i>Produziram situações-problemas criativas e relevantes para o CDI e mobilizaram praxeologias matemáticas coerentes.</i>
	Interpretações	- <i>Dentro do próprio campo da matemática quando associam as superfícies quádricas com a Integral Dupla.</i> - <i>Relacionam as formas dos objetos de aprendizagem criados com as superfícies quádricas, com objetos matemáticos e com as obras de Gaudí.</i> - <i>Mobilizam objetos não ostensivos que mediam o papel desempenhado pelo registro dos ostensivos.</i> - <i>Relacionam: situação, praxeologias e registros dos objetos ostensivos coerentemente.</i>
	Atitudes	- <i>Problematizadora ou do Espanto</i> - <i>Herbartiana ou da Dúvida</i> - <i>Procognitiva ou do Rigor</i> - <i>Exotérica ou da Insatisfação</i>

Fonte: Produção da autora

As duas Matrizes trazem elementos importantes para a análise do PEP que foi desenvolvido e para comprovar as duas hipóteses de pesquisa deste estudo. O último encontro trará as possíveis respostas elaboradas pelos estudantes para a pergunta Q_0 do PEP.

5.2.5 Quinto encontro – Solta o arreio da cela¹¹⁵

5.2.5.1 – Relatórios orais e escritos para as perguntas Q_5 , Q_6 e Q_7

O quinto encontro ocorreu no período vespertino do dia 27 de abril de 2019 e seguimos a programação da organização didática, apresentada no Apêndice I. Iniciamos recolhendo os relatórios dos estudantes com as respostas das perguntas subsidiárias Q_5 , Q_6 e Q_7 e abrimos para a discussão sobre o que pesquisaram.

P: Vamos iniciar o encontro com as respostas Q_5 , Q_6 e Q_7 ?

E₇: Professora eu achei interessante que quando estudei as Integrais Duplas eu não vi essa parte da aplicação.

E₁₀: Eu também não vi lá.

P: O conteúdo de Cálculo 3 lá no IFBA é realmente muito extenso. É o Cálculo 3 e 4 da UESB. Mas queria direcionar para as respostas. Como pensaram?

E₁: Eu escrevi primeiramente sobre corpo rígido e as forças externas e internas que atuam neste corpo. Em seguida expliquei o que era centro de massa e momento de inércia.

E₈: Também fiz o mesmo, mas coloquei a fórmula para se calcular cada um deles e então observei que faz uso da Integral Dupla.

E₁₁: Eu também fiz o mesmo que E₁, mas não coloquei a relação com a Integral.

E₆: Eu também não fiz!

Fonte: Áudio-gravação realizada no dia 27/04/2019

Na oralidade os estudantes divulgaram o que haviam investigado, relatando que a aplicação dos conceitos da Integral Dupla nos seus cursos da graduação nem sempre são explorados. Inferimos que existe uma relação inversamente proporcional entre as praxeologia matemática e as praxeologia situacional, quando uma é demasiadamente explorada a outra fica relegada a um segundo plano. É necessário que haja um equilíbrio entre elas, pois os benefícios para o ensino quando as organizações didáticas são planejadas desafiando o estudante a questionar consistem em atitudes emancipatórias.

¹¹⁵ Soltar o arreio da cela foi atribuído no sentido metafórico, pois quando deixamos soltar a imaginação o raciocínio abduutivo surge e faz articulações que são imprevisíveis. Assim acontece com os nossos pensamentos, com as conclusões que tiramos e com as respostas que elaboramos.

No material entregue podemos observar que os estudantes responderam corretamente as perguntas feitas, o que caracteriza as dialéticas: da pergunta e da resposta, da difusão e da recepção, do estudo e da pesquisa, da leitura e da escrita. Dois dos estudantes mobilizam os signos para a representação algébrica e gráfica dos conceitos estudados, relacionando os objetos ostensivos e não ostensivos inerentes ao cálculo do centro de massa e o momento de inércia. Entretanto, apenas um deles relaciona os conceitos anteriores com a Integral Dupla, como pode ser constatado nos protocolos dos estudantes registrados nas Figuras 91, 92, 93 e 94 que representam os registros dos estudantes às respostas de Q₅, Q₆ e Q₇.

Figura 91: Protocolo do estudante E1

FORÇAS EM CORPOS RÍGIDOS

Corpo rígido é aquele que não se deforma. As forças que atuam em corpos rígidos podem ser classificadas em dois grupos:

Forças Exteriores – que representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido considerado, sendo responsáveis pelo comportamento externo do corpo. Estas podem provocar o movimento ou assegurar a manutenção do corpo em repouso. Exemplo: Força de gravidade terrestre ou peso;

Forças Internas – são as que mantêm unidos os elementos que formam o corpo rígido. Se o corpo é estruturalmente composto por diversas partes, as forças que mantêm estas partes unidas são as chamadas forças internas. Exemplo: forças em treliças e catenárias.

Q₅: O que é um centro de massa?

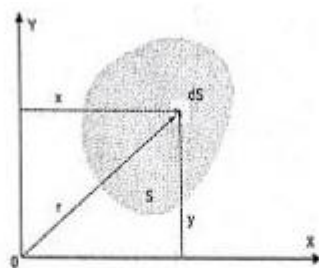
“O centro de massa de um sistema de partículas [uma pessoa, por Exemplo] é o ponto que se move como se (1) toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e (2) todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.”

Q₆: O que é um momento de inércia?

“O **momento de inércia de área**, também chamado de segundo momento de área ou segundo momento de inércia, é uma propriedade geométrica da seção transversal de elementos estruturais. Fisicamente o segundo momento de inércia *está relacionado com as tensões e deformações que aparecem por flexão em um elemento estrutural e, portanto, junto com as propriedades do material determina a resistência de um elemento estrutural sob flexão*. Basicamente os associamos a forças aplicadas na área que variam linearmente com a distância, invertendo sua direção em dado eixo.”

Em Engenharia, é usual o emprego da expressão reduzida momento de inércia para designar o momento de inércia de área.

Seja, conforme Figura a baixo, uma superfície plana genérica de área S e um sistema de coordenadas ortogonais XY . Os momentos de inércia em relação a cada eixo são dados por:



(1)

(2)

Q₇: Qual a influência do centro de massa e do momento de inércia nas obras arquitetônicas de Gaudí?

Gaudí em seus projetos, localizava o centro de massa, como exemplo nas catenárias, e aplicava pesos (forças externas) verificando as formas com maior momento de inércia.

É semelhante a um exemplo experimental de pegar uma viga de madeira encontrar seu centro de massa e analisar a forma que pode posicioná-la para obter um melhor momento de inércia. Como é feito nesse vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=h9QjNaqPEsg>.

Fonte: Material produzido pelo estudante

No protocolo da estudante E₁, ela destaca em **negrito** que o momento de inércia “está relacionado com as tensões e deformações que aparecem por flexão em um elemento estrutural e, portanto, junto com as propriedades do material determina a resistência de um elemento estrutural sob flexão” e relaciona com o uso nas Engenharias. A construção do raciocínio a ajudou a responder à pergunta Q₇ quando afirmou que Gaudí localizava o centro de massa nos seus projetos e cita as catenárias como um exemplo.

As afirmações feitas pela estudante demonstram a presença da dialética do estudo e da investigação e da dialética pesquisa e resposta. O raciocínio usado é dedutivo e não apresentou mobilização dos objetos ostensivos e não ostensivos associados a praxeologia matemática. As Figuras 94 e 95 registram os protocolos dos estudantes E₁₁ e E₆.

Figura 92: Protocolo do estudante E11

Gustavo Prati de Oliveira

O que é o centro de massa?

Em física, o centro de massas é o ponto hipotético onde toda a massa de um sistema físico está concentrada e que se move como se todas as forças externas estivessem sendo aplicadas nesse ponto. Também é o ponto de equilíbrio.

O que é o momento de inércia?

É uma grandeza que define a dificuldade de alterar o movimento de um corpo em movimento circular.

A medida da distribuição da massa de um corpo ao redor de um eixo fixo de rotação

Qual a influência das integrais duplas e Superfícies Quádricas para o equilíbrio nas obras de Gaudí?

Os pontos de apoio das estruturas superiores sobre as inferiores estão localizados no lugar geométrico referente ao centro de massa, ou seja, o ponto de equilíbrio. Isso se deve muito ao fato do método das maquetes tridimensionais, pois ele utilizava pesos em cordas fixas em suas extremidades, deixando evidente esses pontos e depois era só inverter a maquete.

Figura 93: Protocolo do estudante E6

Respostas para as questões geradoras do último encontro:

O que é um centro de massa?

O centro de massa é uma posição relativa a um ou sistema de objetos. É a posição média de todas as partes do sistema, ponderada de acordo com a massa de cada objeto.

O que é um momento de inércia?

O momento de inércia expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. Quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será girá-lo ou alterar sua rotação.

O momento de inércia de um objeto depende de sua massa e da distância da massa ao seu eixo de rotação.

Creio que para gente, interessa-nos somente o momento de inércia de áreas, ou seja, relacionado com as tensões e deformações máximas que aparecem por flexão em um elemento estrutural, e portanto, junto com as propriedades do material determina a resistência máxima de um elemento estrutural sob flexão.

Qual a influência do centro de massa e do momento de inércia nas obras arquitetônicas de Gaudí?

Bom, creio que por ele usar algumas superfícies quádricas em sua maioria por rotação, o momento de inércia está aí presente. Além disso, em alguns arcos catenários podemos ver claramente a influência desses conceitos.

Quando nos referimos ao módulo resistente de uma superfície plana em relação a algum eixo que contém o centro de massa ou de gravidade, nada mais é que a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo centro e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada, muito importante para a resistência de materiais, a exemplo, a viga, pois a viga mais apropriada a um projeto de engenharia está de acordo com as especificações e critérios sobre o momento de inércia para elaboração de projetos estruturais.

Nas obras de Gaudí, essas forças são bem distribuídas, fazendo assim com que talvez elas estejam de pé até hoje. O fato dele utilizar hiperboloides de uma folha ou o parabolóide hiperbólico em suas obras é devido ao fato dessas superfícies regradas apresentarem vantagens estruturais.

Fonte: Material produzido pelo estudante

No protocolo do estudante E₁₁ ele faz relação dos conceitos centro de massa e momento de inércia com a Física, mas não registra nenhuma relação com o CDI. As definições dadas são coerentes com os conceitos, entretanto, as respostas são superficiais. Sobre as influências dos objetos, deste estudo, na construção das obras de Gaudí, o discente discorre sobre a questão do trabalho sistemático em que o arquiteto utilizava as maquetes como experimentos, antes da criação dos modelos tridimensionais, presente em suas obras. São Identificadas as mesmas dialéticas da estudante E₁ acrescidas da dialética do paraquedista e dos buscadores de trufas.

No registro da estudante E₆ é possível identificar as mesmas dialéticas da Estudante E₁ e da E₁₁. No entanto há a presença do raciocínio abduutivo, pois ao associar o centro de massa e o momento de inércia com as obras de Gaudí, ela destaca que “essas forças são bem distribuídas, fazendo assim que talvez elas estejam de pé até hoje”. Neste trecho, a discente traz indícios para uma possível resposta para Q₀ e ainda complementa: “o fato dele utilizar hiperboloides de uma folha ou o parabolóide hiperbólico em suas obras é devido ao fato dessas superfícies regradas apresentarem vantagens estruturais”. A praxeologia apresentada aqui é situacional, pois a circunstância favorece as articulações entre dois mundos: o dos conceitos e o da arte.

Na Figura 94 registramos o protocolo do estudante E₈.

Figura 94: Protocolo do estudante E₈

(Se) integro duplamente
André Oliveira e Letícia Barbosa.

- Centro de massa
 O centro de massa é o ponto hipotético onde toda a massa de um sistema físico está concentrada e que se move como se todas as forças externas estivessem sendo aplicadas nesse ponto.
Centro de massa com integral dupla:

$$\bar{x} = \frac{\iint x \rho(x, y) dA}{\iint \rho(x, y) dA} \quad (\bar{x}, \bar{y} \text{ de uma lâmina})$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y \rho(x, y) dA}{\iint \rho(x, y) dA}$$

- Momento de inércia
 O momento de inércia expressa o grau de dificuldade de se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
Momento de inércia com integral dupla:

$$I_0(D) = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$$
 (em relação a origem)

- A influência das integrais duplas de superfícies quadradas nas obras de Gaudí.
 As integrais duplas, são utilizadas nas obras de Gaudí para se calcular a massa de determinadas regiões limitadas por curvas, o momento de massa dessas regiões curvas, a distribuição de densidade,

Fonte: Material produzido pelo estudante

No protocolo do estudante E₈ as dialéticas do estudo e da investigação e da pesquisa e resposta, podem ser encontradas no registro escrito e distingue-se dos demais no que diz respeito ao emprego da praxeologia matemática coerente e relacionando-a com outras áreas de conhecimento. Ele associou o uso da Integral Dupla com as obras de Gaudí no que se refere ao cálculo do momento de inércia e o centro de massa e da distribuição da densidade. Além das dialéticas apresentadas no registro da estudante E₁ é possível identificar a dialética do paraquedista e dos buscadores de trufas.

Os quatro tipos de linguagem são usados pelos estudantes empregando raciocínios dedutivos e indutivos com maior predominância. Os abduativos aparecem como conjecturas nas relações estabelecidas entre os conceitos de centro de massa e momento de inércia com as obras gaudinenses.

Esclarecemos que todos os estudantes participaram da difusão dos resultados das respostas das três questões, alguns apresentaram-nas oralmente, outros, com registro na forma escrita.

5.2.5.2 Solução da Atividade 2.

Finalizada essa atividade propomos a solução da Atividade 2, que se encontra no Apêndice J deste estudo. Todos os estudantes participaram da atividade, entretanto, eles resolveram em dois grandes grupos: o da licenciatura em Matemática e o das Engenharias.

A solução da tarefa proposta foi entregue individualmente, mas na análise dos relatórios podemos observar que estão semelhantes nas praxeologias usadas e na linguagem empregada. Por estes motivos, apresentamos apenas um de cada grupo.

A Atividade 2 tinha dois objetivos: o primeiro, era apresentar uma tarefa inédita envolvendo a aplicação da Integral Definida em um contexto das Engenharias e o segundo, mostrar como alguns dos objetos matemáticos do CDI do Ensino Superior se apresentam no Ensino Básico.

O grupo das Engenharias iniciou lendo a primeira tarefa e, em seguida, resolvendo-a usando as Integrais Duplas com as variáveis x e y e com os limites disponibilizados na situação problema. Aplicaram as definições do centro de massa e dos momentos de inércia e calcularam as Integrais Duplas. Não solicitaram atendimento do professor/investigador e realizaram a pesquisa, nos livros de Cálculo disponibilizados, os conceitos que não recordavam. A Figura 95 registra a solução realizada pelos estudantes das Engenharias.

Figura 95: Parte do relatório final dos estudantes das Engenharias para a atividade 2

1) a) Sabendo que a equação de uma parábola hiperbólica é $z = y^2 - x^2$, temos que:

$$\int_0^{16,17} \int_0^{6,93} (y^2 - x^2) dx dy = \int_0^{16,17} \left[\int_0^{6,93} (y^2 - x^2) dx \right] dy =$$

$$\int_0^{16,17} \left[y^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{6,93} dy = \int_0^{16,17} \left[y^2 (6,93) - \frac{(6,93)^3}{3} \right] dy =$$

$$\left[\frac{y^3}{3} (6,93) - \frac{(6,93)^3}{3} y \right]_0^{16,17} = \frac{(16,17)^3}{3} (6,93) - \frac{(6,93)^3}{3} (16,17) =$$

$$= 7972,709699 \approx 7972,71 \text{ u.a.}$$

b)

$$\int_0^{16,17} \int_0^{4,3} (y^2 - x^2) dx dy = \int_0^{16,17} \left[\int_0^{4,3} (y^2 - x^2) dx \right] dy =$$

$$\int_0^{16,17} \left[y^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{4,3} dy = \int_0^{16,17} \left[y^2 (4,3) - \frac{(4,3)^3}{3} \right] dy =$$

$$= \left[\frac{y^3}{3} (4,3) - \frac{(4,3)^3}{3} y \right]_0^{16,17} = \frac{(16,17)^3}{3} (4,3) - \frac{(4,3)^3}{3} (16,17) =$$

$$= 5631,521965 \approx 5631,5 \text{ u.a.}$$

Fonte: Material produzido pelo estudante

Ao se envolverem com a tarefa, os estudantes empreenderam os signos associados aos objetos imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos para a interpretação da situação, uma semiose relacional que proporciona a solução da atividade, uma ação em ato. Outro aspecto identificado foi a dialética da análise (síntese) praxeológica e da análise (e síntese) didática que se manifesta nas decisões tomadas, nas praxeologias econômicas mobilizadas, selecionando o que serve para responder as perguntas.

No que tange aos raciocínios, eles são inicialmente especulativos e, portanto, abduativos, e ao generalizarem os conceitos tornam dedutivos. Verifica-se o uso de muitos tipos de linguagem, mas as quatro linguagens discutidas neste estudo aparecem espontaneamente. Verificamos que as atitudes do EDRI aparecem como enfrentamentos naturais pelos estudantes que realizam a atividade sem muito questionamento, pesquisando e aplicando os conceitos inerentes a Integral Dupla.

Entretanto, não ocorre o análogo com o grupo da Licenciatura em Matemática. A discussão em torno da interpretação da situação problema causou estranhamentos desde a leitura inicial e várias conjecturas foram levantadas na solução. Registramos¹¹⁶ a seguir trechos dos questionamentos orais dos partícipes deste grupo.

E1: Essa faixa de segurança seria o formato da montanha?

E6: Eu não entendi direito não!

E1: É porque fica parecendo que essa faixa de segurança é a montanha. Para mim, essa montanha no formato de um parabolóide tem mais a ver com a faixa de supressão. E essa faixa de segurança seria tipo uma área, um retângulo, um quadrado que delimitasse isso. Faz sentido?

E6: Faz. Mas é a área a ser suprimida na fase da licença diz aqui.

E1: Então vai ser uma Integral Dupla de zero até seis vírgula noventa e três?

E6: Eu acho que é isso.

E7: Eu acho também.

E1: Professora, onde será a faixa de segurança?

P: A faixa de segurança é toda a área que ficará na torre. A parte que desmatou para o carro passar, até chegar ao local, as árvores derrubadas ou podadas para os fios passarem, entre outras.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 27/4/2019.

Neste trecho há uma solicitação do auxílio da professora para a compreensão do enunciado e ela responde a consulta feita, característica da dialética da mídia e do meio. E as dúvidas na solução continuaram sendo externadas no seguinte debate:

E11: Então... Se calcularem dessa forma será o volume.

E1: Ele tem razão, já que o z não é igual a 1.

(silêncio)

E1: Olhando aqui no livro teremos que usar essa fórmula da área da superfície.

E11: Eu acho que precisamos parametrizar

E1: O grande problema será descobrir o limite de integração na forma substituída. (A aluna se refere a parametrização).

E6: Bem como o professor falou lá na entrevista de hoje pela manhã. Encontrar o limite de integração é a parte mais difícil.

¹¹⁶ A transcrição dos áudios foi feita preservando a linguagem natural do estudante. Não realizamos nenhuma correção ortográfica ou gramatical. Essa escolha se justifica e está alinhada a proposta deste estudo que defende o uso nas aulas de matemática da linguagem contrafactual na construção dos conceitos matemáticos.

E1: Nesse caso seria então essa fórmula aqui da raiz quadrada de um somado com a derivada parcial de x elevado ao quadrado somado com a derivada parcial de y elevado ao quadrado.

E6: Se eu já tenho o y e o limite de integração, por que eu vou mudar? Vocês estão viajando.

E1: Tem como fazer isso aqui por x e y. É só dividir tudo por 4 para que esse 4 aqui suma. Vai ficar $4x^2 + 4y^2 + 1$ dentro da raiz quadrada. Quero saber se tem alguma coisa específica aqui. (Ela se refere a alguma relação trigonométrica).

E7: Vamos colocar o 4 em evidência.

E6: É o que estou tentando fazer.

E1: Agora x ao quadrado somado a y ao quadrado não é igual ao raio ao quadrado?

E7: Está certo. Logo teremos quatro vezes o raio ao quadrado mais um.

E2: A integração que está dando problema é esta aqui para coordenadas polares, por causa do raio.

E1: Você fez o domínio da Integral original?

E2: Eu acho que é o seu teta que está errado.

E7: Eu acho que a região é retangular logo não vou usar coordenadas polares.

E1: Faz sentido!

E6: Não dá para deixar genérico, por que quando você integrar aqui vai aparecer o r. E aí?

E6: Vamos pular para a outra questão?

Fonte: Transcrição dos áudios gravados no dia 27/04/2019.

O conflito ocasionado pelo emprego da técnica, da tecnologia e da teoria mais apropriadas para a tarefa fizeram com que eles não terminassem a técnica empregada para encontrar uma solução para a Integral Dupla, como registram no protocolo da Figura 96.

Figura 96: Parte do relatório final dos estudantes da licenciatura em matemática

Atividade

01- a) medida da área da faixa de segurança

$x \rightarrow$ a área em hectares de vegetação por vista.

$y \rightarrow$ a área em hectares de ruínas de vegetação

x variando $[0; 6,93]$

y variando $[0; 16,17]$.

Utilizaremos $z = \frac{x^2}{ca^2} - \frac{y^2}{cb^2}$

Observe que queremos a área da superfície sobre o parabolóide da forma:

$z = \frac{x^2}{ca^2} - \frac{y^2}{cb^2}$ note que, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{ca^2}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{cb^2}$

Utilizaremos a seguinte forma

$$\int_0^{16,17} \int_0^{6,93} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int_0^{16,17} \int_0^{6,93} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{c^2a^4} + \frac{4y^2}{c^2b^4}} dx dy$$

$$= \int_0^{16,17} \int_0^{6,93} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

$$= \int_0^{16,17} \int_0^{6,93} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$$

$$= \iint \sqrt{1 + 4u^2} u du d\theta$$

chame $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

$du = \frac{x}{u} dx + \frac{y}{u} dy$

$du = u du$

Fonte: Material produzido pelo estudante

As atitudes do EDRI aparecem de forma explícita. O espanto ao se deparar com a tarefa, as dúvidas que iam surgindo, o rigor usado pelo estudante E₁₁ e E₂ e a indignação ao não conseguirem resolver o problema.

Uma das semioses relatadas no recorte acima foi o confronto com a situação sendo resolvida com os cálculos referentes à medida de volume e não a medida de área. Essa retomada das tecnologias apropriadas, leva-os a não recordarem das técnicas para resolver o problema. Como afirma a estudante E₆ no processo da difusão dos resultados:

E6: É que tem muito tempo que a gente deu esse assunto, então resolver a integral da raiz de $4x^2 + 4y^2 + 1$ não nos lembramos.

P: Então vocês tiveram dificuldades não na interpretação, mas de lembrar as técnicas de integração e estabelecer o limite.

E7: Isso! Tem como achar uma solução!

E11: Faz sentido a integração. Só que não conseguimos nos lembrar de como fazer.

E3: O domínio de Integração é que é o problema!

Fonte: Material áudio gravado no dia 27/04/2019

O relato oral dos estudantes da licenciatura afirma a falta da informação que deveria ser requerida da “memória prática, aquela que é solicitada por um indivíduo envolvido no cumprimento de uma tarefa identificada como parte de um saber matemático” (MATHERON, 2018, p.73).

O grupo da Engenharia entendeu que ao aplicar a Integral Dupla com os limites de integração dados resolveria a situação, entretanto, a memória prática não os recordou de que para o cálculo da medida de uma área é necessário que o $f(x, y)$ seja igual a 1, tal informação não consta no problema.

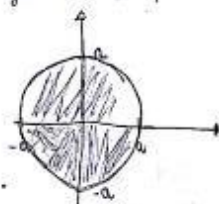
Em virtude das discussões interpretativas referentes à situação problema criada chegamos à conclusão de que ela precisa ser reformulada para alcançar o seu objetivo. A mudança no enunciado trazendo informações com clareza e coerência são necessárias para serem aplicadas em outro momento. No processo de elaboração não avaliamos as múltiplas interpretações apontadas pelos estudantes.

Para a letra c da primeira situação problema outro conflito foi identificado e os resultados voltaram a serem diferentes entre os grupos. Desta vez, ocorreu na identificação da representação algébrica do parabolóide hiperbólico. Como as equações podem ser representadas ao longo dos eixos Ox , Oy ou Oz , elas irão se distinguir nos sinais dos coeficientes que acompanham as variáveis. Portanto, quando os coeficientes a e b são iguais a 1, a equação pode ser escrita na forma $z = x^2 - y^2$ ou $z = y^2 - x^2$ e o estudante deve interpretar a situação para a escolha adequada, a qual poderá influenciar no resultado do problema proposto. Foi o que ocorreu na solução da letra c da primeira situação problema da atividade 2. Como descreve o relato oral dos estudantes a seguir.

da Atividade 2, fizemos uma adaptação de um dos dispositivos experimentais elaborado pelo professor Afonso Henriques que tem como objetivo mostrar como alguns dos objetos matemáticos do CDI do Ensino Superior se apresentam no Ensino Básico. A Figura 97 e 98 registram a solução dos dois grupos dos estudantes.

Figura 97: Parte do relatório da solução dos estudantes da Licenciatura em Matemática

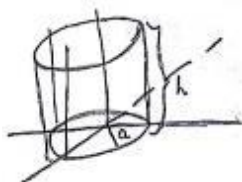
2) Região R do plano xy delimitada, por



$$f(x,y) = h$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^a h \, r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a h r \, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{h r^2}{2} \right|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{h a^2}{2} d\theta \\ &= \left. \frac{h a^2}{2} \theta \right|_0^{2\pi} \\ &= h a^2 \pi \end{aligned}$$

b) Calcule o volume do cilindro reto descrito na imagem.



Sabendo que a altura do cilindro é h e o raio da circunferência é a . Calcule o volume do cilindro.

3) Podemos observar que conceitos que aparentemente tem utilização puramente rebuscada e altamente técnica, como por exemplo as integrais duplas, podem ter utilizações e realizações em cálculo de volume de corpos redondos. A integral também pode ser utilizada para encontrar fórmulas de cálculo de volume de corpos redondos, assim como nós temos a.

Fonte: Material produzido pelo estudante

Figura 98: Parte do relatório dos estudantes das Engenharias

a) $\int_0^{2\pi} \int_0^a h r dr d\theta =$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^a h r dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} h r^2 \Big|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \left[h \frac{a^2}{2} \right] d\theta =$$

$$h \frac{a^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi h a^2}{2} = \pi h a^2$$

$a = \text{base}$
 $h = \text{altura}$

b) Na figura abaixo representa um cilindro, sabendo que $d = 3\text{cm}$ e $h = 3\text{cm}$, calcule seu volume.

Se $\pi = 3$

$V_c = \pi r^2 h$

$V_c = 3 \cdot (1,5)^2 \cdot 3$

$V_c = 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{81}{4} = 20,25$

$V_c = 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{81}{4} = 20,25$



Fonte: Material produzido pelo estudante

Para essa questão não houve discussões e os dois grupos chegaram ao mesmo resultado. Ao divulgarem os resultados das conclusões que chegaram, as expuseram da seguinte forma:

P: E para a segunda questão, quais conclusões tiraram ao relacionarem os cálculos realizados com o Ensino Básico?

E7: Essa eu achei bem interessante.

E1: A gente só deu para o raio o valor genérico a e para a altura o valor h e calculamos o volume.

E6: Eu achei isso bem legal! Porque quando a gente estava nos primeiros semestres tinha aquela discussão para que a gente estuda Cálculo IV, se a gente só vai chegar até matrizes com esses meninos do Ensino Básico, do que a gente vê no Ensino Superior. Então, isso aqui é uma justificativa, um porque que é importante, pois a partir daqui que se chega a uma fórmula. Consegue calcular o volume de uma forma correta, sem ninguém ter que dados que encontre isso.

P: Uma fórmula?

E6: Isso! Então quando você chega para ensinar no Ensino Médio é melhor você como professor entender o que está acontecendo. Fica mais fácil você passar para o seu aluno o que é de verdade. Porque quando ele perguntar o porquê daquela fórmula você terá uma explicação na própria matemática.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 27/04/2019.

O relato da estudante E₆ é relevante para a Educação Matemática que tem discutido a importância dos significados para o saber matemático que se ensina e aprende nas escolas. Concordamos que o professor no exercício da sua profissão precisa conhecer profundamente o objeto matemático que ensina, isso o habilita a responder as perguntas feitas pelos estudantes sobre o que está sendo ensinado.

Essa dimensão epistemológica do objeto matemático é mencionada no debate que ocorreu neste encontro, como registramos abaixo.

P: O estudante E8 me fez uma pergunta interessante: quem foi descoberto primeiro a Integral Dupla ou a medida do volume do cilindro? (ele refere-se à forma apresentada nos livros didáticos do Ensino Básico)

E1: Eu acho que foi a geometria, pois já fazia parte da vida das pessoas desde os gregos. O Cálculo só veio aparecer da forma que estudamos hoje no século XIX.

E7: Mas eu acho que o cálculo do volume pela geometria ocorria de forma intuitiva.

P: É difícil responder porque os tratados históricos foram perdidos. Eu acredito que a forma de fazer o cálculo da medida da área e do volume ocorria de forma intuitiva, mas as definições, os teoremas, as técnicas foram demonstrados quando o “mundo acadêmico” conseguiu resolver a questão dos infinitesimais e então a Integral passa a se apropriar deles para as comprovações científicas.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 27/04/2019.

A indagação realizada pelo estudante E₈ retrata uma das restrições encontradas na elaboração deste estudo, pois não é fácil o acesso as informações que são perdidas no decorrer do tempo.

5.2.5.3 Resposta a questão Q₀

Tendo chegado ao fim da difusão dos resultados da tarefa, os estudantes foram convidados a responder individualmente à questão Q₀, a saber: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? Transcrevemos abaixo os relatos orais dos estudantes.

P: Agora vocês têm condições de me responder à questão Q0. Quero ouvi-los individualmente, vamos lá?

E8: Na casa Batlló ele usou a luz natural. Tipo: você usar a natureza a favor e não contra eu acho que ajuda a perpetuar. E o lance da matemática também, porque você vê que ele não usa parábolas e sim catenárias, por conta da distribuição de

peso e tudo mais. Eu acho que tudo isso fez com que as obras dele durassem até hoje.

E11: Como ele constrói os modelos tridimensionais através de pesos nas cordas estendidas já cria um sistema fixo de uma estrutura rígida para sustentar e gerenciar essa distribuição de peso.

E10: Esse último tema que falamos, o centro de massa e o momento de inércia foi muito importante porque as obras dele foram coisas propícias para que tivesse uma linearidade e uniformidade e tivesse um controle. Além das figuras tridimensionais, mesmo que ele estivesse fazendo coisas “anormais” para a sua época, ele se preocupou com os cálculos. Não foi só pelo lado criativo, ele pensou também pelo lado do futuro, pela permanência e preservação deles.

E6: O estudo dele a gente observa que ele fez tudo antes de aplicar. Então ele sabia o que ia dar certo e como ia dar certo para ficar da melhor maneira possível. Então, foi tudo muito bem calculado, muito esquematizado.

A aluna E₉ interrompe E₆.

E9: Tudo muito equilibrado, tudo muito cuidado para que tivesse êxito e durasse tanto tempo. Foi bem exato. Tanto que tudo que li sobre as obras dele falava do equilíbrio e da exatidão das coisas (referindo as obras de Gaudi).

A aluna E₆ retoma a fala e complementa.

E6: E, também, o que a gente viu sobre as áreas. Ele usou Arquitetura, junto com a Matemática e com a Engenharia. Ele fez a junção dessas várias áreas, misturou tudo e deu uma obra.

Fonte: Transcrição das gravações realizadas no dia 27/04/2019.

Interrompemos a descrição para uma análise das cinco primeiras respostas de Q₀ obtidas. Com base nos relatos orais, identificamos alguns significados mobilizados pelos estudantes, a saber: os fenômenos naturais que podem deteriorar com a ação do tempo foram aproveitados a favor da preservação das obras do artista; a escolha por formas tridimensionais; a preocupação em manter sempre o equilíbrio das forças que atuam nas obras possibilitou formar estruturas rígidas capazes de resistirem ao tempo; os moldes feitos em sacos de areia e o material utilizado permitiam alcançar o equilíbrio e a exatidão dos cálculos em suas obras; dos objetos da matemática que são usados pelo arquiteto estão o centro de massa e o momento de inércia.

Ao considerar essas cinco percepções, constatamos que os elementos trazidos pelos estudantes permanecem com uma linguagem contrafactual e em (dis)curso que agrega respostas convincentes e coerentes com Q₀. As atitudes do EDRI foram sendo construídas em todo o desenvolvimento do PEP e a praxeologia situacional em conjunto com as praxeologias didática e matemática contribuíram para as interpretações e respostas elaboradas. As funções didáticas

também favoreceram o meio, com algumas restrições no que diz respeito a cronogênese, pois o último encontro foi muito profundo em termos de discussões, uma quantidade de atividades excessivas. No entanto, os estudantes conseguiram manter a qualidade das respostas e a motivação até o final do curso.

Dando sequência aos relatos orais dos estudantes, expomos as falas de dois outros participantes.

E7: Nas minhas primeiras pesquisas, eu vi que ele dedicou seus últimos anos de vida a construção da Basílica (o estudante se refere ao Templo Expiatório da Sagrada Família). A preocupação dele, sendo matemático e sendo arquiteto, era de medir tudo bonitinho e distribuir toda a força e depois capturar aquilo e girar, mostra como ele se preocupava como a obra dele ia perpetuar pela vida toda. Que é o mais interessante! A forma como ele usa as Superfícies Quádricas, no caso dos paraboloides hiperbólicos que ele vai e vira. E aí ontem, eu fiquei pensando: Como é que pode hoje ter tanta cobertura nesse formato?

O estudante E₃ interrompe E₇ e fala:

E3: E ser tão resistente!

E7: Não é? Recentemente hoje o que falei sobre a Basílica de Brasília que também tem esse formato. Eu fiquei lá pensando e aí fui entender a relação entre o centro de massa e a construção das vigas na disciplina de resistência de materiais, que usa os momentos de inércia e o centro de massa e aí você ver arquitetos preocupados com isso. Não somente ele (refere-se a Gaudí), mas de outros espanhóis, inclusive de pavilhões lá que eu vi para a questão que eu estava elaborando.

E3: Tirando a questão física eu citaria a questão das Superfícies Quádricas que é uma marca registrada dele. Porque, por exemplo, se eu visse uma estrutura de um parabolóide e uma toda quadradinha, eu diria que a toda quadradinha durava bem mais. Eu não sabia que algo daquele tipo fosse tão resistente. Então, com certeza, ao utilizar essas formas, essas curvas tão diferenciadas ele propiciou que elas (as obras) continuassem e perpetuassem até hoje. Esse foi o diferencial.

Fonte: Transcrição dos áudios gravados em 27/04/2019.

A fala destes dois depoentes distingue das anteriores, no que diz respeito à importância dada por Gaudí às Superfícies Quádricas e a presença do *insigth* do arquiteto em fazer movimentos giratórios com os moldes para que preservassem o equilíbrio das estruturas. Para além da percepção sobre as obras gaudinenses, o estudante E₇ situa as obras atuais com o mesmo formato e expõe a relação dos conteúdos matemáticos abordados com um componente curricular cursado por ele, resistência de materiais. Outro raciocínio abdutivo que merece destaque está presente na fala do estudante E₃ que comparou as estruturas no formato do parabolóide e do quadrado e concluiu que a quadrada pareceria para ele ser mais resistente.

Os dois últimos cursistas também fizeram considerações relevantes para a resposta a Q₀ declarado na oralidade exposta a seguir.

E12: Tanto que eu conversando com os colegas de Civil sobre iluminação essa parte da luz serviu tanto para a iluminação como para manter o material da estrutura. E, também, esse negócio dele ter desenvolvido a parte dos pesos, que foi algo que ele se preocupou para distribuir, porque ele fez uma coisa incomum. Para ele ter certeza de que ia dar certo, ele fez uma coisa diferente para dar uma relação de exatidão naquela forma.

E7: E para além disso, ele ainda se preocupava em estudar a natureza, a anatomia de alguns animais para que o projeto dele não fosse matematicamente rigoroso, aquela coisa crua, feio de olhar. Então, ele se preocupou até nisso, na estética né?

E1: Acho que citaram todos os pontos, mas acho interessante citar também a composição dos sólidos que ele faz. Porque ele faz a união entre vários sólidos e deve ser visto como um elemento de resistência porque essa união não é feita do jeito que a gente fala: de qualquer jeito! Foi feita mesmo pensando na resistência, no equilíbrio. Uma coisa interessante, também, é a sutileza que tem dentro da obra dele. Pois a gente olharia e não pensaria que a gente usaria a Integral Dupla ali para calcular a massa, o centro de massa, o momento de inércia. Tipo, a gente ia olhar para aquela obra em si, mas não para toda a Matemática que tem por trás. (destaque feito em negrito pelos autores do estudo)

Fonte: Transcrição dos áudios gravados em 27/04/2019

O destaque em negrito, realizado pelos autores deste estudo, estabelece a relação entre as obras de Gaudí, as Superfícies Quádricas, o centro de massa, o momento de inércia e as Integrais Duplas, percepção que ousamos inferir ao visitar as construções físicas do artista.

As respostas dos estudantes não são únicas, consistem em uma família de soluções plausíveis e que estariam sob a perspectivas de outros: olhares, estudos, profissionais, estudantes, áreas, entre outros. Quando realizamos um experimento aberto, temos a consciência de que a amplitude de conhecimentos que podem ser mobilizados para a constituição de uma resposta é vasta. Por isso, consideramos as sínteses dos discentes como algo muito relevante e que retrata o desenvolvimento do PEP.

Os questionamos sobre a possibilidade de aplicar um PEP em sala de aula regular, obtivemos as seguintes afirmações:

E1: Dentro do ensino superior o professor tem mais liberdade, mas mesmo assim tem o fator tempo, né?

P: E se for no Ensino Básico?

E6: Se for no EJA (Educação de Jovens e Adultos) ainda dá.

E7: Ué. Por quê?

E6: Porque eles são adultos é mais fácil de apresentar. Mas acho que depende muito da turma. Mas a ideia eu acho boa, assim de você direcionar. Seria como planejar uma aula investigativa.

E7: Eu creio que na Educação Básica depende muito da escola, as vezes o professor tem uma liberdade maior, e estou falando de ambas as instituições - públicas e privadas. Tem também alunos que se a gente levar uma aula assim vais falar: Mas a gente está tendo aula de matemática? E tem mães, pais que vão questionar.

E6: Na verdade tem até professores que questionam.

Fonte: Transcrição do áudio gravado no dia 27/04/2019.

Neste diálogo os estudantes relatam as restrições para o desenvolvimento de um PEP, tais como: o tempo dedicado as aulas de matemática; a faixa etária das turmas; a autonomia do professor e as rupturas culturais necessárias para se aplicar uma aula deste tipo.

Construímos as duas Matrizes de análise do sexto encontro mencionando os elementos que as constituem e que foram detectados no decorrer daquele momento, no Quadro 24 temos a Matriz da Linguagem 5 (MDL₅) formadas pelos seis elementos que a caracterizam.

Quadro 24 – Matriz da Linguagem do quinto encontro

MDL ₅	Elementos da Matriz	Especificação na situação
	Praxeologia	<i>Didática, matemática e situacional</i>
	Raciocínio	<i>Abdução e dedutivo</i>
	Dialéticas	<i>D₁, D₂, D₃, D₄, D₅, D₆, D₇, D₈, D₉, D₁₀, D₁₁</i>
	Semioses	- <i>Relacional: objetos ostensivos e não ostensivos empregados na Atividade 2.</i> - <i>Complexa: mobiliza fatores externos e internos a matemática para criar uma situação problema.</i> - <i>Na ação: estabelecem ações questionadoras e participativas no momento da solução da Atividade 2.</i> - <i>Articulada: dentro do próprio campo da matemática relacionando objetos ostensivos e não ostensivos.</i> - <i>Reveladas na forma: gestual, visual, oral, e escrita.</i>
	Função Didática	<i>topogênese, cronogênese e mesogênese</i>
	Tipo de linguagem	<i>Dictarizada, Em Curso, Contrafactual e do (Dis)curso</i>

Fonte: Produção da autora

Ao observar os fenômenos que surgiram no desenvolvimento do PEP, foi possível detectar a presença de todos os seis elementos que compõe a Matriz da Linguagem, ao qual viemos destacando em cada trecho transcrito do áudio gravado e da solução das atividades propostas.

Os significados e as interpretações presentes neste último encontro foram essenciais para a constituição da resposta a questão aberta Q₀, resumidamente descrevemos a Matriz Diversidade (MD₅) no Quadro 25.

Quadro 25 – Matriz da Diversidade do quinto encontro

MD5	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
	Significados	- Compreenderam a aplicabilidade da Integral Dupla. - Produziram discussões relevantes para as situações-problema apresentadas na Atividade 2. - Estabeleceram a relação entre as obras de Gaudí, as Superfícies Quádricas, o centro de massa, o momento de inércia e as Integrais Duplas. - Destacam a importância do centro de massa e do momento de inércia com o equilíbrio de forças atuando na arquitetura gaudinense.
	Interpretações	- Dentro do próprio campo da matemática associaram o cálculo do centro de massa e do momento de inércia com a Integral Dupla. - Mobilizam objetos não ostensivos que mediam o papel desempenhado pelo registro dos ostensivos, representando-os em representações pictóricas, algébricas e gráficas. - Relacionam: situação, praxeologias e registros dos objetos ostensivos coerentemente para resolver a atividade 2 proposta. - Os dois grupos de estudantes apresentaram interpretações diferentes para a situação problema 1, da Atividade 2.
	Atitudes	- Problematicadora ou do Espanto - Herbartiana ou da Dúvida - Procognitiva ou do Rigor - Exotérica ou da Insatisfação

Fonte: Produção da autora

Justificamos que optamos em não colocar os significados mobilizados pelos estudantes ao responder Q₀ no Quadro 25, anterior, pois os utilizaremos posteriormente para comprovar as hipóteses do nosso estudo e generalizarmos a resposta dada por eles.

5.2.5.4 A avaliação do PEP

A última atividade do dia, foi a avaliação do PEP. Como mencionamos no Capítulo III ela foi direcionada e a subdividimos por encontros, o modelo encontra-se no Apêndice L deste estudo. Apresentamos a seguir as respostas dos cursistas.

Quanto a primeira pergunta: se a experiência de discutir sobre o CDI em um ambiente diferente da sala de aula teve algum significado para ele. Das dez respostas obtidas todas disseram ter gostado da experiência alegando que foi mais espontâneo o aprendizado e se

sentiram mais livres para falar o que pensavam sobre o CDI. Apenas um estudante questionou que sentiu falta da Integral neste primeiro dia.

Ao analisarmos o questionamento do estudante não concordamos com a percepção dele, pois houve duas palestras que situaram as Integrais no meio científico. Explicar técnicas, teoremas apropriados aquela teoria em um ambiente natural não era a proposta para aquele encontro.

Quando os questionamos sobre quais as contribuições das palestras iniciais para a compreensão dos procedimentos do curso, as respostas versaram sobre as percepções do Cálculo em contextos diferentes dos livros didáticos e da sala de aula, em sua totalidade. O estudante que havia dito ter pouco conteúdo do CDI no primeiro encontro, responde:

E₂: Gostei do momento inicial, pois possibilitou entender melhor a proposta. Sentir dificuldades em visualizar como nas obras de Gaudí poderiam ter tanta matemática, fiquei muito curioso e o 1º momento instigou isso, achei a palestra da professora Karine mais objetiva em relação ao curso.

Fonte: Material do curso respondido pelos alunos

Esse posicionamento do estudante descreve que o objetivo do primeiro encontro foi alcançado, pois a proposta era realmente explicar como funcionaria o curso e motivá-los para a participação nos demais encontros.

No segundo encontro a primeira pergunta da avaliação foi referente aos esclarecimentos feitos por WhatsApp para o desenvolvimento da mesa temática. Os estudantes manifestaram satisfeitos com as informações. Dos dez protocolos, oito relataram que foi importante para a organização do momento e para se estimularem a participarem. Um deles respondeu que foi um dos melhores momentos e o outro, respondeu sobre os vídeos e os arquivos que nortearam a pesquisa.

De fato, o objetivo de enviar a programação do encontro e os esclarecimentos para os participantes do curso, que estão nos Apêndices B, E, F, G e H desta pesquisa, era mantê-los atualizados previamente sobre o encontro; transmitir uma sensação de linearidade da organização didática do evento e orientá-los sobre as atividades que seriam realizadas.

Sobre o desenvolvimento da mesa temática os estudantes a elogiaram e os dez respondentes acharam que os palestrantes estavam alinhados com a proposta do curso, pois cada um deles expôs sobre a aplicabilidade do CDI nas suas respectivas profissões.

As impressões relatadas sobre a amplitude do CDI abordado na mesa temática para o conhecimento profissional estavam relacionadas com a aplicação em diferentes cursos das graduações, alguns dos depoentes afirmaram:

E7: Demais. Nunca imaginei que o cálculo era tão aplicado assim.

E2: Com certeza, ampliou muito a minha percepção, faço licenciatura e pude ver o quanto a integral está envolvida nas outras áreas.

Fonte: Material do curso respondido pelos estudantes.

A quarta pergunta feita no protocolo de avaliação foi o quanto sentiram dificuldades em descobrir as formas tridimensionais nas obras de Gaudí. Três dos cursistas acharam fácil; cinco disseram ter usado a internet para descobrir e dois deles acharam difícil.

Perguntados se o desenvolvimento dos conceitos usando contextos reais facilitaria ou não a compreensão dos entes do CDI todos os dez participantes afirmaram que sim. Uma das justificativas foi a resposta do estudante E₅:

E5: Com certeza, nessas disciplinas, geralmente entendemos os conceitos matemáticos, reproduzimos os cálculos, mas não temos noção da aplicação, ou até mesmo, da relação com o nosso contexto real. Observar uma situação real e a partir dela, explorar as inúmeras aplicações do cálculo, torna o aprendizado mais efetivo, haja vista, a compreensão aliada a vivência.

Fonte: Protocolo da avaliação respondido pelos estudantes.

O posicionamento do estudante frente às metodologias de ensino do CDI foi exposto de forma clara e objetiva e destaca que objeto matemático aplicado a uma situação real “torna o aprendizado mais efetivo”, como também defendemos. Entretanto, temos ciência das responsabilidades para com a contextualização, pois ela deve ser empregada para a construção do conceito matemático e não apenas para diversão dos estudantes.

Quando perguntados sobre os pontos positivos e negativos da mesa temática, sete dos partícipes destacaram apenas os pontos positivos, a saber, a organização da mesa, a uniformidade do discurso dos palestrantes, e a demonstração pelas falas da importância e da aplicação do CDI para suas áreas. Três dos estudantes salientaram os mesmos pontos positivos, mas mencionaram como pontos negativos o atraso para iniciar os trabalhos da mesa e a falta de perguntas e discussões com os palestrantes.

Para o terceiro encontro, cinco perguntas foram respondidas pelos estudantes pesquisados. A primeira delas foi o quanto a contribuição dos vídeos e da entrevista com o professor e doutor Afonso Henriques foi relevante para eles. Todos eles afirmaram que o vídeo da professora Adriana deveria ter sido no primeiro encontro, pois ela discorreu sobre a história

das obras de Gaudí e o tempo em que ele viveu. No que tange, ao vídeo em que registra o trabalho do grupo de pesquisa do professor Afonso Henriques explicando como são criados os sólidos ou “crivos” usando a impressora 3D, os estudantes afirmaram que a visualização daqueles crivos proporcionaria maior compreensão dos objetos abordados em CDI.

Indagados sobre os significados mobilizados pela inversão do ensino das Superfícies Quádricas primeiro abordando-as nas obras de Gaudí e em seguida a explicação formal dos conceitos, os estudantes manifestaram ficar satisfeitos, pois foi possível visualizar a aplicação dos conceitos matemáticos nas obras de um artista. Nos despertou a resposta da estudante E₆ ao afirmar:

E6: Sair da aplicação do cotidiano para a teoria requer muito da pessoa, pois quebra com a forma que você trabalha a vida toda.

Fonte: Material da pesquisa

A metodologia de ensino do PEP proporciona esta ruptura citada pela estudante, pois rompe com o modelo da aula expositiva, em que o professor ensina e o estudante aprende. Entretanto, para os professores que não foram formados com a perspectiva de se trabalhar com uma questão aberta e com uma resposta considerada com provisória na Matemática passa a ser um desafio, porém com resultados gratificantes, pois a pesquisa aumenta o campo de conhecimentos e promove mudanças.

Ao serem perguntados sobre as contribuições da exposição feita pela professora sobre as Superfícies Quádrica por meio das representações algébricas e gráficas, três dos estudantes não responderam, seis afirmaram que gostaram porque os ajudou a relembrar os conceitos e as representações daquele objeto matemático e um deles relata que:

E7: Como foi o meu primeiro contato com essas superfícies, para mim, foi de grande contribuição por ser licenciando em Matemática.

Fonte: Material da pesquisa

Este depoimento nos faz entender a importância da formação continuada para professores, pois assim como aquele estudante não se apoderou do conhecimento na graduação, outros tantos professores em exercícios podem se encontrar na mesma situação.

Solicitamos aos estudantes que destacassem os pontos fortes e os aspectos que poderiam ter sido aprofundados no terceiro encontro. Cinco deles mencionaram que a apresentação da professora generalizando os conceitos da Superfícies Quádricas foi bastante pertinente, pois “a metodologia permitiu uma troca de conhecimento entre o aluno e o professor” (relato escrito

do estudante E₅); dois acharam que as representações gráficas teriam ficado mais visíveis se a pesquisadora tivesse usado o GeoGebra e três deles não responderam.

Quando questionados sobre os conhecimentos mobilizados para o ensino formal das Superfícies Quádricas e a aplicação em contextos reais, cinco associaram aos objetos matemáticos: Função, Integrais Duplas, Centro de massa, Volume, e as Superfícies Quádricas. Quatro dos participantes descreveram conhecimentos diversos diferentes do contexto matemático: visualização das formas geométricas; expansão do olhar matemático para as formas que se apresentam no mundo, despertou o desejo de estudar cálculo sob um novo olhar e apenas um deles não respondeu o questionário.

Para o quarto encontro foi solicitado aos estudantes que comparassem a atividade “vaga de emprego” com os enunciados das atividades dos livros didáticos. Todos responderam que a atividade elaborada pela professora exigia criatividade para elaboração, enquanto, as dos livros requer procedimentos técnicos para resolvê-la. Os estudantes E₆, E₇ e E₁₁ respondem:

E7: Ao meu ver, temos muitas questões nos livros que são, basicamente, “calcule”. Não temos de pensar como iremos aplicar o CDI. Foi por isso talvez que não tenha conseguido fazer a questão.

E6: A atividade se diferencia quando “vaga de emprego”, faz o estudante elaborar e relacionar uma questão com o mundo real e aplicável, no livro é só resolver uma dada equação.

E11: Foi uma atividade contextualizada, que conduz o aluno a sua criação, edição e resolução. Já nos livros são questões mecânicas, que exigem apenas o cálculo.

Fonte: Material da pesquisa

A comparação feita pelos estudantes caracteriza a importância atribuída pela pesquisadora em estimular a criatividade dos cursistas, proporcionando-os uma atividade de coautoria. Esse rompimento com os modelos das tarefas proporcionadas pelos livros adotados são causas de estranhamentos por parte dos estudantes que se sentem desestabilizados ou, em alguns casos, estimulados com a autonomia facultada.

Quanto ao sentimento gerado ao criarem uma questão de CDI relacionada ao curso da graduação do qual são egressos, todos eles citaram ter dificuldades. Dois estudantes não responderam, cinco apenas citaram que tiveram dificuldades, mas não justificaram e, quatro dos pesquisados, assim responderam:

E8: Foi complicado, mas conseguir desenvolver. Aquilo me mostrou que estou no curso certo.

E11: Primeiramente senti dificuldades, pois sair da zona de conforto de apenas resolver, mas depois de elaborado uma aplicação a atividade fluiu tranquilamente.

E7: Bem, meu caso é Matemática. Tenho que quebrar algumas barreiras para ver melhor como aplicar todo o CDI.

E10: Criar uma questão é mais difícil do que responder, exige criatividade além do conhecimento.

Fonte: Material da pesquisa respondido pelos estudantes

Os participantes foram solicitados a relatarem as dificuldades que sentiram para resolver a questão elaborada, os resultados obtidos foram: dois estudantes não conseguiram encontrar um modelo matemático para a descrição da situação elaborada; um dos cursista achou restrito as fontes para uso de dados reais; um outro, descreve que a associação do parabolóide hiperbólico com a Engenharia Elétrica foi seu maior desafio e os seis participantes restantes mencionaram sobre a falta de memória para empregar as técnicas de Integração na tarefa criada.

Sobre os comentários dos estudantes sobre as questões inéditas elaboradas pela pesquisadora os dados coletados indicaram que: um deles achou relevante o debate dos dados do enunciado da Atividade 2; dois afirmaram que a contextualização da questão aborda um pouco de cada curso; um relatou que as questões traziam situações reais, o que foi motivador e interessante; um cursista achou bem elaboradas; dois descreveram como interessante e o fez pensar bastante; dois destacaram como interessante a relação do conteúdo do Ensino Superior com a do Ensino Básico.

Perguntados sobre as semelhanças e diferenças na definição da Integral Dupla fornecida: pelo livro didático, pela professora e pelos matemáticos puros, os estudantes responderam da seguinte forma: três não responderam; um relatou que o livro apresenta uma definição mais acessível; dois afirmas que distinguem na contextualização das tarefas para definir conceitos; cinco abordam a metodologia como um diferencial.

Quando solicitados sobre o aporte do curso para a responderem à questão Q₀, nove responderam que sim, um não respondeu. Sobre as justificativas dadas, três descreveram o estudo de objetos matemáticos (centro de massa, momento de inércia, integrais duplas, superfícies quádricas, catenárias) como fundamental para a resposta; cinco deles relataram a importância dos conteúdos da Física para a elaboração da resposta, dois partícipes não responderam à questão e um deles acrescenta:

P: Sim. Mas ainda tem mais conteúdos da área da física que podem ser analisados.

Fonte: Material da pesquisa

Este registro escrito vai ao encontro do que afirmamos anteriormente de que o desenvolvimento de um PEP, envolvendo uma questão aberta, pode proporcionar muitos caminhos investigativos e respostas temporárias, passíveis de serem modificadas a qualquer tempo. O estudante, ao afirmar sobre a existência de mais conteúdo da Física que poderiam ter sido abordados, abre perspectivas para pesquisas futuras.

Sobre as sugestões apresentadas, um dos cursistas exprime que deveria ter a participação de um aluno do curso de física que ajudaria a aprofundar nos conceitos de física; dois deles sugerem que os encontros deveriam ter ocorrido durante a semana; um deles explicita que deveria ter tido mais momentos com os profissionais dos diferentes cursos; um deles sugere o uso da impressora 3D para a visualização das figuras.

Quanto a avaliação geral do curso, dois estudantes não exprimiram a opinião; cinco relataram: o quanto foi enriquecedor o curso para a formação; para criar uma “nova visão do mundo do cálculo” (descrição da estudante E₆) e para entender sobre a aplicação do cálculo em outras áreas; um deles também mencionou que o curso mostrou como sair dos padrões do livro e exigir mais criatividade e, um dos cursistas, exprimiu:

E2: Excelente metodologia, aulas contextualizadas e com muitos recursos físicos que facilitam a compreensão.

Fonte: Resposta do estudante no questionário escrito da avaliação.

5.2.5.3 Síntese dos encontros

Ao final de cada encontro construímos as Matrizes da Linguagem e da Diversidade expondo uma visão geral dos elementos que foram analisados em áudios e em registros escritos no desenvolvimento do PEP.

Percebemos que nos dois primeiros encontros a linguagem contrafactual era predominante e os conceitos matemáticos abordados eram explorados de forma intuitiva, exaltando-os em uma linguagem oral e natural. As interpretações foram originadas por semioses articuladas entre os conhecimentos matemáticos, as áreas de conhecimento, a natureza, a estética, a arte e acabam por produzir significados matemáticos.

No segundo encontro quando os estudantes apresentam os registros escritos, “frutos” das investigações realizadas em diferentes meios, começou a aparecer o uso de signos representando os objetos não-ostensivos. As formas tridimensionais identificadas nas catenárias, nos elipsoides, entre outros, presentes nas obras de Gaudí, despertaram os estudantes

para que as relações com os objetos matemáticos e as representações algébricas das equações e gráficas das superfícies saltam aos olhos deles.

As onze dialéticas aparecem em momentos diferentes e foram justificadas à medida que surgiam. Os raciocínios abduativos, indutivos e dedutivos são evidenciados ao longo do PEP, bem como, as funções didáticas são avaliadas como restrições em alguns momentos. As atitudes do EDRI são destacadas, pois a praxeologia situacional perpassa por todas as etapas do PEP, a situação favorecida pelo curso, com as suas características peculiares: aqueles alunos, aquela investigadora, aqueles palestrantes, aquelas organizações didáticas e matemáticas planejadas, são únicas. E, portanto, as praxeologias mobilizadas são específicas para aquela circunstância.

As respostas a Q_0 e a avaliação do PEP preservam os significados mobilizados pelos estudantes de cada área, com a releitura de cada um deles. No próximo capítulo sintetizaremos a resposta dos estudantes à questão Q_0 e validaremos ou não as hipóteses deste estudo.

6 PUERTA DE LOS PAJAROS: adaptações e transgressão para outros voos

Ao firmar os olhos no horizonte, acreditamos que seríamos capazes de alçar voo. O primeiro pensamento, o signo que habita no interior da mente, nos moveu e então iniciamos a primeira semiose, buscando no mundo externo a materialização das nossas inquietações, que tomam forma na linguagem.

A linguagem é o produto de uma, ou várias, semioses em que o fenômeno é percebido pelo homem e a cria em diferentes singularidades. Por isso, entendemos que este estudo toma como base a linguagem, o raciocínio abdutivo e a semiose para entender o voo alçado.

Nosso primeiro capítulo, nos equipamos dos conhecimentos existentes no que se refere ao tema, Integral Dupla e sobre as teorias que usamos. Foi necessário identificar nos resultados das pesquisas selecionadas, o que poderíamos acrescentar, e o objetivo que pretendíamos alcançar. Criamos duas hipóteses para o estudo em que a linguagem, o raciocínio abdutivo, os significados e as praxeologias eram o guia para as atividades planejadas que seriam desenvolvidas nos outros momentos.

Para isso, apropriamos dos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático e da Semiótica peirceana buscando convergências entre eles e as encontramos na classificação dos tipos de objetos; na influência que os signos e seus significados exercem nas instituições de ensino; na cultura escolar, mais principalmente no tipo de linguagem usada pelo homem para se comunicar. Foi no processo de explicitar as semioses que ocorrem no ensino de um objeto que encontramos condições e restrições para a interpretação das praxeologias matemáticas no seu ensino.

A linguagem circunscreve o sistema didático, diferenciando-a de acordo com os seus três elementos, a linguagem do professor, a linguagem do estudante e a linguagem do objeto matemático. E as semioses desenvolvidas ora convergem e ora divergem no processo do ensino de um objeto matemático. Acrescentar esta dimensão ao problema didático, em torno do objeto a ensinar, é relevante para entendermos como as outras três dimensões – epistemológica, ecológica e econômica – estão sendo interpretadas, significadas na divulgação do saber.

Neste intuito, criamos a dimensão da linguagem a categorizando em quatro tipos: a linguagem dictarizada, a linguagem contrafactual, a linguagem em curso e a linguagem em (dis)

curso. Ao final deste estudo, foi possível identificar os aspectos¹¹⁷ pertinentes a cada uma delas, a saber: quanto a linguagem dictarizada a expressão (ou palavra) associada a Integral Dupla que reverbera na linguagem dos estudantes, é o volume. O rigor, como apresentado no Modelo de Ostragradsky, causa dificuldades para a compreensão do objeto matemático; no desenvolvimento das atividades propostas as praxeologias matemáticas mobilizadas pelos objetos ostensivos e não ostensivos se mostraram relevantes para a solução; os estudantes apresentaram a ambiguidade confiança x insegurança quanto à aplicação das técnicas, tecnologias e teoria ao resolverem tarefas propostas relacionadas ao tema.

Na linguagem contrafactual o sentido coletivo de se estudar a Integral Dupla está no cálculo de medidas de volume e das superfícies de sólidos, expressos em representações algébricas de funções com várias variáveis. No que tange ao que os estudantes poderiam criar com o objeto matemático, as situações problemas elaboradas por eles, trazem a aplicação em suas áreas da graduação. Assim, é possível encontrar, aplicações em telhados de construções civil, no formato da batata frita, e da sua embalagem, vendida nos mercados, entre outros. Ao perceberem o contexto de Gaudí como um ambiente em que os objetos matemáticos foram explorados nas formas tridimensionais perceberam a visão limitada que o “eu” tem da matemática.

Na linguagem em curso as variações da Integral Dupla em contexto de uso puderam emergir quando a professora/pesquisadora apresentou o modelo de Ostragradsky para os estudantes e um deles associou a necessidade para estudos continuados no seu processo formativo. Na atividade 2 foi possível identificar como houve variações nas interpretações das regras matemáticas apresentadas pelos dois grupos: o das Engenharias e o dos Licenciandos em Matemática.

No que tange a linguagem em (dis) curso diferentes interpretações surgiram: as relações com outras áreas de conhecimento, associações com objetos internos a matemática (como por exemplo, espaços de n dimensões), os sujeitos apropriados das tecnologias e teorias em torno da Integral Dupla questionaram a situação problema 1 apresentada na atividade 2, o que revela que o sujeito sujeitado (ARAÚJO, 2004, p.243) quando munido de justificativas pode criticar.

¹¹⁷ Esclarecemos que tais aspectos respondem as perguntas formuladas para o problema didático sob a vertente da linguagem apresentado no Quadro 1, deste estudo.

Os estudantes exprimem ao final do percurso de estudo que a Integral Dupla tem aplicações no “mundo vivo” que habitam e é relevante para inseri-la em contextos da profissão.

Para além da linguagem verificamos que para responder o problema didático proposto - Quais organizações matemáticas e didáticas precisam ser criadas para calcular as medidas das áreas de Superfícies Quádricas por intermédio da Integral Dupla na realização de um PEP? – se fez necessário o estudo epistemológico, econômico e ecológico.

No estudo da dimensão epistemológica estabelecemos a relação da Integral Dupla com os objetos ostensivos e não ostensivos que coabitam o seu ensino. E só então podemos construir o Modelo Epistemológico de Referência que guiou o desenvolvimento do PEP. Esse modelo tomou como aporte o saber da instituição de referência, os modelos de Euler, Ostrogradsky e Leithold apresentados no Capítulo III deste estudo. Esse caminho proporcionou à professora/pesquisadora conhecer de forma aprofundada o objeto a ser ensinado e elaborar a sua própria organização didática e selecionar quais objetos ostensivos e não ostensivos iriam ser utilizados para o ensino da Integral Dupla.

No estudo da dimensão ecológica foi possível identificar algumas restrições para o desenvolvimento do PEP, entre as limitações dos espaços físicos e dos recursos disponíveis; a greve deflagrada pelos professores; a quantidade de encontros destinado ao curso; a restrição causada pela Pandemia para repetir o PEP proposto; a inexperiência do professor/pesquisador com a metodologia de ensino. Quanto as condições favoráveis, citamos: a disponibilidade dos estudantes para participação do curso; o tema elegido para o PEP, pois tem ampla divulgação na mídia; a visita da professora/pesquisadora as obras de Gaudí que a fez apropriar dos detalhes das formas usadas pelo artista.

O estudo dos documentos oficiais nos proporcionou uma visão de como a Integral Dupla “vive” nas duas instituições de ensino em que os estudantes são egressos. E a análise praxeológica do livro de Leithold (1994), indicado como referência bibliográfica nas ementas dos cursos, nos permitiu identificar as organizações matemáticas e didáticas vigentes para o ensino daquele objeto matemático. Percebemos o emprego com maior predominância da linguagem dictarizada, representações gráficas e algébricas que promoveram raciocínios dedutivos. Entretanto, não encontramos indícios do emprego do raciocínio abduutivo, como tarefas que proporcionassem uma ideia inusitada, capaz de empregar o conceito em contextos distintos do matemático. As semioses produzidas finalizam ao responder as tarefas, as tarefas

não fomentam a pesquisa e nem aumentam o repertório de objetos matemáticos que poderiam ser usados como fonte de saber.

Essa análise também nos proporcionou verificar que o autor ao produzir a obra promoveu uma autorregulação da definição da Integral Dupla, pois emprega uma linguagem distinta do saber de referência, ou seja, do modelo de Ostrogradski. E uma autoregulação didática trazendo exemplos resolvidos para orientar os estudantes sobre as praxeologias matemáticas que podem ser utilizadas. De forma análoga, procedemos à análise do livro de Paulo Winterle (2000) que aborda o estudo das Superfícies Quádricas, presentes na ementa de AVGA ou GACV, entretanto, para cada uma das questões analisadas as reestruturamos, criando tarefas¹¹⁸ que promovessem a mobilização de praxeologias: matemática e situacional.

No que concerne a praxeologia situacional, a definimos como um conjunto de ações que visam uma transformação educacional para além das organizações matemáticas e didáticas que favorecem a ressignificação desses conhecimentos para o mundo e para o homem. Elas, são empregadas no uso das atividades profissionais e podem ou não conter objetos matemáticos de forma explícita. Destaca pela capacidade de produzir raciocínios abduativos desvinculados de julgamentos, são instáveis, efêmeros, livres e por isso são capazes de criar conceitos e ideias novas. São os *insights* que surgem de forma espontânea.

Para as organizações didáticas apoiamos nos fundamentos do *Percurso de Estudo e Pesquisa* (PEP), uma metodologia de ensino que se apoia em uma questão geradora, geralmente aberta. Esse dispositivo ocorre no transcorrer do ensino em que são produzidas perguntas intermediárias que fornecem informações parciais sobre o tema e quanto agregadas constituirão uma possível resposta para a questão original. Como o sistema didático fica aberto e sujeitos a novas informações as organizações didáticas ficam vulneráveis e podem ocorrer mudanças no seu planejamento.

Em nosso estudo, reconhecemos que ao induzir o meio fornecendo perguntas intermediárias a nossa questão original – Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? – desenvolvemos um PEP fechado (CHEVALLARD, 2017). Esta escolha ocorreu devido a quantidade de encontros acordados; a tensão eminente da ameaça de desistência (como de fato ocorreu); a inexperiência da professora/pesquisadora com a aplicação do PEP. A

¹¹⁸ As tarefas criadas consistem em exemplos de raciocínios abduativos do professor/pesquisador empregados em situações diferentes das propostas pelo livro texto.

possibilidade de aplicá-lo em outras circunstâncias foi cogitada, entretanto, a Pandemia instaurada no ano de 2020 inviabilizou um novo percurso.

Nossos sujeitos de pesquisa foram graduandos das Engenharias (civil, elétrica e ambiental) e da Licenciatura em Matemática, totalizando 12 participantes. O percurso de estudo ocorreu em cinco encontros presenciais, aos sábados, no período de março a abril de 2019. A organização didática concretizou-se em um percurso em um estudo e pesquisa que as atividades versaram por encontros com profissionais da área dos partícipes que discutiram a interação do cálculo no exercício profissional; em discussões com os participantes sobre a Integral Dupla; na construção de objetos de aprendizagem para a visualização da representação de sólidos e a criação e a solução de tarefas propostas sobre o tema.

Ressaltamos que as organizações didáticas que planejamos foram específica para aquele curso. Caso propuséssemos aplicar o PEP em um curso regular de uma das graduações seria necessário fazer algumas alterações na pergunta geratriz, ou buscar integrar as outras componentes curriculares em torno de um projeto único para o curso¹¹⁹. Essa articulação se justifica pelo tempo cronológico destinado as aulas nas graduações, é restrito a dois encontros semanais com duração de 100 minutos em um período de cinco meses; outro ponto é a exigência institucional de contemplar toda a ementa curricular prevista para as graduações. Essas restrições não inviabilizem a aplicação do PEP, pois constatamos em um dos questionamentos dos estudantes, que a pergunta proposta pode dar prosseguimento ao estudo de funções vetoriais, previsto na ementa do CDI daquelas instituições.

No que tange à razão de ser da Integral Dupla, verificamos que está associada ao cálculo de medida de volumes de sólidos. Tal conceito é previsto tanto para o ensino básico quanto para o exercício profissional dos engenheiros, com as devidas adaptações. Estudar aquele objeto para os licenciandos se justifica pela generalização científica que o conceito da Integral Dupla proporciona ao cálculo de medidas de volume dos sólidos da Geometria Espacial (esfera, cubo, entre outros). Outra perspectiva, é que alguns licenciandos ao término da graduação prosseguem seus estudos e precisam conhecer os objetos matemáticos de forma profunda e sob várias vertentes, são habilidades que podem ser favoráveis em um processo de seleção para o ingresso em uma pós-graduação.

¹¹⁹ Na Espanha os cursos das Engenharias têm um tema integrador em que todas as componentes curriculares buscam subsídios em suas respectivas áreas que possam contribuir para a solução das problemáticas levantadas.

No desenvolvimento do PEP fechado, que propomos, as perguntas iniciais sobre quem foi Gaudí e quais são suas obras, direcionaram o estudo e a pesquisa para os estudantes. À medida que apareciam vídeos e conversas no whatApp, os estudantes iam identificando as formas tridimensionais e as relações com seus respectivos cursos. No entanto, foi só no terceiro encontro que as Superfícies Quádricas são expressas por intermédio de suas representações algébricas e/ou gráficas e foram aplicadas ao reproduzir suas formas na construção do objeto de aprendizagem.

A partir desse momento, a definição intuitiva da Integral Dupla é construída e externada por um dos estudantes usando um material concreto e visual. Após a institucionalização do saber, as pesquisas sobre os conceitos de centro de massa e momento de inércia permitiram que eles associassem a Integral Dupla com o equilíbrio das forças que atuam nas estruturas físicas das obras de Gaudí e que tomaram a forma das Superfícies Quádricas.

Ao final do PEP, os estudantes construíram inicialmente as respostas individuais sobre a questão geratriz - Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? Em seguida, sintetizaram em uma resposta geral: *Gaudí demonstrou ter conhecimento de vários aspectos que poderiam prorrogar a “vida” das suas obras arquitetônicas: como a luz, a ventilação, a erosão causada pela água das chuvas, o solo, os tipos de materiais e as cores que usou. No cálculo estrutural optou por usar Superfícies Quádricas que se assemelhavam as formas da natureza, fonte de inspiração do autor. Ao reproduzi-las primava por construir maquetes usando sacos de areia que distribuía os pesos de forma equilibrada. E para obter a estabilidade das suas estruturas ele fazia o cálculo do centro de massa e do momento de inércia aplicando a Integral Dupla.*

Temos a consciência de que essa é uma das possíveis respostas para a pergunta Q_0 e como constatado por um dos estudantes, outros conhecimentos da Física e da Matemática poderiam ainda ser contemplados. No entanto, consideramos que se o objetivo do PEP era o estudo da Integral Dupla a partir das obras de Gaudí, ousamos afirmar que ele foi contemplado.

As atividades propostas aos estudantes foram originais, elaboradas pela professora/pesquisadora que considerou as praxeologias matemáticas e a praxeologia situacional que poderiam ser mobilizadas por eles ao resolverem. A Atividade 1 intitulada “vaga de emprego”, dos doze participantes do percurso de estudo e pesquisa apenas quatro a responderam. Quando questionados o porquê de não ter solucionado a tarefa, externaram que

tiveram dificuldades em produzir suas próprias questões. A inserção de um novo tipo de tarefa não habitual causa ruptura no contrato didático, como explica Almouloud (2007, p. 91-92):

Em geral, os problemas de matemática costumam ter em seus enunciados somente os dados necessários para a sua solução e ter sempre uma única resposta, obtida pelo uso de operações numéricas. Se o professor oferece aos alunos somente problemas deste tipo, quando se depararem com problemas que não tem solução, ou que têm mais de uma solução possível, ou que tem excesso de dados ou não são resolvidos com operações numéricas, certamente cometerão erros ou não saberão respondê-los. O fato de o professor mudar o tipo de problema utilizado pode ser considerado uma ruptura do contrato didático.

Ao analisá-las identificamos que a tarefa foi aplicada em situações do exercício profissional ou em situações reais do cotidiano do estudante e para respondê-las usaram as técnicas, as tecnologias e a teoria referente ao objeto matemático em estudo. Os modelos de atividade são inéditos, criados espontaneamente e, portanto, são exemplos de raciocínios abduativos.

Para a segunda atividade, as discussões ocorreram em torno do enunciado da situação problema 1, que tinha como objetivo calcular a medida da área da faixa de segurança de uma vegetação, cujo formato da montanha era uma Superfície Quádrica. Os estudantes da Licenciatura ao fazerem a leitura projetaram suas análises em torno do significado considerando a realidade. As ressalvas foram externadas no momento da socialização das respostas: *Então vocês consideraram o volume dentro da montanha e não a faixa solicitada?* A pergunta feita dirigia-se aos estudantes da Engenharia, que tomados de surpresa com o equívoco interpretativo concordaram com a estudante da licenciatura.

A elaboração de uma situação problema original demanda a interpretação de outras pessoas para que os equívocos sejam sanados. Ao propor aquela tarefa a professora/pesquisadora submeteu-os ao experimento para validar ou não aquela situação. A nossa avaliação é que desconsiderando a ambiguidade do enunciado ela propiciou um momento de discussão engrandecedor para aquele processo formativo, pois articula com o que consideramos como relevante no ensino da matemática a produção de significados para os entes matemáticos em diferentes situações.

A segunda situação problema da Atividade 2 traz um problema matemático do ensino básico para ser resolvido por meio de uma Integral Dupla, tal solução comprova que o

licenciando precisa adquirir o conhecimento do objeto matemático de forma profunda e saber como ele “vive” nas diferentes instituições de ensino.

Tomando como aporte o problema didático formulado para o nosso estudo – quais organizações matemáticas e didáticas precisam ser criadas para calcular as medidas das áreas de Superfícies Quádricas por intermédio da Integral Dupla na realização de um PEP? – consideramos que, no que diz respeito às organizações matemáticas a elaboração do MER foi essencial para a restrição da mobilização de objetos ostensivos e não ostensivos pertinentes e condizentes com a técnica, a tecnologias e a teoria relativa à Integral Dupla. Para a organização didática, aludimos que o desenvolvimento do curso, as atividades planejadas e os diálogos estabelecidos foram relevantes para o ensino do objeto matemático, como foi constatado nas respostas dos discentes para o questionário sobre a avaliação do curso.

Também constatamos no percurso que nos dois primeiros encontros há uma predominância da linguagem contrafactual, pois o diálogo não exigia regras matemáticas. A partir do terceiro encontro esta realidade se modifica, a linguagem dictarizada é empregada com mais veemência, pois os objetos ostensivos são mobilizados no intuito de representar os objetos não ostensivos, ou seja, o signo exercendo seu papel de mediação para a interpretação, a ação da semiose. Nesse sentido, foi possível comprovar a nossa hipótese, tecida no capítulo II deste estudo, de que existe uma proporcionalidade inversa das quatro linguagens em contextos de uso.

Na análise dos resultados do PEP construímos duas matrizes: a da linguagem e a da diversidade, formuladas a partir das duas hipóteses deste estudo. Seis elementos são usados para caracterizar a primeira, a saber: praxeologia, raciocínio, dialética, semioses, função didática e tipos de linguagem. Para a segunda, os significados, as interpretações e as atitudes são os três elementos que a compõem.

As informações provenientes das cinco matrizes da linguagem criadas nos permitiram constatar, em diferentes momentos, os três tipos de praxeologia: a matemática, a didática e a situacional; os três tipos de raciocínios: abdutivo, dedutivo e indutivo; as onze dialéticas, incluindo a dialética da pessoa e da situação que contempla a análise da praxeologia situacional; as semioses do tipo relacional, complexa, entre outras; as funções didáticas relacionadas ao meio, a cronogênese, a mesogênese e a topogênese e os quatro tipos de linguagem, a dictarizada, a contrafactual, em curso e em (dis) curso.

No ensino da Integral Dupla as organizações didáticas, matemáticas e a situacional proporcionaram semioses múltiplas, em diferentes contextos, que foram externadas pelos estudantes na forma de linguagem. E é ela que tece uma teia de significados expostos na oralidade, na escrita, na visualização e nas percepções identificadas ao meio da transcrição dos áudios e da visualização da gravação das aulas dos estudos e pesquisas.

Mas, a linguagem também está presente na mobilização de signos usados nas praxeologias matemáticas empregadas na solução das tarefas envolvidas nas atividades, nos raciocínios abduativos quando os estudantes criam situações problemas, quando articulam argumentos para convencer o outro; quando percebem a presença de objetos matemáticos em contextos não matemáticos; quando identificam as dialéticas nas ações e as restrições e condições que o meio fornece para as funções didáticas.

Para além destes aspectos, a linguagem desempenha o papel de comunicar e difundir os saberes adquiridos, empregando-os em contextos matemáticos e extra matemáticos. Sem a dimensão da linguagem na análise do problema didático, o ensino do objeto matemático dificilmente acontece e não tem como concatenar regras matemáticas com os seus respectivos objetos ostensivos e não ostensivos sem a semiose; as representações dos objetos matemáticos ficam limitadas ao expressar o saber sem o uso da escrita, da oralidade e da visualização.

Para o paradigma do questionamento do mundo a linguagem exerce um papel relevante para alcançar o equilíbrio para as quatro linguagens que permeiam o ensino de um objeto matemático e a inclusão da dimensão da linguagem no problema didático faz-se necessária.

Captar os significados, as interpretações e as atitudes dos estudantes é o objetivo da matriz diversidade. Desde o primeiro encontro os estudantes pontuaram as percepções distintas sobre a Matemática entre os dois cursos: a Engenharia utiliza como uma ferramenta no exercício da profissão, enquanto, a Licenciatura a utiliza para o seu ensino. Outro ponto considerado pelos estudantes, é que o espaço físico na visão dos futuros engenheiros permite projetar uma imagem de um prédio a construir, enquanto para os licenciandos é uma forma, um exemplo de uma figura geométrica, ou uma situação que pode ser modelada e representada por uma equação algébrica.

Nas atividades a diferença de significados também se fez presente. Na tarefa “vaga de emprego” os estudantes da Engenharia aplicaram o objeto matemático em situações provenientes do curso em que são matriculados. Os licenciandos aplicaram em contextos para

o ensino de um determinado objeto, preservando semelhanças com os livros didáticos adotados no ensino básico, como por exemplo, os formatos das embalagens.

Na segunda atividade houve diferença na interpretação do enunciado entre os dois grupos. Os licenciandos questionaram as informações dadas e associaram ao contexto em que foram empregados. Os da Engenharia aplicaram as praxeologias matemáticas referentes ao cálculo da medida de uma superfície utilizando a Integral Dupla sem verificarem o significado do que produziam.

Nos dois grupos foi possível identificar as características do EDRI, que foram observadas nas atitudes expressas na participação dos debates, das discussões no percurso de estudo e pesquisa e nas ações de semioses proferidas na oralidade ou nas soluções das atividades.

Após a aplicação do dispositivo do PEP e a análise dos resultados constatamos que as duas hipóteses de pesquisas são válidas, pois as inferências apresentadas nas matrizes da linguagem e da diversidade propiciam argumentos coerentes que nos permitiram comprová-las.

No roteiro do voo precisamos fazer pausas, o pouso nos propícia transgredir a percepção do que alcançamos e definir novas metas. Este estudo nos conduziu a três sugestões para a metodologia do estudo e pesquisa para o ensino da Integral Dupla, a saber:

- Nas ementas das componentes curriculares (CDI -I, II, III e IV) a Integral Múltipla é geralmente ensinada após as definições de Funções de Várias Variáveis e das Derivadas Parciais, no Cálculo III. Na ementa do Cálculo II consta o estudo das Integrais Definidas em uma única variável. Nossa sugestão é que elas sejam ensinadas no mesmo período, pois as técnicas da integração estariam na memória ostensiva (MATHERON, 2018, p.80) o que facilitaria sua expansão para a solução das Integrais Múltiplas.
- A aplicação do PEP¹²⁰ em uma turma regular de Cálculo III das Engenharias e da Licenciatura em Matemática, isoladamente, com o intuito de verificarmos se as hipóteses validadas ocorrem em outras circunstâncias. Para isso manteríamos a organização matemática e faríamos ajustes nas organizações didáticas. Como por

¹²⁰ A experiência será desenvolvida no ensino remoto no período de junho a setembro de 2021 com o CDI-III no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia, campus de Vitória da Conquista, em que a pesquisadora principal desta pesquisa ministra aulas da disciplina.

exemplo, propor atividades que otimizem os resultados, pois a quantidade de discentes na componente curricular nos Institutos Federais ultrapassa o total de 50 alunos.

- As tarefas criadas e respondidas pelos estudantes no desenvolvimento do PEP devem servir como modelos para os futuros estudantes. Para isso, é necessário publicar a produção dessas situações problemas, em uma coletânea. As interpretações equivocadas dos enunciados devem ser corrigidas pelos colegas, sem a identificação do texto, para que a linguagem dos estudantes seja considerada ao expressar o raciocínio abdutivo. Posteriormente um grupo de professores avaliará a coerência com os conceitos, praxeologias e significados mobilizados para o ensino da Integral Dupla.

Considerando as articulações tecidas entre as duas teorias, Semiótica peirceana e a TAD, os resultados deste estudo propomos cinco questões para futuras pesquisas:

- Quais as diferenças interpretativas podem ser evidenciadas na linguagem usada pelo professor e pelo estudante no ensino de funções, na Educação Básica?
- Quais avanços científicos são identificados quando os temas do Cálculo Diferencial e Integral fazem parte de um projeto integrador com as demais componentes curriculares do curso das Engenharias?
- Como as tarefas criadas pelos estudantes, em diferentes níveis de escolaridade, favorecem a criatividade e a aprendizagem dos objetos matemáticos?
- Quais propostas podem ser implementadas no ensino das Equações Diferenciais Ordinárias para que a linguagem contrafactual seja evidenciada?
- Como os professores de matemática do ensino básico avaliam a linguagem que utilizam para incentivar a criatividade dos estudantes?
- Como avaliar os modelos matemáticos construídos pelos professores do ensino básico a luz da Teoria das Situações Didáticas?

Consideramos que os resultados destas pesquisas podem contribuir para o ensino dos objetos matemáticos evidenciando a linguagem, as semioses e o raciocínio abdutivo.

Ao final do estudo temos a certeza de que o tempo do pouso é breve, pois o ser que se reconhece um eterno aprendiz e que confia nas suas asas não demora para aventurar-se em novos voos.

PARQUE GÜELL: as referências nos vários caminhos

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ÁLVAREZ, A. B.V.; A, J.R.V. ¿ Á que tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Una análisis de libros de textos. **Educación matemática**. v.29, n.23, dec.2017.

ARAÚJO, I. L. **Do signo ao Discurso**: introdução a filosofia da linguagem. São Paulo: Parábola Editorial, 2004.

ARISTÓTELES. **ÓRGANON**: categorias, da interpretação, analíticos anteriores, analíticos posteriores, tópicos, refutações sofisticas/ Aristóteles; tradução, textos adicionais e notas de Edson Bini/ São Paulo: Edipro, 3. Ed., 2016. (Série Clássicos Edipro)

ARTIGUE, M.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Research praxeologies and Networking Theories. CERME 7, 2011. Disponível em: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/16/CERME7_WG16_Artigue.pdf. Acesso em 07 de janeiro de 2019.

AUSTIN, J.L. **How to do things with words**. London: Oxford University Press, 1962. Disponível em: http://pure.mpg.de/rest/items/item_2271128/componente/file_2271430/content. Acesso em: 13 de ago. de 2019.

AUSTIN, J.L. **Quando dizer é fazer**. Tradução de Danilo Marcondes de Souza Filho. Porto Alegre: Artes Médica, 1990.

BACHELARD, G. **O novo espírito científico**. Lisboa: Edições 70, 1996. O novo espírito científico. Lisboa: Edições 70, 1996.

BALACHEFF, N. Conception, propriete ou systeme sujet/milieu. **Séminaire de léquipe DidaTech**, IMAG, 1995, Grenoble, France. P. 219-244. Disponível em: hal.archives-ouvertes.fr. Acesso em: 06/01/2019.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, nov./ dez, p. 389-407, 2008

BARTHÉLEMY, G. **2500 anos de Matemática**: a evolução das ideias. Lisboa: Ellipses Édition Marketing, 1999.

BARUFI, M.C.B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. 195p. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BERTALANFF, L.V. Teoria general de los sistemas: fundamentos, desarrollo, aplicaciones. Tradução de Juan Almela. Fondo de Cultura Econômica: México, 1968. Disponível em:

https://cienciasyparadigmas.files.wordpress.com/.../teoria-general-de-los-sistemas-_-fu...

Acesso: 30/10/2018.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, Maria A. V. (org). **Filosofia da educação matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: UNESP, 2010.

BISOGNIN, E.; FONTOURA, L. F. Um aplicativo computacional para o ensino de Integral. **Revista Novas Tecnologias Na Educação**. Rio grande do Sul: v. 14, n. 2, 2016.

BOSCH, M; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 19, n. 1, 1999, p. 77-124

BOSCH, M; GÁSCON, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación. **Anais do II Congresso Internacional da Teoria Antropológica do Didático**, 2010.

BOLEA, P., BOSCH, M. & GASCÓN, J. Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas. **Educación Matemática**, 2001, v.13, n.3, p. 22-63.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2 ed,1996.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei Federal nº 9.394**. Brasília: Senado Federal, 1996.

BRASIL. **RESOLUÇÃO CNE/CP Nº 2, DE 20 DE DEZEMBRO DE 2019**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação), 2019.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didática da Matemática**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 35-113.

BROUSSEAU, G. Les représentations: étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, Vol. XXX, n. 2, 2004, p. 241 à 277.

BROUSSEAU, G. A etnomatemática e a teoria das situações didáticas. **Educação Matemática e Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n.2, pp. 267-281, 2006.

BRUNETTI, F. **Mecânica de Fluido**. 2. Ed. Rev. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

BUNGE, M. A. **Treatise on Basic Philosophy**. V. I. Dordrecht: Reidel, 1974.

CABRAL, M.A.P. Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue. 3ª edição, 2016. Disponível em: www.dma.im.ufrj.br > ~mcabral > textos. Acesso: 18/03/2019.

CAMARENA, P. Constructos teóricos de la metodología Dipping em el área de la matemática. **Atas**. 3º Congreso Internacional de ingeniería electromecánica y de sistemas, 2004.

CAMARENA, P. A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el contexto de las Ciencias. **Innovación educativa**, v.13, n.62, mayo-agosto, 2013.

CAMPOS, F. O. As organizações e os sistemas abertos e fechados e a emergência: uma análise conceitual. In: XXXIV Congresso Brasileiro de Ciências da Comunicação, 2011, Recife. **Anais...** Recife: Intercom, 2011, p. 1-15.

CAPRA, F. **O Ponto de Mutação: A ciência, a sociedade e a cultura emergente**. 27ª ed. São Paulo: Cultrix, 2006

CÁRDENA, P.O.R. Mathematical structuralism, continuity and Peirce’s diagrammatic reasoning.2012. Disponível em: <http://www.academia.edu>. Acesso em: 09/09/2019.

CARIUS, A. C.; FERREIRA, G. P. O Cálculo Diferencial e Integral e suas dificuldades: uma abordagem interdisciplinar para estudantes de Engenharia. **Anais**. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, innovación y educación. Buenos Aires: Argentina. 2014.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. A noção de variável no modelo praxeológico. In: ALMOULOU, S. A.; FARIAS, L.M.; HENRIQUES, A. (org.). **A teoria Antropológica do Didático: Princípios e Fundamentos**. 1.ed. Curitiba: PR:CRV, 2018, p. 119-134.

CHEVALLARD, Y. Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante. **Recherches La politique de la l’ignorance. Mathématiques - Enseignement - Société**, n. 41, septembre 1980, pp. 71-99.

CHEVALLARD, Y. Pourquoi la transposition didactique? Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l’IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les **Actes** de l’année 1981-1982, p. 167-194.

CHEVALLARD, Y. Esquisse d’une théorie formelle du didactique. 1988. em <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em 29/03/2021.

CHEVALLARD, Y. L’ampliació del camp didàctic i la difusió social de les matemàtiques, 1991. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em 29/03/2021.

CHEVALLARD, Y. Ostensifs et non-ostensifs dans l’activité mathématique. 1994. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em 29/03/2021.

CHEVALLARD, Y. Les outils sémiotiques du travail mathématiques. **Petit x**. n.42, 1995-1996, pp. 33-57.

CHEVALLARD, Y. Organisations didactiques: 1. les cadres généraux, 1998. Disponível em :http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_1_1998_.pdf. Acesso em 21/06/2021.

CHEVALLARD, Y. L’analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologiques du didactiques des mathématiques. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. ; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas** : o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre : Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. 3. Ecologie & regulation. **Actes** do XIe école d'été de didactique des mathématiques. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002, p. 41-56.

CHEVALLARD, Y. Le sujet apprenant entre espace et dispositif . Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique. 2010. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em 29/03/2021.

CHEVALLARD, Y. Éléments de didactique du développement durable. Leçon1. Enquête codisciplinaire & EDD. (2012). Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em 20 de dezembro de 2020.

CHEVALLARD, Y. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, jun. 2013, v. 2, n. 2, p. 161-182, Disponible en: <<http://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/631/pdf>>. Acesso em: 5 de Janeiro de 2020.

CHEVALLARD, Y. Sur les praxéologies de recherche en didactique. 2015. Disponível em:< <http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em 15 fev. de 2018.

CHEVALLARD, Y. Teaching Mathematics in Tomorrow's society: a case for an oncoming. Proceedings of the 12^a International Congress on Mathematical Education (12 ICME). 2015. Disponível em: yves.chevallard.free.fr. Acesso 6 de julho de 2019.

CHEVALLARD, Yves. ¿Por qué enseñar matemáticas em secundário? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1), 2017. p. 159-169

CHEVALLARD, Y. A Teoria Antropológica do Didático face ao professor de Matemática. In: ALMOULOU, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Orgs.). A Teoria Antropológica do Didático: Princípios e Fundamentos. Curitiba, PR: CRV, 2018, p. 21- 40.

COMETTI, M. A. **Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis**: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem- Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto, 2018.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial** COVIAN, O.; CANTORAL, R. La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción. 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/271198372_La_formacion_matematica_de_futuros_profesionales_tecnicos_en_construccion. Acesso em 19 de junho de 2021.

e Integral. Tradução de Alberto Nunes Serrão. 3.ed., v.I e II. Porto Alegre: Editora Globo, 1958.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução de Magda Lopes; 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DALL'ANESE, C; TRENTIN, P.H. A aprendizagem significativa no Cálculo Diferencial e Integral: relato de experiência com abordagem de problemas de taxa de variação na formação de Engenheiros. **In: GODOY, E. V. et al (orgs). Ensino e aprendizagem de matemática na educação superior: inovações, propostas e desafios**. Rio de Janeiro: Alta Bookx, 2018.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F; IORI, M. Primeiros elementos de Semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DELEUZE, G. **Proust e os signos**. Trad. de Antonio Carlos Piquet e Roberto Machado. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1987.

DOMECQ, N.I.; BERENGUER, I.A.; SÁNCHEZ, A.G. La dinámica interdisciplinar del proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en la carrera Ingeniería Civil. **Transformación**. 2018, v.14, n.2, p.214-225,

DOMINGUES, I. O coordenador pedagógico e a formação contínua do docente na escola: algumas perspectivas. **Revista de Educação**. Campinas, SP: v. 18, n. 2, 2013

DOMINGUEZ, G. L.; BOAS, J. V.; BARBOSA, J.C. O cálculo de volumes de sólidos por seções transversais e o uso de materiais manipuláveis. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Petrópolis, 2012.

DOUGLAS, M. Como as instituições pensam. Tradução: Carlos Eugênio Marcondes de Moura, - 1ª ed., 1. reimpr. – São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2007. (Ponta, 16)

DRIGO, M. O. Matemática como linguagem. **Quaestio - Revista de Estudos em Educação**, v. 2, n. 2, p. p. 91-104, 2002.

DRIGO, M.O. **Aulas de Semiótica Peirceana**. São Paulo: Annablume, 2013.

DUVAL, R. Semiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

EULER, L. **Institutiones Calculi Differentialis**. Ticini: Galeazzi, 1770. Disponível em: <https://www.e-rara.ch/search>. Acesso em: 07/02/2019.

FABBRICHESI, R. O pensamento icônico e diagramático na obra de Peirce. In: QUEIROZ, J.; MORAES, L. (orgs.). **A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: implicações em ciência cognitiva, lógica e semiótica**. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2013.

FARRÁS, L.E.P. **La matemática aplicada a la ingeniería: una aventura del pensamiento**. 2013. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/318153305/Matematica-Aplicada-Al-15-AGOSTO-13-FINAL>. Acesso em 04/09/2019.

FARIAS, E.S.; FUNATO, R.L.; CATTAL, A. P. Análise de elementos institucionais visando a prototipagem rápida na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas. **Atas do I Simpósio Latino Americano de Didática da Matemática**. Bonito: Mato Grosso do Sul, 2016.

FAZENDA, I. **Didática e Interdisciplinaridade**. Campinas, SP: Editora Papirus. 12ª ed.1998.

FLOOD, R.; WILSON, R. **A história dos grandes matemáticos**: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos Grandes Matemáticos. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2013.

FLORES, T. M. Agir com palavras: a Teoria dos Actos de Linguagem de J. Austin. 2013. Disponível em: www.bocc.ubi.pt/pag/flores-teresa-agir-com-palavras.pdf. Acesso em 13 de agosto de 2019

FONTES, R. **Análise de casca de alvenaria cerâmica armada: tipo paraboloide hiperbólico**. 2005. 121p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – UFMG, Belo horizonte, 2005

FREGE, G. Sobre a Justificação científica de uma conceitografia: os fundamentos da aritmética. Tradução de Luís Henrique dos Santos.- 2 ed. – São Paulo: Abril Cultural, 1983.

FREGE, G. Sobre o sentido e a referência. Tradução do artigo por Tradução de Sérgio R. N. Miranda (UFPO) e publicado em: FUNDAMENTO – Rev. de Pesquisa em Filosofia, v. 1, n. 3, maio – ago. 2011. Disponível em: <http://www.revistafundamento.ufop.br/index.php/fundamento/article/download/46/37>. Acesso em 30/10/2018.

FROTA, M.C.R. Leitura e escrita em Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**. v.13, n.3, p 489-508, 2011.

GARCÍA, L., AZCÁRATE, C., MORENO, M. Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [RELIME]**, 9(1), 85-116, 2006.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de um problema didáctico: el caso da álgebra elemental. **Relime**, v.14; n.2, México, jul. 2011. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004. Acesso 02 de julho de 2019.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, mar. 2014.

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. Economía, ecología y normatividade em la teoria antropológica de lo didáctico. V congreso internacional de la TAD. Castro Urdiales, 2016.

GONTIJO, C. H. et al. **Criatividade em matemática**: conceitos, metodologias e avaliação. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2019.

GONZALEZ, M.E.Q; HASELAGER, W.P.F.G. Raciocínio abdutivo, criatividade e auto-organização. **Cognitio**. São Paulo, n.3, nov.2002, p.22-31.

GOTTDIENER, M. **Postmodern semiotics**: material culture and the forms of postmodern life. Oxford: Blackwell, 1995.

GRANGER, C. W. J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. **Econometrica**, v. 37, p. 424-438, 1969.

GRANGER, G. **Formes, opérations, objets**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1994.

GRANGER, G. **Filosofia, Linguagem e Ciência**. Tradução: Ivo Storniolo e José Luiz Cazarotto. Aparecida, SP: Editora Ideias & Letras, 2013. – (Coleção Filosofia e História das Ciências). Título original: Philosophie, langage, Science.

GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de Cálculo**. V.3. 5.ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2013.

HENRIQUES, A. Um estudo de superfícies e de Integrais Múltiplas em ambiente computacional. **Anais**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife. 2004.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage dès intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage Du logiciel Maple**. 2006, 500f. Tese (Doutorado em didática da matemática), Université Joseph Fourier –Grenoble, 2006.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J.P.; FARIAS, M. S. Referências Teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com o auxílio do software Maple. **Educação Matemática e Pesquisa**. v. 9, n.1, p. 51-81. São Paulo, 2007.

HENRIQUES, A.; NAGANINE, A.; NAGANINE, C.M.L. Reflexões sobre análise institucional: o caso do ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1261-1288, dez. 2012.

HENRIQUES, A.; SERÓDIO, R. Intervenção de Tecnologias e nocões de registros de representação no estudo de Integrais Múltiplas na licenciatura em Matemática. **Anais**. VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática. São Carlos, SP. 2013.

HERRERO, Angel. **Semiótica y creatividad**: La lógica abductiva. Madrid: Palas Atenea, [1988?].

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R; NASSER, L. Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 11-26, 2009.

JORGE, A.M.G. Pensamento Diagramático na Ssemiótica de Charles S. Peirce. Anais do XXV Congresso Brasileiro de Ciência da Computação. Salvador, Ba. 2002

JURADO, Alfredo Tenoch Cid. Uso e función em el estudio de los objetos. Inventio: la génesis de la cultura universitária de Morelos. V.11, n.25; 2015

KHUN, T. S. The structure of scientific revolutions. 2^a ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1962. Disponível em: https://projekintegracija.pravo.hr/download/repository/Kuhn_Structure_of_Scientific_Revolutions.pdf. Acesso em: 02 de julho de 2019.

LACROIX, S. **Traité du calcul différentiel et du calcul integral**. 1810. Disponível em: <https://www.e-rara.ch/search>. Acesso em: 07/02/2019.

LEHMANN, C.H. **Geometria Analítica**. Tradução de Ruy Pinto da Silva Siegzkowski. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução: PATARRA, C. C. 3. ed. São Paulo: Editora Habra, 1994.

LICERA, R.M.; BASTAN, M.; BOSCH, M.; GASCON, J. La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza secundaria. **In:** BOSCH, M.; GASCÓN, J.; RUIZ OLARRÍA, A.; ARTAUD, M.; BRONNER, A.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G.; LADAGE, C.; LARGUIER, M. (Ed.). Un panorama de la TAD. Barcelona: CRM Documents, 2011. p. 695-718.

LIMA, E. L. **Medida e forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

LINSKY, L. **Le problème de la référence**. Paris: Du Seuil, 1967.

LUCA, N. **Mecânica Celeste**. Curitiba: Editora da Universidade Federal do Paraná, 1982.

LUFT, L. Pensar é transgredir. 7^a ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

MAIOLI, M. A. **A contextualização da matemática do Ensino Médio**. 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2012.

MARIOTTI, H. **Pensamento Complexo**. São Paulo: Atlas, 2007. 203 p.

MARTÍNEZ-PLANELL, R.; TRIGUEROS, M.G. Students' relating of integrals of functions of two variables and Riemann sums. **Anais. PME** 41, p. 225-233, 2017.

MATHERON, Y.; MERCIER, A. Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique: étude de quelques effets mémoriels. 2004. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/237751527_Les_usages_didactiques_des_outils_semiotiques_du_travail_mathematique_etude_de_quelques_effets_memoriels. Acesso em 19/06/2021.

MATHERON, Y. Uma teorização antropológica da memória didática em Matemática. **In:** ALMOULOU, S.A.; FARIAS, L.M.S.; HENRIQUES, A. A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos. 1.ed. – Curitiba, PR: CRV, 2018.

MEDEIROS, L.A.; MELLO, E.A. **A integral de Lebesgue**. Rio de Janeiro: UFRJ-IM, 2008.

MORAIS, I. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P.F. Análise de situações de volume em livros didáticos do ensino médio à luz da teoria dos campos conceituais. **Educação Matemática Pesquisa**. v.16, n.1, 2014.

MORIN, E. **Introdução ao Pensamento Complexo**. 5 ed. Lisboa: Instituto Piaget, 2008. 177p.

MOSCOSO, J. N. Razonamiento abductivo: una contribución a la creación del conocimiento em educación. **Cadernos Pesquisa**. São Paulo. v.49. n.171. p. 308-328. Jan./mar. 2019.

NEUENFELDT, A. E.; et al. A construção de objetos de aprendizagem como metodologia ativa para o ensino de integrais duplas. **Revista Thema**. v.15, n.1, p. 350-362, 2018.

OSTROWER, Fayga. Criatividade e processos de criação. 30. Ed. – Petropolis: Vozes, 2014.

PECHARROMAN, C. El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. 2014 Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/317440198_El_aprendizaje_y_la_comprension_de_los_objetos_matematicos_desde_una_perspectiva_ontologica. Acesso em 19/06/2021.

PEIRCE, C.S. **The collected Papers of Charles S. Peirce**. Vols.I-IV, VII-VIII, 1958.

PEIRCE, C.S. **Escritos Coligidos**. Seleção de Armando Mora D'Oliveira. Tradução de Armando Mora D'Oliveira e Sérgio Pomerangblum. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

PEIRCE, C.S. **Semiótica**. Tradução de: José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005 – (Estudos; 46/ dirigida por J. Guinsburg)

PISKOUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Tradução de Antônio Eduardo Pereira Teixeira e Maria José Pereira Teixeira. v.II, 3. ed. Porto: Edições Lopes da Silva, 1997.

PINO, C.D. **Dialéctica de la persona, dialéctica de la situación**. Barcelona: Nexos, 1992.

PONTES, H.M.S.; FINCK, C.B.; NUNES, A.L.R. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.19, n.1, p.297-335, 2017.

POPPER, K. R. **Lógica das Ciências Sociais**. Tradução de Estevão de Rezende Martins, Apio Cláudio Muniz Acquarone Filho, Vilma de Oliveira Moraes e Silva. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro; Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1978. (Biblioteca Tempo Universitário; 50).

PRESMEG, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 205-236). Rotterdam: Sense.

- PRESMEG, N. et al. **Semiotics in Theory and Practice in Mathematics Education**, 2016. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/301258022_Semiotics_in_Theory_and_Practice_in_Mathematics_Education. Acesso em 19/06/2021.
- QUINE, W. V. O. Word and Object. Massachusset: Mit Press, 1960. Disponível em: <https://epdf.tips/download/word-and-object-studies-in-communication.html>. Acesso: 30/10/2020.
- RADFORD, L. Signs and meanings in students' emergent algebraic, 2001. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226561253_Signs_and_meanings_in_students'_emergent_algebraic_thinking_A_semiotic_analysis. Acesso em: 19/06/2021.
- RADFORD, L. On semiotics and education. **Éducation et Didactique**, 7(1), 2013. Pp 186-204.
- REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista. São Paulo, 2003.
- ROBARDET, G.; GUILLAUD, J.C.; **Eléments de didactique des sciences physiques: de la recherche à la pratique: théories, modèles, conceptions et raisonnement spontané**. Paris: Presses universitaires de France, 1997.
- ROMO VÁZQUEZ, A. Projetos D'ingénierie : Étude D'une activité pratique dans la formation d'ingénieurs. **Anais de Didactique et sciences Cognitives**. v. 15. 2010.
- ROMO VÁZQUEZ, A. ; CHÁVEZ, O. C. Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas **Inovacion Educativa**. V.17, n.73, 2017.
- ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SANTAELLA, L. Matrices da linguagem e pensamento: sonora, visual verbal. 3. Ed. – São Paulo: 2005.
- SANTAELLA, L. O que é semiótica. 25. reimp. São Paulo: Brasiliense, 2009.
- SANTAELLA, L. Semiótica Aplicada. São Paulo: Cengage Learning, 2015.
- SANTAELLA, L.; VIEIRA, J. de A. **Metaciência**. Guia para a pesquisa. Uma proposta semiótica e sistêmica. São Paulo: Mérito, 2008.
- SANTIAGO, F. **Utilização do método da Integral Dupla em problemas de condução de calor unidimensional em regime transitório**. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal de Campinas. Campinas, São Paulo. 2012.
- SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática: notas de aula**. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SEDGWICK, W.T.; TYLER, H.W. **História da Ciência:** desde a remota antiguidade até o alvorecer do século XX. Tradução de Leonel Vallandro. Porto Alegre: Editora Globo, 1950.

SEVERINO, A. J. O conhecimento pedagógico e a interdisciplinaridade: o saber como intencionalização da prática. **In:** FAZENDA, I.(org.) Didática e interdisciplinaridade. 17ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2012 – (Coleção Práxis)

SALGADO, R. S. A performance da etnografia como método da Antropologia. **Antropológicas**. n. 13, 2015. Disponível em: revistas.rcaap.pt > antropológicas > article > view

SILVA, E. P. A Trajetória do Cálculo e da Disciplina Matemática do IFSP: das Escolas de Aprendizizes Artífices ao CEFET-SP. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

SILVA, S. F.; MORETTI, M.T. Registro em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 1, p.294-314, 2018a

SILVA, S. F.; MORETTI, M.T. A abordagem de interpretação global e na aprendizagem das superfícies quádricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p.283-308, 2018b.

SILVEIRA, M. A. A. Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. – (coleção contextos da ciência)

SIPLE, I.Z.; FIGUEIREDO, E.B. Um olhar à aplicação das Integrais Múltiplas: da projeção gráfica a maquete. **Anais**. VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática. Montevideo: Uruguai. 2013.

SKOVSMOSE, O. Um convite a educação matemática crítica. Tradução de Orlando Andrade Figueiredo – Campinas, SP: Papirus, 2014. – (Perspectivas em Educação Matemática)

SOUSA, L. C. P.; DRIGO, M. O. **Aulas de Semiótica peirceana**. São Paulo: Annablume, 2013.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1986

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STRAUSS, C.L. Structuralism and ecology, 1973. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/053901847301200101>. Acesso em: 19/06/2021.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução de Alfredo Alves de Farias, com a colaboração dos professores Vera Regina L.F. Flores e Márcio Quintão Moreno. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

THOMAS, G. B.; WEIR, M.D.; HASS, J. **Cálculo**. Tradução de Carlos Scalici; revisão técnica Claudio Hirofume Asano. – 12. ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

TREVISAN, A.L. Derivada, Integral... Limite no final: uma proposta para aulas de Cálculo. 2015. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/293644605_derivada_integral_limite_no_final_uma_proposta_para_aulas_de_calculo. Acesso: 19/06/2021.

VASCONCELLOS, M. J. E. **Pensamento Sistêmico**. 8 ed. São Paulo: Papirus, 2009. 268 p.

VERGANI, T. A criatividade como destino: transdisciplinaridade, cultura e educação. Orgs. Carlos A. Farias, Iran Abreu Mendes, Maria da Conceição de Almeida. Tradução de Edgard de Assis Carvalho. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

VERRET, M. Le temps des études. Paris: Honoré Champion, 1975.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

APÊNDICE A – Folder da divulgação do curso

EXCERTO	PROGRAMAÇÃO
De Excerto: Data: 09/04/2024 Fórmula: 12 horas	Programa: "Três "Seres", a "cidade e a cidade". - Mesa redonda com Engenheiros, arquitetos e matemáticos. - Debate sobre as perspectivas atuais da física, matemática e ciência, com a proposta de um projeto científico e de um encerramento final. - Atividades específicas.
De Excerto: Data: 09/04/2024 Fórmula: 12 horas	Programa: "Três "Seres", a "cidade e a cidade". - Debate sobre as perspectivas atuais da física, matemática e ciência, com a proposta de um projeto científico e de um encerramento final. - Atividades específicas.
De Excerto: Data: 09/04/2024 Fórmula: 12 horas	Programa: "Três "Seres", a "cidade e a cidade". - Debate sobre as perspectivas atuais da física, matemática e ciência, com a proposta de um projeto científico e de um encerramento final. - Atividades específicas.
De Excerto: Data: 09/04/2024 Fórmula: 12 horas	Programa: "Três "Seres", a "cidade e a cidade". - Debate sobre as perspectivas atuais da física, matemática e ciência, com a proposta de um projeto científico e de um encerramento final. - Atividades específicas.



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA/NE
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP

(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas.



Data: 26/03 a 27/04
Carga Horária: 30 horas
Público Alvo: Estudantes dos cursos das Engenharias, Arquitetura e Licenciatura em Matemática
Local: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Responsável: Ana Karine Dias Calves Brandão
Vitória da Conquista - BA
2019

Informações para contato:
E-mail: karine.brandao@uesb.br
Celular (WhatsApp): (77) 99983338
gmae.uesb@gmail.com

Site: www.uesb.br
Site: www.ifba.edu.br
Site: www.pucsp.br

O Programa de Extensão Atividades Colaborativas e Cooperativas em Educação (ACCCE) integra as ações da Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEM) da Universidade Estadual de Maricá (UEM), Campus Vilhena da Condição: CH 3000. O desenvolvimento das atividades que frequentam a parceria entre a universidade e a escola básica é um dos objetivos desse programa. Para o seu alcance, ações foram planejadas e realizadas pelos membros do GEM/ACCCE, durante os 13 anos de existência, que possibilitaram a integração entre as instituições. O trabalho colaborativo e cooperativo tem proporcionado diálogos e um envolvimento mais expressivo dos professores do ensino básico, estudantes dos graduações e dos pós-graduações. Medidas para confiança e respeito mútuo, professores e estudantes da escola básica e da universidade tem participado das diferentes reuniões promovidas pelo grupo e, recentemente, com a intenção de ampliar o campo de atuação das práticas educativas, tornaram-se co-autores de cursos que serão ministrados em 2019.

As investigações propostas pelo grupo denominadas "Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática - PEAMAT", da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), são como uma tentativa de estado de pesquisa da formação e desenvolvimento do currículo segundo as parâmetros da Educação Matemática. Tem como princípio interrogar e analisar os fatos que ocorrem em sala de aula, segundo os pontos de vista do aluno, do professor e do ambiente no qual deverá se desenvolver e procurar a ser resultado. O propósito tem como em pesquisa desenvolver diálogos, ligados ao processo de ensino e aprendizagem de conteúdos, estratégias e metodologias quando estes estão relacionados a um objeto matemático. Fundado no ano de 1995, sob a coordenação do professor doutor Sábila Ag. Almeida, teve as vertentes: teóricas da Teoria Antropológica de Didiot, Teoria dos Regimes de Representação Semiótica, Engenharia Didática, Teoria dos Saberes Didáticos, Semiótica, entre outras.

Curso de Extensão: [SE] Integração Diagonalmente as Superfícies Quadradas - CH 30h
Coordenação: Ana Karine Dias Cabral Brandão

Resumo:

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) se apresenta como um componente curricular dos cursos da área de exatas e ciências para a formação de conhecimentos específicos ligados a profissões exercidas pelos estudantes. No entanto, pesquisas como as realizadas por Cantareira (2004) apontam um ensino do ensino do CDI desassociado dos objetivos das outras disciplinas que integram a grade curricular das cursos de ingresso. Essa situação nos convida a indagar: Quais são os significados produzidos ao usar a Integral Dupla nas disciplinas específicas do curso? Em que momento eles são necessários? Têm perguntas que nos levam a elaboração de curso, que tem como objetivo verificar quais conhecimentos e significados acerca das Integrais Duplas são atribuídos pelos estudantes ao responder a uma questão proposta.

O curso se destina aos estudantes matriculados nas diversas disciplinas das graduações em Engenharia e Arquitetura, bem como, das licenciaturas em Matemática, Química e Física. Tem-se como eixo as premissas teóricas de Semiótica cultural e da Teoria Antropológica de Didiot para a fundamentação científica dessa curso, que ocorrerá no período de março a abril de corrente ano, com cinco encontros presenciais que serão filmados e gravados. O modelo proposto para a discussão interdisciplinar será baseado em uma questão que girará em torno de uma situação real, oferecida das que são apresentadas nas áreas didáticas abordadas. Para responder a, elaboramos um Projeto de Iniciação e Pesquisa (PIP) em que os estudantes levantarão conjecturas, analisando os conhecimentos já adquiridos em busca de respostas que possam ser validadas cientificamente. O objeto matemático escolhido são as Integrais Duplas, ao uso de cálculo das medidas das áreas e dos volumes de superfícies quadradas. A pesquisa da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por intermédio do Grupo de Estudos e Aprendizagem em Educação Matemática (GEM) e a Universidade Estadual de Maricá da Bahia, por meio da Grupo de Estudos em Educação Matemática e pelo Programa de Extensão: Atividades Colaborativas e Cooperativas em Educação (ACCCE) possibilita os parâmetros.

Metodologia:

Para alcançar o fim ao objetivo proposto definimos alguns procedimentos metodológicos, tomando como aporte teórico um Tratado da Geometria e Pesquisa (PIG), elaborado por Chavilari (2006), que consiste em uma metodologia para o ensino da Matemática. É proposta aos estudantes uma questão simples, aberta e inserida em um contexto real, na busca por soluções e respostas. Formamos quartetos e respondemos individualmente associadas a essas áreas de conhecimento que possam conduzir a uma resposta final para a questão original.

Nesse trabalho, os dados resultam em ritos de pesquisa didática, em que o estudante investiga como responder ao problema proposto, buscando de forma autônoma, soluções válidas e conclusões.

As aulas serão gravadas e filmadas para observar as sessões (Petro, 2003) estabelecidas entre os participantes por intermédio dos diálogos, gestos, inferências e atividades.

Os estudantes terão acesso a computadores, se for necessário, para visualização dos gráficos e outros perfis.

Serão realizados cinco encontros presenciais, em que discutiremos a questão norteadora, como o objeto integral dupla "vive" nas instituições e a razão de estado de. Em seguida, o estudante deverá buscar respostas, discutir com os colegas as soluções encontradas e avaliar se existe coerência na resposta encontrada.

Referências:

- CANTAREIRA, R. C. Construção teórica da metodologia Diagonalmente as Superfícies Quadradas. In: *Memória do 3º congresso internacional de Engenharia Matemática e Matemática*, 2004.
- CHAVILARI, V. *Seu curso de matemática: um guia para o sucesso*. São Paulo: PIG, 2006. 160p.
- PIGUEL, L. A. *Seu curso de matemática: um guia para o sucesso*. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estrada: 467 páginas por J. Cantareira)

ENCONTRO	PROGRAMAÇÃO
1º Encontro Data: 03/03/2019	Memória: "TÓPICOS SUGERIDOS" a) Tema Matemático: Superfícies Quadradas em Grupo - CHAVILARI: saída do UERJ de R. Brasil; - CANEVA DE BRASIL: a BREVETARIA (DEFEITO) não é a mesma; - BREVETARIA DE BRASIL: a BREVETARIA - Atividade de integração coletiva; - PORTUGAL ABREDO; - Abertura oficial com a presença Ana Karine Dias Cabral Brandão; - MESA COM OS AUTORES 1. Palestra com uma professora de Rios; 2. Dinâmica da obra de arte (plano): Quadrado de Gergonne-Sant'Ana; 3. Palestra com o Professor: Ana Karine Dias Cabral Brandão; Tema: A Implantação da Matemática em um sistema de ensino de matemática - R. VIEIRA DO ENCONTRO O debate com os convidados - MOMENTO LIVRE - FIM DO ENCONTRO b) Tema: Geometria: As questões na história da geometria - PLANEJADO EM UM ENCONTRO Depois a questão aberta que será resolvida durante todo o curso em busca de uma resposta - O "CÁLCULO" DOS CONHECIDOS Socialização dos primeiros conhecimentos acerca da questão proposta - MINGA DE MATEMÁTICA: CÂMBIO de ideias - A MATEMÁTICA: Apresentação de temas - Tema de discussão: vertical - O "CÁLCULO" CONHECIDO: Organização do ambiente virtual para acesso aos dados - SAUDADE "MATEMÁTICA" recente e atual

APÊNDICE B – Informações do Iº Encontro enviado por e-mail

Para os selecionados:

----- Mensagem original -----

De : karine dias <karine_caires@hotmail.com>

Data: 29/03/2019 16:32 (GMT-02:00)

Para: oliveirarlete96@gmail.com, danirodrigues1626@gmail.com, ed.lopes.S64@gmail.com, jackcaribi@hotmail.com, joselucas.leao@gmail.com, guga_pratesoliveira@hotmail.com, lucassousaengenharia@gmail.com, mariana.rosario@hotmail.com, mateus.coqueiro@gmail.com, tamaracunha@hotmail.com, thaismfreitas1@gmail.com, victor.show17@gmail.com, max.eng.ele@gmail.com, flavioc345@gmail.com, taypbrito@hotmail.com, edsoncarv1996@gmail.com, lucasvenancio2.0@hotmail.com, leticia.barbosadeoliveira@gmail.com, nataniuri@outlook.com, larissasalves81@gmail.com

Assunto: Participantes do curso

Queridos participantes;

É com prazer que os receberemos para a realização do curso: **(Se)Integre Duplamente a Superfície Dupla.**

Estaremos saindo da **UESB** amanhã **(30/3)** às **8horas (sem atraso)** e retornando até as 16horas.

Local: **Antigo prédio da reitoria**

Referência do local: após o portão de entrada, a segunda rua a direita.

Leiam as instruções em anexo e confirmem a presença respondendo a esse e-mail.

Se por algum motivo não puder participar, por gentileza nos informem, até as 16horas, para que possamos chamar outro inscrito não selecionado.

Até amanhã!

Atenciosamente;

Ana Karine Dias Caires

Coordenadora do Curso

Em anexo foi enviado a instrução:

CONDIÇÕES PARA A PARTICIPAÇÃO DOS CONVIDADOS

1. Disponibilidade para se afastar 32 km da cidade de Vitória da Conquista por um período de 8 horas, no dia 30/3, último sábado do mês de março, para o processo formativo, sem ônus financeiro.
 2. Ter interesse de participar de um curso online e presencial.
 3. Assumir a participação do curso até o final dos cinco encontros.
 4. Seguir rigorosamente os horários e prazos estabelecidos para o curso.
 5. Em caso de aceite, o convidado deverá usar roupas confortáveis e tênis ou chinelos para um dia no campo.
 6. Deverá levar os utensílios pessoais, tais como: protetor solar; escova de dente; boné, absorventes; creme dental; garrafinhas de água; entre outros.
 7. A alimentação, no dia 30/03, será gratuita e ocorrerá na fazenda.
 8. Saída da UESB às 8 horas
- Retorno a UESB às 17 horas.
9. A certificação constará de 30 horas registrada pela PUC/SP e UESB/BA e será enviado por e-mail ao final do curso.
 10. Após uma ausência do curso o convidado perderá o direito ao certificado.
 11. Durante o curso presencial na fazenda, o convidado não poderá se afastar do local, sob nenhuma hipótese. O ônibus terá os horários estabelecidos para se deslocar.
 12. Não é permitido que o convidado utilize carro próprio para ter acesso ao local do curso.
 13. Se o inscrito tiver alguma restrição alimentar, por gentileza informar ao responsável por e-mail.
 14. O inscrito que usa medicamentos prescritos e diários deverá levá-los. Não existe farmácia próxima ao local.
 15. Não esquecer de levar documentos pessoais e carteira de convênio de saúde.

Para os não selecionados, o seguinte e-mail foi enviado:

karine dias

Sex, 29/03/2019 15:40

Para: samuel.dias.alves@gmail.com; lucas.samuel01@gmail.com; allveslais@gmail.com; klebersylva2014@gmail.com; jeferson.caio17@gmail.com; elogm15@gmail.com; deborasoaressilva@hotmail.com; brramos2050@gmail.com; maluto maz17Ahotmail.com; badecoandre1999@gmail.com; leonardoaraba06@hotmail.com; marianamoura10.mm@gmail.com; fabio.uesb@yahoo.com.br; giltek_@hotmail.com; lorrannenl@yahoo.com; licongabriel644@gmail.com

Olá inscritos;

Ficamos contentes com sua inscrição para o curso: **(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas.**

Verificamos que o número de inscritos foi superior as vinte vagas estabelecidas e alguns critérios para a seleção dos partícipes precisaram ser definidos, a saber:

1. Ser estudante.
2. Está cursando os últimos semestres do curso ao qual está matriculado.
3. Já ter cursado Cálculo III.
4. Em caso de empate, priorizamos a ordem da inscrição.

Desta feita, ao analisarmos sua inscrição, um ou mais dos critérios não foram contemplados.

Agradecemos o seu interesse e caso venha ocorrer uma nova edição para o curso vocês serão avisados.

Estamos a disposição para quaisquer esclarecimentos;

Atenciosamente;

Ana Karine Dias Caires Brandão

Responsável pelo Curso

APÊNDICE C – Material do Conselho de Ética

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a):

Você está sendo convidado para participar como voluntário(a) em uma pesquisa de doutoramento em Educação Matemática que para a coleta de dados viabilizou o curso: **(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas**. Esta pesquisa tem como objetivo principal analisar como as Integrais Duplas inter-relacionam com outras áreas de conhecimento produzindo significados. Teremos como público alvo os estudantes dos cursos: de Licenciatura em Matemática e Física da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, das Engenharias das Instituições públicas e privadas da cidade de Vitória da Conquista, devidamente matriculados.

No caso de aceitar fazer parte da mesma, participarão de cinco encontros presenciais, em que serão submetidos a questionamentos acerca do conceito matemático e os significados que são mobilizados quando usados por outras áreas de conhecimento. A sua participação será de grande valor, podendo contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Você terá liberdade para pedir esclarecimentos sobre alguma questão, bem como, para desistir de participar da pesquisa no momento que desejar, mesmo depois de ter assinado este documento, e não será, por isso, penalizado de nenhuma forma e não implicará em nenhum prejuízo na avaliação de rendimento da disciplina. Caso desista, basta avisar o(s) pesquisador(es) e este termo de consentimento será devolvido. Como responsáveis por este estudo, temos o compromisso de manter em segredo os dados pessoais e confidenciais, bem como indenizá-lo se porventura sofrer algum prejuízo moral ou físico por causa da sua participação. Informamos que o resultado deste estudo poderá contribuir com a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e os documentos serão guardados pelo pesquisador por um período de cinco anos, após esse prazo serão incinerados.

Assim, se está claro para o senhor(a) a finalidade da pesquisa e se concorda em participar, pedimos que assine este documento; que será enviado ao Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo seres humanos – CEP/UESB, órgão responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de toda pesquisa que envolva seres humanos.

Nossos sinceros agradecimentos por sua colaboração.

Ana Karine Dias Caires Brandão

Doutoranda do Curso de Pós Graduação em Educação Matemática da PUC/SP

Telefone para contato: (77)99683286

Eu, _____, RG _____, aceito participar das atividades da pesquisa **“(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas”**. Fui devidamente informado (a) que responderei as questões que nos forem propostas nos instrumentos de pesquisa e uma entrevista, se for necessário. Foi-me garantido que posso desistir da pesquisa a qualquer momento, e que os resultados serão tratados confidencialmente.

_____, ____/____/____

Assinatura do Estudante

A U T O R I Z A Ç Ã O

Eu, _____,
portador(a) de Cédula de identidade nº _____, **autorizo** a Ana
Karine Dias Caires Brandão a gravar em áudio, vídeo e veicular minha imagem e depoimentos
em qualquer meio de comunicação para fins didáticos, de pesquisa e divulgação de
conhecimento científico sem qualquer ônus e restrições.

Fica ainda autorizada, de livre e espontânea vontade, para os mesmos fins, a cessão de
direitos de veiculação, não recebendo para tanto qualquer tipo de remuneração.

Vitória da Conquista, 30 de março de 2019.

Assinatura do estudante

APÊNDICE D – Slides da palestra da Professora/Pesquisadora

(Se) INTEGRE DUPLAMENTE AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

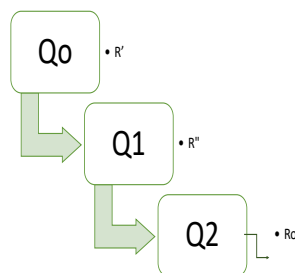
Responsável: ANA KARINE DIAS CAIRES BRANDÃO

Organização:

- Inquietações pessoais com o ensino e a aprendizagem da matemática
- O alto índice de reprovação
- A pergunta dos estudantes: em que vou usar isso?
- A ausência de significados de alguns conceitos matemáticos
- A possibilidade de se conversar com outras áreas de conhecimento
- Os estudos dos grupos de pesquisa, no mestrado e no doutorado que ampliam a forma de perceber a matemática

QUAIS EMPECILHOS ENCONTREI?

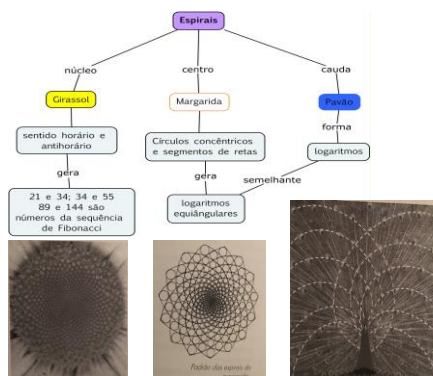
- Formação Inicial - Fragmentada
- Crença de que a Matemática é superior as outras disciplinas
- Quem sabe Matemática é um ser inteligente
- Hábitos – ensina como aprende ou como o livro didático explica
- Falta de referências bibliográficas para auxiliar na construção de atividades diferentes das que são apresentadas nos livros didáticos
- Falta de diálogos entre professores das diferentes áreas.



A IMPLÍCITA RELAÇÃO DA MATEMÁTICA COM AS OUTRAS ÁREAS DE CONHECIMENTO

A PERCEPÇÃO DOS FENÔMENOS

- A natureza como fonte de inspiração



E AS ABELHAS?

O artigo: "Extinção de abelhas afeta cadeia alimentar", relata a existência da proporção 1,618... entre o número de abelhas fêmeas em comparação com o número de abelhas macho em uma colmeia (Mattos, 2017).

Que razão é essa?



MODELOS MATEMÁTICOS



O "QUE SE" TEM "ESCRITO" SOBRE O "CDI"?

- Disciplina com alto índice de reprovação, repetência e evasão (Barufi, 1999)
- Dificuldade de visualização das representações das funções de várias variáveis em espaços tridimensionais (Henriques; Serôdio, 2013)
- Uso de regras sem produção de significados dos conceitos do CDI (Silveira, 2015)
- Poucas metodologias de ensino desenvolvidas exclusivamente para o Ensino Superior. (Camarena, 2013)

OBJETOS DO CDI E AS RELAÇÕES COM OUTRAS ÁREAS DE CONHECIMENTO

- Alguns conceitos matemáticos não são AINDA aplicáveis a outras ciências.
- A relação de instrumento e de valência semiótica dos objetos matemáticos;
- A percepção do CDI em diferentes áreas (instrumento x essencial)

ESTUDO DAS INTEGRAIS	CURSO	APLICAÇÕES
	MATEMÁTICA	• Cálculo da medida de uma área ou de um volume
	FÍSICA	• Trabalho realizado por uma força • Centro de massa
	ENGENHARIA ELÉTRICA	• Cálculo da queda de tensão e a perda de demanda em todo trecho de rede • CÁLCULO DA MEDIDA DA CAMADA PROTETORA DE cabos
	ENGENHARIA CIVIL	• Viga- cálculo do coeficiente de flexibilidade de uma carga unitária real • Deformações plásticas em eixos de seções circulares (torque)
	ENGENHARIA AMBIENTAL	• Ocupação planejada do meio (área de preservação) • Desenvolvimento de tecnologia limpa

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

- É possível dialogar com outras áreas de conhecimento para produzir significados para os entes do CDI.
- Não é uma tarefa simples, demanda tempo e estudo.
- Necessidade de uma metodologia de ensino que apoie a pesquisa.
- Está aberta para novos caminhos.
- Necessidade de criação de novos modelos que não estão presentes nas Instituições onde vive o CDI.
- Formação de um núcleo de estudo com pesquisadores e estudantes das diversas áreas de conhecimento

REFERÊNCIAS:

CAMARENA, P. A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Innovación Educativa*, ISSN: 1665-2673 vol. 13, número 62 | mayo-agosto, 2013

BARUFI, M.C.B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. São Paulo, 1999

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R. *Resistência de Materiais*. São Paulo, 1995

HENRIQUES, A.; SERÓDIO, R. Intervenção de tecnologias e noções de registros de representação no estudo de integrais múltiplas na licenciatura em matemática. *Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI JHEM)* 15-19 de julho de 2013, UFSCar, São Carlos, SP, Brasil

HIBBELER, R.C. *Análise das Estruturas*. São Paulo, 2013

KAGAN, N.; OLIVEIRA, C.C.B.; ROCHA, E.J. *Introdução aos sistemas de distribuição de energia elétrica*. São Paulo, 2005

SILVEIRA, M.R.A. *Matemática, discurso e linguagens*. São Paulo, 2015.



APÊNDICE E – Orientações para os palestrantes do 2º encontro

ESCLARECIMENTOS PARA OS PALESTRANTES DA MESA TEMÁTICA

INFORMAÇÕES GERAIS	
Temática	Interação do Cálculo Diferencial e Integral com as diferentes áreas de conhecimento: possibilidades e perspectivas
Mediadora	Ana Karine Dias Caires Brandão
Apresentação da mesa	5 minutos
Tempo de exposição para cada palestrante	15 minutos
Tempo para Discussão com a plenária	30 minutos
Horário para início	8 horas
Horário para o fim	10 horas
OBJETIVO GERAL	
Discutir sobre possibilidades e perspectivas para a interação do Cálculo Diferencial e Integral com diferentes áreas de conhecimento.	
Comentário: O depoente buscará contemplar a temática abordando como usa os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral no exercício da sua profissão e quais possibilidades e perspectivas podem ser fomentadas para a interação entre as áreas de conhecimento.	

INSTRUÇÕES
1. Será disponibilizado um projetor de slides para exposição do tema, embora seja facultativo o seu uso. 2. Caso tenham slides para serem projetados, enviar até as 18 horas da sexta-feira, dia 05/4, para o e-mail: karine_caires@hotmail.com. 3. A mediadora controlará o tempo e avisará quando faltar 5 minutos para o término da exposição do convidado. 4. As perguntas da plenária serão feitas ao final da exposição dos palestrantes. 5. Os expoentes da mesa refletirão sobre possibilidades e perspectivas de interação entre as áreas de conhecimento. Sugerimos que o tempo de exposição contemple tal objetivo. 6. O tempo de discussão com a plenária deve suscitar reflexões, perspectivas e, quando possível, respostas aos questionamentos. 7. Os convidados para a mesa estão cientes que participarão de um curso de extensão intitulado: (Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas, promovido pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática da

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e pelo Grupo de Pesquisa Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

8. Os expoentes têm conhecimento que os dados coletados contribuirão para a escrita do texto do Doutorado em Educação Matemática da estudante Ana Karine Dias Caires Brandão e por este motivo o evento estará sendo filmado e gravado.
9. Os palestrantes precisarão assinar os documentos exigidos pelo Conselho de Ética para realização de pesquisa com seres humanos.
10. Os certificados dos palestrantes serão emitidos pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) e pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), com carga horária de 4 horas.
11. Caso o palestrante queira convidar alguém ou uma turma de estudantes para assistir, deverá comunicar com o responsável para verificar a disponibilidade do auditório. Porém, esclarecemos que não serão emitidos certificados para os ouvintes.

OBSERVAÇÕES

1. Algum ponto não contemplado nas instruções pedimos que entrem em contato com a responsável Ana Karine Dias Caires Brandão pelo telefone e WhatsApp (77) 999683286 ou pelos e-mails: karine_caires@hotmail.com e karinedias33@gmail.com.

Vitória da Conquista, 03 de abril de 2019.

Ana Karine Dias Caires Brandão

Responsável pelo curso de Extensão.

Professora Efetiva do IFBA-Vitória da Conquista

Integrante do GEEM e do PEA-MAT

Mestre em Educação Matemática pela UESC

Doutoranda em Educação Matemática pela PUC/SP

APÊNDICE F – Orientações para os estudantes do 2º encontro

ESCLARECIMENTO PARA OS PARTICIPANTES DO CURSO: (SE) INTEGRE

DUPLAMENTE AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

PROGRAMAÇÃO	
1º momento: Mesa Temática	
Temática	Interação do Cálculo Diferencial e Integral com as diferentes áreas de conhecimento: possibilidades e perspectivas
Mediadora	Ana Karine Dias Caires Brandão
Apresentação da mesa	5 minutos
Tempo de exposição para cada palestrante	15 minutos
Tempo para Discussão com a plenária	40 minutos
Horário para início	8 horas
Horário para o fim	10 horas
Palestrantes	Camila Daniele Willers – Engenheira Ambiental Danilo Brito Almeida – Engenheiro Elétrico Gislan Silveira Santos – Professor de Cálculo Guilherme Marques Júnior – Engenheiro Civil João Pedro de Sousa Cordeiro - Arquiteto
2º Momento: A Problemática	
Soluções para a questão Q ₀	Como as obras de Antoni Gaudí resistiram as intempéries do tempo?
Horário para início	10 horas e 15 minutos
Horário para o fim	12 horas

OBJETIVO GERAL
Discutir sobre possibilidades e perspectivas para a interação do Cálculo Diferencial e Integral com diferentes áreas de conhecimento.
Comentário: O depoente buscará contemplar a temática abordando como usa os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral no exercício da sua profissão e quais possibilidades e perspectivas podem ser fomentadas para a interação entre as áreas de conhecimento.
INSTRUÇÕES
1. A mesa começará pontualmente as 8 horas. Lembrem-se que é indelicado atrapalhar a exposição do convidado com o tumulto causado por atrasos. 2. Levem suas garrafas de água cheias e as pastas entregues no encontro anterior. 3. Observem que o tempo está delimitado, temos uma segunda etapa a ser cumprida após as 10 horas. 4. Evitem conversas paralelas durante a exposição dos convidados. 5. As perguntas serão feitas ao final da exposição de todos os palestrantes, nos 40 minutos destinados para discussão. 6. Elaborem antecipadamente suas perguntas. Elas podem estar direcionadas a um convidado ou a mesa como um todo. 7. Caso convidem colegas para assistirem a mesa, verificar disponibilidade do auditório com a responsável e deixá-los cientes da possibilidade de não certificação das horas como ouvintes. 8. Não será disponibilizado aos participantes do curso transporte para acesso ao local da mesa temática.

OBSERVAÇÕES	
2.	Algum ponto não contemplado nas instruções pedimos que entrem em contato com a responsável Ana Karine Dias Caires Brandão pelo telefone e WhatsApp (77) 999683286 ou pelos e-mails: karine_caires@hotmail.com e karinedias33@gmail.com .

Vitória da Conquista, 03 de abril de 2019.

Ana Karine Dias Caires Brandão

Responsável pelo curso de Extensão.

Professora Efetiva do IFBA-Vitória da Conquista

Integrante do GEEM e do PEA-MAT

Mestre em Educação Matemática pela UESC

Doutoranda em Educação Matemática pela PUC-SP

APÊNDICE G – Programação do 3º encontro

PROGRAMAÇÃO DO DIA 13/04

HORÁRIO	TAREFAS
8 – 8h40	Vídeo da Prof. Adriana sobre História da Arte e as obras de Gaudí.
8h40 – 9 h	Discussão sobre as questões: Q1: Quais formas tridimensionais vocês conseguem identificar nas obras de Gaudí? . Pesquise a forma e a equação algébrica que a representa. Q2: Como essas formas são utilizadas no exercício do curso da sua atual graduação? OBS: TRAZER POR ESCRITO PARA SER ENTREGUE
9 – 10 h	Institucionalização das Superfícies Quádricas
10 – 10h15	Intervalo do Lanche
10h20 – 11h20	Momento mão na massa: Criação de um objeto de aprendizagem para a construção da definição da Integral Dupla
11h20 – 12h	Institucionalização da definição da Integral Dupla e a apresentação da questão Q ₃ e Q ₄

APÊNDICE H – Primeira tarefa do PEP

VAGA DE EMPREGO PARA PESSOAS CRIATIVAS



Você foi escolhido para ministrar uma aula sobre o tema: **Integral Dupla aplicada aos parabolóides hiperbólicos**, o seu desempenho te garante uma vaga de emprego para uma empresa que está escrevendo livros de Cálculo Diferencial e Integral.

Remuneração: R\$ 25000,00 mensais, mais uma comissão de 2% em cada livro vendido e um valor relativo aos seus direitos autorais.

Banca examinadora: é formada pelas cinco pessoas mais criativas do mundo, certificadas por órgãos internacionais de credibilidade idónea.

Critério de seleção: formulação de uma questão inédita sobre o tema e aplicada a graduação em que está matriculado.

Crie a questão e garanta esse emprego!

APÊNDICE I – Programação do IV e do V encontros

PROGRAMAÇÃO DO DIA 27/04

HORÁRIO	TAREFAS
7h30 – 8h30	- Boas vindas - Entrega da atividade: “Garanta sua vaga de emprego!” - Comentários acerca da elaboração e da resposta dada a atividade. OBS: TRAZER A QUESTÃO RESPONDIDA PARA SER ENTREGUE
8h30 – 9 h	Entrevista com o professor Afonso Henriques sobre o uso da impressora 3D para o ensino e a aprendizagem da Integral Dupla Comentários
9 – 9h40	Momento mão na massa: Criação de um objeto de aprendizagem para a construção da definição da Integral Dupla. Socialização
9h40 – 9h50	Intervalo do Lanche
9h50 – 11h	Momento mão na tecla: O uso do <i>software</i> GeoGebra 3D para a construção da definição da Integral Dupla. Socialização
11h – 12h	Institucionalização da definição da Integral Dupla
12 – 14 h	Intervalo para o almoço
14 – 14h30	Discussão sobre as questões: Q ₅ : O que é um centro de massa? Q ₆ : O que é um momento de inércia? Q ₇ : Qual a influência do centro de massa e do momento de inércia nas obras arquitetônicas de Gaudí?
14h30 – 15h30	Solução para problemas inéditos envolvendo as Integrais Duplas
15h30 – 16h	Buscando respostas para a questão: Como as obras de Gaudí resistiram às intempéries do tempo?
16h – 16h30	Avaliação do curso e perspectivas de novos projetos

APÊNDICE J – Segunda tarefa do PEP

“(Se) Integre Duplamente as Superfícies Quádricas”

ATIVIDADE 2

QUESTÃO 1

1. Uma reserva ambiental localizada no vale do “Xuxui” tem uma cadeia de montanhas no formato de um paraboloide hiperbólico. Uma companhia elétrica precisa instalar uma torre de transmissão de energia no centro daquela superfície para otimizar a distribuição da carga elétrica. Para isso, vários fatores são observáveis tanto na questão ambiental como na questão elétrica: impacto na fauna, na flora e no social; emissões atmosféricas, faixa de segurança, espaço entre os cabos e os obstáculos. Desprezando alguns deles e considerando apenas os dois fatores mais relevantes destacados nos itens a e b, calcule:

- a) A medida da área da faixa de segurança para a supressão de vegetação efetiva considerando x como a área em hectares da vegetação para ser suprimida na fase de licença ambiental prevista (LP) variando de $[0; 6,93]$ e y como a área em hectares de supressão de vegetação solicitada na fase de Licença Ambiental de Instalação (LI) variando de $[0; 16,17]$.
- b) A medida da área da faixa de servidão para a instalação da torre de transmissão com 138kV considere a variável x como a distância, em metros, de segurança do “cabo – vegetação”, que varia de $[0; 4,30]$. Para a variável y considere a área em hectares de supressão de vegetação solicitada na fase de Licença Ambiental de Instalação (LI) variando de $[0; 16,17]$
- c) Para o cálculo da posição central da torre, os engenheiros consideraram dois fatores de riscos mais preponderantes na região: as unidades de conservação de proteção legal, variável x , que apresentou na mesma fase a variação $[0, 4]$ em hectares e os processos erosivos do relevo causados pela remoção da vegetação, variável x , que apresentou uma variação na fase LI entre $[0, 25]$. Qual deve ser a localização da torre?

Fonte: Autoria própria

QUESTÃO 2

2. Um professor de Cálculo Diferencial e Integral propôs a situação abaixo aos seus estudantes da Licenciatura em Matemática:

Considere a região R do plano- xy delimitada pela curva de equação $x^2 + y^2 = a^2$, para calcular a integral dupla de $f(x, y) = h$ sobre R , onde a e h são constantes reais positivas.

- a) Resolva a situação proposta
- b) Reelaborem esta tarefa de modo que ela possa ser realizada pelos seus alunos da Educação Básica.
- c) Quais conclusões você chegou?

Fonte: Dispositivo experimental para análise de práticas de estudantes do PPGEM – UESC, elaborado pelo prof. Dr. Afonso Henriques.

3. Quais foram as contribuições a exposição da pesquisadora sobre a explicação formal das superfícies quádricas por meio das representações algébricas e gráficas?

4. Destaque os pontos fortes e os aspectos que poderiam ter sido mais aprofundados neste momento? Explícite as razões.

5. Quais conhecimentos/saberes você mobilizou entre o ensino dos aspectos formais da Superfície Quádricas e a aplicação em contextos reais?

4ºmomento: Solta o arreio da cela

1. A atividade manual e o uso do *software* GeoGebra contribuíram para arquitetar a definição da Integral Dupla? Quais significados foram mobilizados?

2. Sobre a atividade “vaga de emprego”:

2.1. Compare o enunciado desta atividade com os enunciados das atividades dos livros.

4ºmomento: Solta o arreio da cela

2.2. Descreva o seu sentimento ao criar uma questão que articula o CDI com seu curso da graduação.

2.3. Quais dificuldades você sentiu para resolver a questão elaborada por você?

3. Comente sobre as questões inéditas elaboradas pela pesquisadora e respondida por você.

4. Quais semelhanças e diferenças você pode perceber na definição da Integral Dupla fornecida pelo livro didático e por um dos modelos epistemológicos construídos pelos matemáticos puros?

5. Na sua opinião o curso ofereceu elementos fundamentais para responder à questão: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? Justifique.

Avaliação Geral e Sugestões

ANEXO A – TEOREMA DE FUBINI

TEOREMA DE FUBINI

El problema de calcular integrales se resuelve, en cierta forma, por el teorema 3-10, que reduce el cálculo de integrales en un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, al cálculo de integrales sobre intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. De suficiente importancia para darle una designación especial, este teorema se acostumbra a llamar teorema de Fubini, pues se puede considerar como caso especial de un teorema demostrado por Fubini mucho después de ser conocido el teorema 3-10.

La idea que encierra el teorema se ilustra mejor (Fig. 3-2) considerando una función continua positiva $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $t_0, \dots, t_n$ una partición de $[a,b]$ y se divide $[a,b] \times [c,d]$ en n bandas por medio de los segmentos $[t_i] \times [c,d]$. Si g_x se define por $g_x(y) = f(x,y)$, entonces el área de la región debajo del gráfico de f y por encima de $[x] \times [c,d]$ es

$$\int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y) dy.$$

El volumen de la región debajo del gráfico de f y por encima de $[t_{i-1}, t_i] \times [c,d]$ es por tanto aproximadamente igual a $(t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x,y) dy$, para cada $x \in [t_{i-1}, t_i]$. Así

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \sum_{i=1}^n \int_{[t_{i-1}, t_i] \times [c,d]} f$$

es aproximadamente $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x,y) dy$, donde x_i está en $[t_{i-1}, t_i]$. Por

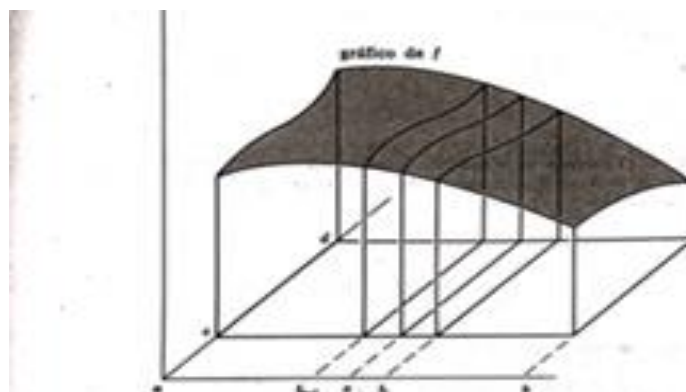


FIGURA 3-2

otra parte, sumas análogas a ésta aparecen en la definición de $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$. Así, si h se define por $h(x) = \int_c^d f(x,y) dy$, es razonable esperar que h sea integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b h = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx.$$

Esto efectivamente resultará cierto si f es continua, pero en el caso general se presentan dificultades. Supóngase por ejemplo que el conjunto de discontinuidades de f es $\{x_0\} \times [c,d]$ para algún $x_0 \in [a,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b] \times [c,d]$ pero $h(x_0) = \int_c^d f(x_0,y) dy$ puede muy bien no estar definida. El enunciado del teorema de Fubini, sin embargo, tiene una apariencia algo extraña, y vendrá seguido de una serie de observaciones sobre varios casos especiales en los que son posibles enunciados más simples.

Se precisará un poco la terminología. Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en un rectángulo cerrado, entonces, tanto si f es integrable como si no lo es, el extremo superior de todas las sumas inferiores y el extremo inferior de todas

las sumas superiores, existen. Se denominan integrales inferior y superior de f en A , y se indican por

$$L \int_A f \quad \text{y} \quad U \int_A f,$$

respectivamente.

3-10. Teorema (Teorema de Fubini). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos cerrados, y sea $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $x \in A$ sea $g_x: B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_x(y) = f(x, y)$ y sea

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= L \int_B g_x = L \int_B f(x, y) dy, \\ \mathcal{U}(x) &= U \int_B g_x = U \int_B f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$ son integrables en A y

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f &= \int_A \mathcal{L} = \int_A \left(L \int_B f(x, y) dy \right) dx, \\ \int_{A \times B} f &= \int_A \mathcal{U} = \int_A \left(U \int_B f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

(Las integrales del segundo miembro se denominan **integrales iteradas de f** .)

Demostración. Sea P_A una partición de A y P_B una partición de B . Juntas originan una partición P de $A \times B$ en la cual cada subrectángulo S es de la forma $S_A \times S_B$ donde S_A es un subrectángulo de la partición P_A y S_B es un subrectángulo de la partición P_B . Así

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_S m_S(f) \cdot v(S) = \sum_{S_A \in P_A} \sum_{S_B \in P_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A \times S_B) \\ &= \sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \right) \cdot v(S_A). \end{aligned}$$

Ahora bien, si $x \in S_A$, entonces evidentemente $m_{S_A \times S_B}(f) \leq m_{S_B}(g_x)$. Por consiguiente, para $x \in S_A$ se tiene

$$\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \leq \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x) \cdot v(S_B) \leq L \int_{S_B} g_x = \mathcal{L}(x).$$

Por tanto,

$$\sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \right) \cdot v(S_A) \leq L(\mathcal{L}, P_A).$$

Así se obtiene

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_A) \leq U(\mathcal{L}, P_A) \leq U(\mathcal{U}, P_A) \leq U(f, P),$$

donde la demostración de la última desigualdad es exactamente análoga a la demostración de la primera. Puesto que f es integrable, $\sup \{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\} = \int_{A \times B} f$. Por tanto,

$$\sup \{L(\mathcal{L}, P_A)\} = \inf \{U(\mathcal{L}, P_A)\} = \int_{A \times B} f.$$

En otras palabras, $\mathcal{L}$ es integrable en A y $\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{L}$. La proposición para $\mathcal{U}$ se deduce análogamente de las desigualdades

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_A) \leq L(\mathcal{U}, P_A) \leq U(\mathcal{U}, P_A) \leq U(f, P). \quad \blacksquare$$

Observaciones. 1. Una demostración análoga prueba que

$$\int_{A \times B} f = \int_B \left(L \int_A f(x, y) dx \right) dy = \int_B \left(U \int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Estas integrales son las **integrales iteradas de f** en orden inverso de las del teorema. Como se ve en muchos problemas, la posibilidad de permutar el orden de las integrales iteradas tiene muchas consecuencias.

2. En la práctica se presenta frecuentemente el caso de ser integrable cada g_x de manera que $\int_{A \times B} f = \int_A \int_B f(x, y) dy dx$. Esto ocurre ciertamente si f es continua.

3. La mayor irregularidad que se presenta en los casos corrientes es que g_x no sea integrable para un número finito de $x \in A$. En este caso $\mathcal{L}(x) = \int_B f(x, y) dy$ salvo en este número finito de x . Puesto que $\int_A \mathcal{L}$ no altera si $\mathcal{L}$ se define de nuevo en un número finito de puntos se puede escribir $\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx$, siempre que $\int_B f(x, y) dy$ se defina arbitrariamente, por ejemplo, dándole el valor 0, cuando no existe.

4. Hay casos donde esto no se puede hacer y el teorema 3-10 ha de aplicarse tal como se ha establecido. Sea $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

ANEXO B – Livro de Pascal

§ 28. — FORMOLA DI OSTROGRADSKY
PER LA PRIMA VARIAZIONE DEGLI INTEGRALI
MULTIPLI.

Sia z funzione delle due variabili x, y . Per fissare le idee supponiamo che una tale funzione possa rappresentarsi coi punti di una superficie; diamo a tali punti degli spostamenti arbitrarii ma infinitesimi, cioè supponiamo una nuova superficie che abbia o no la stessa curva limite della prima, e i cui punti si facciano corrispondere univocamente ai punti della prima, e le distanze fra due punti corrispondenti sieno delle quantità tendenti a zero contemporaneamente.

Sieno x, y, z le coordinate di un punto dell'antica superficie di equazione $z = f(x, y)$ (cfr. il § 1). La nuova superficie abbia per equazione

$$z_1 = f(x_1, y_1) + \lambda(x_1, y_1) \delta z$$

dove x_1, y_1, z_1 sieno le coordinate del punto corrispondente a quello delle coordinate x, y, z , e δz sia una quantità che tenda a zero.

§ 28. — Formola di Ostrogradsky. 151

variazione nell'ipotesi che x, y sieno invariate, più la parte dipendente dalle sole variazioni di x e y . Se si ha poi una funzione di x, y, z , e delle derivate parziali di z è facile, coi soliti principii del calcolo differenziale, trovare la variazione di essa. Si ha

$$\delta F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots) = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial z}{\partial x})} \delta \frac{\partial z}{\partial x} + \dots$$

Passiamo ora alla variazione di un integrale doppio definito.

Se il campo d'integrazione è fisso, per modo che *invariabili* possono considerarsi le x e y , allora è facile trovare la formola per la variazione dell'integrale, e si potrà procedere cogli stessi principii adoperati per gli integrali semplici.

Si troverà che la variazione dell'integrale si ottiene semplicemente sostituendo alla funzione F sotto il segno, la sua variazione δF .

Non è più lo stesso se il campo d'integrazione è variabile. Seguiremo un metodo analogo a quello seguito per gli integrali semplici (v. § 2 e JORDAN, *Analyses*, vol. III, p. 534) e il quale però, se può dirsi esatto quando si tratti delle funzioni più ordinarie, è molto lungi dal presentare quel rigore e quella precisione che è desiderabile nei procedimenti analitici così fondamentali.

Si abbia l'integrale doppio

$$I = \iint F dx dy.$$

150 § 28. — Formola di Ostrogradsky.

Allora la variazione di z sarà l'assieme dei termini di ordine più basso in $z_1 - z$, cioè in

$$[f(x_1, y_1) - f(x, y)] + \lambda(x_1, y_1) \delta z.$$

Ed essendo

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + w$$

$$\lambda(x_1, y_1) \delta z = \lambda(x, y) \delta z + w'$$

(dove w, w' sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a $\delta x, \delta y$ che si possono supporre tutti del medesimo ordine) si ha infine

$$\delta z = \lambda(x, y) \delta z + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right)$$

formola analoga a quella del § 1. Possiamo osservare che la prima parte del secondo membro può considerarsi come la variazione di z nell'ipotesi particolare in cui x, y non varino, il che si vede immediatamente dalla formola sopra stabilita.

Con un metodo simile possiamo ricavare la formola per le variazioni delle derivate parziali di z . Si ha

$$\delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \delta z + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \delta y \right)$$

ecc. ecc.

dalle quali formole appare sempre la proprietà: che la variazione totale è eguale alla somma della

152 § 28. — Formola di Ostrogradsky.

In F , alla funzione z e alle sue derivate $z', z'', \dots$ sostituiamo $z + \delta z, z' + \delta z', \dots$ dove $\delta z, \delta z', \dots$ sono gli incrementi che subiscono $z, z', \dots$ per effetto delle variazioni $\delta x, \delta y$ delle variabili indipendenti, e della variazione propria della funzione z .

Mutiamo poi anche il campo d'integrazione, in modo che ad ogni punto x, y dell'antico campo corrisponda un punto $x + \delta x, y + \delta y$ del nuovo, e quindi ad un punto x_0, y_0 del contorno dell'antico corrisponda il punto $x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0$ del contorno del nuovo, e formiamo la differenza fra l'integrale così modificato e quello antico. Possiamo nel primo di tali integrali eseguire un cambiamento di variabili indipendenti in maniera da ridurre un integrale definito nello stesso campo d'integrazione del secondo.

In effetti poniamo in esso

$$x = u + \delta u$$

$$y = v + \delta v$$

dove $\delta u, \delta v$ sieno funzioni di u, v colle condizioni di ridursi a $\delta u_0, \delta v_0$ quando u, v diventano rispettivamente u_0, v_0 (si noti che qui con x_0, y_0 si intendono genericamente le coordinate di un qualunque punto del contorno dell'antico campo d'integrazione, e quindi sono *infinitesime* le condizioni cui assoggettiamo le funzioni arbitrarie $\delta u, \delta v$, di due variabili).

La funzione sotto il segno (supposto naturalmente anche in $z, z', \dots$ sostituite in luogo di x, y le quan-

tita $u + \delta u, v + \delta v$ diventa una funzione di tali quantità che chiameremo

$$\Phi(u + \delta u, v + \delta v) = \\ = \Phi(u, v) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \delta v \right) + \dots$$

e il campo d'integrazione diventa l'antico.

Per trasformare l'integrale bisogna moltiplicare la funzione sotto il segno per l'Jacobiano delle antiche variabili rispetto alle nuove, cioè per

$$\left| 1 + \frac{\partial(\delta u)}{\partial u} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial v} \right| = 1 + \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial u} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial v} \right) + \dots$$

L'integrale trasformato diventa allora

$$\iint \Phi(u, v) du dv + \\ + \iint \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \delta v + \Phi \frac{\partial(\delta u)}{\partial u} + \Phi \frac{\partial(\delta v)}{\partial v} \right] du dv + \text{ecc.}$$

cioè, mutando nome alle variabili u, v e chiamandole daccapo x, y :

$$\iint \Phi(x, y) dx dy + \iint \frac{d}{dx} (\Phi \delta x) dx dy + \\ + \iint \frac{d}{dy} (\Phi \delta y) dx dy + \text{ecc.}$$

Esaminiamo ora la funzione Φ ; essa è

$$F(x, y, z + \Delta z, z' + \Delta z', \dots)$$

cioè

$$\Phi(x, y) = F(x, y, z, z' + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial F}{\partial z'} \Delta z' + \dots \right) + \dots$$

ed essendo

$$\Delta z = \delta z + u \\ \Delta z' = \delta z' + u' \\ \dots \dots \dots$$

si ha infine

$$\Phi = F + \delta F + u$$

essendo δF la variazione di F nell'ipotesi che varino solo la funzione z e le sue derivate ed essendo u un infinitesimo di ordine superiore.

Sostituendo nell'espressione precedente dell'integrale, sottraendone il valore dell'integrale primitivo

$$\iint F dx dy$$

e supponendo che l'integrale

$$\iint \left\{ u + \frac{\partial}{\partial x} [(\delta F + u) \delta x] + \frac{\partial}{\partial y} [(\delta F + u) \delta y] \right\} dx dy$$