

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

VIVIANE NOGUEIRA PONCIANO SANT'ANNA

**Formação de professores e tecnologias: uma discussão sobre
semelhança de triângulos**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2020

VIVIANE NOGUEIRA PONCIANO SANT'ANNA

**Formação de professores e Tecnologias: Uma discussão sobre
semelhança de triângulos**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica, como exigência
parcial para obtenção do título de Mestre em
Educação Matemática, sob a orientação da
Professor Doutor Gerson Pastre de Oliveira.*

SÃO PAULO

2020

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

*Ao meu pai (in memoriam) que sempre acompanhou meus estudos,
me apoiou e sempre acreditou em mim.*

Obrigada por me fazer uma pessoa melhor! Minha eterna gratidão!

*Agradeço à **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior** (CAPES) pela Bolsa de Estudos concedida sob o
processo nº 88887.148911 / 2017-00.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, o Grande: “Eu Sou”, somente Ele poderia me dar forças para superar os momentos de angústias, tristezas, exaustão e de incertezas, sendo meu Guia maior.

“Porque dele e por Ele, e para Ele, são todas as coisas A Ele seja a glória, para sempre! Amém”. *Romanos 11:36*

Ao meu marido Marcos, que além de compreender meus momentos de ausência, foi paciente e me apoiou nas horas em que mais precisei. Esse é um pequeno presente para demonstrar minha gratidão.

À minha mãe pelo afeto e proteção, dedicados desde o meu nascimento e aos meus irmãos: Valquíria, Wesley e Arine, e em especial à Valquíria, que desde sempre me incentivou a ir adiante e nunca parar.

Ao Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira, por suas orientações e reflexões, contribuindo de forma valiosa na construção desse trabalho, suas ponderações foram fundamentais na conclusão desta pesquisa.

Aos professores que compuseram a banca na fase de qualificação e defesa, Prof. Dra. Maria José Ferreira da Silva, Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi, que contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa, de forma também preciosa para a evolução deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, em especial: Anderson Anzai dos Santos, Jane Lopes de Souza Goma, Eduardo Ribeiro Kuntz e José Ronaldo Alves Araújo, por nossos debates e reflexões, além do apoio na minha trajetória.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que me possibilitaram novas experiências e conhecimentos na minha jornada. À Suzanne Lima de Freitas, por sua dedicação, paciência, amizade e profissionalismo.

Ao meu ex-coordenador Francisco Cerialle, pela confiança e oportunidade, minha gratidão.

Ao meu coordenador de curso, Robson Vieira, pela oportunidade estendida.

À minha coordenadora de curso Tânia Araújo, por ser tão compreensiva e parceira.

SANT'ANNA, Viviane Nogueira Ponciano. **Formação de professores e tecnologia: uma discussão sobre semelhança de triângulos**. 2020. 165 f.: il. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020.

RESUMO

A presente investigação tem como foco a formação de professores de educação básica em contextos mediados por tecnologias digitais. A partir de um tema matemático, a semelhança de triângulos, são constituídos aportes didáticos e históricos, os quais, por sua vez, deram origem aos estudos relacionados às noções de congruência, proporcionalidade, paralelismo, transformações geométricas, entre outras. Estes estudos, aliados aos aportes teóricos referentes a formação de professores em cenários com a presença de tecnologias digitais, deram origem a uma série de atividades, com base no objetivo central da proposta, que é o de refletir sobre quais contribuições para a ressignificação dos conhecimentos acerca de semelhança de figuras planas (e de triângulos, em particular) podem advir a partir da construção de estratégias didáticas com o uso de tecnologias digitais em uma proposta ligada à formação de professores e à sua prática. A abordagem metodológica traz elementos da Engenharia Didática e as atividades são analisadas levando em conta os níveis de apreensão figural que podem surgir a partir das conjecturas eventualmente realizadas pelos aprendizes, as questões relativas ao conhecimento matemático e sua ligação intrínseca, no caso, à fluência e à percepção acerca do potencial interativo da interface tecnológica envolvida. Como resultado, a partir do contexto das atividades trazemos uma discussão de questões didáticas relacionadas à exploração das construções sugeridas, realizadas por meio do *software* GeoGebra.

Palavras-chave: Semelhança de triângulos. Fluência em tecnologias. Formação de professores.

SANT'ANNA, Viviane Nogueira Ponciano. **Teacher education and technology: a discussion on similarity of triangles**. 2020. 165 f.: il. Thesis (Master's Degree in Mathematics Education) – Postgraduate Program in Mathematics Education. Pontifical Catholic University of São Paulo, São Paulo, 2020.

ABSTRACT

This research focuses on the training of basic education teachers in contexts mediated by digital technologies. From a mathematical theme, the similarity of triangles, didactic and historical contributions are constituted, which, in turn, gave rise to studies related to the notions of congruence, proportionality, parallelism, geometric transformations, among others. These studies, together with the theoretical contributions related to teacher training in scenarios with the presence of digital technologies, gave rise to a series of activities, based on the central objective of the proposal, which is to reflect on what contributions to the resignification of knowledge about the similarity of flat figures (and triangles in particular) can come from the construction of didactic strategies with the use of digital technologies in a proposal linked to the formation of teachers and their practice. The methodological approach brings elements of Didactic Engineering and the activities are analyzed taking into account the levels of figural apprehension that may arise from the conjectures eventually made by the apprentices, the questions related to mathematical knowledge and its intrinsic connection, in this case, to fluency and perception about the interactive potential of the technological interface involved. As a result, from the context of the activities we bring a discussion of didactic questions related to the exploration of suggested constructions, carried out through the GeoGebra software.

Keyword: Similarity of triangles. Fluency in technologies. Teacher training.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Sobre a proposição II, livro VI	34
Figura 2: Sobre a proposição IV, livro VI	35
Figura 3: Sobre a proposição V, livro VI	36
Figura 4: Sobre a proposição VI, livro VI	37
Figura 5: Sobre a proposição VIII, livro VI	38
Figura 6: Sobre a proposição IX, livro VI	40
Figura 7: Sobre a proposição XVI, livro VI	40
Figura 8: O triângulo ABC e seus elementos.....	43
Figura 9: Triângulos congruentes.....	45
Figura 10: Caso Lado-ângulo-lado (LAL) de congruência de triângulos	45
Figura 11: Caso ALA de congruência de triângulos	46
Figura 12: Demonstração do caso ALA.....	47
Figura 13: Caso LLL de congruência	47
Figura 14: Caso LAA _o de congruência de triângulos	49
Figura 15: Retas paralelas e os ângulos alterno internos congruentes α e β	50
Figura 16: Duas paralelas interceptadas por uma transversal produzem no máximo dois ângulos distintos	50
Figura 17: Três retas paralelas r, s e t , cortadas por duas transversais u e v	52
Figura 18: Divisão das medianas de um baricentro.....	54
Figura 19: Três etapas para a divisão de um segmento dado em um número finito n	55
Figura 20: triângulos semelhantes.....	57
Figura 21: Os triângulos ABC e A'B''C'' são congruentes	58
Figura 22: Caso AA de semelhança de triângulos.....	60
Figura 23: Caso especial de congruência de triângulos.....	60

Figura 24: Semelhança de triângulos retângulos	61
Figura 25: Caso LLL de semelhança de triângulos	62
Figura 26: Se a razão de semelhança entre dois triângulos é negativa, eles têm orientações contrárias.	63
Figura 27: Exemplos de diferentes organizações perceptivas de figuras	89
Figura 28: quadriláteros fracionados de diferentes maneiras	92
Figura 29: <i>Os dois círculos de conhecimento pedagógico e conhecimento de conteúdo agora são reunidos pelo conhecimento de conteúdo pedagógico</i>	100
Figura 30: <i>tecnologia separada da PCK.....</i>	101
Figura 31: <i>Pedagogical Technological Content Knowledge (TPACK)</i>	101
Figura 32: <i>Ciclo da fluência no uso de tecnologias em processos educacionais</i>	108
Figura 33: <i>Articulações relativas à fluência no uso de tecnologias nos processos educacionais (plano referencial e plano aplicado).....</i>	109
Figura 34: <i>Triângulo Didático</i>	111
Figura 35: <i>Triângulo e ferramenta Polígono</i>	123
Figura 36: <i>Etapas da construção da atividade 2 (a)</i>	129
Figura 37: <i>Etapas da construção da atividade 2 (b)</i>	129
Figura 38: <i>Etapas da construção da atividade 2 (c)</i>	130
Figura 39: <i>Etapas da construção da atividade 2 (d)</i>	131
Figura 40: <i>Uma continuação possível para a atividade 2</i>	135
Figura 41: <i>Outra continuação possível para a atividade 2</i>	136
Figura 42: <i>Configuração final da representação proposta na atividade 3</i>	139
Figura 43: <i>Uma configuração para discutir condições de existência relativas à atividade 3.....</i>	144
Figura 44: <i>Construção parcial (semelhança e homotetia)</i>	145
Figura 45: <i>Configuração do controle deslizante</i>	146

Figura 46: <i>Construção parcial (semelhança e homotetia) – continuação</i>	147
Figura 47 <i>Semelhança e homotetia</i>	147
Figura 48: <i>Possíveis modificações na configuração da construção a partir da manipulação de A</i>	149
Figura 49: <i>Possíveis modificações na configuração da construção a partir da manipulação de B</i>	149
Figura 50: <i>Possíveis modificações na configuração da construção a partir da manipulação de C</i>	150
Figura 51: <i>Possíveis modificações na configuração a partir da manipulação de Raio</i>	152
Figura 52: <i>Articulações entre o saber matemático formal, as tecnologias e a didática</i>	158

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Comparação entre os currículos.....	68
Quadro 2: Tipos de apreensão operatória de figuras.	92

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS.....	21
1 INTRODUÇÃO	25
2 ESTUDOS PRELIMINARES	31
2.1 UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.....	31
2.2 UMA NOÇÃO DE SEMELHANÇA	42
2.2.1 A noção de triângulo	42
2.2.2 A noção de congruência de triângulos.....	43
2.2.3 A noção de paralelismo.....	49
2.2.4 A noção de semelhança de triângulos.....	52
2.3 CURRÍCULOS	64
2.4 REVISÃO DE LITERATURA.....	69
3 REFERENCIAIS TEÓRICOS.....	87
3.1 AS FORMAS DE APREENSÃO EM RELAÇÃO AO ENSINO DA GEOMETRIA.....	87
3.2 FORMAÇÃO DE PROFESSORES	95
3.3 TECNOLOGIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	99
3.4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....	110
3.4.1 Dialética de ação.....	114
3.4.2 Dialética de formulação.....	114
3.4.3 Dialética de validação	115
3.4.4 Dialética de institucionalização	115
4. PROPOSTA DE ATIVIDADES: APORTES METODOLÓGICOS E PROCEDIMENTAIS	117
4.1 PRESSUPOSTOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA	117
4.2 A PROPOSTA DE ATIVIDADES	120
4.2.1 Análises preliminares para a proposta de atividade	120
4.2.2 Atividades da proposta.....	121
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	154
REFERÊNCIAS.....	160

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objeto de estudo a semelhança de triângulos no ensino da geometria. Foi realizada como parte dos estudos previstos no âmbito do grupo PEA-MAT (Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, mais especificamente como parte do projeto “Tecnologias e educação matemática: investigações sobre a fluência em dispositivos, ferramentas, artefatos e interfaces”¹. Em termos pessoais, a aproximação do tema ocorreu em 2008, quando realizei uma especialização na Universidade Federal Fluminense. Por ocasião da especialização, tive contato com diversos assuntos, entre eles, temas ligados ao ensino da geometria. O interesse foi desenvolvendo na medida em que obtinha leituras relacionadas ao objeto de estudo e se concretizou ao ingressar no mestrado.

A seleção dos fundamentos motivadores para a realização desta pesquisa está ligada a uma proposta de rever a maneira como se ensinam conceitos ligados à geometria, e, em particular, o estudo de semelhança de figuras. Enquanto docente, acredito que a maneira de ensinar nem sempre favorece a compreensão do aluno, tornando-a difícil ou sem significado, o que contribui para o seu desinteresse.

Em meu período de graduação, vivenciei algumas apreensões em torno do ensino e da aprendizagem, bem como acerca da utilização de recursos tecnológicos para subsidiar o processo de demonstração em relação às características e/ou as propriedades das figuras planas.

Tendo em vista que a geometria é um ramo essencial da Matemática, Almouloud et al. (2004) destacam que professores das séries finais do ensino fundamental revelam incômodos relacionados tanto ao seu ensino, quanto a sua aprendizagem. Isto pressupõe uma necessidade de maiores investimentos em

¹ Projeto apoiado pelo CNPq (Processo no. 477783/2013-9)

pesquisas, cursos de formação, cursos de extensão, e de outras iniciativas que priorizem reflexões mais apropriadas à formação de professores.

A Secretaria de Ensino Fundamental do Ministério da Educação (MEC), por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, Ministério da Educação, 1998), aponta a necessidade de revisão dos modelos de formação de professores para a efetiva implantação de novas alternativas que complementam tais diagnósticos e provocam discussões a respeito do que, como e quando ensinar determinado conteúdo. (ALMOULOU, MANRIQUE, *et al.*, 2004, p. 94).

Uma das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) relacionada aos ensinos Fundamental e Médio é para que se desenvolva um ensino contextualizado e interdisciplinar que favoreça a noção e uso de situações que concorram para relacionar a prática com a teoria, assim como fomentem a compreensão e uso crítico das tecnologias. Neste sentido,

É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, p. 42).

No âmbito da geometria plana, então, interesse inicial da investigação aqui relatada, cumpria eleger um tema e delimitar um problema de pesquisa, que, por sua vez, permitisse construir uma descrição densa do contexto (a problematização), delimitar objetivos e questões (OLIVEIRA, 2019). Dentre os temas desta ordem, elegeu-se “semelhança de triângulos” como aquele que permitiria um recorte adequado aos interesses ligados à prática profissional da pesquisadora, que percebeu este como um tópico de relevância entre aqueles que transitam na escola, por meio das intervenções ligadas ao currículo. De forma mais específica, pode-se indicar que o discurso aqui se relaciona à proporção e aos casos de semelhança.

As leituras sobre o tema e o contato com a base de pesquisas já existentes indicam que a abordagem sobre o conceito de semelhança é frequentemente apresentada aos alunos de maneira fragmentada, distante de sua vida cotidiana. Para Maciel (2004), existe uma ausência nas conexões entre os diversos temas da

própria Matemática com outros saberes que possibilitem estabelecer relações entre eles por meio da construção e validação dos conceitos envolvidos. Ainda, Leite (2017, p.16) entende que, por causa desta fragmentação, interrompe-se “o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar e transcender situações relevantes” presentes no mundo dos aprendizes.

Nesse sentido, um dos enfoques desta pesquisa se situa no uso de recursos tecnológicos que potencializem o ensino e aprendizagem de tópicos abordados no ensino de geometria, e estende-se para os conhecimentos necessários que o professor deve ter para aplicá-los em seu ambiente profissional.

A partir do momento em que se resolve empregar determinadas tecnologias em sala de aula:

torna-se essencial refletir a respeito das formas como isto se dará, bem como analisar a perspectiva tanto do professor, quanto dos alunos. Isto significa refletir como serão planejadas as atividades neste novo cenário, que mudanças serão efetivadas a partir da definição de uma estratégia que considere a presença destes artefatos, quais papéis serão efetivamente desempenhados pelas pessoas com estes dispositivos, entre outros dilemas (OLIVEIRA, GONÇALVES e MARQUETTI, 2015, p. 475).

Nesse sentido, Oliveira (2018) alude ao estudo de Tikhomirov (1981) que parte do princípio de que o uso de tecnologias viabiliza a reorganização do pensamento das pessoas em torno de novas possibilidades que vão além da mera substituição ou suplementação de seus recursos originais.

Neste mesmo sentido, Borba e Penteado (2016, p.34) asseveram que a “forma de tratar a tecnologia está relacionada com o nosso posicionamento sobre o papel das mídias no processo de construção do conhecimento”. Entende-se que empregar tecnologias digitais pode representar um avanço nos processos de ensino, à medida que esta escolha amplie possibilidades pelas quais seja possível estruturar sequências que favoreçam relações entre diferentes conhecimentos.

De um ponto de vista relacionado, há o conhecimento do professor que ensina matemática. Segundo Shulman (1987), para ensinar, é preciso, primeiro, entender sobre os temas tratados. Assim, o autor defende que o professor compreenda criticamente a totalidade dos conteúdos a serem ensinados, e, quando possível, de múltiplas maneiras, confrontando uma ideia dada com outras dentro

do mesmo assunto, assim como com outras ideias de outros temas de alguma forma correlatos. Para estender o alcance dos saberes docentes, Shulman (1986) indica que a construção de saberes pedagógicos e acerca do conteúdo devem receber atenção, em um contexto que inclui, também, conhecimentos referentes ao currículo e alunos, por exemplo, e que coloca em evidência uma interseção crítica justamente entre os dois saberes mais explorados: o *Pedagogical Content Knowledge (PCK)*, ou seja, o conhecimento pedagógico sobre o conteúdo, que considera as particularidades relativas às formas específicas pelas quais temas de determinadas áreas devem ser explorados. Ou seja, a formação dos professores deve considerar suficiente ênfase tanto na didática quanto no conhecimento específico, sem esquecer das formas pelas quais estes dois saberes se complementam e se integram.

Depois, Mirsha e Kohler (2006) sugerem a adição de mais um elemento a estes conjuntos, representado pela *tecnologia*, ao considerar o papel essencial que estes meios representam como elementos capazes de oferecer recursos para que se construam estratégias didáticas diferenciadas para abordagem de temas específicos. Para o amálgama de saberes assim constituídos, os autores empregam o acrônimo *TPACK – Technological Pedagogical Content Knowledge*.

Assim, a pesquisa aqui descrita tem por objetivo identificar quais contribuições podem ocorrer a partir de estratégias didáticas para o ensino de temas de geometria plana (semelhança de triângulos, em particular), considerando o uso de tecnologias digitais, por meio de uma proposta dirigida para professores da Educação Básica. Trata-se de uma reflexão teórica, uma vez que as atividades não serão aplicadas no âmbito desta investigação. A ideia central desta investigação é a de que os docentes que venham a empregar as atividades em suas práticas profissionais ou processos formativos continuados possam aplicar o conhecimento acerca do tema em tela e que tenham, eventualmente, a possibilidade de elaborar propostas de ensino coerentes dos pontos de vista didático. As atividades, elaboradas a partir da compreensão dos pressupostos teóricos anunciados poderiam, desta forma, concorrer para a superação do cenário descrito por autores como Almouloud et al., (2004) e Maciel (2004), que ressaltam que o ensino de geometria, tanto no âmbito escolar quanto na formação de

professores, é marcado por uma abordagem fragmentada pela qual o mesmo é levado a efeito.

A questão que norteia esta trajetória, pode ser caracterizada da seguinte forma: *quais contribuições para a ressignificação dos conhecimentos acerca de semelhança de triângulos podem advir a partir da construção de estratégias didáticas com o uso de tecnologias digitais em uma proposta teórica ligada à formação de professores e à sua prática?*

As atividades aqui pretendem, então, contribuir para que a ressignificação de conhecimentos emergja no âmbito da noção de semelhança de triângulos. Deste modo, aqui, tem-se um trabalho que visa discutir uma proposta didática que poderia ser trabalhada pelos professores com seus alunos, e, ainda, levar os docentes à reflexão sobre a possibilidade de construção de saberes relativos ao tema matemático em tela a partir do emprego de tecnologias, como indicado por Oliveira (2018).

Aqui, apresentamos elementos que norteiam e justificam a realização de nossa pesquisa, apresenta-se, no capítulo dois, estudos preliminares com o propósito de criar aproximações em relação à temática do estudo, semelhança de triângulos; no capítulo três, tecemos uma discussão em relação aos nossos aportes teóricos, as formas de apreensão em relação ao ensino da geometria (DUVAL, 2012), relacionados à formação de professores (SHULMAN, 1986) e (SHULMAN, 1987), quanto à formação de professores e tecnologia (MISHRA; KOHLER, 2006), além das contribuições de Oliveira (2018). Em relação à construção das atividades, esta pesquisa se apoia em pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), em especial, nas contribuições de Brousseau (2012).

No capítulo quatro, apresentamos nossa metodologia, embasados por pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1995), a partir da qual apresentamos a proposta de atividades com as devidas análises; e, por último, no capítulo cinco, nas nossas considerações finais discutimos as possibilidades de estudar a noção de semelhança de triângulos a partir do estudo realizado.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Nesses estudos preliminares, apresentamos considerações sob uma perspectiva histórica que nos permite uma aproximação histórica do objeto semelhança. Acerca da noção de semelhança tecemos uma discussão a partir da noção de triângulo, a noção de congruência de triângulo, a noção de paralelismo e por último a noção de semelhança entre triângulos. Algumas considerações a respeito da noção de semelhança também são apresentadas com base nos currículos e ainda, organizamos uma revisão da literatura referente à nossa temática.

2.1 Uma perspectiva histórica

Uma primeira discussão que trazemos aqui refere-se a uma discussão histórica do objeto. Segundo Roque (2012), sabe-se muito pouco sobre a vida de Euclides – inclusive, não é sequer possível constatar que tenha nascido em Alexandria, o que contradiz o discurso positivista empregado por outros autores. Para a autora, não existe registro original da obra, apenas versões e traduções tardias.

De todo modo, a popularidade de Euclides procede, em especial, de sua obra “Os Elementos”, publicada por volta do ano 300 a.C., e continuada desde seus sucessores até os dias atuais. Acerca deste compêndio, menciona a autora:

[...] Um dos fragmentos mais antigos de uma dessas versões, encontrado entre diversos papiros gregos em *Oxyrhynque*, cidade às margens do Nilo, data, provavelmente, dos anos 100 da Era Comum. Nos *Elementos* são expostos resultados de tipos diversos, organizados de modo particular. [...] nas últimas décadas, diversos historiadores têm analisado as origens das crenças sobre as motivações de Euclides (ROQUE, 2012, p. 120).

Roque (2012) baseia suas contestações no fato de todas as construções geométricas da obra “Os Elementos” terem sido realizadas apenas com régua e compasso. A autora enfatiza que outros matemáticos gregos, entre eles Arquimedes, não realizaram métodos de construção euclidianos, tendo por

justificativa de que apenas régua e compasso não seriam suficientes para resolver dilemas matemáticos antes e depois de Euclides.

Além disso, Roque (2012) salienta que as narrativas no período euclidiano sobre a matemática grega são bem limitadas: “as mais antigas datam de uma época bem distante de Euclides, caso das obras de Proclus e Pappus” (p. 121). Segundo a autora, Proclus afirma, por exemplo, a superioridade dos teoremas em relação aos problemas:

[...] os teoremas enunciam a parte ideal desses seres que pertence ao mundo das ideias, e os problemas constituem apenas um modo pedagógico de se chegar aos teoremas. Se dissermos que os ângulos internos de um triângulo são iguais a dois ângulos retos, teremos um teorema, pois essa propriedade vale para *todo* triângulo (no universo da geometria euclidiana). Todo enunciado universal sobre um objeto geométrico é um teorema geométrico. Os problemas são um primeiro passo para passarmos do mundo prático à geometria. Para Proclus, seguidor de Platão, quando a geometria toca o mundo prático opera por problemas e só ascende ao saber superior por meio dos teoremas. Grande parte da crença que temos na motivação platônica de Euclides decorre da utilização dos *Comentários* de Proclus (ROQUE, 2012, p. 121).

Como podemos notar, Roque (2012) salienta, a partir dos comentários de Proclus, a crença do modelo platônico seguido por Euclides em que os teoremas, como parte ideal do objeto matemático, emergem pedagogicamente da constituição de problemas: “a resolução de problemas geométricos envolve sempre uma construção, e o critério usado nessa classificação baseia-se nos tipos de linhas necessárias para efetuá-la” (ROQUE, 2012, p. 121).

A partir dessa perspectiva é que compreendemos a constituição de “Os Elementos” de Euclides, obra composta por nove noções comuns (primitivas) e de cinco postulados. Assim, “Os Elementos” estão organizados em treze volumes:

Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e o teorema “de Pitágoras”; Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados. Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos; Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza; Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas; Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas; Livro X:

propriedades e classificação das linhas incomensuráveis; Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares (ROQUE, 2012, p. 129,130).

De acordo com Roque (2012), é difícil comprovar teoremas dos Elementos que tenham sido descobertos pelo próprio Euclides; além disso, a maneira escolhida para organização dos livros também é objeto de extensas pesquisas, pois os resultados dos primeiros livros não são necessariamente os mais antigos, isto é, a obra não é compilada em ordem cronológica. Menciona-se que os livros aritméticos dos Elementos – VII a IX – atribuídos aos pitagóricos, sejam os mais antigos. Os livros II, III e IV não apresentam uma ordem sequencial tão nítida quanto a dos livros I, V e VI, o que pode indicar que aqueles sejam anteriores a esses.

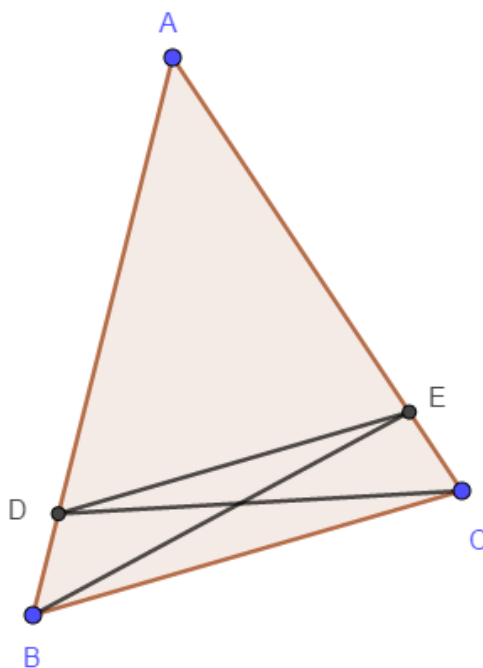
Da compilação dos Elementos, recorreremos ao livro VI, que explora as aplicações do livro V, isto é, os teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em figuras planas, onde encontramos referências sobre os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos a partir de suas proposições.

Assim, o sexto livro inicia com a seguinte definição: “figuras retilíneas semelhantes são quantas têm tanto os ângulos iguais, um a um, quanto os lados ao redor dos ângulos iguais em proporção” (EUCLIDES, 2009, p. 231). Dessa definição, partimos para as proposições que tratam do nosso objeto de estudo.

Na proposição II do livro VI, Euclides expõe um teorema que menciona retas paralelas cortadas por uma transversal.

Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante (EUCLIDES, 2009, p. 233).

Figura 1: Sobre a proposição II, livro VI



Fonte: elaborada pela autora

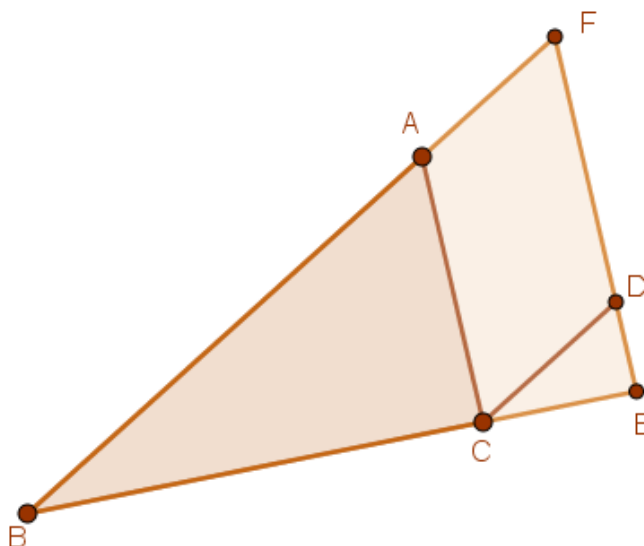
A proposição II de Euclides pode ser demonstrada da seguinte forma (figura 1):

Fique, pois, traçada a DE paralela a um dos lados, o BC, do triângulo ABC; digo que, como a BD está para DA, assim a CE para EA. Fiquem, pois, ligadas a EB, CE. Portanto o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; pois estão sobre a mesma base DE e nas mesmas paralelas DE, BC; mas o triângulo ADE é algum outro. E as iguais têm para a mesma a mesma razão; portanto, como o triângulo BDE está para o [triângulo] ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Mas, por um lado, como o triângulo BDE para o ADE, assim BD para DA; pois, estando sob a mesma altura, a perpendicular traçada do E até o AB, estão entre si como as bases. Pelas mesmas coisas, então, como o triângulo CDE para o ADE, assim a CE para EA; portanto, também como BD para DA, assim CE para EA. Mas, então, fiquem cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como BD para DA, assim CE para EA, e fique ligada a DE, digo que DE é paralela à BC. Tendo, pois, sido construídas as mesmas coisas, como BD está para a DA, assim CE para EA, mas por um lado, como BD para DA, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE, portanto, também como o triângulo BDE para o triângulo ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE;

e estão sobre a mesma base DE. Mas os triângulos iguais e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas. Portanto, a DE é paralela à BC. Portanto, caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 234).

A proposição IV traz o seguinte enunciado: “os lados à volta de ângulos iguais dos triângulos equiângulos estão em proporção, e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos” (EUCLIDES, 2009, p. 235).

Figura 2: Sobre a proposição IV, livro VI



Fonte: elaborada pela autora

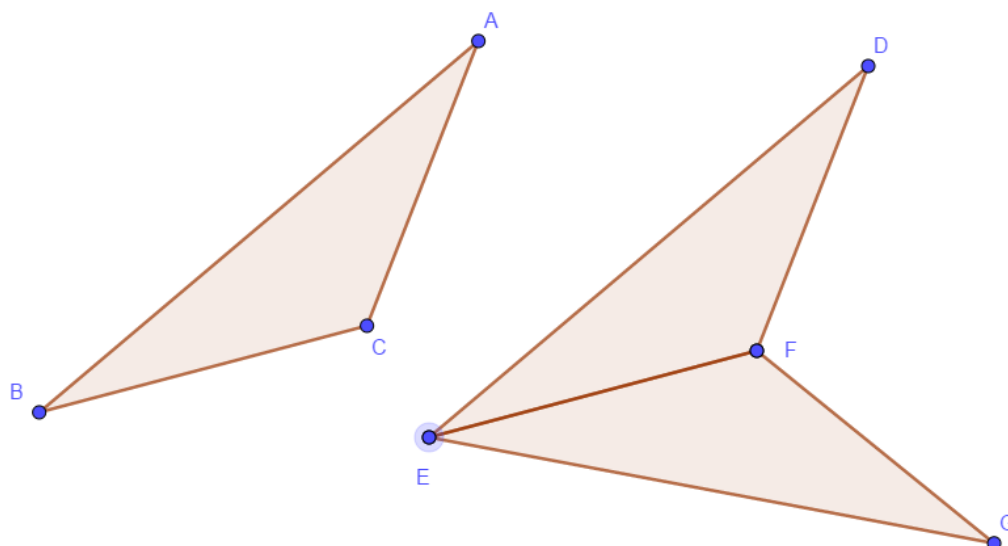
Segue a demonstração, cuja ilustração se encontra na figura 2:

Sejam os triângulos ABC, DCE, tendo, por um lado, o ângulo sob ABC igual ao sob DCE, e, por outro lado, o sob BAC, ao sob CDE e ainda sob ACB, ao sob CED; digo que os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos ABC, DCE estão em proporção e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos. Fique, pois a posta a BC sobre uma reta com CE. E, como os ângulos sob ABC, ACB são menores do que dois retos e os sob ACB é igual ao sob DEC, portanto, os sob ABC, DEC são menores do que dois retos; portanto, as BA, ED, sendo prolongadas, encontrar-se-ão. Fiquem prolongadas e encontram-se no F. E, como o ângulo sob DCE é igual ao sob ABC, a BF é paralela à CD. De novo, como o sob ACB é igual ao sob DEC, a AC é paralela à FE. Portanto, o FACD é um paralelogramo; portanto, a FA é igual à DC, enquanto a AC, à FD. E, como a AC foi traçada paralela a um, o FE, do triângulo FBE,

portanto, como a BA está para a AF, assim BC para CE. Mas a AF é igual à CD; portanto, como a BA para CD, assim a BC para CE, e, alternadamente, como AB para BC, assim a DC para CE. De novo, como a CD é paralela à BF, portanto, como a BC para CE, assim a FD para DE, e alternadamente, como BC para a CA, assim CE para a ED, portanto, por igual posto, como BA para AC, assim a CD para DE. Portanto, os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos equiângulos estão em proporção e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 235/236).

Por sua vez, a Proposição V, ilustrada na figura 3, aponta: “caso dois triângulos tenham os lados em proporção, os triângulos estão equiângulos, e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos (EUCLIDES, 2009, p. 236).

Figura 3: Sobre a preposição V, livro VI



Fonte: elaborada pela autora

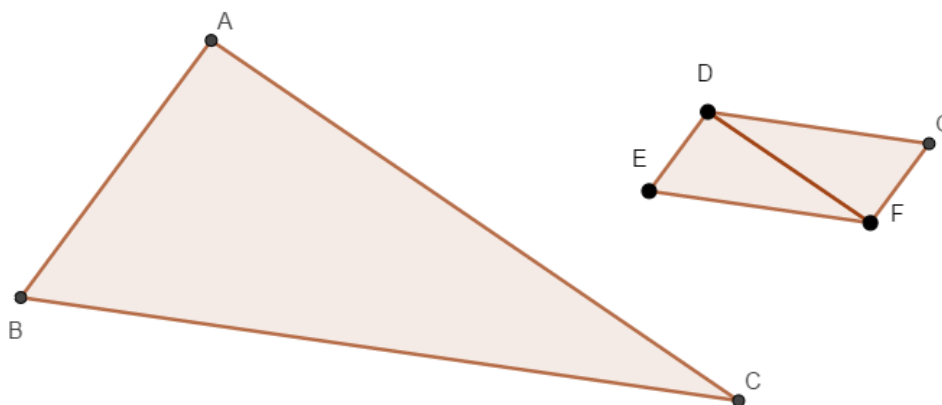
A seguir, uma demonstração para a Proposição V:

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os lados em proporção, por um lado, como o AB para o BC, assim o DE para EF, e, por outro lado, como o BC para o CA, assim o EF para o FD, e ainda como BA para o AC, assim o ED para o DF; digo que o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF e terão os ângulos iguais, aqueles sob os quais se estendem os lados homólogos, por um lado, o sob ABC, ao sob DEF e, por outro lado, o sob BCA ao sob EFD, e ainda o sob BAC, ao sob EDF. Fiquem, pois, construídos, sobre a reta EF e nos pontos E, F sobre ela, por um lado, o sob FEG igual ao ângulo sob ABC e, por outro lado, o sob EFG igual ao

sob ACB; portanto, o junto ao A restante é igual ao junto ao G restante. Portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o [triângulo] EGF. Portanto, os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos ABC, EGF estão em proporção e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos; portanto, como o AB para o BC, [assim] o GE para o EF. Mas, como o AB para o BC, assim, foi suposto, o DE para o EF; portanto, com o DE para o EF, assim o GE para o EF. Portanto, cada um dos DE, GE tem para o EF a mesma razão; portanto, o DE é igual ao GE. Pelas mesmas coisas, então, também o DF é igual ao GF. Como, de fato, o DE é igual ao EG, e o EF é comum, os dois DE, EF, então, são iguais aos dois GE, EF; e a base DF [é] igual à base FG; portanto, o ângulo sob DEF é igual ao ângulo sob GEF, e o triângulo DEF é igual ao triângulo GEF, e os ângulos restantes são iguais aos ângulos restantes, aqueles sob os quais se estendem os lados iguais. Portanto, por um lado, o ângulo sob DEF é igual ao sob GFE, e, por outro lado, o sob EDF, ao sob EGF. E, como o sob FED é igual ao sob GEF, mas, sob GEF, ao sob ABC, portanto, também o ângulo sob ABC é igual ao sob DEF. Pelas mesmas coisas, então, também ACB é igual ao sob DFE e, ainda, o junto ao A, ao junto ao D; portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF. Portanto, caso dois triângulos tenham os lados em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos; o que era preciso provar (EUCLIDES, 23009, p. 236-237).

O enunciado da Proposição VI é assim constituído: “caso dois triângulos tenham um ângulo igual ao um ângulo, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos” (EUCLIDES, 2009, p.237). A figura 4 tem representações que permitem compreender melhor o enunciado.

Figura 4: Sobre a preposição VI, livro VI



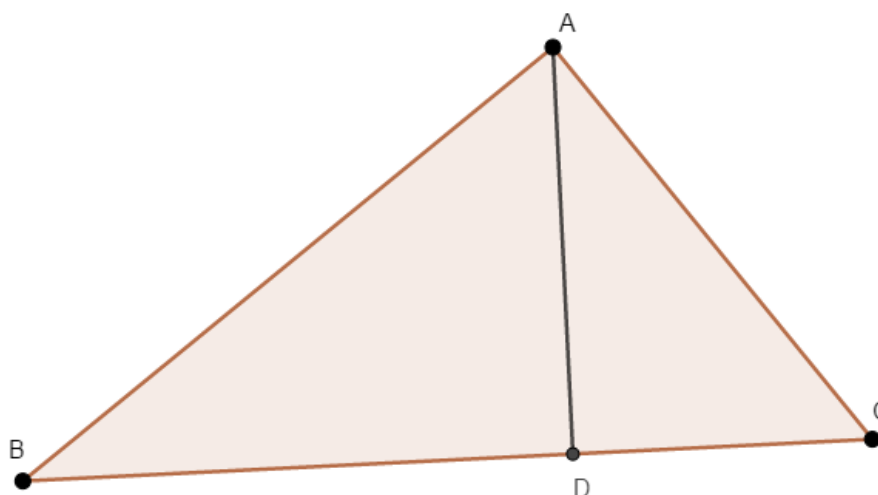
Fonte: elaborada pela autora

Na sequência, a demonstração da Proposição VI:

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo um ângulo, o sob BAC, igual a um ângulo sob EDF, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, como o BA para o AC, assim o ED para o DF; digo o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF, e terão o ângulo sob ABC igual ao sob DEF, e sob o ACB, ao sob DFE. Fiquem, pois, construídos, sobre a reta DF e nos pontos D, F sobre ela, por um lado, o sob FDG igual a qualquer um dos sob BAC, EDF, e, por outro lado, o sob DFG igual ao sob ACB; portanto, o ângulo junto ao B restante é igual ao junto ao G restante. Portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DGF. Portanto, proporcionalmente, como o BA está para o AC, assim o GD para o DF. Mas foi suposto também como o BA par o AC, assim o ED para DF, portanto, também como o ED para o DF, assim o GD para o DF. Portanto, o ED é igual ao DG; e o DF é comum; então, os dois ED, DF são iguais aos dois GD, DF; e o ângulo sob EDF [é] igual ao ângulo sob GDF; portanto, a base EF é igual á base GF, e o triângulo DEF é igual ao triângulo GDF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais. Portanto, por um lado, o sob DFG é igual ao sob ACB; portanto, também o sob ACB é igual ao sob DFE. Mas, foi também suposto o sob BAC igual ao sob EDF; portanto, também o junto ao B restante é igual ao junto ao E restante; portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF. Portanto, caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo e os lados à volta dos ângulos iguais em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 237-238).

A Proposição VIII (figura 5) é apresentada como um “caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si (EUCLIDES, 2009, p. 240).

Figura 5: Sobre a preposição VIII, livro VI



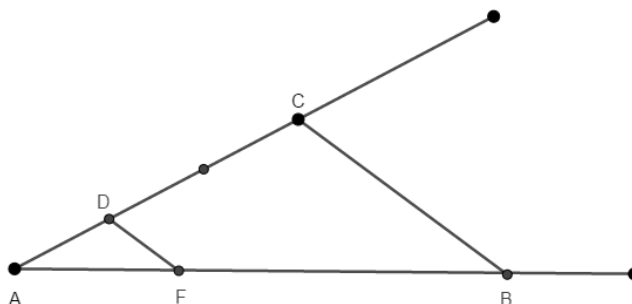
Fonte: elaborada pela autora

Segue a demonstração da Proposição VIII:

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo reto o ângulo sob BAC e fique traçada do A até o BC a perpendicular AD; digo que cada um dos triângulos ABD, ADC é semelhante ao ABC todo e, ainda, entre si. Pois, como o sob BAC é igual ao sob ADB; pois, cada um é reto; e o junto ao B é comum dos dois triângulos, tanto do ABC quanto do ABD, portanto, o sob ACB restante é igual ao sob BAD restante; portanto o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo ABD. Portanto, como BC, que subtende o reto do triângulo ABC, está para o BA, mesma coisa que subtende o reto do triângulo ABD, assim, o mesmo AB, que subtende o ângulo junto ao C do triângulo ABC, para o BD, que subtende o sob BAD, igual, do triângulo ABD, e, ainda, o AC para o AD, subtendendo o ângulo junto ao B, comum dos dois triângulos. Portanto, o triângulo ABC tanto é equiângulo com o triângulo ABD quanto têm os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção. Portanto, o triângulo ABC [é] semelhante ao triângulo ABD. Do mesmo modo, então, provaremos que também o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADC; portanto cada um dos [triângulos] ABD, ADC é semelhante ao ABC todo. Digo, então, que também os triângulos ABD, ADC são semelhantes entre si. Pois, como sob BDA é reto, é igual ao sob ADC, reto, mas, certamente, também o sob BAD foi provado igual ao junto ao C, portanto, também o junto B restante é igual ao sob DAC restante; portanto, o triângulo ABD é equiângulo com o triângulo ADC. Portanto, como BD, subtendendo o sob BAD do triângulo ABD, está para o DA, subtendendo o junto ao C do triângulo ADC igual ao sob BAD, assim, o mesmo AD, subtendendo o ângulo junto ao B do triângulo ABD, para o DC que subtende o sob DAC do triângulo ADC, igual ao junto B, e, ainda, o BA para o AC, subtendendo os retos; portanto, o triângulo ABD é semelhante ao triângulo ADC. Portanto, caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si [o que era preciso provar] (EUCLIDES, 2009, p. 240-241).

A proposição IX do livro VI, exemplificada na figura 6, trata sobre “separar de uma reta dada a parte que foi prescrita” (p. 241).

Figura 6: Sobre a proposição IX, livro VI



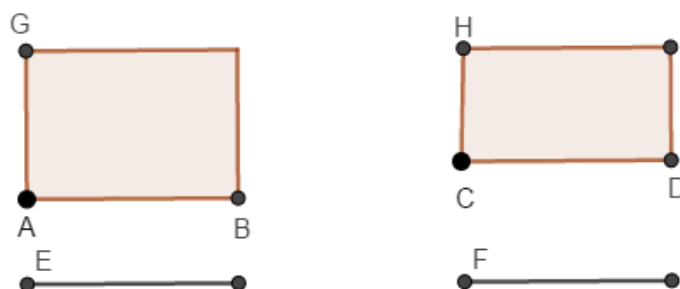
Fonte: elaborada pela autora

A demonstração é dada a seguir:

Seja a reta dada AB; é preciso então, da AB separar a parte que foi prescrita. Fique, então, prescrita a terça. [E] fique traçada através, a partir do A, alguma reta, a AC, contendo um ângulo que foi encontrado ao acaso, com a AB; e fique tomado, ao acaso, o ponto D sobre a AC e fiquem postas as DE, EC iguais à AD. E fique ligada a BC, pelo D fique traçada a DF paralela a ela. Como, de fato, a FD foi traçada paralela a um dos lados, o BC, do triângulo ABC, portanto, em proporção, como a CD está para a DA, assim a BF para a FA. Mas a CD é o dobro da DA; portanto, também a BF é o dobro da FA; portanto a BA é o triplo da AF. Portanto, da reta dada AB foi separada a terça a parte prescrita AF; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 241-242).

A proposição XVI do livro VI, ilustrada na figura 7, afirma, explicitamente, que “caso quatro retas estejam em proporção, o retângulo contido pelos extremos é igual ao retângulo contido pelos meios, e caso o retângulo contido pelos extremos seja igual ao retângulo contido pelos meios, as quatro retas estarão em proporção” (EUCLIDES, 2009, p. 246).

Figura 7: Sobre a proposição XVI, livro VI



Fonte: elaborada pela autora

Segue a demonstração:

Estejam as quatro retas AB, CD, E, F em proporção, como a AB para a CD, assim, a E para a F; digo que o retângulo contido pelas AB, F é igual ao retângulo contido pelas CD, E. Fiquem, [pois], traçadas a partir dos pontos A, C as AG, CH em retos com as retas AB, CD, e fiquem postas, por um lado, a AG igual, à F, e, por outro lado, a CH igual à E. E, fiquem completados os paralelogramos BG, DH. E, como AB está para a CD, assim a E para a F, mas, por um lado, a E é igual à CH, e, por outro lado, a F, à AG, portanto, como AB para a CD, assim a CH para a AG. Portanto, dos paralelogramos BG, DH os lados à volta dos ângulos iguais são inversamente proporcionais. Mas são iguais aqueles paralelogramos, dos quais os lados à volta dos ângulos iguais são inversamente proporcionais; portanto, o paralelogramo BG é igual ao paralelogramo DH. E, por um lado, o BG é o pelas AB, F; pois, a AG é igual à F; e, por outro lado, o DH é o pelas CD, E; pois a E é igual à CH; portanto, o retângulo contido pelas AB, F é igual ao retângulo contido pelas CD, E. Mas, então, seja o retângulo contido pelas AB, F igual ao retângulo contido pelas CD, E; digo que as quatro retas estarão em proporção, como a AB para a CD, assim a E para a F. Tendo, pois, sido construídas as mesmas coisas, como o pelas AB, F é igual ao pelas CD, E, e, por um lado, o pelas AB, F é o BG; pois AG é igual à F; e, por outro lado, o pelas CD, E é o DH; pois, a CH é igual à E; portanto o BG é igual ao DH. E são equiângulos. Mas, dos paralelogramos iguais e equiângulos os lados à volta dos ângulos iguais são inversamente proporcionais. Portanto, como AB está para a CD, assim a CH para a AG. Mas, por um lado, a CH é igual à E, e, por outro lado, a AG, à F; portanto, como a AB está para a CD, assim a E para a F. Portanto, caso quatro retas estejam em proporção, o retângulo contido pelos extremos é igual ao contido pelos meios; e, caso o retângulo contido pelos extremos seja igual ao retângulo contido pelos meios, as quatro retas estarão em proporção; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 246, 247).

Diante das proposições supracitadas, conjecturamos ser possível evidenciar elementos acerca da noção de semelhança. Assim, tomamo De acordo com esses

autores, a definição s como referência a comparação apresentada no Quadro 1, que trazemos mais adiante, no qual identificamos como habilidades a serem adquiridas pelos alunos e que nos direcionam para as proposições de II, IV, V, VI, VIII, IX e XVI de Euclides, que apresentamos nesse tópico.

A seguir, então, faremos um estudo dessas proposições em relação às habilidades de ensino consideradas, mais diretamente envolvidas com nosso objeto de estudo, isto é, a semelhança de triângulos, trazidas no livro VI de “Os Elementos”.

2.2 Uma noção de semelhança

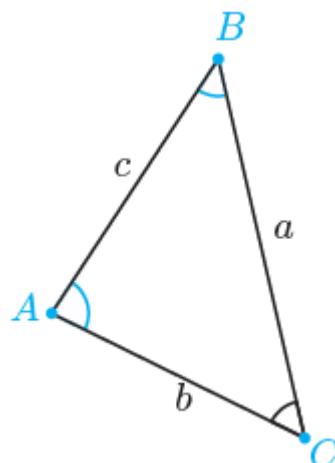
Nesse tópico, com o intuito de discutir a noção de semelhança de triângulos, buscamos, inicialmente, por meio das noções de triângulo, de congruência de triângulos, de paralelismo e de semelhança de triângulos, tecer considerações nessa direção.

2.2.1 A noção de triângulo

A respeito das noções de triângulo, essas não são primitivas; assim, necessitam ser definidas (PAPA NETO, 2017). Conforme Machado (2012), “Triângulos são um caso particular do conjunto das figuras planas conhecidas como polígonos” (p. 43). Antes de continuarmos a nossa discussão acerca da noção de triângulo, cabe situar o que compreendemos por polígonos. Definidos por Proença e Pirola (2009) com referência aos estudos de Klausmeile e Goodwin (1977) polígonos são segmentos de reta, figura simples, figura fechada e figura plana) e os atributos irrelevantes (não interferem na formação do conceito, por exemplo, cor, hachuras, bordas, tamanho, etc).

De acordo com esses autores, a definição elementar de um triângulo pode ser dada como uma figura formada pela união de três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ onde A, B e C são pontos não colineares (figura 8).

Figura 8: O triângulo ABC e seus elementos



Fonte: MACHADO (2012, p.43)

O triângulo determinado pelos pontos A, B e C será denotado por ΔABC , ou seja, $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. Outra maneira pela qual se pode definir um triângulo seria:

[...] dados três pontos não colineares A, B e C, o triângulo ABC é a região do plano delimitada pelos segmentos de reta AB, AC e BC. Os pontos A, B e C são chamados vértices do triângulo, e os segmentos AB, AC e BC são chamados lados do triângulo” (PAPA NETO, 2017, p. 48).

Outra definição desse objeto matemático pode ser vista em Machado (2012):

Um triângulo é a figura formada pela união de três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ onde A, B e C são pontos não colineares. O triângulo determinado pelos pontos A, B e C será denotado por $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. Os pontos A, B e C são vértices de ΔABC , e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são seus lados ou suas arestas. Os ângulos correspondentes aos vértices de um triângulo serão designados pelas letras correspondentes, ou seja: $\angle A = \angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$ e $\angle C = \angle ACB$ (p. 43).

Ainda segundo Papa Neto (2017), acerca da notação do ΔABC , os ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ são chamados de ângulos internos do triângulo ABC.

2.2.2 A noção de congruência de triângulos

Segundo Machado (2012), dois triângulos ABC e DEF são congruentes:

Se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. Se a correspondência biunívoca que caracteriza a relação de congruência for tal que $\angle A \equiv \angle D, \angle B \equiv \angle E, \angle C \equiv \angle F$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \overline{AC} \equiv \overline{DF}, \overline{BC} \equiv \overline{EF}$, então denotamos esta congruência por $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, onde a ordem em que as letras aparece indica a sequência de elementos congruentes (p. 49).

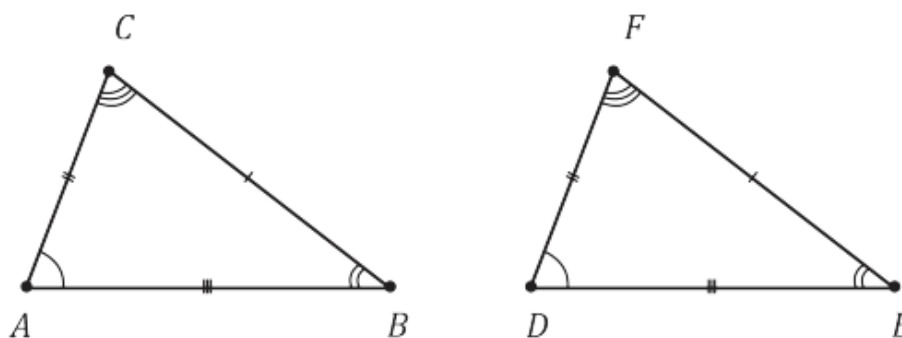
De acordo com Candido e Galvão (2004), a congruência em geometria está associada à igualdade de medidas. A definição de congruência de triângulos nessa mesma perspectiva, trazida por Machado (2012), pode ser observada em Papa Neto (2017), que a introduz a partir da seguinte afirmação: “a relação de congruência de triângulos é uma relação de equivalência” (p. 49). Apresentamos, a seguir, sua demonstração:

[...] dado um triângulo ABC , $AB \equiv AB, AC \equiv AC$ e $BC \equiv BC$, devido à reflexividade da relação de congruência entre segmentos de reta. Também valem $\angle ABC \equiv \angle ABC, \angle BCA \equiv \angle BCA$ e $\angle CAB \equiv \angle CAB$, devido à reflexividade da relação de congruência entre ângulos. Logo, $\triangle ABC \equiv \triangle ABC$.

Agora, dados os triângulos ABC e DEF se $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, então $AB \equiv DE, AC \equiv DF, BC \equiv EF, \angle ABC \equiv \angle DEF, \angle BCA \equiv \angle EFD, \angle CAB \equiv \angle FDE$. Como as relações de congruência de segmentos e de ângulos são ambas simétricas, valem as congruências: $DE \equiv AB, DF \equiv AC, EF \equiv BC, \angle DEF \equiv \angle ABC, \angle EFD \equiv \angle BCA, \angle FDE \equiv \angle CAB$. Isso significa que $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$.

Finalmente, considerando os triângulos ABC, DEF e GHI , se $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ e $\triangle DEF \equiv \triangle GHI$, então $AB \equiv DE, AC \equiv DF, BC \equiv EF, \angle ABC \equiv \angle DEF, \angle BCA \equiv \angle EFD, \angle CAB \equiv \angle FDE$, devido à congruência entre dois primeiros triângulos, e $DE \equiv GH, DF \equiv GI, EF \equiv HI, \angle DEF \equiv \angle GHI, \angle EFD \equiv \angle HIG, \angle FDE \equiv \angle IGH$, por conta da congruência entre o segundo e o terceiro triângulo. Da transitividade da congruência de segmentos e de ângulos, segue que $AB \equiv GH, AC \equiv GI, BC \equiv HI, \angle ABC \equiv \angle GHI, \angle BCA \equiv \angle HIG, \angle CAB \equiv \angle IGH$. (PAPA NETO, 2017, p. 49-50).

O teorema ora demonstrado decorre diretamente da relação de congruência entre segmentos e entre ângulos. Papa Neto (2017) ressalta que, assim como as relações de congruência entre segmentos de reta e ângulos, a relação de congruência de triângulos também é uma relação de equivalência. Trazemos, na figura 9, uma representação na qual o autor atende à seguinte notação: os triângulos ABC e DEF são congruentes e escrevemos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

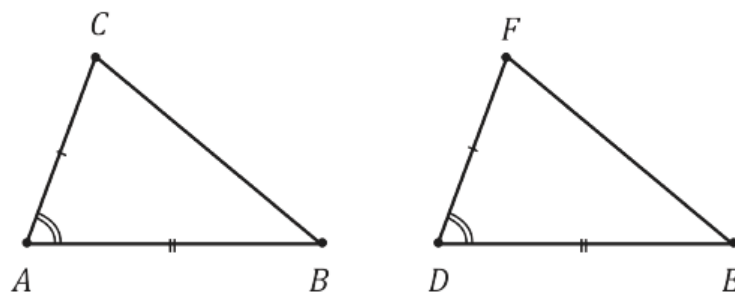
Figura 9: Triângulos congruentes

Fonte: PAPA NETO (2017, p. 49)

Da demonstração e representação da congruência de triângulos, observamos a possibilidade de estabelecer condições mínimas (casos) para que dois triângulos possam ser considerados congruentes.

O primeiro caso, lado-ângulo-lado (LAL, figura 10), segundo Papa Neto (2017), é definido da seguinte maneira: se dois triângulos ABC e DEF são tais que $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $\angle CAB \equiv \angle FDE$, então os mesmos são ditos congruentes.

Candido e Galvão (2004) argumentam que “quando forem dados dois lados e um ângulo, conseguimos construir um único triângulo a menos de sua posição quando os lados ficam contidos nos lados do ângulo” (p. 18).

Figura 10: Caso Lado-ângulo-lado (LAL) de congruência de triângulos

Fonte: PAPA NETO (2017, p.50)

Papa Neto (2017) apresenta um outro modo de verificar a congruência de triângulos, na mesma condição, LAL:

[...] se dois lados de um triângulo (AB e AC) são congruentes respectivamente a dois lados de outro triângulo (DE e DF) e o ângulo formado por esses dois lados ($\angle CAB$) é congruente ao ângulo formado pelos dois lados do outro triângulo ($\angle FDE$), então os dois triângulos são congruentes, ou seja, o terceiro lado de um triângulo é congruente ao terceiro lado do outro triângulo ($BC \equiv EF$)

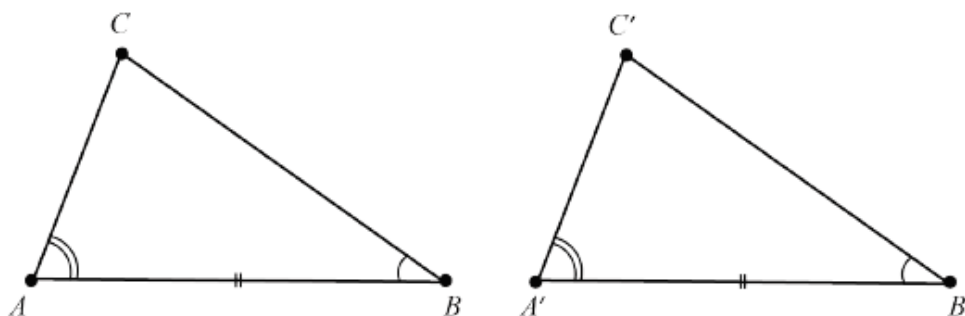
e os dois outros ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes aos dois ângulos restantes do outro triângulo ($\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BCA \equiv \angle EFD$) (p. 51).

Para que essa proposição possa ser considerada, os ângulos congruentes devem ser tomados a partir dos lados dos triângulos que também são congruentes.

O segundo caso de congruência de triângulos, o caso ângulo – lado – ângulo (ALA), decorre da seguinte proposição: “quando forem dados dois ângulos e um lado, conseguimos construir um único triângulo a menos de sua posição quando o lado é comum aos dois ângulos” (CANDIDO; GALVÃO, 204, p. 18).

A definição para este caso, segundo Papa Neto (2017), é dada da seguinte maneira: se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $AB \equiv A'B'$, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$, então os mesmos são congruentes. A seguir, na figura 11, uma representação do segundo caso.

Figura 11: Caso ALA de congruência de triângulos

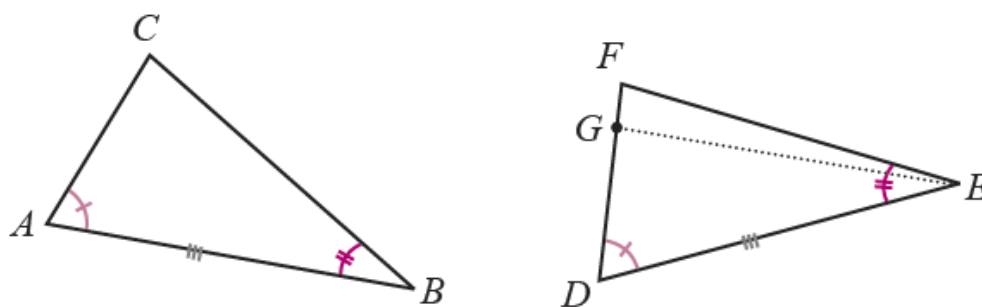


Fonte: PAPA NETO (2017, p. 56)

Conforme sugere Papa Neto (2017), em relação a este caso, apresentamos a seguinte demonstração, trazido por Pinho (2010):

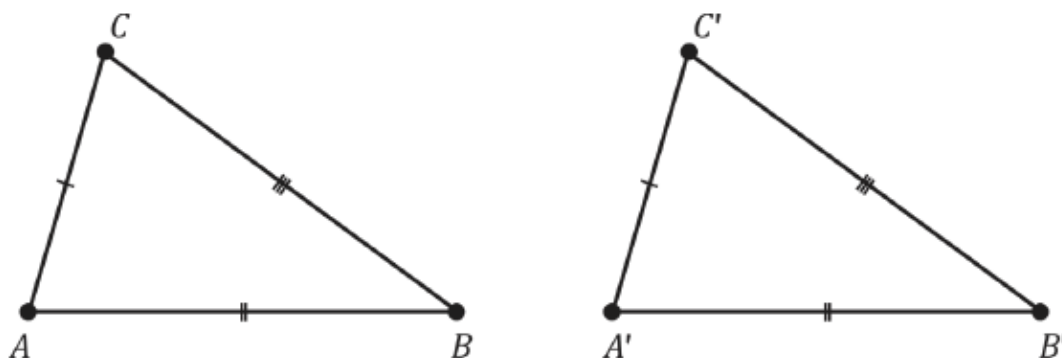
Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que $\hat{A} = \hat{D}$, $AB = DE$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Vamos provar que $AC = DF$ e, então pelo 1º caso de congruência, teremos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Suponha que $AC \neq DF$. Então, ou $AC < DF$, ou $AC > DF$. Considere o caso $AC < DF$ (o outro caso é análogo). Seja G um ponto no segmento $\overline{DF}$ tal que $DG = AC$. Então $DG < DF$. Considere agora os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEG$. Temos aí que $AC = DG$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $AB = DE$. Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$. Segue-se que $\hat{DEG} = \hat{B}$, mas isto não pode ocorrer pois $\hat{DEG} < \hat{DEF} (= \hat{E})$, já que G está entre D e F, e $\hat{DEF} = \hat{B}$ por hipótese. Logo, $AC = DF$, e o teorema fica provado (p. 91-92).

A figura 12 representa a demonstração trazida por Pinho (2010).

Figura 12: Demonstração do caso ALA

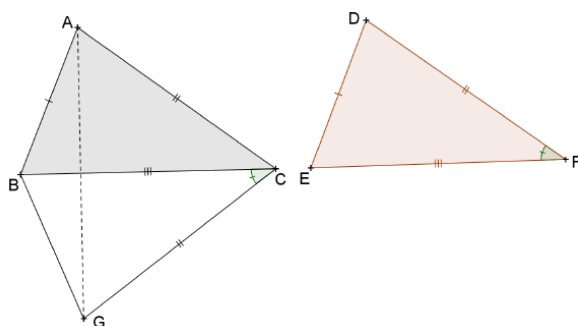
Fonte: PINHO (2010, p. 92)

No terceiro caso de congruência de triângulos, o caso lado-lado-lado (LLL), a construção pode ser definida a partir da noção de que, se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$, então eles são congruentes (figura 13).

Figura 13: Caso LLL de congruência

Fonte: PAPA NETO (2017, p.57)

Para esse caso, dentre as demonstrações estudadas no âmbito desta investigação, optamos por apresentar a de Costa *et. al* (2012), dada a seguir:



Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$. Vamos provar que ΔABC e ΔDEF .

Construa a partir da semirreta, $\overrightarrow{BC}$ e no semiplano oposto ao que contém o ponto A, um ângulo igual a $\hat{F}$. No lado deste ângulo que não contém o ponto B, marque G tal que $\overline{CG} = \overline{DF}$ e ligue B e G.

Como $\overline{BC} = \overline{EF}$ (hipótese), $\overline{CG} = \overline{DF}$ (construção) e $\widehat{BCG} = \hat{F}$.(construção), então $\triangle GBC = \triangle DEF$ por LAL. Logo lados e ângulos correspondentes são congruentes. Deste modo, $\overline{GB} = \overline{ED}$, mas $\overline{ED} = \overline{AB}$ pela hipótese. Portanto, $\overline{GB} = \overline{AB}$.

Agora vamos mostrar que $\triangle GBC = \triangle ABC$. Trace $\overline{AG}$. Como $\overline{AC} = \overline{GC} = \overline{DF}$ e $\overline{AB} = \overline{BG} = \overline{DE}$ então $\triangle AGC$ e $\triangle AGB$ são isósceles de base $\overline{AG}$. Portanto $\widehat{BGA} = \widehat{BAG}$ e podemos concluir que $\triangle AGBC = \triangle ABC$. Como já tínhamos provado que $\triangle GBC = \triangle DEF$, concluímos que $\triangle ABC = \triangle EFG$. (COSTA et al, 2012, p. 18-19)

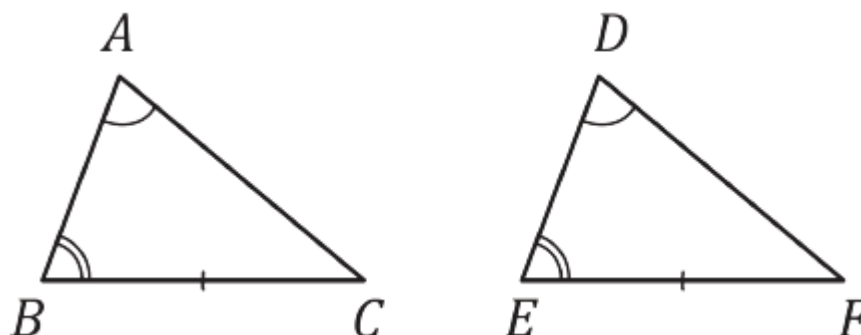
Logo, se os dois triângulos têm os três lados correspondentes congruentes, os mesmos são congruentes.

Vejamos o quarto caso de congruência entre triângulos, o caso lado – ângulo – ângulo oposto (LAAo)². Para as autoras Candido e Galvão (2004), considerando que um dos ângulos contém o lado e o outro é o ângulo oposto a ele, têm-se o caso LAAo de congruência de triângulos: “dois triângulos que têm dois ângulos correspondentes e o lado oposto a um deles respectivamente congruentes são congruentes” (p. 18).

Daí, dados dois triângulos ABC e DEF, se $BC \equiv EF$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então eles são congruentes, ou, conforme aponta Papa Neto (2017), como se mostra na figura 14:

Se dois triângulos (ABC e DEF) tiverem ordenadamente dois lados (BC e EF) congruentes, dois ângulos adjacentes $\angle ABC$ e $\angle DEF$ a estes lados congruentes e dois ângulos opostos ($\angle BAC$ e $\angle EDF$) a estes lados congruentes, então os dois triângulos são congruentes (p. 95).

² Segue como consequência de “Os Elementos”, Livro I, Proposição 32: “em um triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes. A soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos” (PAPA NETO, 2017, p. 93).

Figura 14: Caso LAA_o de congruência de triângulos

Fonte: PAPA NETO (2017, p.95)

De fato, $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA$ e $\angle DEF + \angle EDF + \angle EFD$ são congruentes, pois ambos são iguais a dois ângulos retos. Como $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, temos que $\angle BCA \equiv \angle EFD$. Assim, pelo caso ALA de congruência, temos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Neste tópico, até aqui, mencionamos os casos de congruência entre triângulos, ao deduzir os casos LAL, ALA, LLL e LAA_o. No subtópico a seguir, tratamos da noção de paralelismo, como uma forma de abordar a noção de semelhança de triângulos.

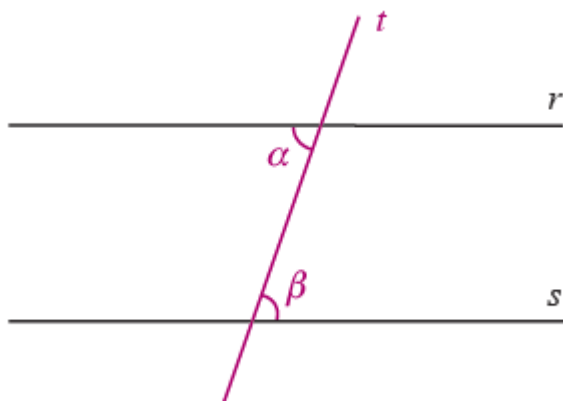
2.2.3 A noção de paralelismo

O axioma das paralelas advoga que, por um ponto não localizado em uma determinada reta, pode ser traçada uma única reta paralela à reta mencionada. Uma definição acerca de retas paralelas pode ser dada, segundo Machado (2012), por “duas retas r e s são paralelas se r e s não possuem pontos em comum, ou seja, $r \cap s = \emptyset$ como conjuntos. Denotaremos esta relação por $r \parallel s$ ” (p. 75).

Da mesma forma, considerando duas figuras, “se r e s são retas cortadas por uma transversal t , de modo que um par de ângulos correspondentes são congruentes, então as retas r e s são paralelas” (PENEIREIRO; SILVA, 2008).

Como corolário deste teorema, ilustrado na figura 15, segundo Pinho (2010), tem-se que “duas retas paralelas interceptadas por uma transversal produzem ângulos alternos internos congruentes” (p. 70).

Figura 15: Retas paralelas e os ângulos alterno internos congruentes α e β

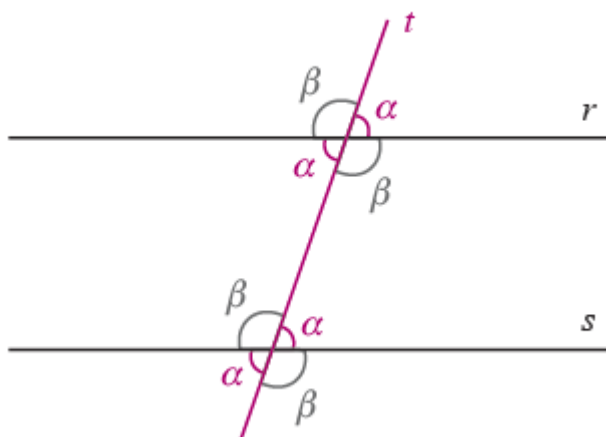


Fonte: (PINHO, 2010, p. 71)

Além disso, pode-se mencionar um teorema da distância de duas retas paralelas: “se duas retas r e s são paralelas, então todos os pontos de r estão à mesma distância de s ” (PINHO, 2010, p. 71).

Como consequência dos postulados e teoremas supramencionados, os ângulos alternos internos congruentes implicam em ângulos correspondentes congruentes e respectivamente, pois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, conforme mostra a figura 16:

Figura 16: Duas paralelas interceptadas por uma transversal produzem no máximo dois ângulos distintos



Fonte: (PINHO, 2010, p. 72)

Em concordância com as reflexões de Pinho (2010), na figura 17, se $\alpha = 90^\circ$ então, $\beta = 90^\circ$. O autor apresenta algumas consequências do axioma das paralelas:

- 1) Sejam r e s retas paralelas. Se t é uma reta que intercepta r , então t também intercepta s .
- 2) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.
- 3) Se r e s são perpendiculares a t , então r e s são paralelas ou são coincidentes.
- 4) Se r e s são paralelas e se r é perpendicular a t , então s também é perpendicular a t (PINHO, 2010, p. 72).

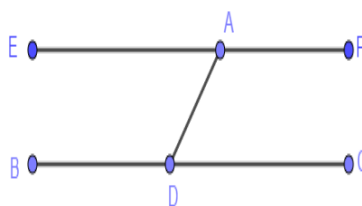
De fato, segundo o que se apresenta na Proposição 29, Livro I de “Os Elementos”:

Sejam AB e CD duas retas paralelas à reta EF [...] os ângulos alternos determinados pela transversal PR são congruentes para cada par de retas paralelas, isto é, $\angle APQ \equiv \angle FRQ$ e $\angle CQR \equiv \angle FRQ$ (EUCLIDES, 2009, p. 120).

Aqui, argumenta Papa Neto:

Como a congruência de ângulos é transitiva, segue que $\angle APQ \equiv \angle CQR \equiv \angle PQD$, em que a última congruência vale porque os ângulos são opostos pelo vértice. Assim $\angle APQ \equiv \angle PQD$ e pelo Teorema 4.7³, as retas AB e CD são paralelas (PAPA NETO, 2017, p. 93).

Como o autor citado bem observa, também a Proposição 31 do Livro I dos Elementos trata da existência de uma reta paralela a uma reta dada passando por determinado ponto. É o que se mostra a seguir:



Sejam, por um lado, o ponto dado A , e, por outro lado, a reta dada BC ; é preciso, então, pelo A , traçar uma linha paralela a reta dada BC .

Fique tomado, sobre a BC , o ponto D , encontrado ao acaso, e fique ligada a AD ; e fique construído sobre a reta DA e no ponto A sobre ela, o sob DAE igual ao ângulo sob a reta ADC ; e fique prolongada AF sobre uma reta com a EA .

E, como a reta AD , caindo sobre as duas retas BC , EF , fez os ângulos sob EAD , ADC , alternos, iguais entre si, portanto, a EAF é paralela à BC . Portanto, pelo ponto dado A , foi traçada a linha reta EAF paralela a reta dada BC ; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 121).

³ (Elementos, Livro I, Proposição 27) Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas entre si (EUCLIDES, 2009, p. 119).

Neste subtópico apresentamos a noção de paralelismo; como é possível observar, recorreremos ao Livro I dos Elementos de Euclides, especificamente as proposições que tratam de retas paralelas. A seguir, tratamos da noção de semelhança de triângulos.

2.2.4 A noção de semelhança de triângulos

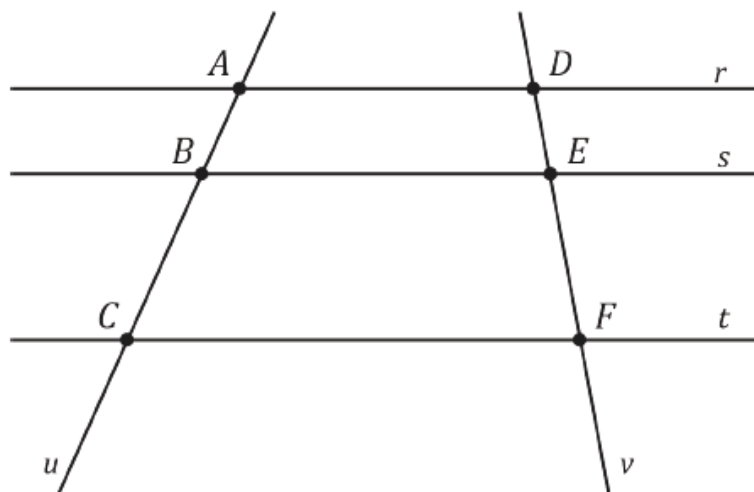
Apresentamos, aqui, noções acerca da semelhança de triângulos. A respeito desse tema, inicialmente, abordamos o Teorema de Tales, e, mais adiante, a noção de semelhança propriamente dita.

Com respeito ao Teorema de Tales, temos, em Costa *et. al* (2012):

Se um feixe [...] de retas é interceptado por um feixe próprio de retas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma reta delas é igual à razão entre os segmentos respectivamente correspondentes na outra reta do mesmo feixe (p. 35)

Para Papa Neto (2017, p. 156), o mesmo teorema é definido da seguinte maneira: “sejam r , s e t três retas paralelas, e sejam u e v duas transversais que determinam sobre as retas r , s e t os pontos A, B, C e D, E, F , respectivamente. Então, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ” (PAPA NETO, 2017, p. 156). A afirmação é ilustrada na figura 17.

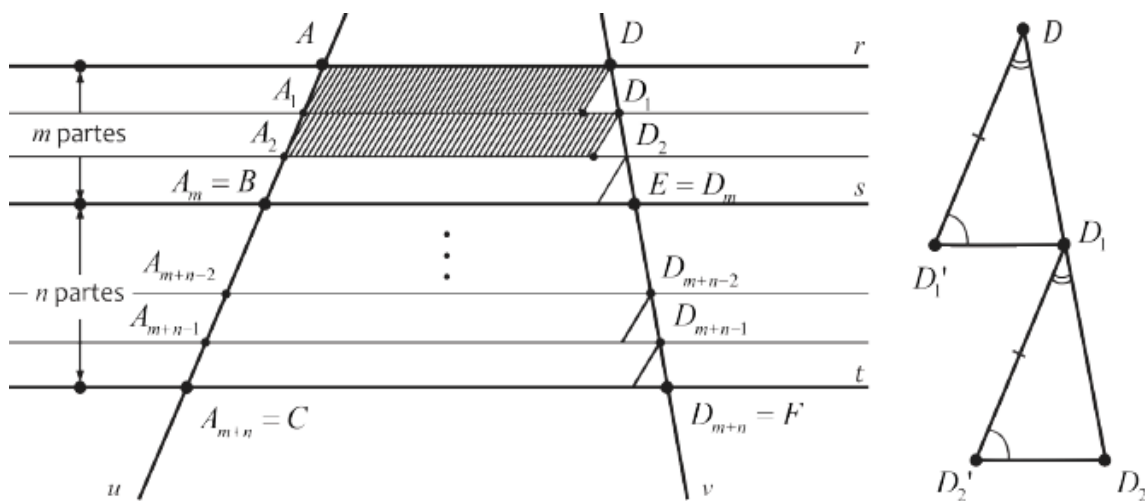
Figura 17: Três retas paralelas r, s e t , cortadas por duas transversais u e v .



Fonte: PAPA NETO (2017, p. 156)

Em relação ao Teorema de Tales, tomamos, como referência, a demonstração do caso em que os segmentos AB e BC são comensuráveis, trazida por Papa Neto (2017):

Isso significa que $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros positivos. Podemos, então, dividir AB em m segmentos e BC em n segmentos, todos congruentes a um segmento XY . Por cada um dos pontos $A_1, A_2, \dots, A_{m+n}$, que realizam essa divisão, traçamos retas paralelas a r, s , e t . Essas retas encontram a reta v em pontos $D_1, D_2, \dots, D_{m+n}$, em que dividem os segmentos DE e EF , como na figura a seguir:

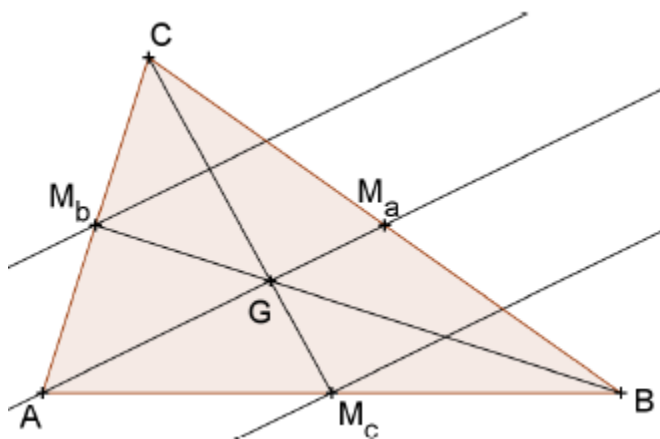


Por cada um dos pontos $D_1, D_2, \dots, D_{m+n}$, situados sobre a reta v , tracemos retas paralelas a u . Essas retas determinam paralelogramos $AA_1D'_1D, A_1A_2D'_2D_1, \dots, A_{m-1}A_mD'_{m+n}D_{m+n-1}$ (os dois primeiros desses paralelogramos estão tracejados na figura 16). Os triângulos $DD'_1D_1, DD'_2D_2, \dots, D_{m+n-1}D'_{m+n}D_{m+n}$ são todos congruentes. Vamos demonstrar isso para os dois primeiros triângulos, DD'_1D_1 e $D_1D'_2D_2$, que aparecem em destaque na figura 16 à direita. Notemos que $\angle D'_1DD \equiv \angle D'_2D_1D_2$, pois esses ângulos são correspondentes, determinados pelas paralelas D'_1D_1 e D'_2D_1 e pela transversal DD_2 . Essa mesma transversal determina juntamente com as retas paralelas D'_1D_1 e D'_2D_2 os ângulos correspondentes $\angle D'_1D_1D \equiv \angle D'_2D_1D_2$. Assim, os ângulos D'_1DD e $D'_2D_1D_2$ também são congruentes. Como $DD'_1 \equiv XY \equiv D_1D'_2$, os triângulos DD'_1D_1 e $D_1D'_2D_2$ são congruentes, pelo caso ALA de congruência de triângulos. De modo análogo, podemos concluir que os demais triângulos também são congruentes. Portanto, os pontos $D_1, D_2, \dots, D_{m+n}$ dividem os segmentos DE e EF em m e n segmentos congruentes a DD_1 , respectivamente. Sendo assim, temos $\overline{DE} = m \cdot \overline{DD_1}$ e $\overline{EF} = n \cdot \overline{DD_1}$. Logo, $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{m}{n} = \frac{AB}{BC}$. Isso demonstra o resultado para o caso em

que os segmentos AB e BC são comensuráveis (PAPA NETO, 2017, p. 157-158).

Podemos tomar como exemplo, a partir da demonstração mencionada por Papa Neto (2017), o baricentro, que divide as medianas na proporção 2 para 1. A figura 18 ilustra a afirmação:

Figura 18: Divisão das medianas de um baricentro

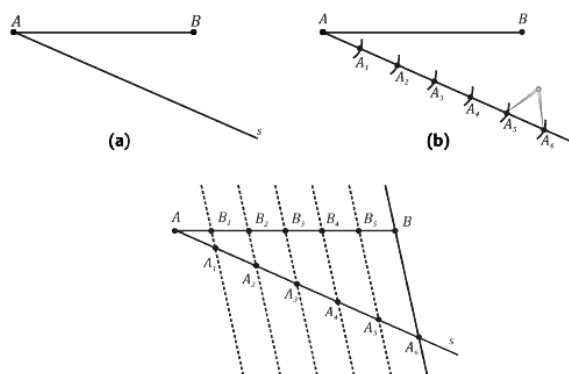


Fonte: COSTA et. al (2012, p. 36)

Ainda há a possibilidade, evidenciada por Papa Neto (2017), de dividir um segmento dado em um número finito n de segmentos, todos congruentes, a partir das aplicações do Teorema de Tales (figura 19).

Seja um segmento de reta dado e $n \in \mathbb{N}$ o número de partes em que queremos dividir este segmento. Trace uma semirreta s por um dos extremos do segmento, o ponto A digamos (figura 17, (a)). Usando o compasso, com abertura arbitrária e fixada, marque n pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$ sobre a semirreta s . Na figura 17, (b), $n = 6$ (PAPA NETO, 2017, p. 163).

Figura 19: Três etapas para a divisão de um segmento dado em um número finito n



Fonte: PAPA NETO (2017, p. 163)

Considere a reta A_nB . Trace as retas que passam por $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ e são paralelas a A_nB . Essas retas intersectam o segmento AB nos pontos $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$, respectivamente [...] (c), onde $n = 6$). Pelo Teorema de Tales, $\frac{AB_1}{AA_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_{n-1}B_n}{A_{n-1}A_n}$. Como, por construção $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$, temos que $\frac{AB_1}{AA_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_{n-1}B_n}{A_{n-1}A_n}$, ou seja, os pontos $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$, dividem o segmento AB em n partes iguais (PAPA NETO, 2017, p. 163).

Seja um segmento AB qualquer, dividido em n partes proporcionais. Admita-se, então, uma semirreta concorrente s (não perpendicular ao segmento AB) a um dos extremos deste segmento de modo que, usando o compasso, com abertura arbitrária e imóvel, marque-se n pontos sobre a semirreta s , obtendo a divisão do segmento em n partes iguais. O argumento para a precisão deste recurso está justamente no teorema de Tales, no qual duas retas transversais a um conjunto de paralelas determinam segmentos proporcionais e correspondentes sobre elas.

Quando pensamos na noção de semelhança, avaliamos que os “detalhes do objeto original estão representados na imagem, e as proporções entre o objeto real e a imagem são as mesmas entre quaisquer duas partes constituintes” (PINHO, 2010, p. 295).

Partindo dessa noção, considerando a existência de duas figuras F e F' , dizemos que estas figuras serão semelhantes se:

- 1) Existe uma correspondência 1 a 1 entre os pontos de F e os pontos de F' .

2) Existe um número $r > 0$, tal que, para todos os pares e pontos $X, Y \in F$ e seus respectivos pontos homólogos $X', Y' \in F'$, tem-se: $X'Y' = r \cdot XY$

Utilizar-se-á a notação $F \sim F'$ quando essas duas figuras forem semelhantes (PINHO, 2010, p. 296).

Essas condições, permitem generalizar que, não importa se as figuras são planas ou espaciais, é possível identificar a relação de semelhança entre essas figuras, caso exista. Para tecer aqui uma noção de semelhança, discutimos, especificamente, a respeito da semelhança de triângulos.

Um triângulo é uma figura geométrica rígida, isto é, dadas as medidas de seus lados, os seus ângulos estão univocamente definidos. Assim, podemos analisar casos em que a semelhança de triângulos fica garantida apenas verificando-se algumas congruências de ângulos ou algumas proporcionalidades entre lados (PINHO, 2012, p. 312).

Desta maneira, podemos analisar casos de semelhança, notando algumas congruências de ângulos ou algumas proporcionalidades entre lados. Diante disso, podemos estabelecer, a partir de dois triângulos semelhantes, conforme Machado (2012):

Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência entre seus lados e ângulos de modo que:

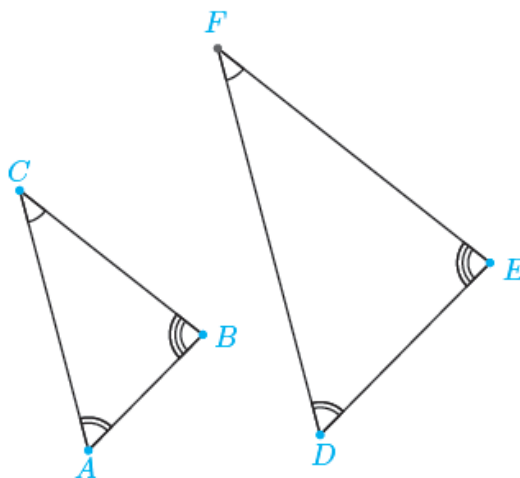
$$\angle A \equiv \angle D, \angle B \equiv \angle E, \angle C \equiv \angle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$$

A relação de semelhança será denotada por “ $\sim$ ”. No caso da definição acima escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (p. 135).

Em concordância com Machado (2012), para verificarmos se dois triângulos são semelhantes, devemos buscar “uma relação entre seus vértices de forma que os ângulos correspondentes sejam congruentes” (p. 135), do contrário, os triângulos deixam de ser semelhantes.

Uma representação para essa definição, na qual se define condições para semelhança de triângulos, pode ser observada na figura 22, a seguir:

Figura 20: triângulos semelhantes

Fonte: MACHADO (2012, p. 136)

Como destaca Papa Neto (2017, p. 164), em triângulos semelhantes, “os lados opostos aos ângulos congruentes são chamados lados correspondentes (ou homólogos)”.

Esse mesmo autor estabelece uma relação métrica entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes.

Se dois triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k. \quad (7.1)^4$$

O número k é chamado razão de semelhança entre os triângulos ABC e A'B'C' (PAPA NETO, 2017, p. 164).

Em relação a esse Teorema, o autor apresenta a seguinte demonstração:

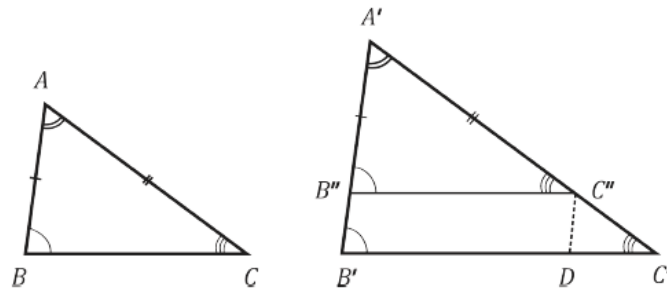
Se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, então os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes pelo caso ALA. Da congruência segue que $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e, portanto, vale (7.1) com $k = 1$. Vamos supor que $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. Precisamos demonstrar apenas este caso, pois o outro caso, $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, é similar. Seja B'' um ponto sobre o lado A'B', tal que $\overline{A'B''} \equiv \overline{AB}$ (figura a seguir). Trace pelo ponto B'' a reta paralela a B'C', que encontra o lado A'C' no ponto C''. Os ângulos

⁴ Teorema da Comparação) Sejam x e y dois números reais. Suponha que
 (1) Todo número racional menor do que x também é menor do que y .
 (2) Todo número racional menor do que y também é menor do que x .
 Então $x = y$ (PAPA NETO, 2017, p. 159).

$\angle A'B'C'$ e $\angle A'B''C''$ são correspondentes, logo são congruentes (PAPA NETO, 2017, p. 164-165).

A seguir, uma representação ao teorema demonstrado.

Figura 21: Os triângulos ABC e A'B''C'' são congruentes



Fonte: PAPA NETO (2017, p. 165)

O autor utiliza para a demonstração do teorema anterior, a correspondência de ângulos, evidentes na noção de paralelismo, para explicar a semelhança de triângulos pelo caso ALA. E de fato, como destaca Papa Neto (2017):

Pelo caso ALA, os triângulos ABC e $A'B''C''$ são congruentes. Em particular $A'C'' \equiv AC$.

As retas $A'B'$ e $A'C'$ são transversais às retas paralelas $B'C'$ e $B''C''$, logo podemos aplicar o Teorema de Tales para concluirmos que

$$\frac{A'B''}{B''B'} = \frac{A'C''}{C''C'}.$$

Invertendo as frações na igualdade acima e somando 1 em ambos os membros, obtemos

$$\frac{B''B'}{A'B''} = \frac{C''C'}{A'C''} \Rightarrow \frac{B''B'}{A'B''} + 1 = \frac{C''C'}{A'C''} + 1 \Rightarrow \frac{B''B' + A'B''}{A'B''} = \frac{C''C' + A'C''}{A'C''}$$

De onde concluímos que

$$\frac{A'B''}{A'B''} = \frac{A'C'}{A'C''}$$

e, como $AB \equiv A'B''$ e $AC \equiv A'C''$, obremos a igualdade

$$\frac{A'B''}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \quad (7.2)$$

Trace, pelo ponto C'' , uma reta paralela ao lado $A'B'$, e determine o ponto D em que essa reta encontra o lado $B'C'$ do triângulo $A'B'C'$ (figura 19). O quadrilátero $B''B'DC''$ é um paralelogramo e $B'D \equiv B''C''$. Da congruência $\triangle ABC \equiv \triangle A'B''C''$ segue que $B''C'' \equiv BC$, logo $B'D \equiv BC$. Podemos, então, repetir o argumento acima, usando o Teorema de Tales para as retas $C'A'$ e $C'B'$, transversais às retas paralelas $A'B'$ e $C''D$, para concluirmos que

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \quad (7.3)$$

Das igualdades (7.2) e (7.3) segue o resultado que queríamos demonstrar (PAPA NETO, 2017, p. 165-166).

Aqui, o autor se refere à demonstração das igualdades, numeradas como 7.2 e 7.3 na citação anterior, que permitem validar as condições de semelhança de triângulos pelo caso ALA. Para além disso:

Assim como a relação de congruência, a relação de semelhança entre dois triângulos pode ser deduzida a partir de informações sobre as relações entre lados ou ângulos desses dois triângulos. Por analogia com a relação de congruência, temos os casos de semelhança de triângulos (PAPA NETO, 2017, p. 166).

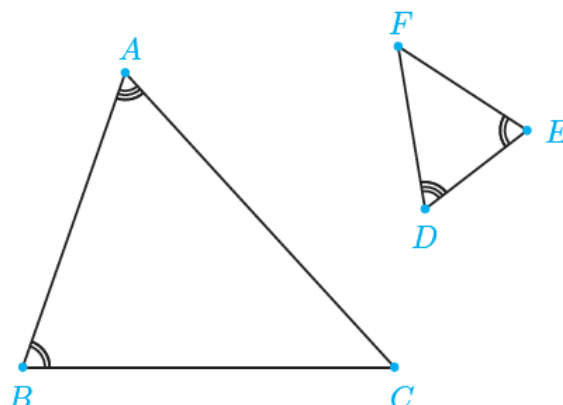
Resta observar que a demonstração do autor, discutida a partir da figura 21, baseia-se no teorema fundamental de semelhança, segundo o qual, ao traçar-se uma reta paralela a um dos lados do triângulo que intercepte os dois outros lados em distintos pontos, o novo triângulo determinado por esta paralela é semelhante ao original. O postulado das paralelas é noção básica, também, neste caso.

Da analogia proposta pelo autor, a respeito da relação de semelhança de triângulos, a seguir destacamos o caso Ângulo-Ângulo (AA). Nesse caso, a semelhança é dada se dois triângulos têm, ordenadamente, dois ângulos congruentes.

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$, com dois ângulos correspondentes congruentes, por exemplo, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° , se dois ângulos de $\triangle ABC$ são congruentes a dois ângulos de $\triangle A'B'C'$, então o terceiro ângulo do triângulo ABC é congruente ao terceiro ângulo de $A'B'C'$. Pela definição, esses dois triângulos são semelhantes (PAPA NETO, 2017, p. 166).

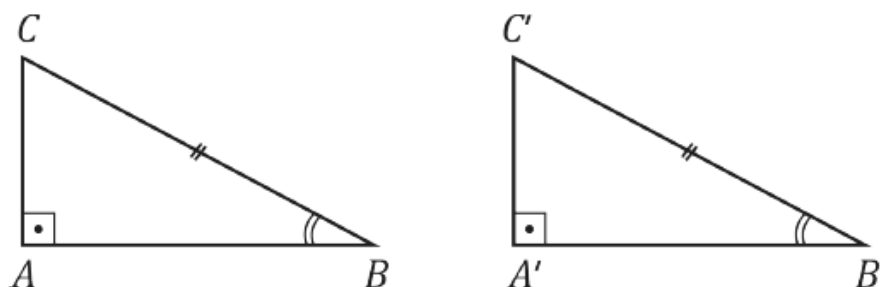
Na demonstração proposta, sobre a condição de semelhança entre dois triângulos pelo caso AA, percebe-se que o autor se vale da soma dos ângulos internos do triângulo. Justamente, sobre o caso de semelhança em tela, Machado (2012) destaca que “dois triângulos que possuem dois pares de ângulos congruentes entre si são semelhantes” (p. 136).

Tomando a figura 22 como ilustração, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , logo, das igualdades $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, resultaria que $\hat{C} = \hat{F}$. Desta forma, se fosse o caso, restaria “[...] provar que os lados correspondentes são proporcionais” (COSTA et. al, 2012, p. 39). A figura a seguir representa caso (AA) de semelhança.

Figura 22: Caso AA de semelhança de triângulos

Fonte: MACHADO (2012, p. 136)

Outro caso é o de semelhança entre triângulos retângulos. Vamos nos referir, inicialmente, aos casos de congruência entre triângulos retângulos, abordando a semelhança entre eles em seguida.

Figura 23: Caso especial de congruência de triângulos

Fonte: PAPA NETO (2017, p. 166)

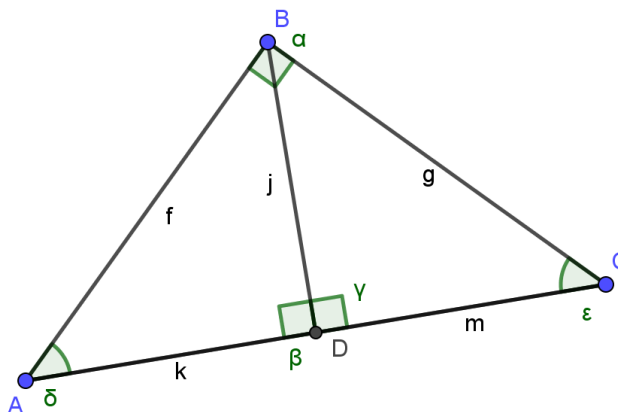
De acordo com a representação exposta na figura 23, sejam “ABC e A'B'C'” dois triângulos retângulos, com $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ retos. Se $BC \equiv B'C'$ e $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ” (PAPA NETO, 2017, p. 167). Com relação a esse caso,

Da semelhança, temos que $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. Além disso, a razão de semelhança é igual a 1, pois as hipotenusas coincidem. Dessa forma, do Teorema 7.2, concluímos que $AB \equiv A'B'$ e $AC \equiv A'C'$. Logo $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (PAPA NETO, 2017, p. 167).

Desta forma, se existe uma razão de semelhança k entre dois triângulos, pode-se concluir que os mesmos são semelhantes, considerando $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$. Na discussão proposta a partir da figura 23, $k = 1$, um caso de congruência.

De outra maneira, consideremos a figura 23a, que também trata de um caso de semelhança em triângulos retângulos:

Figura 24: Semelhança de triângulos retângulos

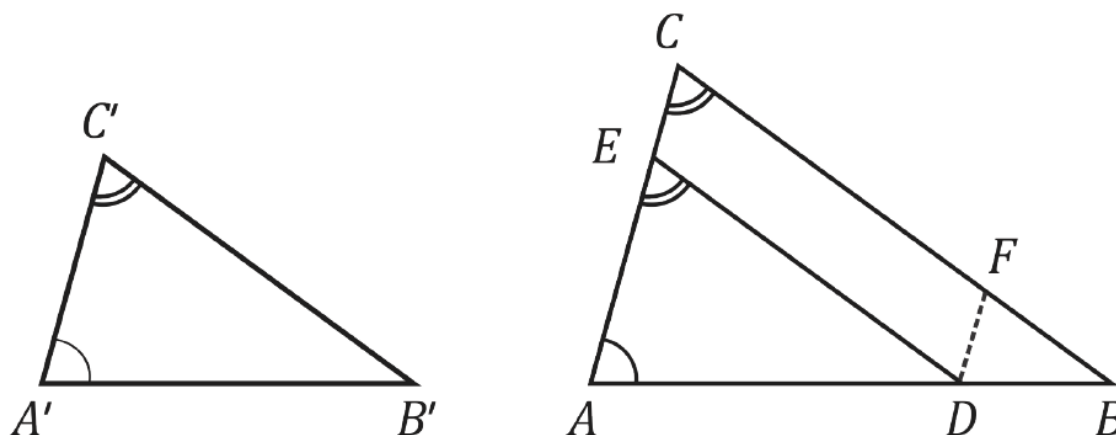


Fonte: construção no GeoGebra

Tendo por base a figura 24, percebe-se que a altura j , referente à hipotenusa do triângulo ABC, divide o referido triângulo em dois outros, ABD e CBD todos retângulos, já que possuem, respectivamente, os ângulos α , β e γ , todos com medida igual a noventa graus. Como são proporcionais os lados BA e BC, BD e CD e BD e AD, podemos afirmar, com base no caso LAL, que os triângulos ABC, ABD e CBD são semelhantes.

Adicionalmente, “se os lados de dois triângulos são proporcionais entre si tomados dois a dois, então os triângulos são semelhantes” (MACHADO, 2012, p. 137), temos o caso Lado-Lado-Lado (LLL). A figura 25 ilustra esta proposição.

Figura 25: Caso LLL de semelhança de triângulos



Fonte: PAPA NETO (2017, p. 167)

A demonstração a este caso de semelhança que se quer mostrar é apresentada a seguir:

[...] se os lados dos triângulos ABC e A'B'C' satisfazem as igualdades $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Para isso, consideremos um ponto D sobre o lado AB do triângulo ABC, escolhido de modo que $AB = k \cdot A'B'$, temos que $k \cdot AD = k \cdot A'B'$, ou seja, $AD = A'B'$.

A reta que passa por D, e é paralela ao lado BC do triângulo ABC, intersecta o lado AC no ponto E. Pelo caso de semelhança AA, temos $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Pelo Teorema 7.2, $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = k$. Como estamos supondo que $\frac{AC}{A'C'} = k$, temos: $k \cdot AE = AC = k \cdot A'C'$ e isso implica que $AE = A'C'$.

A reta que passa por D, e é paralela ao lado AC, encontra o lado BC no ponto F (figura 24). O quadrilátero CEDF é um paralelogramo, de modo que $DE = FC$. Como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, temos $\frac{BC}{FC} = \frac{AB}{AD} = k$. Logo, $BC = k \cdot FC = k \cdot DE$. Novamente por hipótese, $BC = k \cdot B'C'$. Assim, $k \cdot DE = BC = k \cdot B'C'$ e isso implica que $DE = B'C'$.

Pelo caso LLL de congruência de triângulos, os triângulos A'B'C' e ADE são congruentes. Em particular, $\angle B'C'A' \equiv \angle DEA \equiv \angle CBA$ e $\angle BCA \equiv \angle C'A'B' \equiv \angle EAD = \angle CAB$ (PAPA NETO, 2017, p. 168).

Pela demonstração do caso LLL de congruência de triângulos, se os lados dos triângulos ABC e A'B'C' satisfazem a condição de existência de semelhança

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$, então os triângulos são semelhantes. De todo modo, também

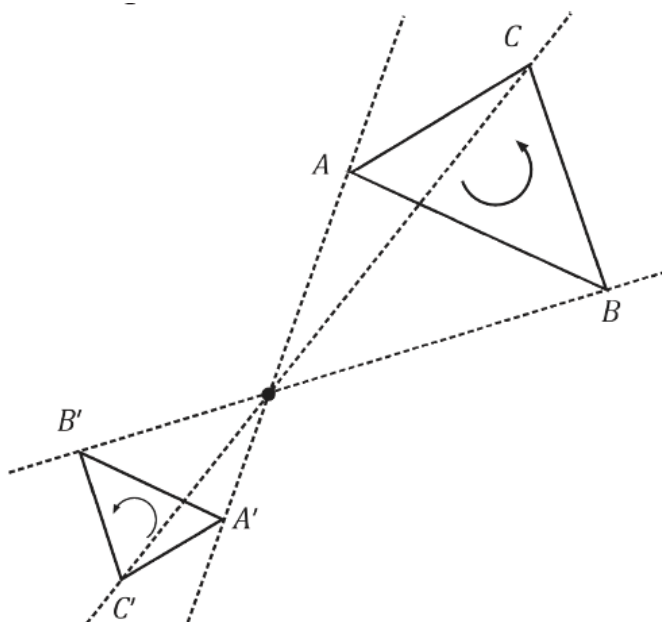
se trata, aqui, de um resultado advindo do teorema fundamental de semelhança.

Em relação a razão de semelhança (k), diferente do caso semelhança entre triângulos retângulos, para $k \neq 0$, podemos estabelecer o tamanho relativo dos dois triângulos. A esse respeito,

Se $|k| < 1$, então $\overline{AB} < \overline{A'B'}$, $\overline{AC} < \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} < \overline{B'C'}$, ou seja, o triângulo ABC é menor que o triângulo A'B'C'. Se $|k| = 1$, os lados correspondentes têm as mesmas medidas, logo são congruentes e, pelo caso LLL de congruência, os triângulos ABC e A'B'C₁ são congruentes. [...] se a razão de semelhança for negativa, então um dos triângulos terá orientação contrária à do outro triângulo (PAPA NETO, 2017, 168).

Como podemos observar, de acordo com o autor, se temos em módulo uma razão de semelhança menor que 1, em relação a dois triângulos ABC e A'B'C', então ABC tem medida de área menor que A'B'C'. Além disso, se a razão de semelhança em módulo for igual a 1, ambos os lados dos triângulos ABC e A'B'C' correspondem à mesma medida de área. Adicionalmente, se a razão de semelhança for negativa, o triângulo ABC terá orientação contrária ao triângulo A'B'C' (figura 25).

Figura 26: Se a razão de semelhança entre dois triângulos é negativa, eles têm orientações contrárias.



Fonte: PAPA NETO (2017, p. 168)

Ainda apresentamos, aqui, um último caso de semelhança entre triângulos que ocorre “se dois triângulos têm dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais, e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes” (PAPA NETO, 2017, p. 169). Denominado como o caso Lado-Ângulo-Lado (LAL), pode ser demonstrado da seguinte forma:

Considere dois triângulos ABC e $A'B'C'$, como $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$. Queremos mostrar que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. De fato, assim como no caso LLL, podemos considerar um ponto D sobre o lado AB , de modo que $\overline{AB} = k \cdot \overline{AD}$. [...] Assim como fizemos no caso LLL, podemos usar o Teorema de Tales para concluir que $\overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}$. Assim, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AE} = \overline{A'C'}$. Como $AD \equiv A'B'$, $AE \equiv A'C'$ e $\angle EAD \equiv \angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Em particular $\angle A'C'B' \equiv \angle AED \equiv \angle ACB$, essa última congruência sendo válida porque os ângulos são correspondentes. Portanto, pelo caso AA de semelhança $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (PAPA NETO, 2017, p. 169).

Notemos que, para a demonstração apresentada, o autor recorre a congruência de triângulos, como discutido anteriormente nas demonstrações ilustradas pelas figuras 21 e 22.

Ressaltamos que nesse tópico tivemos como objetivo discutir, partindo da noção mesma de triângulo, a noção de semelhança de triângulos, bem como a noção de congruência de triângulos e de paralelismo, além de uma série de noções correlatas, como aquelas advindas dos comentários referentes ao Teorema de Tales. Esse percurso levou em consideração as proposições em relação ao nosso objeto de estudo, trazidas no livro VI de “Os Elementos”. Cumprida esta parte, relativa, em última análise, à discussão do objeto matemático, passamos a mencionar os currículos da educação básica naquilo que se mostram relevantes ao estudo aqui apresentado.

2.3 Currículos

Com relação aos currículos, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998, os conceitos geométricos constituem-se parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, a partir da recomendação de proposta de ensino que levem o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos do mundo ao seu redor.

Nesse sentido, os PCN destacam que é possível observar como fenômenos do nosso dia-a-dia conforme os princípios de proporcionalidade e, ainda, o quanto esse raciocínio proporcional favorece a identificação de nossas interpretações do mundo. Em vista disso, podemos estabelecer diversas relações com a proporcionalidade:

[...] A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais. aos contraexemplos (BRASIL, 1998, p. 84).

Assim, o documento orienta para a importância de valorizar a habilidade do aluno em estabelecer semelhanças e diferenças entre os objetos, bem como identificar suas características:

[...] o professor verifica se o aluno é capaz de perceber que, por meio de diferentes transformações de uma figura no plano (translações, reflexões em retas, rotações), obtêm-se figuras congruentes e, por meio de ampliações e reduções, obtêm-se figuras semelhantes e de aplicar as propriedades da congruência e as da semelhança em situações-problema (p. 93)

Em síntese, é desejado que o aluno identifique características das formas geométrica, deduza semelhanças e diferença entre elas, e ainda, reconheça elementos que as compõem. Nesta direção, o documento sugere, por exemplo, que a homotetia é um ponto de apoio à construção da noção de semelhança.

Na proposta curricular do Estado de São Paulo (2010), observamos que a preocupação inicial está pautada na percepção de formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais. No Ensino Fundamental, localiza-se uma preocupação quanto ao reconhecimento, a representação e a classificação das formas planas e espaciais; por outro lado, o documento não deixa explícito o norte de trabalho para o Ensino Médio, valorizando estudos algébricos e apenas direcionando os conteúdos a serem trabalhados para o ensino da geometria (SÃO PAULO, 2010, p. 41).

A proposta questiona que as imensas listas de conteúdos aplicadas nem sempre promovem aprendizagens significativas; contudo, se as ideias

fundamentais a serem exploradas forem bem conduzidas nos assuntos abordados, estas deslocam-se com facilidade para outros assuntos; por exemplo, na ideia de proporcionalidade,

Se encontra presente tanto raciocínio analógico, em comparações tais como “O Sol está para o dia assim como a Lua está para a noite”, quanto no estudo das frações, nas razões e proporções, no estudo da semelhança de figuras, nas grandezas diretamente proporcionais (SÃO PAULO, 2010, p. 37).

No entanto, o documento indica a falha que ocorre da má interpretação que se faz quanto à separação dos conteúdos presentes no ensino básico, pontuando que este equívoco reside no fato de a geometria plana ser um assunto do Ensino Fundamental e as geometrias espacial e analítica serem temas do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2010, p. 41).

Nesse sentido, entendemos que o documento destaca um cruzamento contínuo entre as geometrias plana e espacial e, ainda, reforça a integração em toda a grade escolar, competindo ao professor buscar um equilíbrio no tratamento dos conteúdos fundamentais, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, valorizando a oportunidade da percepção geométrica tanto na forma espacial quanto na forma plana.

Em relação à noção de semelhança e semelhança de triângulos, este último, nosso principal interesse por ser o nosso objeto de estudo, vem explícita, na última série do Ensino Fundamental, nono ano, a apresentação de duas habilidades:

Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes e, saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos. (SÃO PAULO, 2010, p.66).

Por consequência, mesmo que os estudos da geometria tenham início por meio de percepção das formas geométricas e de suas propriedades características, desde cedo tais atividades relacionam-se diretamente com a construção, a representação ou a noção de objetos existentes ou fictícios.

Além disso, consideramos a Base Nacional Comum Curricular de 2017 (BNCC) acerca do estudo da geometria:

[...] amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. [...] estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. (BRASIL, 2017, p. 267).

O documento sugere que nos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de geometria necessita ser ampliado e consolidado nas aprendizagens realizadas. Nesse sentido, devem ser reforçadas tarefas que investiguem e gerem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, reconhecendo seus elementos, de modo a desenvolver a noção de congruência e semelhança.

Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo (BRASIL, 2017, p. 270).

No quadro 1, a seguir, é possível comparar, nos documentos curriculares mencionados, as principais recomendações referentes ao ensino da geometria em relação ao nosso objeto de estudo.

Quadro 1: Comparação entre os currículos

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)	Currículo do Estado de São Paulo (SP)	Base Nacional Comum Curricular (BNCC)
(a.I) Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança (p. 82) (a.II) [...] o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetia) (p. 86). (a.III) desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro) (p. 89). (a.IV) estabelecer relações de congruência e de semelhança entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações (p. 93)	(b.I) Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes; Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos. (p. 64)	(c.I) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. (c.II) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes (c.III) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Fonte: BRASIL (1998); SÃO PAULO (2010); BRASIL (2017) – adaptado

Os comentários acerca das propostas curriculares (BRASIL, 1998; SÃO PAULO, 2010; BRASIL, 2017) contribuem em nosso estudo ao nos possibilitar identificar elementos e sugestões para o ensino da geometria na Educação Básica, principalmente em temas que interessam diretamente a este estudo, como semelhança e proporcionalidade. Em seguida, considerando a questão de pesquisa que buscamos responder, apresentamos algumas pesquisas que nos aproximam do nosso tema de estudo, de modo a identificar elementos que favorecem o desenvolvimento de nossa investigação.

2.4 Revisão de Literatura

Nesta seção, trazemos uma revisão de literatura, buscando nos aproximar de estudos que circundam a noção de semelhança. Para Fiorentini e Lorenzato (2012), esta é uma etapa importante para a consolidação dos pressupostos teóricos e para as análises realizadas posteriormente. Além disso, os autores salientam que o propósito dessa fase da pesquisa é sondar e conhecer o que já se tem pesquisado ou estudado sobre um tema, com a finalidade de definir uma questão de pesquisa, ou, se já escolhida, como foi neste caso, aprofundar o domínio acerca do tema.

Nesta revisão, os trabalhos foram selecionados a partir de um levantamento no banco de teses Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), essencialmente nem todos os trabalhos trataram especificamente do tema semelhança de triângulos, mas aqui estão por tratarem do ensino de geometria, ora como objeto de estudo, ora como meio para investigar a aplicação de alguma estratégia de ensino.

O primeiro estudo que trazemos se refere a uma investigação de mestrado realizada na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), por Alexsandra Camara Maciel, defendida em 2004, o estudo teve como tema “O conceito de semelhança: uma proposta de ensino”, por meio do qual a autora propõe uma sequência de ensino envolvendo ótica geométrica.

Inicialmente, consideramos pertinente destacar que esse trabalho está em nossa revisão da literatura pelo fato de, em sua problemática, a autora apresenta apontamentos a respeito da noção de semelhança. Para isso, observamos que Maciel (2004) recorre a “Os Elementos” (2009) como a primeira organização da geometria de forma dedutiva, geral e abstrata em suas demonstrações, sem nenhuma menção a alguma situação real ou prática.

A autora relata que autores como “Hadamard (1932) consideram suas definições de semelhança a partir de transformações geométricas (isometrias e homotetias), enquanto Lima (1991) apresenta a definição de semelhança em função de um tipo determinado de transformação geométrica” (MACIEL, 2004, p.14).

A utilização da noção de homotetia, assim como suas principais propriedades e as relações com a noção de semelhança, é considerada por Maciel (2004) como algo importante; quanto a isso, a autora expõe a relação das noções de semelhança e de homotetia, a fim de esclarecer a definição de Hadamard (1932) e Lima (1991).

Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma. Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão $1/K$. Duas figuras F e F' chamam-se homotéticas quando existe uma homotetia g tal que $g(F) = F'$. Isometria é a transformação geométrica que conserva distâncias entre pontos, ou seja, a distância entre dois pontos é igual a distância entre seus pontos imagens pela transformação. Uma isometria também conserva a colinearidade de pontos, a ordem de pontos numa reta, a medida dos ângulos e o paralelismo de retas. Com a composição de uma homotetia com uma isometria, obtém-se a transformação semelhança, que leva ao conceito de figuras semelhantes (MACIEL, 2004, p. 19).

A partir dessa discussão inicial, a autora indica que toda semelhança é composta de uma homotetia com uma isometria. Além disso, o objetivo da pesquisa de Maciel (2004) consistiu em desenvolver uma estratégia didática para o uso de tecnologias em atividades/problemas ligados à geometria plana, tendo como elemento principal a homotetia. Decorrente desse objetivo, a pesquisa norteou-se a partir da seguinte questão: “uma sequência de ensino que utilize o conceito de homotetia integrado com a ótica geométrica proporciona ao aluno uma aprendizagem significativa do conceito de semelhança?” (MACIEL, 2004, p. 71).

Como aporte teórico, a autora se fundamentou nos trabalhos de Bernard Parsysz, considerando o quadro teórico para o ensino da Geometria, bem como de Duval, utilizando a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Como aporte metodológico, as atividades se estruturaram como uma pesquisa experimental, com a utilização de um plano clássico de ensino, nos quais participaram alunos de duas classes do primeiro ano do Ensino Médio, cabe ressaltar que, se justifica a abordagem de um objeto matemático comum ao Ensino Fundamental visto que a autora não está focando no objeto matemático, mas no campo do ensino da Física.

Durante a fase de experimento, a autora aplicou uma sequência de ensino, composta por dez atividades, organizada em função de pesquisas realizadas

anteriormente que consultou. Em sua pesquisa, a atenção de Maciel (2004) estava em desenvolver atividades que promovessem a coordenação dos registros discursivo, figural, simbólico e numérico. Nessa lógica, foram organizadas “situações que promovessem as apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória das figuras em relação ao desenvolvimento do conceito de semelhança” (MACIEL, 2004, p. 177).

A autora destaca, ainda, que o conceito de semelhança é valioso nas resoluções de problemas de geometria e de física. Contudo, para a autora, a falta de articulação dos temas da matemática e a ausência de conexões entre um mesmo tema abordado em diferentes contextos contribuem para uma visão fragmentada.

Nesse sentido, para a autora, o objeto matemático é abordado de forma singela, destacando apenas uma parte do que poderia ser explorado numa interpretação de uma situação real. Logo, conforme Maciel (2004), é necessário estabelecer um elo entre situações do cotidiano com o objeto de estudo.

Nesse sentido, Maciel (2004), busca utilizar uma prática pedagógica interdisciplinar para chegar à sistematização do conhecimento matemático, de forma a favorecer o significado da noção em tela.

Alguns dos resultados trazidos por Maciel (2004) apontam, em um primeiro momento, para a existência de dificuldades na aplicação da matemática em situações fora de seu contexto, de modo que os sujeitos apresentaram limitações em esboçar uma resolução para situações propostas, evidenciando falhas ao relacionar uma situação contextualizada com os conhecimentos necessários para sua resolução.

O fato citado acima é evidenciado quando, nas atividades, no contexto de ciências, especialmente da física, Maciel (2004) identificou dificuldades apresentadas pelos alunos quanto a explanação da formação da sombra e da formação de imagem em câmara escura, ao introduzir maquetes. O que a autora observa é que os alunos melhoraram suas noções sobre as formações de imagem na câmara escura e de sombra, que ocorrem devido à propagação retilínea da luz. Contudo, não foi possível identificar nenhuma observação por parte dos alunos em relação a semelhança entre as figuras.

Em relação as atividades sobre homotetia do espaço, executadas no contexto de papel e lápis, a autora identifica uma evolução quanto à descontextualização da situação real, por meio da qual os alunos puderam verificar que, “devido aos lados das figuras serem paralelos, ocorre a congruência dos ângulos correspondentes e a proporcionalidade dos lados homólogos” (p.178).

Nas atividades de homotetia no plano, Maciel (2004) verificou uma evolução com relação a alguns aspectos desta transformação que faziam parte do objetivo da pesquisa: “a obtenção do centro de homotetia em uma configuração homotética, a determinação dos pontos homólogos, a determinação do sentido da transformação de uma figura em outra e a relação entre as constituintes numéricas da razão de homotetia e os elementos figurativos” (p.179).

Após as análises do pós-teste, a autora retoma as principais conclusões procurando associá-las com os aspectos teóricos, metodológicos e com as hipóteses de pesquisa.

A pesquisadora relata que os alunos mostraram melhor percepção na semelhança de triângulos quando foram dadas as medidas dos ângulos, não importando as posições em que se encontravam as figuras. Contudo, percebeu dificuldades dos alunos ao pensarem que dois lados proporcionais em dois triângulos seria condição suficiente para a semelhança entre eles.

Com relação à semelhança em figuras quaisquer, foi observado que um dos grupos apresentou melhores índices de acerto. Assim, foi possível identificar que, alguns alunos “conceberam a semelhança entre figuras como uma transformação geométrica, no sentido de perceberem que quaisquer dois segmentos correspondentes de figuras semelhantes são proporcionais” (p. 182).

Nas atividades que trabalharam o conceito de homotetia, Maciel (2004) averiguou estratégias para o cálculo de valores desconhecidos em triângulos semelhantes, dando significado às proporcionalidades existentes entre os lados destes triângulos.

Outra observação identificada pela pesquisadora foram os avanços significativos que os alunos obtiveram com relação à percepção das condições necessárias e suficientes para a semelhança de triângulos, quadriláteros e figuras quaisquer. Com os resultados e a análise realizada, a autora reafirma que é

possível “trabalhar as variabilidades de configurações dos casos de homotetia realizando uma ampliação dessas configurações para as situações de semelhança” (p. 184).

A partir dos resultados, a autora considera que os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao conceito de semelhança e demonstraram melhor entendimento. Dessa forma, o estudo conclui como válida a sequência de ensino para o grupo de alunos e considera uma maneira significativa de trabalhar o conceito de semelhança.

A partir de sua problemática, Maciel (2004) nos traz relevantes contribuições acerca da noção de semelhança, no sentido que, ao aplicar uma sequência de atividades, tendo como objeto de estudo a noção de semelhança, os resultados que dela emergem contribuíram para a compreensão de possibilidades para o ensino, uma vez que a autora, para além da Matemática, trata do ensino de física, em uma perspectiva integrada.

Na mesma linha de investigação de Maciel (2004), encontramos a pesquisa de mestrado desenvolvida por Marcelo Tadeu dos Santos em 2012, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC–SP), intitulada “Semelhança de triângulos e Geometria Dinâmica – o trabalho em grupo na aprendizagem de conceitos”. A investigação tratou de aspectos relacionados à noção de semelhança. O autor não abordou todos os aspectos desta noção, restringindo-se apenas à semelhança de triângulos.

Em seu estudo, houve uma aplicação de atividades com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com objetivo de promover a aprendizagem de conceitos relacionados à semelhança de triângulos. Na percepção do autor, o tema semelhança de triângulos possibilita a apropriação de conhecimentos que contribuem para resolução de problemas envolvendo geometria.

A investigação foi norteadas por duas questões; na primeira delas, Santos (2012) propõe “como realizar um trabalho colaborativo que envolva os conteúdos apresentados nos livros didáticos sobre o tema semelhança de triângulos com materiais manipuláveis e a geometria dinâmica?”; e, na segunda, escreve “quais desafios são apresentados pelos alunos ao realizarem atividades em grupo a partir do tema semelhança de triângulo?”

Para responder a estes questionamentos, o autor recorre ao modelo teórico da construção do pensamento geométrico proposto por Dina van Hiele e Pierre Marie van Hiele. Dentre suas contribuições acerca da geometria, Santos (2012) a considera como parte integrante do desenvolvimento cognitivo do aluno. Quanto a isso, o autor ressalta que as noções geométricas proporcionam levantamentos de dados formais do espaço, a experimentação visual de soluções de problemas e a exploração dos registros gráficos dos objetos.

Além disso, Santos (2012) destaca, a respeito da geometria, que

Seu estudo não pode ser considerado apenas como parte do conhecimento abordado na disciplina de matemática de forma teórica e sem aplicações práticas, mas deve proporcionar ao aluno uma evolução no processo de aprendizagem, expandindo sua capacidade de criação, sua compreensão do espaço, seu senso crítico e interpretativo, do meio em que vive, aplicando os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas práticos (SANTOS, 2012, p. 59).

Diante dessa percepção, o autor discute metodologicamente a empregabilidade de um *software* dinâmico de geometria como suporte aos alunos.

[...] o *software* Geogebra foi utilizado para verificar, também, se o trabalho em grupos de estudo autônomo interfere no processo de aprendizagem, através do desenvolvimento do raciocínio lógico, utilizados nas semelhanças de triângulos, algumas habilidades necessárias à visualização prévia dos espaços e dos objetos a serem criados sejam ampliadas possibilitando uma apropriação das propriedades fundamentais dos ângulos, triângulos, paralelogramos e simetrias (*idem, ibidem*).

O autor destaca a possibilidade de utilizar um *software* de geometria, a partir do qual o processo de aprendizagem pode apresentar resultados mais eficazes. Entretanto, em suas conclusões, Santos (2012) salienta que, à medida que o aluno, no desenvolvimento de uma atividade, sabe o que procura e qual objetivo quer alcançar, o *software* pode se tornar um apoio didático, mas, se o aluno não tem noção do que busca, de modo contrário o *software* pode se converter em um obstáculo na aprendizagem.

A respeito da organização de atividades de geometria, Santos (2012) destaca que prever o aumento do nível de dificuldade de forma progressiva pode facilitar a apropriação das noções, atendendo aos níveis do aprendizado de geometria trazidos pelo modelo teórico de Van Hiele.

Em relação ao uso do *software*, o autor ressalta a necessidade de reflexão, uma vez que, dependendo da abordagem didática, tal estratégia pode contribuir ou não para a aprendizagem de geometria. A possibilidade de uma organização em que o nível de dificuldade aumenta de forma progressiva também contribuiu com nossas reflexões ao nos possibilitar conjecturas para uma possível organização de atividades.

A pesquisa desenvolvida por Leandro Ramiro (2014) sob o título “Situações Didáticas no Ensino Geometria com o aplicativo GeoGebra”, defendida na Universidade Estadual Paulista – UNESP, na cidade de São José do Rio Preto/SP, propõe uma sequência de atividades.

Observamos que esse pesquisador também não tratou diretamente da noção de semelhança de triângulos, mas teve como objetivo discutir a importância das demonstrações no ensino básico de Matemática. Desta forma, o estudo teve a seguinte questão norteadora: “como incorporar o uso das novas tecnologias à Educação Básica e desenvolver a capacidade de realizar demonstrações, argumentações, de fazer conjecturas e generalizações na sala de aula e ainda tornar os alunos sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem?” (RAMIRO, 2014, p. 17).

Partindo da questão norteadora, a premissa do pesquisador foi estabelecer referências que permitissem entender o raciocínio matemático, a natureza das demonstrações matemáticas e os processos envolvidos na construção de demonstrações. Para tal, em sua pesquisa, Ramiro (2014) teve como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas.

Em relação ao aporte teórico adotado, o autor destaca que, nessa perspectiva,

[...] a proposta é que o aluno exponha suas respostas aos problemas propostos em relação ao meio em que ele está inserido e não a exigência do professor, tomando para si a responsabilidade de gerenciar suas aprendizagens em um contrato didático dialogado e definido com o professor e por último o papel de gerenciar situações que produza nos alunos os mesmos efeitos esperados neles (RAMIRO, 2014, p. 17).

De acordo com o autor, é possível que o professor estabeleça uma analogia entre a matemática formal e a matemática do cotidiano, ao analisar a evolução de uma demonstração. Além disso, Ramiro (2014) destaca que os alunos

experimentam, a princípio, técnicas e regras operatórias na resolução de problemas; em seguida, o ensino passa a conter elementos abstratos que exijam inferências que não fazem parte diretamente do seu cotidiano.

Embora não tenhamos observado de forma explícita a escolha de uma metodologia, Ramiro (2014), em seu estudo, buscou propor atividades estabelecendo um *milieu* para favorecer, no processo de aprendizagem, momentos de desequilíbrios, assimilações e acomodações. Observamos que parte dos seus procedimentos metodológicos foi caracterizada por inserir, como suporte às atividades propostas, o *software* GeoGebra. Conforme o autor menciona, o GeoGebra permite movimentos dinâmicos.

Em sua proposta, Ramiro (2014) propõe a seguinte sequência: uma abordagem quanto a congruência de triângulos, ampliando para isometrias no plano; um estudo da noção de semelhança – na sequência, buscou por uma definição genérica, aplicada a polígonos, considerando que essa noção de semelhança permite o estudo de casos de semelhança na ampliação e redução de figuras; e, por fim, por meio das relações métricas, Ramiro (2014) propõe uma atividade envolvendo o teorema de Pitágoras.

Como podemos observar, o estudo não foi aplicado à alunos, entretanto, em seus resultados, o autor pressupõe que esse processo de realização das atividades pode permitir aos alunos, ao interagirem com o *software*, apropriarem-se das noções e propriedades dos objetos matemáticos.

De outro modo, Ramiro (2014) pensando no professor, ressalta que disponibilização de atividades no GeoGebra não assegura a efetivação de uma nova prática pedagógica. Nesse sentido, reforça a importância que o professor participe de cursos e formações que viabilizem sua segurança para uso desses recursos em sala de aula.

Em suas considerações, a pesquisa de Ramiro (2014) retrata a importância das demonstrações no ensino da Matemática, em especial no ensino da geometria. Retrata, também, a necessidade de tornar o aluno mais engajado durante as aulas de Matemática, destacando, também, as possibilidades que oferecem o uso de novas tecnologias digitais, além da importância da formação continuada do professor.

Em relação ao trabalho aqui descrito, as contribuições de Ramiro (2014) favorecem nossa percepção em relação às possibilidades de promover o ensino de geometria por meio de uma proposta de atividades com a utilização de *softwares* como o GeoGebra para o ensino de geometria, e, especificamente nesse caso, para o ensino de noções de semelhança de triângulos.

Também foi relevante para nosso estudo a ideia trazida pelo autor, quando se refere à elaboração de uma proposta de atividades associadas à geometria que permita ao participante a autonomia nas manipulações de construções de representações dos objetos matemáticos.

Na direção das discussões promovidas por Ramiro (2014) a respeito das demonstrações em geometria, outro trabalho que contribui para a nossa revisão de literatura é a dissertação de mestrado defendida por Rubervan da Silva Leite (2017), pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), intitulada “Formação de professores de Matemática e Tecnologias Digitais: um estudo sobre o Teorema de Tales”.

Como podemos constatar, Leite (2017), em sua pesquisa, trata de um objeto específico, o teorema de Tales, que, conforme a discussão trazida anteriormente neste trabalho a respeito da noção de semelhança, é um tema presente em aspectos relacionados à noção de semelhança de figuras planas.

O objetivo da pesquisa desenvolvida por Leite (2017) foi identificar a integração dos conhecimentos didáticos, de conteúdo e tecnológicos que um grupo de alunos de licenciatura em Matemática possuem, relacionados ao teorema de Tales. Para esse pesquisador, pensar sobre as possibilidades de percepção quanto à integração entre os conhecimentos mencionados é algo relevante, de onde emerge a sua questão de pesquisa: “de que maneira podem ser evidenciados, de forma integrada, os conhecimentos tecnológico, específico e didático do conteúdo relativos a tópicos de geometria euclidiana plana – e do teorema de Tales, em particular – entre alunos de licenciatura a partir de uma abordagem envolvendo atividades com construções em um ambiente de tecnologias digitais?”

Para responder a essa inquietação, o autor recorre a constructos teóricos que possibilitam investigar o direcionamento de sua pesquisa, envolvendo autores como Lévy (1993), Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2013).

Na concepção didática, para a compreensão dos sujeitos referente às conjecturas levantadas quando da resolução de problemas matemático e para a compreensão das provas matemáticas, Leite (2017) recorre a Balacheff (1987), considerando o uso de tecnologias digitais na organização das resoluções.

Na perspectiva da formação de professores, cenário em que se encontravam os sujeitos da pesquisa, Leite (2017) se fundamenta na argumentação Shulman (1987) acerca dos saberes docentes, organizados em categorias de conhecimentos “[...] e articulados como uma compreensão imprescindível ao trabalho docente, em especial no que se refere à atuação do professor no processo de aprendizagem de seus grupos de estudantes” (p. 48).

O autor reforça a indispensabilidade de que o professor pratique hábitos de estudo, de modo que seus conhecimentos didáticos colaborem para sua formação acadêmica. Nesse sentido, um importante aspecto a ser considerado é o de aprender a usar as tecnologias adequadas em integração com os saberes docentes. Para isso, o autor recorre a Mishra e Koehler (2006), autores que argumentam que

[...] o conhecimento acerca do uso didático das tecnologias não deve ser visto de forma separada em relação aos conhecimentos docentes ligados ao conteúdo e à didática. [...] [São práticas] necessárias à atuação docente, com ênfase nas conexões, interações, possibilidades e condicionamentos que ocorrem no contexto formado pelo conteúdo, a didática e as tecnologias (LEITE, 2017, p. 57).

Nesse sentido, o Leite (2017) direciona suas reflexões com o embasamento de um constructo teórico defendido pelos autores supramencionados, relativo ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK).

Os aportes metodológicos adotados por Leite (2017) são de cunho qualitativo, alicerçados na aplicação de atividades e baseados na análise descritiva das respostas, com suporte do *software* GeoGebra, na resolução de uma sequência de atividades de complexidade progressiva, tendo como pretensão oportunizar as conjecturas e interações para validar matematicamente o objeto de estudo.

Leite (2017) traz, em sua pesquisa, elementos relativos ao teorema de Tales e postulados correlatos, em um cenário de formação inicial de professores, com suporte das tecnologias digitais. O autor procurou indicar, sob o ponto de vista de

Shulman (1986), os conhecimentos específicos envolvidos nas atividades e na integração com os aspectos didáticos que o professor necessitaria compreender para a efetivação dos pressupostos do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Em seus resultados, o autor destaca que as atividades provocaram reflexões importantes entre os participantes, levando-os a reestruturar deduções e obter acertos relevantes em suas argumentações em relação aos conhecimentos específicos, com reflexos sobre os conhecimentos didáticos e tecnológicos necessários para o desenvolvimento da sequência a qual foram submetidos.

Para Leite (2017), os conhecimentos tecnológicos dos participantes da pesquisa deveriam passar por um processo de refinamento, de modo que eles desenvolvessem fluência em relação às interfaces utilizadas. Além disso, os conhecimentos didáticos relacionados ao teorema de Tales deveriam ser aprimorados. Nesse sentido, as conexões entre os conhecimentos matemático e didático e a fluência em interfaces digitais colaboraria para uma mais ampla formação inicial do professor. Quanto a isso, o autor aponta para as possíveis dificuldades e possibilidades que os professores em formação inicial teriam em utilizar *software* GeoGebra em atividades que envolvessem o teorema de Tales.

As contribuições de Leite (2017) ao nosso estudo se revelam em relação à possibilidade de os professores em formação refletirem acerca dos temas matemáticos envolvidos – no caso de Leite (2017), o teorema de Tales. Além disso, quanto aos objetos matemáticos, essencialmente, Leite (2017) não trata da noção de semelhança, mas ao abordar o teorema de Tales, seu estudo contribui para as nossas reflexões acerca deste tema, uma vez que podemos tomar como escolha o teorema de Tales, abordado principalmente quando nos referimos à ideia de paralelismo para se chegar a uma noção de semelhança de triângulos.

Na mesma direção que Leite (2017), a dissertação defendida anteriormente por Nilo Silveira Monteiro de Lima em 2016, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), intitulada “Investigações em Geometria Plana com Interfaces Digitais: um estudo sobre homotetia”, investigou, por meio de uma sequência de atividades relacionadas ao estudo da homotetia, possibilidades para utilização do GeoGebra na formação de professores.

Assim como outras pesquisas já citadas, Lima (2016) não trata diretamente da noção de semelhança de triângulos, mas de homotetia, que, de acordo com a

discussão em relação ao nosso objeto de estudo, é um elemento a se considerar para a construção da noção que baseia nosso estudo.

Como uma investigação organizada na modalidade qualitativa, por meio de um estudo de caso, tendo como sujeitos participantes professores da rede pública e estudantes do mestrado em Educação Matemática da PUC-SP, Lima (2016) norteou seu estudo a partir da seguinte questão: “de que maneira se caracteriza um percurso de estudo e investigação, envolvendo professores de Matemática da Escola Básica, acerca do tema “homotetia” e de tópicos matemáticos correlatos, realizado a partir de uma proposta que envolve tanto a resolução de atividades por pessoas-com-tecnologias como o desenvolvimento de fluência em relação às interfaces empregadas?” (LIMA, 2016, p. 19).

Para responder essa questão, o percurso traçado por Lima (2016) foi na direção de desenvolver uma estratégia didática para uso de tecnologias em atividades/problemas ligados à geometria plana, tendo como objetivos

Constituir uma sequência didática sobre homotetia, envolvendo, igualmente, assuntos correlatos e necessários à reflexão sobre o tema, que permita, por parte dos sujeitos, a constituição de percursos investigativos cujos problemas estruturantes são pensados a partir da integração das pessoas com o *software* GeoGebra em sua versão número 5;

Possibilitar o engajamento dos participantes na construção de conjecturas e propostas de resolução de problemas sobre o tema “homotetia” a partir de um ambiente e de uma estratégia didática que busca incentivar interações no âmbito de ambientes virtuais e presencias (LIMA, 2016, p. 19).

O pesquisador identifica que a convergência entre diversas mídias de diferentes ambientes contribui para que o aprendiz se sinta confortável para familiarizar-se com o uso da tecnologia que julgar mais adequada para exploração de um tema.

Metodologicamente, Lima (2016) procurou desenvolver uma estratégia didática voltada para o ensino da geometria, com a intenção de promover características de aprendizagem colaborativa, apoiando-se no uso de tecnologias em um ambiente online interativo.

Na intenção de evidenciar as compreensões constituídas a partir de pressupostos interativos no âmbito de pessoas-com-tecnologias-digitais, Lima

(2016) utilizou uma sequência de atividades, a partir das manipulações das mídias empregadas, em que pretendia analisar exploração de construções geométricas para as atividades com relação à proporcionalidade e homotetia, além de promover discussões acerca de semelhança de triângulos.

Em seus resultados, o pesquisador ressalta que a organização do estudo permitiu “a apropriação de uma nova forma de pensar – e de reorganizar o pensamento – acerca de temas matemáticos (paralelismo, proporcionalidade, semelhança e homotetia)” (LIMA, 2016, p. 98), a partir do uso de tecnologias digitais e não digitais.

Para o autor, a trajetória proposta pela sequência de atividades marcou de forma distintiva o papel da construção de fluência dos dispositivos empregados como uma importante etapa de consolidação de processos cognitivos.

Notamos que esta fluência apoiou o movimento por meio do qual se deu a reorganização do pensamento e o *pensar com tecnologias*, evidentes nos aportes teóricos, possibilitando observar, a partir do discurso dos sujeitos, a forma como se expressavam à medida que iam ganhando maior desenvoltura no GeoGebra (LIMA, 2016).

Para o autor, é a estimulação de estratégias que promovam a proposição de conjecturas apoiadas em tecnologias como reorganizadoras do pensamento, e da resolução das atividades, que possibilitaram subsidiar a construção do conhecimento no âmbito da pesquisa. O autor relata que as falas dos participantes indicavam conjecturas e raciocínios que mostravam, de maneira inequívoca, um movimento em torno de pensamentos-com-tecnologias, ou seja, propostas de resolução apoiadas pelo uso de interfaces digitais, no caso.

Para nosso estudo, essas observações indicaram a relevância do emprego de estratégias didáticas com tecnologias na elaboração de propostas de atividades. O autor menciona que o desenvolvimento de fluência nas interfaces digitais não prescinde, por vezes, de apoio, que pode ser promovido, pontualmente, por instruções:

À medida que as dificuldades persistiam, desde o desenvolvimento da *fluência* nas interfaces, como foi mencionado anteriormente, *fluência* esta que compreende a exploração dos elementos da interface e a apropriação

da lógica da interface, a necessidade destes roteiros foi novamente reestabelecida, de modo que a estratégia didática não tivesse seu andamento comprometido (LIMA, 2016, p. 101).

Além disso, o autor menciona alguns episódios envolvendo outras mídias, o que permitiu “explorar e investigar valendo-se do suporte “lápiz-e-papel” [...] para dar solução a um problema proposto, seguido da reprodução do resultado por meio do suporte digital” (LIMA, 2016, p. 101). Aqui, o autor menciona seus referenciais teóricos, principalmente Oliveira (2013), para indicar a ideia de convergência entre mídias.

Com uma perspectiva alinhada à investigação realizada por Lima (2016), observamos que a dissertação de mestrado defendida por Lahis Braga Souza no ano de 2016, na Universidade Estadual Paulista - UNESP, na cidade de Rio Claro/SP, com título “Tecnologias Digitais na Educação Básica: um retrato de aspectos evidenciados por professores de Matemática em Formação Continuada”, tratou especialmente o uso das tecnologias digitais como suporte para o ensino.

Nessa pesquisa, Braga (2016) teve como objetivo geral investigar as concepções dos professores de Matemática em relação às tecnologias digitais nos anos finais do Ensino Fundamental.

Além do objetivo geral, em seus objetivos específicos, a pesquisadora buscou identificar os aspectos da formação continuada que podem emergir em suas aulas no ensino da Geometria; o papel das tecnologias digitais em suas salas de aula, com ênfase no ensino da Geometria; as visões dos professores em relação ao uso de tecnologias e o papel da gestão escolar no uso das tecnologias digitais em aulas.

Para isso, a autora organizou um curso de formação continuada com professores das séries finais do Ensino Fundamental da rede pública de Ensino, intitulado “Algumas possibilidades das Tecnologias Digitais em Geometria no Ensino Fundamental II”, na modalidade semipresencial.

Da leitura que realizamos, identificamos que Braga (2016), buscava responder à seguinte questão de pesquisa: “o que enunciaram e apresentaram os professores participantes de um curso de formação continuada sobre o uso das tecnologias digitais em aulas de Educação Básica?”

Para responder a tal questão, a organização da formação continuada buscou compreender aspectos desse grupo específico de professores e suas particularidades em relação à geometria.

Em seus aportes teóricos, a pesquisadora destaca as fases das tecnologias na Educação Matemática, de modo que a organização da formação de professores teve como foco principal discutir como desenvolver com os alunos os conteúdos de matemática com o uso das tecnologias digitais, em especial, relacionados ao ensino da geometria nas séries finais do Ensino Fundamental.

A partir de uma metodologia qualitativa, a autora analisa o curso de formação continuada proposto, do qual emergem alguns resultados, que, essencialmente, não tratam da noção de semelhança de triângulos, nosso objeto de estudo. Entretanto, de modo geral, em relação ao ensino de geometria, especialmente tratando do uso de tecnologias digitais para o ensino, a autora ressalta:

[...] que os *softwares* de Geometria Dinâmica são significativos para o ensino da geometria. Sendo seu uso uma proposta que visa ao desenvolvimento do conhecimento geométrico do aluno com situações que estimulem sua curiosidade e despertem seu interesse pelos conteúdos abordados nas aulas e, também, que auxiliem o aluno na exploração do conhecimento (BRAGA, 2016, p. 111).

Além disso, a pesquisadora considera ser essencial ainda que o professor tenha conhecimento dos progressos na área educacional, a partir dos quais o uso de tecnologias digitais aparece como uma alternativa de metodologia de ensino. A esse respeito, Braga (2016) destaca que formações de professores que possibilitem o despertar para uma motivação em relação ao uso, em sua prática pedagógica, das tecnologias digitais nas aulas, em especial para o ensino de geometria, é um aspecto a ser fomentado, [...] “como a experimentação com tecnologias – que independem do conteúdo a ser lecionado com as tecnologias digitais pelos professores, mostram sobre as tecnologias que podem ser utilizadas na matemática em geral” (p. 107).

Como já mencionamos o estudo de Braga (2016) não trata diretamente da noção de semelhança, mas trata do uso de tecnologias digitais para o ensino de geometria. Quanto a isso, as contribuições de sua pesquisa para o nosso estudo

se evidenciam à medida que a autora destaca a necessidade, por parte dos professores, de formações que possam vir a contribuir para melhorar suas práticas, que embora não estejamos nesse estudo tratando de análise de aplicação, mas sim uma proposição.

No tocante ao ensino de geometria com apoio de tecnologias digitais (nesse caso, com o *software* GeoGebra), o estudo de Braga (2016) evidencia uma possibilidade à formação de professores. É nessa perspectiva que trazemos, nesta revisão de literatura, a dissertação de Luiz Carlos Ramassotti, intitulada “A geometria euclidiana na licenciatura em matemática do ponto de vista de professores formadores”, defendida em 2015, na Universidade Estadual Paulista – UNESP, na cidade de Rio Claro/SP, que tece considerações acerca de possibilidades para formação de professores formadores em relação ao ensino de geometria.

Identificamos que, em sua pesquisa, o autor teve como objetivo apontar as concepções de um grupo de professores formadores do curso de licenciatura em matemática sobre temas ligados à geometria euclidiana. Nesse sentido, o objetivo estava relacionado ao que os professores formadores consideram relevante para que o professor em formação tenha uma formação geométrica adequada ao exercício da docência na Educação Básica.

Diante desses objetivos, o estudo buscou responder à seguinte questão: “como um grupo de professores formadores concebe a geometria euclidiana nos cursos de Licenciatura em Matemática de modo a preparar o futuro professor para o ensino da mesma na Educação Básica?” (RAMASSOTTI, 2015, p. 13).

Para responder essa questão, a pesquisa desenvolvida por Ramassotti (2015) tomou como referencial teórico a Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2009), de modo que, metodologicamente, para constituírem-se como conteúdos a serem analisados, o pesquisador recorre à realização de entrevistas com um grupo de professores formadores.

Nessas entrevistas, o autor objetivava compreender as práticas e as metodologias de ensino da geometria nos cursos de formação de professores de matemática. Evidentemente, esse processo caracteriza uma pesquisa de natureza qualitativa.

O que muito nos interessa no estudo Ramassotti (2015) é que, por meio de entrevistas semiestruturadas, o autor aborda temas como o rigor com que os sujeitos trabalham a axiomatização e formalização da geometria. Além disso, o estudo traz considerações a respeito do uso da régua e do compasso e a introdução dos *softwares* de geometria na licenciatura em matemática, especificamente no caso da geometria.

Segundo Ramassotti (2015), como resultado da análise de seus dados, a geometria deveria ser trabalhada pelos professores por um sistema dedutivo e axiomático, de modo que os cursos de licenciatura em matemática, na visão dos sujeitos, deveriam abordar as demonstrações nas disciplinas de conteúdo matemático, em especial, na geometria.

Como resultado, o autor ainda destaca que trabalhar as construções utilizando instrumentos, como por exemplo, régua e compasso, torna-se fundamental para a formação do professor, que poderia se utilizar desse recurso para construção de figuras, demonstrações de teoremas e conceitos da geometria euclidiana. Ainda nesse contexto, Ramassotti (2015), indica as tecnologias digitais, como um recurso que auxilia o estudo da geometria, por apresentar características importantes nas construções, como as visualizações das figuras em diversas posições e ainda, por permitirem realizar experimentações que contribuem para a sustentação de conjecturas e demonstrações.

O autor ainda ressalta ser essencial que o professor, além de ter domínio do conteúdo específico, venha a ter cursos de formação, com destaque para *softwares* de geometria dinâmica, os quais colaborariam como um recurso pedagógico importante para suas aulas.

Os resultados de Ramassotti (2015), demonstram que os entrevistados reconhecem a responsabilidade e relevância na escolha da adoção do material didático a adotar “no que se refere ao conteúdo ou à forma de apresentação, da axiomatização, bem como do rigor e linguagem formal utilizada” (p. 92). Contudo, não existe consenso de qual referência bibliográfica adotar. Outro apontamento trazido pelo autor está nas poucas produções de materiais para o ensino da geometria direcionada para os cursos de licenciatura em matemática. Para ele, isso

se dá, entre outras razões, por falta de conhecimento específico no ensino deste conteúdo.

Em relações aos professores formadores, Ramassotti (2015) indica, a partir dos mesmos, uma percepção de que o professor em formação, por não dominar o conteúdo, não sente segurança para ensinar, o que implica em, também, não ter uma metodologia adequada para a realização de seu trabalho.

As contribuições de Ramassotti (2015) para esta pesquisa ficam por conta da necessidade de abordar elementos relacionados às demonstrações de objetos da geometria em cursos de licenciatura em matemática, o que procuramos destacar nos estudos preliminares que realizamos aqui. Em relação à formação de professores, as contribuições emergem à medida que o autor aponta, como algo essencial ao professor, além do domínio do conteúdo específico, o acesso a cursos de formação, ressaltando que os *softwares* de geometria colaboram como um recurso pedagógico importante para suas aulas.

Diante das discussões trazidas a partir das pesquisas consultadas até aqui em nossa revisão de literatura, podemos observar, a partir de estudos como de Maciel (2004), a possibilidade de investigar a construção de conhecimentos em relação à noção de semelhança de triângulos. Nesse sentido, é o que identificamos na proposta elaborada por Santos (2012) em sua pesquisa. Nesse sentido, estudos como os de Ramiro (2014), Lima (2016) e Leite (2017) destacam discussões relacionadas ao ensino de temas/objetos da geometria, sobretudo em relação ao uso de tecnologias digitais como suporte para esse ensino. E é no sentido de utilizar tecnologias digitais que Braga (2016) e Ramassotti (2015) contribuem ao conjecturar sobre possibilidades de formação de professores em relação ao ensino de geometria, especificamente de noções de semelhança de triângulos, a partir do uso de tecnologias digitais.

A partir dessas perspectivas e buscando meios para responder ao questionamento norteador da pesquisa, no capítulo a seguir, tratamos de apresentar aportes teóricos, essencialmente ligados à formação de professores, o uso de tecnologias digitais na Educação Matemática e a construção de situações didáticas.

3 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentamos nossos aportes teóricos. Inicialmente, trazemos reflexões a respeito das formas de apreensão figural propostas por Duval (2012) em relação ao ensino da geometria. Relacionados à formação de professores, são trazidas contribuições vindas dos estudos de Shulman (1986; 1987). Quanto à formação de professores e tecnologia, temos, como referência, os estudos de Mishra e Kohler (2006), tema com o qual contribui, também, Oliveira (2018), autor que também trata, de forma geral, acerca do uso das tecnologias em Educação Matemática. Em relação à construção das atividades, indicadas mais adiante, esta pesquisa se apoia em pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), em especial, nas contribuições de Brousseau (2012). Estes são os autores e propostas teóricas tratados nas próximas páginas.

3.1 As formas de apreensão em relação ao ensino da geometria

Considerando que este trabalho tem como objeto de estudo a noção de semelhança de triângulos, discutiremos, a seguir, um referencial teórico relacionado ao ensino da geometria: trata-se das ideias de Duval (2012), referentes a uma abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência de figuras.

Segundo Duval, problemas relacionados à geometria e que podem ser propostos aos alunos apresentam uma particularidade:

[...] por um lado, a sua resolução exige uma forma de raciocínio que implica referência a uma axiomática local, mas que se desenvolve no registro da língua natural. Esta forma de raciocínio conduz o desenvolvimento de um tipo de discurso que funciona por substituição, como se tratasse de uma língua formalizada, ainda que situado em um registro em que o discurso é construído de modo natural por associação e por acumulação (DUVAL, 2012, p. 119).

Nesse sentido, Duval (2012) destaca que a coerência não repousa sobre as mesmas diretrizes de organização do discurso. Para o autor, essas particularidades relacionadas à geometria exigem, “uma forma de expressão que não repousa na

oposição geralmente feita entre a língua natural e as línguas formalizadas” (p. 119). Além disso,

por outro lado, a heurística de problemas de geometria refere-se a um registro de representações espaciais que originam formas de interpretações autônomas. Entre estas interpretações distinguiremos: as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras (DUVAL, 2012, p. 120).

Consideramos a este referencial, as apreensões supracitadas. Em primeiro momento, em relação a apreensão sequencial, Duval (2012) afirma que esta forma de apreensão “é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura” (p. 120).

O autor comenta que nos tempos mais recentes, as orientações didáticas têm concedido certa importância a estas atividades de geometria. Conforme observamos, o autor aponta que, os objetivos dessas orientações didáticas estão em tentar “melhor preparar os alunos para a forma de desenvolvimento do raciocínio que os problemas em geometria exigem” (p. 120).

Antes de tratarmos das demais formas de apreensão, nos parece relevante apontar que para Duval (2012), numa perspectiva cognitivista

[...] a resolução de problemas em geometria e a entrada nesta forma de desenvolvimento do raciocínio que esta resolução exige, depende da conscientização da distinção, quer dizer, da conscientização da oposição entre as três primeiras formas de apreensão das figuras. No entanto, isto constitui não mais do que um aspecto do modo de raciocinar geométrico. Existe outro aspecto que diz respeito ao estatuto de “intermediário natural” do modo de raciocinar em geometria: raciocínio que não funciona como a argumentação do pensamento natural, se bem que utiliza os recursos da linguagem natural (DUVAL, 2012, p. 120).

Da perspectiva citada, Duval (2012) propõe que “uma análise das funções cognitivas subjacentes às atividades de demonstração em geometria parece realmente necessária para orientar o ensino” (p. 120). Quanto às apreensões de formas na interpretação figural em uma situação geométrica, Duval (2012) argumenta:

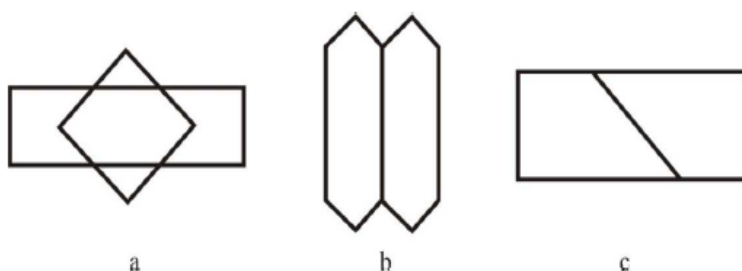
Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e

outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais (p. 120).

Esses dois posicionamentos, a apreensão perceptiva de formas e a interpretação discursiva dos elementos figurais, se apresentam em discordância, uma vez que a figura apresenta objetos que se destacam livremente do enunciado, “assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente” (DUVAL, 2012, p. 120).

Desta forma, problemas ligados a figuras geométricas se evidenciam em relação a diferença entre apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses. Figura geométrica é relação entre a apreensão perceptiva e a discursiva dada pelas hipóteses. Para o autor, a apreensão perceptiva de uma figura segue a lei do fechamento e da continuidade, quando diferentes traços formam um contorno simples e fechado.

Figura 27: Exemplos de diferentes organizações perceptivas de figuras



Fonte: Duval (2012, p. 121)

As representações figurais (a), (b) e (c), contidas na Figura 27, surgem, nessa ordem, como:

- em (a), a superposição de duas formas, um quadrado e um retângulo;
- em (b), uma montagem de duas formas idênticas em que lados de cada uma se tocam;
- em (c), a repartição de uma forma, um retângulo, em duas partes. (DUVAL, 2012, p. 121).

De acordo com Duval (2012), a lei de fechamento ou de continuidade exerce papel relevante quando se consideram as figuras via de regra usadas pelos alunos, pois se é certo que provoque resistência em relação ao esquecimento, “devido a

forma em que aparece [a figura], em proveito dos traços organizados em uma forma percebida (ou somente de certos traços)”, de outro modo, concorre para excluir “organizações mais simples e impede, desta maneira, de ver outras formas”. Desta maneira, “a diferença entre a interpretação discursiva de uma figura exigida por uma situação geométrica e a apreensão perceptiva” (DUVAL, 2012, p. 121-122), tem origem nas leis de organização perceptiva. Cabe destacar que, mais adiante, tratamos da apreensão discursiva de modo a melhor diferenciá-la da apreensão perceptiva.

Duval (2012) observa que, no caso da apreensão perceptiva, os alunos “não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses” (p. 124). Conforme observado, os alunos, em uma apreensão perceptiva,

[...] leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado. Este esquecimento ou abandono do enunciado marca a ausência da atitude que chamamos de interpretação discursiva da figura. É por isso que os problemas que são acessíveis a estes alunos são aqueles cujos enunciados são semanticamente congruentes à figura construída ou a construir. No entanto, isto não é mais do que uma condição necessária (DUVAL, 2012, 124-125).

Sob o ponto de vista do autor, ao observar alunos que, no processo de resolução de uma situação geométrica, apresentam apreensão perceptiva de formas e interpretação figural, “a congruência semântica abre ou fecha a porta de entrada na resolução de um problema; ela não é suficiente para a sua busca” (DUVAL, 2012, p. 125). Observamos que, em relação à congruência semântica, para Duval (2012), um aspecto essencial que é preciso considerar se refere à apreensão operatória, que permitiria ir além das concepções formadas a partir da apreensão perceptiva.

A respeito da apreensão operatória, uma primeira ideia é que toda figura pode ser modificada. Pode, por exemplo, ser dividida em partes que formem subfiguras, ou incluí-la em outra figura da qual ela passa a ser uma subfigura. Esta modificação é definida pelo autor como modificação mereológica, que “se faz em função da relação parte e todo” (p. 125).

Duval (2012) define uma modificação mereológica “como uma modificação que faz surgir uma forma como um todo fracionado em partes homogêneas ou em partes heterogêneas” (p. 127).

E ainda, em relação a uma figura:

Pode-se também aumentá-la, diminuí-la ou deformá-la: esta modificação é uma **modificação ótica**, ela transforma uma figura em outra, chamada sua imagem. Esta transformação, que é realizada através de um jogo de lentes e espelhos, pode conservar a forma inicial ou alterá-la. Pode-se, enfim, deslocá-la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca: esta modificação é uma **modificação posicional** de orientação e do lugar da figura dentro do seu ambiente (em geral o plano fronto paralelo) (DUVAL, 2012, p. 125, grifos do autor).

De acordo com Duval (2012), cada uma dessas modificações é realizável graficamente ou mentalmente. Um exemplo discutido pelo autor apresenta a seguinte ideia: ao repartir uma figura em subfiguras, evidencia-se a igualdade de áreas, ou, eventualmente, a proporção que, se considerarmos uma figura como o aumento ou a redução de outra, pode permitir ver o centro de uma homotetia.

Desta forma, Duval (2012, p. 125) denota que “a apreensão operatória é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações”. De modo que, para cada tipo de modificação, existem inúmeras operações possíveis. Neste contexto, o autor trata da produtividade heurística de uma figura, com foco em problemas de geometria. Tal produtividade “está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto” (DUVAL, 2012, p. 125).

Em que pese a riqueza das propostas múltiplas discutidas por Duval (2012) em suas asserções, interessa mais a este estudo as formas de apreensões trazidas pelo pesquisador. Justamente Nesse sentido, ao tratar da apreensão operatória, o autor apresenta um quadro que ilustra as possibilidades dessa forma de apreensão de figuras no âmbito de uma análise geometricamente justificada.

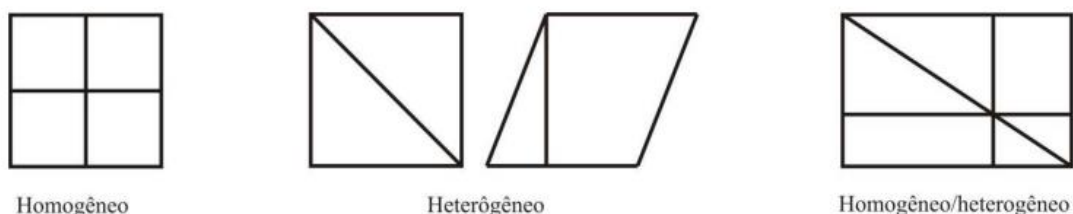
Quadro 2: Tipos de apreensão operatória de figuras.

<i>Tipo de modificação figural</i>	<i>Operações que constituem a produtividade heurística</i>	<i>Fatores que interferem na visibilidade</i>
Modificações mereológicas	- Reconfiguração intermediária - Mergulhamento	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificações óticas	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
Modificações posicionais	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras.

Fonte: Duval (2012, p. 127) – adaptado

Notamos que o quadro apresenta diferentes possibilidades ligadas às apreensões operatórias de figuras. Embora o próprio autor reconheça a possibilidade de discorrer acerca das diferentes operações constituintes da produtividade heurística das apreensões, seu trabalho prefere se deter com destaque sobre as reconfigurações intermediárias, as quais “intervêm nos problemas iniciais de geometria que podem ser propostos aos alunos, cujas resoluções não requerem a utilização de um corpus de definições e de teoremas” (p. 127).

Para compreensão da operação de reconfiguração intermediária, retomamos a ideia da modificação mereológica, que tem a ver com a proposta de um todo fracionado em partes homogêneas ou em partes heterogêneas. Modificações deste tipo se constituem graficamente pela adição de um ou mais traços à figura inicial. Na figura a seguir, trazemos um exemplo a respeito dessas modificações, de acordo com Duval (2012).

Figura 28: quadriláteros fracionados de diferentes maneiras

Fonte: DUVAL (2012, p. 127) – adaptado

A relevância do fracionamento de uma figura, segundo Duval (2012), é que ela origina a operação de reconfiguração intermediária. Desta forma, ainda

segundo o autor, as partes obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em várias subfiguras, todas associadas à figura inicial.

Quanto a esta forma de apreensão, em suas observações, Duval (2012) evidencia que o que parece ser o principal obstáculo das situações envolvendo geometria tem relação com a visibilidade aparente aleatória em cada indivíduo. A esse respeito:

[...] visibilidade da figura é intrínseca aos tratamentos matemáticos: o fato de perceber ou não perceber, em uma figura, a reconfiguração intermediária pertinente, não significa nada quanto à possibilidade de aplicar esta reconfiguração quando ela é percebida (DUVAL, 2012, p. 133).

Outra discussão promovida pelo autor se refere à apreensão discursiva de uma figura. Duval (2012) aborda este tópico destacando a relevância do problema de congruência entre figura e enunciado e entre figura e o tratamento matemático. Nesse sentido, o pesquisador francês assevera que as figuras geométricas partem de um estatuto segundo o qual não se constituem como um registro de tratamento autônomo, o que ocorreria, por exemplo, com as representações gráficas cartesianas. Para Duval, então,

Isto implica subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva e, como consequência, uma restrição da apreensão perceptiva: uma figura geométrica não mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito. Esta subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva pode ser considerada como uma teorização da representação figural: a figura geométrica torna-se, de certa maneira, um fragmento do discurso teórico (DUVAL, 2012, p. 133).

É da perspectiva citada anteriormente que Duval (2012) assinala que “a compreensão desta teorização das figuras geométricas, na qual sua apreensão perceptiva deve estar subordinada a sua apreensão discursiva, constitui um dos vieses de acesso à demonstração” (p. 133).

Além disso, é a apreensão discursiva das figuras

[...] que diferencia radicalmente as atividades de demonstração das atividades de construção. E esta apreensão discursiva é de outra natureza, diferente daquela que descreve o procedimento de construção que é exigido dos alunos em atividades de jogo de mensagem (DUVAL, 2012, p. 134).

Com o objetivo de evidenciar essas diferenças, Duval (2012), tratando da apreensão perceptiva, ressalta que ela “pode servir de registro de controle para julgar uma execução aceitável ou não da atividade. Seu estatuto não é, portanto, o mesmo de uma atividade de demonstração” (p. 134).

Este sentido, de situações geométricas diferentes, pode ser ilustrado quando se toma de uma mesma figura, considerando os objetivos iniciais distintos de cada situação, de construção *versus* de demonstração. É isso que assevera Duval (2012), ressaltando que a listagem de instruções dadas de modo que uma outra pessoa construa uma figura exige, de maneira geral, três itens geralmente comuns à redação de qualquer texto:

- não dar, na medida do possível, não mais do que uma instrução por frase;
- evitar toda ambiguidade no enunciado de cada instrução;
- definir um quadro de referência autônoma, que permita uma descrição de tudo que, em uma interação, é simplesmente mostrado (DUVAL, 2012, p. 134).

Dada a estrutura proposta para redação de um texto, o autor, salienta que a “apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável” (p. 135).

A esse respeito o autor se refere a um ponto de vista cognitivo que emerge e evidencia “uma diferença importante entre a redação de uma lista de instruções para a construção de uma figura e a redação de uma demonstração” (p. 135):

Pode-se assimilar a atividade de demonstração ao raciocínio, na medida em que para este termo designa-se a produção de argumentos, a inferência constantemente solicitada na compreensão de qualquer que seja o discurso, ou ainda, a interpretação que permite encontrar uma mudança de registro (DUVAL, 2012, p. 135).

Como podemos observar, a atividade evidencia o domínio sobre a apreensão discursiva do objeto matemático.

Duval propõe articulações entre as apreensões:

- **Figura geométrica** é a articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva – é necessário ver a figura a partir das hipóteses e não das formas

que se destacam ou das propriedades evidentes, ou seja, a apreensão perceptiva subordina a apreensão discursiva.

- **Visualização** é a articulação entre as apreensões perceptiva e operatória. A percepção não exige conhecimento matemático, mas pode comandar a apreensão operatória. (há uma ampliação).
- **Heurística e demonstração** é a articulação entre as apreensões operatória (subordinada à perceptiva) e discursiva.
- **Construção geométrica** é a articulação entre as apreensões discursiva e sequencial que requerem a perceptiva (desconstrução).

Das considerações tecidas até aqui, o objetivo de empregarmos um referencial relacionado ao ensino de geometria nos parece ter sido cumprido, pois, com base nos pressupostos trazidos por Duval (2012), a apreensão sequencial, apreensão perceptiva, apreensão operatória e apreensão discursiva nos permitem, sob uma perspectiva cognitiva, compreender a parte do processo de construção do conhecimento geométrico que interessa a esta pesquisa.

Não é demais lembrar que esta investigação procura elementos para a criação de atividades significativas ligadas à formação de professores. Deste modo, a seguir, são alinhadas algumas reflexões teóricas relacionadas a este tema.

3.2 Formação de professores

Em relação à formação de professores, Shulman (1987, p.5) recomenda uma discussão das origens e disposições da base de conhecimento proposta para o ensino. Isto significa trazer à tona uma discussão sobre a relevância dos saberes específicos nos quais o professor atua como parte importante da constituição de sua atuação. Desse modo, da perspectiva do autor, o ensino inicia com o professor entendendo o que deve ser aprendido e como deve ser ensinado.

Segundo Shulman (1987), esta base se refere a um repertório profissional ligado a um conjunto de compreensões, conhecimentos, habilidades e disposições que são necessários para ensinar. Estes elementos seriam, então, entre outros, para o profissional docente,

Conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico geral (gestão e organização sala de aula); conhecimento do currículo – “ferramentas do ofício” para os professores; conhecimento pedagógico do conteúdo (combinação de conteúdo e didática); conhecimento dos estudantes e de suas características; conhecimento de contextos educacionais; e conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica (SHULMAN, 1987, p. 8 – tradução nossa).

Entre as categorias mencionadas por Shulman (1987) em suas propostas, emerge o que convencionou chamar de *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), pois identifica os diversos eixos de conhecimentos necessários para ensinar e melhor discriminar a compreensão de um especialista em conteúdo daquela de um pedagogo. O autor assevera que cabe ao professor não apenas a responsabilidade em compreender os assuntos específicos que leciona, mas também uma abordagem holística, adequando as interpretações do mesmo conceito em uma compreensão flexível diante dos alunos, com relação ao que está sendo ensinado e eventualmente aprendido. Ou seja, em outros termos, este conhecimento pedagógico (ou didático, o que seria, talvez, mais apropriado) do conteúdo reflete a capacidade do professor, que detém o conhecimento específico do conteúdo a ser ensinado, de adaptá-lo e transformá-lo para que se faça compreensível aos alunos, dadas suas condições específicas. Nesse sentido, o autor critica as formações de professores que focam exclusivamente no conteúdo da disciplina na qual o professor trabalha ou, de outro modo, apenas nas abordagens didáticas, ressaltando a importância de não perder de vista esta interseção entre estes tipos fundamentais de saberes docentes.

Ainda de acordo com Shulman (1987), para alcançar os objetivos propostos em dada iniciativa educacional, criam-se materiais e estruturas para ensinar e aprender, incluindo currículos, avaliações, instituições, organizações e mecanismos gerais de gestão e finanças. Professores trabalham dentro de uma metrópole criada por esses elementos, consumindo-os e sendo também consumidos. A familiarização do professor neste núcleo é crucial, pois inclui tanto as ferramentas do ofício como as condições contextuais que vão facilitar ou inibir os esforços para ensinar. Diante disto, Shulman (1987) caracteriza o ensino como compreensão e raciocínio, como transformação e reflexão. Nesse sentido, Fenstermacher (1978, 1986) apud Shulman (1987, p. 13) analisa que:

O objetivo da formação do professor, diz ele, não é doutrinar ou treinar os professores a se comportarem de maneiras prescritas, mas sim educar os professores a refletirem profundamente sobre seu ensino, bem como a desempenhar habitualmente. [...] Fenstermacher argumenta que o bom ensino não só é efetivo em termos comportamentais, mas deve repousar sobre uma base de premissas adequadamente fundamentadas (SHULMAN, p. 13, tradução nossa).

Para Shulman (1987), a noção de raciocínio pedagógico envolve um conjunto de ideias, a partir de algum tipo de “texto⁵” que abarca um ciclo de atividades que envolvam compreensão, transformação, instrução, avaliação e reflexão.

O autor considera que o ponto de partida e de chegada do processo é um ato de compreensão, no qual ensinar é primeiro entender. Espera-se que o professor compreenda o que ensina de múltiplas maneiras, relacionando com outras ideias dentro do mesmo assunto, bem como em outros assuntos.

Esperamos que um matemático compreenda matemática ou um especialista em história compreenda história. Mas a chave para distinguir a base de conhecimento do ensino está entre conteúdo e pedagogia, na capacidade do professor de transformar o conhecimento de conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente poderosas e, ainda adaptáveis às variações de habilidade e base apresentadas pelos alunos (SHULMAN, p. 15 – tradução nossa).

Outro aspecto do raciocínio pedagógico envolvido é a transformação e seus componentes, na qual as ideias compreendidas precisam ser transformadas de alguma maneira para serem ensinadas e o professor deve refletir sobre o caminho entre o conteúdo e a compreensão nas mentes dos alunos, o que implica alguma combinação dos seguintes processos (SHULMAN, 1987, p. 16):

(1) preparação (dos materiais do texto) incluindo o processo de interpretação crítica. (2) representação das ideias na forma de novas analogias, metáforas e assim por diante. (3) seleções instrucionais entre uma série de características gerais dos métodos e modelos de ensino, e (4) adaptação dessas representações às características gerais das crianças a serem ensinadas, bem como (5) adequando as adaptações aos jovens específicos em sala de aula (SHULMAN, 1987, p.16, tradução nossa).

⁵ Texto: um livro didático, um plano de estudos ou outro material que o professor ou aluno deseja compreender.

Estas formas de transformação levam da compreensão pessoal para a preparação de outras compreensões, do ensinar como pensamento ao criar um plano de aula, ou seja, examinar e interpretar criticamente os materiais de instrução, em termos de compreensão do conteúdo pelo próprio professor para averiguar se os mesmos são adequados para serem ensinados. Nesse sentido, Shulman (1987) considera o raciocínio pedagógico tão parte do ensino quanto o próprio ato de ensinar, e este raciocínio pedagógico não para quando a instrução começa, de modo que, as “atividades de compreensão, transformação, avaliação e reflexão continuam a ocorrer durante o ensino ativo”.

Ao se referir a instrução, Shulman (1987) considera que:

Essa atividade envolve o desempenho observável de vários atos de ensino. Inclui muitos dos aspectos mais cruciais da pedagogia: organizar e gerenciar a sala de aula; apresentar explicações claras e descrições claras; atribuir e verificar trabalhos; e interagir eficazmente com os alunos por meio de perguntas, respostas e reações, além de elogio e crítica. Inclui, portanto, gestão, explicação, discussão e todas as características observáveis da instrução direta e heurística eficaz, já bem documentadas na literatura da pesquisa sobre ensino eficaz (SHULMAN, 1987, p. 17).

Na sequência, Shulman (1987) pondera sobre o processo de avaliação, que “inclui a verificação imediata da compreensão dos mal-entendidos que um professor deve usar para ensinar interativamente”. Nesse processo, entender o que um aluno entende demanda um domínio profundo tanto do material a ser ensinado quanto dos processos de aprendizado; assim, a avaliação leva diretamente à reflexão. Ou seja, em referência à reflexão proporcionada por este processo,

Isso é o que faz um professor quando olha para o ensino e o aprendizado que acabaram de ocorrer e reconstrói, reencena e/ou recaptura os eventos, as emoções e as realizações. É por meio desse conjunto de processos que um profissional aprende com a experiência (SHULMAN, 1987, p. 19).

Segundo o autor, mesmo depois da avaliação e reflexão, a nova compreensão não ocorre automaticamente, pois um professor precisa demonstrar a aptidão de adotar esses processos quando solicitado. Assim, a formação de professores deve favorecer estes mesmos processos com os modelos de compreensão e as habilidades de ensino apropriadas (SHULMAN, 1987, p. 19).

As habilidades/competências relativas ao processo de ensino, considerando o conteúdo a ensinar – matemático, no caso – e as questões didáticas envolvidas representam parte importante da elaboração do processo de ressignificação sobre o tema desta pesquisa. Em continuidade, as tecnologias complementam este raciocínio, à medida que representam importante elemento de intervenção na formação dos professores e da compreensão acerca de vários aspectos de seu trabalho. Adiante tratamos de tecnologias no âmbito da Educação Matemática e da formação de professores.

3.3 Tecnologias e Educação matemática

Como forma de imprimir um ritmo de continuidade à narrativa que construímos aqui, começamos esta seção falando de um trabalho constituído a partir das reflexões de Shulman, ou seja, o *framework Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)*, já referido anteriormente.

A partir dos estudos de Shulman (1987) em relação ao *Pedagogical Content Knowledge (PCK)*, Mishra e Koehler (2006) definem que

O PCK existe na interseção de conteúdo e pedagogia. Assim, vai além de uma simples consideração de conteúdo e pedagogia isoladamente um do outro. O PCK representa a mistura de conteúdo e pedagogia em uma compreensão de como determinados aspectos da matéria são organizados, adaptados e representados para instrução (MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1021, tradução nossa).

Nesse sentido, Mishra e Koehler (2006) apontam que, para caracterizar as formas complexas pela qual os professores pensam sobre o conteúdo específico que deve ser ensinado, na perspectiva de Shulman, deve-se considerar:

O “conhecimento de conteúdo pedagógico” como o conhecimento de conteúdo que lida com o processo de ensino, incluindo “as formas de representar e formular o assunto que o torna compreensível para os outros ” (p. 9). Para que os professores sejam bem-sucedidos, eles teriam que enfrentar ambas as questões (conteúdo e pedagogia) simultaneamente, incorporando “os aspectos de conteúdo mais pertinentes à sua capacidade de ensino” (p. 9). No coração do PCK está a forma pela qual o assunto é transformado para o ensino. Isso ocorre quando o professor interpreta o assunto e encontra maneiras diferentes de representá-

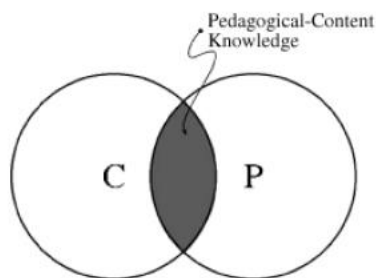
lo e torná-lo acessível aos alunos (SHULMAN, 1986, *apud*, (MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1021, tradução nossa).

Mishra e Koehler (2006) citando Shulman (1986), ressaltam que:

O conhecimento de conteúdo pedagógico é de especial interesse porque identifica os corpos distintivos de conhecimento para o ensino. Representa a mistura de conteúdo e pedagogia em uma compreensão de como tópicos, problemas ou questões particulares são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos e apresentados para instrução. (SHULMAN, 1986, p.8 *apud* MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1021-1022).

No intuito de tornar o conteúdo acessível e compreensível, os autores enfatizam, que a intersecção contém “as formas de representar e formular o assunto que o torna compreensível para os outros” (SHULMAN, 1986, *apud* MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1023, tradução nossa).

Figura 29: Os dois círculos de conhecimento pedagógico e conhecimento de conteúdo agora são reunidos pelo conhecimento de conteúdo pedagógico



Fonte: MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1022

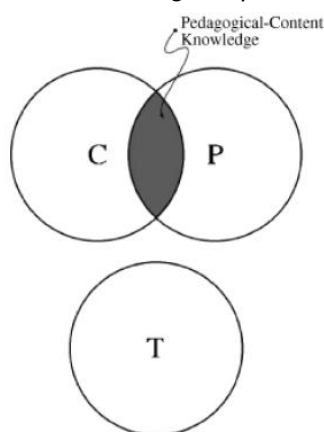
Diante da representação da (PCK), oriunda de Shulman (1986), Mishra e Koehler (2006) avançam com o modelo teórico relacionado ao uso de tecnologias por professores em sua atuação profissional. Os autores chamam este novo *framework* de *Technological Pedagogical Content Knowledge*, disseminado mais comumente pelo acrônimo TPACK.

Na perspectiva da utilização da tecnologia digital, Mishra e Koehler (2006) destacam o surgimento de mudanças sobre as rotinas e práticas na maioria das áreas de trabalho. Os autores destacam uma tendência em olhar apenas para a tecnologia e não como ela é utilizada. Apenas introduzir a tecnologia no processo educacional não é suficiente, pois os professores precisam compreender e

incorporar adequadamente a tecnologia nas atividades de ensino que desempenham (MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1018).

As discussões que tratam do papel do conhecimento tecnológico retomam os mesmos problemas que Shulman identificou na década de 1980, no qual o conhecimento do conteúdo e o conhecimento da pedagogia eram considerados separados e independentes. No contexto em que propõem suas articulações teóricas, os autores argumentam que o conhecimento tecnológico volta e meia é considerado como sendo separado do conhecimento pedagógico e do conteúdo (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1024), como representado na figura a seguir.

Figura 30: tecnologia separada da PCK

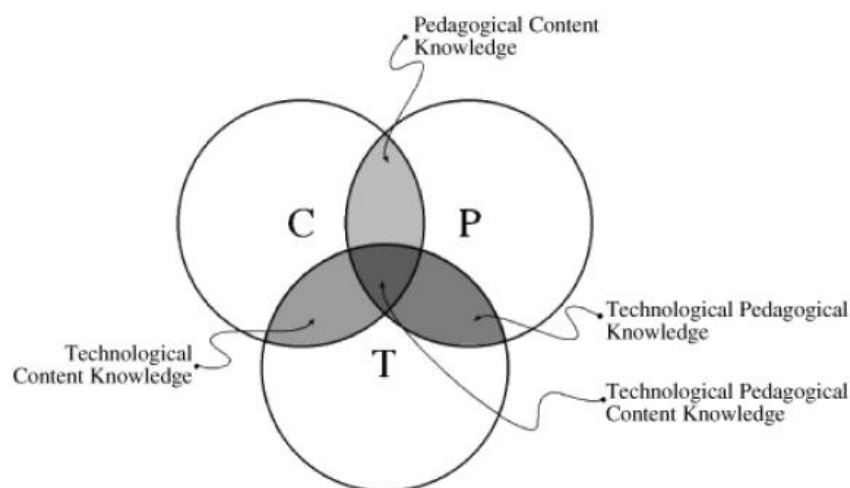


Fonte: MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1024

De acordo com a figura 29, Mishra e Koehler (2006), ponderam que, em alguns contextos, há uma visão segundo a qual a tecnologia deve ser tratada como um elemento a parte do processo que envolve conteúdo e didática, à medida que seu papel não é compreendido.

Diante das considerações supracitadas e a partir dos conhecimentos definidos por Shulman (1986), relativo ao (PCK), Mishra e Koehler (2006) argumentam que o conhecimento acerca do uso de tecnologias por professores nos processos educacionais também deve ser considerado como elemento articula aos conjuntos anteriores, o que daria origem ao *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK).

Figura 31: Pedagogical Technological Content Knowledge (TPACK)



Fonte: MISHRA e KOEHLER, 2006, p. 1025

Conforme a figura 30 apresenta, Mishra e Koehler (2006) consideram que o conhecimento integrado destas dimensões é essencial para o desenvolvimento de boas práticas de ensino e apresentam elementos e relações importantes para estruturar o TPACK.

Em relação ao *Content Knowledge (CK)*, Mishra e Koehler (2006) referem-se aos temas específicos da disciplina, conceitos, teorias e procedimentos da área. Na perspectiva do conhecimento matemático e sua articulação na disciplina a ser trabalhada, entendemos que o professor necessite compreender e ser capaz de estruturar os conteúdos matemáticos nos diversos níveis de conhecimento do aluno.

O *Pedagogical Knowledge (PK)*, para os autores, envolve o conhecimento sobre os processos e práticas ou métodos de ensino e aprendizagem, que inclui, entre outros, objetivos educacionais, valores e objetivos gerais. É uma forma geral de conhecimento que deve ser incluída em todas as etapas de aprendizagem do estudante, da gestão de sala, do planejamento de aulas e da avaliação. Envolve compreensões sobre as formas pelas quais o conhecimento pode ser construído, como se podem desenvolver habilidades específicas e bons hábitos de estudo (teorias de aprendizagem, técnicas e estratégias de ensino); ou seja, “um professor com profundo conhecimento pedagógico entende como os alunos constroem conhecimento, adquirem habilidades e desenvolvem hábitos mentais e disposições positivas para aprender” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p.1026-1027).

No que diz respeito ao *Pedagogical Content Knowledge (PCK)*, Oliveira (2018) aponta que, para o autor americano, “é de extrema importância que a formação de professores considere a integração entre o conhecimento específico da área da qual provêm os conteúdos a serem ensinados – o conhecimento formal dos elementos da disciplina, se se quiser – e os saberes relativos à didática” (p. 56). Oliveira destaca, ainda, a esse respeito, que o PCK seria “um corpo de conhecimentos que leva em conta a complexidade de seus componentes, conteúdo e didática, e representa um saber ligado às estratégias didáticas adequadas para o trabalho dos conteúdos no âmbito de um processo educacional” (OLIVEIRA, 2018, p. 56).

O conhecimento tecnológico (TK) pode ser entendido em relação a quaisquer tecnologias, tanto as mais tradicionais, como livros e giz/lousa, quanto as digitais, inclusive no que se refere às habilidades necessárias para operar tecnologias específicas (sistemas operacionais, hardware, processadores de texto, planilhas, navegadores, e-mail e elementos correlatos). Segundo os autores, ainda, “o TK inclui o conhecimento de como instalar e remover dispositivos periféricos, instalar e remover programas de *software* e criar e arquivar documentos. A maioria das oficinas e tutoriais de tecnologia padrão tendem a se concentrar na aquisição de tais habilidades” (p. 1027). Por tratar-se de um meio bastante dinâmico, ou seja, em constante mudança, tecnologias específicas podem se tornar obsoletas ou até desaparecer; entretanto, a habilidade para trabalhar com novas tecnologias sempre será importante.

O *Technological Content Knowledge (TCK)* indica a maneira pela qual a tecnologia e determinado conteúdo do saber estão reciprocamente relacionados. Deve-se considerar que determinadas tecnologias criam possibilidades e restrições quando adotadas, mas, para os autores, tecnologias inovadoras permitem a criação e o uso de uma grande variedade de representações, bem como o trânsito entre as mesmas; além disso, asseveram que “os professores precisam conhecer não apenas o assunto que ensinam, mas também, a maneira pela qual o assunto pode ser mudado pela aplicação da tecnologia” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1028).

Ainda de acordo com os autores, o *Technological Pedagogical Knowledge (TPK)* exprime o conhecimento da existência, dos componentes e das capacidades

de várias tecnologias e de como são usadas em ambientes de ensino, na mesma medida em que se percebe a forma pela qual determinadas tecnologias podem alterar o processo de ensino. Neste item, podem ser incluídos os saberes sobre a variedade de ferramentas disponíveis para determinada tarefa, o que, de certa forma, é chamado por Oliveira (2018), de “potencial interativo da interface” (p. 45), bem como habilidades para criar, selecionar e aplicar estratégias didáticas adequadas com uso de determinadas tecnologias.

O *Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)* procura, em termos teóricos, contemplar a inserção de um terceiro componente nas iniciativas de formação de professores: a tecnologia. Com base no discurso de Shulman (1986; 1987), descrito aqui, os autores consideram que a tecnologia, assim como a didática e o conteúdo disciplinar específico, traz complexidades para o processo formativo docente e para sua prática, o que implica no tratamento conjunto destas diferentes, mas integradas dimensões do conhecimento. Desta forma, não seria adequado prover treinamentos focados em *softwares* específicos apenas, ou seja, lidar com o componente tecnológico de forma disjunta dos demais elementos do PCK. Isto porque os programas podem ser substituídos por outros mais eficientes, por exemplo, e colocar o foco na operação de um dispositivo computacional, por si mesmo, não contempla uma visão de conjunto, que permitiria pensar na tecnologia como elemento na construção de estratégias didáticas adequadas para o ensino de conteúdo específico. Em outras palavras,

Isto é o mesmo que dizer que escolher tecnologias que componham uma proposta educacional é um processo que implica na construção de conhecimentos específicos e complexos, uma vez que semelhante escolha cria possibilidades e limitações, alcances e barreiras. Segundo Mishra e Koehler (2006), contudo, ainda que determinadas aplicações restrinjam os tipos de representações possíveis, as tecnologias digitais podem oferecer representações inovadoras e variadas, além de maior flexibilidade na navegação através das mesmas. Neste sentido, é importante que o professor vislumbre a variedade disponível de ferramentas que podem ser usadas em determinados contextos didáticos, de modo que possa escolher e combinar tais recursos com a estratégia mais adequada, tendo por base e referência o saber formal relativo ao conteúdo em foco (OLIVEIRA, 2018, p. 58).

Outra ideia importante, ligada à inserção de tecnologias nos processos de ensino, vem da reivindicação segundo a qual as tecnologias reorganizam o

pensamento, como assevera Tikhomirov (1981), o que permite trabalhar com as representações de forma dinâmica, efetuar experimentações potencialmente ilimitadas e empregar a visualização como um dos elementos de validação empírica das intervenções em modelos computacionais. Quanto a isso, Oliveira (2018) emprega estes conceitos para propor um modelo de integração da tecnologia em processos educacionais, com base em ideias relacionadas à fluência, ao potencial interativo das interfaces, à convergência entre diferentes mídias e ao uso das mídias em dois diferentes planos, o referencial e o aplicado.

Segundo o autor, as tecnologias não se limitam aos dispositivos digitais mais modernos. Em sua proposta teórica, Oliveira (2018) recupera as proposições em torno das tecnologias da inteligência, constituídas por três paradigmas fundamentais: a oralidade, a escrita e a informática, como indicado por Lévy (1993).

Referente ao paradigma da oralidade, Lévy (2010) o compreende em dois momentos: oralidade primária e oralidade secundária. Para o autor francês, “oralidade primária remete ao papel da palavra antes que uma sociedade tenha adotado a escrita” enquanto “a oralidade secundária está relacionada a um estatuto da palavra que é complementar ao da escrita, tal como conhecemos hoje” (LÉVY, 2010, p. 77).

Em uma perspectiva histórica, Oliveira (2018, p. 23) destaca que a escrita “possibilitou a descontextualização do discurso, não necessariamente quanto ao sentido, mas quanto aos aspectos pessoais inerentes à comunicação nas sociedades orais primárias”. Da necessidade de compreensão de significado do texto, Oliveira (2018) aponta o surgimento de outros textos, de caráter interpretativo, [...] “oportunizando o surgimento de debates, exegeses e de ramificações quase incontáveis dos textos originais” (p. 23). Nesse sentido, Oliveira (2018) destaca que, “a escrita não extinguiu as formas de comunicação oral empregadas pela humanidade, exercendo em relação as elas outro efeito, o da redefinição” (OLIVEIRA, 2018, p. 26). Oliveira (2018) destaca a compreensão de Eco (1996), o que permitiria concluir que a “proposta de redefinição se trata, portanto, de um discurso conectado ao domínio das tecnologias intelectuais, mais do que os artefatos típicos de um estágio maquínico da sociedade” (p. 26).

Aqui, entende-se que a compreensão de redefinição trazida por Eco (1996) dá suporte à afirmação de Oliveira (2018): “a informática deu à oralidade e à escrita outras formas de manifestação e outras dimensões” (p. 26).

Referindo-se a informática, Lévy (2010) considera que seu aspecto mais determinante para evolução cultural e as atividades cognitivas é sempre o mais recente: “a principal tendência nesse domínio é a digitalização que atinge todas as técnicas de comunicação e de processamento de informação” (p. 103). Ou seja,

Ao progredir, a digitalização conecta no centro de um mesmo tecido eletrônico o cinema, a rádio televisão, o jornalismo, a edição, a música, as telecomunicações e a informática. As diferentes categorias profissionais envolvidas enfrentavam os problemas de apresentação e contextualização de acordo com tradições próprias, com a especificidade de seus suportes materiais (LÉVY, 2010, p. 103).

Nesta direção, referindo-se à tecnologia:

Dispositivos que viabilizem a integração com estas formas de interação e acesso às redes (e à internet, em particular) e que possibilitem velocidade, dinamismo, movimento, imersão, alcance, multiplicidade e continuidade tendem a ganhar espaço e relevância. [...] para serem usadas conjuntamente, em processos mais ou menos integrados, nos quais são importantes as demandas impostas pelas atividades, as aprendizagens desenvolvidas pelas pessoas em relação aos conhecimentos envolvidos e a fluência acrisolada em relação a cada uma das formas de uso dos dispositivos (OLIVEIRA, 2018, p. 27-28).

Como elemento relevante no uso de tecnologia, principalmente em contextos educacionais, Oliveira se refere “à *fluência*, algo que ocorre na articulação entre saberes particulares, como o de natureza matemática, estratégias de ensino ou de aprendizagem e o uso de tecnologias que lhe podem ser associadas” (OLIVEIRA, 2018, p.30).

Tendo em vista a *fluência no uso das tecnologias em processos educacionais*, em conexão com o conceito construcionista de *fluência digital*, Oliveira (2018), indica que

A proposição do desenvolvimento de fluência digital consiste em um avanço em relação a ideia de que é necessário saber como empregar determinada ferramenta computacional – para os autores, então, mais do que simplesmente usar, é preciso desenvolver a possibilidade de implementar construções

significativas a partir da utilização de dispositivos da interface digitais (OLIVEIRA, 2018, p. 66-67).

No âmbito dos processos educacionais,

A fluência pressupõe dois tipos de construção de conhecimento, os quais em sua configuração ideal, ocorrem simultaneamente – ou em momentos muito próximos/conectados: *a exploração dos elementos da interface e a apropriação da lógica de uso dos recursos disponíveis*. São processos ligados aos cenários didáticos e sistemas de ensino, como aqueles presentes nas salas de aula e ambientes virtuais, por exemplo, ou podem ocorrer a partir de uma proposta de autoaprendizagem. (OLIVEIRA, 2018, p. 67).

Nesse sentido, o autor assevera que esses dois tipos de construção de conhecimento são movimentos intrínsecos

à compreensão da forma pela qual a tecnologia em si se articula com objetos matemáticos em jogo com os objetos/temas matemáticos em jogo e, no caso de um processo de ensino, de que maneira essas conexões se dão em relação às estratégias/propostas didáticas (OLIVEIRA, 2018, p. 67).

Imbricado a esse sentido, o autor ressalta que a exploração da interface permite o desenvolvimento de habilidades tais que permitam manipular ferramentas disponibilizadas pelo contexto tecnológico (OLIVEIRA, 2018, p. 67).

Por sua vez, Oliveira e Marcelino (2015, p. 819), no que se refere ao uso de tecnologias em aulas de matemática, ressaltam a relevância de que o docente adquira o domínio consistente sobre ferramentas, artefatos, dispositivos e interfaces, asseverando, ainda, a possibilidade de que as tecnologias venham a agregar suas estratégias didáticas.

Na proposta de Oliveira (2018), consta que o processo de reorganização do pensamento que encaminha o emprego de tecnologias digitais por professores em suas aulas passa pela compreensão acerca do potencial interativo das interfaces que se espera empregar nas estratégias didáticas planejadas, bem como pela integração deste saber às questões relativas à complexidade dos conhecimentos matemáticos envolvidos. Esta trajetória, constituída a partir da metáfora do ciclo, indica um processo crítico de apropriação, desvinculado de trajetórias lineares ou preestabelecidas, marcado por distintos momentos, como se vê na figura 32:

Figura 32: *Ciclo da fluência no uso de tecnologias em processos educacionais*



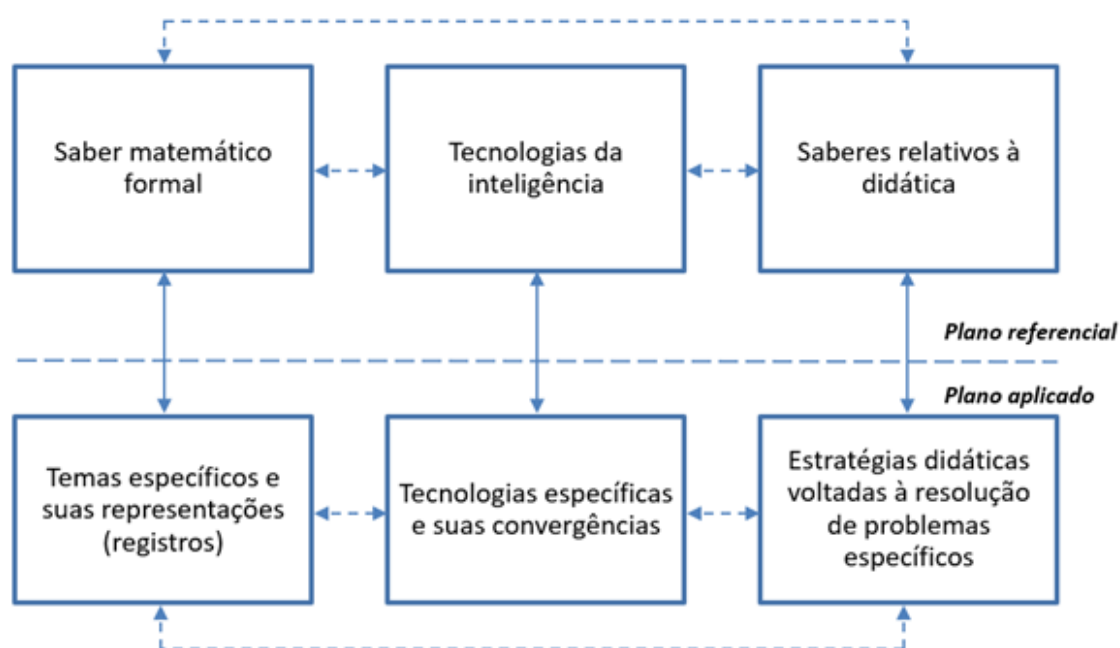
Fonte: OLIVEIRA (2018, p.71)

Em relação à proposta de apropriação e construção de conhecimento por pessoas que usam tecnologias em processos de ensino e/ou de aprendizagem, assevera o autor:

A metáfora escolhida para simbolizar esta relação é o ciclo. O sentido desta representação não é a linearidade, mas a continuidade: outras tecnologias podem requerer novos processos de desenvolvimento de fluência, em níveis cada vez mais refinados, e contar com a experiência das passagens anteriores das pessoas-com-tecnologias pelo ciclo; da mesma forma, enquanto outras tecnologias não entram em cena, os movimentos podem ocorrer entre as reconfigurações do pensamento e as possibilidades de elaborar estratégias ou explorar trajetórias. Os itens do ciclo não são fases, mas momentos intercomunicantes, transitórios e em movimento: podem se sobrepor eventualmente e ter algumas de suas ordens de ocorrência trocadas. O ciclo se refere às projeções que ocorrem a partir de um processo de constituição ou refinamento da fluência no uso de dispositivos tecnológicos em processos educacionais e as tecnologias envolvidas são todas aquelas de ordem aplicada que têm como referência constitutiva as tecnologias da inteligência, digitais ou não digitais (OLIVEIRA, 2018, p. 70).

Os artefatos, como se percebe pelos discursos aqui adotados, são componentes de um quadro complexo, em que coletivos de pessoas-com-tecnologias passam a trabalhar tendo o conhecimento matemático formal como referência. Deste ponto de vista, aliás, é preciso reconhecer que mesmo as tecnologias mais atualizadas possuem seu campo referencial posto nas tecnologias da inteligência, mencionadas por Lévy (1993), e que, na atuação de professores, por exemplo, os saberes relativos à didática devem ser vistos como importantes componentes do processo de formação. Mais uma vez, recorremos à Oliveira (2018), que resume em dois planos a construção/ressignificação de conhecimentos desta natureza, o referencial e o aplicado, como se vê na figura 33.

Figura 33: Articulações relativas à fluência no uso de tecnologias nos processos educacionais (plano referencial e plano aplicado)



Fonte: OLIVEIRA (2018, p.76)

Considerando as informações da figura 16, e tendo em vista o objetivo deste trabalho em que se propõe uma sequência de atividades para professores de matemática da Educação Básica, tem-se, como aporte para definição da lógica das atividades a Teoria das Situação Didáticas (TSD) como base, tema sobre o qual se discorre a seguir.

3.4 Teoria das Situações Didáticas

No âmbito dos aportes teóricos desta investigação, é necessário ponderar acerca da Teoria das Situações Didáticas (TSD), um marco importante na pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, como ressalta Freitas (2016), em seus relatos a respeito da teoria de Guy Brousseau, iniciada na França, na década de 1970. Especificamente nesta pesquisa, que tem como sujeitos professores da escola básica, serão empregados alguns aportes desta teoria, principalmente na estruturação das atividades e na descrição do movimento cognitivo que seria eventualmente exercido por professores que viessem a participar de processos formativos que empregassem problemas semelhantes. Além disto, é importante construir uma discussão, do ponto de vista matemático, do tema desta pesquisa.

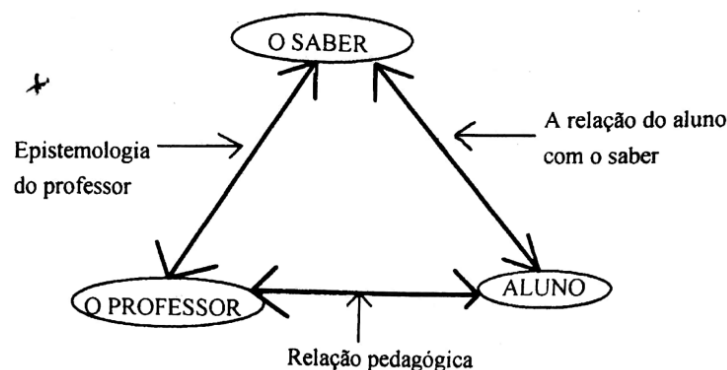
Segundo Freitas (2016), a partir dos estudos com relação ao construtivismo em pedagogia, originados na teoria epistemológica genética piagetiana, Brousseau “desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um milieu que produz contradições e desequilíbrios” (FREITAS, 2016, p. 78).

No intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, Almouloud (2007, p.31) define a TSD como:

Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1975, p.6, *apud* ALMOULLOUD, 2007, p.31).

Segundo Almouloud (2007), o objeto principal de estudo não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, envolvendo professor, aluno e o saber. Tal organização pode ser esquematizada como um *triângulo didático*, com as respectivas interações.

Figura 34: Triângulo Didático



Fonte: ALMOULOU (2007, p.32) – adaptado

A ideia subjacente a este triângulo, conforme Almouloud (2007), dispõe o sentido de expressar que qualquer um dos elementos está diretamente concatenado aos demais. Além disto,

Trata-se de um referencial para a educação matemática que, por um lado, valoriza os conhecimentos mobilizados pelos alunos e seu envolvimento na construção do saber matemático e, por outro, valoriza o trabalho do professor, que consiste, fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos (FREITAS, 2016, p. 78).

Brousseau (1997, p.30) afirma que o aluno aprende adaptando-se a um *milieu*⁶ eivado de dificuldades e contradições, de modo a proporcionar desequilíbrios, no sentido construtivista da palavra. O autor enfatiza que esse conhecimento, resultado da adaptação do aluno, desabrocha a partir de novas respostas que fornecem evidências de aprendizagem.

A partir desse ponto de vista, Almouloud (2007) considera a noção de *milieu* vital para sustentação dessa teoria. O autor reforça que “o professor deve criar e organizar um *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens” (p.32), bem como engajar fortemente os estudantes em relação aos saberes em jogo, compreendidos no processo de ensino:

⁶ Adotaremos o termo *milieu* em francês no lugar de sua tradução em português “meio”, o que se justifica, segundo Almouloud (2007), “por entendermos que esta não dá conta da ideia que está em jogo” (p.31).

O *milieu* é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age. É no *milieu* que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos (FREITAS, 2016, p. 79).

Como asseveram Almouloud (2007) e Freitas (2016), a organização do *milieu* permite ao aluno entender quais são as regras do jogo para direcionarem suas ações e as expectativas que o professor tem quanto à participação dos alunos. Entende-se, então, conforme os autores, que a maneira utilizada para a abordagem do conteúdo dada pelo professor é determinante na construção pela qual o aluno constituirá o saber matemático.

Para Freitas (2016), o envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem por meio de uma *situação didática*.

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente, instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em partes, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (BROUSSEAU, 1986 *apud* FREITAS, 2016, p. 80).

Desse modo, Freitas (2016) reforça que existirá uma situação didática cada vez que for evidenciada uma intenção, do professor, de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo. Esta intencionalidade não precisa ser conhecida pelo estudante, que, por meio da estratégia de devolução, deverá se encarregar das propostas de resolução de problemas específicos propostos no âmbito da situação. Este desconhecimento da intenção docente é caracterizado como uma situação *adidática*, a qual, segundo Almouloud (2007), pode ser definida como:

Uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para apropriação do novo saber que deseja ensinar (ALMOULOU, 2007, p. 33).

Em conformidade com Freitas (2016), a noção de *situação adidática*, introduzida por Brousseau,

caracteriza-se essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo (FREITAS, 2016, p. 84).

Desse modo, no momento em que o professor tem controle sobre o andamento da situação sem a revelar e os alunos se apropriam dela sem ajuda do professor, tal como pesquisadores em busca da solução, para Almouloud (2007) e Freitas (2016), fica caracterizada a situação adidática.

Almouloud (2007) apresenta as características preponderantes das situações didáticas.

O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;

O problema é escolhido para o que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo as *razões didáticas*⁷;

O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s) (ALMOULOU, 2007, p. 33).

Apoiado na escolha de um bom problema, conciliável com o nível de conhecimento do aluno, essas características permitem que o mesmo construa seu próprio conhecimento.

Conforme mencionam Almouloud (2007) e Freitas (2016), para analisar o processo de aprendizagem, Brousseau estendeu uma tipologia de situações didáticas, analisando as principais atividades específicas da aprendizagem matemática para descrever as relações do aluno com o saber. Almouloud (2007) pondera que esse processo se decompõe em quatro fases diferentes, “nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com saber” (p.36).

⁷ O aluno aprende por uma necessidade própria e não por uma necessidade aparente do professor ou da escola (ALMOULOU, 2007).

No âmbito da teoria descrita, a apresentação de um novo conteúdo pelo professor é pautada em situações de ação, formulação, validação e institucionalização. Apresentam-se a seguir, considerações a respeito dessas situações que constituem o processo de análise da aprendizagem, em conformidade com a Teoria das Situações Didáticas.

3.4.1 Dialética de ação

A dialética adidática de ação, segundo Almouloud (2007), consiste em “[colocar] um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno possa agir sobre esta dialética e que ela lhe retorne informações sobre sua ação” (ALMOULOU, 2007, p. 37)

Quando o aluno se encontra dedicado a encontrar a solução de um problema, Freitas (2016) assinala que o mesmo realiza determinadas ações mais imediatas, e que essas “podem estar fundamentadas em modelos teóricos que o aluno pode tentar ou não explicitar” (p. 95), ou seja, há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento.

Nesse sentido, uma boa situação de ação

não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu* (ALMOULOU, 2007, p.37).

Desta forma, em consonância com os autores, o aluno empreende suas escolhas e decisões por uma ação de natureza mais experimental, sem, contudo, atentar-se com a interpretação de um resultado teórico que resolva ou justifique a validade de sua resposta.

3.4.2 Dialética de formulação

Em uma situação de formulação, o aluno troca informações teóricas de uma forma mais elaborada. Para Almouloud (2007), este é o momento em que o aluno explicita, por escrito ou oralmente, a solução encontrada e quais ferramentas foram utilizadas para tal.

O objetivo da dialética de formulação é a troca de informações, que segundo Brousseau,

Consistirá em estabelecer progressivamente uma linguagem compreensível por todos e que leva em conta os objetos e as relações relevantes da situação de forma adequada, isto é, permitindo raciocínios úteis e ações. A construção de tal [...] possibilita a explicação das ações e modelos de ação (BROUSSEAU, 1997, p. 12, tradução nossa).

Desta forma, as situações adidáticas de formulação, conforme Freitas (2016) esclarece, são caracterizadas pelo fato de o aluno instituir determinadas afirmações e não indicar explicitamente as justificações de validez, embora contenham implicitamente intenções de validação.

3.4.3 Dialética de validação

As dialéticas de validação, mencionadas por Freitas (2016), assim como em Almouloud (2007), são aquelas em que o aluno já utiliza instrumentos de prova e em que o saber é utilizado com essa finalidade.

Nessa etapa, Almouloud (2007) enfatiza que é preciso elaborar algum tipo de prova do modelo criado por ele, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor.

De um lado, o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição (ALMOULOUD, 2007, p. 39).

À vista disso, a dialética de validação, segundo Almouloud (2007), indica que o objetivo é a validação das proposições que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, e, ainda, Freitas (2016) ressalta que a atividade de validação é intrínseca em relação à de formulação.

3.4.4 Dialética de institucionalização

As dialéticas de institucionalização “visam estabelecer o caráter de objetividade e de universalidade do conhecimento” (FREITAS, 2016, p.101).

As situações da institucionalização são, então, definidas, segundo Almouloud (2007, 40), “como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Para esse autor,

Uma vez construído e validade, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe, embora não tenha ainda o estatuto de saber social:

- se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos;
- quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações;
- é negociada numa dialética (ALMOULOU, 2007, p. 40).

De acordo com esse autor, depois da realização da institucionalização pelo professor, o saber se torna oficial e os alunos o integram em seus esquemas mentais, transmutando-o para utilização e resolução de problemas matemáticos.

Nessa fase, Freitas (2016) ratifica que concerne ao professor organizar essa composição do conhecimento, procurando relacioná-lo a um estatuto de saber que não dependa mais de aspectos subjetivos e particulares.

Em concordância com Freitas (2016), também Almouloud (2007) salienta que o professor seleciona questões essenciais para apropriação de um saber formal, sobre o qual professores e alunos debatem, considerando a pertinência do mesmo no rol dos saberes matemáticos historicamente construídos inerentemente ao problema indagado, em uma linguagem matemática mais culta.

A partir das reflexões a respeito das dialéticas que constituem uma situação didática, e dos demais elementos teóricos contidos nesta seção, consideramos ser possível usar tais asserções nas análises que procedemos mais adiante.

No capítulo seguinte, apresentamos como este trabalho se caracteriza, por meio de considerações de caráter metodológico.

4. PROPOSTA DE ATIVIDADES: APORTES METODOLÓGICOS E PROCEDIMENTAIS

Neste capítulo, apresentam-se os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, tendo por base a ideia de prover justificativas didáticas e matemáticas para cada uma das atividades, bem como a forma pela qual o aporte tecnológico foi pensado. Aqui, leva-se em consideração a conexão necessária entre a questão norteadora da pesquisa, a problematização e os procedimentos metodológicos, conforme aponta Oliveira (2019). É nessa perspectiva que se adotam, aqui, os procedimentos metodológicos.

Esta investigação tem um caráter qualitativo, considerando, como apontam Oliveira (2019) e Bogdan e Blikien (1994) o caráter processual deste tipo de pesquisa, a relevância do trabalho do pesquisador e limitações no que diz respeito à generalização dos resultados. Trata-se de uma reflexão teórica, relacionada com os aportes desta natureza alinhados nos capítulos anteriores. Como já mencionado anteriormente, a pretensão foi a de propor atividades para a formação de professores em relação à noção de semelhança de triângulos. Para que isto se tornasse possível, admitimos que a elaboração e análise das atividades, tendo em conta os aportes teóricos, poderia seguir pressupostos metodológicos presentes na engenharia didática. Evidentemente, como as atividades não foram aplicadas, por se tratar de proposta de formação que pode ser implementada por outras iniciativas, deve-se ponderar que apenas alguns elementos desta metodologia, de caráter experimental, serão empregados, como se descreve a seguir.

4.1 Pressupostos da Engenharia Didática

De forma geral, a engenharia didática pode ser definida “[...] por um esquema experimental com base em ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação de sequências de ensino” (ARTIGUE, 1995, p. 36, tradução nossa).

De acordo com Michele Artigue (1995), um importante diferencial no esquema proposto pela Engenharia Didática consiste em seus critérios de validação, de caráter interno, pois as previsões feitas pelo pesquisador são, em

outro momento do estudo, comparadas com as realizações em si, ou seja, com os resultados advindos da aplicação de sequências didáticas engendradas com a finalidade de comprovar (ou não) as hipóteses levantadas inicialmente.

Trata-se, por outro ângulo, de uma metodologia extremamente estruturada, composta por quatro fases bastante identificáveis, quais sejam as análises preliminares, a concepção e análises *a priori*, a experimentação e as análises *a posteriori* e validação. Cabe ressaltar que recorreremos aos pressupostos da Engenharia Didática, especialmente às análises preliminares e às análises *a priori*, que precedem duas fases uma possível aplicação, experimento e análises *a posteriori*, essas duas últimas o que não se faz nesse estudo, o qual apenas apontamos conjecturas a essas fases numa aplicação.

A primeira fase, nomeada “análises preliminares”, é momento no qual se analisam estudos relacionados, envolvendo aspectos históricos, bem como os processos de ensino e seus efeitos, a presença de possíveis obstáculos que podem se manifestar a partir da abordagem proposta e as possíveis restrições que poderão surgir durante a realização das atividades (ARTIGUE,1995). Assim, de acordo com essa autora, tais análises podem ser realizadas, tomando como referência os objetivos da pesquisa.

A segunda fase, chamada “concepção e análise *a priori*” das atividades, tem como principal atribuição alinhar as noções ligadas especificamente à cada item da sequência didática, de modo a explicitar suas características didáticas, por meio de análises pertinentes. Além disso, pode conter previsões ligadas às formas pelas quais os sujeitos elaborarão suas conjecturas, ou seja, da “utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema” (ALMOULOU, 2007, p. 174). Conforme Artigue (1995), nessa fase, o pesquisador toma a decisão de atuar sobre um certo número de variáveis relevantes para o problema estudado, bem como responder às questões e validar as hipóteses contidas na fase anterior.

Almouloud (2007), aponta que as atividades devem ser concebidas levando-se em consideração os resultados prévios, de modo a permitir aos sujeitos desenvolverem certas competências e habilidades. Quanto a isso, as intervenções

realizadas pelo professor/pesquisador devem ser pensadas de tal forma que não prejudiquem a participação do aluno no processo de aprendizagem.

Para garantir os objetivos da análise, o pesquisador deve tomar a decisão sobre um determinado número de variáveis presentes no sistema sobre o qual a situação-problema se estende (ARTIGUE, 1995). A autora distingue as variáveis em dois tipos:

As variáveis macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia.

As variáveis microdidáticas ou locais, relativas à organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma sessão ou de uma fase (ARTIGUE, 1995, p. 42).

Conforme citam Artigue (1995) e Almouloud (2007), os dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral (organização geral da engenharia) ou locais (que dizem respeito a determinadas fases). As análises das variáveis devem ser realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (características do saber), a dimensão cognitiva (relativa aos sujeitos da aprendizagem) e dimensão didática (características do sistema de ensino no qual os sujeitos estão inseridos).

A identificação das variáveis pode vir a garantir certa generalidade das explicações dos fenômenos observados (as explicações consequentes das análises feitas), que podem, por sua vez, permitir controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido (ARTIGUE, 1995).

A terceira fase “experimentação”, conforme menciona Artigue (1995), inicialmente é constituída pelo período de aplicação e experimentação das atividades anteriormente planejadas, ou seja, a realização da engenharia em si. Posteriormente, os dados assim recolhidos servirão à análise dos resultados que serão obtidos na investigação.

A “análise a *posteriori* – validação”, quarta fase, de acordo com Artigue (1995), consiste na análise do conjunto dos dados obtidos na experimentação durante as sessões de ensino, dentro ou fora da sala de aula. É o conjunto de resultados na qual se consideram todas as informações obtidas na investigação por meio das sequências, das filmagens, das produções dos participantes ou outros instrumentos que forem pertinentes. Nesta fase, segundo Almouloud (2007) é

preciso retomar as análises *a priori* e confrontá-la com os dados obtidos na experimentação, de modo a validar ou contrapor as hipóteses levantadas no início da investigação.

Como este estudo trata-se de uma proposta, essencialmente se apresentam, nas seções seguintes, as atividades concebidas e suas análises *a priori*. Ainda que já tenham sido consolidadas nos capítulos anteriores, são feitas algumas observações acerca das análises preliminares.

4.2 A proposta de atividades

Nesse tópico, apresentamos a proposta de atividades para o estudo de semelhança de triângulos. Atendendo ao aporte metodológico, recuperam-se aqui algumas características das análises preliminares, como forma de encaminhar a compreensão sobre a proposta de atividades.

4.2.1 Análises preliminares para a proposta de atividade

Nos capítulos anteriores, nos quais se consolidam as análises preliminares, estão presentes reflexões de cunho histórico, a partir do trabalho de Roque (2012) e, de certa forma, de Euclides (2009). Desta última referência, também, surgem os aportes teóricos iniciais acerca da noção de semelhança, por meio das proposições que tratam sobre o tema.

Além das proposições, em nossas análises preliminares às atividades a serem construídas, consideramos a discussão apresentada a partir dos trabalhos de Papa Neto (2017), Costa *et. al* (2012), Machado (2012), Pinho (2010), Peneireiro e Silva (2008) e Candido e Galvão (2004). A partir destes autores, foi possível discorrer sobre a noção de semelhança, especialmente em triângulos, a noção de congruência de triângulos, a noção de paralelismo e a noção de semelhança entre triângulos. Essa última recorre a apontamentos relativos ao Teorema de Tales.

A construção desta parte do estudo levou em conta, então, essencialmente, os aspectos colocados por esses autores que poderiam permitir a ressignificação da noção de semelhança de triângulos. Deste modo, na proposta que esta pesquisa traz, as atividades abordam estes aspectos.

Além disso, as discussões trazidas a partir das pesquisas consultadas em nossa revisão de literatura são importantes quanto à construção da proposta de atividades, de modo que, preliminarmente, identificou-se, a partir de estudos como de Maciel (2004), a possibilidade de investigar a construção de conhecimentos em relação à noção de semelhança de triângulos; essa possibilidade também se fez presente nos estudos de Santos (2012).

Contribuições a essa fase da Engenharia Didática também são identificadas nos estudos de Ramiro (2014), Lima (2016) e Leite (2017), que promoveram, em seus trabalhos, discussões relacionadas ao ensino de geometria, a partir da representação de objetos específicos, sobretudo em relação ao uso de tecnologias digitais como suporte para as iniciativas que defendem. Neste campo, o das tecnologias, Ramassotti (2015) e Braga (2016) contribuíram para nossas conjecturas em relação às possibilidades de formação de professores que ensinam geometria, especificamente no tocante às noções de semelhança de triângulos a partir do uso de tecnologias digitais.

Diante dessa possibilidade de utilização das tecnologias digitais, considerou-se a utilização do GeoGebra⁸ como suporte para o desenvolvimento da proposta de atividades que este estudo encerra. Considerando os aspectos relacionados à noção de semelhança de triângulos, o objetivo do estudo e a questão norteadora, observou-se que, na revisão de literatura, há estudos que propuseram sequências de atividades vislumbrando o ensino de geometria, especificamente de objetos de estudo conexos ao apresentado aqui. Portanto, considerou-se pertinente a possibilidade de desenvolver a nossa proposta.

4.2.2 Atividades da proposta

Nesse item, apresentamos as atividades que compõem a proposta. Para cada uma delas, são providas as respectivas análises *a priori*. Antes, considera-se

⁸ Segundo informações disponíveis em <<https://www.geogebra.org/about>>, com acesso em 02/02/2019, o GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de ensino. Em sua interface, reúne recursos para geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um pacote com alto índice de usabilidade. O GeoGebra é uma comunidade em rápida expansão, contendo milhões de usuários, localizados em inúmeros países. O GeoGebra se tornou o software dinâmico de matemática mais usado no mundo, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo.

relevante frisar que essas atividades utilizam, inicialmente, descrições pormenorizadas para o seu desenvolvimento em relação ao *software* GeoGebra. A intenção não é a de estabelecer uma reprodução da representação dos objetos matemáticos visados, mas encaminhar a questão da fluência, já discutida em Oliveira (2018), principalmente em relação à compreensão das características e da lógica da ferramenta computacional empregada. Por outro lado, se espera que o uso destas descrições habilite a compreensão do potencial interativo da interface. Entretanto, é possível, dependendo da experiência específica de cada grupo de docentes, que apenas a solicitação da construção da representação seja solicitada. Neste caso, seria recomendável, como indica Oliveira (2018), que alguma discussão acerca de formas de uso da interface seja realizada com os professores. Justamente por isso, seria necessário avaliar as questões relativas à fluência, tendo em vista os elementos propostos por este autor.

Atividade 1

Objetivo: *Discutir a noção de figura a partir do triângulo*

Descrição: A atividade envolve procedimentos para a construção de um polígono, considerando que, para discutir a noção de semelhança de triângulos, é necessário que haja a compreensão de sua existência como representação. Atendendo à estrutura proposta inicialmente nas análises preliminares, em relação à noção de semelhança, tanto nas conjecturas originais de Euclides como nas propostas curriculares, reconhecer a noção de semelhança é uma habilidade a ser desenvolvida com a finalidade de perceber figuras semelhantes e de aplicar as propriedades da congruência e as de semelhança em situações-problema. Evidentemente, antes disso, é necessário, compreender a existência da representação figural equivalente. Com objetivos próximos aos das propostas curriculares, trabalhos como o de Maciel (2004) e de Santos (2012), por exemplo tratam da noção de semelhança de figuras planas, mas, para isso, inicialmente, observou-se a necessidade da construção de uma figura, o que não é necessariamente observado pelos autores mencionados. A seguir, estão descritas as etapas necessárias para a construção das representações envolvidas na atividade.

Etapas da construção das representações da atividade

Construção de um triângulo tomando como vértices três pontos não colineares

Na interface do GeoGebra, no ícone  , com o botão esquerdo do mouse, selecione opção **ponto**. Na janela de visualização, construa três pontos A, B e C não colineares.

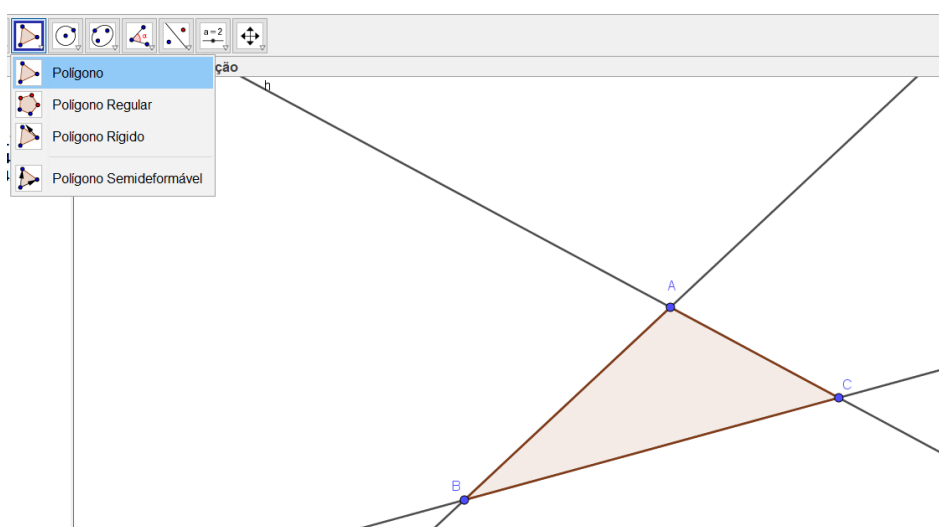
A seguir, no ícone  , selecione a opção **reta** e, clicando sobre os pontos A e B, crie uma reta f.

Da mesma forma, no ícone  , selecione a opção **reta** e, clicando sobre os pontos A e C, crie uma reta g.

Novamente no ícone  , selecione a opção **reta** e, clicando sobre os pontos B e C, crie uma reta h.

A representação já pode ser visualizada a partir dos segmentos formados por $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Entretanto, é possível destacar este elemento da construção, por meio da ferramenta *polígono* do GeoGebra. A figura 35, destaca as opções envolvidas:

Figura 35: Triângulo e ferramenta Polígono



Fonte: elaborada pela autora

Para a construção da representação do triângulo da figura 35 (ou outra qualquer desta natureza), deve-se clicar com o botão esquerdo do mouse inicialmente em qualquer um dos três pontos, ligando-os um a um. A representação construída poderá ser parecida com aquela presente na figura 35.

Experimentação e visualização da construção

Conforme Oliveira (2018), visualização, experimentação e dinamismo são importantes elementos, provenientes da interação com tecnologias digitais, que possibilitam a construção e refinamento de conjecturas. A experimentação, em particular, é destacada por Lévy (1993) como importante maneira de subsidiar o raciocínio das pessoas que aprendem em cenários nos quais as tecnologias estão presentes. Para o autor, “a manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário uma espécie de intuição sobre as relações de causa e efeito presentes no modelo” (p. 119). Em relação à experimentação com interfaces digitais, de forma mais específica, já preconizava o teórico francês, com certa perplexidade:

Uma das mais estranhas modificações ligadas ao uso das simulações digitais é a que hoje afeta as matemáticas. Tradicionalmente consideradas como reino da dedução, elas também estão adquirindo um caráter experimental. Simulações de objetos matemáticos podem infirmar, confirmar, ou gerar conjecturas (LÉVY, 1993, p. 104).

Deve-se ressaltar que a atividade descrita até aqui, bastante elementar, tem outras finalidades, além daquelas já descritas. Dentre elas, consta o exercício de experimentar, no sentido amplo, no sentido indicado por Lévy (1993) e destacado por Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018), de modo a subsidiar a construção de inferências ligadas às propriedades do objeto matemático, visualizáveis e manipuláveis por meio da representação. De forma mais específica, deve-se clicar com o botão esquerdo no ícone na ferramenta “mover”  para, em seguida, movimentar os vértices do polígono. Será possível observar a manutenção das propriedades que caracterizam a representação do objeto como triângulo.

Como sugestão de questionamentos que podem ser feitos, tanto no processo de ressignificação que caracteriza a formação continuada do professor, quanto em

eventual atividade direcionada a alunos do ensino fundamental, com as devidas adaptações, podem surgir os seguintes itens:

- a) Qual figura está representada na construção? Quais noções matemáticas garantem esta representação?
- b) Que propriedades matemáticas estão envolvidas nessa construção?

Análise *a priori* da atividade 1

Na construção da atividade, de forma mais específica, espera-se que o participante construa e visualize um triângulo. Considerando a representação da figura, espera-se que possam surgir questionamentos acerca da noção de triângulo e suas condições de existência (propriedades). Conforme a discussão trazida nas análises preliminares, essa atividade tem caráter introdutório e pode até ser vista como elementar, mas se justifica no sentido de servir de base para tratar da noção de semelhança de triângulos, uma vez que se discute sobre essa noção a partir da existência de dois triângulos. Assim, em um cenário de pessoas-com-tecnologias (OLIVEIRA, 2018), é fundamental garantir a compreensão das interações presentes na atividade. A interface é a variável didática de importância mais destacada, pois, como escolha alternativa, poder-se-ia considerar a construção com ferramentas como lápis e papel, que apresentariam um tipo diverso de dinamismo, distinto na natureza mesma das manipulações possíveis. Sobre isso, esclarece Oliveira (2018):

Diferentes dinamismos estão disponíveis aqui, desde aquele que tem por origem a tela do dispositivo computacional até outros, que usam mídias estáticas, indicando o dinamismo em si como um processo que envolve mídias e as mentes das pessoas – no caso das tecnologias digitais, há uma amplitude maior neste sentido, uma vez que as mesmas concorrem para processar e disponibilizar reações às intervenções das pessoas, como parte dos processos cognitivos em jogo, enquanto que nos dispositivos não digitais, via de regra, todo o processamento ocorre no âmbito da mente (OLIVEIRA, 2018, p. 74).

Parece claro que duas formas de apreensão são solicitadas quando da realização desta atividade, pelo menos de maneira mais imediata, em relação à interpretação permitida pela base teórica deste trabalho: são elas a apreensão perceptiva, de caráter praticamente intuitivo, e a apreensão sequencial. A segunda,

especialmente, segundo Duval (2012, p. 120), “é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura”. Já a primeira seria “imediate e automática”, e o conflito entre as duas está, segundo o autor mencionado, no cerne dos problemas de geometria, ou seja, na “diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses” (DUVAL, 2012, p. 121). Para o professor em formação, é importante compreender esta tensão essencial entre as formas de apreensão, de modo a trabalhar atividades introdutórias como essa com seus alunos com a intenção de promover a compreensão do processo constitutivo das figuras que estiverem em questão. Outra possibilidade aqui diz respeito à interpretação discursiva das figuras geométricas, que promoveria, em um primeiro momento, um retorno ao enunciado, de forma a ampliar as possibilidades de construção dos objetos matemáticos em questão (figuras geométricas), migrando de problemas “cujos enunciados são semanticamente congruentes à figura construída ou a construir” para outros, em que isto não seja mais necessário, mas que demande a apreensão operatória, aquela “centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações” (DUVAL, 2012, p.124-125). Evidentemente, este pode ser um movimento progressivo, e o papel do professor seria o de exercer um controle das atividades, preservando a autonomia dos alunos e realizando as devidas institucionalizações, ou seja, discutindo o caráter formal do conhecimento matemático em construção. De forma mais específica, pode-se discutir as propriedades envolvidas na caracterização matemática de um triângulo, envolvendo, por exemplo, os lados e os ângulos.

Quanto ao conhecimento pedagógico (didático, no caso) do conteúdo, na forma mencionada por Shulman (1987) em relação à formação de professores, espera-se que o participante tenha conhecimento sobre as propriedades do objeto matemático envolvido (triângulo). Embora a atividade apresente os passos para a construção figural, é esperado que o participante, considerando sua formação, compreenda e reflita sobre a relação entre as propriedades dos objetos matemáticos e os passos mencionados, independentemente do suporte e do ambiente midiático empregado para a atividade.

Justamente em relação ao emprego de determinadas tecnologias, considerando Mishra e Koehler (2006), em relação ao TPACK, é importante que o professor em formação compreenda a relação entre as ferramentas do GeoGebra e o conhecimento envolvido. No caso, ao utilizar o GeoGebra, é esperado que o participante, a partir dos comandos apresentados, possa realizar a construção, compreendendo a forma pela qual o uso das ferramentas subsidia a constituição da figura, o que lhe permite tomar decisões em relação ao processo de ensino. De outro ponto de vista, é importante que o professor reflita sobre o potencial interativo da interface. Deste ponto de vista, segundo Oliveira (2018),

saber o que a interface oferece, as formas pelas quais as possibilidades podem ser acessadas/usadas, como funcionam e que resultados podem entregar são fatores que interferem decisivamente no êxito do emprego de elementos tecnológicos em um processo educativo (p. 52)

Em relação às dialéticas indicadas na TSD (BROSSEAU, 2002), espera-se que, em uma situação adidática de ação, o aprendiz realize a construção da figura seguindo os comandos. Em uma fase de formulação, seja possível elaborar conjecturas que possam ser discutidas em relação à resposta esperada para o questionamento presente na atividade, o que levaria à discussão em relação às propriedades do triângulo. Em um momento seguinte, de caráter didático, o formador, na fase de institucionalização, formalizaria o conhecimento sobre triângulo. Neste caso, em um ambiente de formação de professores, os questionamentos mais importantes são aqueles que surgem na discussão, e se referem ao ensino em si, às propriedades matemáticas envolvidas e ao uso de suporte tecnológico específico e adequado.

Uma variável didática que observamos nessa atividade se refere ao GeoGebra (suporte ou mídia), que possibilita a construção da representação de um polígono, que também seria possível a partir de outros suportes, mas com diferentes características, principalmente em relação ao dinamismo, à visualização e à experimentação possíveis. Isto significa que esta escolha possibilita ao aprendiz o exercício de reconfigurações óticas, na forma como as denominou Duval (2012), com uma amplitude e em uma quantidade que seria difícil com lápis e papel.

Atividade 2

Objetivo: *Discutir a noção de semelhança de triângulos pelo caso AA (ângulo – ângulo)*

Descrição: A atividade envolve procedimentos para construção de representações de figuras planas por meio de comandos no GeoGebra. Diante disso, utilizaremos a construção de triângulos para discutir as relações de semelhança. Em nossos estudos preliminares, Roque (2012), amparada nos comentários de Proclus, salienta que a resolução de problemas geométricos envolve sempre uma construção. Conforme dito anteriormente, o livro VI de “Os Elementos” explora os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos a partir de suas proposições.. Notamos, da mesma forma, nas propostas curriculares, a importância de reconhecer à semelhança entre triângulos a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes. Com propósito aderente aos das propostas curriculares, trabalhos como os de Ramiro (2014) e Leite (2017) tratam de casos de semelhança entre figuras planas.

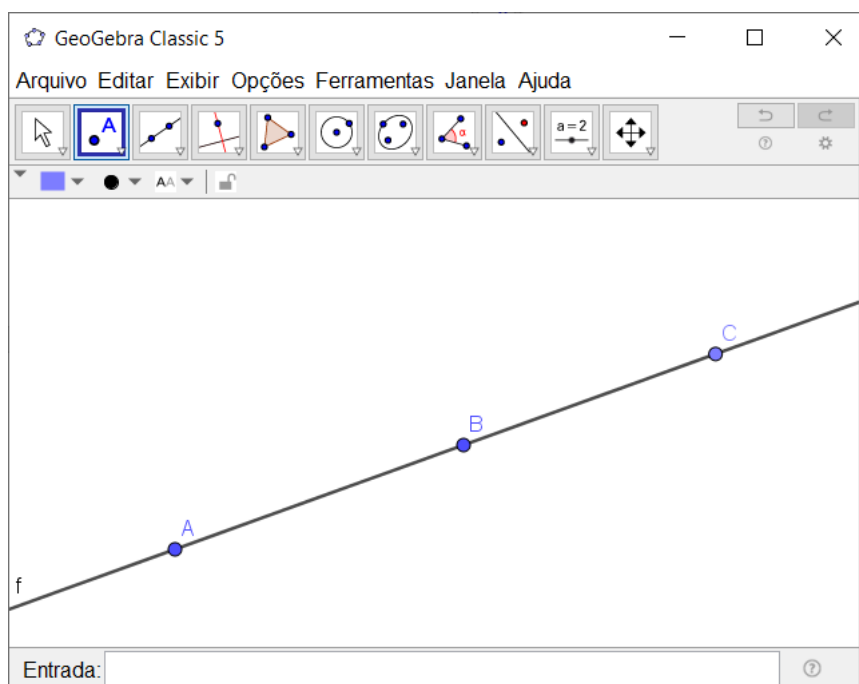
Etapas da construção das representações da atividade

Construir dois triângulos semelhantes a partir do caso AA

Na interface do GeoGebra, usando o botão , selecione a opção **ponto** com o botão esquerdo do mouse, de modo a criar dois pontos na janela de visualização, denominados *A* e *B*.

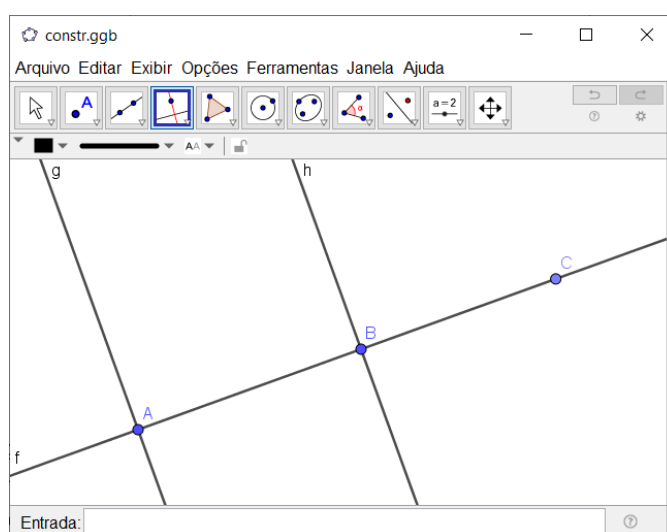
Em seguida, clique no ícone , selecionando a opção **reta** e, clicando sobre os pontos *A* e *B*, crie uma reta *f*.

Na sequência, indo ao ícone , selecione a opção **ponto** e, na janela de visualização, crie um ponto *C* sobre a reta *f*, de modo que o ponto *B* fique entre o ponto *C* e o ponto *A*. A figura 36 indica como a construção estaria até este momento.

Figura 36: *Etapas da construção da atividade 2 (a)*

Fonte: elaborada pela autora

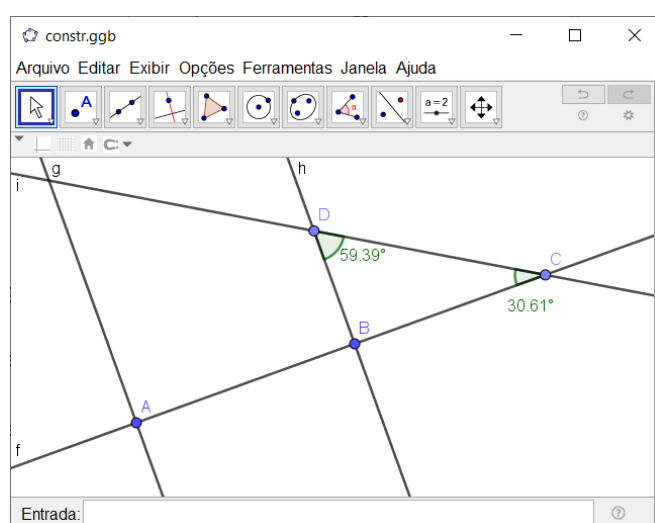
Logo após, clique no ícone  e escolha a opção **reta perpendicular**. Clique no ponto A e, depois, na reta f para criar uma reta g perpendicular à reta f . Ainda com a opção **reta perpendicular**, clique no ponto B e, em seguida, na reta f para criar uma outra reta h , perpendicular à reta f (figura 37).

Figura 37: *Etapas da construção da atividade 2 (b)*

Fonte: elaborada pela autora

No ícone , selecione novamente a opção **ponto** e crie um ponto D sobre a reta h . Depois, no ícone , escolha a opção **reta** e, clicando sobre os pontos C e D , crie uma reta i . No ícone , escolha a opção **ângulo**, e clique, ordenadamente no sentido horário, sobre os pontos D , C e B . Repita o processo para os pontos B , D e C (figura 38).

Figura 38: Etapas da construção da atividade 2 (c)

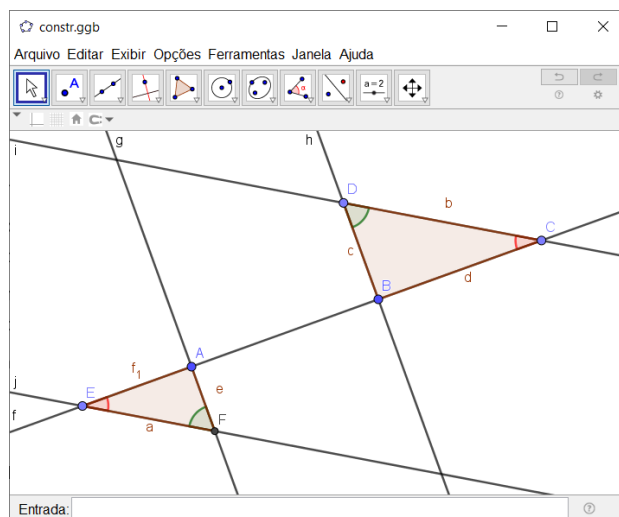


Fonte: elaborada pela autora

Na sequência, no ícone , selecione a opção **ponto** e, sobre a reta f , crie um ponto E , de modo que o ponto A fique entre o ponto B e o ponto E . No ícone , selecione a opção **reta paralela** e, clicando sobre o ponto E e a reta i , crie uma reta j . Observe que a reta j tem pontos de intersecção com as retas g e h . No ícone , selecione a opção **intersecção de dois objetos**; em seguida, clique sobre as retas g e j , crie um ponto F na intersecção entre as duas retas. No ícone , escolha a opção **ângulo** e clique ordenadamente no sentido horário sobre os pontos A , F e E . Repita o processo para os pontos F , E e A . No ícone , selecione a opção **polígono** e clique ordenadamente sobre os pontos B , C , D e B . Da mesma forma,

no ícone , selecione a opção **polígono** e clique ordenadamente sobre os pontos A, E, F e A (figura 39).

Figura 39: *Etapas da construção da atividade 2 (d)*



Fonte: elaborada pela autora

Experimentação e visualização da construção

Neste caso, os professores devem ser convidados a movimentar a construção, usando de recursos identificados no potencial interativo da interface. No caso, o recurso mais imediato para semelhante procedimento seria o de *clique-e-arrastar*, como indicado por Oliveira (2018), o que pode ser feito com o recurso **mover** do GeoGebra (ícone ) em relação, por exemplo, aos vértices A, B, C, D e E. O vértice F é um objeto dependente, ou seja, foi criado a partir da intersecção de duas retas, o que impede seu movimento autônomo.

Alguns questionamentos podem ser encaminhados a partir desta atividade. A seguir, alguns deles são sugeridos, sem a pretensão de esgotar as possibilidades reflexivas abertas pela estratégia didática adotada.

- Considerando os ângulos $\widehat{AFE}$, $\widehat{FEA}$, $\widehat{DCB}$ e $\widehat{BDC}$, quais relações podemos identificar entre os triângulos DBC e FAE?
- Considerando os triângulos DBC e FAE, em relação aos seus lados, quais relações podem ser observadas?

- c) *A partir das conjecturas até aqui realizadas, que propriedades matemáticas são identificadas na relação entre os polígonos mencionados?*
- d) *Em qualquer construção de dois triângulos quaisquer, por exemplo, é possível identificar as mesmas relações encontradas nos triângulos DBC e FAE? Justifique.*
- e) *As relações observadas entre os polígonos DBC e FAE (triângulos) podem ser identificadas nas relações entre quaisquer polígonos do mesmo tipo?*

Análise a priori da atividade 2

A atividade 2 introduz uma noção preliminar e, de certa forma, básica acerca da semelhança de triângulos. Observamos essa possibilidade ao discutirmos a noção de semelhança naquilo que consideramos compor nossos estudos preliminares, no capítulo 2.

A priori, nessa atividade, se espera que, a partir da construção da representação geométrica, os participantes, ao experimentarem e visualizarem os movimentos da representação, respondam aos questionamentos levantados. Mais especificamente, espera-se que o participante, na sequência da primeira atividade, e recordando das propriedades relacionadas à construção da representação de um triângulo, consiga observar possíveis relações dessas propriedades nos dois polígonos resultantes da nova construção.

Na perspectiva dos aportes teóricos adotados, é possível identificar que, para responder aos questionamentos, o participante transite sobre as formas de apreensão propostas por Duval (2012). Ao seguir os procedimentos sugeridos para a construção da representação geométrica, observa-se a necessidade da consolidação de elementos cognitivos que constituem a apreensão sequencial. Como na experimentação e visualização, o participante pode mover os objetos (pontos e retas), para responder aos questionamentos, o que faz surgir a possibilidade de que elementos da apreensão perceptiva possam contribuir para a formação de conjecturas. As modificações possíveis na figura, de ordem ótica e posicional, segundo Duval (2012), podem permitir, por meio de operações como rotação e translação, por exemplo, a apreensão de “estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras” (DUVAL, 2012, p. 127). Estas

características estão mais especificamente relacionadas ao que o autor francês denomina apreensão operatória. Quanto a isso se espera que, ao experimentar e visualizar a construção, o participante observe as relações de igualdade entre as medidas dos ângulos que são evidentes na construção e mais implícitas em relação à proporcionalidade das medidas dos lados homólogos.

Em relação à questão que envolve a medida dos lados dos triângulos, pode-se propor que os participantes usem os recursos da interface do GeoGebra para refletir. Este movimento incentiva o desenvolvimento da fluência em relação à interface, nos termos propostos por Oliveira (2018), ao mesmo tempo em que complementa a estratégia consolidada por conhecimentos que integram didática, conhecimento matemático e tecnologias (MISHRA; KOEHLER, 2006).

Em termos de institucionalização, uma possibilidade pode ser a de verificar diretamente as medidas dos lados, o que seria aplicado, na lógica das dialéticas propostas por Brousseau (2002) após as reflexões dos participantes sobre a proposta. Desta forma, poder-se-ia supor que a sequência teria passos semelhantes aos que seguem.

- *Habilite a janela de álgebra do GeoGebra (Exibir – Janela de Álgebra).*
- *Clicando com o botão esquerdo sobre a linha de entrada da janela de álgebra, escreva a seguinte relação: $m = b / a$. Logo após, clique ENTER.*
- *Em seguida, novamente na linha de entrada, escreva a relação $n = c / e$ e logo após, clique ENTER.*
- *Finalmente, na linha de entrada, escreva a relação $p = d / f_1$ e, logo após, clique ENTER.*
- *Observe as relações entre os valores, dadas por m , n e p e elabore suas conjecturas. Se desejar, movimente a figura e prossiga observando os valores mencionados.*

Ao refletir sobre a construção geométrica para responder aos questionamentos propostos, como se apresentam de modo geral, solicitando um discurso, espera-se que apreensões de caráter discursivo surjam, o que levaria o participante a apresentar as propriedades geométricas envolvidas na construção.

Além disso, com esses questionamentos, espera-se que emergjam respostas relacionadas a noção de semelhança de triângulos, especificamente por meio do caso de semelhança AA. De acordo com os pressupostos da TSD, espera-se, igualmente, que tais propriedades relacionadas à semelhança de triângulos se explicitem no desenvolver da atividade, caracterizando a mesma como uma situação adidática. Deve-se lembrar que a ideia é que os professores reflitam sobre o processo de ensino com base no emprego da estratégia didática aqui explicitada, ou seja, não se espera que o professor aprenda sobre semelhança de triângulos, mas que ressignifique as possibilidades de ensino deste tema e que reflita sobre formas pelas quais pode fomentar a aprendizagem entre seus alunos. Esta ressignificação pode se dar justamente como resultado do trânsito do professor pela atividade, uma vez que seja convidado a explorar, por meio da visualização, experimentação e dinamismo, as características da construção e as propriedades matemáticas envolvidas, no lugar de simplesmente prover um desenho como exemplo para a noção de semelhança.

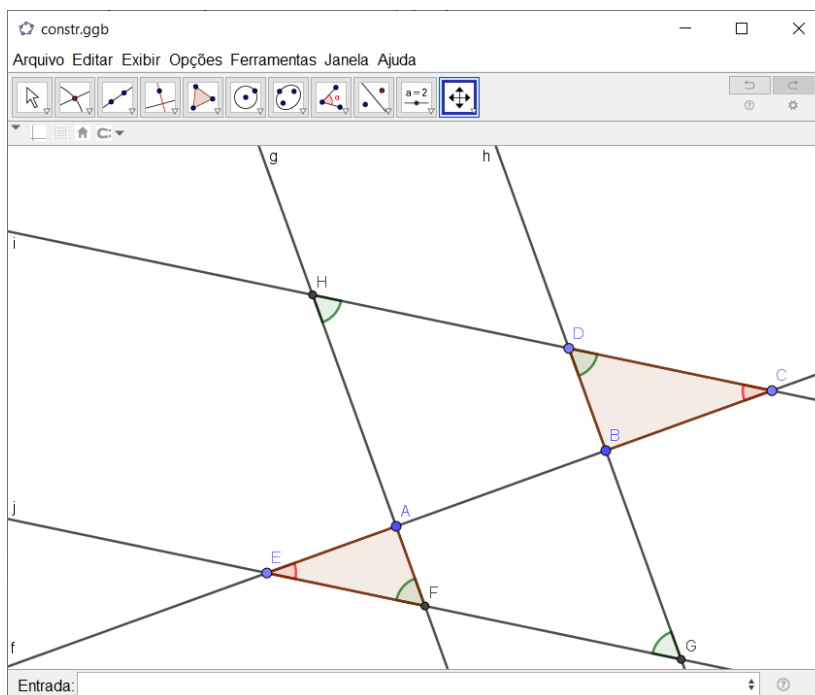
Assim como na primeira atividade, nesta e nas demais o GeoGebra é uma variável didática, por razões já mencionadas nas análises *a priori* anteriormente feitas. Para além daquela atividade, nessa, no GeoGebra, outros elementos como medidas de ângulos, retas paralelas e ponto de intersecção entre dois objetos são elementos que o *software* permite construir, experimentar e visualizar, de maneira dinâmica, e constituem escolhas que os caracterizam como variáveis didáticas, uma vez que a construção poderia ser feita de outra forma. A escolha do triângulo como objeto a ser representado também é relevante deste ponto de vista.

Outro ponto a ser destacado se refere aos prolongamentos que a atividade pode ter a partir de outras ideias, que podem ser suscitadas na discussão com o grupo de aprendizes. Por exemplo, considerando a figura 39:

- Utilize a ferramenta **interseção de dois objetos** para marcar o ponto G , clicando nas retas j e h .
- Que conclusões você pode chegar, considerando o triângulo BEG e sua relação com os triângulos FEA e DBC ?

- Repita a **interseção de dois objetos** para marcar o ponto H , clicando nas retas i e g . A que conclusões você chega, relacionando o novo triângulo HCA com os demais?

Figura 40: Uma continuação possível para a atividade 2



Fonte: elaborada pela autora

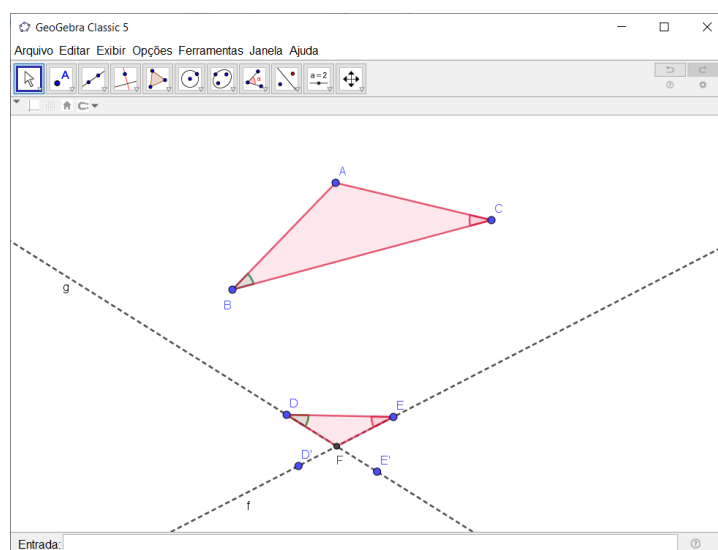
Todos os triângulos relacionados nos questionamentos relativos à figura 39 são semelhantes pelo caso AA. As argumentações podem envolver, por exemplo, os ângulos comuns aos pares de triângulos em C e E , bem como reflexões advindas do conhecimento do teorema de Tales.

Além disso, pode-se considerar que o caso analisado envolve um triângulo retângulo. Entretanto, outros triângulos podem ser analisados, passando por processos de construção que habilitam representações de triângulos de outros tipos. Por exemplo, considerando a figura 40:

- Usando a ferramenta **ponto**, marque três pontos não colineares no plano, nomeados como A , B e C ;
- Use a ferramenta **polígono**, clicando nos pontos A , B , C e A novamente para desenhar um triângulo;

- Com a ferramenta **ângulo**, clique nos pontos A , C e B no sentido horário, de modo a marcar o ângulo α ; repita o procedimento em relação aos pontos C , B e A para marcar o ângulo β ;
- Marque outros dois pontos, D e E , em outro local do plano;
- Com a ferramenta **ângulo com amplitude fixa**, clique nos pontos D e E , respectivamente; na caixa de diálogo aberta, marque o ângulo α no sentido anti-horário. O ângulo DED' será marcado, de mesma medida que α ;
- Da mesma forma, com a ferramenta **ângulo com amplitude fixa**, clique nos pontos E e D , respectivamente; na caixa de diálogo aberta, marque o ângulo β no sentido horário. O ângulo EDE' será marcado, de mesma medida que β ;
- Com a ferramenta **reta**, crie a reta f , que passa por E e D' ; com a mesma ferramenta, crie a reta g , que passa por D e E' ;
- Usando a ferramenta **interseção de dois objetos**, crie o ponto F , clicando nas retas f e g ;
- Use a ferramenta **polígono**, clicando nos pontos D , E , F e D novamente para desenhar um triângulo.
-

Figura 41: Outra continuação possível para a atividade 2



Fonte: elaborada pela autora

Os triângulos ABC e DEF são semelhantes, o que pode ser concluído pelo caso AA. Considerando o potencial interativo da interface, é possível refinar o resultado obtido e exposto na figura 40 “escondendo” os chamados “objetos auxiliares” da construção, ou seja, aqueles que não compõem diretamente o triângulo DEF, quais sejam as retas f e g , além dos pontos D' e E' . Para isto, deve-se empregar a opção **exibir/esconder objeto** do GeoGebra. As discussões podem continuar as reflexões iniciadas no começo da atividade e remetem às asserções sobre semelhança já indicadas anteriormente neste trabalho.

Atividade 3

Objetivo: Discutir a noção de paralelismo

Descrição: A atividade envolve uma discussão sobre a noção de paralelismo e a noção de congruência de triângulos, a partir da construção de duas retas transversais e de retas paralelas como uma estratégia didática para tratar da noção de semelhança de triângulos.

Com referência aos nossos estudos preliminares, encontramos, na proposição II do livro VI de “Os Elementos” um teorema que menciona retas paralelas cortadas por uma transversal (EUCLIDES, 2009), que representaria, inclusive, um gênero de prova acerca do teorema de Tales. Sob o ponto de vista didático, Peneireiro (2008), Pinho (2010) e Papa Neto (2017) reforçam que o teorema de duas retas paralelas interceptadas por uma transversal determina ângulos alternos internos (ou ângulos correspondentes) congruentes.

Nos currículos, a orientação é que essas noções devem surgir e ser reforçadas por meio de atividades que investiguem os conceitos de congruência. Das argumentações presentes em nossa revisão de literatura, trabalhos como de Maciel (2004), Lima (2016) e Leite (2017), por exemplo, reforçam a importância destas noções como úteis para compreender outras, como a de proporcionalidade entre segmentos, de homotetia e de identificação de ângulos e triângulos.

Etapas da atividade

Construir duas retas transversais e retas paralelas

- No ícone  do GeoGebra, selecione a opção **ponto** com o botão esquerdo do mouse; em seguida, crie dois pontos na janela de visualização, o ponto A e o ponto B .
- Depois, clique no ícone , selecione a opção **reta** e, clicando sobre os pontos A e B , crie uma reta f .
- Retorne ao ícone ; selecione a opção **ponto** e, na janela de visualização, crie um ponto C não pertencente à reta f .
- A seguir, clique no ícone  e escolha a opção **reta**; clicando sobre os pontos A e C , crie uma reta g .
- No ícone , escolha a opção **reta** e, clicando sobre os pontos B e C , crie uma reta h .
- No ícone , selecione novamente a opção **ponto** e crie um ponto D sobre a reta f , de modo que o ponto B fique entre o ponto A e o ponto D .
- Em seguida, no ícone , selecione a opção **reta paralela** e, clicando sobre a reta h e o ponto D , crie uma reta i , que será paralela à reta h .
- Em seguida, no ícone , selecione a opção **reta paralela** e, clicando sobre a reta f e o ponto C , crie uma reta j , que será paralela à reta f .
- No ícone , selecione a opção **interseção entre dois objetos**; em seguida, clique sobre as retas i e j , criando o ponto E na interseção entre as duas retas.
- Novamente, no ícone , selecione a opção **interseção entre dois objetos**; clique sobre as retas g e i , criando o ponto F na interseção entre as duas retas.

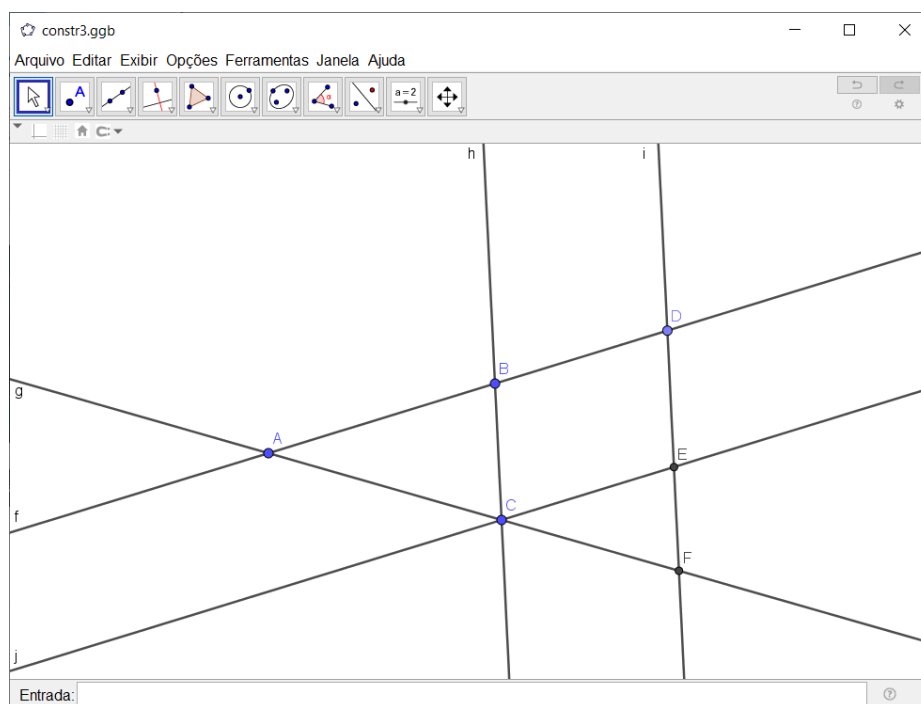
Experimentação e visualização da construção

- Clique com o botão esquerdo no ícone , selecione a opção **mover** e, em seguida, movimente os vértices construídos (só não será possível fazê-lo com os pontos E e F).

Em relação à construção realizada, consolidada na figura 41 como uma representação possível, ainda uma vez é possível observar que a sequência de passos supramencionada pode ou não ser proposta, dependendo de fatores que envolvem o conhecimento de elementos da geometria plana pelos sujeitos, além

do domínio do potencial interativo da interface e a consolidação da fluência entre o conhecimento matemático e a habilidade no uso da interface do GeoGebra (OLIVEIRA, 2018). Assim, a atividade poderia solicitar apenas que se criassem as representações dos objetos envolvidos na construção, indicando as condições envolvidas, quando fosse o caso, sem necessariamente indicar a forma como isto seria feito no GeoGebra – isto poderia ser feito na institucionalização.

Figura 42: *Configuração final da representação proposta na atividade 3*



Fonte: elaborada pela autora

Entre os questionamentos que poderiam ser propostos para reflexão dos professores, poderiam constar os que seguem. Uma orientação adicional aos participantes poderia envolver a ideia de empregar quaisquer recursos da interface computacional para abalizar as conjecturas – neste caso, os professores poderiam, eventualmente, constatar a semelhança entre os triângulos ABC e CEF por meio da constatação da igualdade da medida de seus ângulos ou pela proporcionalidade de seus segmentos.

- a) *Considerando a representação geométrica construída, o que pode ser observado ao movimentar os vértices A, B, C e D?*
- b) *Considerando os polígonos ABC e CEF, que relação(ões) ou alteração(ões) entre esses polígonos você identifica a partir do movimento dos vértices? Procure pensar em quais propriedades são passíveis de reconhecimento na representação geométrica construída.*
- c) *Que noção geométrica decorre da preservação das propriedades relativas à construção dos triângulos realizada nesta atividade?*

Análise a priori da atividade 3

A atividade 3, para abordar a noção de semelhança, propõe a construção de uma representação geométrica, em relação à qual estão envolvidas as noções de paralelismo e de congruência de triângulos, a começar na construção de retas transversais e retas paralelas, em consonância com nossos estudos preliminares.

Nessa atividade, a expectativa é que, a partir da construção da representação geométrica, os participantes, ao experimentarem e visualizarem os movimentos da representação de forma dinâmica, possam discutir suas percepções para responderem aos questionamentos. A essas percepções, *a priori*, esperamos que se evidencie as formas de apreensão indicadas por Duval (2012) e presentes em nossos aportes teóricos.

Nesse sentido, para realizar os procedimentos sugeridos, espera-se que a apreensão sequencial seja mobilizada para a construção da representação geométrica, assim como na experimentação e visualização. Além disso, a

possibilidade de movimentar os pontos e retas construídas faça emergir elementos relativos à apreensão perceptiva dessa representação, o que pode subsidiar o participante na resposta aos questionamentos propostos, quando ele transitar por diferentes conjecturas. Outra questão envolvida nos aportes propostos por Duval (2012) se refere às modificações da figura, as quais, se não envolverem divisões da figura em partes ou subfiguras, limitar-se-iam, em um primeiro momento, às modificações de caráter ótico e posicional. Assim, a apreensão operatória que eventualmente ocorreria em relação à construção estaria ligada a fatores que o autor francês indica em relação às modificações realizadas, quais sejam operações como a superposibilidade, a anamorfose, a rotação e a translação (p. 127).

Assim, de certa forma, a expectativa é que, a partir das conjecturas realizadas entre os participantes, com base nos movimentos realizados durante a experimentação, se evidenciem a apreensão operatória e a apreensão discursiva para responder os questionamentos propostos. Isto faria, potencialmente, que o participante apresentasse argumentos para as propriedades geométricas envolvidas na construção, que estão presentes de maneira implícita. A experimentação, indicada por Lévy (1993) e por Oliveira (2018) como recurso à construção de argumentos matemáticos, seria fundamental, da forma como aqui se defende, para que esses argumentos pudessem ser mobilizados e discutidos.

A partir da apreensão discursiva, essas reflexões, durante e após a construção, podem permitir ao participante observar noções de paralelismo a partir da construção de duas retas paralelas e uma transversal, determinando, por exemplo, ângulos alternos internos (ou ângulos correspondentes) congruentes, bem como reforçariam, eventualmente, a validação de outras noções de proporcionalidade entre segmentos. A discussão advinda daí poderia mencionar noções de homotetia adicionalmente, por exemplo. Além disso, mesmo sem a expectativa de que ocorressem modificações mereológicas até este ponto, os participantes poderiam perceber, na construção, um uso específico e típico para o teorema de Tales.

Partindo dos argumentos expostos nas atividades anteriores, nesta construção se espera que o participante, em um primeiro momento, mobilize o conhecimento matemático necessário para que seja possível estabelecer as

primeiras discussões quanto as propriedades presentes no desenvolvimento das respostas. De outro ponto de vista, pensando na ressignificação do conhecimento pedagógico do conteúdo, como exposto em Shulman (1987), as discussões deveriam versar sobre estratégias que permitiriam aos alunos, em situações de aprendizagem, refletirem sobre as propriedades geométricas envolvidas, no lugar de apenas realizar uma construção. A estratégia deve pensar no favorecimento à reflexão provido pelo uso do GeoGebra: ao explorar a construção, características como dinamismo, visualização e experimentação podem embasar a observação de propriedades evidenciadas pela manutenção de características como a congruência dos ângulos e a proporcionalidade dos lados dos triângulos. Evidenciar estas características por meio de recursos do *software*, levando em conta o conhecimento matemático necessário, correspondendo à constituição da fluência em relação à interface (OLIVEIRA, 2018). Além disso, é preciso pensar que a estratégia que envolve a tecnologia, no caso, é proposta de forma contextual, o que implica em um envolvimento da mesma como um dos aspectos da tríade proposta por Mishra e Koehler (2006).

A noção de paralelismo pode ser levantada aqui, bem como menções ao teorema de Tales, o que pode ser encaminhado a partir da apreensão operatória das construções (DUVAL, 2012). A expectativa é que essas propriedades, discutidas a partir da dinâmica prevista nas dialéticas subjacentes, embasem conjecturas e/ou demonstrações para que se justifiquem as respostas aos questionamentos presentes na construção da atividade. Ainda aqui, como nas atividades já analisadas, a fluência em relação à interface e a possibilidade de exploração de seu potencial interativo, como apontado por Oliveira (2018), seriam importantes condicionantes para que a sequência de comandos anunciada sirva de subsídio à construção em um primeiro momento ou que surja apenas quando da institucionalização. Deve-se apontar, também, ainda uma vez, que a escolha do GeoGebra como elemento mediador para a construção representa uma variável didática a ser considerada, pois, alternativamente, a construção poderia ser proposta em interfaces diversificadas, com distintos resultados quanto às características de visualização, experimentação e dinamismo. A escolha do triângulo como objeto matemático também constitui uma variável didática, assim

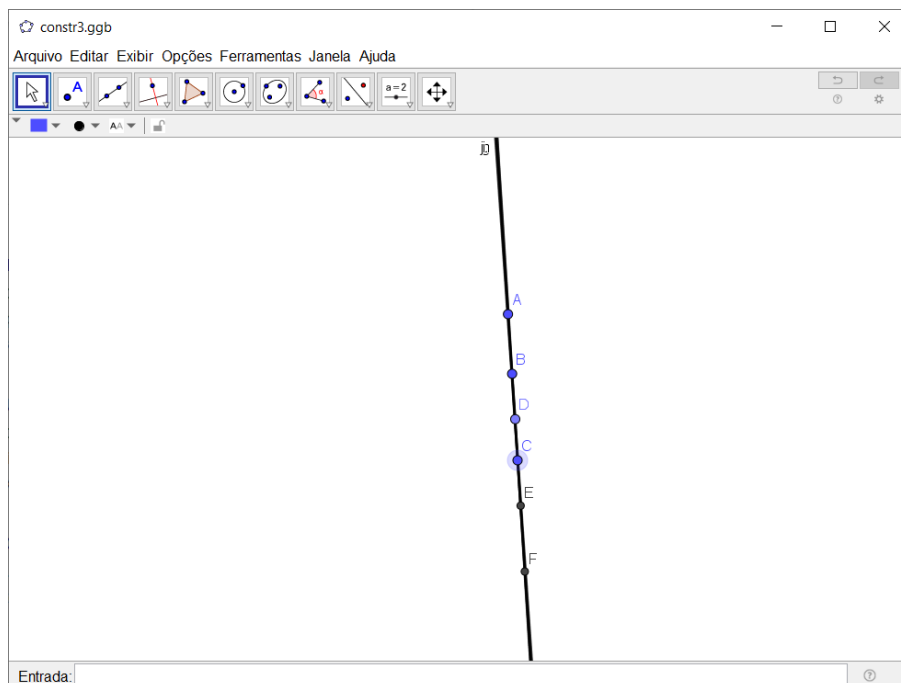
como a opção por construir triângulos semelhantes por meio de propriedades garantidas, em última instância, pelo teorema de Tales.

De modo mais específico, no questionamento *“considerando a representação geométrica construída, o que pode ser observado ao movimentar os vértices A, B, C e D?”* (item a), espera-se que o aprendiz indique que os elementos envolvidos na construção são modificados proporcionalmente, mantendo-se estáveis as propriedades relacionadas. Eventualmente, poderia o participante adiantar as respostas para os outros questionamentos, que, neste caso, serviriam apenas para destacar alguns pontos que se considera essenciais para a ressignificação do conhecimento matemático correlato, no sentido de encaminhar discussões para a elaboração de estratégias didáticas que os professores em formação poderia eventualmente empregar com seus alunos.

Em relação ao questionamento *“considerando os polígonos ABC e CEF, que relação(ões) ou alteração(ões) entre esses polígonos você identifica a partir do movimento dos vértices? Procure pensar em quais propriedades são passíveis de reconhecimento na representação geométrica construída”* (item b), a expectativa é a de que os participantes indiquem que os lados homólogos permanecem proporcionais, assim como os ângulos correspondentes mantêm a relação de congruência. Eventualmente, aqui, poderá ser mencionado o teorema de Tales, questões relativas ao paralelismo, à homotetia e mesmo à noção de semelhança de triângulos. O questionamento c, *“que noção geométrica decorre da preservação das propriedades relativas à construção dos polígonos realizada nesta atividade?”*, espera-se que os professores discutam, especificamente, sobre a noção de semelhança, que já havia surgido na atividade anterior.

Inúmeras possibilidades podem surgir das discussões resultantes desta atividade. Uma delas, por exemplo, pode advir das experimentações com o GeoGebra, previstas quando da proposta de alinhamento das conjecturas entre os participantes: o caso de colinearidade entre os pontos A, B, C, D, E e F. Esta discussão pode ser provocada pelo formador ou surgir espontaneamente; de qualquer maneira, permite discutir condições de existência dos polígonos, retas coincidentes, entre outras noções. Esta situação específica pode ser conferida na figura 43.

Figura 43: Uma configuração para discutir condições de existência relativas à atividade 3



Fonte: elaborada pela autora

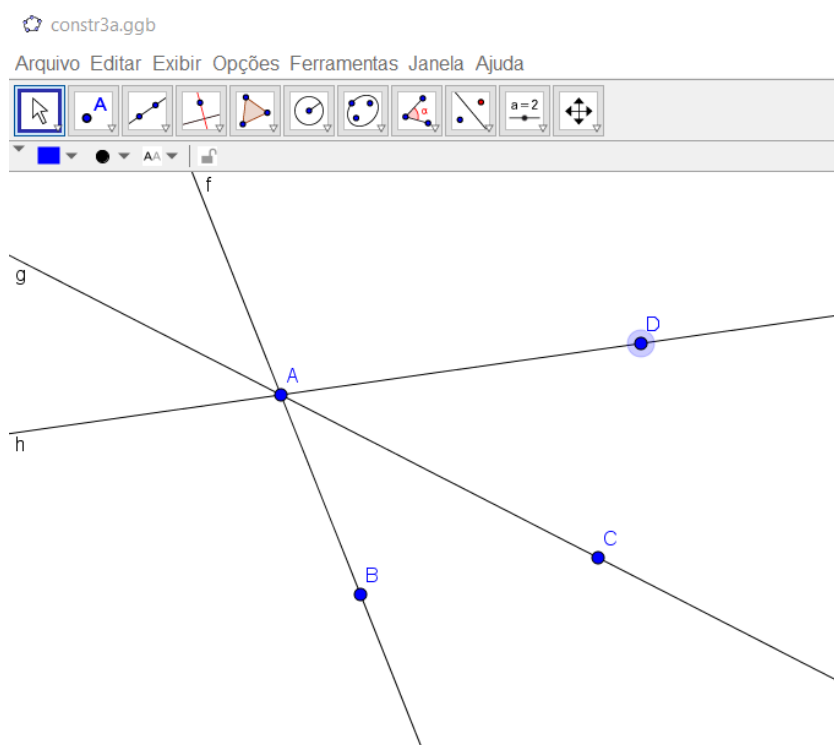
Outra discussão que pode surgir, entre as inúmeras possíveis, refere-se à noção de homotetia. Ainda aqui, se for o caso, a discussão pode ser provocada pelo formador a partir de algum questionamento adicional, relacionando esta noção com a de semelhança. Seria uma oportunidade para reforçar elementos relativos ao conhecimento pedagógico do conteúdo matemático, bem como avançar na exploração da fluência na interface do GeoGebra. Esta proposição adicional permitiria, inclusive, subsidiar uma atividade por assim dizer mais “independente” e contextualizada, na qual os participantes deveriam propor e realizar construções relativas à exemplos ou casos de semelhança de triângulos. Também poderia ser empregada para solicitar que se realizassem demonstrações, o que não é tema especificamente desta dissertação, mas que se reveste da maior importância. Neste caso, é claro, não bastaria fazer alguma construção para que a demonstração fosse feita, mas, ao contrário, a construção poderia subsidiar o discurso relativo à demonstração.

Para ilustrar de modo mais amplo o que se propõe neste ponto, descreve-se, a seguir, uma construção que permitiria discutir a relação entre semelhança de

triângulos e homotetia, explorando, também, a noção de paralelismo, na forma como foi trabalhada, a partir de estudos no PEA-MAT, em Lima (2016):

- Com o uso da ferramenta **ponto**, crie, na janela de visualização, que simula o plano, os pontos A , B , C e D , não colineares;
- Usando a ferramenta **reta**, crie a reta f , que passa pelos pontos A e B ;
- Usando a ferramenta **reta**, crie a reta g , que passa pelos pontos A e C ;
- Usando a ferramenta **reta**, crie a reta h , que passa pelos pontos A e D . A construção até este ponto pode ser vista na figura 44;

Figura 44: Construção parcial (semelhança e homotetia)



Fonte: elaborada pela autora

- Usando a ferramenta **reta**, crie a reta h , que passa pelos pontos A e D . A construção até este ponto pode ser vista na figura 44;
- Utilizando a ferramenta **controle deslizante**, clique em um ponto qualquer da janela de visualização (de preferência, em algum dos cantos da tela, apenas por questões visuais) e estabeleça uma variação de 0,1 a 10 (arbitrária) para uma variável denominada *Raio*. O controle deslizante é um dispositivo que permite executar a variação de valores numéricos para uma variável e pode ser usado, por exemplo, para que determinados objetos de uma construção tenham configurações variáveis. Quando da criação do controle deslizante, observe os elementos estabelecidos conforme mostra a figura 45;

Figura 45: Configuração do controle deslizante

Controle Deslizante

☒ Número
☐ Ângulo
☐ Inteiro

Nome: Raio

☐ Aleatório (F9)

Intervalo | Controle Deslizante | Animação

min: 0.1 max: 10 Incremento: 0.1

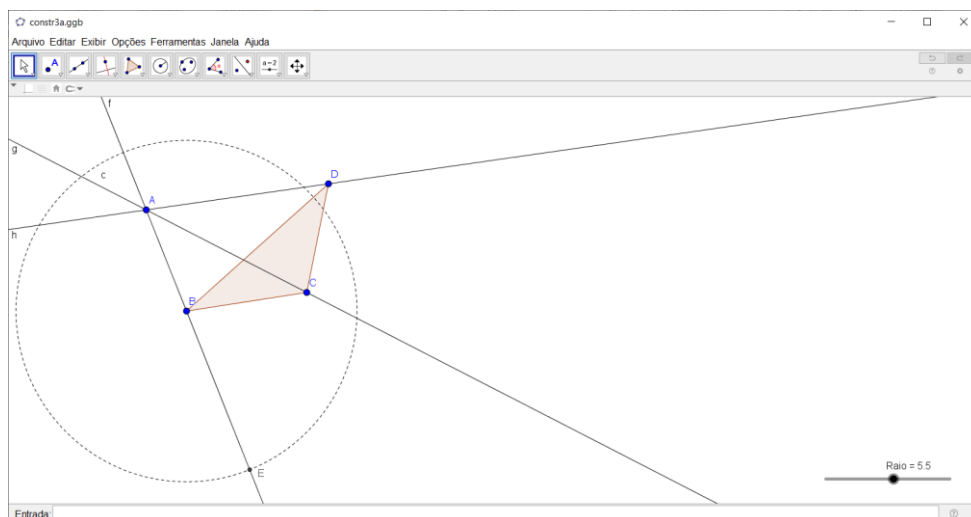
OK Cancelar

Fonte: elaborada pela autora

- Com o uso da ferramenta **círculo dados centro e raio**, crie uma circunferência c com centro em B e raio *Raio* (ou seja, tendo como raio o valor atual da variável estabelecida pelo controle deslizante, denominada *Raio*);

- Com a ferramenta **ponto**, crie o ponto E , em uma das interseções entre a circunferência c e a reta f ;
- Em seguida, com a ferramenta **polígono**, crie o triângulo BCD , clicando sucessivamente nos pontos B , C , D e B (figura 46);

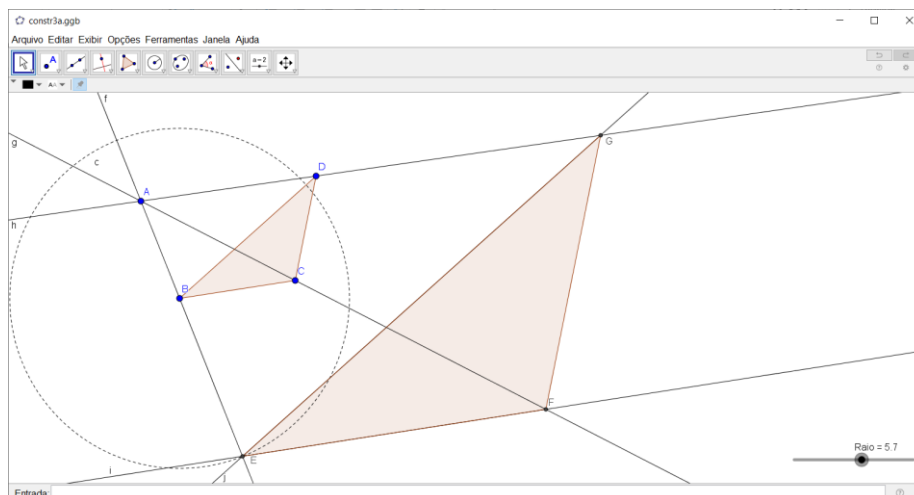
Figura 46: Construção parcial (semelhança e homotetia) – continuação



Fonte: elaborada pela autora

- Com a ferramenta **reta paralela**, crie uma reta i , paralela ao segmento $\overline{DC}$ e passando pelo ponto E ;
- Com a ferramenta **ponto**, crie o ponto F , na interseção entre as retas g e i ;
- Com a ferramenta **reta paralela**, crie uma reta j , paralela ao segmento $\overline{BD}$ e passando pelo ponto E ;
- Com a ferramenta **ponto**, crie o ponto G , na interseção entre as retas h e j ;
- Em seguida, com a ferramenta **polígono**, crie o triângulo EFG , clicando sucessivamente nos pontos E , F , G e E , o que completa a construção (figura 47).

Figura 47 Semelhança e homotetia



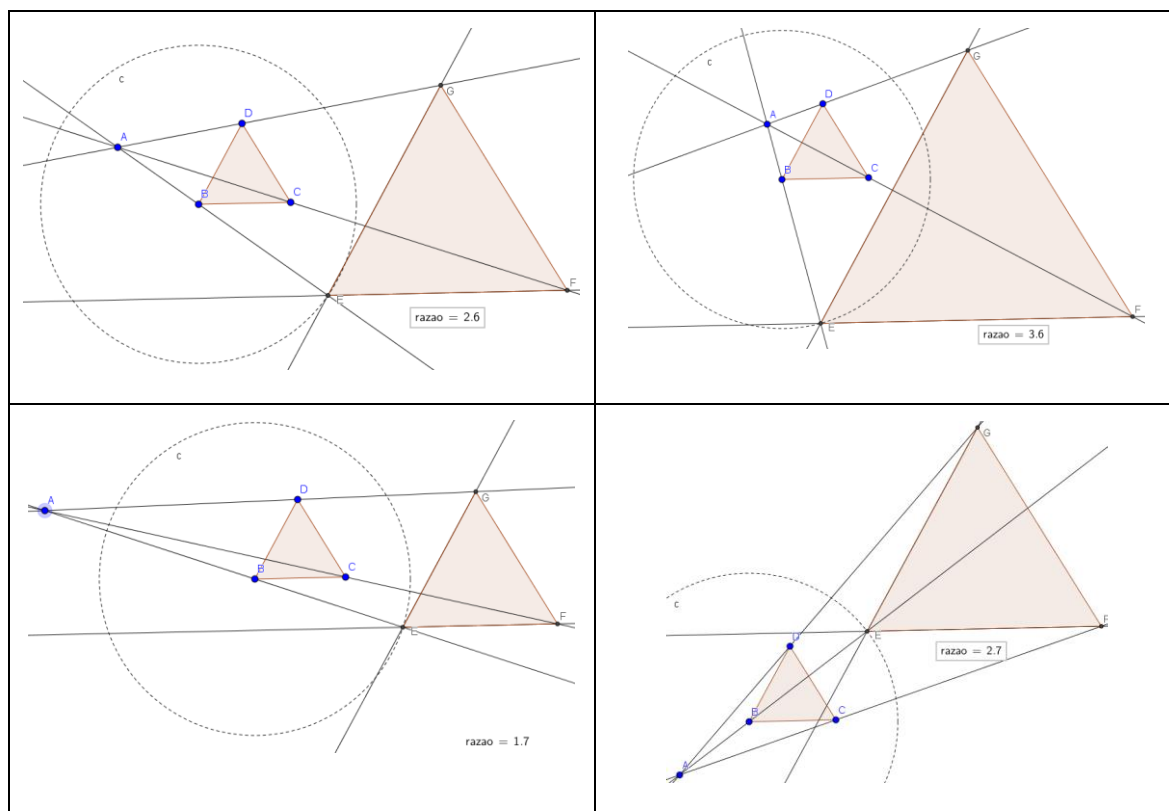
Fonte: elaborada pela autora

Considerando a construção supramencionada, pode-se afirmar os segmentos AB e AE são proporcionais, considerando a razão de semelhança. O ponto A é o centro da transformação geométrica mencionada, que preserva a congruência entre os ângulos correspondentes, a proporcionalidade dos segmentos homólogos e o paralelismo. Tipicamente, a construção, tendo por base seu centro no ponto A, determina um triângulo empregando os pontos não colineares A, B e C. As retas suporte f , g e h passam por A e por cada um dos vértices do triângulo BCD . O ponto E é marcado na interseção entre a circunferência e a reta f , ou seja, permanece na mesma reta que A; a partir daí, retas paralelas aos segmentos de BCD são traçadas e as interseções entre as retas de suporte e as retas paralelas aos segmentos determinam os pontos F (homólogo a C) e G (homólogo a D). Com as ferramentas do GeoGebra podem ser apurados os casos que garantem a semelhança entre os triângulos mencionados, considerando a congruência entre os ângulos e a proporcionalidade entre os lados, garantidas pelo paralelismo entre os segmentos. Os casos de semelhança, aliás, foram tratados nos aportes teóricos deste estudo.

A experimentação com o GeoGebra, neste caso, guarda a possibilidade de permitir diferentes configurações para os polígonos e demais elementos geométricos envolvidos. Por exemplo, ao manipular o ponto A, o aprendiz realiza modificações de naturezas visual, posicional e mereológica em relação ao triângulo EFG , cuja área pode ser reconfigurada com a intervenção no ponto mencionado, enquanto o triângulo BCD sofre apenas modificações visuais e

posicionais (DUVAL, 2012); a razão de homotetia também sofre alterações, que impactam na área no triângulo EFG . A figura 48 ilustra algumas modificações e experimentações possíveis, com base na manipulação do ponto A .

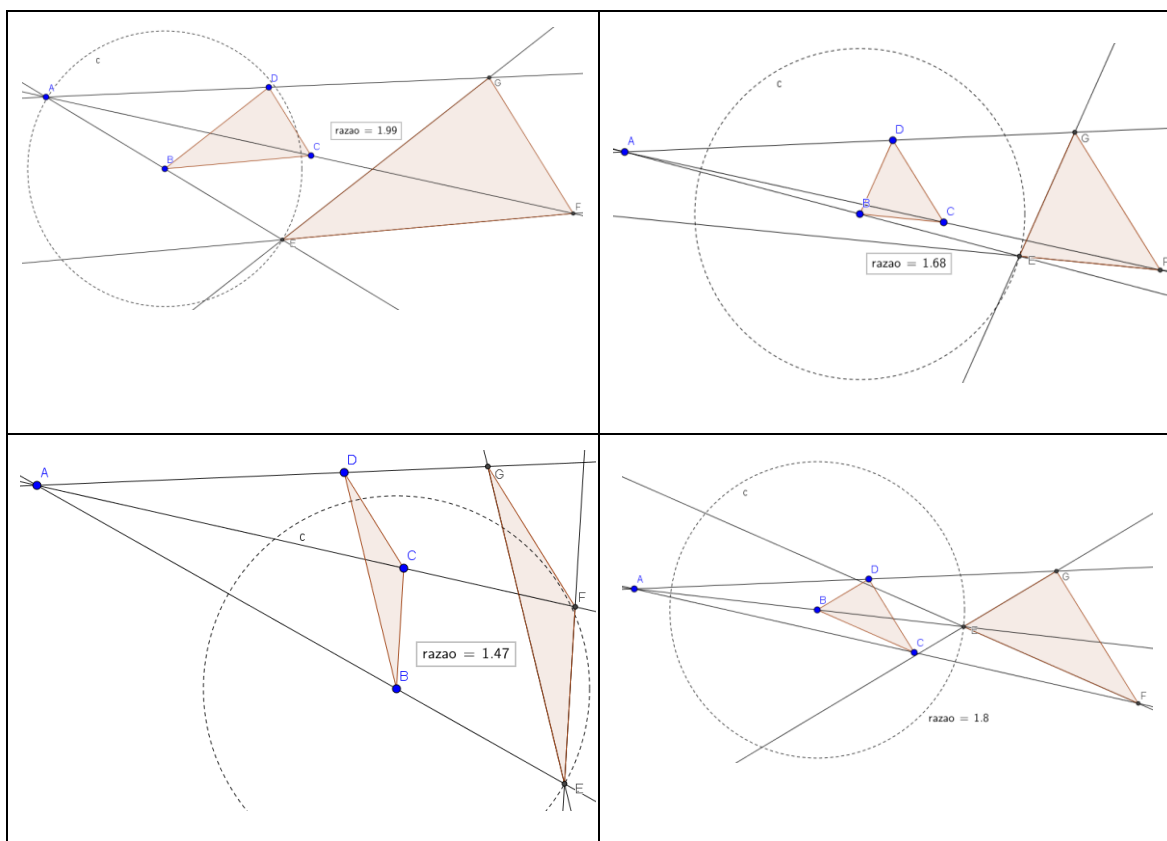
Figura 48: Possíveis modificações na configuração da construção a partir da manipulação de A



Fonte: elaborada pela autora

A manipulação do ponto B leva a modificações visuais, posicionais e mereológicas nos triângulos BCD e EFG , como se ilustra na figura 49. Deve-se notar que, na experimentação tendo como base o ponto B , as modificações mencionadas incidem sobre a área dos dois triângulos, alterando, igualmente, a razão de homotetia. Entretanto, as posições dos pontos A , C e D permanecem inalteradas, enquanto as posições dos pontos E , F e G são modificadas.

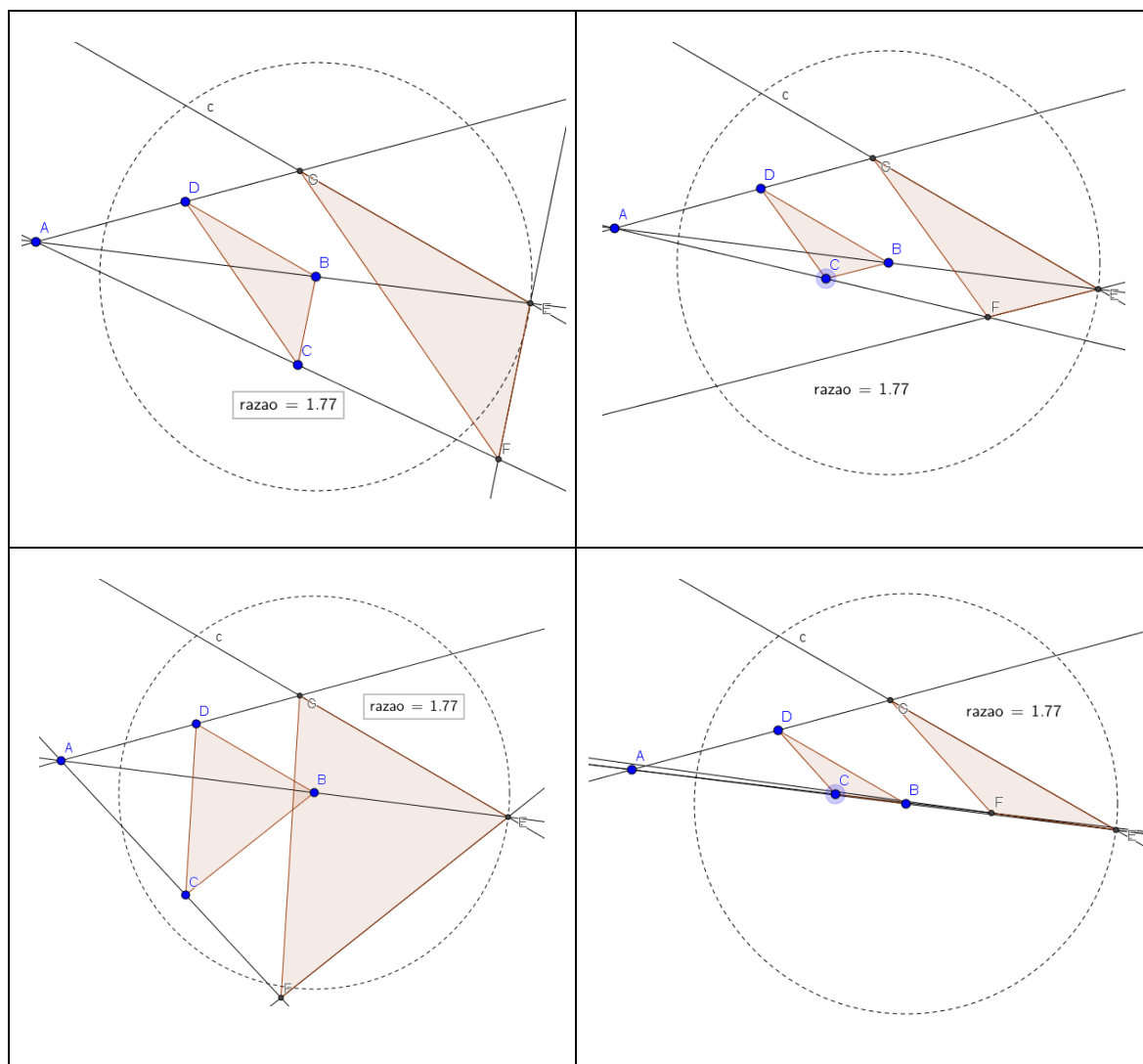
Figura 49: Possíveis modificações na configuração da construção a partir da manipulação de B



Fonte: elaborada pela autora

A manipulação do ponto C leva a modificações visuais, posicionais e mereológicas nos triângulos BCD e EFG , como se ilustra na figura 50. Deve-se notar que, na experimentação tendo como base o ponto C, as modificações mencionadas incidem sobre a área dos dois triângulos, mas não alteram a razão de homotetia, nem as posições dos pontos A, B, D, E e G. De outra maneira, a posição do ponto F é modificada, já que ele é homólogo a C. As modificações relativas ao ponto D guardam bastante similitude, sendo que as alterações se dão em relação às áreas dos dois triângulos e à posição do ponto G, homólogo a D.

Figura 50: Possíveis modificações na configuração da construção a partir da manipulação de C

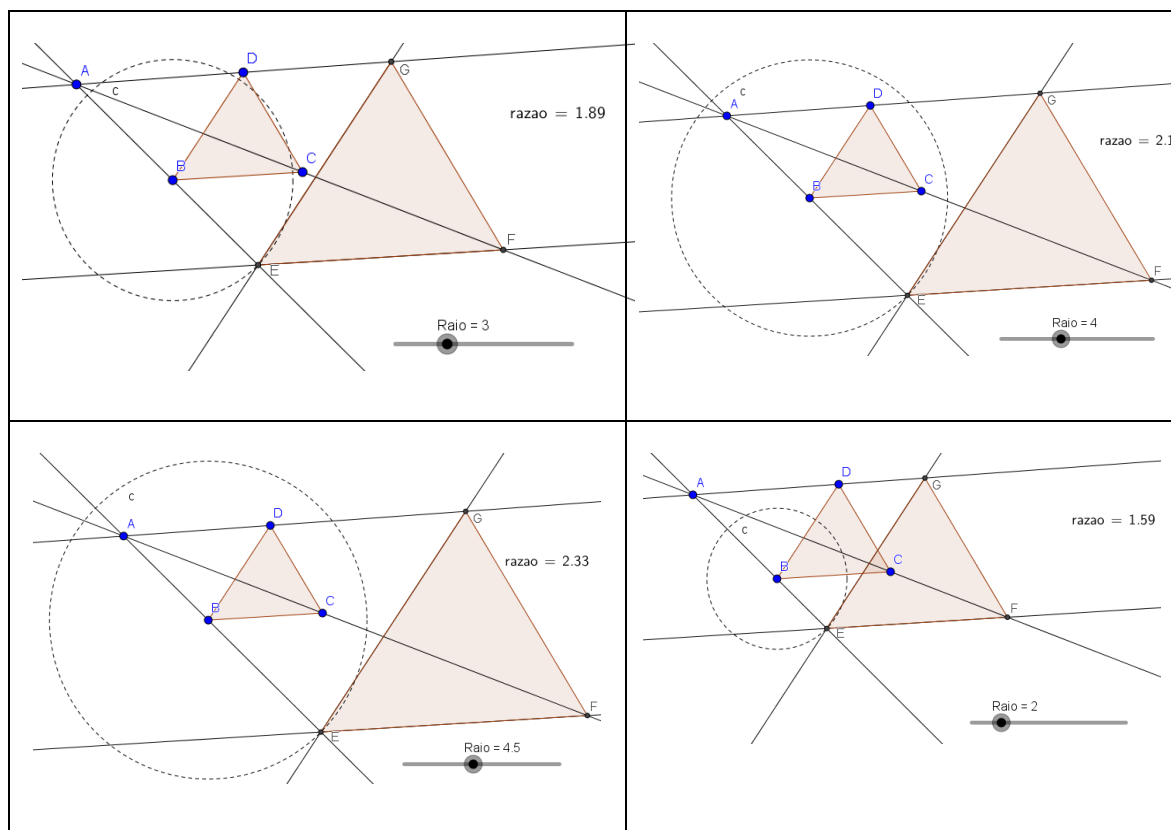


Fonte: elaborada pela autora

Considerando que a figura anterior é um exemplo de uma representação, além das modificações possíveis com base nos quatro pontos iniciais da construção, pode-se, alternativamente, manipular o controle deslizando *Raio*, que representa uma variável cujo valor vai de 0,1 a 10, que corresponde ao raio da circunferência *c*, cuja medida representa a distância, na reta suporte, entre o ponto *B* e seu homólogo *E*. A modificação do valor de *Raio* implica em modificações de naturezas visual, posicional e mereológica em relação ao triângulo *EFG*. Ao alterar o valor da variável mencionada, o raio da circunferência concorre para que os triângulos da construção estejam mais próximos ou distantes, em termos visuais. Como consequência, alteram-se as posições dos pontos *E*, *F* e *G*, além da área do triângulo que tem estes pontos como vértices. A razão de homotetia é, igualmente,

modificada. A figura 51 apresenta algumas configurações possíveis a partir de distintas medidas do raio de c , determinadas pelo controle deslizante.

Figura 51: Possíveis modificações na configuração a partir da manipulação de Raio



Fonte: elaborada pela autora

Do ponto de vista da exploração do potencial interativo da interface, a atividade alternativa aqui apresentada abre algumas possibilidades de integração do conhecimento matemático a partir da exploração do dinamismo proporcionado pelo *software*. O participante deve alinhar o conhecimento matemático necessário à resolução de eventuais problemas que levem à construção em tela com a fluência necessária para localizar e empregar corretamente as ferramentas adequadas (OLIVEIRA, 2018). Cabe à estratégia didática, devidamente adaptada aos distintos contextos de ensino ou de aprendizagem, a elaboração de problemas que permitam explorar as propriedades e noções matemáticas envolvidas, bem como o uso de instruções durante a elaboração das representações evidenciadas aqui ou apenas nos momentos destinados à institucionalização. A partir das conjecturas elaboradas pelos aprendizes, podem ser exploradas, por meio de experimentações, questões relativas à congruência, proporcionalidade, paralelismo, transformações

geométricas e outras noções ligadas à semelhança de triângulos. Tais questões podem permitir uma ressignificação do conhecimento relativo a estas noções, no sentido de que as mesmas passem a ser vistas a partir da forma como podem se articular para a resolução de problemas, no lugar de servirem à apresentação de um conceito, por assim dizer, isolado e proposto tomando por base apenas a exposição de definições e de exemplos prototípicos. A aproximação deste tipo de estratégia pode concorrer – e isto afirmamos com base nos aportes teóricos e nas propostas de atividades – para o afastamento de abordagens fragmentadas, que têm caracterizado, em grande parte, o ensino de geometria na escola básica.

Realizadas as análises, levando em consideração os aportes teóricos desta investigação, passa-se, a seguir, para as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção deste trabalho de pesquisa partiu de alguns pressupostos, de ideias que se converteram em um tema, por sua vez gerador de uma problemática, de uma questão e de objetivos. Nitidamente, a definição de um problema de pesquisa significativo fez com que as diversas etapas fluíssem, ainda que não prescindindo do esforço de estudo e articulação das propostas. É neste sentido que argumenta Oliveira (2019), quando aponta que “é o correto dimensionamento do problema que encaminha a compreensão acerca dos demais detalhes da pesquisa, desde o levantamento da bibliografia necessária, passando pela definição dos marcos teóricos e elementos metodológicos, até a construção das análises e das conclusões” (p. 23).

Assim, este estudo procurou elementos didáticos, principalmente, para propor atividades que servissem a iniciativas de formação de professores, tendo como tema matemático a semelhança de triângulos no âmbito da geometria plana, a partir de estratégias concebidas com o uso de tecnologia digitais. De maneira mais específica, a investigação que apresentamos, sob a forma de reflexões teóricas, apoiou-se em uma questão norteadora, *“quais contribuições para a ressignificação dos conhecimentos acerca de semelhança de triângulos podem advir a partir da construção de estratégias didáticas com o uso de tecnologias digitais em uma proposta teórica ligada à formação de professores e à sua prática?”*.

A inquietação que provocou esta iniciativa teve por objetivo desenvolver uma proposta didática que poderia ser trabalhada pelos professores de ensino fundamental e médio com seus alunos, bem como levar os docentes à reflexão sobre a possibilidade de construção de saberes relativos ao tema matemático em tela a partir do emprego de tecnologias. As atividades, no entanto, não foram apresentadas de forma fechada, como se uma sequência fosse criada de forma rígida para ser oferecida de uma única maneira para os grupos de professores que viessem a participar de certames de formação. Pelo contrário, foram criadas como ensaios, construções abertas que pretenderam discutir, sob o quadro teórico eleito, conhecimentos relativos à geometria plana que são essenciais ao repertório de

professores que ensinam matemática na escola básica. A intenção é que as estratégias propostas permitam que, nas formações, os professores venham a ressignificar seus conhecimentos acerca do tema matemático “semelhança de triângulos”, o que significa, segundo já esclarecemos, *atribuir um significado mais adequado, em ligação com conceitos formais* ligados ao estatuto formal do conhecimento matemático. O sentido de ressignificar, então, de acordo com Oliveira (2018), pede que se desenvolva uma compreensão abrangente, por parte do professor, acerca dos conteúdos que deverá ensinar, incluindo as conexões entre os temas muitas vezes vistos como disjuntos, ou, pelo menos, assim abordados em sala de aula, como paralelismo, semelhança de triângulos, teorema de Tales, homotetia. Não é demais lembrar que, para autores como Almouloud, Manrique, et al., (2004) e Maciel (2004), o ensino da geometria, tanto no âmbito escolar quanto na formação de professores, é marcado pela abordagem fragmentada pela qual é levado a efeito. Para apoiar o que indicamos aqui, ousamos repetir que os processos de ressignificação compreendem uma revisão sobre o saber inicialmente adquirido, de forma a ampliá-lo e até mesmo reconstruir pontos em relação aos quais se apresente impreciso ou errôneo. Compreende, também, no caso do professor, o alcance sobre a dimensão didática do conhecimento em discussão.

Ao mesmo tempo, nosso estudo buscou identificar qual a contribuição de estratégias didáticas para o ensino de temas de geometria plana (semelhança de triângulos, em particular), considerando o uso de tecnologias digitais. Imbricado com esse objetivo, o estudo trouxe uma proposta de atividades, do ponto de vista do trabalho didático, para a ressignificação da noção de semelhança, direcionada para a formação de professores da educação básica.

Tendo estas perspectivas no horizonte, nos estudos preliminares, buscamos uma aproximação histórica do tema em Euclides (2009) e Roque (2012), o que nos permitiu identificar as proposições II, IV, V, VI, VIII, IX e XVI presentes no livro VI de “Os Elementos”, cujos postulados e teoremas tratam da noção de semelhança. Sob uma perspectiva didática, procuramos empreender um estudo dos objetos matemáticos, tendo como referência os trabalhos de Papa Neto (2017), Costa et. al (2012), Machado (2012), Pinho (2010), Peneireiro e Silva (2008) e

Candido e Galvão (2004), de modo a construir uma discussão em relação à noção de semelhança. Dessa discussão, emergiram as noções de triângulo, de congruência de triângulos, de paralelismo e, finalmente, a noção de semelhança entre triângulos.

Algumas considerações a respeito da noção de semelhança também foram apresentadas com base nas propostas curriculares examinadas (BRASIL, 1998; SÃO PAULO, 2010 e BRASIL, 2018). Nelas, identificamos elementos e sugestões para o ensino da geometria na educação básica, que recomendam para propostas de ensino que levem o aluno a perceber e valorizar sua presença no mundo ao seu redor, o que levaria à criação de propostas de ensino que considerassem a integração entre os diversos conteúdos a partir de abordagens que valorizassem a construção do conhecimento por meio de problemas significativos, que permitam explorar as propriedades matemáticas dos objetos envolvidos de forma abrangente e dinâmica, como se observou em estudos como os de Maciel (2004) e o de Santos (2012), trazidos em nossa revisão. Este processo de recuperação da literatura pertinente também permitiu mencionar os trabalhos de Ramiro (2014), Lima (2016) e Leite (2017), os quais trouxeram discussões relacionadas ao ensino de objetos da geometria, sobretudo em relação ao uso de tecnologias digitais como elementos de estratégias didáticas. Mais ainda, as possibilidades de formação de professores em relação ao ensino de geometria puderam ser revisitadas, especificamente quando em ligação com noções de semelhança de figuras planas a partir do uso de tecnologias digitais, como ocorreu no exame dos escritos de Braga (2016) e Ramassotti (2015).

A partir dessas perspectivas, foi possível constituir um *framework* à título de marco teórico, de modo a buscar meios para dar algum direcionamento à questão desta pesquisa. Este quadro foi composto, essencialmente, pelas asserções de Duval (2012) acerca das apreensões figurais e suas influências no processo de aprendizagem de geometria. Além disso, em relação à formação de professores, foram recuperados os estudos de Shulman (1986; 1987), que evidenciaram habilidades/competências relativas ao processo de ensino, especialmente considerando o conteúdo a ensinar – matemático, no caso – e as questões didáticas envolvidas, que, nesse sentido, representam parte importante da

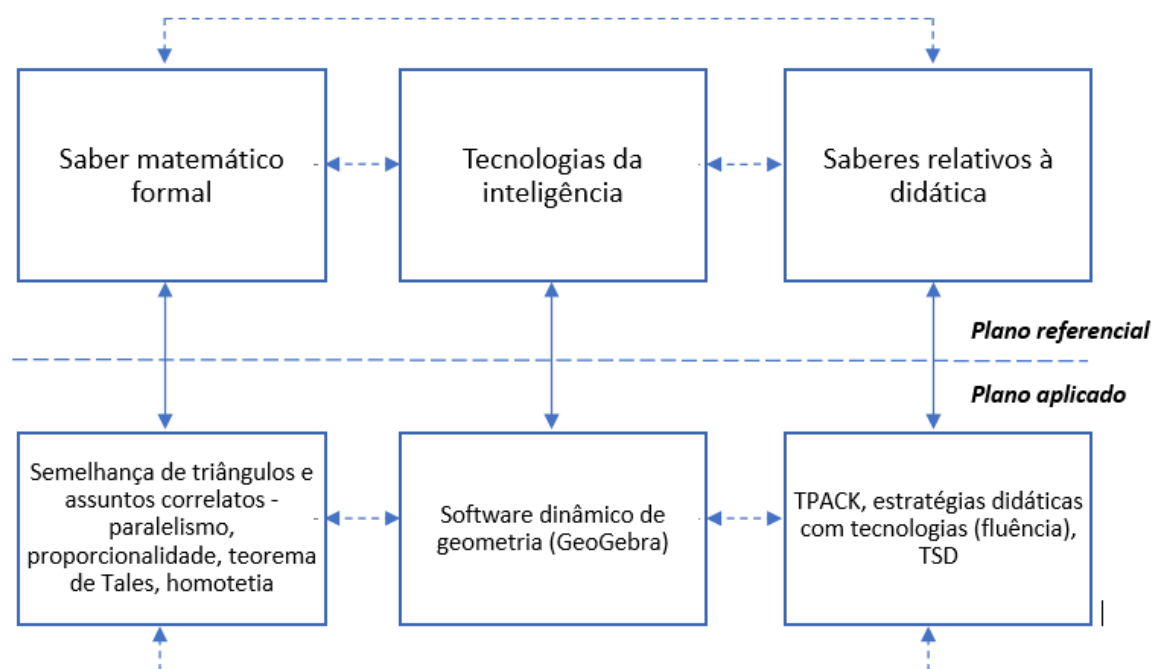
elaboração do processo de ressignificação sobre a noção de semelhança de triângulos. Neste mesmo sentido, com acréscimo de constructos teóricos ligados às tecnologias digitais, outro importante elemento de intervenção na formação dos professores foi trazido a partir do texto de Mishra e Koehler (2006), autores que consideram o conhecimento integrado das dimensões didática, tecnológica e do conteúdo como um elemento essencial para o desenvolvimento de boas práticas de ensino. Desses autores, recorreremos à estrutura do TPACK, completada, no âmbito da Educação Matemática, a partir de Oliveira (2018), pela noção de fluência em interfaces digitais.

Para que seja possível analisar, ainda que parcialmente, uma possível aplicação da proposta, a partir de reflexões a respeito das dialéticas que constituem uma situação didática, recorreremos à Teoria das Situações Didática, tendo, como aporte metodológico correlato, alguns pressupostos da Engenharia Didática, mais especificamente a consideração das análises preliminares e das análises *a priori* das atividades, uma vez que as demais fases, o experimento e as análises *a posteriori*/validação, pressupõem a aplicação da proposta.

A partir deste constructo, apresentamos a proposta de três atividades, além de alguns acréscimos no âmbito de cada uma delas (outras atividades), que se mostraram importantes no âmbito da discussão. Essencialmente, no contexto de cada uma delas, foram discutidas questões didáticas a partir da exploração das construções sugeridas, realizadas por meio do *software* GeoGebra, explorando três características essenciais, quais sejam a experimentação intensiva (possibilidade de clicar e arrastar, alterar configurações, mudar a posição dos objetos e suas dimensões), a visualização (observação dos efeitos da manipulação da construção sobre as propriedades matemáticas envolvidas) e o dinamismo da interface (dispositivo que permite implementar a experimentação, ou seja, cria condições para múltiplas e variadas alterações, que se refletem “imediatamente” nas estruturas em tela). A partir delas, foi possível cogitar sobre como poderiam se dar as apreensões, do ponto de vista de Duval (2012), quando se observassem e se discutissem as diversas interações entre noções como as de paralelismo, proporcionalidade e semelhança, por exemplo. Uma forma de indicar como as análises foram baseadas remete ao constructo de planos referencial e aplicado,

proposto por Oliveira (2018), e que visa indicar a relação como teoria e aplicações se relacionam. A adaptação desta ideia pode ser vista na figura 51.

Figura 52: Articulações entre o saber matemático formal, as tecnologias e a didática



Fonte: a autora (adaptado de OLIVEIRA, 2018, p. 76)

Os três elementos da figura 51 relativos ao plano referencial são básicos e inalteráveis, considerando a proposta de Oliveira (2018). Restava saber como seriam relacionados (com que elementos) no plano aplicado, o que sempre depende de cada iniciativa de pesquisa. Em nosso caso, o saber matemático formal de referência ficou por conta de elementos da geometria euclidiana plana, mais especificamente de tópicos como semelhança de triângulos, paralelismo, proporcionalidade, teorema de Tales e homotetia. De fato, as atividades propostas tinham por base proporcionar reflexões cuja referência matemática repousava sobre estes temas. Entretanto, não há uma visão isolada dos elementos constantes da figura 51; pelo contrário, existem múltiplas interações entre os mesmos, de modo que a referência matemática, por assim dizer, interage intensivamente com outros dois aspectos do modelo, o *software* dinâmico de geometria (GeoGebra) e as estratégias didáticas, estas ligadas ao TPACK, à ideia de fluência nos dispositivos digitais e à TSD.

O modelo de articulações de Oliveira (2018) esteve presente nas construções propostas e nas análises realizadas, o que permitiu criar asserções não prescritivas, ou seja, reflexões críticas abertas, de modo que cada formador que tome das mesmas possa adaptar as ideias assim levantadas, com base nos pressupostos que as sustentaram, com as variações típicas de cada ambiente de formação, o que inclui as condições específicas dos professores em formação, os recursos disponíveis, o tempo e o tipo de interações. Este seja, talvez, o principal contributo no sentido de lidar com a questão de pesquisa que alinhamos no início do texto.

Este estudo, então, procurou contribuir desta forma (reflexões teóricas, análises conceituais) para o avanço do conhecimento em educação matemática em cenários que envolvem tecnologias digitais na formação de professores. Evidentemente, uma série de lacunas precisam ser preenchidas por estudos futuros. Tais diferenças podem ser diminuídas a partir de estudos experimentais e de aplicação, nos quais se submetam atividades inspiradas nas propostas aqui discutidas a grupos de professores em formação. De qualquer forma, resta, aqui, a convicção de que foi possível, por meio deste trabalho, trazer contribuições que podem ser examinadas por aqueles que se interessam pelo crescimento e a melhoria da educação matemática em nosso país.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. et al. A geometria no ensino fundamental: Reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 16, Set/Out/Nov/Dez 2004.

ARTIGUE, M. **Ingengería didáctica**. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente ® & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995. p. 33-60.

BORBA, M. C. **Educação Matemática a Distância Online: Balanço e Perspectivas**. XII CIAEM-IACME. Recife, Brasil: [s.n.]. 2011. p. 9.

BORBA, M. D. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed; 2. reimp. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016. 82 p.

BRAGA, L.S. **Tecnologias digitais na Educação Básica: um retrato de aspectos evidenciados por professores de matemática em formação continuada**. Dissertação de mestrado. UNESP. Rio Claro, 2016.

BRASIL, M. D. E. **BASE CURRICULAR NACIONAL COMUM CURRICULAR**. Ministério da Educação. Brasília, p. 470. 2017.

BRASIL, S. D. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática: Ensino de quinta a oitava séries**. Brasília: MEC/ SEF, 1998. 148 p.

BRASIL, S. D. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Ensino de primeira a quarta série**. MEC/SEF. Brasília, p. 142. 1998.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques 1970-1990**. Tradução de Nicolas Balacheff; Martin Cooper, et al. New York/ Boston/ Dordrecht/ London/ Moscow: [s.n.], v. 19, 1997. 327 p.

CANDIDO, C.C.; GALVÃO, M. E. E. L. **Matemática: Geometria Plana - Módulo 3**. In: BROLEZZI, A.C., SALUM, E. M, MONTEIRO, M. S. (Org). **Módulos do Pro-Universitário**. V. 6. 300 p. Pró-Reitoria de Graduação da USP. São Paulo, 2004.

CARVALHO, F. J. C. et al. **Economia monetária e financeira: teoria e política**. 2. ed. rev. e atual. Rio de Janeiro: Elsevier: Campus, 2007.

COSTA, D. M. B.; TEIXEIRA, J. L.; SIQUEIRA, P. H.; SOUZA, L. V. **Elementos de Geometria: Geometria Plana e Espacial**. 3. ed. Curitiba. UFPR, 2012.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Moretti, M. T. **Revista Eletrônica de Educação**

Matemática – Revemat. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 1, p.118-138, 2012.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. rev. ed. Campinas, S.P.: Autores Associados, 2012.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância.** Campinas, SP: Papirus, 2003.

KLAUSMEIER, Herbert J. **Manual de psicologia educacional: aprendizagem e capacidades humanas.** HERBRA, 1977.

LEITE, R. D. S. **Formação de professores de Matemática e Tecnologias digitais: um estudo sobre o Teorema de Tales.** Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). São Paulo. 2017.

LÉVY, P. **Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da Informática.** Tradução de Carlos Irineu da Costa. 2ª. ed. São Paulo: Editora 34, 2010. 208 p.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança.** Rio de Janeiro: SBM, 1991. 98 p.

LIMA, G. L.; SILVA, M. J. F. Conhecimentos docentes para o ensino de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática. Teaching knowledge for the lecturing on Geometry in a bachelor's degree course in mathematics. **VIDYA**, Santa Maria, v. 35, p. 159-177, jul/dez 2015, n.2.

LIMA, N. S. M. **Investigações em Geometrias planas com Interfaces Digitais: um estudo sobre homotetia.** Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). São Paulo. 2016.

LORENZATO, S. Por que ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista - SBEM**, Campinas, v. 3, n. 4, p. 1-64, 1995.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista - SBEM**, Blumenau, ano III, n. 4, p. 3-13, 1995.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de geometria plana.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

MACIEL, A. C. **O conceito de semelhança: uma proposta de ensino.** Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Paulo (PUC/SP). 2004.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record**, Michigan, v. 108, n. 6, p. 1017-1054, June 2006. ISSN 0161-4681.

NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisas em administração**, São Paulo, v. 1, n.3, p. 2, 1996.

OLIVEIRA, A. M. D.; SILVA, A. **Biblioteca da Matemática Moderna**. 1ª. ed. São Paulo: LISA - Livros Irradianes S.A., v. I, 1968.

OLIVEIRA, G. P. Sobre tecnologias e educação matemática - fluência, convergência e o que isto tem a ver com aquilo. In: (ORG), G. P. O. **Educação matemática: epistemologia, didática e tecnologia**. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

OLIVEIRA, G. P.; GONÇALVES, M. D.; MARQUETTI, C. Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa. III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil**, São Paulo, v. 17, n.3, p. 472-489, 2015.

OLIVEIRA, G. P.; MARCELINO, S. B. Adquirir fluência e pensar com tecnologias em Educação Matemática: uma proposta com o software superlogo. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 17, p. 816-842, 2015.

OLIVEIRA, G. P.; OLIVEIRA, M. L. Generalizações de padrões e tecnologias digitais: aportes sobre uma investigação em andamento. **Produção Discente Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n.1, p. 98-108, 2017.

PAPA NETO, A. **Geometria Plana e construções geométricas**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, n.1, v. 1, p. 7-17, março 1993.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender geometria? **Anais do VII encontro Paulista de Educação Matemática**, São Paulo, 2004.

PENEIREIRO, J. B.; SILVA, M, F. **Geometria Plana e Desenho Geométrico**. Caderno Didático. Centro de Ciências Naturais e Exatas. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2008.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. 2 ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010. 300 p.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. **Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono**. Zetetiké, Campinas, v. 17, n. 31, jan/jun, 2009.

RAMASSOTTI, L. C. **A geometria euclidiana na licenciatura em matemática do ponto de vista de professores formadores**. Dissertação de mestrado. UNESP. Rio Claro, 2015.

RAMIRO, L. **Situações didáticas no ensino de geometria com o aplicativo GeoGebra**. Dissertação de mestrado. UNESP. São José do Rio Preto, 2014.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, M. T. **Semelhança de triângulos e Geometria Dinâmica – o trabalho em grupo na aprendizagem de conceitos**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Paulo (PUC/SP). 2012.

SÃO PAULO, S. D. E. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. 1. ed. [S.l.]: Atual, 2010. 72 p.

SHULMAN, L. Knowledge and Teaching: foundations of the new reform. **Harvard Education Review**, n.1, v. 57, p. 1-22, 1987