PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

CAROLINE RODRIGUES DA SILVA FONDA

ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE MEDIDA DE ÁREA DE TRIÂNGULOS: o trabalho da técnica

MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2020

CAROLINE RODRIGUES DA SILVA FONDA

ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE MEDIDA DE ÁREA DE TRIÂNGULOS: O trabalho da técnica

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

PUC-SP
2020

e-mail: crs.93@hotmail.com

Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica para Teses e Dissertações com dados fornecidos pelo autor

FONDA, Caroline Rodrigues da Silva
ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE MEDIDA DE ÁREA DE TRIÂNGULOS / CarolineRodrigues da Silva FONDA. -- São Paulo: [s.n.], 2020.
123p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado em Educação:Matemática)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação:Matemática, 2020.

1. . I. Silva, Maria José Ferreira da. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação:Matemática. III. Título.

CDD

CAROLINE RODRIGUES DA SILVA FONDA

ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE MEDIDA DE ÁREA DE TRIÂNGULOS: O trabalho da técnica

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

____
Profª Drª Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP

____
Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira – PUC - SP

____
Prof. Dr. Adilson de Morais
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Àqueles que sempre foram o meu porto seguro, minha fonte de inspiração e que merecem todo o meu amor: meus pais **Antonio** e **Joelita**.

*Agradeço à **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior** (CAPES) pela Bolsa de Estudos concedida sob o processo nº 88887.148926/2017-00, o que permitiu o desenvolvimento desta pesquisa.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus que permitiu a confecção deste Mestrado, provando a todo momento seu infinito amor por mim! Obrigada por renovar a minha fé e me sustentar em cada passo desta trajetória.

Agradeço à Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva por suas orientações, contribuições e críticas que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Sua amizade, confiança e paciência durante estes anos foram essenciais para o meu crescimento pessoal e profissional, além de não me deixar desistir! Meus sinceros agradecimentos e admiração!

Aos componentes da Banca Examinadora, meus agradecimentos por me auxiliarem com importantes colaborações para a melhoria deste estudo. Professor Doutor Adilson de Morais, eu agradeço por me acompanhar e inspirar desde a minha graduação, e aceitar fazer parte de mais uma etapa da minha vida acadêmica. Professor Doutor Gerson Pastre de Oliveira, obrigada por suas valiosas contribuições e suporte durante toda a caminhada deste Mestrado.

Meus agradecimentos ao grupo de pesquisa “Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática – PEAMAT”, pelos estudos e diversas reflexões realizados, assim como a todos os professores e demais funcionários do curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da PUC-SP, que foram essenciais para o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos colegas dessa trajetória, Jane, Viviane, Eduardo, Armando, Anderson, Suzane e tantos outros que fizeram parte desse percurso, muito obrigada por dividirem as angústias e pequenas felicidades! Vocês foram essenciais nessa etapa!

Agradeço também à minha querida professora e colega Ilza de Oliveira, que contribuiu para este trabalho ao me disponibilizar alguns livros essenciais para esta pesquisa. Obrigada por ser uma inspiração desde os meus tempos de aluna no ensino básico!

Aos meus queridos amigos Bianca Aparecida Oliveira Vaudano, Brian Lee Mayer e Daniel Duarte da Silva deixo o meu “Muito obrigada!” pela fiel amizade desde a graduação! Obrigada por não me deixarem perder minha essência, por acreditarem em mim o tempo todo e por estarem presentes em cada fase da minha vida! Eu amo vocês!

Agradeço à minha amada e querida família por todo amor, incentivo, suporte e carinho dedicados a mim! Sei que não teria chegado tão longe se não tivesse vocês para me apoiar. Joelita, obrigada por ser meu exemplo de mulher e uma mãe tão amorosa! Antonio, obrigada por ter me inspirado a ser professora, a gostar tanto de matemática desde pequena e por ser um excelente pai! Christopher e Jefferson, saibam que eu sempre os levarei em meu coração, sou grata por tê-los como irmãos. Eu amo vocês!

Ao meu amado marido, Michel Fonda, eu agradeço por seu amor, paciência e compreensão. Obrigada por seu companheirismo e por dividir comigo cada pequena vitória até aqui, pois sei que sou melhor a cada dia por ter você ao meu lado!

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal e Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos, que permitiu financiamento para o desenvolvimento dessa pesquisa científica.

“Milagres acontecem quando a gente vai à luta!”

Sérgio Vaz

FONDA, Caroline Rodrigues da Silva. **ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE MEDIDA DE ÁREA DE TRIÂNGULOS: O trabalho da técnica**. 2020. 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020.

RESUMO

Este estudo objetiva apresentar uma proposta de praxeologias didáticas para o ensino de área de triângulos, tendo a Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico. Para a constituição do nosso *corpus* de pesquisa foi realizado um levantamento da área de triângulo pela história, desde a época dos egípcios, a fim de detectarmos praxeologias matemáticas que tivessem como tipo de tarefa “calcular a medida da área de triângulos”. Na busca de respostas para a seguinte questão de pesquisa: “É possível construir organizações didáticas que permitam o trabalho com diferentes técnicas para o ensino do cálculo da medida de área de triângulos nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio?”, examinamos documentos oficiais e livros didáticos para identificarmos como a área de triângulos está posta em nossa educação básica. Como resultados, apontamos a carência da diversidade do ensino de métodos para se obter a medida da área de triângulos, além de uma abordagem que favoreça a aprendizagem da área enquanto grandeza.

Palavras-chave: Área de triângulos. Grandeza. Praxeologias matemáticas. Praxeologias didáticas. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This study aims to present a proposal of didactic praxeologies for teaching area of triangles, using the Anthropological Theory of Didactics as a theoretical framework. For the constitution of our research *corpus*, a survey of the área of triangles by history, from the time of the Egyptians, was carried out, in order to detect mathematical praxeologies whose task was to "calculate the measure of the area of triangles". In search of answers to the following research question: “Is it possible to build didactic organizations that allow working with different techniques for teaching the calculation of the measure of the area of triangles in the final years of elementary school and in high school?”, We examined official documents and textbooks to identify how the area of triangles is placed in our basic education. As a result, we point out the lack of diversity in teaching methods to obtain the measurement of the area of triangles, in addition to an approach that favors the learning of the area as a greatness.

Keywords: Area of triangles. Greatness. Mathematical praxeologies. Didactic praxeologies. Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O conceito de área é um dos mais significantes durante a aprendizagem de Matemática. Segundo Lima e Bellemain (2010), diversas recomendações curriculares, e também os livros didáticos, têm valorizado o ensino de grandezas e medidas, sendo sua importância destacada na formação do cidadão, ou no próprio estudo de assuntos matemáticos, por ser um ponto de confluência dos grandes eixos temáticos dos números, da geometria, das grandezas e da álgebra. Mesmo assim, diferentes avaliações, realizadas no Brasil e em outros países, nos mostram que o desempenho dos alunos é insatisfatório quando se trata de questões relativas a este assunto.

Um exemplo destas avaliações é o PISA[1] 2015, que ilustra os resultados alcançados pelos alunos, já que os maiores índices de erros e dificuldades são apresentados nos itens que envolvem grandezas e medidas geométricas. Tal avaliação objetiva verificar a capacidade dos alunos de solucionar problemas, e é composta por quatro tipos de conteúdo (“mudanças e relações”, “quantidade”, “espaço e forma” e “incerteza e dados”). A categoria com maior nível de dificuldade foi “Espaço e forma”, apresentando o maior valor de Delta[2] em quase todos os estados brasileiros e demais países que participaram desta avaliação. Segundo o documento Brasil no PISA 2015 (BRASIL, 2016, p.156), esta categoria “envolve uma ampla gama de propriedades encontradas em vários lugares no mundo físico e visual; trabalha-se, por exemplo, com as propriedades das figuras geométricas como perímetro ou área, as características das figuras espaciais etc.”

Em relação ao letramento matemático, definido pelo PISA 2015, como a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática, a categoria “formular” teve o maior índice de dificuldade. Ainda de acordo com o documento Brasil no PISA 2015 (2016, p. 158), estes resultados nos mostram que os estudantes apresentam dificuldades em “identificar oportunidades para usar a

[1] O *Programme for International Student Assessment*(PISA) –Programa Internacional de Avaliação de Estudantes –é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados a partir do 7º ano do ensino fundamental na faixa etária dos 15 anos.

[2] O índice Delta é uma medida transformada do percentual de acerto dos itens utilizada pelo *Educational Testing Service* (ETS) para o nível de dificuldade. (MATSUMOTO; VAN DE VIJVER, 2010 apud BRASIL, 2016, p.153).

matemática em situações-problema e depois providenciar a estrutura matemática necessária para formular esse problema contextualizado matematicamente". Teles (2007) constatou tal dificuldade durante a aplicação de alguns testes e percebeu que na tentativa de facilitar a resolução das situações-problema, os alunos recorriam à cálculos numéricos ou ao uso de figuras.

Ao observarmos tais resultados em nossas experiências profissionais, e até em recordações de meus tempos como aluna, surgiu o interesse em me aprofundar nesta temática e ingressar no mestrado. Junto a este cenário, também me inquietava a vontade de trabalhar com algum tema que envolvesse álgebra e geometria.

Foi então que, ao longo das orientações, questões a respeito das fórmulas para o cálculo de medida de área, o conceito de área como uma grandeza geométrica e o modo que tais conteúdos são passados para os estudantes, surgiram em nossos debates. Assim, em conversas com minha orientadora, percebermos evidências de lacunas no ensino das grandezas geométricas, em especial o cálculo de medida de áreas, fomentou ainda mais meu interesse pelo assunto.

Lima e Bellemain (2010) destacam que o trabalho com área no ensino fundamental foi marcado por uma ênfase exagerada no uso de fórmulas para o cálculo da medida de áreas das figuras geométricas usuais (retângulo, paralelogramo, triângulo, etc.). Tal forma de trabalho tem sido ineficaz, conforme vimos anteriormente, e gerado entraves, como a confusão entre perímetro e área, omissão ou uso inadequado de unidades de área.

No entanto, o ensino e uso das fórmulas para este fim não devem ser desprezados, pois, de acordo com Lima e Bellemain (2010, p.187), "as fórmulas têm um papel importante na resolução de problemas matemáticos, mas, para que cumpram esse papel a contento, é preciso que os alunos sejam capazes de utilizá-las com compreensão.".

Para que tal objetivo seja atingido, Douady e Perrin-Glorian (1989) defendem que os alunos devem compreender a área como grandeza e não apenas como um número. E, de acordo com Bellemain (2002), o trabalho com essa noção deve ocorrer com a mobilização de três quadros[3]:

- geométrico, constituído pelas superfícies planas;
- numérico, composto das medidas das superfícies planas, ou seja, o conjunto dos números reais positivos;
- das grandezas, formado por classes de equivalência de superfícies de mesma área, integrando assim os dois primeiros e se configurando como contexto da própria noção de área.

Ampliando tal noção Bellemain (2002) acrescenta o quadro algébrico funcional que é constituído por fórmulas que expressam a área em função de determinados comprimentos relativos às figuras geométricas. Para as três autoras uma hipótese didática básica é a necessidade de distinguir e articular esses quadros no ensino de grandezas geométricas.

Por outro lado, para Chevallard (1990), um conhecimento pode se associar a saberes, e se misturar com outros, se tornando algo natural, como é o caso do cálculo da medida de área de triângulos por meio do semiproduto entre a medida de um dos lados e de sua altura respectiva. Outros conhecimentos podem ficar na periferia do saber, tendo que ser redescobertos frequentemente, pois não são tratados como saber, por exemplo, o cálculo da medida de área por Heron. Ou seja, ao se deparar com uma situação em que aquele conhecimento natural não é suficiente para resolve-la, é necessário redescobrir um conhecimento capaz de solucionar tal problema. E ainda, há conhecimentos que serão esquecidos, pois não são institucionalizados[4].

Com isso em mente, motivamo-nos em investigar o trabalho da técnica em organizações matemáticas para o ensino de medida de área de triângulos, tendo

---

[3] Alusão à teoria dos jogos de quadros e dialética ferramenta-objeto desenvolvida por Douady (1987 apud BELLEMAIN, 2002).

[4] Chevallard (1999) introduziu a noção de momento para descrever uma OD. De acordo com Chevallard (1999, p.24), a institucionalização é o quinto momento “que tem por objetivo definir a organização matemática elaborada, distinguindo claramente, por um lado, os elementos que fizeram parte de sua construção, mas não foram integrados e, por outro lado, os elementos que entraram de maneira definitiva na organização matemática considerada”. (tradução nossa)

como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999 apud ALMOULOUD, 2007).

Para cada tipo de tarefa teremos uma técnica que possibilitará realizá-la. Em nosso trabalho teremos como tarefa “calcular a medida da área de um triângulo”, porém podemos alterar as informações dadas para esta tarefa como: tipo do triângulo ou quais medidas serão fornecidas. Com tais alterações não será possível que a mesma técnica resolva todas as situações propostas, pois cada técnica tem a sua limitação, sendo necessária a ampliação da técnica.

Mediante este cenário, delineamos nossa questão de pesquisa: **Como construir organizações didáticas que permitam o trabalho com diferentes técnicas para o ensino do cálculo da medida de área de triângulos nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio?**

Dessa forma, pretendemos propor os estudos que conduzem à elaboração de praxeologias didáticas que evidenciem o trabalho da técnica para o ensino do cálculo da medida de área de triângulos do 6º ano do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio. Assim, nossa dissertação foi estruturada em cinco capítulos. Partindo destas considerações iniciais, seguimos com o segundo capítulo, que articula a problemática da pesquisa, contendo a revisão bibliográfica, o referencial teórico, o problema desta pesquisa e a metodologia e procedimentos adotados.

No terceiro capítulo trazemos os estudos preliminares, importantes para os aspectos teóricos e compreensão do contexto em que está inserido nosso tema de pesquisa e que conduz à elaboração de propostas de possíveis praxeologias didáticas para medida de área de triângulos que apresentamos no quarto capítulo.

Para concluir, apresentamos algumas considerações finais, proveniente de nossas reflexões sobre as investigações e proposta das praxeologias, assim como a resposta de nossa questão de pesquisa e perspectivas futuras.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo fizemos uma revisão bibliográfica, apresentando pesquisas que se aproximam “área de triângulos”. Na sequência, apresentamos a teoria que nos serviu como referencial teórico, seguida do nosso problema de pesquisa e metodologia e procedimentos adotados.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com o objetivo de realizar um levantamento das pesquisas que abordassem a área de triângulos, utilizamos como palavras-chave: "triângulo", “área” e "grandeza geométrica" durante nossa busca no banco de teses da CAPES, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), e as bibliotecas de programas brasileiros de pós-graduação em Educação e em Educação Matemática. Como resultado, encontramos 3 trabalhos, sendo duas dissertações e um artigo.

O artigo escrito por Fonda e Silva (2019) apresenta um panorama com oito pesquisas (Quadro 1) já realizadas a respeito de área de triângulos.

Quadro 1 – Categorização dos trabalhos encontrados

Categoria	Autor	Ano	Instituição	Tipo
Análise de Livros Didáticos	Barros	2006	Universidade Federal de Pernambuco	Dissertação
	Santana	2006	Universidade Federal de Pernambuco	Dissertação
	Maia	2008	Universidade Federal de Santa Catarina	Dissertação
	Silva	2011	Universidade Federal de Pernambuco	Dissertação
Formação de Professores	Chiummo	1998	PUC-SP	Dissertação
	Lessa	2017	Universidade Federal da Bahia	Dissertação
Sequência de Ensino	Facco	2003	PUC-SP	Dissertação
Reflexão teórica	Teles	2007	Universidade Federal de Pernambuco	Tese

Fonte: produção da autora

Tal panorama evidenciou que o estudo das grandezas geométricas é realizado de forma inadequada no ensino básico, embora seja importante na formação de um indivíduo, tanto no âmbito escolar, como no âmbito social. Os trabalhos analisados por Fonda e Silva (2019, p.51) ainda mostram que tanto os professores quanto os livros didáticos “não conduzem os alunos a construir conhecimentos que lhes permitam transitar por todos os campos conceituais envolvidos na conceituação de área: o das grandezas, o numérico, o geométrico e o algébrico”; de maneira oposta, a ênfase é dada ao uso de fórmulas, construídas pelos alunos em algumas situações, e em outras transmitidas pelo professor ou pelo livro didático.

Fonda e Silva (2019, p.51) observaram nas pesquisas analisadas que a falta de práticas que consideram o trabalho de área enquanto grandeza apresentado por Douady e Perrin-Glorian (1989) e Bellemain (2002), que abordaremos no capítulo 3, direcionam os alunos a dificuldades ao se depararem com situações que tratam de área, sendo as mais evidentes: “confusão entre área e perímetro, uso equivocado de fórmulas, além de outros relacionados a conhecimentos algébricos ou geométricos”.

Dentre as pesquisas analisadas por Fonda e Silva (2019), Teles (2007) também destacou as situações descritas no parágrafo anterior ao analisar os testes feitos durante sua pesquisa, e afirmou que tais resultados evidenciam “a construção não significativa do conceito de fórmula pelos alunos e reforçaram o aspecto mecânico relacionado à utilização das fórmulas de área na matemática escolar.” (TELES, 2007, p.268).

De acordo com Facco (2003), sabemos que, o cenário que predomina é aquele em que os professores se apoiam nos livros didáticos para introduzir o conceito de área como um número associado a uma superfície e, rapidamente, o cálculo da área passa a ser feito por meio do uso de fórmulas. Sobre as pesquisas que fizeram análises de livros didáticos, Fonda e Silva (2019, p.44) notaram o prevalecimento do aspecto numérico no ensino de área, “tendo foco a medida e não a exploração e utilização de unidades de medidas não convencionais, o que não contribui para a construção do conceito de área como grandeza geométrica.”. Em relação ao cálculo da medida de área de triângulos, destacaram o uso predominante da fórmula $A = \frac{b \times h}{2}$ para determinar tal medida; a fórmula de Heron, por exemplo, foi citada em apenas um dos livros didáticos analisados.

Ainda sobre tais trabalhos, as pesquisadoras perceberam que os livros didáticos contrariam recomendações para que o tema grandezas seja tratado em todo o ensino fundamental, já que as coleções analisadas apresentam tal conteúdo no final do volume ou relacionado com outros conteúdos, tais como expressões algébricas, potenciação, radiciação ou funções, ao longo da edição.

A partir dos trabalhos de Chiummo (1998) e Lessa (2017), Fonda e Silva (2019, p.47) perceberam a carência de pesquisas dedicadas à formação de professores, "tanto inicial, quanto continuada, que indiquem mais caminhos para o professor não adotar uma abordagem tecnicista para o trabalho com áreas.".

Ferreira (2010), com o objetivo de investigar a construção do conceito de área no 3º ciclo do ensino fundamental, aplicou uma sequência didática para 26 alunos do 6º ano de uma escola pública federal do estado de Pernambuco, tendo como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais.

Ferreira (2010) aplicou uma sondagem e percebeu que a maioria dos alunos calculou a medida da área das figuras propostas por contagem dos quadradinhos, quando a malha quadriculada estava presente. Para a pesquisadora isso reflete o trabalho feitos nos anos anteriores, em que a ênfase é dada para atividades que privilegiam o campo numérico, em detrimento da comparação entre grandezas.

Durante a sondagem a pesquisadora também ressaltou entraves na aprendizagem da área e do perímetro, como: a tendência dos alunos em atribuir um valor numérico, mesmo quando não é necessário; confusão entre área e perímetro; dificuldade em compreender que a medida de área de uma figura pode mudar conforme a unidade de medida escolhida. Além destas constatações, Ferreira (2010, p.148) destacou os invariantes operatórios falsos mobilizados pelos alunos, como: "a área de uma figura poligonal é proporcional ao comprimento dos seus lados, se dobro cada lado da figura, sua área dobra"; "figuras que possuem mesma área têm mesmo perímetro".

Após a sondagem, a pesquisadora desenvolveu uma sequência de 7 atividades, com o objetivo de priorizar a construção dos conceitos de comprimento e área enquanto grandezas e complementar as situações apresentadas no livro didático adotado na turma pesquisada. Alguns resultados da sondagem se repetiram nesta sequência, como a dificuldade em dissociar área e perímetro e a forte presença da concepção numérica, sendo a última notada com a necessidade dos alunos em utilizar unidades de medida, calcular a medida de área e de perímetro de uma figura pelo uso de fórmulas, ou na dificuldade em associar o par (número, unidade de medida), de acordo com a grandeza a que se refere.

Após a análise da sequência, a pesquisadora sentiu a necessidade de realizar mais um teste individual, com o objetivo de analisar avanços e entraves durante a construção do conceito de área como grandeza, e uma entrevista em duplas, com o objetivo de esclarecer alguns pontos levantados nos testes anteriores.

Destes dois últimos testes a pesquisadora percebeu a possibilidade de ladrilhamento com a malha quadriculada com figuras poligonais ou não poligonais, a invariância da área por decomposição e composição e a mudança de unidade.

Sobre o uso da malha quadriculada Ferreira (2010, p.149) destaca:

> [...] uma possibilidade associada ao recurso da malha quadriculada que, se por um lado favorece as decomposições e composições das superfícies, possibilitando a compreensão da invariância das áreas, enquanto grandeza unidimensional, por outro lado, não deixa visível a bidimensionalidade de uma superfície, poligonal ou não, com as suas características e propriedades, bloqueando a compreensão do perímetro.

A pesquisadora também notou que os procedimentos numéricos continuam fortemente presente, tanto para o cálculo de medida de área, quanto para o cálculo do perímetro, mesmo em situações em que o quadro numérico não estava envolvido.

Embora o triângulo não tenha sido uma das figuras evidenciadas em suas análises, o trabalho de Ferreira (2010) nos indica quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos durante o estudo do cálculo de medida de área de figuras planas.

Pessoa (2010) realizou um estudo diagnóstico sobre os procedimentos mobilizados por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de atividades de cálculo de área de figuras planas em malhas quadriculadas. Assim como em todas as outras pesquisas examinadas neste trabalho, desenvolvidas na Universidade Federal de Pernambuco, a pesquisadora também adotou a abordagem de área como grandeza, desenvolvida por Douady e Perrin-Glorian.

Como referencial teórico, Pessoa (2010) adotou a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

O teste aplicado a 100 alunos do 6º ano, de cinco escolas diferentes da região metropolitana de Recife, consistia em 14 questões de cálculo de área, com variações nos valores atribuídos a cada uma das variáveis citadas.

De acordo com os resultados obtidos nos testes, a pesquisadora destacou 6 contribuições do uso da malha quadriculada em atividades para obter a medida da área de figuras planas:

- a compreensão de um número fracionário como medida de área, ampliando o conjunto imagem da função-medida dos naturais para os racionais positivos;
- facilita o entendimento da área como grandeza, por meio do procedimento de decomposição e composição, realçando a invariância da área por equidecomponibilidade[5];
- influencia na escolha de uma superfície unitária (área de cada quadradinho da malha), sendo que a medição da área de uma figura plana nesta malha se limitará a contagem de quadradinhos que cabem na figura ("ideia de área unidimensional, ou seja, a medida da área da superfície é obtida pela quantidade de quadradinhos que podem ser obtidos (formados) a partir da superfície da figura dada" (PESSOA, 2010, p.110));
- o processo de contar os quadradinhos para determinar a medida de área contribui na interpretação e dedução das fórmulas para o cálculo da medida de área;
- a medida de área das figuras dadas pode ser obtida sem ser fornecido dados numéricos;
- os procedimentos mais utilizados foram respectivamente: a contagem, decomposição/ recomposição de figuras planas e o uso de fórmulas.

[5] "Se duas superfícies podem ser decompostas em um número finito de partes, duas a duas congruentes, estas superfícies possuem a mesma área" (PESSOA, 2010, p.109)

Em relação às variáveis didáticas, Pessoa (2010) destacou:

- contorno da figura, preenchimento da figura, medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária, posição relativa dos polígonos em relação à malha e tipo de figura, foram as variáveis utilizadas nas atividades desta pesquisa, sendo que apenas as duas últimas foram consideradas como variáveis didáticas. As três primeiras variáveis, em alguns casos, dificultaram a resolução das atividades propostas;
- utilizando uma linguagem não formal, mas familiar, como *metade do quadradinho* ou *quadradinho e meio*, o aluno consegue ampliar o campo numérico que a medida de área pertence, partindo dos números naturais e chegando aos racionais, com a introdução das medidas fracionárias. Além disso, tais medidas contribuem para a compreensão da equivalência entre a área do quadradinho e a área de dois triângulos.

Ao olharmos para as pesquisas relacionadas acima, percebemos carências e deficiências no estudo da área de figuras planas, em especial à área de triângulos, que nos levou a pensar nas possibilidades de delimitação que estão assinaladas ao longo deste trabalho. Contudo, consideramos necessário introduzirmos antes nosso referencial teórico para melhor compreensão do nosso problema de pesquisa.

2.2 REFERENCIAL TEÓRICO: TAD

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), de acordo com Chevallard (1999),

> [...] estuda o homem perante o saber matemático e mais especificamente, perante situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo "antropológico" é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. (CHEVALLARD, 1999 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 111)

Para Almouloud (2007), no âmbito da antropologia do conhecimento, a didática da matemática supõe que tudo é objeto, diferenciando objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições ocupadas pelos indivíduos nas instituições, considerando os indivíduos como sujeitos das instituições. A existência de um objeto decorre do relacionamento e do reconhecimento de, no mínimo, um sujeito, ou instituição, com este objeto.

Ainda, de acordo com Almouloud (2007), o saber matemático, tido como uma forma particular de conhecimento, é um produto das ações humanas e institucionais, podendo ser produzido, utilizado, ensinado ou transportado entre as instituições. Assim, Chevallard apresenta a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se situa o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez estabelecerá a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho.

Neste sentido, Almouloud (2007) apresenta três postulados que permitem a modelização das práticas sociais em geral, baseando-se nas noções de tipo de tarefa, tipo de técnica, tecnologia e teoria, no âmbito da TAD:

> 1. Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas.
> 2. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica. [...]
> 3. A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições. (ALMOULOUD, 2007, p. 114 e 116)

A respeito do terceiro postulado, Bosch e Chevallard (1999 apud Almouloud, 2007, p. 116) afirmam que,

> [...] a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e supõe-se que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada [...] essa necessidade ecológica implica a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que chamamos teoria da técnica e que constitui o fundamento último.

O conjunto $[T, \tau, \theta, \Theta]$, onde T representa tipo de tarefas, τ a técnica, θ a tecnologia e Θ a teoria, é denominado de praxeologia ou organização.

Para Chevallard (2002 apud SILVA, 2005, p.32), o primeiro aspecto dessa organização, chamado de bloco prático-teórico, caracteriza o saber-fazer, que considera que toda ação humana, até mesmo as atividades matemáticas, cumpre uma tarefa (t) de um certo tipo (T), por, pelo menos, uma determinada técnica (τ). O segundo aspecto, chamado de bloco tecnológico-teórico, caracteriza o saber considerando uma tecnologia (θ) que justifica a técnica (τ) utilizada que permite refletir sobre a técnica e produzir novas técnicas, e a teoria (Θ) para justificar tal tecnologia.

De acordo com Almouloud (2007, p.123), estas organizações, relacionadas a um saber matemático, se distinguem entre didáticas e matemáticas. As organizações matemáticas (OM) “referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em sala de aula”, e as organizações didáticas (OD) referem-se ao modo como esta construção é feita. Assim, de acordo com Chevallard (1999, p. 239 – tradução nossa), podemos entender as OD como “o conjunto dos tipos de tarefas, técnicas, tecnologias, etc., mobilizado para o estudo concreto em uma instituição concreta.”

As tarefas são identificadas por um verbo de ação que não definem o conteúdo trabalhado, como por exemplo: calcular, decompor, resolver, determinar etc. Para cada tarefa existe uma ou mais técnicas validadas pela instituição que problematizaram esta tarefa. No sentido de Almouloud (2007), adotaremos técnica como uma “maneira de fazer” uma tarefa, sendo que esta maneira não precisa ser um procedimento metódico ou algorítmico.

No sentido de Chevallard (1999), entenderemos tecnologia como um discurso racional sobre a técnica cujo principal objetivo é justificá-la “racionalmente”, assegurando que é possível realizar a tarefa proposta. Toda tecnologia necessita de uma justificação, a qual é chamada de teoria. De acordo com Chevallard (1999),

> [...] o discurso tecnológico contém afirmações, mais ou menos explícitas, das quais se pode pedir uma razão. Se passa então a um nível superior de justificação-explicação-produção, o da teoria, Θ, que retoma, em relação a tecnologia, o papel que esta última tem em respeito a técnica. [6](CHEVALLARD, 1999, p. 5 – tradução nossa).

De acordo com Chevallard (1999), podemos definir uma organização pontual (OMP), em uma instituição, um conjunto de técnicas, tecnologias e de teorias organizadas em torno de um único tipo de tarefas. Uma combinação dessas geram as organizações matemáticas locais (OML) se forem centradas em uma tecnologia, e depois em organizações regionais (OMR) ao redor de uma teoria.

---

[6] [...] el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la teoría, Θ, que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica. (CHEVALLARD, 1999, p. 5).

Definido o referencial teórico, podemos delimitar o nosso problema, por meio da questão de pesquisa e dos objetivos gerais e específicos.

2.3 O PROBLEMA DE PESQUISA

Em nossa prática, algumas reflexões passaram a nos provocar: como os alunos compreendiam a álgebra e a geometria? Como lhes era ensinado estes dois temas? Como é feita a interseção entre estes dois assuntos no ambiente escolar? Quais os empecilhos encontrados no estudo da álgebra e da geometria?

Percebemos que as fórmulas formam um caminho para investigarmos as indagações feitas anteriormente, pois elas pertencem aos dois universos em questão: a álgebra e a geometria. E ainda, para Lima e Bellemain (2010),

> as fórmulas têm um papel importante na resolução de problemas matemáticos, mas, para que cumpram esse papel a contento, é preciso que os alunos sejam capazes de utilizá-las com compreensão. (LIMA e BELLEMAIN, 2010)

Por outro lado, para Chevallard (1990), quando escolhemos trabalhar com um determinado conjunto de dados de um objeto matemático, deve ser possível exprimir todo “elemento”, ou seja, todos os parâmetros deste objeto. Para o autor se um triângulo é conhecido pelas medidas de seus lados, deve ser possível expressar sua área, mediana, alturas, bissetrizes, etc., com o auxílio dessas medidas. Acrescenta que ao buscar expressar os diversos parâmetros de um triângulo podemos enfrentar o problema de passar da medida de um ângulo para a medida de um comprimento, ou ainda para as funções trigonométricas “enquanto a determinação de ângulos a partir de comprimentos coloca em jogo somente funções “algébricas” ao fazer intervirem adição, multiplicação e raiz quadrada.” (IBID, p. 10, tradução nossa).

O autor acrescenta ainda que se tomarmos o caminho inverso surgirão questões que não foram trabalhadas ao longo dos estudos o que configura uma deficiência no domínio matemático que pode se tornar um empecilho para o conhecimento e a possibilidade de trabalho com todos os parâmetros de um determinado objeto.

Chevallard também afirma que todo conhecimento é produzido por um trabalho específico. Porém, o destino deste conhecimento produzido pode variar.

Ele pode se integrar em um saber, ser reconhecido e nele se fixar. Ele poderá ocupar um lugar inexpugnável e se naturalizar, tornando-se próprio do saber, como a regra para se calcular a medida de área de um triângulo por meio do "semiproduto da base pela altura". Ou ainda, poderá sobreviver nas periferias deste saber, sendo eternamente jovem, assim como a fórmula atribuída a Heron (esta fórmula será explanada no capítulo 3). Chevallard (1990, p.10) acrescenta ainda que

> Do próprio interior dos saberes mais rigidamente geridos são produzidos os conhecimentos efêmeros, que serão reinventados conforme o for o caso, que serão tão logo esquecimentos da instituição em que terão sido produzidos porque eles não terão sido institucionalizados em forma de saber. Isso ocorre a cada dia, em cada aula, de cada escola. (tradução nossa)

Neste contexto, optamos por investigar a área de triângulo e propor uma organização matemática para o ensino de medida de área de triângulos, baseados na TAD e assumimos como questão central deste trabalho: **Como construir organizações didáticas que permitam o trabalho com diferentes técnicas para o ensino do cálculo da medida de área de triângulos nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio?**

Nossa dissertação, portanto, tem como objetivo geral evidenciar o trabalho da técnica para o ensino do cálculo da medida de área de triângulos do 6º ano do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio. E, para o compor, estabelecemos como objetivos específicos:

- Mapear a evolução da técnica para o cálculo da medida de área de triângulos no decorrer da história;
- Verificar como o estudo de área é dado nos documentos oficiais;
- Propor praxeologias para o ensino de área de triângulos.

A seguir, apresentaremos a metodologia e os procedimentos adotados para responder nossa questão de pesquisa e cumprir com os objetivos apresentados.

2.4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

O presente estudo se insere em uma abordagem qualitativa já que temos o interesse de compreender a realidade em torno do ensino de área de triângulos para sugerir possíveis mudanças. De acordo com Garnica (1997, p.111), o significado desta pesquisa passa “a ser concebido como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender [...] voltando o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador-investigador.”.

Neste sentido, nossa pesquisa segue na perspectiva de um estudo bibliográfico, pois nos baseamos em produções a respeito de área de triângulos para responder nossa questão de pesquisa. Segundo Gil (2002, p. 44) “a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.”

Iniciamos este trabalho com a revisão bibliográfica, com o intuito de identificar as pesquisas que envolvessem nosso tema e construindo um panorama dos trabalhos já feitos e de suas contribuições para o estudo das grandezas, em específico, a área de triângulos. Com tal estudo, pudemos adotar a TAD como nosso referencial teórico e delimitar nosso problema de pesquisa.

Em seguida, foi necessária a busca da gênese da medida da área de triângulos, para entendermos como o cálculo para se obter a medida de área de um triângulo se desenvolveu ao longo dos anos, identificando assim as organizações matemáticas para cumprir a tarefa “calcular a medida da área de um triângulo”. Com os resultados obtidos em nossa revisão bibliográfica, consideramos imprescindível investigar e adotarmos a área como uma grandeza geométrica. E, para completar nossos estudos preliminares, buscamos em documentos oficiais e nos livros didáticos o contexto em que a área de triângulos está inserida no ensino básico.

Após nossos estudos, poderemos propor possíveis praxeologias didáticas para o ensino de área de triângulos, baseando-nos nas organizações matemáticas descritas no item 3.1 e nos documentos analisados no item 3.3.

As praxeologias didáticas apresentadas no capítulo 4 se organizarão em torno da tarefa “calcular a medida de área de um triângulo”, diferenciando-se pelas informações dadas, o que exigirá a mobilização de diferentes técnicas. Esta diferenciação nos guiará para destinar cada praxeologia a um ano escolar, elucidando possíveis situações para serem aplicadas em sala de aula.

No próximo capítulo apresentaremos nossos estudos preliminares.

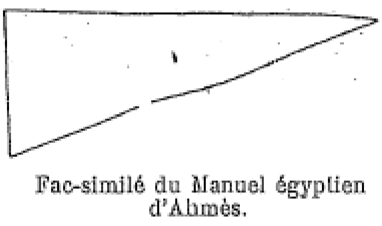
3 ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo traremos a gênese da medida da área, a área enquanto grandeza ou números e como a área é tratada em documentos oficiais.

3.1 GÊNESE DA MEDIDA DE ÁREA DE TRIÂNGULO

O papiro de Rhind ou de Ahmes, que foi escrito aproximadamente em 2000 a.C., é a fonte principal de conhecimento da matemática do Egito antigo (BOYER, 2012). Nele também podemos perceber métodos para se obter a medida de área de um triângulo (Figura 1), conforme é apresentado no problema 51: "Se é dado um triângulo [isósceles] de 10 perches[7] de lado e 4 perches de base, qual é sua superfície?". De acordo com Fourrey (1938), o autor o soluciona por meio da multiplicação entre a metade da medida da base pela medida do lado, o que resulta em 20 perches quadrados. A medida exata da superfície seria 19,6 perches quadrados, ou seja, uma diferença de 2% entre os resultados.

Figura 1 - Triângulo reproduzido no Papiro de Ahmes



Fonte: Fourrey (1938, p.220)

Segundo Fourrey (1938) a diferença nos resultados vem de substituir a fórmula exata $\frac{b}{2}\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2}c\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2}$ em que $\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$ representa a altura do triângulo isósceles de base medindo b e lados medindo c pela fórmula aproximativa $\frac{b}{2} \times c$ que forneceria um resultado mais próximo ao real se a medida de b for menor que a medida de c. O segundo método se diferencia do primeiro por não exigir a extração de raiz quadrada que, provavelmente, o calculador egípcio não sabia efetuar. E ainda, de acordo com Boyer (2012, p.33) Ahmes justifica a fórmula

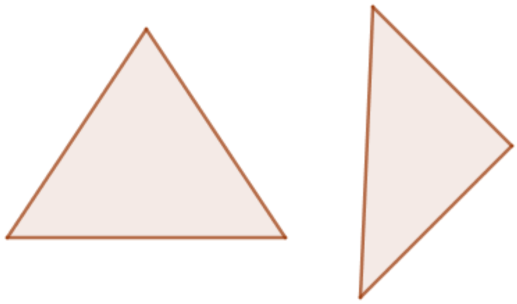
[7] De acordo com Perch (2010), o *perche* é uma unidade de medida de comprimento. Em 1607 foi padronizada na Inglaterra por Edmund Gunter como 16, 5 pés, que equivale a 5,029 metros.

aproximativa “sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formem um retângulo”. Tal justificativa nos conduz a uma organização matemática (**OM$_1$**) que tem como técnica a composição de um retângulo com dois triângulos congruentes para calcularmos a medida de área destes triângulos.

Organização Matemática 1 (OM$_1$)

Tipo de tarefa – T$_1$: calcular a medida da área de um triângulo (consideraremos este tipo de tarefa para todas as organizações matemáticas apresentadas neste estudo.).

t$_1$: determinar a medida da área de um triângulo enquanto metade da medida da área de um retângulo.



τ$_1$: dividir por 2 a medida da área de um retângulo composto por dois triângulos congruentes.

θ$_1$: da mesma forma que os egípcios faziam, calcula-se a medida da área do retângulo composto por dois triângulos congruentes e divide-se esta medida por 2.

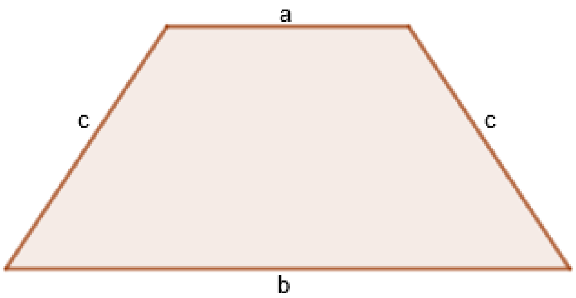
Θ$_1$: estudo das medidas e grandezas geométricas.

De acordo com Boyer (2012), um documento de Edfou (ou Edfu), datando de cerca de 1500 anos depois de Ahmes, traz exemplos de triângulos, trapézios, retângulos e quadriláteros mais gerais. E ainda, conforme Fourrey (1938), esta inscrição hieroglífica do templo de Edfou[8] apresenta uma relação, com plano de apoio, para diversos terrenos que compõem a propriedade da terra do templo.

[8] De acordo com Temple (2018), é o templo dedicado ao deus Horus localizado na margem oeste do rio Nilo. É o melhor exemplo da construção de templos ptolomaicos no Egito.

Segundo Fourrey (1938), neste documento, a medida da área de trapézio isósceles (Figura 2) é obtida por meio do produto das médias aritméticas de lados opostos, $\frac{c+c}{2} \times \frac{a+b}{2}$; a área do triângulo isósceles provém desta regra, supondo que a base menor seja nula (Figura 3). Assim, os lados do triângulo isósceles de base 2 e de lado 3 são denominados “0 sobre 2; 3 sobre 3” e a área é obtida por: $\frac{0+2}{2} \times \frac{3+3}{2} = 3$, embora o resultado exato fosse aproximadamente 2,83.

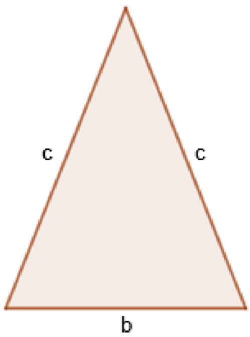
Figura 2 – Trapézio isósceles citado no documento de Edfou



Fonte: produção da autora

De uma maneira geral, para Fourrey (1938), a área de um triângulo isósceles de base medindo b e de lados medindo c (Figura 3) seria: $\frac{0+b}{2} \cdot \frac{c+c}{2} = \frac{b}{2} \times c$. Essencialmente esta regra é a mesma que a de Ahmes, porém o processo para obtê-la é diferente.

Figura 3 – Triângulo isósceles citado no documento de Edfou



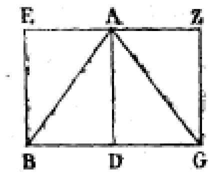
Fonte: produção da autora

Segundo Boyer (2012) “este é um notável exemplo de busca de relações entre figuras geométricas, bem como de um dos mais antigos usos do conceito do zero como substituto de uma grandeza na geometria.” (BOYER, 2012, p. 33).

Dentre os matemáticos gregos, Heron (ou Herão) de Alexandria, que viveu na segunda metade do século I d.C., também contribuiu para o cálculo da medida de área de triângulos com seu trabalho “A Métrica”, que só foi descoberto em 1896 (Eves, 2011).

Um dos problemas apresentados em “A Métrica” é: “Seja ABG um triângulo isósceles em que $AB = AG = 10$ e $BG = 12$. Encontrar sua área.”. De acordo com Fourrey (1938), Heron calcula a altura: $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Observa-se que utiliza o triângulo retângulo ADB e a relação de Pitágoras (Figura 4). Mostra então que a medida da área do triângulo ABG é a metade da medida da área do retângulo $BEZG$ (Figura 4), ou seja, $A_{ABG} = \frac{12 \times 8}{2} = 48$.

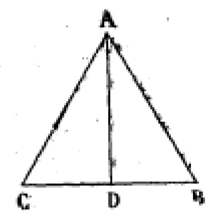
Figura 4 – Triângulo isósceles - Heron



Fonte: Fourrey (1938, p. 222)

Em outro problema de “A Métrica” Heron apresenta o cálculo da medida de um triângulo equilátero (Figura 5): “Seja um triângulo equilátero cujos lados são iguais a 10. Encontrar sua área.”

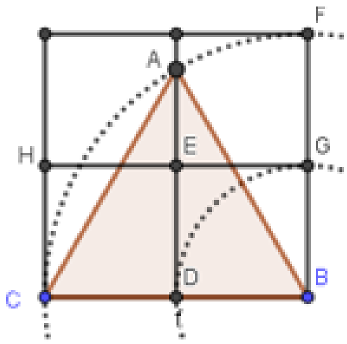
Figura 5 – Triângulo equilátero - Heron



Fonte: Fourrey (1938, p.223)

De acordo com Fourrey (1938), Heron considera $\overline{AD}$ a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, T a medida da área do triângulo e $BC^2 = 4BD^2$, ou seja, que a área do quadrado de lado BC é igual a 4 vezes a área do quadrado de lado BD (Figura 6).

Figura 6 – Quadrados no triângulo equilátero de Heron



Fonte: produção da autora

Dessa forma, Heron prossegue com $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 3BD^2$, pois $BC = AB$, de onde vem que: $\frac{BD^2}{AD^2} = \frac{1}{3}$. Considerando que $BC^2 = 4BD^2$ obtemos $\frac{BC^2}{AD^2} = \frac{4}{3}$. Assim, $\frac{BC^2}{AD^2} = \frac{\mathrm{BC}^4}{BC^2 \times AD^2} = \frac{4}{3} = \frac{16}{12}$, ou ainda, $\frac{BC^4}{(2T)^2} = \frac{16}{12}$.

Logo, $T^2 = \frac{3}{16} \times BC^4 = \frac{3}{16} \times 10\,000 = 1875$ e, portanto, $T = \sqrt{1875}$, que é aproximadamente $43\frac{1}{3}$.

Fourrey (1938) acrescenta uma observação a respeito do cálculo de raízes quadradas pelos gregos apresentando um documento, desenterrado em 1894 por Paul Tannery, que indica o procedimento seguido por Heron, confirmado em sua obra “A Métrica”.

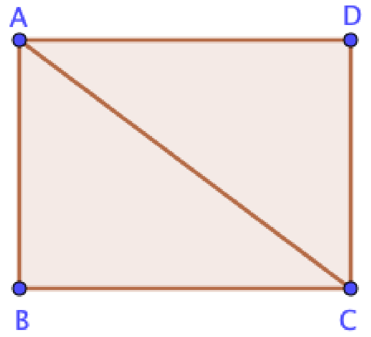
Voltando ao último exemplo, o procedimento consiste em procurar o número quadrado perfeito mais próximo de 1875 que é 1849 e que tem 43 como sua raiz quadrada. Depois dividir 1875 por 43 que dá $43 + \frac{26}{43}$, que é aproximadamente $43\frac{2}{3}$. Adicionar 43 ao resultado: $86\frac{2}{3}$ e tomar a metade $43\frac{1}{3}$, que é a raiz aproximada de 1875. Para obter melhor aproximação pode-se operar sobre $43\frac{1}{3}$ com o mesmo procedimento realizado sobre 43 e assim sucessivamente.

De acordo com Fourrey (1938), passando para uma linguagem matemática mais atual, se A não é um número quadrado perfeito e a um valor aproximado de sua raiz quadrada, o método de Heron toma por $\sqrt{A}$ o novo valor aproximado:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_{n-1}} + a_{n-1}\right), n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Roque (2012) apresenta outro problema de “A Métrica” para o cálculo da medida de área de um triângulo, desta vez, um triângulo retângulo (Figura 7): “Seja um triângulo ABC, com ângulo reto em B, tal que AB tenha 3 unidades e BC, 4. Achar a área do triângulo e a hipotenusa.”

Figura 7 – Retângulo com uma de suas diagonais



Fonte: produção da autora

Roque (2012) descreve os oito passos seguidos para encontrar a medida da área:

> i. Que o paralelogramo retângulo ABCD *(Figura 7)* seja completado, perfazendo uma área de 12 unidades (ele remete a um resultado obtido em proposição anterior).
> ii. O triângulo ABC é metade do paralelogramo ABCD.
> iii. A área desse triângulo será, então, 6 unidades.
> iv. Uma vez que o ângulo em B é reto, os quadrados sobre AB e BC são iguais ao quadrado sobre AC.
> v. Os quadrados sobre AB e BC dando 25 unidades, o quadrado sobre AC será também de 25 unidades.
> vi. Logo, AC será de 5 unidades.
> vii. E o método é o seguinte: fazendo 3 por 4, tomar a metade do resultado; resulta 6; essa é a área do triângulo.
> viii. E a hipotenusa: fazendo 3 por ele mesmo e, analogamente, fazendo 4 por ele mesmo, juntamos; resulta 25; tomando um lado deste quadrado, obter a hipotenusa do triângulo. (ROQUE, 2012, p.226)

De acordo com Roque (2012), a solução se apresenta de duas formas distintas: uma expressa entre os passos i a vi; e a outra nos passos finais (vii e viii). A primeira parte é constituída de um vocabulário geométrico e as afirmações são articuladas de modo dedutivo, além de referenciar enunciados geométricos da tradição euclidiana. O modo utilizado para articular as conclusões “revela a preocupação de derivar a conclusão numérica de um resultado geométrico” (ROQUE, 2012, p.227).

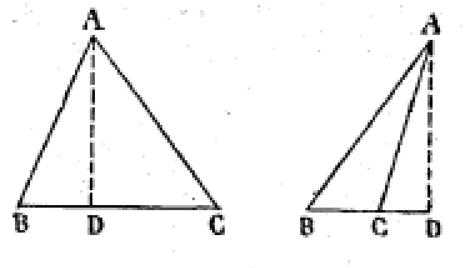
Os passos finais têm um enfoque diferente, pois expressam o intuito de resumir o método, apresentando as etapas que devem ser seguidas na resolução de um outro problema qualquer do mesmo tipo, como um procedimento padrão para o cálculo da medida de área de um triângulo retângulo. Segundo Roque (2012), "nesse caso, a referência geométrica se verifica somente pelo nome das grandezas envolvidas, como a designação de "lado" para indicar a raiz quadrada da quantidade 25." (ROQUE, 2012, p. 227).

Sobre a escrita de Heron, Roque (2012) destaca que:

> [...] o texto de Heron não é o de um prático e sim o de um erudito, engenheiro e geômetra que procura produzir sínteses das obras clássicas correspondendo às demandas de sua época. Trata-se de uma iniciativa característica da atmosfera em que viviam os intelectuais gregos, no período romano, dos quais Heron é exemplar. (ROQUE, 2012, p. 228).

De acordo com Fourrey (1938), Heron supõe um triângulo escaleno com os três lados conhecidos e calcula sua altura depois a área pela regra ordinária. Para isto, ele distingue dois casos (Figura 8): o primeiro, em que os ângulos B e C na base são agudos e o segundo, em que um dos ângulos é obtuso. Facilmente podemos reconhecer a qual caso corresponde um triângulo dado, pois temos na primeira hipótese: $AB^2 < BC^2 + AC^2$ e $AC^2 < AB^2 + BC^2$; e na segunda $AB^2 > BC^2 + AC^2$. Ainda segundo Fourrey (1938), o processo para a determinação da medida da altura é um pouco diferente nos dois casos, como mostraremos mais à frente.

Figura 8 – Triângulos escalenos - Heron



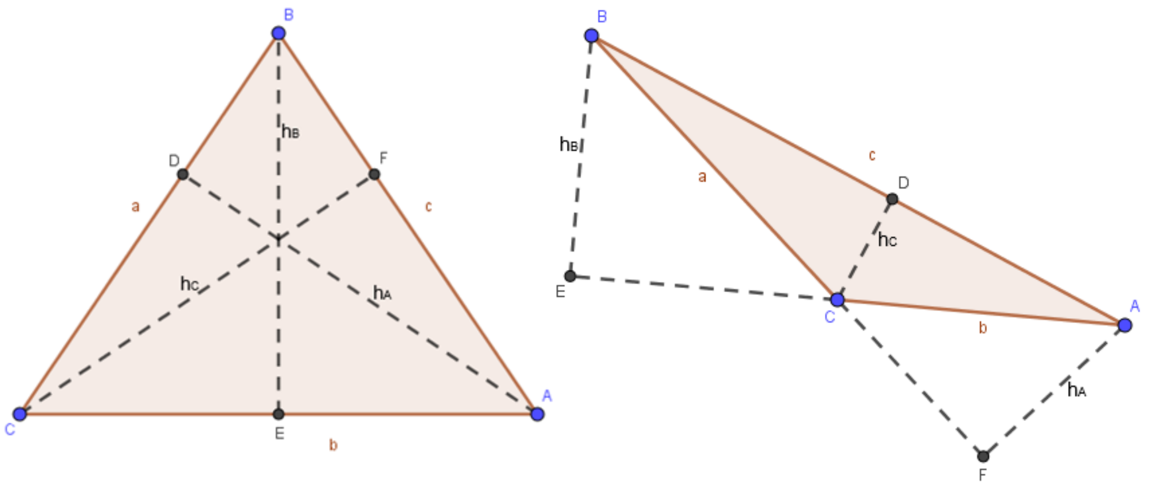
Fonte: Fourrey (1938, p. 228)

Podemos identificar aqui uma organização matemática (**OM$_2$**) em que consideramos como tipo de tarefa calcular a medida da área de um triângulo e associar a ela duas tarefas correspondentes a essas hipóteses.

Organização Matemática 2 (OM_2)

T_1: calcular a medida da área de um triângulo.

t_2: calcular a medida de área de um triângulo qualquer, dadas as medidas de seus lados e de suas alturas respectivas



Nas tarefas deste tipo podemos variar o tipo de triângulo bem como suas medidas, o que não interfere na técnica utilizada.

τ_2: metade do produto entre a medida de um dos lados e de sua altura respectiva.

θ_2: esta tecnologia está baseada nos estudos de Heron para as hipóteses citadas anteriormente:

Apresentaremos o cálculo de Heron para um triângulo acutângulo de lados $AB = 13$, $BC = 14$ e $AC = 15$, conforme Fourrey (1938). De acordo com a primeira hipótese, temos: $13^2 < 14^2 + 15^2$ e $15^2 < 13^2 + 14^2$. Sendo $\overline{AD}$ a altura tem-se, de acordo com um teorema dos Elementos de Euclides, que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$$

Substituindo AC, AB e BC por seus valores numéricos, encontra-se $BD = 5$ e assim $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 12$ e a medida da área é determinada por $\frac{12 \times 14}{2} = 84$.

De acordo com Fourrey (1938), é possível encontrar esta “mesma regra nos escritos heronianos, no Tratado de agrimensura de Epaphroditus e Vitruvius Rufus, nos Hindus e nas Geometrias práticas da Idade Média e do Renascimento.” (FOURREY, 1938, p.229).

Θ_1: estudo de medidas e grandezas geométricas.

t_3: calcular a medida de área de um triângulo qualquer, dada uma figura identificando alguma característica do triângulo, por exemplo, isósceles ou retângulo, e as medidas de seus lados.

τ_3: antes de utilizar a **τ_2**, é necessário calcular uma de suas alturas usando um outro método, como o teorema de Pitágoras.

Além do cálculo da medida da área de um triângulo pela metade do produto entre um de seus lados e sua altura respectiva, Heron, de acordo com Fourrey (1938), apresenta em duas obras: “A Métrica” e “Tratado de Dioptre” o cálculo da medida de área de triângulo em função dos três lados. Boyer (2012) afirma que: “a “fórmula de Heron” já era conhecida por Arquimedes, que sem dúvida tinha uma demonstração dela, mas a demonstração de Heron em sua *Métrica* é a mais antiga que temos.” (BOYER, 2012, p.130).

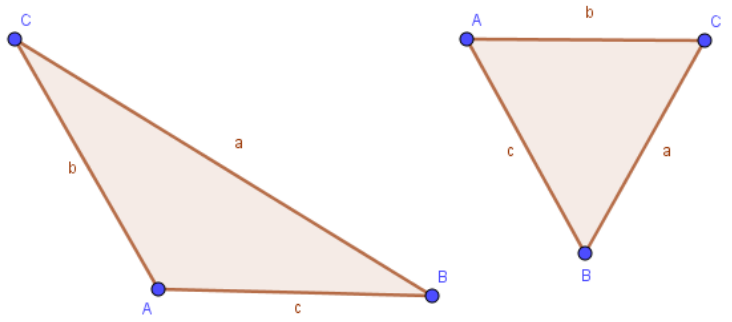
De acordo com Fourrey (1938), também é possível encontrar demonstrações desta fórmula: no livro dos três irmãos árabes, Mohammed, Ahmed e Alhasan (séc. IX); por Leonardo de Pisa em sua “Geometria Prática” (1220); por Jordanus Nemorarius (séc. XIII); por Newton em sua “Aritmética Universal” (1707); por Euler nos “Novos Comentários de Petesburgo” (tomo 1, 1747-48); Boscovich no tomo V de suas “Obras, referente à óptica e à astronomia” (1785); e pela maior parte dos geômetras do Renascimento.

As demonstrações que seguem nos conduzem a uma organização matemática (**OM_3**) associada a tarefa encontrada nas obras de Heron: calcular a medida de área de triângulo em função dos três lados.

Organização Matemática 3 (OM$_3$)

T$_1$: calcular a medida da área de um triângulo.

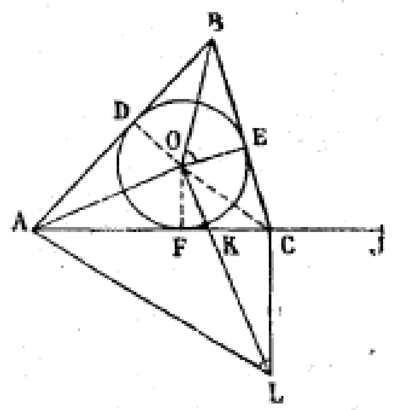
t$_4$: calcular a medida de área de um triângulo qualquer, dadas as medidas de seus lados.



τ$_4$: aplicar a fórmula de Heron

θ$_3$: conforme Fourrey (1938), apresentaremos a demonstração desta fórmula por Heron partindo do triângulo apresentado na figura 9.

Figura 9 – Triângulo utilizado para a demonstração da fórmula de Heron



Fonte: Fourrey (1938, p.232)

Considerando o triângulo ABC construímos a circunferência de centro O inscrita que tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto D, o lado $\overline{AC}$ no ponto F e o lado $\overline{BC}$ no ponto E. Prolongamos $\overline{AC}$ de um comprimento $CJ = BE$, o que resulta em $AJ = p$, em que p representa o semiperímetro desse triângulo, pois $2p = AB + BC + AC = AB + BE + EC + AC = AB + EC + AC + BE = AB + EC + AC + CJ$. Considerando os triângulos AOC, AOB e BOC podemos dizer que suas áreas podem ser calculadas por: $\frac{AC\times r}{2}$, $\frac{AB\times r}{2}$ e $\frac{BC\times r}{2}$ respectivamente, em que r representa a medida do raio da circunferência inscrita e portanto, representa a altura de cada um desses triângulos.

Temos então que se S representa a medida da área do triângulo ABC então: $S = \frac{AC\times r}{2} + \frac{AB\times r}{2} + \frac{BC\times r}{2} = \left(\frac{AC}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}\right)r = pr$. Ou seja, $AJ \times OF = pr = S$.

Traçando agora duas retas, uma perpendicular à $\overline{AO}$ passando por O e outra perpendicular à $\overline{AC}$ passando por C que se interceptam no ponto L. Como $\widehat{AOL}$ e $\widehat{ACL}$ são retos, os pontos A, O, C, L estão sobre uma mesma circunferência e temos então que $\widehat{AOC} + \widehat{AOL} = 180°$ (1), pois são ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

Por outro lado, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ são bissetrizes dos ângulos $\widehat{DOF}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ cuja soma é 360°. Mas, $\widehat{DOF} = \widehat{DOA} + \widehat{AOF}$, $\widehat{DOE} = \widehat{DOB} + \widehat{BOE}$ e $\widehat{EOF} = \widehat{EOC} + \widehat{COF}$ sendo cada par de parcelas iguais, pois os ângulos são congruentes. Assim, $DOA + DOB + EOC = 180°$ e $AOF + BOE + COF = 180°$, ou seja, $\widehat{AOC} + \widehat{BOE} = 180°$, pois $\widehat{AOC} = \widehat{AOF} + \widehat{COF}$. Logo de (1) se deduz que $\widehat{ALC} \equiv \widehat{BOE}$.

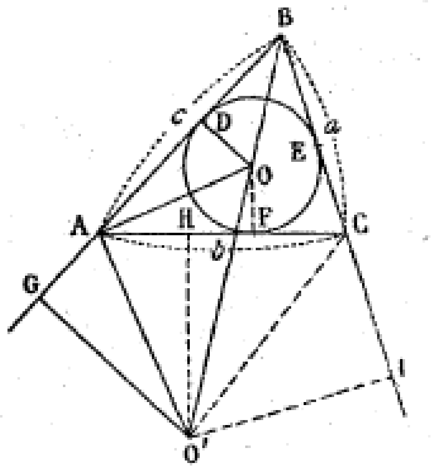
Observando os triângulos ACL e BEO temos que ambos têm dois ângulos correspondentes congruentes: $BEO = ACL = 90°$ e $\widehat{ALC} \equiv \widehat{BOE}$, logo são semelhantes e, portanto, $\frac{AC}{BE} = \frac{CL}{OE} = \frac{AL}{OB}$ de onde vem $\frac{AC}{CL} = \frac{BE}{OE} = \frac{CJ}{OF}$ e ainda que $\frac{AC}{CJ} = \frac{CL}{OF} = \frac{CK}{KF}$ pois $\overline{OF} // \overline{CL}$. Assim, se deduz que $\frac{AC+CJ}{CJ} = \frac{CK+KF}{KF}$ ou $\frac{AJ}{CJ} = \frac{CF}{KF} \Rightarrow \frac{AJ}{CJ} \times \frac{AJ}{AJ} = \frac{CF}{KF} \times \frac{AF}{AF}$. Ou seja, $\frac{AJ^2}{AJ\times CJ} = \frac{AF\times CF}{OF^2}$, pois $\overline{OF}$ é altura do triângulo retângulo AOK.

Dessa proporção temos que: $AJ^2 \times OF^2 = AJ \times AF \times CJ \times CF$. Então, $AJ^2 \times OF^2 = S^2$ mas como $AJ = p$, $AF = p - a$, $CJ = BE = p - b$ e $CF = p - c$ temos $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ em que a, b e c representam as medidas dos lados do triângulo ABC.

Θ_1: estudo de medidas e grandezas geométricas.

De acordo com Fourrey (1938), no século IX, os irmãos árabes Mohamed, Ahmed e Alhasan (sec. IX) também demonstraram esta fórmula com outro procedimento considerando o triângulo ABC e a construção apresentada na figura 10. Dado o triângulo construímos a circunferência de centro O inscrita que tangencia o lado $\overline{BA}$ no ponto D, o lado $\overline{AC}$ no ponto F e o lado $\overline{BC}$ no ponto E. Prolongamos $\overline{BA}$ de forma que $AG = CF$ e $\overline{BC}$ de forma que $CI = AF$. Assim, tem-se $BG = BI = p$, ou seja, representa o semiperímetro do triângulo ABC.

Figura 10 – Triângulo utilizado para a demonstração dos irmãos árabes



Fonte: Fourrey (1938, p.232)

Traçamos por G uma perpendicular à semirreta BA que intercepta a bissetriz $\overline{BO}$ de $\widehat{ABC}$ no ponto O'. Traçamos por O' a perpendicular à semirreta $\overline{BC}$ que nos dá $\overline{O'I} \equiv \overline{O'G}$, pois os dois triângulos BGO' e BIO' são congruentes. Determinamos em $\overline{AC}$ o ponto H tal que $AH = AG$ e traçamos $\overline{O'A}$, $\overline{O'H}$, $\overline{O'C}$. No triângulo $O'IC$ temos $O'C^2 = O'I^2 + IC^2$, no triângulo $O'GA$ temos $O'A^2 = O'G^2 + AG^2$ subtraindo as duas igualdades vem que $O'C^2 - O'A^2 = IC^2 - AG^2$.

Como $BG = p$ e $AH = AG$ temos $AH = p - c$, $CH = b - AH = b - AG = p - a = IC$ do que se deduz que $O'C^2 - O'A^2 = CH^2 - AH^2$. Ora, no triangulo $AO'C$ esta última relação só tem lugar se H for o vértice da perpendicular traçada de O' sobre $\overline{AC}$[9], cujos ângulos em H são retos e isso resulta em que $\overline{O'A}$ é bissetriz de $\widehat{GO'H}$.

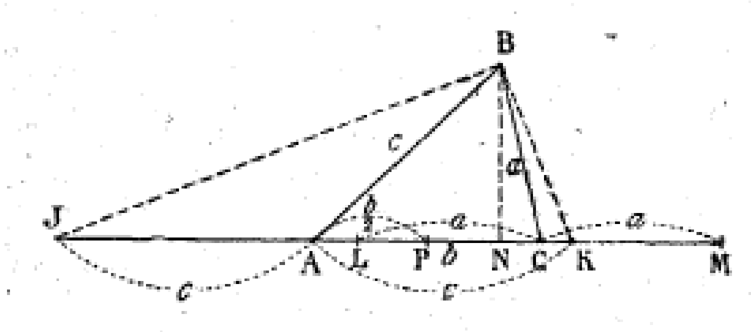
Por outro lado, tem-se no quadrilátero birretângulo $GAHO'$ que $\widehat{GAH} + \widehat{GO'H} = 180°$, mas como $\widehat{GAH} + \widehat{BAH} = 180°$ se deduz que $\widehat{GO'H} = \widehat{BAH}$ e, portanto, $\widehat{GO'A} = \widehat{DAO}$. Dessa forma os dois triângulos retângulos AGO' e ADO são semelhantes e, portanto, $\frac{OD}{AG} = \frac{AD}{O'G}$. Logo, $OD \times O'G = AD \times AG$. Mas $\frac{OD}{O'G} = \frac{OD^2}{OD \times O'G} = \frac{OD^2}{AD \times AG}$. Além disso, por causa do paralelismo entre $\overline{OD}$ e $\overline{O'G}$ vem que $\frac{OD}{O'G} = \frac{BD}{BG}$ de

[9] Ver acima o cálculo da altura em um triângulo escaleno (Regra de Brahmagupta).

onde $\frac{OD^2}{AD\times AG}=\frac{BD}{BG}$. Deduz-se então que: $OD^2\times BG = AD\times AG\times BD$, multiplicando ambos os termos por BG vem $OD^2\times BG^2 = BG\times AD\times BD\times AG$. Mas como $OD\times BG = S$, $BG = p$, $AD = p-a$, $BD = p-b$, $AG = p-c$ substituindo obtemos $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

De acordo com Fourrey (1938) a demonstração dessa mesma fórmula, mas em função dos segmentos obtidos na construção apresentada na figura 11, a partir do triângulo ABC, foi apresentada por Newton em 1707.

Figura 11 – Triângulo utilizado para a demonstração por Newton



Fonte: Fourrey (1938, p.235)

Dado o triângulo ABC determinamos o ponto P médio de $\overline{AC}$ e na reta AC os pontos J e K de forma que $AJ = AK = AB = c$ e os pontos L e M tal que $CL = CM = BC = a$. Depois traçamos $\overline{BJ}$ e $\overline{BK}$, além de $\overline{BN}$ perpendicular à $\overline{AC}$.

Dos triângulos ABN e BCN, tem-se: $AB^2 = AN^2 + BN^2$ e $CB^2 = CN^2 + BN^2$, subtraindo as duas igualdades vem que $AB^2 - CB^2 = AN^2 - CN^2 = (AN + CN)(AN - CN) = AC\times 2PN$, de onde $PN = \frac{AB^2-CB^2}{2AC} = \frac{c^2-a^2}{2b}$.

Mas se de $PK = c - \frac{b}{2}$ subtraímos $PN = \frac{AB^2-CB^2}{2AC} = \frac{c^2-a^2}{2b}$ temos:

$$PK - PN = NK = c - \frac{b}{2} - \frac{c^2-a^2}{2b} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2b} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2b} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b} =$$

$= 2\,\frac{(p-c)(p-b)}{b}$ em que p representa o semiperímetro do triângulo ABC.

Em seguida, se subtraímos NK de $JK = 2c$ vem $JN = 2c - \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2b} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2b} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} = \frac{2p(p-a)}{b}$.

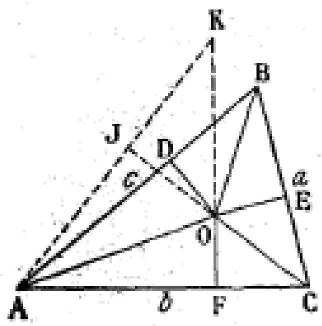
Ora, como $AB = AJ = AK$, o triângulo JBK é inscritível em uma semicircunferência, portanto é retângulo em B e $BN^2 = JN \times NK = \frac{2p(p-a)}{b} \times 2\frac{(p-c)(p-b)}{b}$ ou seja, $BN = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Mas como $S = \frac{b \cdot BN}{2}$ então $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Mas, de acordo com Fourrey, (1938) Newton estava interessado em obter uma expressão para encontrar a medida da área de um triângulo em função dos segmentos da figura e para isso considerou que se $JM = 2p$, $JL = c + b - a$, $KM = a + b - c$ e $KL = c - b + a$ então $JN = \frac{JM \cdot JL}{2b}$, $NK = \frac{KM \cdot KL}{2b}$ e $BN = \frac{\sqrt{JM \cdot JL \cdot KL \cdot KM}}{2b}$, logo $S = \frac{b \cdot BN}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{JM \cdot JL \cdot KL \cdot KM}$.

O autor afirma que Euler, por volta de 1747, também demonstrou a fórmula para o cálculo da medida da área de um triângulo em função das medidas dos seus lados considerando um triângulo ABC e as construções apresentadas na figura 12.

Figura 12 – Triângulo utilizado na demonstração de Euler



Fonte: Fourrey (1938, p.237)

Dado um triângulo ABC qualquer determinamos o ponto O, incentro do triângulo ABC, e por ele determinamos os pontos F em $\overline{AC}$, D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{BC}$ de tangência da circunferência inscrita. Traçamos por A uma perpendicular à reta CO que a intercepta no ponto J e intercepta a reta FO no ponto K.

Nessas condições temos $\widehat{AOJ} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{BCA}$, pois o ângulo AOJ é externo ao triângulo AOC e, portanto, tem a soma das medidas ângulos internos não adjacentes.

Como os triângulos retângulos *AJO* e *BDO* possuem dois ângulos congruentes então são semelhantes, logo $\frac{AJ}{BD} = \frac{JO}{DO} = \frac{AO}{BO}$ de onde vem que: $\frac{AJ}{JO} = \frac{BD}{DO}$. Considerando agora os triângulos semelhantes *OJK* e *AJC* temos $\frac{OJ}{AJ} = \frac{JK}{JC} = \frac{KO}{AC}$ que nos dá $\frac{AJ}{JO} = \frac{AC}{OK}$. Das duas igualdades podemos concluir que $\frac{BD}{DO} = \frac{AC}{Ok}$ ou seja $BD \times OK = AC \times DO$. Mas como $OK = FK - OF = FK - DO$ vem que: $BD \times (FK - OD) = AC \times DO \Rightarrow BD \times FK = BD \times DO + AC \times DO = (BD + AC)DO$, logo $BD \times FK = p \times DO = pr$, pois $\overline{DO}$ é raio da circunferência inscrita no triângulo *ABC*.

Por outro lado, os triângulos semelhantes *CFO* e *KAF* nos dão: $\frac{CF}{FK} = \frac{FO}{AF} = \frac{OC}{KA}$, logo $\frac{FK}{AF} = \frac{CF}{FO}$ e $FK \times FO = AF \times CF \Rightarrow FK \times r = AF \times CF$ multiplicando ambos os termos por *BD* vem $BD \times FK \times r = AF \times BD \times CF$. Substituindo nesta igualdade $BD \times FK = pr$ temos $pr^2 = AF \times BD \times CF = (p-a)(p-b)(p-c)$. Assim, $p^2r^2 \ ou \ S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

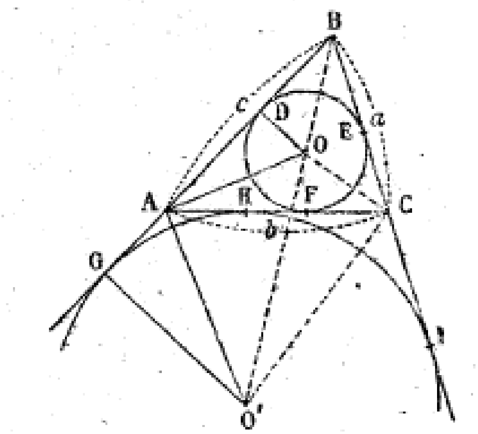
De acordo com Fourrey (1938), além destas três demonstrações para a fórmula de Heron, temos mais uma que se assemelha aquela que foi apresentada em “A Métrica”. De autor e data desconhecidos, essa demonstração é bem mais simples e baseia-se em uma circunferência inscrita no triângulo.

Nos baseando em Fourrey (1938), consideramos o triângulo *ABC* da figura 13 e sua circunferência inscrita com centro em *O* e os pontos de tangencia *D* ao lado $\overline{AB}$, *E* ao lado $\overline{BC}$ e *F* ao lado $\overline{AC}$. Prolongamos os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ e traçamos as bissetrizes dos ângulos formados com o lado $\overline{AC}$ que terá como intersecção o ponto *O´* na semirreta *BO*. Traçando por *O´* uma perpendicular à semirreta *BA* obtemos o ponto *G*.[10] Traçamos então a circunferência com centro em *O´* passando por *G* para obter os pontos de tangência *H* e *I*, no lado $\overline{AC}$ e na semirreta *BC*, respectivamente.

Como já vimos considerando S a medida da área do triângulo *ABC*, *p* o semiperímetro desse triângulo e *r* o raio da circunferência inscrita $S = pr$.

[10] Essa circunferência é chamada exinscrita do triângulo ABC em relação ao ângulo B e seu centro é a intersecção da bissetriz do ângulo interno ABC e das bissetrizes dos ângulos externos GAC e ICA. (WAGNER, 2004).

Figura 13 - Triângulo utilizado para a demonstração clássica da fórmula de Heron



Fonte: Fourrey (1938, p. 235)

Por outro lado, temos $S = S(O'AB) + S(O'CB) - S(O'AC) = c\frac{r'}{2} + a\frac{r'}{2} - b\frac{r'}{2} = (c + a - b)\frac{r'}{2} = (p - b)r'$ sendo r' o raio da circunferência de centro O'. Multiplicando as duas igualdades vem que: $S^2 = p(p - b)rr'$.

Temos, como na demonstração árabe, que transformar o produto *rr´* ou $OD \times O'G$ considerando que os triângulos AGO' e ADO são semelhantes pois são triângulos retângulos. Assim, vem $OD \times O'G$ ou $rr' = AD \times AG = (p - a)(p - c)$. Substituindo este valor de *rr´* em $S^2 = p(p - b)rr'$ se obtém $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$.

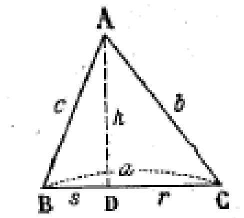
Segundo Eves (2011), Brahmagupta foi o mais eminente matemático hindu do século VII e apresenta um resultado ao problema “qual é a área de um triângulo isósceles de base 10 e de lados 13?”. De acordo com Fourrey (1938, p.223) a resposta é: “as metades da soma dos lados opostos são 5 e 13, seu produto é a área grosseira.” Podemos notar que tal resolução se assemelha àquela da inscrição de Edfou, embora Brahmagupta considere-a aproximativa. Mas, de acordo com Boyer (2012), o matemático hindu calculou a medida da área grosseira de um triângulo escaleno, com base catorze e lados treze e quinze, multiplicando a metade da base pela média aritmética dos outros lados.

Sem demonstrações, Brahmagupta apresenta uma regra exata para o cálculo da altura, que está reproduzida em Lilavati de Báskara (século XII) que, de acordo com Fourrey (1938) é:

> A diferença dos quadrados dos lados sendo dividido pela base, o quociente é adicionado à base, depois subtraído dela: a soma e a diferença divididos por 2 são os segmentos (determinados pela altura sobre a base). A raiz quadrada da diferença dos quadrados do lado e do segmento da base que lhe corresponde à altura. (FOURREY, 1938, p. 229).

Passando esta regra para a notação atual considerando a, b e c as medidas dos lados do triângulo ABC, s e r as medidas dos segmentos BD e DC, e h a altura do triângulo em relação ao lado $\overline{BC}$, como mostra a figura 14 e, de acordo com Fourrey (1938), vem que:

Figura 14 – Triângulo - Brahmagupta



Fonte: Fourrey (1938, p. 229)

Considerando os triângulos ADB e ADC temos que $s^2 = c^2 - h^2$ e $r^2 = b^2 - h^2$. Subtraindo a primeira igualdade da segunda vem $r^2 - s^2 = b^2 - c^2 \Leftrightarrow (r+s)(r-s) = b^2 - c^2$. Mas como $r + s = a$, deduz-se então que $r - s = \frac{b^2-c^2}{a}$. Considerando que $\frac{b^2-c^2}{a} = q$, teremos $r + s = a$ e $r - s = q$. Logo, $r = \frac{a+q}{2}$ e $s = \frac{a-q}{2}$. Agora, considerando uma das duas primeiras igualdades podemos determinar a altura do triângulo ABC e então calcular a medida de sua área.

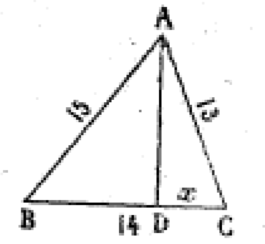
É atribuída a Alcuíno de York[11] (735 – 804) a autoria da coleção latina “Propositiones ad acuendos juvenis” (Proposições para aguçar [o espírito dos] jovens) (EVES, 2011). Um dos 53 problemas apresentados nesta obra é o problema do campo triangular: “Um campo triangular tem 30 perches de um lado, 30 perches do outro e 18 de base. Diga, quem pode, quanto ele deve conter em acres?” (FOURREY, 1938, p. 223). De acordo com Fourrey (1938), é possível utilizar a mesma regra de Edfou para determinar a medida da área em perches quadrado: $\frac{18}{2} \times \frac{30+30}{2} = 270^{pc}$; em seguida o autor transforma esse resultado em acres.

---

[11] De acordo com a reportagem O MONGE “mais letrado do mundo” que criou a base da computação há mais de 1,2 mil anos (2017), Alcuíno de York foi um monge, nascido na Inglaterra, conhecido em seu tempo como o “homem mais letrado do mundo”. Defendia o aprendizado de matemática e lógica pelo valor do conhecimento, não como forma de encontrar salvação religiosa, prática comum em sua época.

Al-Khwarizmi[12], na parte geométrica de sua obra "Algebra", ensina como calcular, algebricamente, a medida da altura de um triângulo de lados 13, 14 e 15 (Figura 15).

Figura 15 – Triângulo de lados 13, 14 e 15 utilizado por Al-Khwarizmi

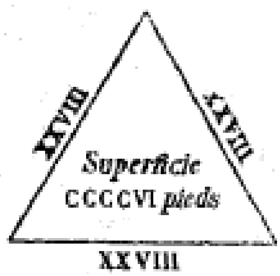


Fonte: Fourrey (1938, p. 230)

De acordo com Fourrey (1938), sendo x a medida do menor segmento limitado pela altura $\overline{AD}$ sobre a base $\overline{BC}$, tem-se nos triângulos retângulos ADB e ADC: $AB^2 - BD^2 = AD^2 = AC^2 - CD^2$. Substituindo pelas informações dadas anteriormente, $15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$. Simplificando esta equação, obtemos $28x = 140 \Leftrightarrow x = 5$. Assim, pode-se determinar a altura $\sqrt{13^2 - x^2} \Rightarrow \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ e a área do triângulo $12 \times \frac{14}{2} = 84$.

Conforme Fourrey (1938), a coleção romana Tratado de agrimensura (séc. I ou II), apresenta na primeira parte o cálculo da medida da área de um triângulo isósceles à maneira egípcia, escrita pelo agrimensor Epaphroditus, A segunda parte, da qual o arquiteto Vitruvius Rufus é o autor, o cálculo é exposto como nos escritos heronianos do século X.

Figura 16 – Triângulo apresentado no Tratado de Agrimensura



Fonte: Fourrey (1938, p.225)

[12] De acordo com o artigo AL-KHWARIZMI (2020), considerado o "Pai da Álgebra", foi um matemático e astrônomo que viveu de 780 a 850, aproximadamente.

Ainda neste Tratado é apresentado o problema:

> Se tem um triângulo isósceles *(figura 16)* tal que cada um dos dois lados seja igual à base que tem 28 pés. Procuro quantos pés [quadrados] contém a superfície.
> Multiplico um lado por ele mesmo $28 \cdot 28 = 784$, depois adiciono o valor de um lado $784 + 28 = 812$, divido por 2, $\frac{812}{2} = 406$. Tal é a superfície do triângulo. (FOURREY, 1938, p.225)

Ou seja, se a é a medida do lado do triângulo em unidades de comprimento, o procedimento descrito acima configura $\frac{a^2+a}{2} = \frac{a(a+1)}{2}$, o que significa que "*a área numérica do triângulo equilátero de lado a e o número triangular de mesmo lado* são considerados como equivalentes." (FOURREY, 1938, p.226). Segundo o autor, tal erro se repete mais à frente para outros polígonos regulares para os quais a área numérica é considerada como equivalente ao número poligonal correspondente, e é encontrado em outros agrimensores e compiladores latinos, em especial Boecio (séc. VI). Ainda de acordo com o autor, no que tange ao triângulo equilátero, considerando o exemplo numérico acima, a diferença entre a fórmula falsa e a fórmula exata seria de 66,53 para uma área exata de 339,47, ou seja, aproximadamente 20%.

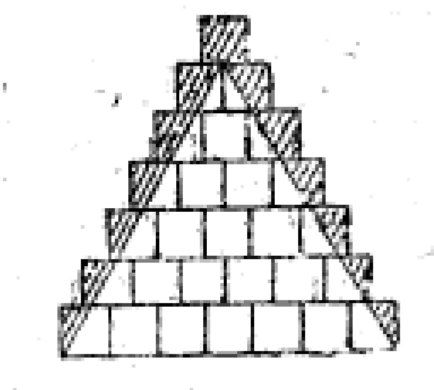
Conforme Fourrey (1938), o autor romano apresenta uma solução seguida "de uma pretendida demonstração que é apenas uma petição de princípio." (FOURREY, 1938, p.226). Dada a área 406 de um triângulo equilátero, deve-se determinar a medida do lado deste triângulo, para isso, Vitruvius Rufus utiliza a fórmula $a = \frac{\sqrt{8S+1}-1}{2}$, onde S denomina a medida de área do triângulo; assim ele obtém $a = 28$, valor dado anteriormente, o que provaria a exatidão do cálculo da área. Porém, a falha deste raciocínio pode ser encontrada ao observarmos que a fórmula $a = \frac{\sqrt{8S+1}-1}{2}$ fornece a raiz positiva da equação $a^2 + a - 2S = 0$, logo, uma equação deve levar à outra, e se uma for falsa a outra também será.

De acordo com Fourrey (1938), Gerbert, famoso sacerdote e erudito francês, que veio a se tornar o papa Silvestre II, aproximadamente no ano de 997, em uma carta ao seu amigo Adlbold d'Utrecht, expõe a inexatidão da fórmula $a = \frac{\sqrt{8S+1}-1}{2}$ chamada por ele de *aritmética*, se opondo à fórmula exata que ele denomina *geométrica*.

A princípio, de acordo com Fourrey (1938, p.227), Gerbert dá a seguinte regra para o cálculo da medida da altura de um triângulo equilátero: “subtrair $\frac{1}{7}$ do lado e conceder os $\frac{6}{7}$ restantes para a altura”, o que nos leva a $\sqrt{3} = \frac{12}{7} = 1,714$ .... Em seguida, ele considera um triângulo equilátero (Figura 17) com 7 pés de lado e 6 pés de altura. Pela regra aritmética, $\frac{7(7+1)}{2} = 28$ e pela regra geométrica, $\frac{7\times 6}{2} = 21$. Gerbert explica as causas dessa diferença (Fourrey, 1938, p. 227):

> Sejam dispostos: sobre a base, uma banda de 7 pés quadrados, e acima, bandas contendo sucessivamente 6, 5, 4, 3, 2, 1 pés quadrados. O número desses quadrados é o número triangular de lado 7, ou seja $\frac{7(7+1)}{2} = 28$, e sua área total, 28 pés quadrados, é a dada pela fórmula aritmética. Agora este conta como incorporado ao triângulo de base 7 e de altura 6 as porções sombreadas dos quadrados laterais, que se encontram precisamente fora desse triângulo; a área resultante da fórmula aritmética é então muito forte.

Figura 17 – Triângulo equilátero presente na carta de Gerbert

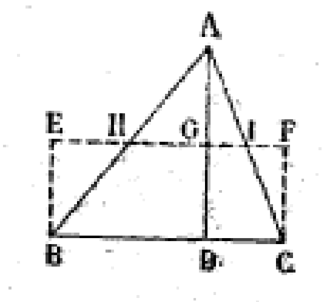


Fonte: Fourrey (1938, p. 227)

De acordo com Fourrey (1938), em outra passagem desta mesma carta, Gerbert sugere que também pode-se tomar como altura do triângulo equilátero $\frac{13}{15}$ da medida do lado, o que nos leva à admitir $\sqrt{3} = \frac{26}{15} = 1,7\overline{3}$, que é mais próximo ao valor exato do que $\frac{12}{7}$.

No século XVI, o matemático hindu Báskara fez comentários para Ganesa a respeito do caminho por ele tomado para obter uma fórmula para o cálculo da medida da área de um triângulo.

Figura 18 – Triângulo utilizado por Ganesa



Fonte: Fourrey (1938, p.230)

Segundo Fourrey (1938), pelo ponto médio G da altura $\overline{AD}$ (Figura 18), Ganesa traça $\overline{HI}$ um segmento paralelo à base $\overline{BC}$, que estabelece dois triângulos retângulos: AGH e AGI. Transportando estes dois triângulos, respectivamente, para BEH e CFI, forma-se o retângulo $BEFC$ de base $\overline{BC}$ e de altura $\frac{AD}{2}$, e cuja área é a mesma do triângulo proposto. Báskara comenta somente “Veja” e ele deduz a regra mais utilizada para o cálculo da medida de área de um triângulo.

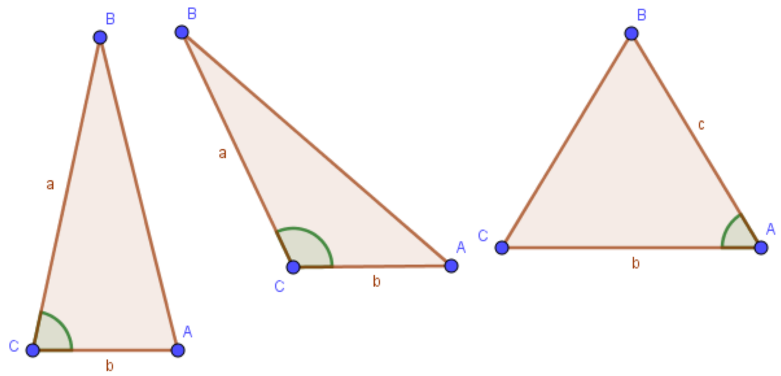
Além dos métodos apresentados acima para obter a medida de área de um triângulo, com o avanço dos estudos de Geometria, Geometria Analítica e outras áreas da Matemática, outras fórmulas apareceram.

Dado um triângulo com as medidas de dois lados e do ângulo formado entre eles, podemos identificar uma organização matemática (**OM$_4$**) associada a tarefa de calcular a sua área.

Organização Matemática 4 (OM$_4$)

T$_1$: calcular a medida da área de um triângulo.

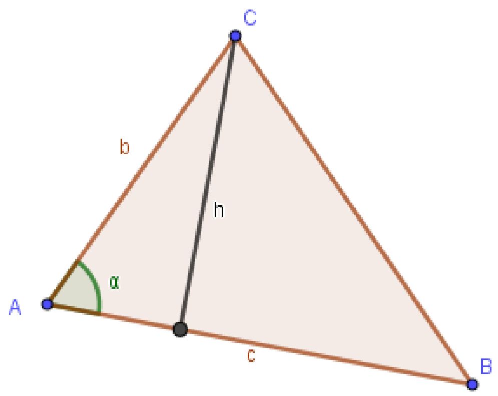
t$_5$: calcular a medida de área de um triângulo qualquer dadas as medidas de dois lados e do ângulo formado entre eles.



τ₅: metade do produto entre as medidas dos lados dados e do seno do ângulo formado entre eles.

θ₄: consideremos o triângulo ABC (Figura 19). São conhecidas as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e do ângulo formado entre eles. Indicaremos as medidas $AB = c$, $AC = b$ e $\widehat{CAB} = \alpha$.

Figura 19 – Triângulo com as medidas de dois lados e do ângulo formado por eles dadas



Fonte: produção da autora

Traçando a altura h em relação ao lado $\overline{AB}$, podemos obter $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$. Isolando h, teremos: $h = b \times \operatorname{sen}\alpha$. Substituindo na fórmula $A = \frac{bh}{2}$, já demonstrada anteriormente, obtemos: $A = \frac{c \times b \times \operatorname{sen}\alpha}{2}$. Ou seja, a medida da área A de um triângulo qualquer é dada pela metade do produto entre as medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo entre eles.

Θ₁: Estudo das medidas e grandezas geométricas e trigonometria no triângulo retângulo.

Também podemos identificar uma organização matemática (**OM₅**), com o mesmo tipo de tarefa (**T₁**), partindo para a geometria analítica, em que o triângulo está localizado no plano cartesiano e é dado as coordenadas de seus vértices.

Organização Matemática 5 (OM₅)

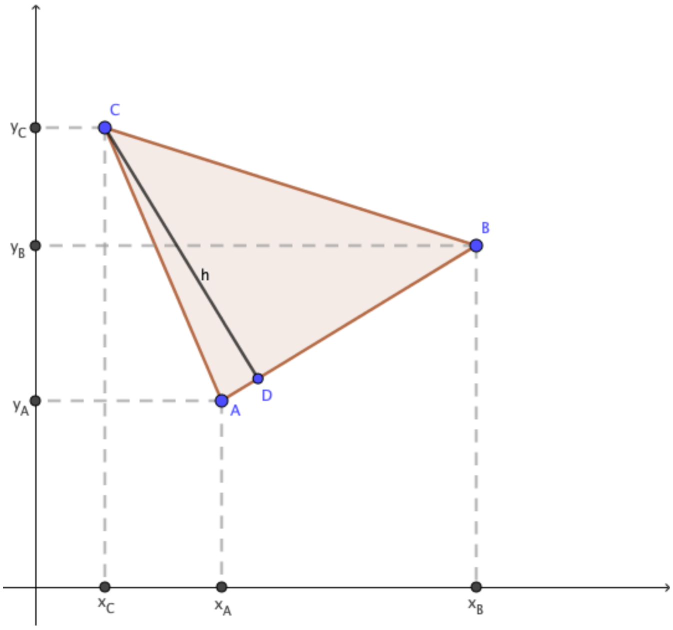
T₁: calcular a medida da área de um triângulo.

t₆: calcular a medida de área de um triângulo qualquer, representado no plano cartesiano e dada as suas coordenadas.

τ_6: metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas de seus vértices.

θ_5: partindo da fórmula $A = \frac{bh}{2}$, podemos obter a medida de área de um triângulo no plano cartesiano. Dado um triângulo qualquer de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ (Figura 20), podemos determinar a medida de sua área pela metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas de seus vértices.

Figura 20 – Triângulo no plano cartesiano com suas coordenadas



Fonte: produção da autora

Calcularemos a medida da área do triângulo ABC considerando o lado $\overline{AB}$ e sua altura correspondente, CD. A medida AB pode ser determinada por $AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$ e a altura CD como a distância do vértice C à reta AB. Para isso temos que determinar primeiro a equação dessa reta.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot y_A + y \cdot x_B + x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A - x \cdot y_B - y \cdot x_A = 0$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A) = 0$$

Agora podemos calcular a distância de C à reta AB, ou seja:

$$CD = \frac{|(y_A - y_B)x_C + (x_B - x_A)y_C + (x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A)|}{\sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2}}$$

$$CD = \frac{\begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2}}$$

Substituindo esses resultados em $A = \frac{\mathrm{AB} \times CD}{2}$ teremos:

$$A = \frac{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2}}}{2} \text{ ou seja } A = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$$

Θ₂: estudo das medidas e grandezas geométricas e geometria analítica.

Continuando na geometria analítica, identificamos outra organização matemática (**OM**$_6$) associada a tarefa de calcular a medida da área de um triângulo formado por vetores.

Organização Matemática 6 (OM$_6$)

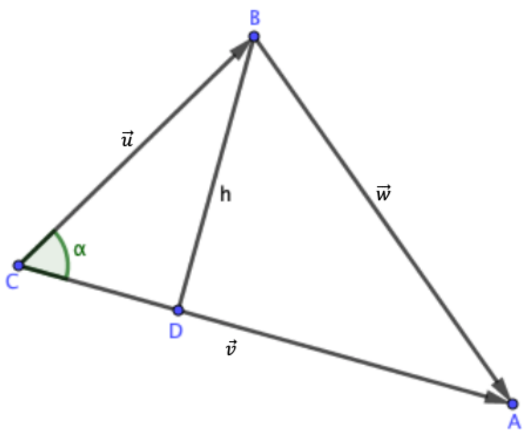
T$_1$: calcular a medida da área de um triângulo.

t$_7$: calcular a medida da área de um triângulo formado por três vetores, sendo dois conhecidos.

τ$_7$: metade do determinante com as coordenadas de seus vértices.

θ$_6$: considerando o triângulo ABC (Figura 21) formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, podemos obter sua medida de área tendo o mesmo ponto de partida da fórmula anterior: $A = \frac{bh}{2}$.

Figura 21 – Triângulo formado por vetores



Fonte: produção da autora

Para calcular a medida da área do triângulo ABC consideramos a altura h como a distância do ponto B ao vetor $\vec{v}$ e α a medida do ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, substituindo na fórmula temos que $A = \frac{|\vec{v}| \cdot h}{2}$. Adotaremos neste trabalho os símbolos | | e ∧ para representar, respectivamente, o módulo de um vetor e o produto vetorial.

A medida h pode ser obtida por meio do seno do ângulo α como já vimos, ou seja, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{|\vec{u}|} \Leftrightarrow h = |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$. Substituindo esse resultado na fórmula vem que $A = \frac{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$ ou seja $A = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{u}|}{2}$. Assim, podemos concluir que a medida da área de um triângulo determinado por dois vetores não colineares, pode ser obtida por meio da metade do módulo do produto vetorial desses vetores.

Θ_2: estudo das medidas e grandezas geométricas na geometria analítica.

Como resultado desta investigação a respeito da gênese da medida da área de triângulos identificarmos algumas organizações matemáticas associadas ao tipo de tarefa "calcular a medida da área de um triângulo", organizamos no quadro 2.

Quadro 2 – Organizações Matemáticas

<table>
<tr><th>Organização Matemática</th><th>Tipo de tarefa (T)</th><th>Tarefa (t)</th><th>Técnica (τ)</th><th>Tecnologia (θ)</th><th>Teoria (Θ)</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="7">T_1: calcular a medida da área de um triângulo.</td><td>t_1</td><td>cálculo da medida da área de um triângulo por meio da composição de um retângulo.</td><td>θ_1</td><td rowspan="5">Θ_1: Estudo das medidas e grandezas geométricas e trigonometria no triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>t_2</td><td rowspan="2">$A = \frac{bh}{2}$</td><td rowspan="2">θ_2</td></tr>
<tr><td>t_3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>t_4</td><td>$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$</td><td>$\theta_3$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>t_5</td><td>$A = \frac{bc \operatorname{sen}\alpha}{2}$</td><td>$\theta_4$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>t_6</td><td>$A = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$</td><td>$\theta_5$</td><td rowspan="2">$\Theta_2$: Estudo de medidas e grandezas geométricas na geometria analítica.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>t_7</td><td>$A = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{u}|}{2}$</td><td>$\theta_6$</td></tr>
</table>

Fonte: produção da autora

Agora que conhecemos a evolução do cálculo da medida da área de triângulo, podemos indagar se a área deve ser tratada como um número ou como uma grandeza. Tal estudo segue no próximo subcapítulo.

3.2 ÁREA: NÚMERO OU GRANDEZA?

Percebemos em nossa revisão bibliográfica diversos entraves entre os alunos durante a aprendizagem de área, tais como confusão entre área e perímetro e o uso equivocado de fórmulas para o cálculo da medida de área. Lima (1995, apud Bellemain e Lima, 2002, p.27),

> destaca ainda que o ensino do conceito de área vem sendo marcado pela ênfase na identificação da área com a medida de área e, muitas vezes, desta última com a "fórmula de área", obscurecendo-se, dessa forma, o conceito de grandeza e as várias etapas do processo de medição de grandezas.

Bellemain e Lima (2002) ressaltam a classificação das concepções de área durante a construção do conceito de área, em dois pólos: as concepções geométricas e as concepções numéricas – propostas por Perrin-Glorian e Douady (1988, apud Bellemain e Lima, 2002) e por Balacheff (1988, apud Bellemain e Lima, 2002).

De acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989, apud Bellemain e Lima, 2002), alguns alunos desenvolvem uma concepção forma (ligada ao quadro[13] geométrico) ou uma concepção número (ligada ao quadro numérico), ou ambas, mas de forma distinta. Segundo Bellemain e Lima (2002, p. 28),

> As concepções numéricas seriam aquelas segundo as quais o aluno só considera os aspectos pertinentes para o cálculo, por exemplo, as medidas de comprimentos característicos da figura, que são combinadas de maneira mais ou menos fundamentada. Neste caso, pode-se adicionar dois lados de um triângulo e multiplicar pelo terceiro lado, para calcular sua área.

As concepções geométricas são classificadas por Balacheff (1988, apud Bellemain e Lima, 2002) como aquelas segundo as quais os alunos confundem os conceitos de área e superfície, perímetro e contorno.

De acordo com Bellemain e Lima (2002), os problemas de área essencialmente relacionam os quadros numérico e geométrico, exigindo uma

---

[13] Referência à teoria dos jogos de quadros e dialética ferramenta-objeto desenvolvida por Douady (1987).

articulação pertinente entre eles na construção do conceito de área. O ponto de vista adotado por Douady e Perrin-Glorian (1989) é a necessidade de distinguir três quadros, com relação ao conceito de área:

- quadro geométrico: constituído por superfícies planas (figuras planas – triângulos, quadriláteros, círculos, figuras de contornos irregulares etc.);
- quadro numérico: constituído das medidas de área das superfícies planas, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos;
- quadro das grandezas: constituído por classes de equivalência de superfícies de mesma área, e que integra os dois primeiros quadros.

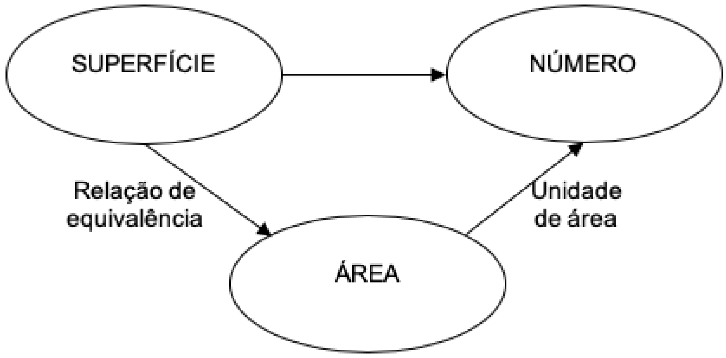
Desta forma,

> a área de uma superfície plana aparece como um objeto matemático distinto da superfície plana, pois superfícies diferentes podem possuir a mesma área. Também se distingue do número que está associado a essa superfície quando se escolhe uma superfície unitária para medi-la, pois mudar a superfície unitária altera a medida de área, mas a área permanece a mesma. (BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 29)

De acordo com Bellemain e Lima (2002, p.43), de uma perspectiva estritamente matemática, a relação de equivalência “ter mesma área” (o que permite considerar área enquanto grandeza), é estabelecida pela escolha de uma unidade seguida da medida das superfícies: “duas superfícies de mesma medida têm mesma área”. Entretanto, Douady e Perrin-Glorian (1989) mostraram que, da perspectiva da aprendizagem, esta construção deve ser anterior à medida, fundamentalmente sendo suportada pela noção de equidecomponibilidade: “duas superfícies equidecomponíveis têm mesma área, isto é, se duas superfícies podem ser decompostas em um número finito de partes, duas a duas congruentes, então elas têm mesma área” (BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 43).

Bellemain e Lima (2002) relacionam os quadros geométrico, numérico e o das grandezas da seguinte como mostra a figura 22.

Figura 22 – Articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas



Fonte: Bellemain e Lima (2002, p. 44) (adaptado)

Nesse esquema são evidenciados elementos de base para o desenvolvimento do estudo das situações que dão sentido ao conceito de área:

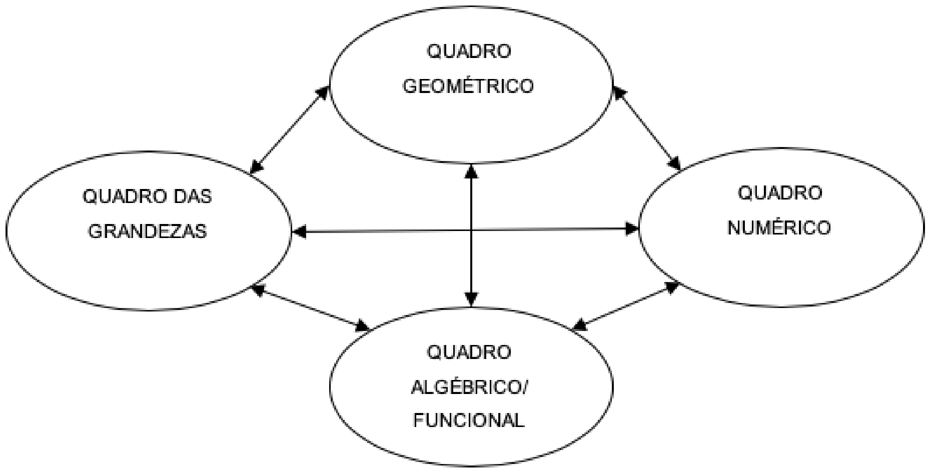
- as superfícies planas (objetos do quadro geométrico)
- as áreas (objetos do quadro das grandezas)
- as medidas de áreas – números reais positivos (objetos do quadro numérico)
- a relação de equivalência “ter mesma área” (objeto que permite passar do quadro geométrico ao das grandezas)
- as unidades de área (objeto que permite passar do quadro das grandezas ao das medidas) (BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 44)

Segundo Bellemain e Lima (2002), a classificação e a análise das situações que dão sentido ao conceito de área necessitam abordar múltiplas situações, dentre elas, as situações de comparação, as de medida e as de produção de superfícies.

Ainda de acordo com Bellemain e Lima (2002), as situações de comparação se posicionam em torno do quadro das grandezas. Ao comparar duas superfícies é necessário decidir se elas pertencem ou não a mesma classe de equivalência. Nas situações de medida, evidenciam-se o quadro numérico e a passagem das grandezas ao número mediante a escolha de uma unidade. Diferenciando-se, do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno, das situações anteriores, as situações de produção admitem, frequentemente, várias respostas corretas; “além disso, apesar de a resposta esperada para uma situação de produção ser uma superfície (objeto geométrico), a intervenção dos outros quadros pode ser tão importante quanto a do quadro geométrico.” (BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 45).

Além dos três quadros considerados por Douady e Perrin-Glorian (1989), Bellemain e Lima (2002) acrescentam o quadro algébrico funcional, que é constituído pelas fórmulas que expressam a área de acordo com comprimentos relativos às figuras geométricas como podemos ver na figura 23.

Figura 23 – Articulação entre os quatro quadros



Fonte: Bellemain e Lima (2002, p. 46)

Com base neste estudo, iremos investigar como a área, em especial a de triângulos, é tratada em alguns dos nossos documentos oficiais para o ensino básico.

3.3 A ÁREA DE TRIÂNGULOS EM DOCUMENTOS OFICIAIS

Com o intuito de investigar o contexto em que a área de triângulos está inserida, tomamos para análise os Parâmetros curriculares nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de todo o ensino básico.

De maneira análoga às conclusões de nossa revisão bibliográfica, os PCN (BRASIL, 1997, p.22) relacionam parte dos problemas relativos ao ensino de Matemática à formação do professor, desde o magistério, ou seja, levando em conta a formação inicial até a formação continuada. Segundo as observações deste documento, “as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória.”

O bloco “Grandezas e Medidas” é justificado pelos PCN (BRASIL, 1997, p.40) “por sua forte relevância social, com evidente caráter prático e utilitário.”, já que está presente (o bloco) em quase todas atividades realizadas na vida em sociedade. Também se destaca por mostrar ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no dia a dia, exercendo assim uma importante função no currículo.

Como um dos objetivos para o ensino de Matemática durante o primeiro ciclo[14], tem-se de “reconhecer grandezas mensuráveis, como comprimento, massa, capacidade e elaborar estratégias pessoais de medida.” (BRASIL, 1997, p.47). Os alunos também terão que aprender a construir e a representar formas geométricas.

Para o segundo ciclo os alunos ampliam o conhecimento anterior, tendo como objetivo identificar características das figuras geométricas, suas semelhanças e diferenças, mediante composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções. Nas descrições dos conteúdos por blocos, temos “composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares.” (BRASIL, 1997, p.60) no bloco “Espaço e forma” e percebemos a introdução do reconhecimento das superfícies e o cálculo da sua medida de área no bloco “Grandezas e Medidas” com os objetivos: “identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, massa, capacidade, superfície, etc.”, “reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como metro, centímetro, quilômetro, [...] metro quadrado, alqueire, etc.” e “cálculo de perímetro e de área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetro e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas”. (BRASIL, 1997, p.61).

Em consonância com o que vimos em nossa revisão bibliográfica, os PCN salientam que as “Grandezas e Medidas” formam “um bloco que possibilita férteis articulações com os outros blocos de conteúdos, uma vez que seu estudo está fortemente conectado com o estudo da Geometria e com os diferentes tipos de números.” (BRASIL, 1998, p.69).

Sobre a apresentação dos conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo, os PCN encerram o bloco “Grandezas e Medidas” com orientações para o trabalho com medidas sem a memorização de fórmulas:

> Assim, neste ciclo, o trabalho com medidas buscará privilegiar as atividades de resolução de problemas e a prática de estimativas em lugar

[14] Os PCN dividem o ensino fundamental em quatro ciclos: 1º ciclo – 1ª e 2ª séries; 2º ciclo – 3ª e 4ª séries; 3º ciclo – 5ª e 6ª séries; 4º ciclo – 7ª e 8ª séries.

> da memorização sem compreensão de fórmulas e de conversões entre diferentes unidades de medidas, muitas vezes pouco usuais. (BRASIL, 1998, p.69)

De acordo com o trecho acima, os PCN apresentam de forma detalhada conceitos e procedimentos por blocos. A parte destinada a Grandezas e Medidas visa que o aluno: reconheça grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, entre outras, e as meça identificando unidades adequadas (padronizadas ou não), fazendo uso de terminologia própria; calcule a medida de área de figuras planas por decomposição ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas.

Visando o desenvolvimento da competência métrica no quarto ciclo, os PCN orientam a exploração de situações que conduzam o aluno a “obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas)” (BRASIL, 1998, p.82).

Os conceitos e procedimentos para o quarto ciclo continuam com o cálculo da medida de área de superfícies planas por composição ou decomposição de figuras e por aproximações. Além destes métodos já conhecidos nos ciclos anteriores, passam a recomendar a “construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência)”. (BRASIL, 1998, p.89).

Tanto em nossa revisão bibliográfica, quanto em nossa discussão sobre a área ser número ou grandeza, percebemos que é frequente a confusão entre área e perímetro no meio dos alunos. Os PCN vão ao encontro de nossas constatações e apresentam possíveis explicações para tal situação. A primeira explicação é o fato de os alunos raramente terem contato com situações-problema que aborde a noção de área e perímetro simultaneamente. Os PCN afirmam que

> Variando as situações propostas (comparar duas figuras que tenham perímetros iguais e áreas diferentes ou que tenham áreas iguais e perímetros diferentes; duas figuras de modo que uma tenha maior perímetro e menor área que a outra ou maior perímetro e maior área) e solicitando aos alunos que construam figuras em que essas situações possam ser observadas, cria-se a possibilidade para que compreendam os conceitos de área e perímetro de forma mais consistente. (BRASIL, 1998, p.131)

A segunda explicação se refere as fórmulas. De acordo com os PCN, os alunos obtêm e utilizam as fórmulas de forma mecânica e acabam não compreendendo os resultados obtidos, além de esquece-las rapidamente. Assim,

> o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações. (BRASIL, 1998, p.131)

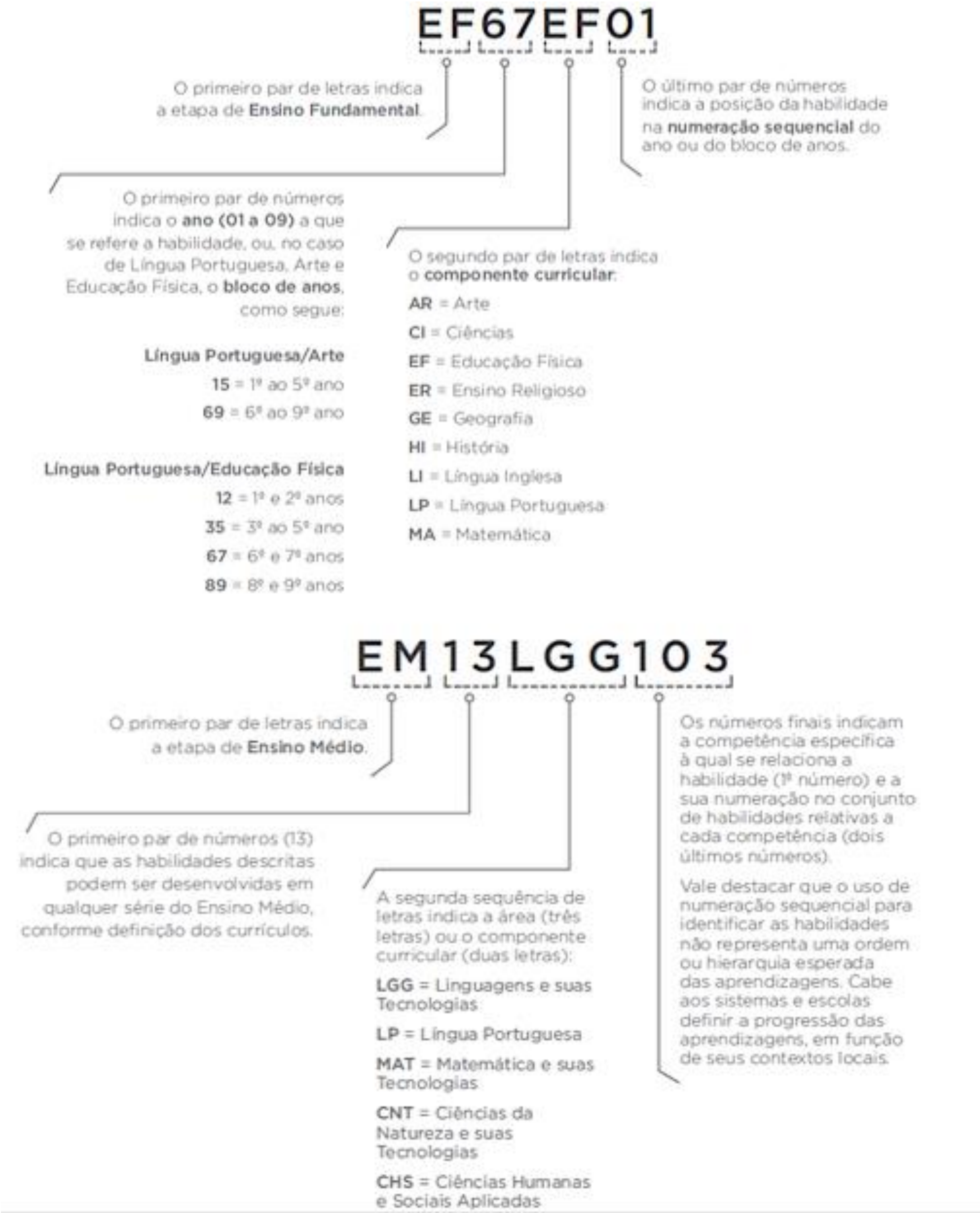
A BNCC do ensino fundamental também ressalta a integração entre a unidade temática Grandezas e medidas e as demais áreas de conhecimento, além da integração com as demais temáticas matemáticas, como “a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico.” (BRASIL, 2018, p.270).

Cada unidade temática apresentada na disciplina de Matemática é composta por objetos de conhecimento (entendidos como conteúdos, conceitos e processos), que se relacionam com diferentes habilidades. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 29) “as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.” Essas habilidades são identificadas por um código alfanumérico como mostra a figura 24.

Para os anos iniciais (do 1º ao 5º ano), a BNCC prevê que os alunos saibam resolver problemas provenientes de situações do dia a dia que envolvam grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos), sem o uso de fórmulas.

Para os anos finais (do 6º ao 9º ano) os alunos devem reconhecer comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas, além de resolver problemas, envolvendo essas grandezas, com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais. É nesta fase que os alunos devem determinar expressões de cálculo de medida de área de quadriláteros, triângulos e círculos. Sobre a área de triângulos, percebemos que a BNCC não orienta quais fórmulas devem ser trabalhadas nos anos finais do ensino fundamental.

Figura 24 – Código alfanumérico das habilidades da BNCC para o EF e EM



Fonte: Brasil (2018, p. 30 e 34)

Para o 6º ano é previsto que os alunos se deparem com problemas que envolvam as grandezas: comprimento, massa, temperatura, área, capacidade e volume para que desenvolvam a habilidade (EF06MA24) de

> Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2018, p.303)

Durante o 7º ano, são apresentadas três habilidades que envolvem o ensino de área de triângulos. A habilidade EF07MA29 consiste na resolução e elaboração de problemas que “envolvam medidas de grandezas, inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.” (BRASIL, 2018, p. 309). É neste ano escolar que devem ser introduzidas as fórmulas para o cálculo da medida de áreas de triângulos e quadriláteros (habilidade EF07MA31), mas os alunos também devem trabalhar a resolução e a elaboração de “problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.” (BRASIL, 2018, p.309), desenvolvendo a habilidade EF07MA32.

Para o 8º ano, a BNCC (2018, p. 315) prevê que o aluno tenha a habilidade (EF08MA19) de “resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.”

Para o 9º não observamos alguma habilidade específica voltada ao ensino de área de triângulos.

A BNCC do ensino médio apresenta competências específicas e habilidades que devem ser desenvolvidas nesta etapa final do ensino básico. A competência específica 3,

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p.527)

apresenta como uma de suas habilidades (EM13MAT307) a obtenção da medida de área de uma superfície (por reconfigurações, aproximação por cortes, etc.) e a dedução de expressões para o cálculo de tal medida, para a aplicação em situações reais, como “o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.” (BRASIL, 2018, p.528).

Após observarmos como o estudo da área é dado nestes dois documentos oficiais e tendo em mente nossas investigações anteriores, iremos verificar como a área de triângulos é abordada em três coleções de livros didáticos distribuídas pelo PNLD.

3.4 A ÁREA DE TRIÂNGULOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Para observarmos melhor como a área de triângulo está sendo trabalhada no ensino básico, optamos por analisar uma coleção de livros didáticos de matemática por etapa de ensino, tendo como critério de escolha a coleção mais vendida dentre aquelas recomendadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[15]. É importante ressaltarmos que não analisamos estas coleções à luz da TAD porque exigiria um foco diferente do objeto de preocupação de nosso trabalho.

As três coleções escolhidas são:

- Ensino Fundamental I: Projeto Ápis – Editora Ática (coleção mais vendida pelo PNLD 2016);
- Ensino Fundamental II: Praticando Matemática – Editora do Brasil (coleção mais vendida pelo PNLD 2017);
- Ensino Médio: Matemática: Contexto e aplicações – Editora Ática (coleção mais vendida pelo PNLD 2015)

Não conseguimos a versão do PNLD da coleção Projeto Ápis, por isso estamos analisando a versão fornecida pela editora. Esta coleção possui em todas os volumes um capítulo dedicado ao estudo das Grandezas, sendo a área estudada a partir do 4º ano.

O livro inicia este estudo com a malha quadriculada e a contagem de quadradinhos para medir a superfície das regiões planas e associa a medida de área com o centímetro quadrado como unidade de medida. Neste volume não são distinguidas as diferenças de cálculo para cada figura geométrica.

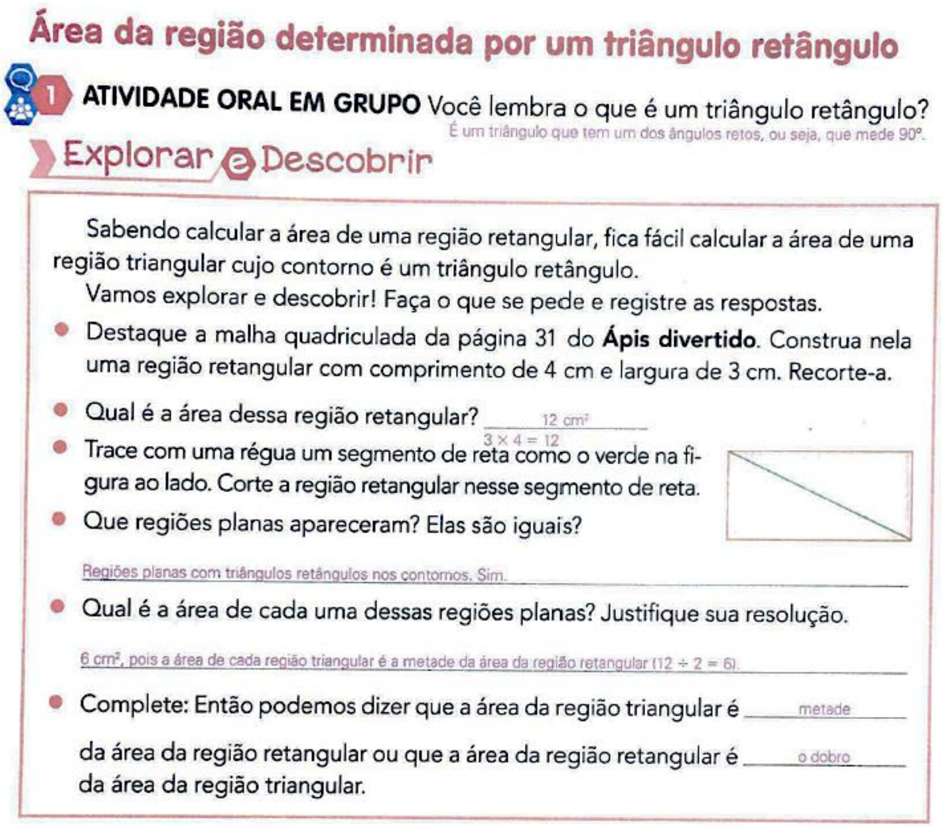
No volume do 5º ano é retomado o estudo de área com a malha quadriculada e é destacada a área da região retangular, quadrada e da área da região determinada por um triângulo retângulo.

---

[15] De acordo com PNLD (2018), o PNLD “é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.”

Para iniciar o estudo de área de um triângulo retângulo, o livro retoma retângulo (Figura 25), definindo-o como um triângulo que possui um dos ângulos com medida de 90º, e explora a sua medida de área a partir da decomposição de um retângulo.

Figura 25 – Explicação para a "Área da região determinada por um triângulo retângulo"



Área da região determinada por um triângulo retângulo

1 **ATIVIDADE ORAL EM GRUPO** Você lembra o que é um triângulo retângulo?
É um triângulo que tem um dos ângulos retos, ou seja, que mede 90°.

Explorar e Descobrir

Sabendo calcular a área de uma região retangular, fica fácil calcular a área de uma região triangular cujo contorno é um triângulo retângulo.

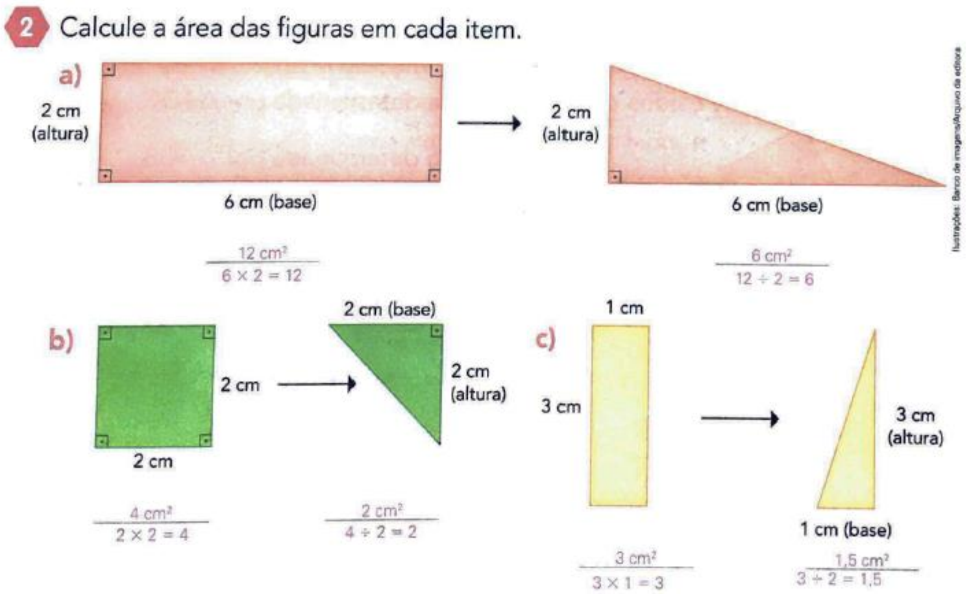
Vamos explorar e descobrir! Faça o que se pede e registre as respostas.

- Destaque a malha quadriculada da página 31 do **Ápis divertido**. Construa nela uma região retangular com comprimento de 4 cm e largura de 3 cm. Recorte-a.
- Qual é a área dessa região retangular? 12 cm² ($3 \times 4 = 12$)
- Trace com uma régua um segmento de reta como o verde na figura ao lado. Corte a região retangular nesse segmento de reta.
- Que regiões planas apareceram? Elas são iguais?
Regiões planas com triângulos retângulos nos contornos. Sim.
- Qual é a área de cada uma dessas regiões planas? Justifique sua resolução.
6 cm², pois a área de cada região triangular é a metade da área da região retangular ($12 \div 2 = 6$).
- Complete: Então podemos dizer que a área da região triangular é metade da área da região retangular ou que a área da região retangular é o dobro da área da região triangular.

Fonte: Dante (2017, p.327)

Após tal exposição o livro apresenta três tipos de exercícios. No primeiro exercício (Figura 26) é dada a figura de um retângulo e de um triângulo formado traçando sua diagonal, e as medidas de todos os lados, e pede-se para calcular as medidas de áreas das figuras. Espera-se que o aluno calcule a medida de área do retângulo e depois divida esta medida por dois para determinar a medida de área do triângulo.

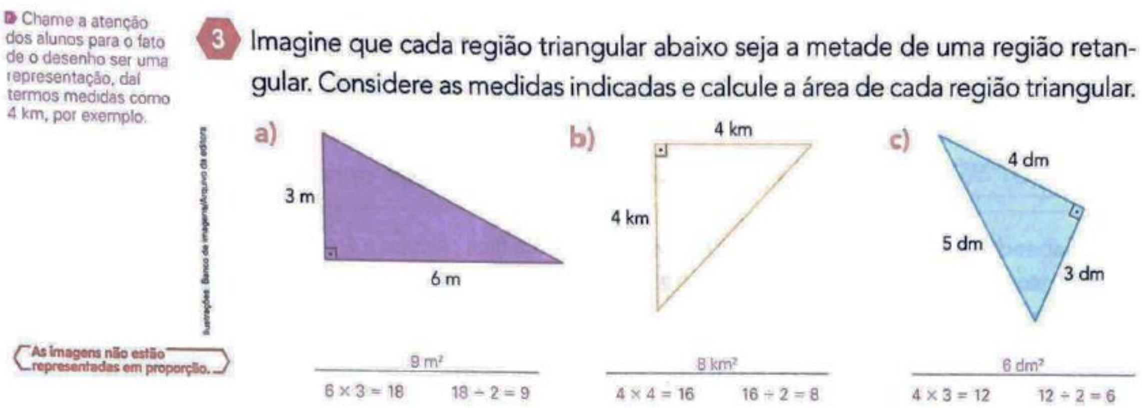
Figura 26 – Medida da área de triângulo por decomposição de um retângulo



Fonte: Dante (2017, p.327)

O segundo exercício (Figura 27) pede para o aluno imaginar que cada região triangular apresentada seja a metade de uma região retangular, e a partir das figuras e medidas dadas ele deve calcular a medida de área dos triângulos representados.

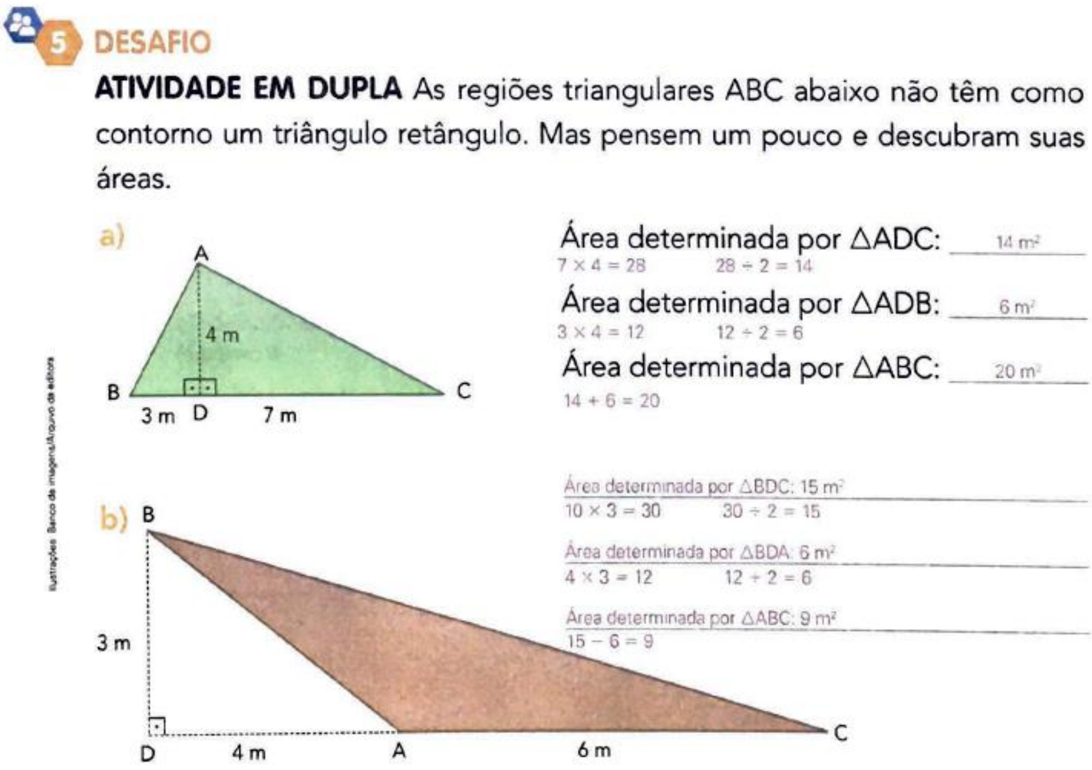
Figura 27 – Medida da área de triângulo retângulo por meio da composição de um retângulo



Fonte: Dante (2017, p. 328)

O terceiro tipo de exercício (Figura 28) é dado como um desafio, pois os triângulos representados não são retângulos. O livro induz o aluno a decompor as figuras em triângulos retângulos, e depois determinar a medida de área do triângulo dado.

Figura 28 – Medida de área de um triângulo por meio de decomposição



Fonte: Dante (2017, p. 328)

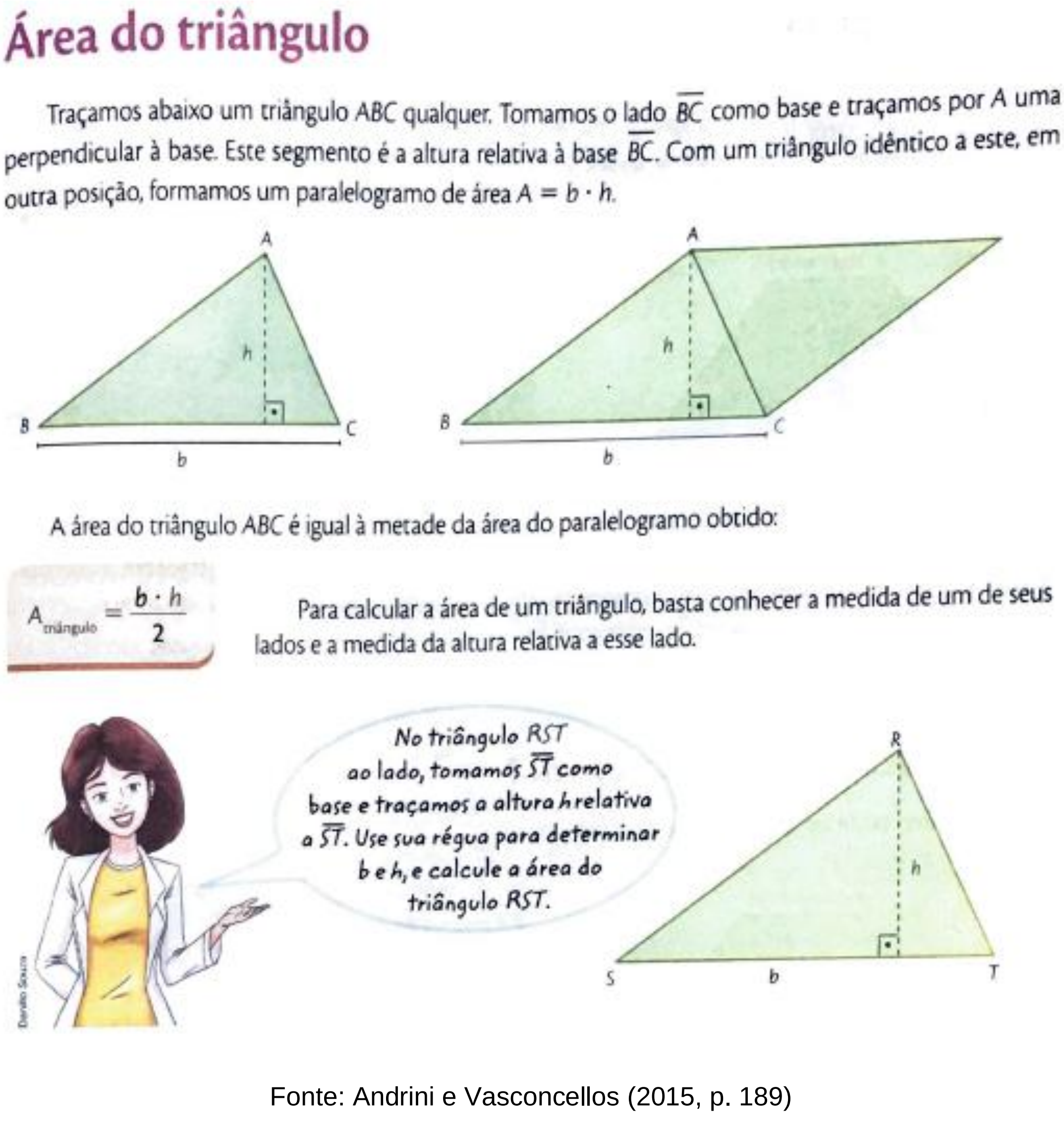
Podemos perceber que, embora esta coleção não generalize e institucionalize uma fórmula, a medida de área de um triângulo já é apresentada para os alunos do 5º ano como metade da medida de área de um retângulo. Entendemos que tal abordagem está de acordo com a BNCC, já que não introduz o uso de fórmulas. Também está em consonância com nosso estudo histórico que apresenta como primeira técnica a percepção da área do triângulo enquanto metade da área de um retângulo.

A coleção Praticando Matemática não possui capítulos dedicados às grandezas em todos os volumes. O volume do 6º ano possui 14 capítulos, sendo o último dedicado ao estudo das medidas, e as grandezas abordadas neste capítulo são: área; volume e massa. O livro define área da seguinte forma: “Quando se coloca carpete no piso de uma sala, forra-se a **superfície** desse piso. [...] Uma superfície pode ser medida. A medida de uma superfície é a sua **área**.” (ANDRINI E VASCONCELLOS, 2015, p. 250). Em seguida o livro apresenta como determinar a medida de área do retângulo e do quadrado, multiplicando a medida de seu comprimento por sua largura.

O estudo da área continua no capítulo 8 do volume do 7º ano, que possui 11 capítulos no total. Neste volume é retomado o cálculo de medida de área do retângulo e do quadrado, além de apresentar fórmulas para o cálculo da medida de área do paralelogramo, triângulo, trapézio e losango.

A fórmula apresentada para o cálculo da medida de área de um triângulo (Figura 29) é o semiproduto entre a medida de um dos lados do triângulo e a medida de sua altura respectiva, obtida por meio da composição de um paralelogramo.

Figura 29 – Área do triângulo no volume do 7º ano da coleção Praticando Matemática



Área do triângulo

Traçamos abaixo um triângulo ABC qualquer. Tomamos o lado $\overline{BC}$ como base e traçamos por A uma perpendicular à base. Este segmento é a altura relativa à base $\overline{BC}$. Com um triângulo idêntico a este, em outra posição, formamos um paralelogramo de área $A = b \cdot h$.

A área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo obtido:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Para calcular a área de um triângulo, basta conhecer a medida de um de seus lados e a medida da altura relativa a esse lado.

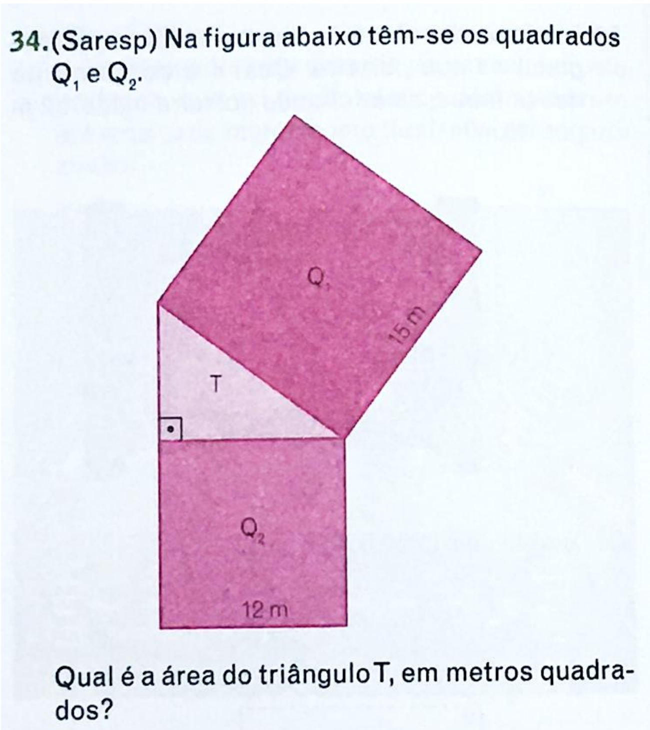
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 189)

Embora a fórmula $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$ exija que o aluno saiba identificar as alturas do triângulo, o livro apresenta este conteúdo depois de institucionaliza-la.

O volume do 8º ano desta coleção não apresenta capítulo dedicado às grandezas. Sobre os triângulos, são abordadas as propriedades, congruência e elementos do triângulo.

O volume do 9º ano apresenta o estudo da área do círculo e da superfície de um cilindro. Sobre os triângulos, são dedicados dois capítulos para semelhança de triângulos; teorema de Tales; e relações métricas no triângulo retângulo. Entre os exercícios propostos, existem os que têm como tarefa o cálculo da área de um triângulo, como mostrado na figura 30, e está proposto para treinar relações métricas nos triângulos retângulos.

Figura 30 – Exercício 34 do volume 9 da coleção Praticando Matemática



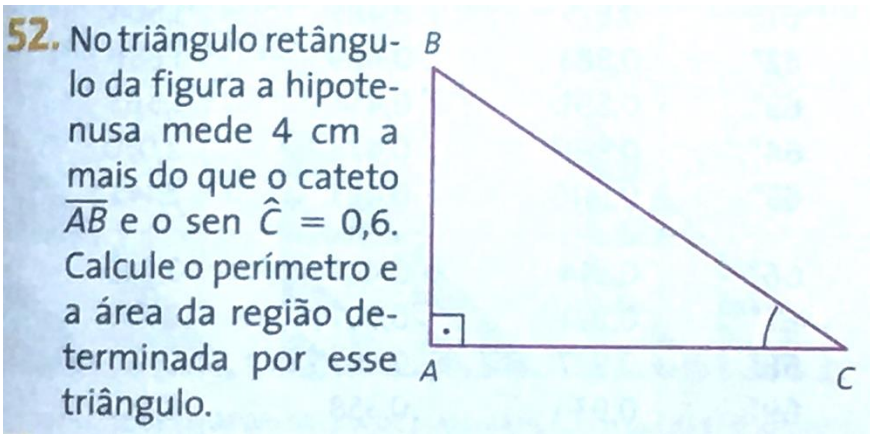
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 202)

Tal exercício tem como tarefa calcular a medida da área do triângulo T, e tem como técnica o semiproduto entre a medida de um de seus lados e a medida de sua altura respectiva, porém, para determinarmos a altura é necessário aplicar o teorema de Pitágoras.

Podemos perceber a predominância da fórmula $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$ na coleção Praticando Matemática, já que esta é a única forma apresentada para se obter a medida de área de um triângulo. Também podemos observar que a área de triângulo não é muito explorada no estudo de outros conteúdos, aparecendo somente no volume do 9º ano junto com o estudo do Teorema de Pitágoras.

A coleção Matemática: contexto & aplicações não apresenta capítulos exclusivos para o estudo das grandezas em suas três unidades. O primeiro volume contém 8 capítulos e nenhum é dedicado às grandezas. Quanto aos triângulos, o último capítulo aborda a trigonometria no triângulo retângulo e contém exercícios como o apresentado na figura 31.

Figura 31 – Exercício do volume 1 da coleção Matemática: contexto & aplicações



Fonte: Dante (2016, p.259)

A tarefa deste exercício é determinar a medida da área e o perímetro do triângulo dado. Para aplicarmos a fórmula previamente conhecida, é necessário determinar as medidas dos lados, utilizando a trigonometria.

O 2º volume desta coleção retoma o estudo da área de figuras planas, dentre elas o triângulo. Sobre a área do triângulo, inicia-se com a demonstração da fórmula já conhecida, por meio da composição de um paralelogramo, e formalizando-a como: “a área de um triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura correspondente.” (DANTE, 2016, p.127).

Posteriormente o livro apresenta outras três maneiras para se determinar a medida de área de um triângulo: área de um triângulo equilátero; área do triângulo por meio da trigonometria; e área do triângulo sendo conhecido os três lados.

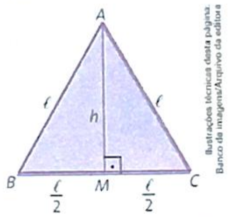
Decompondo um triângulo equilátero de lado *l* em dois triângulos retângulos, é possível determinar a medida de uma das alturas por meio do teorema de Pitágoras. Depois, substituindo na fórmula já conhecida, $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$, concluímos que é possível calcular a medida de área de um triângulo equilátero pela fórmula $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, conforme a figura 32.

Figura 32 – Área de um triângulo equilátero - Coleção Matemática: contexto & aplicações

Área de um triângulo equilátero

No triângulo equilátero, todos os lados são congruentes (ℓ, ℓ e ℓ), todos os ângulos internos são congruentes (60°, 60° e 60°), e toda altura é também mediana e bissetriz.

Veja o cálculo da área, usando a base (ℓ) e a altura (h):



Fique atento!
Mediana é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

O triângulo AMC é retângulo em M e, portanto, vale a relação de Pitágoras:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ (área do triângulo equilátero de lado ℓ).

Fonte: Dante (2016, p.128)

Em seguida, é apresentada a demonstração do cálculo da medida de área por meio da trigonometria, dado um triângulo e sendo conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo formado entre eles. Tal demonstração também parte da fórmula $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$, sendo necessário determinar uma das alturas para utilizá-la. Para isso, traça-se uma altura de modo que ela seja oposta ao ângulo dado, e assim, por meio do seno deste ângulo é possível determinar a medida desta altura. Depois, substituindo na primeira fórmula, teremos: $A = \frac{ab\,\text{sen}\,\alpha}{2}$. O livro conclui tal explicação afirmando que: “A área S de qualquer triângulo é igual à metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado por eles.” (DANTE, 2016, p. 129), de acordo com a figura 33.

Figura 33 – Área do triângulo por meio da trigonometria – Contexto & aplicações

Área do triângulo por meio da Trigonometria

Este caso se aplica quando são conhecidos dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles.

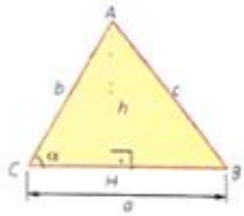
Observe que LAL (*Lado, Ângulo, Lado*) é um caso de congruência de triângulos, o que significa que um triângulo fica perfeitamente determinado quando conhecemos dois de seus lados e o ângulo formado por eles.

Consideremos o triângulo ABC representado na figura abaixo.

Suponhamos que sejam conhecidas as medidas dos lados AC e CB e o ângulo formado por eles, $A\hat{B}C$. Vamos indicar essas medidas assim: $AC = b$, $CB = a$ e $A\hat{C}B = \alpha$ para facilitar a demonstração.

Seja h a altura relativa à base $\overline{BC}$.

Sabemos que a área desse triângulo é dada por $S = \dfrac{ah}{2}$.



Se nós conhecemos α, podemos escrever $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{h}{b}$, já que ACH é um triângulo retângulo.

Agora, podemos encontrar a altura em função de α e b:

$$h = b \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Assim, a área será dada por:

$$S = \frac{ab \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

Para refletir
Se no triângulo retângulo podemos dizer que a área vale a metade do produto das medidas dos catetos, o que se pode concluir quanto ao valor do seno de 90°? sen 90° = 1

O triângulo possui três alturas, cada uma dependendo do lado que considerarmos como base. Então, suponha que sejam conhecidos dois lados, AB e BC, por exemplo, e o ângulo formado por eles seja $A\hat{B}C$. Verifique que a igualdade vista anteriormente também vale para eles.

Isso nos permite afirmar que:

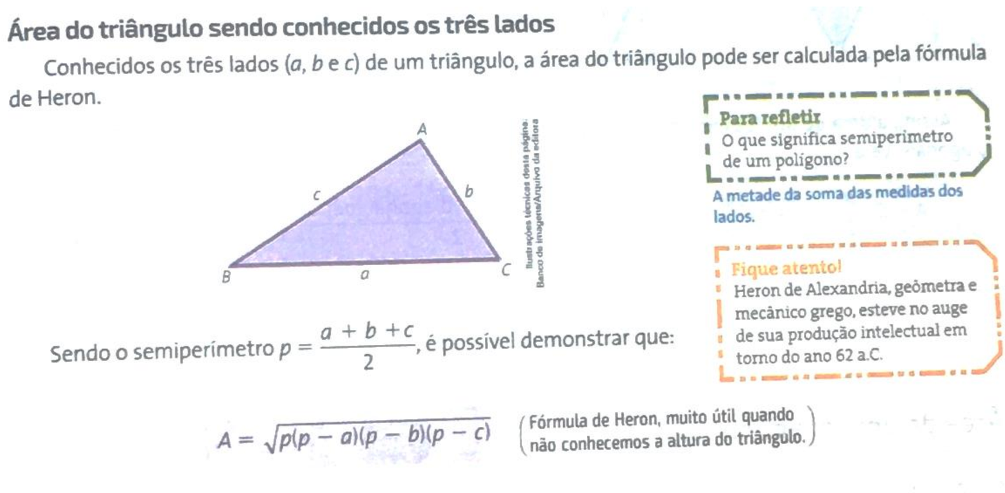
A área S de qualquer triângulo é igual à metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado por eles.

Fique atento!
Esta conclusão se estende aos triângulos obtusângulos, ou seja, aqueles que têm um dos ângulos maior que 90°.

Fonte: Dante (2016, p.128 e 129)

Por último, o livro apresenta o cálculo da medida de área de um triângulo conhecendo-se as medidas de seus três lados, ou seja, a fórmula de Heron. Para esta fórmula o livro não apresenta demonstração, conforme a figura 34.

Figura 34 – Área do triângulo sendo conhecidos os três lados - Contexto & aplicações



Fonte: Dante (2016, p.129)

O volume 3 da coleção apresenta o cálculo da medida de área de uma região triangular, compondo o capítulo "Geometria analítica: ponto e reta". Dadas as coordenadas dos vértices de um triângulo, é possível determinar a medida de sua área por meio da metade do módulo do determinante composto por suas coordenadas. É apresentada a demonstração para tal cálculo, seguida de alguns exercícios propostos. O livro do professor apresenta a observação "Assunto opcional" logo no início da página, reforçada por uma das sugestões ao final do livro "Como temas opcionais apresentamos o estudo do ângulo formado por duas retas e área de triângulos." (DANTE, 2016, p.310).

Esta coleção apresenta outros meios de se obter a medida de área de um triângulo, além da fórmula usual, e podemos perceber a preocupação do autor de sempre apresentar as demonstrações para as fórmulas, com exceção da fórmula de Heron. O primeiro volume também privilegia a fórmula $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$, já que as demais são apresentadas no volume 2 e 3.

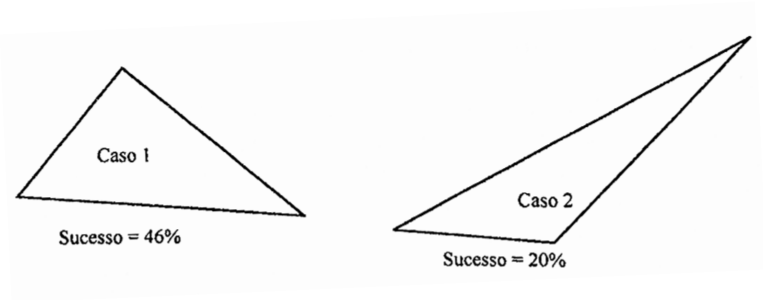
Então, com base na análise das três coleções mais vendidas pelo PNLD, podemos inferir que, contrariando os PCN, os alunos aprendem a calcular a medida de área de um triângulo com a fórmula $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$ no 7º ano, e até a 2ª série do Ensino Médio ele não aprende outro método, mesmo tendo conteúdos/ temas no currículo que, se aprendidos, permitiriam trabalhar com outras noções e conceitos matemáticos que possibilitariam o uso de outras técnicas.

Assim, após investigarmos o histórico dos estudos sobre área de triângulo, discutirmos o porquê da área ser considerada uma grandeza, verificarmos como a área de triângulos é abordada nos documentos oficiais e nos livros didáticos, proporemos no próximo capítulo organizações didáticas que ilustram o alcance das fórmulas demonstradas e como podem ser aplicadas em sala de aula.

4 POSSÍVEIS PRAXEOLOGIAS PARA MEDIDA DE ÁREA DE TRIÂNGULOS

Em um estudo que trata de avaliação, Bodin (1988 apud Almouloud, 2007, p.100) traçou como objetivo para um grupo de alunos a seguinte tarefa: “tendo um triângulo desenhado numa folha de papel, o aluno deve ser capaz de fazer o levantamento das medidas necessárias e calcular um valor aproximado da área desse triângulo”. O primeiro triângulo foi desenhado com o lado de maior medida paralelo a margem inferior da folha de papel, enquanto o segundo foi desenhado em outra posição (Figura 35), e os alunos apresentaram 46% de sucesso no caso 1 e 20% no caso 2.

Figura 35 – Casos investigados por Bodin



Fonte: Bodin (1988 apud Almouloud, 2007, p. 100)

De acordo com Almouloud (2007, p.102), este caso pode ser reconhecido como um saber-fazer, pois foi mobilizado um conhecimento “na resolução de uma determinada situação, o que não garante que o aluno seja capaz de mobilizar este saber-fazer no cumprimento de outras tarefas.”. Assim, podemos inferir que o resultado obtido na realização desta tarefa corrobora o que foi afirmado por Chevallard (1990) em nossa problemática, sobre alguns conhecimentos que não são fixados por não terem sido institucionalizados como saber.

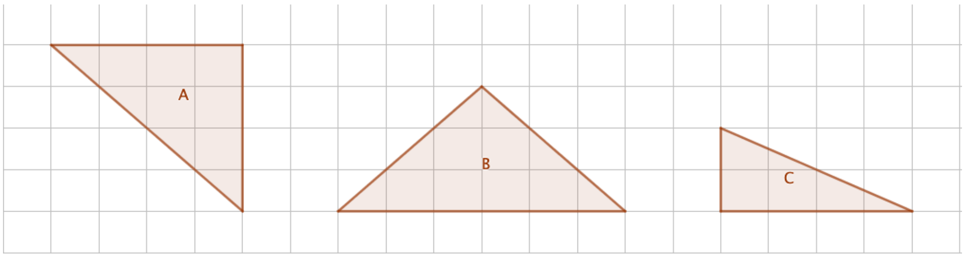
Neste sentido, o presente capítulo apresentará 6 organizações (ou praxeologias) didáticas para o ensino de área de triângulos para estudantes do 6º ano do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio, que ilustram o alcance das técnicas demonstradas neste trabalho e que podem ser aplicadas em sala de aula. Baseando-nos nas investigações feitas ao longo deste trabalho, acreditamos que ao final destas organizações o aluno teria condições executar a tarefa “calcular a medida da área de um triângulo”, considerando o panorama geral das aprendizagens que realizou em sua trajetória escolar, de modo a demonstrar competência em relação ao tema.

Entendemos como competência matemática a definição de Niss & Hojgaard (2011 apud GERANIOU, 2019, p.35 – tradução nossa): “ter conhecimento, compreensão, fazendo, usando e tendo uma opinião sobre matemática e atividade matemática em uma variedade de contextos em que a matemática desempenha ou pode desempenhar um papel”[16].

ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA 1 (OD_1)

A OD_1 objetiva mobilizar a OM_1, em que a técnica é a percepção que a área de um triângulo corresponde a metade da área de um retângulo, e está direcionada a alunos do 6º ano do ensino básico.

Atividade 1: Ao observarmos uma figura na malha quadriculada, podemos determinar sua medida de área contando a quantidade de quadradinhos que cabem nela. Qual a medida da área dos triângulos representados?



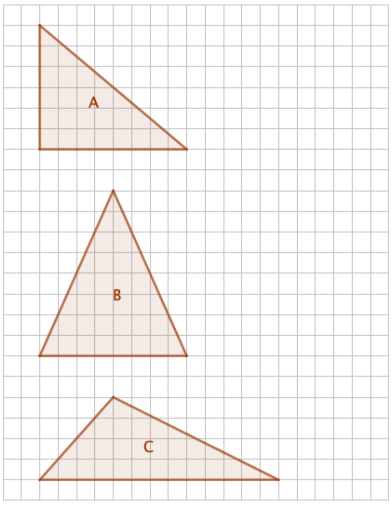
A escolha da malha quadriculada, como uma variável didática[17] nas três primeiras atividades permite, por meio da contagem dos quadradinhos, a verificação da área da figura, possibilitando aos alunos a percepção de figuras com formas diferentes com a mesma área, e figuras com a mesma forma que possuem ou não a mesma área. Pretendemos que ao final das atividades o aluno perceba que o espaço ocupado pela figura representa a sua área e que sua medida pode sofrer alterações de acordo com a unidade de medida escolhida; que é possível compor um quadrilátero (retângulo, paralelogramo ou quadrado) com triângulos, e assim chegar à conclusão de que a área deste quadrilátero é o dobro da área do

[16] “having knowledge of, understanding, doing, using and having an opinion about mathematics and mathematical activity in a variety of contexts where mathematics plays or can play a role”

[17] “[...] uma variável didática de um problema ou situação é uma variável cujos valores podem ser alterados pelo professor e cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintos.” (ALMOULOUD, 2016, p.121)

triângulo que o compõe. A atividade 1 tem por objetivo reforçar a noção de área por meio do ladrilhamento de superfícies e que identifiquem a necessidade da utilização de uma unidade padrão de medida.

Atividade 2: O papel quadriculado que você recebeu tem três triângulos desenhados. Siga as instruções a seguir para realizar as tarefas pedidas e responder as perguntas.[18]



Parte 1: Desenhe outro triângulo do mesmo tamanho do triângulo A. Recorte os dois triângulos e ligue-os com fita adesiva para formar um retângulo.
a) Qual é a área do retângulo que você montou?

b) Quantos triângulos "A" você usou para formar o retângulo?

c) Qual é a área do triângulo A, ou seja, de um dos triângulos usados na construção do retângulo?

Parte 2: Desenhe uma reta dividindo o triângulo B em dois triângulos iguais. Recorte os dois pequenos triângulos e ligue-os com fita adesiva para formar um retângulo.
a) Qual a área do retângulo que você montou?

b) Quantos triângulos "B" você usou para formar o retângulo?

c) Qual é a área do triângulo B, ou seja, do triângulo usado na construção do retângulo?

Parte 3: Desenhe outro triângulo do mesmo tamanho do triângulo C. Recorte os dois triângulos e ligue-os com fita adesiva para formar um paralelogramo.

a) Qual a área do paralelogramo que você montou?

b) Quantos triângulos "C" você usou para formar o paralelogramo?

c) Qual a área do triângulo C, ou seja, de um dos triângulos usados na construção do paralelogramo?

[18] Fonte: (GAZZETTA, 1986, p.156)

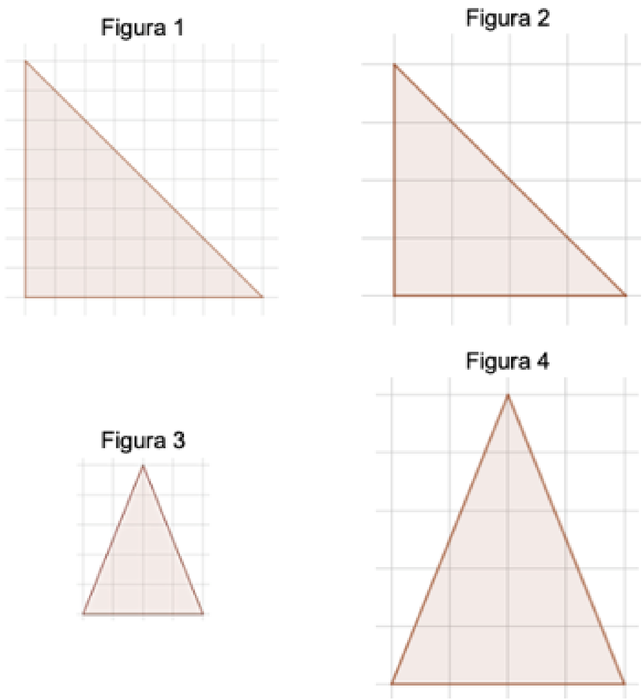
A atividade 2 objetiva que os alunos calculem a medida da área dos triângulos dados por meio da composição de retângulos e paralelogramos, cujas áreas já aprenderam a calcular, e tomando os quadradinhos da malha como unidade de medida. Esta atividade contribui para a noção da área de um triângulo enquanto metade de um retângulo. Para determinar a medida da área do triângulo A o aluno precisará duplicar o triângulo dado para compor um retângulo, calcular a medida da área do retângulo formado, e depois dividi-la por 2. Para o cálculo da medida da área do triângulo B, o aluno precisará decompor o triângulo dado em dois triângulos retângulos e compor um retângulo. Como este retângulo é formado pela superfície do triângulo B, suas áreas serão equivalentes, não necessitando da divisão por 2 ao final. O triângulo C também precisará ser duplicado e comporá um paralelogramo. A medida da área do paralelogramo também pode ser determinada por meio da composição de um retângulo.

Atividade 3[19]

a) Utilizando a área da superfície do quadradinho de cada figura como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área tem cada figura.

b) Quais conclusões você pode tirar observando as figuras 1 e 2?

c) Quais conclusões você pode tirar observando as figuras 3 e 4?



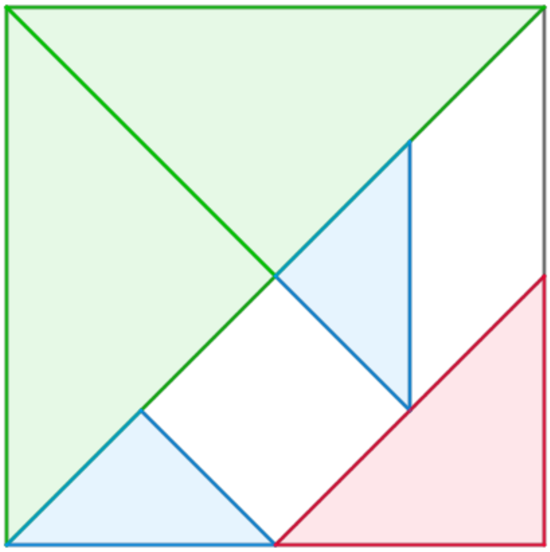
---

[19] Fonte: (FACCO, 2003, p. 67) (adaptada)

A atividade 3 objetiva conduzir os alunos a reconhecerem "superfícies de figuras de mesma área com medidas de área diferentes, como também, superfícies de figuras com áreas diferentes com medidas de área iguais." (FACCO, 2003, p.67). O tamanho dos quadradinhos, que servem como unidade de medida, permite a contagem e a possível observação das diferenças entre as figuras 1, 2, 3 e 4. As figuras 1 e 2 são representadas por triângulos congruentes com quantidade de quadradinhos diferentes, enquanto os triângulos 3 e 4 possuem a mesma quantidade de quadradinhos, porém não são congruentes. O que diferencia as figuras nos dois casos é a superfície de cada quadradinho que está sendo tomado como unidade de medida. No item a esperamos que os alunos respondam que a figura 1 tem 32 quadradinhos, a 2 tem 8 quadradinhos, e as figuras 3 e 4 têm 10 quadradinhos cada. Como os itens b e c são questões mais reflexivas e analíticas, pode ser que os alunos tenham mais dificuldades em acertá-los, porém, de acordo com Facco (2003), entenderemos como acerto se eles responderem que as figuras 1 e 2 têm o mesmo tamanho e quantidade de quadradinhos diferentes e as figuras 3 e 4 têm tamanhos diferentes e a mesma quantidade de quadradinhos.

Atividade 4[20]: Você está recebendo um jogo chamado Tangram, contendo 7 peças. Forme figuras com estas peças, obedecendo as seguintes regras:

- não deve haver sobreposição de peças;
- um lado de uma peça deve encostar no lado de outra peça.



[20] Fonte: (FACCO, 2003, p. 102)

Parte 1

a) Forme figuras utilizando somente os dois triângulos pequenos (azuis).

b) Registre no espaço abaixo o contorno de cada uma das figuras que você formou e pinte suas superfícies. Identifique suas figuras numerando-as.

c) Qual a medida da área de superfície de cada figura construída?

d) Qual a medida da área de cada um dos dois triângulos?

Parte 2

a) Agora forme figuras utilizando os dois triângulos pequenos (azuis) e um triângulo médio (vermelho).

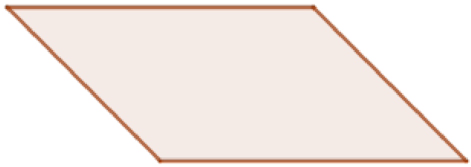
b) Registre no espaço abaixo o contorno de cada uma das figuras que você formou e pinte suas superfícies. Identifique as figuras numerando-as.

c) Qual a medida da área da superfície de cada figura construída?

d) Qual a medida da área de cada um dos três triângulos?

Parte 3

a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



b) Utilize as mesmas peças para formar um quadrado. Desenhe e pinte essa superfície.

c) Qual a medida da área da superfície desse quadrado?

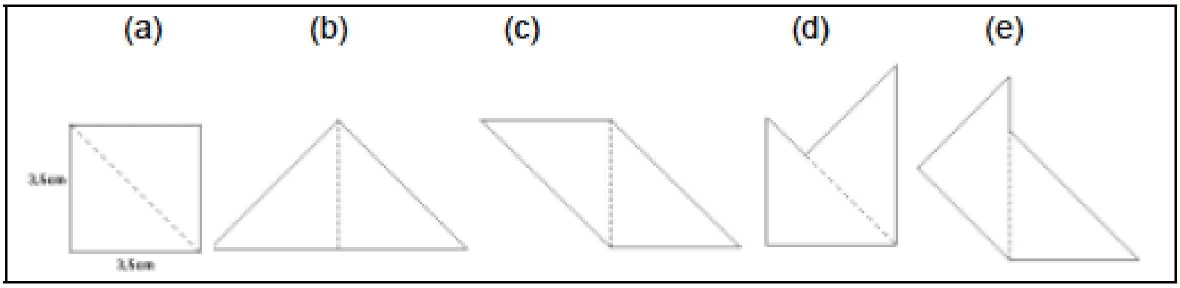
d) Qual a medida da área da superfície do paralelogramo?

e) Alterar a forma da figura, altera também a medida de sua área? Justifique sua resposta.

A atividade 4 objetiva aprofundar a compreensão da medida de área por meio do processo da decomposição e composição de figuras. Os alunos deverão compor figuras com as peças do Tangram, e depois calcular suas medidas de área utilizando medições obtidas com a régua, o que pode resultar em resultados aproximados, representados por números decimais. Para esta atividade os alunos deverão ter as 7 peças do Tangram, régua, lápis e uma folha com as tarefas e espaço para cumpri-las.

Nas atividades I e II, os alunos poderão construir diferentes formas utilizando as peças orientadas, e deverão passar tais figuras para o papel por meio da ação de contorna-las com lápis. A figura 36 representa possibilidades de composição da atividade I.

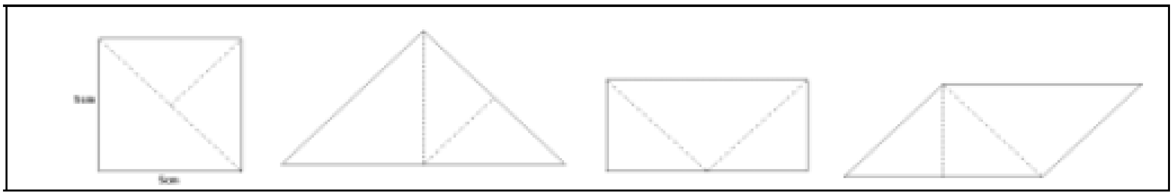
Figura 36 – Exemplos de composição de figuras com duas peças do Tangram



Fonte: Facco (2003, p.104)

A construção de um quadrado nas atividades I e II facilitaria o cálculo da medida de área de todas as figuras construídas, já que todas possuem superfícies diferentes e medidas de área iguais. É esperado que os alunos tenham esta percepção ao final destas atividades. A figura 37 representa possibilidades de composição para a atividade II.

Figura 37 – Exemplos de composição de figuras com três peças do Tangram



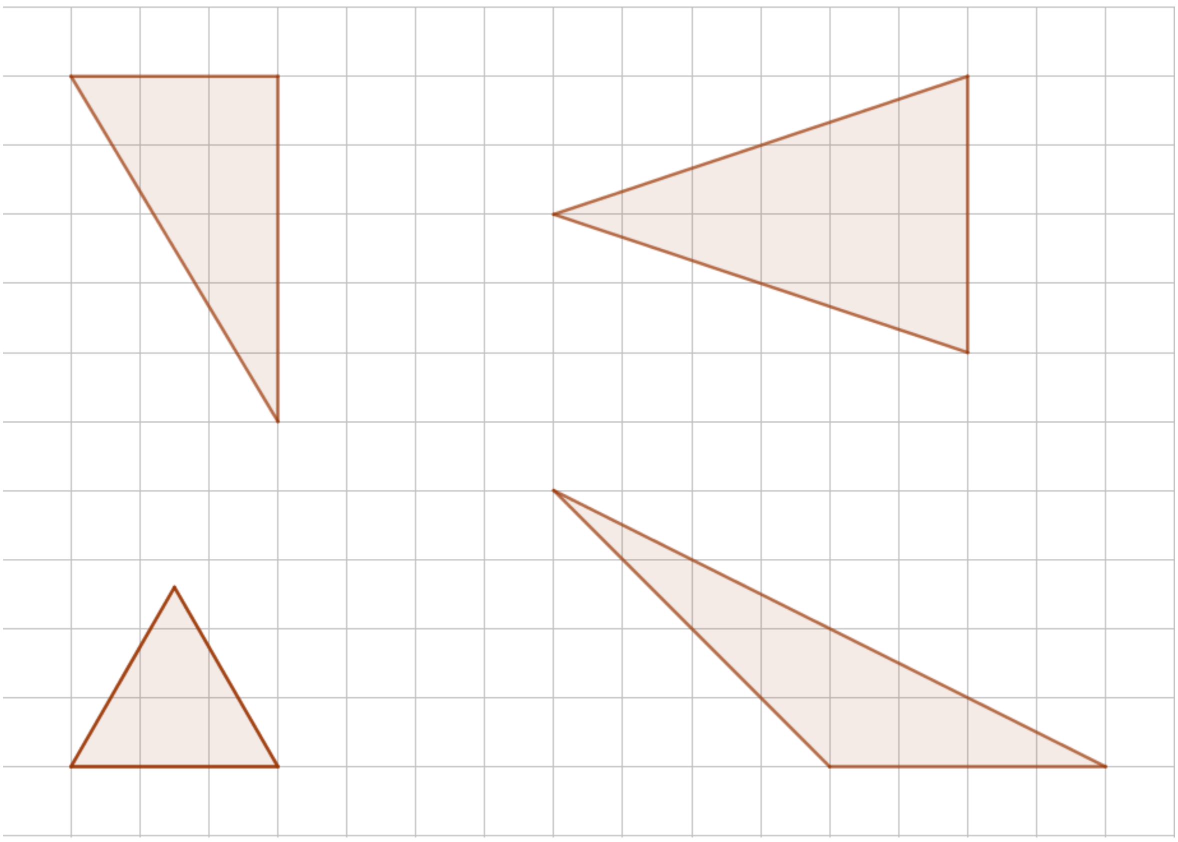
Fonte: Facco (2003, p.108)

Para responder o item d da atividade I, espera-se que os alunos percebam que se dividirmos por dois a medida de área encontrada nas composições, obtém-se a medida da área de cada um dos triângulos, consolidando a ideia de que a medida de área de um triângulo corresponde a metade da medida da área de um retângulo. E, para o item d da atividade II, espera-se que os alunos percebam que os dois triângulos pequenos compõem o triângulo vermelho, e assim obter sua medida de área utilizando os resultados da atividade I, e reforçando a ideia do uso da decomposição de figuras para o cálculo da medida de área.

A atividade III objetiva “evidenciar que a figura ao mudar de forma pode manter a sua área e medida de área” (FACCO, 2003, p.109). Assim, os alunos poderão compreender que mudar a forma da figura altera sua superfície, mas a área permanece a mesma. O item a terá duas opções de resposta: os dois triângulos pequenos (azuis) ou o paralelogramo, porém para formar o quadrado do item b os alunos terão que utilizar os triângulos. Esta tarefa contribui para que os alunos percebam que triângulos podem compor vários tipos de paralelogramos. Ao responderem os itens c e d, os alunos deverão perceber que o paralelogramo e o quadrado possuem áreas equivalentes, levando-os a compreender que alterar a forma da figura não altera a medida de sua área.

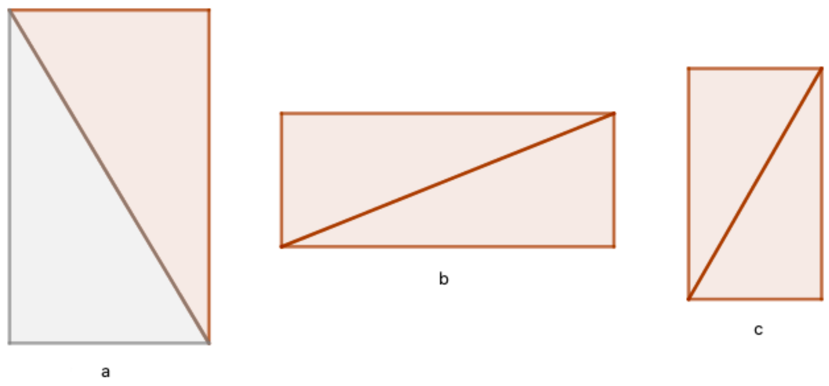
A atividade 5 tem como objetivo "evidenciar que o processo de reconfiguração da figura, por meio de sua decomposição e composição, possibilita a compreensão de medida de área e área como grandeza autônoma." (FACCO, 2003, p. 116). Esta atividade, diferente da atividade 2, não é manipulativa.

Atividade 5: Utilizando uma régua desenhe traços para decompor, ou compor, a figura quando achar necessário e calcule a medida de sua área.



Por meio da composição ou decomposição dos triângulos dados, os alunos deverão construir figuras que eles saibam calcular suas medidas de área, no caso, retângulos ou quadrados. Os alunos poderão também mudar a posição da figura (por rotação ou translação) para facilitar a construção da nova figura.

Figura 38 – Exemplos de composição ou decomposição de triângulos

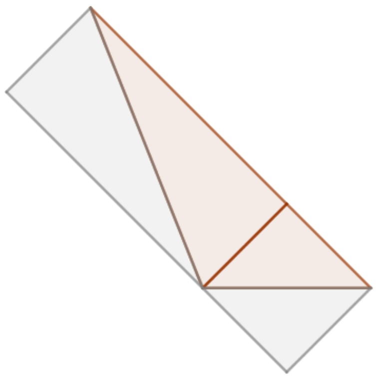


Fonte: produção da autora

A figura 38 exibe possibilidades das composições feitas nos itens a, b e c. O item a apresenta um triângulo retângulo, então os alunos poderão compor um retângulo duplicando o triângulo dado. O triângulo isósceles do item b pode ser decomposto em dois triângulos retângulos para compor um retângulo, assim como o triângulo equilátero do item c.

O triângulo do item d se duplicado formará um paralelogramo, que também precisará ser decomposto para o cálculo de sua área. Então, os alunos podem decompor o triângulo dado em dois triângulos retângulos para compor dois respectivos retângulos (Figura 39), e assim poderão calcular a medida da área do triângulo maior por meio da soma das medidas das áreas dos triângulos menores.

Figura 39 – Exemplo de decomposição e composição do triângulo do item d



Fonte: produção da autora

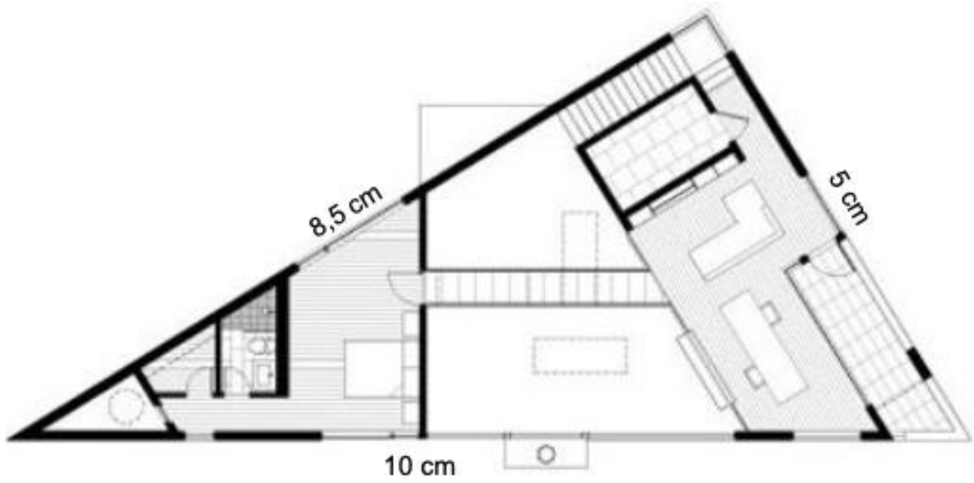
Com estas atividades, esperamos que os alunos tenham a percepção que é possível determinar a medida da área de um triângulo por meio da composição de um retângulo. Também esperamos ter proporcionado uma melhor compreensão da função e necessidade de uma unidade de medida ao calcular medidas de áreas.

ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA 2 (OD_2)

A OD_2 mobilizará a OM_2, objetivando generalizar o que foi trabalhado na OD_1, e institucionalizar o cálculo da medida da área do triângulo por meio do semiproduto entre a medida de um dos lados (l) e de sua altura respectiva (a) (em símbolos, $\frac{la}{2}$). Ao cumprir este objetivo, trabalharemos com a habilidade EF07MA31[21] da BNCC, destinada aos alunos do 7º ano do ensino básico.

A atividade 1 objetiva que o aluno determine a medida da área da casa mostrada na figura por meio do semiproduto entre um dos lados e sua altura correspondente. Ela também proporciona que a mobilização de outros conteúdos matemáticos: a escala, unidades de medida e as operações com números decimais.

Atividade 1: Um arquiteto aceitou fazer parte de um projeto de construção de uma casa em um terreno com o formato de um triângulo retângulo. Veja a planta da casa abaixo:



Sabendo que esta planta foi desenhada na escala 1:400, determine a área da casa, em metros quadrados, para que o arquiteto consiga comprar piso, cimento e outros materiais corretamente.

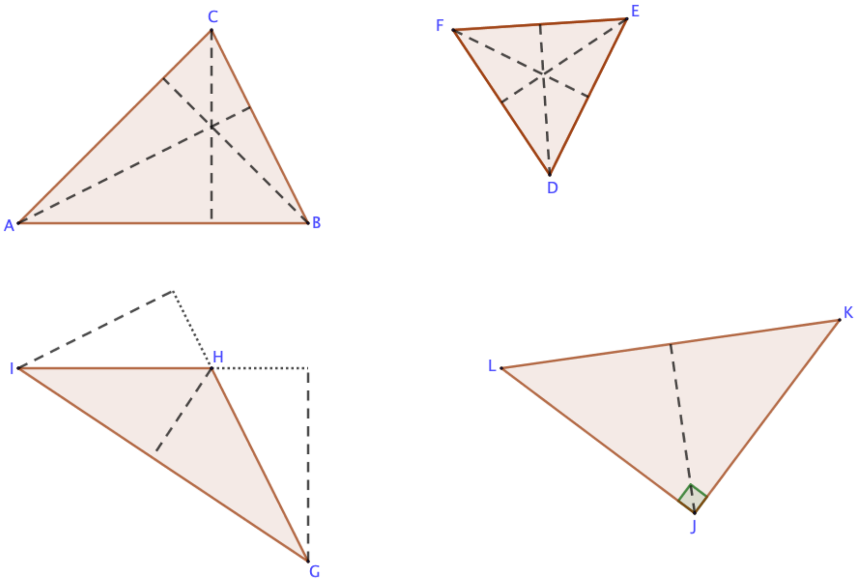
Para resolver esta atividade, o aluno deverá aplicar a escala com as medidas fornecidas, convertendo-as para o metro. Em seguida, para obter a medida da área da casa, o aluno irá multiplicar as medidas dos dois lados do triângulo que formam 90º e dividir o resultado por 2.

[21] "Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros." (BRASIL, 2018, p.309)

Ao final desta atividade, o aluno terá mobilizado a habilidade EF07MA29[22] da BNCC, já que esta atividade está baseada na leitura da planta de uma casa, o que a enquadra como uma situação prática.

A atividade 2 apresenta quatro triângulos com suas três alturas representadas. Ao não identificar as medidas dos lados e das alturas, e nem descrever no enunciado com quais elementos do triângulo deve-se trabalhar, poderemos observar se os alunos sabem identificar as informações necessárias para calcular a medida da área dos triângulos dados.

Atividade 2: Os segmentos tracejados nas figuras abaixo representam as alturas dos triângulos em relação a um de seus lados. Usando sua régua, faça as medidas necessárias e calcule a medida da área de cada triângulo.

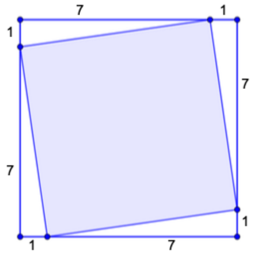


Esperamos que, de cada triângulo, os alunos escolham um lado e sua altura correspondente, obtenham suas medidas e, por meio da metade do produto entre essas medidas, cheguem à medida da área.

Os resultados podem ser aproximados, já que as medidas serão obtidas por meio das medições dos próprios alunos com o uso da régua. Com esta atividade será trabalhada a habilidade EF07MA29, ao levar o aluno a reconhecer que “toda medida empírica é aproximada” (BRASIL, 2018, p.309).

[22] “Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.” (BRASIL, 2018, p.309)

Atividade 3[23]: Considerando que na figura temos representado dois quadrados, a medida da área do quadrado colorido é:

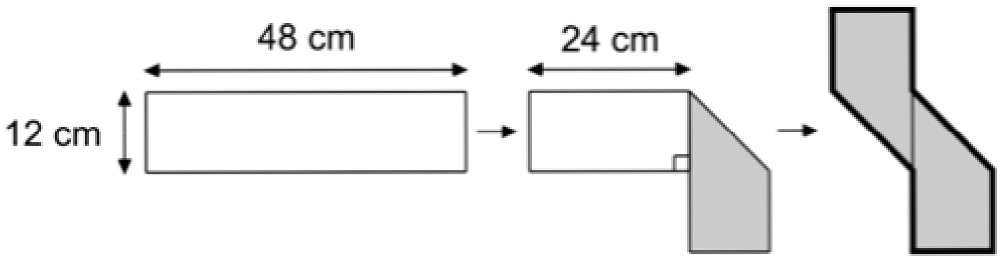


a) 36 b) 40 c) 48 d) 50

Podemos observar que o maior polígono desta figura é um quadrado, assim uma possível estratégia a ser adotada por alunos do 7º ano será determinar a medida da área do quadrado maior (de lado 8) e subtrair as medidas das áreas dos 4 triângulos congruentes que não estão coloridos. Por serem triângulos retângulos, os lados que formam o ângulo de 90º correspondem a duas de suas alturas, sendo possível determinar as medidas de suas áreas por meio da metade do produto entre as medidas dessas alturas.

Ao resolver esta atividade, os alunos trabalharão as habilidades EF07MA32[24], pois precisarão decompor a figura em quadrados e triângulos para determinar a medida da área pedida.

Atividade 4: Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?[25]



a) 216 cm² b) 264 cm² c) 348 cm² d) 432 cm² e) 576 cm²

---

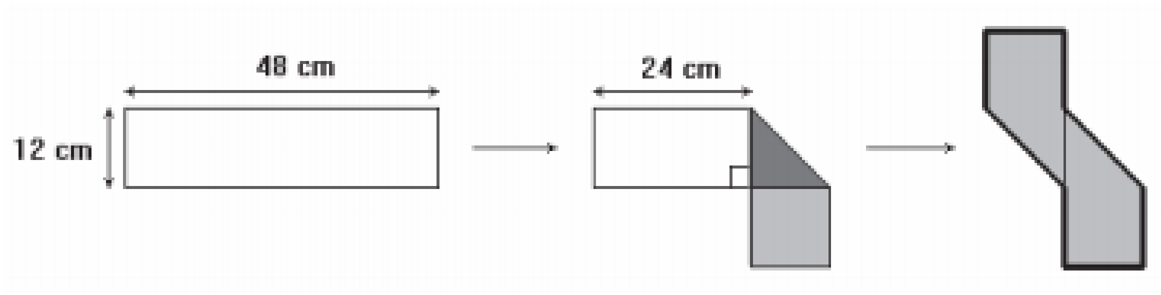
[23] Fonte: Qual é a área do quadrado (2015) (adaptado)

[24] "Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas." (BRASIL, 2018, p. 309)

[25] Questão retirada da 1ª fase do nível 1 da OBMEP 2008 (PROVAS, 2008, p.3)

Para resolver esta atividade, é esperado que os alunos percebam que, com as dobraduras feitas na atividade 4 são formadas duas figuras congruentes (Figura 40), compostas por um quadrado, com o lado medindo 12 cm, e um triângulo retângulo, cuja área corresponde à metade da área do quadrado. Assim, a medida da área cinza pode ser obtida adicionando as medidas das áreas dos quadrados e triângulos que compõem a figura.

Figura 40 – Composição da figura cinza formada para a atividade 4 da OD2



Fonte: OBMEP (PROVAS, 2008, p.3)

Esta atividade também mobilizará a habilidade EF07MA32 da BNCC, pois a estratégia de resolução descrita depende da decomposição da figura final em quadrados e triângulos, cujas medidas de área os alunos do 7º ano já sabem calcular.

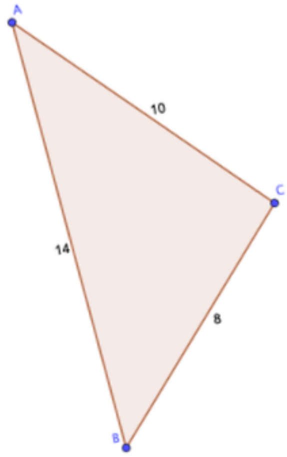
ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA 3 (OD_3)

Esta organização didática objetiva mobilizar a OM_3, que nos leva a determinar a medida de área de um triângulo obtendo somente as medidas de seus três lados. Com exceção da atividade 1, buscamos trabalhar a habilidade EF08MA19 [26]da BNCC ao longo desta organização, apresentando atividades que envolvam situações cotidianas. Direcionamos a OD_3 aos alunos do 8º ano.

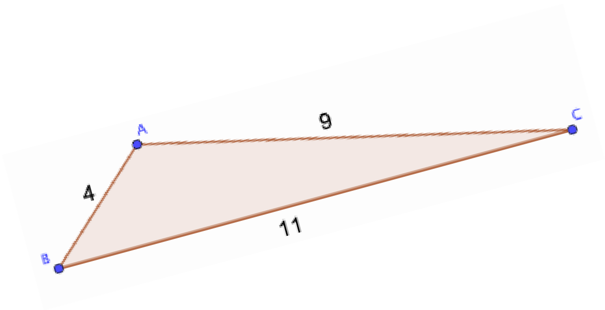
Pedir aos alunos para que determinem a medida da área destes triângulos, fornecendo apenas as medidas de seus lados, permite que observemos se eles conseguem mobilizar outras técnicas que não exijam a medida de uma das alturas do triângulo.

[26] “Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.” (BRASIL, 2018, p. 315)

Atividade 1: Determine a medida da área de cada um dos triângulos representados nas figuras seguintes, nas quais a unidade das medidas indicadas é o metro.



a)

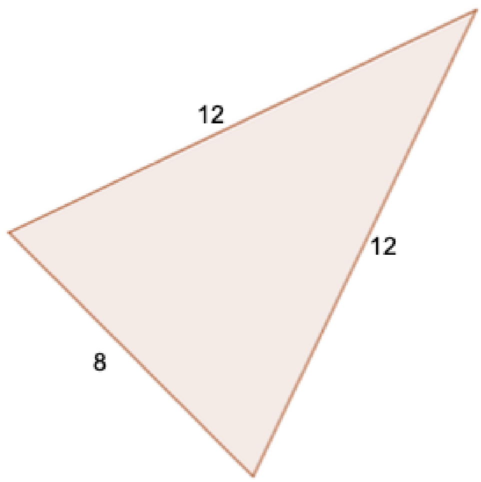


b)

Optamos por escolher uma atividade não contextualizada no cotidiano, para que o foco ficasse no uso da fórmula de Heron e não houvesse algum fator que dificultasse o cumprimento deste objetivo.

A fórmula de Heron deve ser utilizada para a obtenção da medida das áreas destes triângulos, e colocamos como uma variável didática o uso da calculadora, pois em ambos os casos não teremos uma raiz quadrada que pertença ao conjunto dos números naturais.

Atividade 2: Dois irmãos receberam um terreno de herança de seus pais, dividiram em partes iguais e cada parte possui o formato de um triângulo isósceles, conforme a figura, e com as medidas em metros. Qual era a medida da área do terreno antes de ser dividido?



Uma das formas possíveis para determinar a medida da área deste triângulo seria determinar a altura respectiva ao lado que mede 8 m, já que se trata de um triângulo isósceles, utilizando o teorema de Pitágoras, porém, de acordo com a BNCC, este teorema será trabalhado no 9º ano durante o estudo das relações métricas no triângulo retângulo. Assim descartamos as técnicas de decomposição e o semiproduto entre um dos lados e sua altura respectiva.

Então, acreditamos que os alunos utilizarão a fórmula de Heron para obter tal medida, e multiplica-la por 2 ao final. Como a área deste triângulo será um número irracional, o aluno poderá escolher representa-la como um radical ou determinar sua aproximação decimal. Mais uma vez teremos a calculadora com uma variável didática a ser escolhida.

Se o aluno escolher trabalhar com a medida obtida como um radical, precisará recorrer a representação da raiz como uma potência de expoente fracionário, pois a operação com radicais não é trabalhada no 8º ano. Conforme prevê a habilidade EF08MA02 da BNCC (BRASIL, 2018, p.313), o aluno deste ano escolar deve “resolver e elaborar problemas usando a relação entre potência e radiciação para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.”

Atividade 3: Um terreno com formato triangular, com lados medindo 15 m, 33 m e 24 m, será impermeabilizado para receber futuras obras. O metro quadrado do material impermeabilizante custa R$9,00. Qual o valor total que será gasto neste procedimento?

Esta atividade, diferente das anteriores, traz as medidas dos lados do triângulo, mas não o representa por meio de uma figura. Isso pode influenciar no raciocínio do aluno, já que ele não tem um modelo do triângulo para se basear e pensar em como resolver esta atividade, sabendo apenas que é um triângulo escaleno.

O processo de resolução desta atividade será semelhante ao da atividade 2, em que o aluno determinará a medida da área do triângulo utilizando a fórmula de Heron e ao final terá que multiplicar tal medida por 9 para responder à pergunta final. Aqui ele também poderá escolher em trabalhar com a aproximação decimal da raiz ou como um radical, implicando nas mesmas condições descritas anteriormente.

Atividade 4: Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato triangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno I: 55 m por 45 m por 71 m
Terreno II: 55 m por 55 m por 78 m
Terreno III: 60 m por 30 m por 67 m
Terreno IV: 70 m por 20 m por 73 m
Terreno V: 95 m por 85 m por 127 m
Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno[27]

a) I b) II c) III d) IV e) V

Para escolher o terreno de maior área que atenda a restrição de gastar, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça, será necessário o cálculo da medida da área e do perímetro destes terrenos triangulares. Ao determinar o perímetro dos cinco terrenos, será possível excluir aqueles que não atendem a restrição imposta pelo problema. Depois, para determinar o de maior área, a técnica utilizada será a fórmula de Heron, já que a única informação dada sobre os terrenos é a medida de seus lados. Para escolher a opção correta, basta escolher o terreno de maior área que tenha o perímetro menor ou igual a 180 m.

Ao comparar as medidas das áreas dos terrenos temos a oportunidade de abordar a comparação de números irracionais, tanto em sua aproximação decimal como na forma de um radical. Sobre a representação decimal, os PCN (BRASIL, 1998, p.84) observam que as representações decimais infinitas (tanto de números racionais como irracionais) evidenciam

> o problema da aproximação numérica, ou seja, a necessidade que se tem de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número. Tem-se aqui uma instância apropriada para

[27] Atividade adaptada da questão 142 do ENEM 2011 (EXAME, 2011, p. 21)

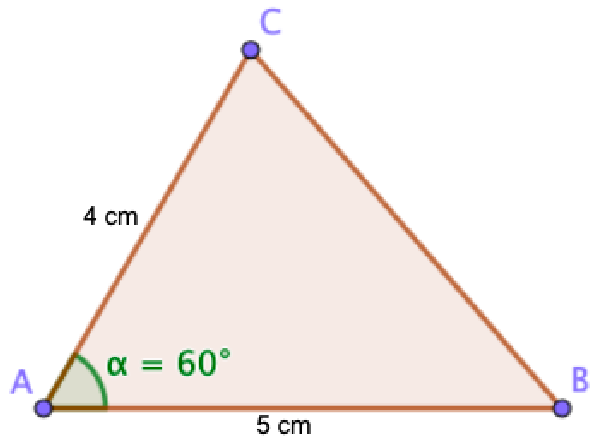
abordar o conceito de arredondamento e suas consequências nos resultados das operações numéricas.

Esta atividade também nos permite verificar se os alunos possuem alguma dificuldade em dissociar as noções de área e perímetro ou se utilizam fórmulas errôneas, já que será necessário determinar as duas medidas para responder esta situação.

ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA 4 (OD_4)

Esta OD objetiva mobilizar a OM_4 em que determinamos a medida da área de um triângulo, obtendo somente a medida de dois lados e do ângulo formado entre eles, por meio da trigonometria. Destinamos esta OD para a 1ª série do ensino médio, pois é a série em que também se estuda trigonometria, até mesmo para o uso em outras áreas, como a Física.

Atividade 1: Determine a medida da área do triângulo abaixo:



Para começar esta organização, optamos por escolher uma atividade não contextualizada em nosso cotidiano, nem em outros conteúdos da própria Matemática, para que pudéssemos conduzir os alunos gradativamente ao uso desta técnica.

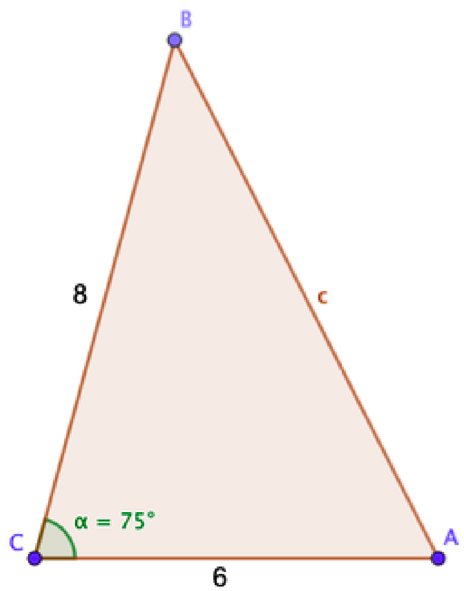
Esta atividade fornece a medida de dois lados e do ângulo formado entre eles. Uma opção de resolução é determinar a altura relativa ao lado AB por meio do seno do ângulo α, e calcular a medida da área conforme a técnica da OM_1: semiproduto entre a medida do lado AB e sua altura respectiva. Outro caminho que pode ser tomado é o uso direto da fórmula $A = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2}$, e esperamos que os alunos percebam que é a generalização do processo descrito anteriormente.

Atividade 2: Um terreno triangular tem frentes de 6 m e 8 m em ruas que formam um ângulo de 75º. Qual é a área do terreno? Quanto mede o terceiro lado do terreno?

Esta atividade está dividida em duas etapas: a primeira é o cálculo da medida da área do terreno triangular; e a segunda é o cálculo da medida do terceiro lado. Para o cálculo da medida da área, o aluno se deparará com uma situação semelhante a descrita na atividade 1, em que é preciso recorrer à trigonometria para conseguir obter a medida desejada. Desta vez não possuímos um ângulo notável, então será necessário o uso da calculadora, ou o fornecimento do valor do seno de 75º.

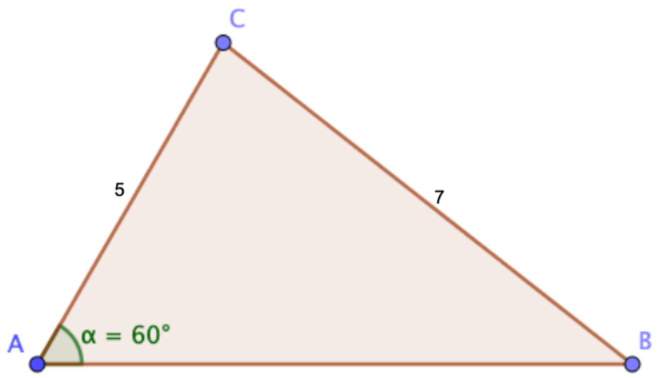
Já que estamos no âmbito da trigonometria, é esperado que os alunos calculem a medida do terceiro lado por meio da lei dos cossenos. Como será necessário o valor do cosseno de 75º, também nos deparamos com as escolhas de permitir o uso da calculadora, fornecer este valor, ou pedir que os alunos o obtenham a partir da relação $(\text{sen}\,75°)^2 + (\cos 75°)^2 = 1$, já que o $\text{sen}\,75°$ foi utilizado na etapa anterior. Construímos um triângulo (Figura 41) para facilitar o entendimento do uso da incógnita *c* na fórmula da lei dos cossenos, que substituindo com os valores da atividade, teremos: $c^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 75°$.

Figura 41 – Terreno triangular da atividade 2 da OD4



Fonte: produção da autora

Atividade 4: (Mackenzie – 1999) A área do triângulo da figura abaixo é:



a) $10\sqrt{3}$ b) $20\sqrt{3}$ c) $15\sqrt{3}$ d) $12\sqrt{3}$ e) $18\sqrt{3}$

Um caminho para chegar à resposta desta atividade, mantendo-se na trigonometria, é calculando a medida do lado c por meio da lei dos cossenos, para depois calcular a medida da área do triângulo ABC. Não é necessário o uso da calculadora nesta resolução, pois os valores do seno e do cosseno de 60º são conhecidos.

De forma semelhante ao que foi descrito na atividade 2, substituímos os valores da atividade na lei dos cossenos, e obtemos: $7^2 = 5^2 + c^2 - 2 \times 5 \times c \times \cos 60°$. Ao desenvolver esta equação, o aluno encontrará $c = -3$ ou $c = 8$, como c é uma medida, deve-se descartar o valor negativo. Com o valor $c = 8$ é possível determinar a medida da área deste triângulo por meio da fórmula $A = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2}$.

Com esta atividade podemos observar como o aluno emprega os conteúdos aprendidos na resolução de uma atividade que não possui uma resolução com uma só etapa.

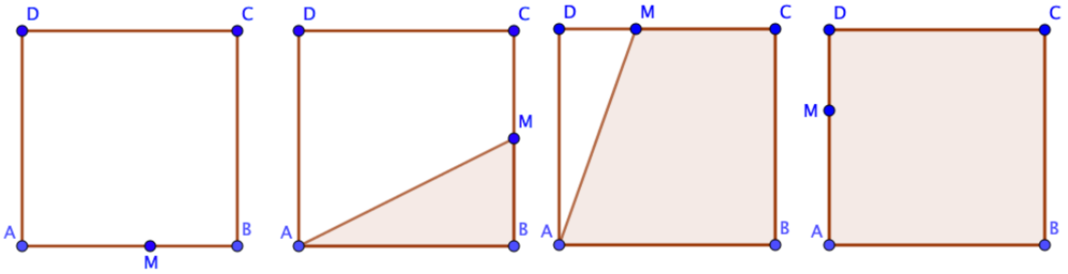
Embora esta atividade esteja centrada no conceito de função polinomial do primeiro grau definida por várias sentenças, a realização de suas tarefas possibilita o trabalho com outros elementos matemáticos, dentre eles o cálculo da medida da área de triângulos.

Atividade 5[28]

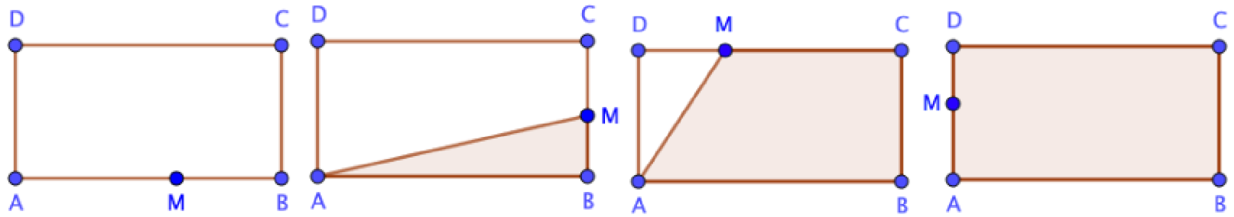
Parte 1: Um ponto M se desloca sobre o lado de um quadrado ABCD cujos lados meçam 4 u.m. (figura abaixo). Chamaremos x a medida em cm referente ao comprimento do trajeto de A até M.

a) Expresse a área a(x) da parte colorida, segundo a posição do ponto M;

b) Represente graficamente a aplicação correspondente.



Parte 2: Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, sendo ABCD um retângulo de comprimento 4 e largura 2 (fig. abaixo).



Parte 3: Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, ABCD sendo, agora, um losango, cujos lados medem 4 u.m. e o ângulo $\hat{C}$ mede 60º.

Os itens a e b das atividades I e II possuem uma dinâmica de construção similar, diferenciando-se pela figura utilizada na construção (quadrado para o I e retângulo para o II). Sendo assim, nossas análises focarão na atividade I, e entendemos que a atividade II se desenvolverá de forma análoga.

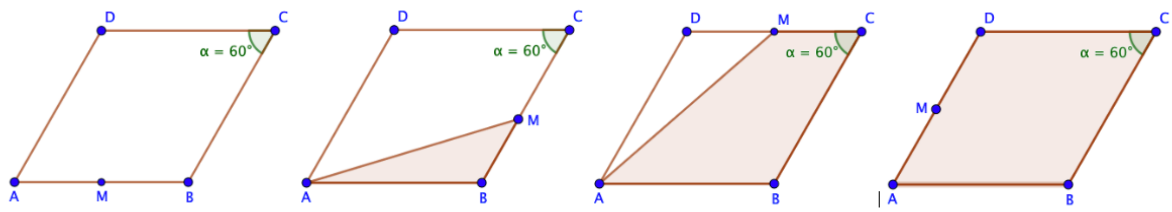
Enquanto M pertencer ao segmento $\overline{AB}$ do quadrado, teremos a(x) = 0, pois não há área quando $0 \leq x \leq 4$. Quando M pertencer ao segmento $\overline{BC}$, esperamos que os alunos percebam que $x = \overline{AB} + \overline{BM}$ e que a área da parte colorida corresponde a área do triângulo retângulo que tem como catetos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BM}$, ou seja: $a(x) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BM}}{2}$, que desenvolvendo chegamos em $a(x) = 2x - 8$ no

[28] A atividade 4 foi elaborada por Almoloud (2016, p.135).

intervalo $4 < x \leq 8$. Quando M pertencer ao segmento $\overline{CD}$, a área da parte colorida será equivalente a área do trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CM}$, e de altura $\overline{BC}$, sendo assim, $a(x) = \frac{(AB+CM)\times BC}{2}$, que desenvolvendo chegamos em $a(x) = 2x - 8$ no intervalo $8 < x \leq 12$. E, finalmente quando M pertencer ao segmento $\overline{DA}$, toda a área do quadrado já foi varrida, portanto $a(x) = 16$ no intervalo $12 < x \leq 16$.

A atividade III é similar as anteriores, então esperamos que os alunos também mobilizem um esquema a respeito do conceito de uma função. Este enunciado não apresenta figura, o que nos leva a esperar que seja construído um esboço como mostramos na figura 42 considerando as medidas dos ângulos e dos lados do losango descrito.

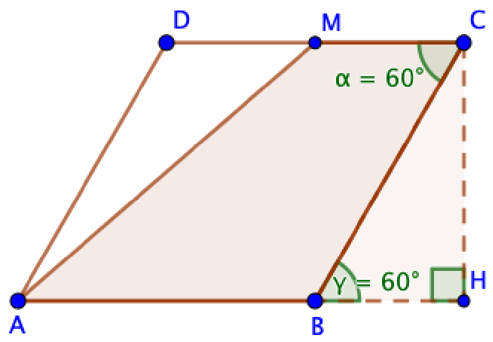
Figura 42 - Losango da atividade 4 da OD4



Fonte: produção da autora

Enquanto M pertencer ao segmento $\overline{AB}$, teremos $a(x) = 0$, pois não há área quando $0 \leq x \leq 4$. Quando M pertencer ao segmento $\overline{BC}$, a área da parte colorida corresponderá a área do triângulo obtusângulo com um dos ângulos medindo 120º, assim esperamos que os alunos percebam que eles precisarão recorrer à trigonometria para determinar a medida da área deste triângulo por meio da relação $a(x) = \frac{AB\times BM\times \operatorname{sen} 120°}{2}$, que desenvolvendo chegamos em $a(x) = \sqrt{3}(x - 4)$ no intervalo $4 < x \leq 8$. Quando M pertencer ao segmento $\overline{CD}$, a área da parte colorida corresponderá a área de um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CM}$, e de altura desconhecida, que pode ser calculada construindo a altura (Figura 43) a partir do vértice C em relação ao lado $\overline{AB}$, ou seja, $h = BC \times \operatorname{sen} 60°$. Com isso, a expressão para a área neste trajeto é dada pela função $a(x) = \frac{(AB+CM)\times(BC\times \operatorname{sen} 60°)}{2} \Rightarrow a(x) = \sqrt{3}(x - 4)$ no intervalo $8 < x \leq 12$. E, quando M pertencer ao segmento $\overline{AD}$, a área da parte colorida será a área do losango ABCD, que pode ser dividido em dois triângulos congruentes para o cálculo da medida de sua área, por meio da função $a(x) = 2\left(\frac{AB\times BC\times \operatorname{sen} 120°}{2}\right)$, em que a expressão dentro dos parênteses representa o cálculo da medida da área do triângulo ABC, o que garante como resultado $a(x) = 8\sqrt{3}$ para o intervalo $12 < x \leq 16$.

Figura 43 – Representação da altura traçada a partir do vértice C em relação ao lado AB



Fonte: produção da autora

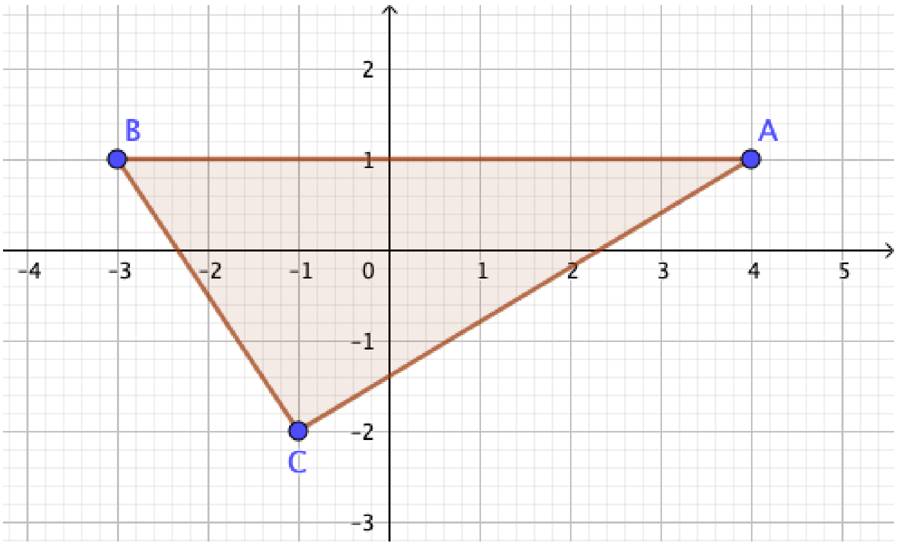
Como dissemos anteriormente, embora o conteúdo principal destas atividades não seja o cálculo da medida de área de triângulos, percebemos que sem esta noção a resolução destas tarefas tornam-se inviáveis. Sobre a área de triângulos, destacamos que é necessário que os alunos mobilizem diferentes técnicas para conseguir calcular suas medidas, pois cada atividade fornece um conjunto de informações que limitam a técnica utilizada anteriormente. Embora esta OD tenha como foco calcular a medida da área de um triângulo obtendo a medida de dois lados e do ângulo formado entre eles, percebemos que nas atividades I e II foi possível calcular a medida da área dos triângulos por meio do semiproduto entre a medida de um dos seus lados e de sua altura relativa, enquanto na atividade III não havia informações suficientes para manter a mesma técnica.

ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA 5 (OD_5)

Esta OD objetiva mobilizar a OM_5, que consiste em calcular a medida da área de um triângulo representado em um plano cartesiano, sendo conhecidas as medidas de seus vértices. Destinamos esta organização para a 3ª série do ensino médio, para que seja trabalhada juntamente ao ensino da geometria analítica: estudo da reta, ponto e suas relações.

Como primeira atividade desta OD, optamos por algo não contextualizado em nosso cotidiano, nem em outros campos da Matemática. Os dois itens da atividade 1 informam as coordenadas dos vértices dos triângulos formados, sendo que o item a possui uma figura, e o item b não.

Atividade 1: Determine a medida da área do triângulo de vértices:

a) 

b) A$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, B(0,5; 2) e C(2, -1)

Fizemos essa escolha para podermos observar a influência da figura neste tipo de tarefa, e como os alunos leem as coordenadas dos vértices destes triângulos.

O item a possibilita duas resoluções diferentes. A primeira é fazendo a interpretação da figura: já que a medida do lado $\overline{AB}$ e de sua altura relativa são de fáceis leituras, é possível calcular a medida da área por meio do semiproduto destas duas medidas. A segunda é identificando as coordenadas dos três vértices deste triângulo, e calcular a sua medida de área por meio da metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas de seus vértices.

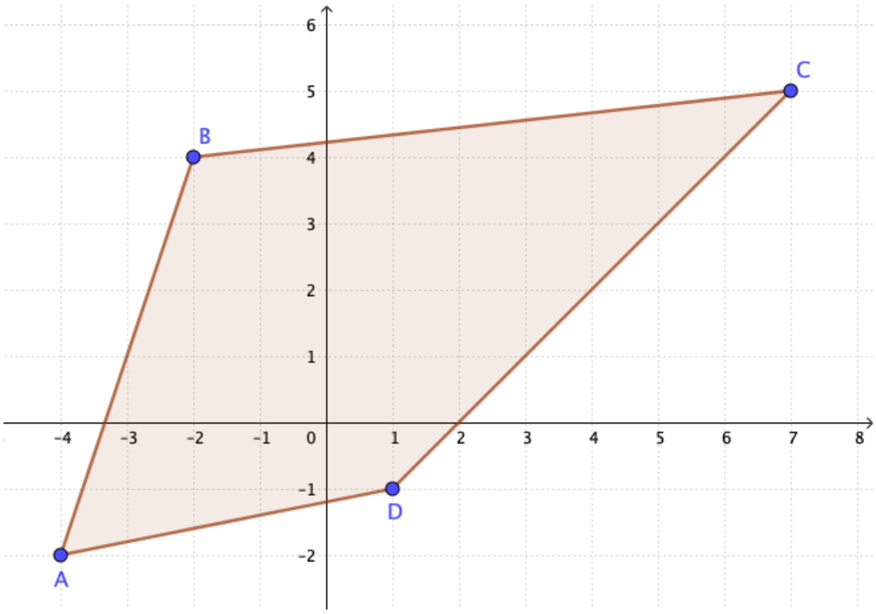
Por mais que os alunos façam um esboço do triângulo do item b, não é possível determinar as medidas de seus lados somente por observação, como no item a, assim, esperamos que os alunos calculem a medida de área deste triângulo por meio da metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas dos vértices dadas no enunciado.

Atividade 2: Obtenha a medida da área do quadrilátero que possui os seguintes vértices A(-4; -2), B(-2; 4), C(7; 5) e D(1; -1).

Ao construírem um esboço do quadrilátero descrito no enunciado, esperamos que os alunos percebam que se trata de uma figura irregular (Figura

44), e que para calcular sua medida de área será necessário decompô-la em figuras que possuem métodos conhecidos para o cálculo da medida de área.

Figura 44 – Quadrilátero descrito na atividade 2 da OD5



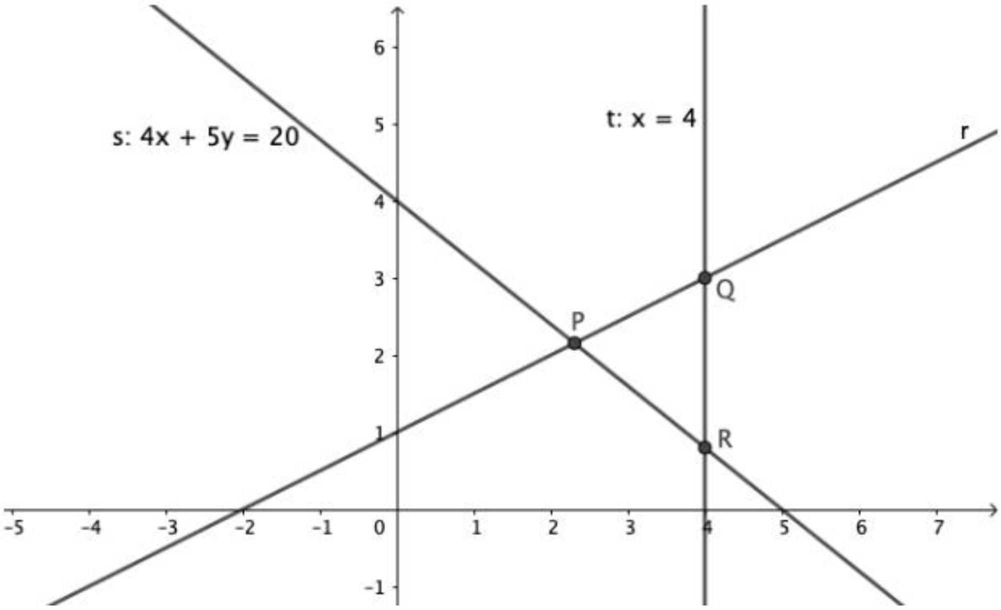
Fonte: produção da autora

Como as únicas informações dadas são as coordenadas dos vértices, uma possibilidade é decompor este quadrilátero nos triângulos ABD e BCD, calcular suas medidas de área separadamente por meio da metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas de seus vértices, e adicioná-las ao final.

Assim, poderemos observar como os alunos mobilizam a técnica de decomposição de figuras, já trabalhada em anos anteriores, além da técnica atual que é o cálculo da medida de área de um triângulo representado no plano cartesiano.

Para calcular a medida da área do triângulo PQR é necessário antes determinar: as coordenadas dos pontos P, Q e R e a equação da reta r o que permite observar como os alunos trabalham com elementos da geometria analítica diferentes dos que foram trabalhados nas atividades 1 e 2.

Atividade 3: Na ilustração a seguir, os vértices do triângulo PQR são as interseções, duas a duas, das três retas esboçadas. Determine a medida da área do triângulo PQR.[29]



Pela figura, podemos perceber que os pontos (0;1) e (-2;0) pertencem a reta r, então podemos determinar que $r: -x + 2y = 2$. Sabendo que o ponto Q tem abcissa $x = 4$ e pertence a r, temos que: $-4 + 2y = 2 \Rightarrow y = 3$; portanto, $Q(4;3)$. O ponto R também tem abcissa $x = 4$, porém pertence a s, assim temos que: $4 \cdot 4 + 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{4}{5}$; portanto $R\left(4;\frac{4}{5}\right)$. O ponto P é a interseção das retas r e s, assim suas coordenadas também são a solução do sistema $\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ 4x + 5y = 20 \end{cases}$, portanto $P\left(\frac{30}{13};\frac{28}{13}\right)$.

Finalmente, é possível determinar a medida da área do triângulo PQR pela metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas dos vértices deste triângulo. Esperamos que os alunos cheguem à esta medida seguindo o caminho descrito acima, mobilizando seus conhecimentos a respeito de reta.

[29] Fonte: (IEZZI [et al], 2014, p.61)

Atividade 4: Num surto de dengue, o departamento de saúde de uma cidade quer que seus técnicos visitem todas as casas existentes na região limitada por um triângulo de vértices nos três focos em que a doença foi encontrada. Para facilitar essa ação, colocou o mapa da cidade sobre um plano cartesiano, com escala 1:1 km, e verificou que os focos se localizavam sobre os pontos (2; 5), (-3; 4) e (2; -3). Como cada especialista será responsável por 2 km^2 de área nessa região triangular, o número de técnicos necessários e suficientes será igual a[30]

a) 20 b) 18 c) 16 d) 12 e) 10.

Além do cálculo da área de um triângulo representado no plano cartesiano, esta atividade envolve o conceito de razão e resolução de problemas. Diferentemente das demais atividade desta organização, ela não possui uma figura em seu enunciado e também não exige a construção de um esboço para resolvê-la.

Com as coordenadas informadas é possível calcular a medida da área do triângulo descrito no enunciado por meio da metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas de seus vértices. Aplicando a escala dada, temos que esta medida de área é igual a 20 km^2, e com esta informação é possível concluir que serão necessários 10 especialistas.

ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA 6 (OD$_6$)

Os PCN (BRASIL, 2000, p.43) afirmam que a escolha dos temas estudados na Matemática, ao longo do ensino médio, deve se dar pelo critério central da contextualização e interdisciplinaridade. Também afirmam que expressar-se corretamente na linguagem física requer “saber empregar seus símbolos, como os de vetores, ou de circuitos, fazendo uso deles quando necessário.” (BRASIL, 2000, p.27). Assim, podemos inferir que, embora o ensino de vetores não faça parte dos documentos analisados, ele poderia ser trabalhado na 3ª série do ensino médio na Matemática, pois teria aplicações na Física, proporcionando a interdisciplinaridade desejada.

Neste sentido, esta OD objetiva mobilizar a OM$_6$, que calcula a medida da área de um triângulo por meio da metade do módulo do produto vetorial de dois

[30] Fonte: (MATEMÁTICA, 2020, p. 10)

vetores que formam este triângulo. As quatro atividades a seguir estão contextualizadas na própria Matemática, pois acreditamos que estes sejam os melhores tipos de tarefas para se trabalhar este conteúdo com esta faixa etária.

Atividade 1: Determine a medida da área do triângulo ABC, sendo:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ e $\overrightarrow{AC} = 5\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

Esta atividade consiste em uma tarefa bem objetiva: calcular a medida da área do triângulo com as informações dadas, nos possibilitando observar como os alunos a realizam e se sabem trabalhar com esta técnica. Optamos por iniciar esta OD com uma atividade simples, e gradualmente avançar com as outras três tarefas.

Esperamos que os alunos obtenham a medida da área do triângulo ABC seguindo estas etapas: determinar o produto vetorial dos vetores dados; obter o módulo deste produto vetorial; multiplicar por $\frac{1}{2}$ o valor do módulo.

Atividade 2: Calcule a medida da área do triângulo de vértices A, B e C, em que $\overrightarrow{AB} = (1, 5, 3)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$. Calcule a altura pelo vértice A.[31]

Esta atividade se diferencia da anterior por pedir o cálculo de uma das alturas deste triângulo e pela representação dos vetores fornecidos. Então, esperamos que os alunos desenvolvam um raciocínio similar ao da atividade anterior, completando com o cálculo da altura pedida e mobilizando a técnica da OM_2

A primeira parte da atividade é solucionada ao seguir os seguintes passos: calcular o produto vetorial dos vetores dados, que é igual a: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (10, -5, 5)$, e por consequência, $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{150}$; a medida da área do triângulo ABC pode ser obtida substituindo os valores encontrados na expressão $A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{150}}{2}$.

Para solucionar a segunda parte da atividade é necessário relembrar que a área de um triângulo pelo semiproduto entre um de seus lados e sua altura relativa. Neste caso, a altura pelo vértice A, representada por h, é relativa ao vetor

[31] Fonte: (MELLO, WATANABE, 2011, p.74)

$\overrightarrow{BC}$, e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-2, -5, -1)$, portanto $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{30}$. Substituindo estes valores na expressão $A_{ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot h}{2}$, tem-se: $\frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{\sqrt{30} \cdot h}{2} \Rightarrow h = \sqrt{5}$.

> **Atividade 3:** A medida da área do triângulo *ABC* é $\sqrt{6}$. Sabendo que A(2, 1, 0), B(-1, 2, 1) e que o vértice C está no eixo das ordenadas encontre as coordenadas de C.[32]

O objetivo desta atividade não é calcular a medida da área de um triângulo, pois ela já foi informada, mas sim encontrar as coordenadas de um dos vértices deste triângulo, o vértice C. Para resolver esta tarefa, os alunos precisarão mobilizar conhecimentos sobre vetores diferentes do que foram mobilizados na atividade anterior, desde o momento de planejar sua resolução até a execução da tarefa.

Esperamos que os alunos percebam que se o vértice C está localizado no eixo das ordenadas, suas coordenadas nos outros dois eixos são iguais a 0, então pode-se escrever $C(0, y, 0)$. A partir das coordenadas dos vértices A, B e C, pode-se obter $\overrightarrow{BA} = (3, -1, -1)$ e $\overrightarrow{BC} = (1, y - 2, -1)$, e com estas informações é possível utilizar a expressão $A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right|$ para encontrar as coordenadas de C.

O produto vetorial $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = (y - 1, 2, 3y - 5)$, portanto, seu módulo é igual a $\sqrt{10y^2 - 32y + 30}$. Substituindo a medida da área do triângulo e o módulo do produto vetorial na expressão acima, tem-se: $\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{10y^2 - 32y + 30}$, ao elevar ambos os membros desta equação ao quadrado, para poder eliminar a radiciação, e organizar seus termos, tem-se: $0 = 10y^2 - 32y + 6$. Calculando as raízes desta equação encontra-se $y = \frac{1}{5}$ ou $y = 3$. Como já havia sido definido que $C(0, y, 0)$ e há dois valores diferentes para y, $C(0, \frac{1}{5}, 0)$ ou $C(0,3,0)$.

> **Atividade 4:** Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dois vetores, tais que $|\vec{x}| = 2$, $|\vec{y}| = 3$ e o ângulo entre eles mede 30º. Calcule a medida da área do triângulo ABC em que $\overrightarrow{AB} = \vec{x} + 2\vec{y}$ e $\overrightarrow{AC} = 2\vec{x} - 3\vec{y}$.[33]

[32] Fonte: (ÁREA, 2016)

[33] Fonte: (MELLO, WATANABE, 2011, p.75)

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são definidos pelos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, que por sua vez possuem coordenadas desconhecidas, mas foram dados os valores de seus módulos e do ângulo formado entre eles. Assim, a mobilização dos conhecimentos sobre vetores será feita com um olhar diferente em relação as atividades anteriores, exigindo mais o uso de propriedades, e voltando nossa atenção a estes movimentos.

Assim como nas atividades anteriores, a resolução dessa atividade iniciará pelo produto vetorial de dois vetores que formem o triângulo dado no enunciado: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (\vec{x} + 2\vec{y}) \wedge (2\vec{x} - 3\vec{y})$. Pelas propriedades do produto vetorial, pode-se desenvolver esta igualdade da seguinte forma: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{x} \wedge 2\vec{x} - \vec{x} \wedge 3\vec{y} + 2\vec{y} \wedge 2\vec{x} - 2\vec{y} \wedge 3\vec{y} = 3\vec{y} \wedge \vec{x} + 4\vec{y} \wedge \vec{x} = 7\vec{y} \wedge \vec{x}$.

O próximo passo é determinar o módulo deste produto vetorial, portanto, $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = 7|\vec{y} \wedge \vec{x}| = 7|\vec{y}||\vec{x}| \operatorname{sen} 30°$, pois o módulo do produto vetorial pode ser escrito como: $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e α o ângulo formado entre eles. Assim, substituindo os módulos dos vetores $\vec{y}$ e $\vec{x}$ pelos valores dados no enunciado, tem-se: $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = 7|\vec{y}||\vec{x}| \operatorname{sen} 30° = 7 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 21$.

Logo, pode-se determinar a medida da área do triângulo ABC, substituindo os valores encontrados na expressão $A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$, obtendo $A_{ABC} = \frac{21}{2}$.

A seguir, realizaremos nossas considerações finais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo objetiva revisitar cada etapa dessa dissertação, apresentando nossas reflexões a respeito do que foi investigado, levantado e analisado, e que permitiu que respondêssemos nossa questão de pesquisa. Esperamos que nossas respostas contribuam com a área da Educação Matemática, no que se refere ao ensino de área de triângulos.

A construção de nossa problemática nos possibilitou identificar os resultados de pesquisas que apontaram para um ensino inadequado das grandezas geométricas, já que tanto os livros didáticos quanto os professores dão ênfase ao uso de fórmulas, não proporcionando, em algumas situações, a construção de conhecimentos que permitam que os alunos transitem por todos os campos conceituais envolvidos na conceituação de área: o das grandezas, o numérico, o geométrico e o algébrico.

Por outro lado, apoiamo-nos em Chevallard quando ele afirma que certos conhecimentos não são aprendidos por não terem sido institucionalizados, sobrevivendo nas periferias do saber, como a fórmula atribuída a Heron; enquanto outros conhecimentos serão institucionalizados e se tornarão parte do próprio saber, como o cálculo da medida da área de triângulo por meio do semiproduto da base pela altura. Os resultados de nossa revisão bibliográfica vão ao encontro desta afirmação, já que a fórmula mais utilizada para o cálculo da medida de área de triângulos, dentre as pesquisas que analisaram livros didáticos, é a que considera o semiproduto entre a medida de um lado e sua respectiva altura.

Por meio do estudo da gênese da medida da área, pudemos observar que é possível identificar diversas organizações matemáticas, que possuem como tarefa “calcular a medida da área de um triângulo”, ao longo da história da matemática. Constatamos que a técnica utilizada na primeira OM não era suficiente para a próxima organização, e assim sucessivamente, pois conforme as características dos triângulos eram alteradas a técnica ficava limitada, exigindo que ela fosse ampliada.

Em nossos estudos preliminares adotamos a noção de área como grandeza e não como número diferentemente de alguns entendimentos que criticamos ao longo deste trabalho, baseando-nos nos trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989 apud BELLEMAIN, 2002). De acordo com as autoras, o trabalho com essa noção deve mobilizar três quadros:

- o geométrico que é constituído por superfícies planas;
- o numérico composto de medidas da área das superfícies que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos;
- o das grandezas formado por classes de equivalência de superfícies de mesma área, integrando assim os dois primeiros e se configurando como contexto próprio da noção de área.

Ampliando tal noção, Bellemain (2002) acrescenta o quadro algébrico funcional que é constituído por fórmulas que expressam a área em função de determinados comprimentos relativos às figuras geométricas.

Também fez parte dos nossos estudos preliminares um olhar para a BNCC, para os PCN e para os livros didáticos, como forma de verificar como o ensino de área de triângulos está posto na educação básica. Observamos que os documentos oficiais não orientam o uso de fórmulas até os anos finais do ensino fundamental, porém não incentivam que sejam trabalhados diferentes métodos para o cálculo da área de triângulos, especificando somente o uso da composição e decomposição de figuras. Sobre as coleções de livros didáticos analisadas, percebemos que nossos resultados vão ao encontro do que vimos em nossa revisão bibliográfica, já que a ênfase é dada para a fórmula que considera o produto da medida de um lado por sua respectiva altura.

Com todos estes estudos em mente, pudemos focar em responder nossa questão de pesquisa: **Como construir organizações didáticas que permitam o trabalho com diferentes técnicas para o ensino do cálculo da medida de área de triângulos nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio?**

Acreditamos que nossa resposta para esta pergunta se deu no quarto capítulo, ao apresentarmos 6 organizações didáticas baseadas nas organizações matemáticas identificadas anteriormente a partir dos estudos preliminares realizados. Percebemos que é possível proporcionar atividades centradas na tarefa “calcular a medida da área de um triângulo” para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio, que dialoguem com os demais conteúdos ensinados em Matemática, e às vezes em outras disciplinas também, e que permitam que o aluno compreenda diversas técnicas para este cálculo.

Entendemos que um aluno só terá a competência de calcular a área de triângulo se ele for capaz de mobilizar diferentes técnicas para cumprir todas as variações da tarefa “calcular a medida da área de um triângulo”, compreendendo que as técnicas possuem limitações conforme as características dadas do triângulo.

Esperamos que as contribuições, lacunas, desafios e sugestões, indicadas nessa pesquisa, sejam consideradas como reflexões e ponto de partida para novos estudos a respeito do ensino de área de triângulos, como por exemplo uma análise de coleções de livros didáticos à luz da TAD, para verificar quais são as organizações matemáticas presentes. Destacamos aqui a necessidade de trabalhos que explorem a relação entre a álgebra e a geometria para a construção de diversas fórmulas para o cálculo de áreas, em especial, a de triângulos. Ainda como perspectiva futura, caberia um projeto de formação de professores que possibilitasse discussões conceituais a respeito da noção de área enquanto grandeza e do trabalho de diferentes técnicas para o ensino de área de triângulos.

REFERÊNCIAS

AL-KHWARIZMI. **Britannica Escola**, 2020. Disponível em: <https://escola.britannica.com.br/artigo/Al-Khwarizmi/481649>. Acesso em: 12 de abril de 2020.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Edição atualizada. Curitiba: Ed. UFPR, 2007

__________, Saddo Ag. **Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos**. REVEMAT. V.11, n.2, p. 109 – 141, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p109/33631. Acesso em 20 de maio de 2017.

ANDRINI, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. V. 6. 4ª ed. renovada – São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

__________, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. V. 7. 4ª ed. renovada – São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

__________, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. V. 8. 4ª ed. renovada – São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

__________, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. V. 9. 4ª ed. renovada – São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ÁREA e volume. **IMECC/UNICAMP**, 2016. Disponível em: <https://cursos.ime.unicamp.br/disciplinas/geometria-analitica/produto-vetorial/area-e-volume/area-e-volume/>. Acesso em 30 de março de 2020.

BARROS, Alexandre Luís de Souza. **Uma análise das relações entre área e perímetro em livros didáticos de 3º e 4º ciclos do ensino fundamental**. 2006. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, Recife, 2006.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar., LIMA, Paulo Figueiredo. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Natal: SBHMat, 2002.

BOYER, Carl B. MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, Brasília, 1997.

__________, Secretária de Educação Fundamental. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries), Matemática**, v.3, Brasília, 1998.

__________, Secretária de Educação Fundamental. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino médio), Matemática**, v.3, Brasília, 2000.

__________, Ministério da Educação. **Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**. São Paulo: Fundação Santillana, 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf>. Acesso em: 05 de novembro de 2018.

__________, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf>. Acesso em: 18 abril 2018.

__________, Ministério da Educação. **PNLD**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>. Acesso em: 11 de março de 2020.

CHEVALLARD, Yves. **Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college – Troisième partie**. Voies d'attaque et problemes didactiques. Petit x, n. 23, p. 5-38, 1989-1990.

__________, Yves. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de do didáctico**. Rechcerches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, nº2, p. 221-266, 1999.

CHIUMMO, Ana. **O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do ensino fundamental**. 1998. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC-SP, São Paulo, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**. V.1. 3a ed. – São Paulo: Ática, 2016.

__________, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**. V.2. 3a ed. – São Paulo: Ática, 2016.

__________, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**. V.3. 3a ed. – São Paulo: Ática, 2016.

__________, Luiz Roberto. **Projeto Ápis: matemática**. V.5. 3ª ed. – São Paulo: Ática, 2017.

DOUADY, R., PERRIN-GLORIAN, M. J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane**. Educational Studies in Mathematics. V. 20, n.4, p. 387-424, 1989.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

EXAME Nacional do Ensino Médio. **Infoescola**, 2011. Disponível em: <https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2013/06/prova-enem-amarela-2011-2dia.pdf>. Acesso em: 01 de abril de 2020.

FACCO, Sonia Regina. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem.** 2003. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC-SP, São Paulo, 2003.

FERREIRA, Lúcia de Fátima Durão. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais**. 2010.193 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FONDA, Caroline Rodrigues da Silva; SILVA, Maria José Ferreira da. **Um panorama das pesquisas a respeito de área de triângulos**. Revista De Produção Discente Em Educação Matemática. v. 8, n. 1, p. 37-53, 2019, ISSN 2238-8044. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/pdemat/article/view/37-53. Acesso em 05 de junho de 2019.

FOURREY, E.. **Curiosités Geométriques**. Quatrième édition. Paris: Librairie Vuilbert, 1938.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. In: **Interface – Comunicação, Saúde, Educação**. Botucatu – SP: V.1, N.1, 1997.

GAZZETTA, M. et al. **Iniciação à Matemática**. V.3. Campinas: Editora da UNICAMP, 1986.

GERANIOU, E., JANKVIST, U.T. **Towards a definition of "mathematical digital competency"**. Educ Stud Math 102, p. 29–45, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8. Acesso em 27 de novembro de 2019.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5ª edição. São Paulo: Atlas, 1999.

IEZZI, G.; DOLCE, O.;DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Conecte: matemática ciências e aplicações**. V.3, São Paulo: Saraiva, 2014.

LESSA, Lucia de Fátima Carneiro Ferreira. **Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área**. 2017. 189 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Coleção explorando o ensino: Grandezas e medidas**. V. 17, Brasília. p. 167- 200, 2010

MAIA, Cristini Kuerten. **A organização praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do ensino fundamental**. 2008. 186 f. Dissertação

(Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

MATEMÁTICA e suas tecnologias. **FUVESTIBULAR**, 2020. Disponível em: <http://fuvestibular.com.br/downloads/apostilas/Objetivo/Ensino-Medio/2-ANO-ENSINO-MEDIO/3-BIMESTRE/LIVROS/matematica.pdf>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

MELLO, Dorival A., WATANABE, Renate G.. **Vetores e uma iniciação à geometria analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

O MONGE “mais letrado do mundo” que criou a base da computação há mais de 1,2 mil anos. **BBC**, 2017. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-42485915>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

PERCH (unit of measure). **Academic Dictionaries and Encyclopedias**, 2010. Disponível em: <https://enacademic.com/dic.nsf/enwiki/9376585>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

PESSOA, Gracivane da Silva. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis**. 2010. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

PROVAS e soluções. **OBMEP**, 2008. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1-n85hyZwloC3mYaGdwCnANNn9XwVVY8u/view>. Acesso em: 15 de janeiro de 2020.

___________ e soluções. **OBMEP**, 2008. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1RLkCMVEJ4XkwJz-BN1J4DkysjQgRkBW6/view>. Acesso em: 15 de janeiro de 2020.

QUAL é a área do quadrado. **BRAINLY**, 2015. Disponível em: < https://brainly.com.br/tarefa/3998816>. Acesso em 15 de abril de 2020.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTANA, Walenska Maysa Gomes de. **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental.** 2006. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação) UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, Recife, 2006.

SILVA, José Valério. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2011. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação) UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, Recife, 2011.

SILVA, Maria José Ferreira da. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC-SP, São Paulo, 2005.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas**. 2007. 297 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

TEMPLE Horus. **The Oriental Institute of the University of Chicago**, 2018. Disponível em: <https://oi.uchicago.edu/research/projects/tell-edfu/temple-horus>. Acesso em 10 de abril de 2020.

WAGNER, Eduardo. **O triângulo e suas principais circunferências**. Revista Eureka!. N. 20, p. 17-25, 2004. Disponível em: < https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka20.pdf>. Acesso em 19 de julho de 2020.