PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

RAFAEL RIX GERONIMO

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE TALES COM GAMIFICAÇÃO

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2021

RAFAEL RIX GERONIMO

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE TALES COM GAMIFICAÇÃO

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,*** *sob a orientação da* ***Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.***

PUC-SP
2021

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

Geronimo, Rafael Rix
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TEOREMA DE TALES COM GAMIFICAÇÃO. / Rafael Rix Geronimo. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
176p. il. ; 21 x 29,7 cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Gamificação. 2. Engenharia Didática. 3. teorema de Tales. I. Silva, Maria José Ferreira da. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

RAFAEL RIX GERONIMO

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE TALES COM GAMIFICAÇÃO

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR em Educação Matemática.

Aprovado em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

____

Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

____

Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre – PUC-Peru

____

Dr. Saddo Ag Almouloud - UFPA

____

Dra. Ana Lúcia Manrique – PUC-SP

____

Dr. Gerson Pastre de Oliveira – PUC-SP

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES), Código de Financiamento 001 e processo número 88887.149120/2017-00.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Finance Code 001 and process number 88887.149120/2017-00.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar aos membros da banca por todas as contribuições que auxiliaram a melhorar a qualidade desta pesquisa. Em especial, agradeço a minha orientadora por toda a ajuda nesse processo.

Gostaria também de agradecer a todos os amigos com quem convivi, não só durante o desenvolvimento do doutorado, mas retrocedo desde a época de especialização e mestrado para lembrar que o companheirismo de todos vocês sempre me ajudou muito. Especialmente, aos amigos da época de doutorado, o apoio, conversas, conselhos e ajuda que me prestaram foram fundamentais para chegar neste momento. As amizades que fizemos são ligações que espero que se estendam por toda a vida.

Agradeço especialmente a minha família, por ter dado um apoio sem o qual consideraria impossível ter chegado ao final desse, que considero ter sido o maior desafio de minha vida. Sem o apoio, carinho e ajuda de vocês, certamente não teria conseguido.

GERONIMO, Rafael Rix. **Uma proposta para o ensino do teorema de Tales com gamificação.** 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021. 176p.

RESUMO

Nosso objetivo geral foi construir uma sequência didática articulada com gamificação para ensinar o teorema de Tales. Para atingi-lo definimos os seguintes objetivos específicos: investigar a pertinência da gamificação para o ensino de matemática; elaborar uma sequência para utilizar a gamificação como estratégia para o ensino; aplicar essa sequência em alunos do nono ano do ensino fundamental; analisar suas potencialidades e restrições. Escolhemos a metodologia da engenharia didática, por isso realizamos os estudos preliminares, incluindo estudos curriculares, levantamento de pesquisas e do objeto matemático. Utilizamos como aporte a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Dialética Ferramenta-Objeto (DFO), elaboramos e aplicamos remotamente uma sequência didática com três alunos do nono ano do ensino fundamental. Consideramos que os estudantes foram capazes de agir, formular e validar suas respostas mesmo à distância, se comunicando por meio do aplicativo *Meeting*. As respostas dos estudantes mostraram que eram capazes de mobilizar ferramentas acerca de polígonos e semelhança, aplicando em diferentes situações problemas. Mobilizaram seus conhecimentos antigos para o entendimento do teorema de Tales e por isso, acreditamos que as escolhas pela TSD e DFO possibilitaram fundamentar nosso entendimento acerca da formulação dos desafios e interpretação das respostas apresentadas. Os estudantes construíram feixes de retas paralelas com base em seus conhecimentos de polígonos e construíram um novo conhecimento, o teorema de Tales, durante realização dos desafios. Cabe salientar que os discentes relataram estarem mobilizando teorema de Tales antes mesmo da institucionalização. Pelos resultados, consideramos validada nossa engenharia didática, visto que os estudantes foram capazes de construir seus conhecimentos referentes ao teorema de Tales, enunciando-o e aplicando, mesmo antes da institucionalização. Além disso, conseguiram responder todas as atividades sem muitas dificuldades, mesmo se tratando de situações didáticas que consideramos complexas.

Palavras-chave: Gamificação. Engenharia Didática. teorema de Tales.

ABSTRACT

Our general objective was to develop a gamified didactic engineering to teach Thales' theorem. To achieve it, we defined the following specific objectives: to investigate the relevance of gamification for teaching mathematics; develop a sequence to use gamification as a teaching strategy; apply this sequence to students in the ninth year of elementary school; analyze its potentials and restrictions. We chose the methodology of didactic engineering, so we carried out preliminary studies, including curricular studies, survey research and the mathematical object. We use as input the Theory of Didactic Situations (TSD) and the Tool-Object Dialectic (DFO), we elaborate and remotely apply a didactic sequence with three students from the ninth grade of elementary school. We believe that the students were able to act, formulate and validate their answers even from a distance, communicating through the Meeting app. The students' answers showed that they were able to mobilize tools about polygons and similarity, applying problems in different situations. They mobilized their old knowledge to understand Thales' theorem and, therefore, we believe that the choices made by TSD and DFO made it possible to support our understanding of the formulation of the challenges and interpretation of the answers presented. Students built bundles of parallels from polygons and mobilized new knowledge: Thales' theorem, during challenges. It should be noted that students reported being mobilizing Thales' theorem even before institutionalization. Based on the results, we considered our didactic engineering validated, as the students were able to build their knowledge regarding Thales' theorem, stating and applying it, even before institutionalization. Furthermore, they were able to answer all the activities without much difficulty, even when dealing with didactic situations that we consider complex.

Keywords: Gamification. Didactic Engineering. Thales theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema de Níveis de Abstração com Elementos de Gamificação 34
Figura 2 – Esquema dos Níveis de Abstração 36
Figura 3 – Feixe de paralelas em que S está entre B e C 81
Figura 4 – Feixe de paralelas em que S está depois de C 81
Figura 5 – Feixe de paralelas em que C e S coincidem 82
Figura 6 – Triângulo interceptado por reta paralela a um dos lados. 83
Figura 7 – Representação da conservação das abscissas 85
Figura 8 – Representação da conservação da razão de projeção 85
Figura 9 – Representação da dilatação 86
Figura 10 – Relação didática 89
Figura 11 – Esquema de aprendizagem 90
Figura 12 – Esquema da aprendizagem para D'Amore 91
Figura 13 – O mago Alium roubando a gema e o grupo de aventureiros 102
Figura 14 – Divisão do Segmento AB Utilizando Um Paralelogramo 105
Figura 15 – Divisão do Segmento AB em Três partes com Paralelogramos 105
Figura 16 – Esboço da divisão do segmento em três partes congruentes com cabo de vassoura, barbante e giz 106
Figura 17 – Esboços do aluno C 109
Figura 18 – Construção de um triângulo equilátero realizada pelo aluno C 109
Figura 19 – Construção de Triângulos Congruentes pelo Aluno C 110
Figura 20 – Esboço de um triângulo qualquer com lados divididos em 3 partes congruentes 112
Figura 21 – Esboço da divisão dos lados de um triângulo qualquer em 3 partes congruentes 112
Figura 22 – Esboço esperado com triângulos sobrepostos 113
Figura 23 – Criação de novo Triângulo baseada no transporte de medidas 114
Figura 24 – Triângulos Semelhantes feitos pelo Aluno C 115
Figura 25 – Triângulos Semelhantes feitos pelo Aluno C 116
Figura 26 – Divisão do segmento em duas partes com razão 1:4 118
Figura 27 – Resposta da Aluna L 119
Figura 28 – Resposta ao Terceiro Desafio 120
Figura 29 – Segunda Resposta ao Terceiro Desafio 120
Figura 30 – Nova Divisão de Segmentos 121
Figura 31 – Alguns exemplos de feixes de paralelas cortadas por transversais 124
Figura 32 – Resposta ao Quarto Desafio 125
Figura 33 – Divisão do Quadrado 126
Figura 34 – Ampliação do quadrado com razão 1:3 128
Figura 35 – Construção do Quadrado pelo Aluno C 129
Figura 36 – Ampliação do Quadrado 130

Figura 37 – Ampliação do Quadrado da Aluna L 130
Figura 38: Resposta ao Quinto Desafio 133
Figura 39 – Construção de triângulo equilátero baseado em segmento que mede seu perímetro 134
Figura 40 – Construção de triângulo Isósceles baseado em segmento que mede seu perímetro 135
Figura 41 – Construção de triângulo retângulo baseado em segmento que mede seu perímetro 135
Figura 42 – Resposta do Desafio 7 com Régua e Compasso 136

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Pesquisas da Categoria Ambientes Informatizados 40
Quadro 2 – Pesquisas da Categoria Estratégias de Ensino 45
Quadro 3 – Pesquisas da Categoria Criação de Jogos 46
Quadro 4 – Pesquisas da Categoria Programação 49
Quadro 5 – Pesquisas da Categoria Alunos 53
Quadro 6 – Pesquisas da Categoria Formação de Professores 59
Quadro 7 – Pesquisas a respeito de proporcionalidade em Livros Didáticos 73

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..........13

2 PROBLEMÁTICA..........15

2.1 GAMIFICAÇÃO..........15

2.1.1 Algumas Definições de Jogos..........15

2.1.2 A Geração Gamer..........16

2.1.3 Definições e Elementos de Gamificação..........26

2.2 REVISÃO DE PESQUISAS QUE TRATAM DE GAMIFICAÇÃO E ENSINO DE MATEMÁTICA..........38

2.3 REVISÃO DAS PESQUISAS A RESPEITO DO TEOREMA DE TALES..........52

2.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVOS..........62

2.5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS..........63

3 ESTUDOS PRELIMINARES..........67

3.1 TEOREMA DE TALES NOS DOCUMENTOS CURRICULARES..........67

3.2 TEOREMA DE TALES EM PESQUISAS REFERENTES A LIVROS DIDÁTICOS..........72

3.3 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: TEOREMA DE TALES..........80

3.4 APORTE TEÓRICO..........88

3.4.1 Teoria das Situações Didáticas..........88

3.4.2 Dialética Ferramenta Objeto..........93

4 A PESQUISA..........99

4.1 SUJEITOS DA PESQUISA E DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO..........99

4.2 ELABORAÇÃO E ANÁLISES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA..........101

4.2.1 Descrição das Escolhas de Gamificação Utilizadas..........101

4.2.2 Análises do Primeiro Desafio..........103

4.2.3 Análises do Segundo Desafio..........111

4.2.4 Análises do Terceiro Desafio..........117

4.2.5 Análises do Quarto Desafio..........122

4.2.6 Análises do Quinto Desafio..........127

4.2.7 Institucionalização do teorema de Tales..........131

4.2.8 Análises do Sexto Desafio..........132

4.2.9 Análises do Sétimo Desafio..........134

4.2.10 Algumas Reflexões a Respeito da Aplicação..........136

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS..........141

REFERÊNCIAS..........147

ANEXO A: PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA DA PUC-SP..........155

ANEXO B: TERMO DE ASSENTIMENTO PARA PARTICIPANTE..........159

APÊNDICE A: O LABIRINTO DE ALIUM..........161

1 INTRODUÇÃO

Nosso interesse por essa pesquisa remonta à dissertação de mestrado, quando propomos a elaboração e aplicação de um jogo como tentativa de articulação entre história da matemática e didática para tratar da introdução de incógnitas, com estudantes do ensino fundamental. Como resultados, descobrimos que a estratégia não linear para leitura, que foi utilizada, criou um entrave e nos questionamos se a opção por uma contação de histórias não seria uma alternativa pertinente. Mais um desafio era a falta de uma metodologia que previsse institucionalização de conhecimentos após o jogo propriamente dito. Outro ponto relevante referiu-se ao fato de o estilo desse jogo ter sido uma aventura solo e consideramos que a interação em grupo poderia ter trazido outra dinâmica aquela pesquisa.

Apesar disso, observamos engajamento e a maneira positiva com que os erros foram encarados pelos estudantes, além das diferentes estratégias mobilizadas. As dificuldades e potencialidades do ensino com jogos, observadas nessa pesquisa, seguiram como dilemas que tentamos abordar durante a elaboração desta tese.

Depois de terminada a dissertação, realizamos novas reflexões e além dessas, outras inquietações surgiram, especificamente referente à ideia de jogos educativos. Consideramos que existe uma dificuldade na própria definição de jogos de Huizinga (2008), quando estabeleceu que, entre outros, os jogos não têm um fim em si mesmos, o que nos levou a concluir que seria impossível criar um jogo com fins didáticos. Uma maneira de superar esse aparente paradoxo seria trabalhar com uma estratégia que se assemelhasse aos jogos, um tipo de metáfora e decidimos então investigar se a gamificação poderia assumir esse papel.

Cabe explicar que esse é um termo novo e que seu estudo se revelou complexo, por esse motivo foi o primeiro assunto tratado neste trabalho para melhor delimitarmos os problemas e objetivos. Depois de entender melhor essa metáfora, decidimos utilizá-la para construir uma sequência didática a fim de ensinar, utilizando gamificação. É necessário ressaltar nossa concepção de que para ensinar é necessário que se ensine algo a alguém. Assim, decidimos escolher um objeto de ensino que se revelasse desafiador em nossa prática e por isso, optamos pelo teorema de Tales para estudantes do nono ano do ensino fundamental. Dessa forma, o objetivo nessa tese foi: construir uma sequência didática articulada com gamificação para ensinar o teorema de Tales.

Como gamificação é um tema novo, em que as primeiras publicações que encontramos remontam a 2011, decidimos realizar uma pesquisa experimental escolhendo como metodologia de pesquisa a engenharia didática para responder à questão: Como uma estratégia didática gamificada pode apoiar o ensino de teorema de Tales? Tivemos como hipótese que utilizar gamificação para ensinar o teorema de Tales teria potencial para fazer com que os estudantes construíssem seu conhecimento de maneira engajadora.

Assim, no capítulo 2 construímos a problemática da pesquisa apresentando levantamentos referentes a pesquisas que trataram do ensino de matemática com gamificação e do ensino do teorema de Tales. Depois, no capítulo 3, foram feitos estudos preliminares referentes ao currículo, um levantamento de pesquisas relacionadas à proporcionalidade e um estudo do objeto matemático. Como aporte teórico, escolhemos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Dialética Ferramenta Objeto (DFO) para elaborar, aplicar e analisar esta sequência didática.

A seguir, no capítulo 4, elaboramos uma sequência didática para o ensino de teorema de Tales, utilizando experiências relacionadas à criação de uma história de fantasia, como elemento central dessa gamificação, em cuja narrativa foram propostos desafios para que os estudantes avançassem na história.

Aplicamos essa sequência com um grupo de três alunos do nono ano do ensino fundamental. Devido ao isolamento imposto pela pandemia de COVID-19 e dos prazos inerentes a este projeto de pesquisa, propomos a pesquisa a distância e consideramos que os discentes foram capazes de agir, formular e validar o próprio conhecimento. Dessa forma, consideramos que essa sequência articulou gamificação e ensino, as considerações compuseram nosso capítulo 5.

2 PROBLEMÁTICA

Nesse capítulo, focamos na problemática de nossa pesquisa, apresentando a noção de gamificação, investigando sua origem, seus elementos e se existe alguma relação entre ela e os jogos. Depois tratamos da revisão bibliográfica fazendo um levantamento de pesquisas que trataram de gamificação e ensino de matemática, além de pesquisas a respeito do teorema de Tales, que nos permitiram aprofundar a temática e nos auxiliaram a delimitar nosso problema de pesquisa, objetivos, justificativa, metodologia e procedimentos.

2.1 Gamificação

A constatação da necessidade de entender gamificação fizemos um estudo para compreender o que era jogo e qual a origem dos jogos informatizados (*games*). Assim, no que segue apresentamos algumas definições de jogos, a geração gamer, definições e elementos de gamificação.

2.1.1 Algumas Definições de Jogos

Como parte da proposta de compreender gamificação era pertinente entender o interesse pelos jogos e, especialmente, pelos concebidos em meios digitais. Essa modificação de plataforma pôde ser considerada o motor de uma mudança de perspectiva em sua abordagem. Para tentar explicar essa transformação, mostramos algumas definições e fizemos um esforço no sentido de explicar as perspectivas de seus autores. Em um primeiro momento foi importante conhecer a definição de Huizinga (2008, p.33):

> [...] o jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da 'vida quotidiana'. [...]

Essa perspectiva era do jogo como elemento da cultura. Em sua obra, o autor situou-o como anterior à civilização e como fenômeno que permeava o desenvolvimento da humanidade. O título de seu livro, "*Homo Ludens*", já demonstrou que assumiu a metáfora do homem como sendo *ludens* (que joga) mais do que *sapiens* (que sabe). Para defender essa ideia, Huizinga (2008), relacionou os jogos às artes, ao direito, à guerra, à poesia, à filosofia e ao conhecimento, o que conduziu a uma definição ampla pensando em sua função para a sociedade. Outro ponto importante de se notar nessa obra era que ela não considerou os modernos meios de informação e de comunicação, pois o autor nasceu no século XIX e viveu até a primeira metade do século XX.

No mesmo caminho vemos Caillois (1994) que definiu jogo como atividade livre, com limites precisos de espaço e tempo, com resultado incerto, improdutivo, regido por regras e fictício. Esse autor também pertenceu à área da filosofia e defendeu o jogo como fenômeno cultural, pois foi um pesquisador da primeira metade do século XX, quando o desenvolvimento de muitas das modernas tecnologias ainda estava em fase embrionária. Uma contribuição desse autor estava na ideia de que existiam atividades livres, em que existia maior possiblidade de renegociação ou até abolição das regras, mas, por outro lado, existiam atividades mais estruturadas, em que as regras não podiam ser quebradas. Para o autor, estas atividades com maior liberdade eram abarcadas no que se denomina *paidia* e se assemelhavam ao que podia ser associado à brincadeira, justamente pela liberdade de renegociação das regras, enquanto a observância mais rígida às regras era característica do *ludus* que, nessa visão, pôde aparentelar-se com o jogo.

Podemos comparar as definições acima com a de McGonigal (2012, p. 30) quando postulou que: “[...] todos os jogos compartilham quatro características que os definem: meta, regras, sistema de *feedback* e participação voluntária”, pois se preocupavam com as necessidades de cada área de estudos. Huizinga e Caillois eram da área da filosofia, McGonigal é uma *designer* de jogos digitais com uma visão mais prática, além do interesse em criar jogos, enquanto Huizinga e Caillois tinham uma preocupação maior em analisá-los, como elementos da cultura.

Dessa forma, sabemos que o desenvolvimento de tecnologias digitais mudou a forma de produzir, ver e se relacionar com os jogos que conduziram as novas gerações a crescerem jogando em meios informatizados. Assim, tratamos dessas mudanças a seguir.

2.1.2 A Geração *Gamer*

Para Carstens e Beck (2005) existiu toda uma geração de pessoas que cresceram jogando em meios informatizados e que, por isso, podiam ser chamadas

Geração *Gamer*. Para tentar entender o surgimento dessa geração, foi pertinente conhecer o desenvolvimento das plataformas de jogos digitais.

Podemos situar o surgimento dos videogames no final dos anos 1950 e durante os anos 1960, época da Guerra Fria que impulsionou a criação de computadores para favorecer a simulação de guerra que, consequentemente, foram usados para criar jogos. Na visão de Ribera (2012), a guerra fria foi uma tensão entre os Estados Unidos da América (E.U.A.) e a União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (U.R.S.S.), aconteceu entre os anos 1946, depois da segunda guerra mundial, e 1991, pouco depois da queda do Muro de Berlim. O canal de televisão *Discovery* criou o documentário: “A Era do Vídeo *Game*”[1] para mostrar que os cientistas, envoltos na Guerra Fria, foram os primeiros criadores de jogos em meios informatizados utilizando computadores disponíveis em bases militares e universidades como plataforma.

A partir dos anos 1970 surgiram as primeiras empresas comercializando videogames baseados, principalmente, em esportes, guerras e naves espaciais. Esse desenvolvimento aconteceu paralelamente à Cultura Pop definida por Soares (2014) como o:

> [...] conjunto de práticas, experiências e produtos norteados pela lógica midiática, que tem como gênese o entretenimento; se ancora, em grande parte, a partir de modos de produção ligados às indústrias da cultura (música, cinema, televisão, editorial, entre outras) e estabelece formas de fruição e consumo que permeiam um certo senso de comunidade, pertencimento ou compartilhamento de afinidades que situam indivíduos dentro de um sentido transnacional e globalizante.

Foi possível fazer um paralelo entre o desenvolvimento dos videogames e a Cultura Pop, pois a explosão do consumo e a desconsideração de barreiras físicas e culturais foram importantes para tornar possível que um *game*[2] produzido no Japão, por exemplo, pudesse ser consumido nos E.U.A. Esse tipo de troca de tecnologias e, até mesmo, de ideias entre programadores e desenvolvedores possibilitou a invenção dos primeiros videogames comerciais.

[1] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9n2VagiqY6w, acesso em 22/09/2017.

[2] Neste trabalho a palavra *game* sempre será associada a jogos eletrônicos.

A Guerra Fria ainda era a realidade geopolítica predominante nessa época, então os jogos e filmes de guerra eram alguns dos principais expoentes dessa década, quando também foram criadas grandes franquias de gibis, filmes, séries de televisão, *games* e, dentro da Cultura Pop, havia intercambio que possibilitava a migração de um filme ou um gibi para o videogame. Exemplificando esse fenômeno, podemos citar Guedes (2017) quando explicou que, em 1972, houve a criação dos gibis *X-men*, com personagens adolescentes que tinham poderes "extras", cujas aventuras tornaram-se sucesso mundial e são consumidos até a atualidade como gibis, filmes, séries de televisão, *games* e outros produtos.

Outro exemplo desse intercâmbio foi dado por Augusto (2017), quando afirmou que, durante a década dos anos de 1970, a indústria cinematográfica lançou filmes como *Star Wars* e séries como *Star Trek,* que contavam a história da colonização humana do espaço, de conflitos que poderiam ocorrer e, posteriormente, migraram para outras plataformas. Dessa forma, soubemos que filmes, gibis, séries de televisão e jogos tinham grande intercâmbio de títulos e personagens, que permanece até a atualidade.

Mais um tipo de transposição se deu com simulações de jogos de tabuleiro e esportes, em que as regras eram gerenciadas pelo ambiente informatizado e os jogadores poderiam disputar partidas entre si ou contra uma inteligência artificial em programas de computador, cujo desafio era se parecerem com jogadores reais. Reforçou a ideia desse desafio o trabalho de Traumann (2017), quando apontou que os simuladores de jogos de xadrez, das décadas de 1960 e 1970, não tinham capacidade de processamento para enfrentar enxadristas profissionais. Apesar dessas limitações, os videogames continuaram se desenvolvendo, no documentário "A Era do Vídeo *Game*", foi possível perceber que, na década dos anos de 1980, houve uma melhora substancial da tecnologia e aumento de empresas que possibilitaram a criação de franquias como *Super Mario Bros, Donkey Kong* e *Pac Man* e de consoles como o *NES, o Mega Drive* e o *Game Boy*, por exemplo.

A despeito desse aparente descolamento da indústria militar, quando comparamos com as décadas anteriores, Coelho e Santos (2009) salientaram que, nos anos 1980 a Atari (empresa líder do segmento de videogames à época) vendia simuladores de tanques de guerra para o exército dos E.U.A. e ajudou a criar algumas das primeiras tecnologias de realidade virtual. Então pudemos ver que alguns desenvolvedores de jogos informatizados continuaram atrelados ao setor militar.

A década dos anos 1990 foi marcada pelo desenvolvimento tecnológico que permitiu uma complexificação dos enredos dos *games*, ao mesmo tempo em que trouxe melhora nos sons e gráficos que possibilitou, por exemplo, complexos quebra-cabeças em franquias como *Final Fantasy* e *Tomb Raider.* Outra mostra do avanço dessas tecnologias foi dada por Traumann (2017) quando afirmou que só em 1997 um simulador computacional conseguiu derrotar o campeão mundial de xadrez da época.

Nessa década, foram criados *games* com anti-heróis que exploravam uma temática mais violenta e sensualizada. Pudemos citar como exemplo a franquia *Grand Thief Auto* (GTA)*,* que narrava a história de um personagem criminoso, que buscava poder entre as diversas gangues de uma cidade fictícia, em que o jogador poderia roubar carros, brigar com pedestres, trocar tiros com a polícia, entre outras ações. Foi importante salientar que, nessa época, muitos jogadores de videogame já eram maiores de 20 anos e, por isso, podia-se explorar essa modalidade de entretenimento. Seguindo essa linha de jogos adultos, surgiu a modalidade de tiro em primeira pessoa (*First Person Shooter*) em que o jogador via apenas suas mãos, armas e mira e deveria atirar nos inimigos, que poderiam ser pessoas, animais, alienígenas, zumbis ou outros.

Uma informação importante foi dada por Fonseca (2017), quando afirmou que a estreia desse gênero se deu em 1992 com a franquia *Wolfenstein 3D*. Nesse jogo, o herói era um soldado americano que deveria atirar em soldados alemães, durante a Segunda Guerra Mundial e, em sua última fase, deveria matar Adolf Hitler. Mas, segundo o documentário “A Era do Vídeo *Game”* essa franquia foi proibida na Alemanha, por ser ilegal a menção dos símbolos nazistas, nesse país.

Os *games* com conteúdo violento e/ou sexual geraram toda uma controvérsia na sociedade estadunidense que culminou com a criação de uma agência de classificação etária denominada *Entertainment Software Rating Board* em 1994*.* Um foco do debate, que justificou essa criação, era a possibilidade de os *games* serem a causa de comportamentos agressivos em crianças e adolescentes. Para Garcia (2015, p.10) essa agência também era responsável~~:~~

> [...] pela regulamentação da publicidade e da política de privacidade no mercado de jogos eletrônicos em rede. Um dos seus principais objetivos é auxiliar a população na determinação do tipo de conteúdo de um jogo e para qual faixa etária ele pode ser indicado por meio da classificação mostrada nas caixas ou nas descrições nas páginas na Internet dos produtos, principalmente nas lojas virtuais como PlayStore, Google Play ou Apple Store.

A partir daí os videogames não eram apenas para crianças e adquiriram o *status* de serem capazes de influenciarem o comportamento de seus usuários. Estudos acerca da violência nos jogos eletrônicos, como os de Ferreira (2011) e Godinho (2011), apontaram que esse era um assunto muito complexo para ter uma única causa e, por isso, culpar os *games* por episódios violentos foi uma simplificação da realidade que não poderia ser feita.

Outra mudança importante aconteceu na interação entre a indústria do cinema e as empresas de videogames, quando as companhias desenvolvedoras adquiriam os direitos de filmes para transformá-los em jogos, aconteceu assim com obras como: “*007 GoldenEye”* e “*Star Wars”*. A partir dos anos 1990 começou o movimento inverso e alguns jogos de videogames se tornaram filmes como: “*Street Fighter*”, “*Mortal Kombat*” e “*Super Mario Bros*[3]”, por exemplo.

Na década dos anos 2000 os jogos começaram a ficar mais personalizados, com o desenvolvimento de novas plataformas, franquias e da internet que permitiram ao jogador customizar sua experiência de uma maneira nova. As temáticas também mudaram e os jogos começaram a tratar de temas controversos, como foi o caso, do JFK *Reloaded*, lançado em 2004, que propunha que o jogador encarnasse o papel do assassino do ex-presidente dos E.U.A. John F. Kennedy, em 1963.

Era possível atirar no ex-presidente e em qualquer pessoa do comício presidencial e acompanhar o *replay* dos tiros dados, em câmera lenta, para verificar o “desempenho” do jogador. Na época do lançamento desse jogo existiram protestos da família Kennedy e várias reportagens foram feitas por agências de notícias como, por exemplo, a BBC Brasil[4].

---

[3] Disponível no site: http://www.garotasgeeks.com/top-10-filmes-que-viraram-games/. Acesso em 21/11/2017.

[4] Disponível em: http://www.bbc.com/portuguese/noticias/story/2004/11/041122_kennedymla.shtml. Acesso em 24/11/2017.

Um acontecimento importante, dessa época, foram os atentados em 11 de setembro de 2001. Mazetto (2002) explicou que, nesse dia, terroristas ligados ao grupo *Al Qaeda* sequestraram aviões de passageiros, com o objetivo de atingir as torres do *World Trade Center*, o Pentágono e a Casa Branca, nos E.U.A. Devido aos danos causados pela colisão de 2 aviões, as torres do *World Trade Center* implodiram, matando mais de 3 mil pessoas. Esse acontecimento marcou o mundo e teve reflexo nos jogos, pois de acordo com Amorim (2008) os terroristas treinaram para os ataques utilizando jogos que simulavam voos com os modelos de aviões que foram sequestrados.

Um desses reflexos pôde ser considerado o "*9-11 Survivor*" cujo enredo, de acordo com Baigorri (2010) estava centrado em reviver o papel de uma das vítimas do atentado ao *World Trade Center,* pois foi ambientado em uma das torres que pegou fogo. Durante o jogo, era permitido que a pessoa corresse entre alguns andares, mas sem escapatória e, no final, era preciso escolher entre se jogar pela janela ou ficar dentro do prédio, que desabava.

O autor explicou que o *9-11 Survivor* era uma modificação de outro título, o *Unreal Tournament*, feita por usuários que dominavam tecnologias e tinham habilidades para modificarem jogos comerciais e criarem outros títulos, esse era o início de uma nova tendência em que usuários modificavam jogos.

Outra importante iniciativa, citada por Schitcoski (2009), foi a criação do jogo *America's Army*, em 2003, desenvolvido totalmente pelo exército dos E.U.A. com o objetivo de aumentar o recrutamento de jovens para as forças armadas. A ambientação ocorreu em quartéis e as missões, centradas na vida do soldado, eram feitas contra "inimigos" sem justificativa de seus motivos, ou do treinamento.

O exército desenvolveu 100% do jogo, algumas das habilidades, desenvolvidas nas partidas, eram consideradas úteis para os soldados como, por exemplo, o aumento da habilidade de cumprir várias tarefas ao mesmo tempo, aumento qualitativo na diferenciação e priorização dos alvos, habilidade de trabalhar em equipe, dessensibilização para atirar em alvos humanos e pré-disposição para tomar ações agressivas.

Uma questão importante era que a interface dos veículos e armamentos militares se tornou cada vez mais parecida com a dos controles de consoles, possibilitando que os soldados utilizem toda a habilidade, adquirida nos *games*, para outros fins. Outro detalhe importante era a gratuidade dessa franquia, que permitia baixar o jogo pela Internet, para computadores ou videogames e a constantemente atualização com novas missões e gráficos de última geração culminando com o aumento da taxa de conscrição de jovens pelo exército dos E.U.A. segundo Schitcoski (2009).

Outro exemplo da temática dos jogos desse período foi a franquia: *Tropico*, lançada no começo dos anos 2000, cuja ambientação foi descrita no site da empresa que comercializa o jogo[5]. O jogador assumiria o papel de ditador em uma ilha fictícia no Caribe, durante a guerra frita, poderia escolher entre desenvolvê-la como uma estância turística, um estado policial ou um país industrializado e escolheria entre intimidar os inimigos, combater guerrilheiros e administrar qualquer pressão feita pelas duas grandes potências mundiais daquele período.

Segundo Boullosa (2017) desde o ano de 2007 a indústria dos jogos digitais faturava mais que a indústria do cinema o que pressupõe grande número de lançamentos e divulgação, o que mostrava sua relevância.

Esses desenvolvimentos e usos de meios eletrônicos podiam remeter-nos às ideias de Huizinga (2008) e de Caillois (1994) de que os jogos eram elementos da cultura, para ponderar que esses meios os tornaram influentes, ao ponto de ajudar a explicar o mundo em que vivemos e influenciar comportamentos, assim como propiciar diversão.

Uma mudança importante, dessa época, foi o desenvolvimento da *internet* e das conexões em banda larga, que potencializou a implantação de jogos computadorizados, baixados da internet e permitiu a constituição de redes de jogadores.

Também foram criados os *Massive Multiplayer Online* (MMO), feitos para milhares, ou até milhões de jogadores, ao mesmo tempo. Um exemplo dessa categoria foi o *World of Warcraft* (WoW), segundo Maia (2014), entre 2004 e 2014 foram criadas mais de 100 milhões de contas únicas em 244 países e territórios, com 9 milhões de guildas (equipes cooperativas com objetivos comuns) e 500 milhões de avatares, o que mostra a dimensão da grandiosidade desse jogo.

---

[5] Disponível em: http://kalypsomedia.com/en/games/tropico3/index.shtml. Acesso em 24/11/2017.

McGonigal (2012) apresentou outros dados, como os jogadores passarem, em média, de 17 a 22 horas semanais conectados ao WoW e que o número de assinantes foi de 250 mil em 2004 para 11,5 milhões em 2010. A autora ressaltou que a página Wiki (página com conteúdo produzido de modo colaborativo e sem fins lucrativos pelos jogadores) era a segunda maior deste gênero, atrás somente da *Wikipedia*.

Em meio ao desenvolvimento de tecnologias e de lançamento de novos jogos foram registrados os primeiros casos de vício, alguns deles com consequências fatais, como o caso de um casal de sul-coreanos que, jogando MMO, deixaram sua filha de três meses morrer de inanição[6], o do americano que morreu após jogar por 22 horas fazendo a transmissão do jogo ao vivo[7] e, ainda o de um casal chinês que vendeu o filho[8] para usar o dinheiro em *lan houses*.

Esses casos fizeram com que o debate especializado investigasse a dependência em *internet* e jogos eletrônicos. Abreu *et al*. (2008) fez um levantamento abrangente a respeito de pesquisas que relacionavam o uso da *internet* e dos *games* com patologias como depressão, transtorno bipolar, ansiedade e déficits de atenção e levantou a hipótese de que o excesso, em jogos eletrônicos, pode ser um transtorno similar a outras dependências, mas não apontou resultados conclusivos.

Por outro lado, a realidade virtual passou a ser usada para ajudar a tratar fobias, simulando os medos de pacientes com estresse pós-traumático, para que pudessem superá-los. Ribeiro, Mota e Oliveira (2013) fizeram um levantamento em 14 artigos publicados entre os anos de 2002 e 2011, mostraram que as causas dos traumas estudados foram guerras, ataques terroristas, acidentes de carros, assaltos e que os tratamentos incluíam realidade virtual para que os pacientes reexperimentassem as experiências traumáticas com auxílio de projetores, capacetes, óculos de realidade virtual, luvas, *mouses* e fones de ouvido. Os autores

---

[6] Disponível em: http://www.paulopes.com.br/2010/03/casal-sul-coreano-viciado-em-games.html. Acesso em 28/11/2017.

[7] Disponível em: https://extra.globo.com/noticias/mundo/americano-morre-apos-22-horas-jogando-game-com-transmissao-ao-vivo-para-caridade-20963102.html. Acesso em 28/11/2017.

[8] Disponível em: https://tecnoblog.net/71499/chineses-venderam-filhos-vicio-games/. Acesso em 28/11/2017.

apontaram resultados satisfatórios nesse tipo de tratamento e a necessidade de estudos mais amplos com maior quantidade de pacientes.

Outra aplicação de *games* para o tratamento de pacientes com necessidades de fisioterapia pôde ser vista no artigo de Sousa Junior *et al*. (2013) em que mostraram um experimento com sensores de movimentos que capturavam as imagens e as transmitiam em um monitor, para que os pacientes fizessem os movimentos corretos e ganhassem pontos. Esse *software* foi desenvolvido por uma equipe multidisciplinar de programadores e fisioterapeutas com a intenção de transformar sessões de fisioterapia em jogos, tornando o tratamento mais divertido. Na década dos anos 2010 os jogos, ou seus elementos, continuaram a serem aplicados na área da medicina e utilizados por empresas para divulgar e vender produtos.

A publicidade pôde ser usada também nos *games*, como por exemplo de futebol ou basquete, para exibir propagandas de empresas e produtos durante as partidas, da mesma forma que era feito em partidas reais. Outra estratégia foi usar dinâmicas parecidas com jogos para engajar equipes de funcionários para receber pontuações individuais e por equipes, vinculadas ao cumprimento de metas ou a concessão de prêmios. Outra modalidade era a de sites de compras que atribuiriam pontos a cada pagamento efetuado para conceder vantagens a clientes bem ranqueados.

O início de competições ocorreu durante os anos 2000, mas foi na década dos anos 2010 que aconteceu uma profissionalização dos competidores e os *games* se tornaram esportes ou E-esportes (o “e” representava eletrônicos) e provocou a discussão de sua inclusão nos jogos olímpicos de 2024[9]. O documentário “*Free to Play*”[10] mostrou o primeiro campeonato de jogos eletrônicos que pagou 1 milhão de dólares ao time vencedor, em 2011 e a dificuldade que os jogadores profissionais tinham para a subsistência até então. Com a profissionalização dos competidores, o aumento das premiações e da popularidade dessas competições foi possível o surgimento da carreira de jogador profissional de jogos eletrônicos.

[9] Disponível em: https://www.tecmundo.com.br/cultura-geek/120608-esports-olimpiadas-dirigente-tem-interesse-trazer-games-evento.htm. Acesso em: 01/12/2017.

[10] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-6stUZAfek8. Acesso em 01/12/2017.

Existiram, ainda, tentativas de aplicar as experiências de *games* na educação, como mostrou o trabalho de Sheldon (2012) que usou suas experiências como roteirista em séries de televisão para desenvolver jogos digitais e transformar suas aulas em jogos, quando se tornou professor universitário do curso de *design de games*. O autor organizou seus grupos de alunos em guildas, as aulas em aventuras, os espaços da sala em mapas, as notas em experiência, o professor em “mestre do jogo” e para ser aprovado, o aluno precisava alcançar níveis de personagens com sua experiência.

Outro exemplo de mudança nas práticas educativas era o da escola *Quest to Learn*, uma escola pública da cidade de Nova Iorque para crianças e adolescentes entre 11 e 17 anos que foi aberta em 2009, com o propósito de oferecer uma experiência interdisciplinar. De acordo com Salen (2011), os professores criaram projetos para agrupar disciplinas e jogos baseados em simulações da realidade, para que as crianças jogassem e resolvessem problemas simulando o trabalho de engenheiros ou cientistas.

Como uma atividade desta linha, podemos citar a missão “luz viajante”, que agrupou ciências e matemática, na qual os alunos eram desafiados a entender propriedades dos feixes de luzes e a calcularem seus ângulos de incidência. A premissa da atividade era a existência de uma mensagem que, para ser decodificada, exigia conhecimentos relacionados à “feixes de luzes” da ótica, pois somente a luz branca, incidindo em certa superfície poderia decodificar a mensagem secreta.

Esses tipos de iniciativas revelaram tentativas de incluir jogos, ou seus elementos, na educação por existir uma geração que foi influenciada por videogames e que principiaram experiências com jogos, para o ensino de conhecimentos do currículo, em diferentes instituições e níveis, inclusive no meio acadêmico com trabalhos que buscavam desenvolver alternativas para o ensino.

Um exemplo desse tipo foi a investigação de Carolei e Tori (2014) que propuseram uma discussão acerca de possibilidades do trabalho com elementos de jogos e elementos virtuais interativos digitais, que se sobrepunham a elementos físicos do mundo real (realidade aumentada). Considerando as formas de nos relacionarmos com o conhecimento, propostas por Papert, os autores fizeram reflexões a respeito de experiências de jogos com realidade aumentada para propor que, quando utilizados em conjunto, poderiam criar novas formas de interagir, contar histórias, estabelecer vínculos estéticos, éticos e simbólicos, com espaços físicos e pessoas. Denominaram esse tipo de trabalho como Gamificação Aumentada.

Da mesma forma podemos situar o estudo de Fardo (2013) quando refletiu acerca de potencialidades da utilização de jogos e seus elementos na educação. A linguagem e a metodologia dos jogos eletrônicos eram populares nos mundos virtuais e por isso poderiam ser aceitas pelas gerações que cresceram imersas nessas tecnologias o que justificaria, em termos socioculturais, esse tipo de estratégia.

Depois de observar todo esse desenvolvimento dos jogos e sua utilização em diversas áreas, incluindo a academia, consideramos importante definir gamificação e mostrar alguns dos elementos que a influenciaram a fim de entender como foi possível utilizá-la para o ensino.

2.1.3 Definições e Elementos de Gamificação

Após a reflexão a respeito do que são jogos e como se desenvolveram em meios eletrônicos nosso olhar recaiu na gamificação e em diferentes definições encontradas em nossa revisão das pesquisas relacionadas ao ensino de matemática. Assim, nos detivemos nas explicações apresentadas por Deterding *et al*. (2011), Kaap (2012) e Zichermann e Cunningham (2011).

Deterding *et al.* (2011, p. 2, tradução nossa) explicou que, embora a utilização de jogos em diferentes áreas do conhecimento não seja coisa nova, os meios informatizados proporcionam discussões a respeito de experiências e de diversão que puderam ser consideradas inéditas. Os autores explicaram que: "**gamificação' é o uso de elementos de design de jogos em contextos que não eram de jogos.**"[11] Para os autores, o jogo era uma convenção social não muito clara, pois "[...] a adição de uma regra informal ou de um objetivo compartilhado por um grupo de usuários pode transformar um aplicativo 'meramente' gamificado em um jogo 'completo'. [...] (Ibid, p. 3)"[12]

[11] "'Gamification' is *the use of game design elements in non-game contexts"*. (p.2)

[12] [...] The addition of one informal rule or shared goal by a group of users may turn a 'merely' "gamified" application into a 'full' game. [...] (p.3)

Essa ideia ajudou a esclarecer a complexidade entre diferenciar gamificação do jogo em si, visto que os limites entre um e outro não são fáceis de definir e nos levou a entender que tal diferença só pôde ser feita pelo criador da atividade gamificada e não pelos usuários.

Para o autor, como o objetivo do jogo era a diversão e a gamificação tinha outros objetivos, considerou que esses eram os “contextos que não eram de jogos” de sua definição. Essa era uma questão importante de ser situada, para que pudéssemos pensar na definição não mais em termos de “contextos que não eram de jogos” e sim em “contextos que não tratavam apenas da diversão como finalidade”, pudemos então interpretar que uma definição válida para gamificação poderia ser: **o uso de elementos de jogos em contextos que não visavam somente diversão**.

Para Deterding *et al*. (2011), os elementos de gamificação conforme sua abstração, eram separados por níveis e faziam referência a conhecimentos específicos, utilizados por *designers* de jogos. O **primeiro** nível de abstração era o da **Interface**, que para Oliveira e Baranauskas (1999) poderia ser um modelo conceitual de interações que aconteciam entre o homem e um meio informatizado, em outras palavras, seriam as respostas do sistema para as interações com seres humanos, como prêmios, tabela de classificação e níveis de jogo. Vimos que, nesse nível de abstração, se agruparam elementos comuns em ambientes informatizados, que sofreriam alterações provocadas por interações dos usuários, sem a necessidade da moderação de um técnico, professor ou entre os usuários, o que os tornaram instrumentos para a realização de atividades rotineiras ou de treinamento.

Para Deterding *et al.* (2011), utilizar somente elementos desse nível de abstração era insuficiente para gamificar atividades, apesar de serem importantes, porque níveis, prêmios e tabelas de classificação poderiam ser empregados na medida em que os estudantes concluíssem tarefas e se mantivessem conectados a ambientes informatizados.

No **segundo** nível de abstração estavam os **padrões e mecânicas.** Nele a preocupação recaia no que se repetia e como isso acontecia. Para Zichermann e Cunningham (2011), as mecânicas eram pensadas para criar desafios que provocassem interesse dos usuários, com foco no tempo necessário para passar por cada parte da atividade (restrição de tempo), com as interações entre os participantes (turnos) e como ocorreriam (limitação de recursos). Cabe dizer que os desafios, nesse nível de abstração, se relacionavam com a maneira de lidar com essas limitações.

O **terceiro** nível de abstração era o das **heurísticas**[13] que se diferenciava do nível anterior porque enquanto em padrões e mecânicas os desafios estavam ligados à administração da atividade, nas heurísticas acrescia-se a ideia de que eram formulados problemas ou quebra cabeças, para serem resolvidos. Vimos, como exemplos em Deterding *et al*. (2011), o elemento “jogo duradouro”, que era a concepção de atividades que poderiam ser interrompidas e continuadas em outros momentos, mantendo as pessoas interessadas e o objetivo, que precisava ser expresso de maneira clara, porque ajudava a manter o interesse e ao mesmo tempo, definia o que deveria ser feito. Já o componente “estilos de jogo” relaciona-se a dinâmicas diferentes que mantinham problemas e quebra-cabeças, como por exemplo nos jogos *Final Fantasy* e *Tomb Raider*.

O **quarto** nível de abstração era o das **experiências,** ligado às estéticas e experimentações do usuário, continha elementos como fantasia, curiosidade e imersão. Outro exemplo de elemento, nesse nível de abstração, eram as “mecânicas, dinâmicas e estéticas” que, para Deterding *et al*. (2011), além de poderem ser aplicadas à gamificação, eram um modelo conceitual em que o criador da atividade utilizava mecânicas para proporcionar experiências aos usuários, enquanto estes percorriam o caminho inverso, com base nas experiências vividas durante a atividade, conheciam as mecânicas.

Pudemos exemplificar esse modelo com um ambiente informatizado que premiasse, com emblemas, os usuários a cada 30 minutos em que permaneciam conectados ao ambiente. O conhecimento do usuário a respeito dessa mecânica podia fazer com que sua experiência fosse modificada, não se desconectando depois de 20 ou 25 minutos, mas esperando que se completem 30 minutos, no mínimo, para se desconectar apenas após receber o emblema. Dessa maneira, esses elementos tornaram-se importantes para os *designers* porque puderam alterar conscientemente a experiência do jogador.

[13] Para Kuhn (2015, p. 08): “[...] O termo “heurística” tem sua origem etimológica no grego, *heurísko*, ou na exclamação de Arquimedes, ao compreender a dinâmica dos fluídos: “*Eureka!*” (achei, encontrei!) [...]”.

No **quinto** nível de abstração estavam os **métodos**, em que eram abarcadas as práticas e processos específicos de criação, utilizadas por *designers* de jogos. Um elemento desse nível foi o *Playtesting*, que eram testes focais realizados para verificar se todos os elementos e mecânicas funcionavam corretamente. Embora esse elemento estivesse ligado aos *game designers,* podemos inferir que, em atividades de ensino, pudemos situar o quadro teórico e estratégias didáticas, que poderiam ser utilizadas pelo público especializado em educação matemática.

Cabe comentar que as regras foram um elemento presente em todos os níveis de abstração, pois eram estas que estabeleciam os limites para os outros elementos e, assim, se constituíam em um dos elementos definidores da gamificação. Podemos justificar essa ideia pensando na contribuição de Caillois (1994) quando afirmou que as regras definiam os jogos e os diferenciavam das brincadeiras. Baseados na definição apresentada por Deterding *et al.* decidimos compará-la com a apresentada por Kaap.

Para Kapp (2012, p.10, tradução nossa): "**gamificação é o uso de mecânicas, estéticas e pensamentos de jogos para engajar pessoas, motivar a ação, promover aprendizagem e resolver problemas.**"[14] Vemos, nessa definição, que os elementos de design de jogos propostos em Deterding *et al.* (2011) eram, para Kapp, "[...] mecânicas, estéticas e pensamentos de jogos [...]".

Nessa visão, mecânicas incluíam níveis, premiações, sistemas de pontos, placares e limitações de tempo que, na visão de Kaap (2012) eram insuficientes para, por si só, darem conta da gamificação, apesar de serem importantes. Estéticas eram, na visão desse autor, as experiências proporcionadas pelos gráficos, ao passo que os pensamentos de jogos estavam relacionados à contação de histórias e exploração, que considerou como elemento central da gamificação.

Da mesma forma, o que Deterding *et al*. (2011) consideraram "contextos fora dos jogos" foi considerado por Kapp (2012, p. 10) "engajar pessoas, motivar a ação, promover aprendizagem e resolver problemas" que, como podemos ver, não tratavam, necessariamente, de diversão.

[14] "Gamification is using game-based mechanics, aesthetics and game thinking to engage people, motivate action, promote learning, and solve problems" (p.10)

Além dessa definição, o autor acrescentou que gamificação não era apenas o uso de premiações, pontos e recompensas, pelo contrário, o real poder dessa estratégia estava em elementos como engajamento, contação de histórias, visualização de personagens e resolução de problemas. Afirmou ainda que a gamificação não era uma estratégia nova e que o ineditismo estava em focar nas relações entre os componentes de jogos, na dependência de se utilizar vários deles para ensinar e na reflexão de como impactavam na aprendizagem. Para o autor, a gamificação não era fácil de ser aplicada e nem poderia ser feita com qualquer atividade de ensino, porque a determinação de um sistema de recompensas adequado, dos tipos de conteúdo a serem aplicados e das condições de vitória em cada atividade eram questões complexas.

Consideramos que Kaap (op. cit.) demorou para diferenciar jogos de gamificação, pois, primeiro, afirmou que a gamificação era um uso trivial e artificial de mecânicas de jogos para engajar artificialmente as pessoas[15], a seguir, que tanto os jogos quanto a gamificação seriam úteis para resolverem problemas e promoverem a aprendizagem, para então afirmar que jogos sérios passaram a ser considerados uma forma de gamificação[16]. Essa é uma diferença frontal com relação à Deterding *et al*. (2011) que consideraram a gamificação um fenômeno diferente de jogos, mas que era difícil delimitar entre um e outro, já Kaap (2012) considerou a diferenciação entre elementos e os próprios jogos como um limitador da gamificação.

Se considerarmos a definição de Deterding *et al*. (2011) como interpretamos: “gamificação era o uso de elementos de jogos em contextos que não visem somente diversão” e compararmos com a definição de Kaap (2012): “gamificação era o uso de mecânicas, estéticas e pensamentos de jogos para engajar pessoas, motivar a ação, promover aprendizagem e resolver problemas” vimos que não eram conflitantes e que pudemos dizer que a primeira definição era geral, enquanto a segunda foi mais específica embora não ficasse claro para o segundo autor se o jogo estava inserido na gamificação, ou não.

---

[15] [...] they view the concept of “gamification” as a trivial use of game mechanics to artificially engage learners and others in activities in which they would otherwise not engage. (p.15)

[16]In this book, the use os serious games will be considered a form of gamification because serious games are a specific sub-set of the meta-concept of gamification. [...] (p.18)

Kaap (2012) não tratava de níveis de abstração, mas de elementos usados na gamificação, que descrevemos no que segue, tentamos relacioná-los com os níveis de abstração propostos por Deterding *et al*. (2011). O **primeiro** elemento era chamado: **estruturas de recompensa**, que incluíam: pontos, rankings e premiações. O **segundo** era identificado por **níveis de jogo** e estavam relacionados à atividade (níveis do jogo), a jogabilidade (níveis de dificuldade no jogo) e ao personagem ou avatar (níveis do personagem), ou seja, se relacionavam com as fases, os objetivos e as dificuldades para atingi-los e avançar nos jogos. Em geral, nos jogos eletrônicos, com relação às dificuldades, tínhamos as opções, fácil, médio e difícil e relacionado aos níveis de dificuldade o *status* do personagem que evoluíam com maiores habilidades que aumentavam de acordo com a experiência do jogador. Esses dois primeiros elementos, definidos por Kaap, poderiam ser relacionados ao nível de abstração das interfaces de Deterding *et al*.

O **terceiro** elemento era o **tempo** que cada atividade tinha para ser concluída ou a possibilidade de comparação de seu tempo atual com os anteriores. Encontramos esse elemento de Kaap no segundo nível de abstração, dos padrões e mecânicas, em Deterding *et al*.

O **quarto** elemento diz respeito as **metas**, que estabeleciam o que deveria ser alcançado, precisariam ser claras e passíveis de aferição e seriam atingidas de maneira livre e autônoma. Pudemos relacionar essas metas com os “objetivos claros”, presente no nível de abstração das heurísticas de Deterding *et al*. (2011),

O **quinto** elemento era a **curva de interesse** que se referia a uma sequência de eventos que contribuiriam para a imersão e eram definidos pelo criador da atividade, desde seu início. Kaap (2012) considerou que os episódios criados nessas curvas de interesse podiam ser utilizados para criar experiências de aprendizagem.

O **sexto** elemento era chamado de **simulação** e consistia em modelos simplificados do real.

O **sétimo** elemento abarcava **conflito, competição e cooperação**. O conflito se estabelecia contra um oponente ou um sistema, a competição se dava entre adversários ou personagens. No caso de o adversário ser um sistema, podia ser necessária a cooperação entre pessoas, para sua superação.

O **oitavo** elemento era a **contação de histórias**, que podia ser vista como uma narrativa ou enredo, com o objetivo de contextualizar a atividade e era considerada, pelos dois autores, como um dos mais importantes elementos da gamificação.

O **nono** elemento eram as **estéticas** consideradas características visuais que abrangiam desde diferenças entre peças até gráficos e animações, em ambientes virtuais. Para Kaap (2012) as estéticas podiam aumentar a imersão e a própria vivência da gamificação.

Entendemos que curvas de interesse, contação de histórias, estéticas, simulação, conflito, cooperação e competição eram elementos que podiam ser relacionados com fantasia, por isso, os agrupamos no nível de abstração das experiências de Deterding et. al.

O **décimo** elemento era **jogar novamente ou perder** e estava relacionado aos erros, que podiam ser menos negativos na gamificação, pois poderiam ser permitidas tentativas infinitas ou limitadas, principalmente, em experiências lúdicas, no qual as tentativas para resolver um problema podiam acontecer com naturalidade. Consideramos que esse elemento, definido por Kaap, poderia fazer parte do nível de abstração dos métodos de Deterding et. al., por se relacionar com uma opção que variava, dependendo do quadro teórico ou metodológico escolhido pelo autor da atividade.

O **décimo primeiro** elemento eram os **comentários ou *feedbacks*** que interferiam em todas as facetas da gamificação. Eram informações que poderiam ajudar a alcançar objetivos, familiarizar-se com as mecânicas, com o tempo restante, os itens necessários para a conclusão da atividade, entre outras. Para nós, esse elemento era encontrado em todos os níveis de abstração de Deterding, pois comentários sempre faziam referência a outros elementos, por exemplo, podiam existir comentários explicando como eram atribuídos pontos (na interface), como se daria a restrição de tempo (nos padrões e mecânicas), como resolver um quebra-cabeça (nas heurísticas) e assim por diante.

O **décimo segundo** elemento era composto das **regras** que definiam a atividade gamificada em todos os seus aspectos como, por exemplo, a quantidade de pessoas que realizavam a atividade, como eram atribuídos os pontos ou quais atitudes podiam ou não ser consideradas válidas. Esse era um elemento que também estava presente na contribuição de Deterding *et al*. (2011) apontado em todos os níveis de abstração da gamificação. Assim, consideramos que os dois autores trataram do mesmo assunto, pois encontramos níveis de abstração de Deterding et. al. para cada elemento descrito em Kaap.

Outra perspectiva, a respeito de gamificação, foi dada por Zichermann e Cunningham (2011, p. XIV, tradução nossa) ao tentar defini-la de maneira geral e flexível, para resolver problemas na área de *design,* como sendo: "**o processo de pensamentos e mecânicas de jogos para engajar usuários e resolver problemas**"[17].

Cabe situar que, enquanto a obra de Deterding et. al. se dispunha a definir gamificação em termos acadêmicos e a contribuição de Kaap objetivou seu uso na educação, Zichermann e Cunningham se voltavam para a área de *design*, ou seja, eram três obras com objetivos e públicos distintos. No entanto os autores das três obras concordavam que a gamificação era mais do que o uso de premiações.

Zichermann e Cunningham (2011) propuseram uma análise de como empresas comerciais utilizavam gamificação, por ter sido uma obra focada em exemplos de como a gamificação foi utilizada em escala comercial, não discutiu com profundidade sua definição, mas que era baseada em pensamentos e mecânicas dos jogos para ajudar a engajar clientes. Os autores consideraram que a gamificação era formada por uma estrutura composta de dinâmicas, mecânicas e estéticas, isto é, nas ações dos usuários que respondiam às mecânicas e em estéticas relacionadas às experiencias vivenciadas por esses usuários.

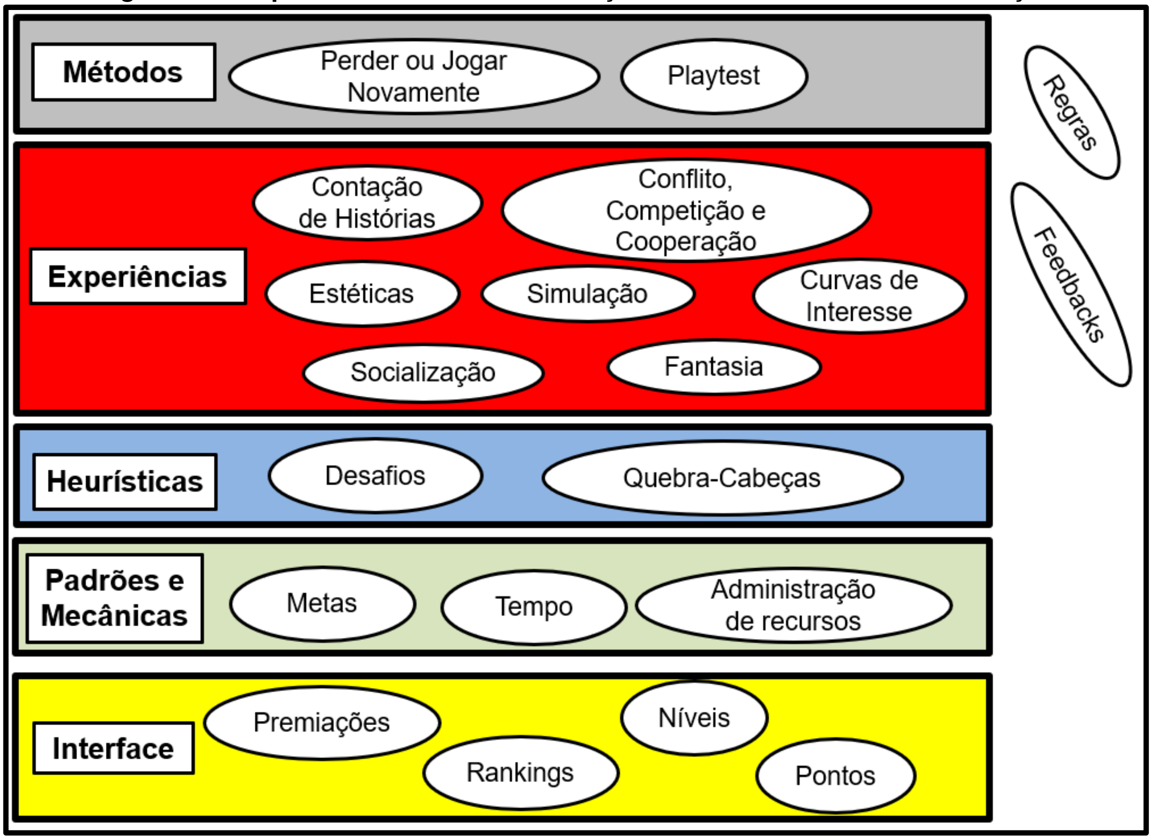
Algumas das mecânicas, na obra de Zichermann e Cunningham (2011), como: pontos, níveis, tabelas de classificação, emblemas, desafios, experiência do jogo (*onboard*), comentários e reforços já foram cobertos por Kaap (2012). Entretanto, outras como: *loop* de engajamento, customização, sistema de jogo, agilidade e *design* da gamificação, problema de falta de usuários, painel de controle e mecânicas de profundidade não foram cobertas até aqui e nos pareceram mais relacionadas a forma como os usuários interagiam em uma plataforma gamificada em outra área, que não a educação.

[17]The process of game-thinking and game mechanics to engage users and solve problems.

Zichermann e Cunningham (2011) afirmaram que no jogo *FarmVille* existiam estatísticas demonstrando que, em média, os jogadores passavam metade de seu tempo ajudando outros “fazendeiros virtuais”, ao invés de cuidar da própria fazenda, o que nos levou a inferir que, em um ambiente inserido na gamificação, as pessoas poderiam se tornar mais propensas a cooperar e, por isso, consideramos a socialização, presente nesses ambientes, como outro elemento a ser pensado na gamificação.

As contribuições apresentadas até aqui possibilitaram concluir que enquanto Deterding et. al. (2011) propunham níveis de abstração, Kaap (2012) e Zichermann e Cunningham (2011) discorreram acerca de elementos de gamificação. Apesar disso, esses elementos poderiam ser agrupados dentro dos níveis de abstração, as únicas exceções seriam as regras e o feedback, que estariam em todos os níveis, como ilustrado na Figura 1, em que criamos um esquema de níveis de abstração de Deterding et. al. (2011) com Elementos de Gamificação presentes em Kaap (2012), em Zichermann e Cunningham (2011) e Deterding et. al. (2011).

Figura 1 – Esquema de Níveis de Abstração com Elementos de Gamificação



Fonte: Produção do autor

Essa escolha por organizar os elementos de gamificação em níveis de abstração nos pareceu ter mais sentido do que os estudar isoladamente, pois uma dúvida, em nossa interpretação, foi qual elemento utilizar primeiro e o que fazer em seguida. Esse esquema nos pareceu ajudar a estruturar a ideia de que, para implementar a gamificação, era necessário pensar não em qual elemento utilizar, mas sim em qual nível de abstração deveria ser mobilizado primeiro.

Iniciar uma gamificação pelo nível de abstração das interfaces, que era o menos abstrato, nos pareceu inviável, pois tanto Deterding et. al. (2011), quanto Kaap (2012) salientaram acerca dessa impossibilidade. Além disso, para Wu (2017), a gamificação ia muito além do uso de prêmios e pontos, sendo que essa estratégia já era usada na educação e nas empresas muito antes de ser utilizada na gamificação.[18] Outro argumento foi o estudo de Poltronieri (2018), quando salientou que se a gamificação fosse baseada em estruturas de recompensas poderia constituir-se em "antijogo", na medida em que era apenas uma maneira de instrumentalizar atividades tradicionais de ensino.

Tendo em vista esses argumentos concluímos que, ao invés de tentar articular a gamificação por meio dos níveis menos abstratos, poderíamos percorrer o caminho inverso, mobilizando o nível de abstração dos métodos.

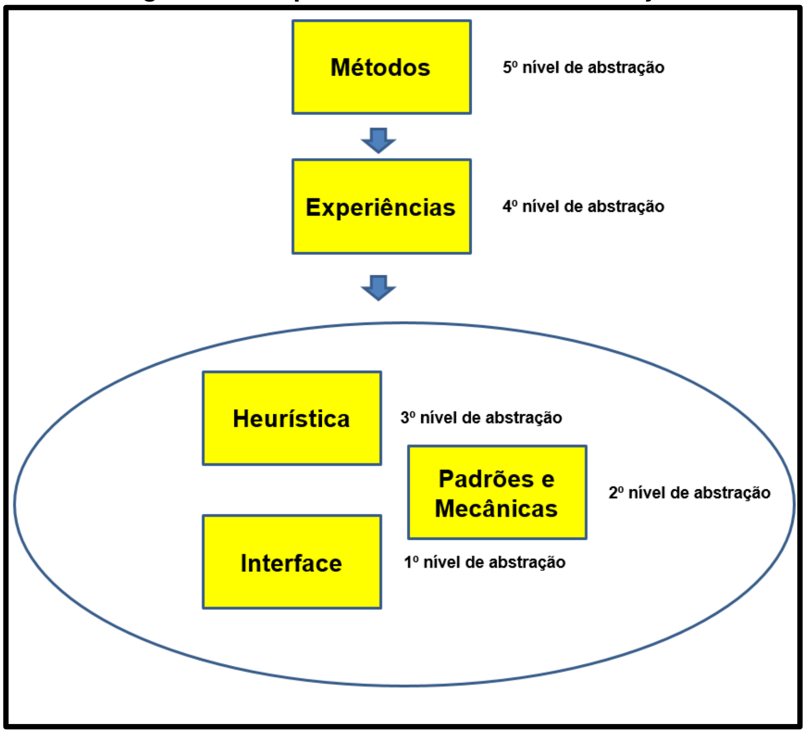
Esse nível foi descrito por Deterding et. al. (2011) como aquele em que eram abarcadas as práticas e processos específicos de criação, utilizadas por especialistas. Então podemos considerar que seriam formuladas atividades, baseadas em um quadro teórico e metodológico e de estratégias da educação matemática para, depois disso, incluir elementos do nível de abstração das experiências, para que existisse engajamento e, por fim, conceber, conforme o caso, elementos dos níveis de abstração das heurísticas, mecânicas e/ou interfaces.

Dessa forma, elementos do nível de abstração das experiências, como fantasia ou simulação, seriam os que garantiriam a gamificação de uma atividade. Esse poderia ser o motivo para esse nível de abstração ter maior quantidade de elementos de gamificação, em nossa interpretação, presente na Figura 1.

[18] Incentive systems are not new, and people have been using these techniques for hundreds of years throughout school, work, and most of our lives. For example, letter grades, salary promotion, cash bonus, etc. can be seen as a form of incentive systems. However, they are generally not considered as game attributes, because many of these incentives weren't created with any game design principles in mind. If they are game attributes, they are terrible ones.

A inclusão de elementos de outros níveis de abstração, menos abstratos seriam feitas, apenas, para ajudar a garantir que fossem criadas experiências lúdicas. Para ilustrar nosso exemplo, criamos a Figura 2, em que baseados em uma atividade de ensino (no nível de abstração dos métodos), pensaríamos experiências lúdicas (no nível de abstração das experiências) e, que outros elementos, dos demais níveis de abstração, serviriam apenas para auxiliar na imersão do estudante.

Figura 2 – Esquema dos Níveis de Abstração



Fonte: Produção do autor

Essa proposta pode parecer contraintuitiva, por preconizar que devemos mobilizar os níveis com maior abstração e, depois disso, os menos abstratos. Pensamos que essa é uma nova visão de gamificação. Essa pode ser uma das causas para a complexidade em gamificar atividades de ensino, salientada por autores como Deterding *et al*. (2011) e Kapp (2012).

Podemos exemplificar essa dinâmica em nossa proposta, que se baseia em teorias e metodologias da educação matemática, no nível de abstração dos métodos, incluímos elementos de gamificação como, por exemplo, **contação de histórias** para ajudar a mobilizar o elemento **fantasia**, que está no nível de abstração das experiências, para mobilizar outros elementos. Nossa interpretação também ajudou a elucidar a questão da gamificação como sendo uma estratégia que incluiria ou não os jogos. Ao invés de definir gamificação como atividade diferente de jogo, analisamos que a grande diferença estava em sua escolha inicial, em atividades que, em um primeiro momento, não eram jogos.

Não foi simples diferenciar gamificação de jogos e isso pôde ser percebido nas contribuições dos autores, propostas até o momento. Porém, consideramos que essa dificuldade se deve, justamente, pela tentativa de relacioná-los. Jogos educativos, de empresas ou utilizados em *markenting* são, em primeiro lugar, jogos. Já a gamificação seria uma estratégia que que se baseia em contextos fora de jogos. Se a inclusão de elementos e pensamentos, tradicionalmente utilizados nos jogos, seriam suficientes ou não para transformar uma atividade em jogo esse não foi o ponto. Mesmo porque os usuários poderiam atribuir o estatuto de jogo a uma atividade, independentemente da intenção de seu criador.

Consideramos que o processo de criação de uma atividade gamificada é diferente daquele necessário à elaboração de um jogo, visto que não existiria, na gamificação, nem mesmo a intenção de que, ao final do processo, essa atividade se tornasse jogo. O compromisso seria com a ludicidade para garantir interesse, engajamento e imersão, típicos dos jogos, e que gostaríamos que fossem transferidos a outros contextos.

Para nós, a gamificação foi um subproduto da Cultura Pop, que pôde ser feita em ambientes informatizados ou analógicos. Ela permitiu uma transposição de características de jogos para outras atividades. Cabe a reflexão que quando um filme foi baseado em um jogo ele não deixou de ser filme, mas adotou uma narrativa que fez referência ao jogo. Da mesma forma pode acontecer com as atividades de ensino. Esse é um ponto em que a gamificação pode contribuir com o ensino de matemática.

Diante do exposto até aqui, definimos gamificação como: **o uso de experiências que fazem referência a jogos com o objetivo de engajar pessoas em atividades que, inicialmente, não são jogos.**

Quando utilizamos a palavra experiências, nos referimos justamente ao nível de abstração exposto anteriormente. Então, nosso ponto foi de que atividades didáticas poderiam ser criadas com seus próprios métodos e, depois disso, existiria uma proposta de gamificação, que seria a adaptação de experiências relacionadas à fantasia, simulação etc. e que poderiam, ou não, necessitar de outros elementos dos níveis das heurísticas, mecânicas e interfaces.

Essa visão só foi possível devido à reflexão a respeito da Geração *Gamer* e aos estudos do percurso feito pelos jogos eletrônicos quando começaram a tratar de diferentes temas e serem considerados influenciadores dentro da sociedade. A opção pelo intercâmbio de títulos (juntamente com filmes, livros e gibis) serviu de inspiração para nossa abordagem e consideramos que não seria possível pensar em gamificação, como proposto nessa pesquisa, sem essa reflexão.

Foi esse estudo que nos levou a ideia de que os níveis de abstração necessitariam ser mobilizados de uma maneira invertida (dos mais abstratos para os menos abstratos) em uma visão de gamificação que podemos definir como diferente das levantadas até aqui.

Reforçamos que essa definição deixou em aberto a questão de os jogos fazerem ou não parte da gamificação de maneira proposital, visto que esse não foi o ponto. A importância, nessa pesquisa, estava na elaboração de atividades com o intuito de ensinar matemática que conduziu à necessidade de um levantamento referente as pesquisas que trataram de gamificação para ensinar matemática e como isso foi feito.

2.2 Revisão de Pesquisas que tratam de Gamificação e Ensino de Matemática

Para entender as propostas existentes e justificar cientificamente nossa pesquisa, no que se referiu à gamificação e suas possíveis relações com o ensino de matemática. Em um primeiro momento, consultamos o banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ampliamos nossa revisão consultando o Google Acadêmico. No banco de teses e dissertações da CAPES procuramos pelos termos gamificação e “educação matemática” que nos retornou 17 respostas, que não estavam relacionadas ao ensino de matemática.

Por essa ausência de pesquisas relacionadas ao tema, decidimos realizar uma nova consulta no Google Acadêmico, procuramos pelas mesmas palavras-chave e obtivemos 68 respostas, das quais selecionamos as que tinham o termo gamificação no título ou no resumo. Após essa triagem, elegemos 7 trabalhos dos quais apenas 5 tratavam de gamificação e ensino de matemática.

Em nossa segunda busca, utilizamos os mesmos termos em suas traduções para a Língua Espanhola: *gamificación* e "*enseñanza de las matemáticas*" e obtivemos 34 respostas das quais apenas 8 continham esses termos no título ou no resumo e 6 tratavam do ensino de matemática

Em nossa terceira e última busca, traduzimos nossas palavras-chave para a Língua Inglesa: *gamification* e *"mathematics education*" retornando 616 resultados, deles apenas 20 continham esses termos no título ou no resumo e 5 tratavam do ensino de matemática.

Muitos dos trabalhos apresentavam apenas análises estatísticas de questionários ou, mesmo fazendo alguma referência à educação matemática, focavam em psicologia ou no ensino em outras áreas como: física e química. Outro ponto relevante é de que o Google Acadêmico não buscou apenas teses e dissertações, mas também artigos. Como existiam relativamente poucas pesquisas, decidimos mantê-las em nosso levantamento.

Entre as 16 pesquisas selecionadas encontramos: 1 Mestrado em Ciência da Computação, 1 Mestrado em E-Learning e Redes Sociais, 1 Mestrado em Educação e 2 Mestrados em Educação Matemática. Incluímos também: 1 Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Mídias na Educação e 2 Trabalhos de Conclusão de Curso em Educação. Completaram nosso levantamento: 1 Artigo Publicado em Periódico e 7 Artigos Publicados em Eventos. Nenhum doutorado foi encontrado.

Para facilitar nosso estudo, categorizamos as pesquisas em: **ambientes informatizados, estratégias de ensino, criação de jogos, programação e reflexão teórica.**

Analisamos cada categoria fazendo uma breve descrição de cada uma das pesquisas destacando, quando possível, público-alvo, quantidade e duração das sessões, objetivo das pesquisas, definição proposta para gamificação, tipo de atividade aplicada e seus resultados, especialmente, com relação ao ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos e, no final~~,~~ buscamos refletir a propósito das contribuições dessas pesquisas, para entendermos como a gamificação foi utilizada para ensinar.

Na primeira categoria, aglutinamos os trabalhos que se propuseram a utilizar **ambientes informatizados para aplicar gamificação**, como mostrado no Quadro 1 que apresentou: o autor, o título, o ano e o âmbito acadêmico de publicação. A característica em comum destas pesquisas foi a adoção de questões e links em ambientes que faziam a gestão destas atividades com: sistemas de pontuações, regras e classificações (rankings).

Seixas (2014) propôs utilizar o ambiente virtual *Class Dojo* na disciplina de Geometria, para 61 alunos do oitavo ano de uma escola pública. Esse ambiente virtual permitia o cadastramento de questões de múltipla escolha, verificava a quantidade de acertos de cada discente e atribuía pontos e medalhas, baseado nos acertos.

Quadro 1 – Pesquisas da Categoria Ambientes Informatizados

Autor	Título	Ano	Âmbito
SEIXAS, L. R.	A Efetividade de Mecânicas de Gamificação a respeito de o Engajamento de Alunos do Ensino Fundamental	2014	Mestrado em Ciência da Computação
PELED, S.; SCHOCKEN, S.	Mobile Learning and Early Age Mathematics	2014	Artigo Publicado em Evento
MEDEIROS, A. P. N.	A Gamificação Inserida como Material de Apoio que Estimula o Aluno no Ensino de Matemática	2015	Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Mídias na Educação
FERREIRA, B. S.	O Uso da Gamificação como Estratégia Didática na Capacitação de Professores para o Uso de Softwares Educativos	2015	Mestrado em Educação
MEDINA, A. I. C.	Viaje Espacial: Una Experiencia de Gamificación en la Formación de Maestros	2015	Artigo Publicado em Evento
CATER, B.; KANG, S.; POLLANEN, M.	An Efficient Gamified Model for Online Homework in the Mathematical Sciences	2015	Artigo Publicado em Evento
BUTEAN, A., *et al*	From Classic Math School Books to Interactive Gamified Elearning	2015	Artigo Publicado em Evento

Fonte: Produção do autor

A autora não citou diretamente quantas sessões, nem qual a duração, mas descreveu um período de 2 meses, na disciplina de desenho geométrico. Em outro momento destacou 4 visitas semanais a duas turmas, o que nos levou a deduzir que foram utilizadas entre 8 e 10 sessões de, aproximadamente, 45 minutos cada.

O ambiente foi utilizado com o objetivo de investigar como a utilização de gamificação, aliada aos objetivos educacionais, podia atuar como fator de engajamento em contextos educativos. Para isso, foram cadastradas no ambiente questões para que os discentes respondessem com o intuito de ganhar prêmios e pontuações, no entanto não localizamos nenhum exemplo dessas questões no trabalho.

A definição de gamificação utilizada, nessa pesquisa, foi a proposta por Kaap (2012). A autora constatou que os grupos que obtiveram as melhores notas receberam mais prêmios e medalhas virtuais do professor. A pesquisadora ainda considerou que alinhar os objetivos de sala de aula com as estratégias de gamificação foi de fundamental importância para o engajamento dos estudantes.

Já Peled e Schocken (2014) exploraram o ambiente *SlateMath* para criar um *portfólio* virtual de alunos na primeira infância, por meio de solução de problemas aritméticos, armazenados nesse ambiente pelo professor, que podiam ser acessados de qualquer lugar. O objetivo dos pesquisadores era apresentar[19] o ambiente como uma alternativa para a aprendizagem.

Aqui também a definição de gamificação utilizada foi a de Kaap (2012), os autores salientaram a importância de os alunos terem acesso a problemas, mesmo fora da escola e do professor poder acessar as respostas apresentadas além da importância das novas tecnologias.

Eram israelenses preocupados com a alfabetização matemática de crianças, consideraram que o *SlateMath* propunha problemas de contagem e a gamificação do ambiente se deu com a adoção de avatares e emblemas. Como resultados, consideraram que o aplicativo era uma alternativa para ajudar professores a ensinar matemática com eficácia.

No mesmo sentido tivemos Medeiros (2015), que utilizou um ambiente informatizado (Portal Pral) para ensinar potenciação a 22 alunos do sétimo ano de uma escola pública. A autora cadastrou uma série de links no ambiente, para que os alunos tivessem acesso a vídeos, atividades e jogos, com o objetivo de diminuir o desinteresse pela aprendizagem em matemática, além de refletir a respeito da necessidade de novas práticas. Aqui, do mesmo modo que nas pesquisas anteriores, a definição de gamificação utilizada foi a de Kaap (2012) e a gamificação

[19] “In this paper we describe some of the unique virtues that mobile learning hold for early age mathematics education”(p.1)

se deu com a adoção de: restrição de tempo para responder as atividades, pontos e troféus virtuais, dentro do ambiente. Foram aplicadas listas de exercícios e questionários, para estabelecer a opinião dos estudantes, como resultados a autora considerou gamificação como uma forma “envolvente”, “dinâmica”, “atrativa”, “divertida” e “interativa” de ensinar matemática.

Outra contribuição foi a dos pesquisadores canadenses Cater, Kang e Pollanen (2015) que cadastraram questões de múltipla escolha no ambiente *Xero,* para estudantes recém-admitidos no ensino superior, na disciplina de Álgebra com o objetivo de apresentar um modelo de gamificação que poderia ser aplicado em problemas práticos. A definição de gamificação apresentada, mais uma vez, foi a de Kaap (2012) e os autores consideraram que estudantes universitários poderiam se engajar em atividades que utilizassem novas tecnologias. Foram cadastradas 30 questões para serem respondidas como dever de casa e, no caso de resposta incorreta o aluno teria nova chance para resolver a questão. Os autores afirmaram que foram feitas de 7 a 9 vezes mais tentativas de respostas no ambiente do que da maneira tradicional.

No mesmo caminho Butean *et al*. (2015), buscavam novas soluções para a educação romena, criaram um ambiente utilizando as linguagens de programação JAVA e HTML para criar listas de exercícios e testar uma plataforma de matemática iterativa com 8 crianças entre 10 e 11 anos de idade.

Não foi encontrada definição de gamificação nessa pesquisa, apesar disso foi citado pelos pesquisadores que sua concepção de gamificação era um “aprender jogando”[20], em que os problemas propostos se assemelhavam com jogos. Os autores desenvolveram esse ambiente computacional para promover o engajamento e a motivação nos alunos e consideraram que a transposição de problemas para um ambiente informatizado proporcionou maior conexão entre as crianças e os conhecimentos matemáticos. Também acreditaram que existiu um aumento do foco dos estudantes nas atividades e melhora do ambiente de sala de aula, não foram discutidas questões relativas à aprendizagem.

---

[20] “Gamification: “Learning through playing games” is a very efficient method to get and retain students’ attention. Many application modules present real life and game-like situations (for example, firing a gun into a shooting competition, solving a labyrinth or competing on a running track). The gamification strategy represents an innovative aspect and differentiates this interactive manual from the digital ones.” (p. 5)

Observando as atividades, presentes na pesquisa, percebemos que as questões não necessitavam de novas tecnologias para serem aplicadas, mostrando apenas a transposição de atividades tradicionais para ambientes informatizados.

Na pesquisa de Ferreira (2015) foi proposta a utilização do ambiente *GGBOOK* em uma formação com 30 professores de matemática, que focava na introdução à Geometria com o aplicativo Geogebra. Esse ambiente permitia cadastrar questionários para verificação das respostas e abrir links externos na internet. O objetivo desse trabalho era verificar se o uso do *software* educativo *GGBOOK*, juntamente com a estratégia de gamificação, poderia tornar mais efetiva uma formação de professores. Da mesma forma que as pesquisas anteriores, a definição de gamificação utilizada foi a de Kaap (2012).

Foi incluído um questionário para levantar o perfil dos participantes e uma atividade a ser desenvolvida no Geogebra para trabalhar ponto, segmento e polígono, além de explorar medidas de lados e de ângulos de polígonos. A pesquisa focou também nas interações dos participantes, via fórum, existiam duas tabelas a esse respeito, que deram a entender que foram realizados dois acessos, um para preencher o questionário e outro para resolver a atividade de formação. Enquanto o primeiro acesso era ligado ao estabelecimento do perfil dos usuários, no segundo foi solicitado para responder à uma questão, que era a formação. Os tempos de acesso foram diferentes para cada usuário, dando a ideia de que alguns poderiam já conhecer o software de geometria dinâmica.

Ainda que o trabalho tenha proposto uma formação de professores foi possível constatar que foi aplicado apenas um problema, respondido satisfatoriamente por alguns professores, enquanto outros o fizeram de forma incompleta, embora o pesquisador tenha concluído que o uso do *GGBOOK,* com atividades gamificadas, deu conta da formação pretendida.

No trabalho de Medina (2015) foram criadas atividades no ambiente *Educaplay,* que permitia cadastramento de questões, vídeos e links da internet em um curso de formação inicial de pedagogos, na disciplina de matemática, a respeito de sistemas de numeração em diferentes bases, com o objetivo de apresentar uma nova forma de ensinar.

A definição de gamificação utilizada nessa pesquisa foi a de Deterding *et al*. (2011), a autora afirmou que tinha dificuldade de ensinar esse conhecimento matemático em um curso de formação de professores, para os anos iniciais do ensino fundamental e que com a estratégia gamificada conseguiu motivar sua turma ao mesmo tempo em que respeitou seu ritmo de aprendizagem.

Observamos que, embora a pesquisadora tenha cadastrado as questões em um ambiente informatizado, suas estratégias de ensino não sofreram mudanças, além disso, estes estudantes de graduação já deveriam conhecer cálculos envolvendo números em bases decimais e em outras bases ou apresentar alguma dificuldade para ser superada que não foi apresentada.

Analisando os trabalhos desta categoria, foi possível observar que uma das intenções era possibilitar o trabalho com listas de exercícios e lições de casa, por exemplo, com o uso de novas tecnologias, o que deixou em segundo plano discussões a respeito da aprendizagem matemática, bem como do papel de mediador do professor. Consideramos o treinamento, proporcionado por listas de exercícios e lição de casa, como parte das práticas necessárias para o ensino, mas as pesquisas desta categoria mostraram a simples transposição de atividades que poderiam ser realizadas com lápis e papel para os meios informatizados, sem apontar o papel da gamificação.

Pudemos situar que foram utilizados, preponderantemente, os elementos de gamificação: Pontos, *Rankings*, Prêmios, Fases, Tempo, Regras, Níveis e Metas em atividades e listas de exercícios, como vimos anteriormente, a simples inclusão destes elementos não era suficiente para gamificar esses tipos de atividades, visto que mobilizaram elementos dos níveis menos abstratos de gamificação: da interface, dos padrões e mecânicas e das heurísticas.

Outro ponto importante foi o papel dos erros, em atividades gamificadas, em ambientes informatizados que não foram tratados em nenhum dos trabalhos, pois não apresentaram feedbacks aos alunos, já que uma tentativa errada fazia com que a questão fosse repetida e o acerto, quando ocorria, era resultado de tentativas e erros ou memorização das alternativas e não, necessariamente, decorrente de aprendizagem.

Nos trabalhos da segunda categoria, **estratégias de ensino**, encontramos outras pesquisas que seguiram o caminho de focar nos mesmos elementos de gamificação (Pontos, *Rankings*, Prêmios, Fases, Tempo, Regras, Níveis e Metas), utilizando estratégias híbridas de ensino, sem a utilização do computador, para aplicação de atividades. No Quadro 2 é possível visualizar autores, títulos, ano de publicação e âmbito das pesquisas que fizeram parte dessa categoria.

Urrutia (2014) se propôs a utilizar gamificação para ensinar Álgebra em uma turma de 24 alunos do ensino médio, numa escola pública norte americana, durante um bimestre, para gamificar a disciplina. A autora não utilizou uma definição de gamificação específica, mas fez uma reflexão a respeito das apresentadas por Kaap (2012), Deterding *et al*. (2011) e Zichermann e Cunningham (2011).

Quadro 2 – Pesquisas da Categoria Estratégias de Ensino

Autor	Título	Ano	Âmbito
URRUTIA, K.	Gamification and Algebra 1: Will a Gamified Classroom Increase Student Achievement and Motivation?	2014	Mestrado em Educação Matemática
FLORES, E. G. R.; RIVERA, L. I. D.	Aprendizaje Gamificado en un Curso de Cálculo para Ingeniería	2015	Artigo Publicado em Evento

Fonte: Produção do autor

O objetivo da autora foi verificar se as estratégias gamificadas de ensino seriam capazes de incrementar a performance dos estudantes, além da disposição geral dos alunos para a disciplina. Para isso, formulou exercícios para serem resolvidos em aula, de maneira tradicional e lições de casa, para serem feitas com acesso à internet.

A gamificação foi feita com a utilização de níveis ao invés de listas, as provas foram denominadas como batalhas e as notas foram transformadas em experiência de personagem, que precisavam atingir certos níveis para serem aprovados. Como resultado, a pesquisadora considerou que os estudantes, participantes da pesquisa, realizaram maior quantidade de atividades gamificadas do que fariam com estratégias tradicionais e puderam recuperar dados ou informações, além de entender o significado, a tradução, a interpolação, bem como interpretar instruções e problemas de maneira efetiva. Para nós ficou claro que a visão de gamificação da pesquisadora era de atividades tradicionais aliadas a elementos dos níveis menos abstratos de gamificação.

A outra pesquisa, desta categoria, foi realizada por Flores e Rivera (2015), que consideraram motivador gamificar exercícios a respeito de volumes e áreas de sólidos de revolução, para uma turma do terceiro semestre do curso de engenharia, de uma universidade particular no México, com o objetivo de construir conhecimentos matemáticos. A definição de gamificação utilizada pelos autores era a de Kaap (2012).

Em 3 encontros, com 38 estudantes, desenvolveram atividades para serem resolvidas com lápis e papel, além de peças de plástico que representavam os sólidos em estudo. A gamificação, pretendida pelos autores, se caracterizou em dar pontos e prêmios a quem terminava antes e a uma classificação final dos alunos. Para as pesquisadoras, os estudantes aprenderam e se mantiveram interessados pela aula por mais tempo do que se interessariam com estratégias tradicionais de ensino.

Urrutia (2014) e Flores e Rivera (2015) não utilizaram ambientes informatizados para ensinar. Enquanto a primeira propôs um ensino híbrido, com lições de casa transpostas para o computador e atividades em aula sem sua utilização, a segunda fez uma experimentação totalmente focada em resoluções de exercícios com lápis e papel, ambas não trataram de questões relacionadas a novas tecnologias.

Por utilizarem os mesmos elementos de gamificação do agrupamento anterior, podemos tecer aqui as mesmas considerações, feitas a respeito da categoria de ambientes informatizados para ensinar.

Quadro 3 – Pesquisas da Categoria Criação de Jogos

Autor	Título	Ano	Âmbito
GALEANO, D. A. P.; ÁLVAREZ, C. A. M.	Ludificación de un Curso Universitário de Matemáticas. Diseño de un Simulador para la Formación del Futuro Empresario Colombiano	2015	Artigo Publicado em Evento
MARINHO, A. S.; *et al*.	Aplicação Móvel de Matemática no Ensino Básico para Crianças do Ensino Fundamental I do 1º ao 3º Ano	2016	Artigo Publicado em Revista
ARRIBAS, J. S.	Diseño de Una App Educativa de Matemáticas	2016	Trabalho de Conclusão de Curso da Faculdade de Educação
YÁNEZ, O.; EMILIA, M.	Gamificación de las Matemáticas en la Enseñanza del Valor Posicional de Cantidades	2016	Mestrado em E-learning e Redes Sociais

Fonte: Produção do Autor

Outro agrupamento de pesquisas (Quadro 3) foi o da categoria: **criação de jogos**, em que os autores se propuseram a programar ou utilizar programas de computador para criá-los. Nessa categoria existiu a tentativa de criar jogos para ensinar.

No trabalho de Galeano e Álvarez (2015) foi desenvolvido um jogo para ensinar gráficos de dispersão e pontos de máximo e de mínimo de funções, com o objetivo de ludificar esses conceitos, em um curso de nível superior de economia colombiano, utilizando a definição de gamificação de Deterding *et al* (2011). A proposta foi simular uma fazenda de café, cujos dados a respeito da medida de sua área, em hectares, seriam fornecidos por um gerador aleatório, para que os estudantes calculassem a quantidade de trabalhadores a serem contratados, de insumos a serem comprados e compararem a produtividade de maquinários agrícolas.

Embora não tenham informado se os alunos já tinham conhecimento da simulação utilizada, os autores consideraram que esse jogo tinha potencialidade para motivar os estudantes para aprendizagem e diminuir a evasão na disciplina.

Já Marinho *et al*. (2016) desenvolveram um aplicativo para ensinar adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais, para crianças dos primeiros anos do ensino fundamental, com o objetivo de desenvolver um *software* para apoio ao ensino de Matemática baseado na definição de gamificação de Kaap (2012).

Os estudantes tinham que se cadastrar no aplicativo para acessar um ambiente com uma lista de exercícios adequado à sua idade. Os pesquisadores não aplicaram seu estudo, mas consideraram que essa investigação contribuiu para professores, alunos e desenvolvedores no sentido de mostrar o desenvolvimento do programa informatizado.

Na pesquisa desenvolvida por Arribas (2016) foi programado um jogo para ensinar noções geométricas como paralelismo, perpendicularidade, simetria, área e o reconhecimento de figuras planas para crianças do quarto ao sexto ano do ensino fundamental de uma escola espanhola, com o objetivo de criar um aplicativo para trabalhar esses conteúdos e estimular os estudantes. Embora tivesse como foco crianças do quarto ao sexto ano aplicaram o jogo em apenas 1 aluno do sexto ano em uma seção de 60 minutos.

A gamificação da atividade foi feita por um avatar que representa o estudante como um personagem virtual que ganhava novas roupas na medida em que respondia corretamente as atividades, era composta de: personagens, sistema de recompensas e fases.

A atividade consistia em responder questões, que se relacionavam a representações em um sistema de coordenadas cartesianas, para que identificassem coordenadas de pontos, formando polígonos que poderiam ser divididos. Eram feitas perguntas a respeito de propriedades destas novas figuras, como condições de paralelismo e perpendicularidade, por exemplo.

Para o autor, as atividades foram encaradas, pelo estudante, de maneira positiva, mas considerou a necessidade de inserir rankings, uma história que contextualizasse os personagens e um modo para que mais de um jogador pudesse jogar ao mesmo tempo, em versões futuras de seu aplicativo.

Em Yáñez e Emilia (2016) foi proposta a criação de um jogo, em ambiente informatizado, para ensinar o valor posicional de quantidades, para crianças do primeiro ano do ensino fundamental, com o objetivo de desenvolver as habilidades necessárias para esse conteúdo, utilizando a definição de gamificação de Kaap (2012).

As autoras propuseram 14 sessões para 30 estudantes do primeiro ano do ensino fundamental, em uma escola colombiana, mas não especificaram o tempo utilizado em cada uma. Os jogos propostos pediam para os estudantes identificarem as ordens de grandeza (as unidades, dezenas e centenas) de diversos números.

As autoras consideraram seu estudo eficaz, na medida em que propuseram novas formas de ensinar. Verificaram que os estudantes conseguiram, ao final da atividade, manipular unidades, dezenas e centenas, reconhecendo o valor posicional dos números.

Nesse agrupamento de pesquisas, os autores desenvolveram jogos com o propósito de ensinar algum conteúdo matemático. No entanto, não foram explicitadas as relações entre esses jogos e a gamificação, ainda mais tendo em vista que as referências utilizadas para definir gamificação, nestes estudos, foram Kaap (2012) e Deterding et. al. (2011), que se esforçaram para diferenciar entre um e outro.

Observamos ainda que os elementos utilizados não foram suficientes para caracterizar atividades gamificadas, mas sim a importância da utilização de tecnologias. Outro ponto a ser destacado foi que, em geral, mesmo tendo como objetivo o ensino de matemática, não se encontrou nos trabalhos análises a respeito da aprendizagem dos alunos, mas sim em relação à contribuição da estratégia de ensino, por meio de jogos, para manter a motivação dos estudantes.

Cabe ainda destacar que, nesses trabalhos, foram utilizados recursos informatizados e baseados em conexão remota entre alunos e professores e não foi proposto nenhum jogo não informatizado ou *off-line*. Tal constatação pode ser justificada pelo fato de as primeiras pesquisas envolvendo gamificação terem sito desenvolvidas com tecnologias da informação e da comunicação, mesmo sendo a gamificação indicada para o desenvolvimento de outros ambientes de ensino que não só o informatizado.

Na categoria: **programação**, agrupamos as pesquisas que se propuseram a utilizar programação para ensinar matemática (Quadro 4), com foco na possibilidade de ensinar programação e matemática, em uma mesma atividade, partindo da premissa de que existiriam pontos de aproximação entre programar e estudar matemática.

Quadro 4 – Pesquisas da Categoria Programação

Autor	Título	Ano	Âmbito
SERPE, R. L	*Gamification Through Algebraic Coding*	2014	Artigo publicado em evento
TORRES, E. J.	*Scratch y Videojuegos Aplicados a la Enseñanza de la Geometría*	2016	Trabalho de Conclusão de Curso da Faculdade de Educação

Fonte: Produção do Autor

Serpe (2014) teve como objetivo de sua pesquisa verificar se a gamificação teria um efeito positivo para ensinar a codificação algébrica, buscando uma aproximação entre matemática e linguagem de programação apoiado na definição de gamificação de Zichermann e Cunningham (2011). Para isso, desenvolveu 10 aulas no laboratório de informática e depois um teste com 16 questões para 15 estudantes norte-americanos do primeiro ano do ensino médio, cursando a disciplina de Álgebra, que já conheciam a linguagem de programação HTML.

Foram dadas atividades que descreviam um fenômeno na linguagem de programação para, em seguida, apresentar questões a respeito da função matemática que poderia descrever o mesmo fenômeno e, a seguir, as comparassem. Considerou que seu estudo confirmou a possibilidade de os professores fazerem com que os discentes desenvolvam uma capacidade de traduzir a linguagem de programação em algébrica, para aprender o conteúdo. No que concerne aos alunos, a autora acreditou que foram capazes de assumir a responsabilidade por aprender.

A pesquisa de Torres (2016) tinha como objetivo propor atividades para a aprendizagem de geometria, por alunos do 6º ano do ensino fundamental espanhol, por meio da criação de jogos com o *Scratch* 2.0 e da definição de gamificação de Kaap (2012).

A proposta da autora, que não foi aplicada, partiu da criação de uma história para leitura que conduziria os estudantes a programar jogos no Scratch 2.0 para explorar os seguintes conteúdos matemáticos: eixos cartesianos, ponto e suas coordenadas, diferenciação entre lado, base, vértice, diagonal, corda, diâmetro, arco, classificação de triângulos e quadriláteros, com a previsão de ser desenvolvida em 22 sessões de 50 minutos cada.

A pesquisadora considerou que os meios informatizados tinham potencial para sanar problemas de ensino como o alto índice de evasão escolar, manter a motivação dos alunos e ajudar os profissionais de ensino a repensar as práticas em sala de aula.

Analisando os trabalhos desta categoria, pudemos concluir que o cerne dessas pesquisas não era, necessariamente, a gamificação, mas sim a ideia de que algoritmos, presentes na programação, ajudariam a ensinar matemática, entendendo que uma sequência de passos pré-definidos, para chegar a um resultado, se aproximaria do estudo de matemática. No entanto, não ficou claro, nesses trabalhos, a relação entre programação e gamificação e tão pouco a relação com muitos dos algoritmos que foram objeto de ensino tradicionalmente na matemática.

A última pesquisa, de nosso levantamento, na categoria **reflexão teórica**, foi desenvolvida por Gomes (2017) quando propôs uma reflexão para verificar as articulações possíveis entre gamificação e a Teoria das Situações Didáticas (TSD) por meio de uma revisão de literatura. Essa pesquisa de mestrado foi a única de nosso levantamento que se propôs a estudar gamificação apoiado em uma teoria da educação matemática.

O autor analisou 9 pesquisas que sugeriram jogos para ensinar matemática, identificando os elementos de gamificação presentes nestes estudos e relacionando-os com a TSD e com o Contrato Didático. Utilizou a definição de gamificação proposta em Kaap (2012), como resultado identificou os seguintes elementos de gamificação nos jogos: Objetivos, Regras, Desafios, Tempo, Comentários, Recompensas, Níveis, Contação de Histórias, Abstração da Realidade e Conflito, Competição e Cooperação, que foram relacionados com as dialéticas de Ação, Formulação e Validação da TSD, mas não identificou o momento de Institucionalização.

Para o autor, a gamificação se caracterizou como uma estratégia de ensino e não como uma teoria e, nesse sentido, considerou que seu estudo contribuiu para a área de Educação Matemática, por mostrar que a TSD era uma teoria que poderia fundamentar teoricamente a gamificação. Além disso, considerou a possibilidade de articular a Teoria dos Registros de Representação Semiótica na elaboração de atividades gamificadas.

Pudemos ver que as pesquisas estudadas em nosso levantamento utilizaram, prioritariamente, a estratégia de empregar elementos de jogos em listas de atividades e apontaram a gamificação como uma estratégia para manter os alunos motivados para a aprendizagem. Por outro lado, os autores levantados utilizaram as definições de gamificação de Deterding et. al. (2011), Kaap (2012) e Zichermann e Cunningham (2011), por isso não se sustentaria a ideia de desenvolver ou analisar jogos. Interpretamos essas iniciativas como mais um indício da complexidade da discussão dos jogos como parte integrante ou não da gamificação. Nesse sentido, entendemos que nenhuma das conclusões apresentadas nesses casos valeriam para gamificação, mas sim para jogos.

Compreendemos que estes resultados, da área de educação matemática, eram similares aqueles já produzidas na área de educação. Destaque-se a pesquisa de Figueiredo, Paz e Junqueira (2015, p. 1161) que fizeram um Estado da Arte a respeito de trabalhos que tratavam de gamificação na educação e consideraram seus resultados “incipientes” e que não revelaram uma “prática pedagógica gamificada”. Acrescenta-se o estudo de Borges *et al*. (2013, p. 242) que fizeram um mapeamento das pesquisas que abordam gamificação na educação e com base em 26 delas verificaram que seus principais objetivos eram: “[...] promover o envolvimento dos alunos através de atividades de aprendizagem que se baseiam em conceitos de gamificação”, mostrando que estavam mais centrados em motivação e socialização do que no ensino ou na aprendizagem.

Deste modo, não encontramos pesquisas que pretendessem entender a gamificação como estratégia de ensino e mostrar diferenças e aproximações entre elas e os jogos. Esse levantamento reforçou a necessidade de uma nova definição de gamificação, que não fosse conflitante e nem negasse os jogos, pois apesar de autores como: Deterding et. al. (2011), Zichermann e Cunningham (2011), Kaap (2012) e Wu (2017), terem realizado um esforço para diferenciá-los, isso não ficou claro para muitos dos pesquisadores que se propuseram a aplicar gamificação, por nós levantados.

Como nossa pretensão era realizar uma pesquisa na área de Educação Matemática, escolhemos como conteúdo a ser estudado o teorema de Tales e, por isso no que segue, fizemos um levantamento das pesquisas que trataram desse tema.

2.3 Revisão das Pesquisas a Respeito do Teorema de Tales

Frente a necessidade de tratar de um objeto matemático em nosso trabalho, decidimos pelo teorema de Tales por considerar, em nossa experiência com o ensino fundamental, que é um conhecimento em que existem dificuldades tanto do ponto de vista de seu ensino, quanto do ponto de vista de possíveis articulações com outros conhecimentos escolares. Assim, para perceber o que o debate especializado tem discutido a respeito de teorema de Tales e quais as tendências e potencialidades para seu ensino, decidimos fazer uma revisão da bibliografia destacando, quando possível, o público-alvo, quais objetivos, estratégias de ensino e resultados.

Para esse fim, consultamos o banco de teses e dissertações da CAPES utilizando o termo: “teorema de Tales”, que nos respondeu com 37 trabalhos dos quais consideramos 11, por verificar que correspondiam as pesquisas que se propuseram a ensiná-lo, sendo 10 dissertações de mestrado e uma tese de doutorado. Como não encontramos, no levantamento anterior, nenhum trabalho relacionando teorema de Tales à gamificação, decidimos não realizar buscas em outros portais ou em outras línguas e focamos nos estudos brasileiros, que estavam interessados em nosso currículo. Os agrupamos em duas categorias, de acordo com seus sujeitos: **alunos ou professores** e organizamos essa seção com uma breve descrição de cada uma das pesquisas, seguida de uma reflexão acerca, principalmente, das estratégias de ensino e dos resultados.

Na primeira categoria, que tratou dos trabalhos que tinham como sujeitos alunos (Quadro 5), podemos citar a pesquisa de Haruna (2000), que construiu e aplicou uma sequência didática para 30 estudantes da oitava série do ensino fundamental, atualmente nono ano, utilizando o *software* de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre I* e atividades manipulativas com o objetivo de produzir uma sequência de ensino que proporcionasse a apreensão do teorema de Tales.

Quadro 5 – Pesquisas da Categoria Alunos

Autor	Título	Ano	Âmbito
HARUNA, N. C. A.	Teorema de Thales: Uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem	2000	Dissertação de Mestrado em Educação Matemática
SANTOS, M. N.	A História da Matemática como Desencadeadora de Atividades Investigatórias sobre o Teorema de Tales: Análise de Uma Experiência Realizada com Uma Classe de 9º Ano do Ensino Fundamental de Santos – Ouro Preto (MG)	2012	Mestrado Profissional em Educação Matemática
COSTA, E. A. S.	Analisando Algumas Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática no Ensino da Disciplina Desenho Geométrico por Meio da Teoria Fundamentada	2013	Mestrado Profissional em Educação Matemática
REIS, P. F. S.	O Teorema de Tales por Meio de Atividades Investigativas	2014	Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática
BRAZ, M. E.	História da Matemática e Teatro nas Aulas sobre Teorema de Tales: Um *Script* Proposto	2014	Mestrado Profissional em Matemática
SILVA NETO, B. C.	História da Matemática e Produção de Significado: Proposta de Tarefas Didáticas para o Ensino do Teorema de Tales	2016	Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática
REZENDE, S. R. A.	Ensino Desenvolvimental e Investigação Matemática com o Geogebra: Uma Intervenção Pedagógica sobre o Teorema de Tales	2016	Dissertação de Mestrado em Educação
PESSANHA, R. M. F.	Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos na Educação de Jovens e Adultos: Uma Aprendizagem Significativa	2017	Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática

Fonte: Produção do Autor

Foram utilizadas 25 aulas, de 50 minutos cada, no horário regular das aulas, para aplicação da sequência em um colégio de aplicação de uma universidade federal. Como os alunos, sujeitos da pesquisa, já tinham contato com a disciplina de desenho geométrico desde a quinta série (atual 6º ano), foi realizado um diagnóstico que mostrou mais dificuldades em questões relacionadas ao teorema de Tales quando as figuras eram diferentes das apresentadas em livros didáticos, ou seja, quando o feixe de retas paralelas não tinha duas retas paralelas representadas na horizontal e que se prolongadas formavam triângulos sobrepostos.

A autora elaborou então uma sequência didática que continha atividades em que os estudantes deveriam medir segmentos em figuras planas, para preencher tabelas e verificar ou não a ocorrência de proporcionalidade. Outras atividades da sequência propunham a utilização do *software Cabri Géomètre I* para a construção de figuras e verificação de proporcionalidade, além de atividades que exploravam o recíproco do teorema de Tales e outras para serem resolvidas em casa.

Como a sequência era extensa e apresentava atividades não comuns, alguns alunos tiveram dificuldades para realizá-las no tempo previsto, talvez por estarem vendo o mesmo conteúdo em aulas tradicionais, uma vez por semana, com apoio de livro didático. Como resultados, a autora considerou que os alunos avançaram nos conhecimentos do teorema de Tales, em suas atitudes e autonomia observando, levantando hipóteses, tirando conclusões, justificando, dando opiniões sem medo de errar e escrevendo-as.

Em sua pesquisa, Santos (2012) propôs atividades investigativas para calcular medidas inacessíveis apoiadas em sombras de árvores com o objetivo de utilizar a história da matemática como desencadeadora do processo de ensino. A autora optou por apresentar uma história de Tales de Mileto e atividades envolvendo feixes de paralelas cortadas por transversais, que eram realizadas por meio de medições feitas pelos discentes.

A autora realizou sua pesquisa com 29 alunos do nono ano do ensino fundamental, todos repetentes e com perfil de indisciplina, de uma escola pública e concluiu que era possível aos alunos construírem seus próprios conhecimentos de forma consciente, motivante, cooperativa e ativa, apesar de não ter esclarecido o tempo destinado a essa aplicação.

O estudo de Costa (2013) objetivou investigar as potencialidades da História da Matemática para o ensino de desenho geométrico, buscando articular desenho geométrico, álgebra e geometria. O autor elaborou uma teoria emergente denominada “Potencializando o Ensino e a Aprendizagem do Desenho Geométrico por meio da História da Matemática”, utilizando pressupostos da Teoria Fundamentada.

Para atingir seu objetivo, desenvolveu 6 aulas, de 50 minutos cada, para 41 alunos de duas turmas do nono ano do ensino fundamental de uma escola privada para trabalhar com: razão, proporção, teorema de Tales, semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras e média geométrica. Como recurso a história da matemática, o pesquisador utilizou histórias, lendas e curiosidades para explorar a história de Tales de Mileto, antes de iniciar a demonstração do teorema de Tales e resolver exercícios e problemas.

A respeito de teorema de Tales, foram dados exercícios com figuras de feixes de retas paralelas cortadas por transversais para que os alunos medissem com régua segmentos e verificassem, empiricamente, a igualdade entre as razões dessas medidas. Como resultados, considerou que existiu aprendizagem significativa, auxiliada pelo envolvimento proporcionado pela estratégia de utilização de história da matemática, que acreditou ter sido responsável por mostrar a matemática como construção humana.

Reis (2014) teve como objetivo de seu trabalho criar um material de apoio para professores ensinarem o teorema de Tales no ensino fundamental, que foi aplicado para 35 alunos do nono ano de uma escola pública, durante 16 aulas de 50 minutos cada, em um período de 3 semanas. O autor justificou a escolha do conteúdo por entender sua importância na articulação com outros como, por exemplo, semelhança de triângulos, trigonometria e seções de sólidos por planos paralelos à base, mas não explicitou como tais articulações poderiam ser exploradas.

Na primeira atividade foram lidos livros paradidáticos de matemática, com temas do currículo, como polígonos e poliedros. Depois disso, foram feitas apresentações referentes as leituras para a turma, com o intuito de mostrar a matemática como construção humana.

A segunda atividade problematizou como os estudantes poderiam medir um poste, uma árvore ou um prédio usando conhecimentos de proporcionalidade entre as alturas desses objetos e suas sombras. A terceira atividade consistiu em uma lista de problemas de proporcionalidade, primeiro em um feixe de retas paralelas cortado por transversais, apresentado em papel sulfite, para ser mensurado com a régua e depois em outros problemas com diversas figuras, que representavam, distâncias, alturas, sombras e outros.

Observamos que nas figuras, utilizadas nas atividades, as paralelas eram duas, representadas na horizontal e as transversais poderiam ser prolongadas para formar dois triângulos semelhantes, configurando uma posição que poderíamos chamar de tradicional, pois era a configuração habitualmente encontrada em materiais didáticos. Depois dessas atividades, os alunos resolveram seis problemas de aplicação. O autor considerou que conseguiu ensinar seus alunos de maneira a desenvolver a autonomia e o interesse. Também acreditou que alcançou seus objetivos, criando um material de apoio para professores ensinarem o teorema de Tales no último ano do ensino fundamental.

A pesquisa de Braz (2014) objetivou analisar o uso da História da Matemática como recurso pedagógico, por meio de uma peça de teatro a respeito de Tales de Mileto, que foi desenvolvida em 7 encontros de 50 minutos cada, com uma turma de 34 estudantes do nono ano do ensino fundamental. Depois de ensaios a peça foi apresentada em sala de aula para professores, coordenadores e colegas de outras turmas.

A primeira proposta, da autora, foi realizar uma peça teatral para representar um diálogo de um professor com seus alunos, mas, devido à baixa adesão dos estudantes, a pesquisadora a reformulou para tratar de uma história com Tales de Mileto, especificamente, o episódio de medir a altura de uma pirâmide usando a medida de sua sombra.

Lendo o roteiro da peça percebemos que o primeiro ato tratou de semelhança de triângulos e o segundo da demonstração do teorema de Tales. Os estudantes deveriam recitar suas falas e mostrar as situações propostas com modelos pirâmides construídas em papel ou indo à lousa para representar pirâmides, triângulos, retas etc. Depois disso, foram exploradas figuras de retas paralelas cortadas por transversais para tratar do cálculo da altura da pirâmide apresentadas em cartazes feitos em cartolina ou, ainda, representando os feixes de segmentos paralelos com pedaços de madeira. Durante os ensaios, surgiram dúvidas a respeito de razão, proporção e classificação de triângulos, que foram sanadas com aulas expositivas. No entanto, a autora apontou que a participação dos estudantes nessa peça contribuiu para promover o interesse e manter os estudantes motivados nas aulas de matemática.

Outro trabalho, de nosso levantamento, foi o de Silva Neto (2016) que objetivou analisar a produção de significado para o teorema de Tales, por 23 alunos do segundo ano do ensino médio (16 a 22 anos) durante 5 encontros de 100 minutos cada.

O pesquisador utilizou História da Matemática de maneira episódica para conduzir os alunos a calcular a altura da figura de uma pirâmide apoiada na medida de sua sombra mobilizando seus conhecimentos de triângulos. Foram utilizados cinco problemas e pedido que os alunos realizassem medições de sombras de alguns objetos com alturas inacessíveis. O autor considerou que a sequência de problemas pode ser utilizada por outros professores e, ainda, que seu estudo contribuiu para a produção de significado pelos estudantes. A esse respeito, os documentos curriculares brasileiros preveem que esse conteúdo seja ensinado no nono ano do ensino fundamental e não no ensino médio, mas o autor não justificou, em seu trabalho, a escolha de tais sujeitos.

A pesquisa de Rezende (2016) objetivou investigar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental para o teorema de Tales, com apoio do Geogebra, em uma turma de 15 alunos do segundo ano do ensino médio, de uma escola pública durante 12 aulas. O autor justificou a escolha desses sujeitos por perceber que eles não dominavam esse conteúdo, mesmo sabendo que deveria ser ensinado no nono ano do ensino fundamental.

Considerando pesquisas na internet a respeito de razões, proporções e de quem foi Tales de Mileto, os alunos calcularam a altura de uma figura da pirâmide de Quéops e resolveram outros problemas que exigiam a medição de segmentos com régua para o cálculo de razões. Depois disso, foi pedido aos estudantes que construíssem feixes de retas paralelas cortadas por transversais no Geogebra e que verificassem as medidas dos segmentos construídos, com o objetivo de investigar se eram proporcionais. Neste ponto, entendemos que o uso do Geogebra não foi essencial porque a mesma atividade poderia ter sido feita com lápis e papel, a não ser que fosse utilizado o dinamismo do software, para que as figuras fossem alteradas e os alunos percebessem a manutenção da proporcionalidade. Em nenhum momento o autor fez menção a esse respeito. Depois disso, responderam quatro problemas com lápis e papel, referentes a teorema de Tales, como avaliação. Para o autor, seu experimento contribuiu para que os discentes passassem a mobilizar o teorema de Tales na solução de problemas.

A pesquisa de Pessanha (2017) teve como objetivo apresentar uma metodologia de ensino para favorecer o aprendizado do teorema de Tales por uma turma de 20 alunos do ensino médio, na Educação de Jovens e Adultos, durante 8 aulas de 50 minutos. Foi aplicado um pré-teste, com quatro questões a respeito de semelhança de triângulos e outras quatro acerca de teorema de Tales. A seguir, aplicou uma sequência de atividades, também com oito questões, com referência aos mesmos assuntos, com problemas que, segundo o autor, eram semelhantes aos de livros didáticos. Depois foi aplicado pós-teste.

Pudemos verificar que as questões, propostas pelo pesquisador, mostravam sempre o feixe de retas paralelas na posição tradicional, que era com duas paralelas na horizontal. Mesmo quando foi pedido para construir o feixe de retas paralelas, o material empregado foi uma folha quadriculada e houve o pedido explícito para que as paralelas fossem criadas com as linhas da folha, reforçando a ideia desse tipo de construção ser o único possível. Com os feixes de retas paralelas cortadas por transversais construídos foi pedido para utilizarem régua, mensurarem os segmentos e calcularem as razões entre eles, para verificarem a proporcionalidade.

Na análise dos resultados obtidos, ao final da intervenção didática, o autor considerou que houve aprendizado significativo por parte dos alunos, pois aumentaram seus acertos no pós-teste. Nesta pesquisa, também foi considerado que semelhança de triângulos tinha grande articulação com teorema de Tales. Pudemos situar que mais uma vez foi aplicada uma sequência de atividades para o ensino médio, novamente poderíamos salientar a respeito da inadequação de uma pesquisa acerca desse conhecimento, nesse nível de ensino.

Nesse agrupamento, a respeito de pesquisas que propuseram sequências de atividades para ensinar, pudemos perceber uma preferência por meios informatizados, com relação às estratégias de ensino utilizadas, houve prevalência de configurações consideradas tradicionais. Somente em Haruna (2000) existiram feixes de retas paralelas cortadas por transversais em diferentes configurações.

Um fator pertinente foi de que algumas pesquisas propuseram ensinar teorema de Tales no ensino médio, consideramos que, por não estar previsto no currículo, essa opção não é adequada. Poderia ser pensada a articulação desse conhecimento com outros, que fizessem parte da grade curricular desse nível de ensino, mas não foi isso o que vimos, nessas investigações.

Nesses trabalhos, que se propuseram a ensinar o teorema de Tales para alunos, vimos que a maioria optou por desenvolver sequências de atividades, algumas utilizando história da matemática como estratégia de ensino, nomeadamente, a narrativa de como Tales de Mileto teria conseguido medir uma pirâmide baseado na medida de sua sombra. Nesse sentido, é bom citar que, para Roque (2012), essa narrativa era anedótica, não tendo base histórica.

Consideramos que essas pesquisas reforçaram o uso da história da matemática como episódica, reforçando a crença de que a matemática foi construída de grandes gênios ou heróis, no caso, Tales de Mileto. Também consideramos que, apesar da narrativa remontando aos gregos antigos, a simbologia e os métodos utilizados, na resolução das atividades, foram os atuais.

Essa escolha, dos autores, nos fez acreditar que seus trabalhos foram anacrônicos e do ponto de vista didático, consideramos que as atividades eram muito similares aquelas propostas em aulas tradicionais. Apesar disso, pensamos que essa escolha reforçou o papel da contação de histórias como uma possível estratégia de ensino. Os autores utilizaram uma história, que afirmaram ter base histórica, para manter os estudantes interessados nas atividades.

Na segunda categoria (Quadro 6) estão as pesquisas que propuseram **formação de professores**.

Quadro 6 – Pesquisas da Categoria Formação de Professores

Autor	Título	Ano	Âmbito
SANTOS, R. P.	As Dificuldades e Possibilidades de Professores de Matemática ao Utilizarem o Software Geogebra em Atividades que Envolvem o Teorema de Tales	2010	Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
SOUZA, D. S.	O Universo Explicativo do Professor de Matemática ao Ensinar o Teorema de Tales: Um Estudo de Caso na Rede Estadual de Sergipe	2015	Tese de Doutorado em Educação Matemática
LEITE, R. S.	Formação de Professores de Matemática e Tecnologias Digitais: Um Estudo sobre o Teorema de Tales	2017	Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Fonte: Produção do Autor

A pesquisa de Souza (2015) tinha como objetivo descobrir quais elementos instituiriam o universo explicativo de dois professores de matemática, da rede estadual sergipana e como se processariam para ensinar teorema de Tales, em aulas para o nono ano do ensino fundamental.

Com base nos dados obtidos por questionários, por observação de algumas aulas e por entrevistas semiestruturadas, a autora considerou que seu estudo revelou indícios de que o universo explicativo desses professores de matemática estava estruturado em três níveis: experiência primeira (os conhecimentos adquiridos em seus primeiros contatos com a sala de aula), concretude (o estágio em que o professor adquiria certa experiência e começava a ter mais autonomia para planejar, registrar e envolver-se com atividades e projetos) e tomada de consciência (um estágio em que o professor se conscientizava da necessidade de buscar formação continuada, fora da escola). Identificou também que esses professores sentiam a necessidade de formação continuada para desenvolver a concretude de sua prática docente e a consciência do próprio processo de desenvolvimento profissional.

Já Santos (2010) teve como objetivo verificar as dificuldades e possibilidades da utilização do Geogebra em duas atividades que envolviam o teorema de Tales, por quatro professoras da rede pública de ensino, atuantes no ensino fundamental, durante uma oficina que tratava da elaboração de estratégias de ensino com uso de recursos informatizados.

Uma atividade tinha como objetivo a familiarização com o Geogebra e apresentava um roteiro para construção de paralelogramos com seus lados cortados por retas para que os professores verificassem a proporcionalidade entre as medidas de segmentos. A outra atividade pedia aos professores que construíssem polígonos e os interceptassem com retas, para verificarem aplicações do teorema de Tales e explorassem algumas propriedades.

Observamos que as atividades da oficina se baseavam na construção de quadriláteros, paralelogramos e triângulos, além de tabelas, em que os segmentos deveriam ser mensurados para constatar ou não a proporcionalidade e mobilizar o teorema de Tales. Na análise da aplicação das atividades propostas aos docentes, a autora recorreu ao estudo das apreensões das figuras, propostas por Duval e observou avanço nesse sentido.

A pesquisa de Leite (2017) objetivou identificar a integração dos conhecimentos didáticos, específicos e tecnológicos relacionados ao teorema de Tales, que um grupo de 9 alunos de licenciatura em Matemática mobilizava durante 5 sessões. No primeiro encontro realizaram um trabalho relacionado à interface do Geogebra. Depois exploraram problemas com diagonais de paralelogramos, alturas de trapézios, triângulos e triângulos inscritos em semicírculos, era solicitado que os pesquisados construíssem polígonos.

O autor observou que os licenciandos apresentaram equívocos relacionados a conhecimentos matemáticos, na mesma medida em que indicaram terem dúvidas em relação a conhecimentos didáticos e tecnológicos necessários para a realização das atividades, no entanto acreditou que utilizar proporcionalidade para a construção de polígonos pôde subsidiar conjecturas e o avanço em seus conhecimentos.

Essas pesquisas trouxeram questões em que não ficavam claras as estratégias de resolução das atividades para os pesquisados e problematizavam a construção de polígonos e de feixes de retas paralelas, em diversas configurações. Consideramos essa uma diferença em relação às pesquisas que tiveram como público-alvo alunos, pois com exceção de Haruna (2000), as demais investigações com esse público-alvo não propuseram construções de polígonos e feixes de retas, apenas mensuração e verificação de proporcionalidade

Podemos refletir que algumas das pesquisas levantadas utilizaram a anedota de como Tales de Mileto mediu a pirâmide de Quéops, como um tipo de história a ser contada aos estudantes, para conseguir engajamento. Apesar de não ser efetivamente um episódio histórico, podemos avaliar como parte de uma tradição escolar e por isso, acreditamos que esse tipo de abordagem pode ser relacionado ao elemento de gamificação: contação de histórias. Consideramos a pertinência de levar isso em conta posteriormente.

Outra observação válida foi acerca das dificuldades encontradas em nosso levantamento para o entendimento de Teorema de Tales. Haruna (2000) considerou que trabalhar diversas configurações de feixes de retas cortadas por transversais como desafiador. Já Silva Neto (2016), Rezende (2016) e Pessanha (2017) aplicaram pesquisas com teorema de Tales para o ensino médio, o segundo autor justificou explicitamente sua escolha por ter verificado o desconhecimento referente ao teorema em seus estudantes. Leite (2017) observou que mesmo licenciandos apresentaram equívocos relacionados ao teorema, além de dúvidas em relação aos conhecimentos didáticos e tecnológicos para a realização da investigação que propôs.

Por isso, podemos contemporizar acerca dos desafios relacionados ao ensino de teorema de Tales e referente à necessidade de aprofundar nossos estudos, em uma tentativa de encontrar possibilidades para superar essas adversidades.

Com os levantamentos, feitos até aqui, acreditamos que pudemos conhecer características e desafios referentes ao tema de nossa pesquisa, tanto relacionados à gamificação quanto acerca de pesquisas que se referiram ao ensino de matemática com gamificação e ao ensino de teorema de Tales. Então nosso interesse incidiu na delimitação de nosso problema de pesquisa e objetivos.

2.4 Delimitação do Problema e Objetivos

Uma justificativa para escolha desse tema foi de ordem pessoal, passou por nosso interesse em entender gamificação e sua utilização para ensinar matemática e remontou a uma curiosidade pelos jogos, já explorada em nossa dissertação de mestrado, quando elaboramos um *Role Playing Game* inspirados no Papiro de Rhind.

Outra justificativa, para nosso trabalho, foi de ordem científica e se apoiou nos levantamentos que foram levados a efeito, que nós mostraram, por um lado, que é necessária maior reflexão acerca de gamificação, focando em suas potencialidades e limitações para o ensino e por outro lado, que é preciso ponderar acerca de novas estratégias de ensino relacionadas ao teorema de Tales, pois foi considerado um conhecimento escolar desafiador para autores como Haruna (2000) e Leite (2017), por exemplo. Além disso, vimos que a gamificação era um tema recente e carecia de pesquisas, principalmente de doutorado, que aprofundassem a reflexão referente a sua utilização no ensino.

Assim, com os levantamentos realizados, pudemos elaborar nossa questão de pesquisa nos seguintes termos: **como uma estratégia didática gamificada pode apoiar o ensino de teorema de Tales?**

Nosso objetivo geral foi construir uma estratégica didática gamificada para ensinar o teorema de Tales. Para atingi-lo definimos os seguintes objetivos específicos: investigar a pertinência da gamificação para o ensino de matemática; elaborar uma sequência para utilizar gamificação como estratégia para o ensino; aplicar essa sequência em um grupo de alunos do nono ano do ensino fundamental; analisar as potencialidades e restrições dessa estratégia gamificada.

Nossa hipótese foi que uma estratégia didática gamificada para ensinar o teorema de Tales poderia apoiar seu ensino de maneira pertinente em um grupo de estudantes do nono ano do ensino fundamental, sendo que considerávamos possível como maior potencialidade que construiriam significado para esse conhecimento matemático de maneira engajadora.

Uma vez definida a questão, assim como nossos objetivos e hipótese, tivemos de definir uma metodologia e procedimento para alcançá-los, acerca disso nos dedicamos na próxima seção.

2.5 Metodologia e Procedimentos

Buscando um método pertinente à elaboração e validação de sequências de ensino, encontramos a Engenharia Didática que, para Artigue (1995), trata da elaboração, realização e análise de sequências de ensino.

A engenharia didática foi sistematizada por Artigue, no começo dos anos 1980, fundamentada em práticas metodológicas que nasceram com a Teoria das Situações Didáticas. Julgava que as investigações em didática da matemática precisavam discutir as ações necessárias para ensinar, ou seja, demandava debater seus métodos. Além disso, afirmava que, devido à falta de tradição, as inovações pensadas para a sala de aula aconteciam por si mesmas e reduziam o significado do que se pretendia ensinar. Argumentava ainda que as metodologias externas, que se baseavam em análises de questionários, entrevistas e testes, eram insuficientes para entender a complexidade da aprendizagem.

Artigue (1995) explicou que esse nome foi dado pela comparação entre o trabalho do professor e o do engenheiro e explicou, essa analogia, considerando que ambos teriam de lidar com objetos muito mais complexos do que os apontados pela ciência. Podemos exemplificar essa ideia com a construção de um prédio, em que um engenheiro utilizaria conhecimentos científicos a respeito do solo e de como fazer sua fundação, por exemplo, mas ao mesmo tempo utilizava conhecimentos práticos desenvolvidos em sua experiência.

Do mesmo modo funcionaria o trabalho do professor que, com seus conhecimentos pedagógicos, didáticos e específicos do conteúdo a ser ensinado planejava suas aulas, mas sua implementação eficaz dependia também de suas experiências e concepções para fornecer pistas acerca das respostas esperadas dos estudantes e referentes a outros elementos, como seus conhecimentos prévios, interesses etc. A valorização desse tipo de conhecimento é considerada por essa metodologia.

Artigue (1995) considerou que essa metodologia é composta pelas fases de estudos preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação. Nos estudos preliminares, existia uma análise epistemológica, didática e cognitiva dos conhecimentos a serem ensinados. A pesquisadora considerou que o plano epistemológico incluía questões como a preferência por abordagens geométricas ou algébricas, por exemplo, que podem estar relacionados ao desenvolvimento histórico do conhecimento ou ao seu desenvolvimento curricular. Com relação às barreiras cognitivas, foi dado o exemplo entre as mudanças entre tratamentos numéricos e geométricos. Com referência a dimensão didática, existiam exemplos de dificuldades como o ensino excessivamente algoritmizado.

Outra fase, dessa metodologia, consistiria na concepção da sequência de ensino e em sua análise *a priori*. Uma vez conhecidas as limitações inerentes ao ensino tradicional de determinado conhecimento, Artigue (1995) considerou que o pesquisador escolheria intervir a respeito de determinado número de variáveis desse sistema, que poderiam ser micro ou macro didáticas. Para a autora, as microdidáticas permitiam entender de maneira local a complexidade dos fenômenos de classe, enquanto as macros ajudavam na compreensão das relações entre ensino e aprendizagem. Também auxiliavam a distinguir relações entre objetos de conhecimento.

A autora exemplificou decisões do tipo: utilização ou não de computadores, quais os pré-requisitos que os estudantes precisariam ter (do ponto de vista matemático), o cuidado com a limitação e a complexidade dos exercícios, evitar atividades excessivamente algoritmizadas e os métodos, que seriam explicitados ao final da resolução das atividades.

Nas análises *a priori* existe a tentativa de determinar como as variáveis escolhidas, na concepção das atividades, podiam controlar os comportamentos dos estudantes para garantir que os conhecimentos matemáticos fossem ensinados. Para a autora, essa análise seria composta de uma parte descritiva, em que são explicadas as variáveis escolhidas, e uma parte preditiva, em que são exploradas possibilidades que se esperava que acontecessem, na aplicação da sequência de atividades construídas.

Depois da análise *a priori,* o próximo passo, era a experimentação seguida da análise *a posteriori*, em que os resultados eram confrontados com a análise *a priori*, em busca de uma validar interna das hipóteses de pesquisa. Uma característica que, segundo a pesquisadora, diferencia a engenharia didática de outras metodologias de investigação, com foco em ensino, é a questão da validação. Enquanto algumas metodologias utilizam validações externas, com comparações entre grupos de controles e experimentais, na engenharia didática a validação se dá no confronto entre análises *a priori* e *a posteriori*.

Como fonte de dificuldades, com essa metodologia, Artigue (1995) salientou a complexidade de replicar as engenharias didáticas, devido à preocupação com a reprodutibilidade de procedimentos, a necessidade de utilizar um número não muito extenso de aulas, a não depender exclusivamente de um professor específico para o desenvolvimento da engenharia e a necessidade de não ser feita com um número muito reduzido de estudantes. Outro argumento, a respeito dessas dificuldades, foi o das concepções de professores acerca de matemática, com referência ao ensino e as práticas docentes. Essas concepções podiam conduzir a diferenças entre aplicações da mesma engenharia didática, por diferentes profissionais do ensino.

Com relação aos procedimentos, devido à pandemia e ao isolamento imposto a sociedade, quando nosso instrumento de pesquisa ficou pronto, começamos a procurar alternativas para uma aplicação a distância e conseguimos autorização para execução remota em uma escola particular da cidade de São Paulo. As condições estabelecidas pela escola eram de que o pesquisador não teria contato com os estudantes e que essa pesquisa seria aplicada como uma atividade extracurricular. Seria proposta pelo professor da turma aos discentes, que realizariam, devolveriam ao professor e o pesquisador.

Como no começo da pandemia a gravidade da doença e tempo de duração do isolamento ainda era incertos, aceitamos as condições, visto que estávamos adentrando o nono semestre do curso de doutorado, acreditávamos que não encontraríamos condições melhores antes do encerramento do semestre. Assim, a dinâmica foi de que o pesquisador entregava parte da sequência didática ao professor e este disponibilizava aos estudantes, que tinham uma semana para resolverem coletivamente os desafios e devolverem.

Os dados disponibilizados ao pesquisador foram arquivos de texto, quando tínhamos dúvidas, fazíamos perguntas suplementares e os estudantes escolhiam como responder, algumas vezes foram áudios de *WhatsApp* e outras vídeos, em que eram mostradas estratégias de resolução.

O intermediador garantiu-nos que os estudantes realizaram as atividades a distância, utilizando aplicativos como o *Hangout* e o *WhatsApp.* Consideramos que essa foi uma dificuldade presente em nossa pesquisa, visto que a mediação ficou prejudicada, uma vez que não tivemos qualquer acesso direto a pesquisa, mas devido à nova realidade imposta à sociedade pela pandemia do novo Corona vírus, não tivemos alternativa.

Uma vez que definimos nossa metodologia de pesquisa, percebemos que já realizamos parte dos estudos prévios e continuamos, no que segue, com o que chamaremos de estudos preliminares.

3 ESTUDOS PRELIMINARES

Nesta seção objetivamos apresentar os estudos preliminares. Nossa escolha foi realizar uma análise didática, cognitiva e epistemológica do teorema de Tales com base em documentos curriculares, em pesquisas referentes a livros didáticos e em um estudo do objeto matemático, seguidos da apresentação de nosso aporte teórico.

3.1 Teorema de Tales nos Documentos Curriculares

Nossa análise da dimensão didática do teorema de Tales se iniciou com uma consulta no currículo, motivado por nosso levantamento das pesquisas que trataram do teorema. Citamos Reis (2014) e Pessanha (2017), quando consideraram a articulação entre o teorema e conhecimentos como: semelhança de triângulos, trigonometria e seções de sólidos por planos paralelos a base.

Justificamos essa escolha citando Bolea (2002), quando discutiu que uma das razões de ser para o teorema de Tales era curricular, pois esse conhecimento teria o papel de justificar técnicas de resolução de problemas, além de proporcionar um meio para que existisse conexão entre conhecimentos propostos no currículo. A autora fez uma pesquisa para o contexto espanhol, mas observamos que esse resultado também pode ser válido na conjuntura brasileira.

Então, uma das razões de ser desse conhecimento estaria relacionada ao currículo de matemática do ensino fundamental. Consideramos que uma maneira de resgatar essa razão de existência do teorema de Tales, no currículo, foi estudando-o no contexto da proporcionalidade. Iniciamos essa reflexão pelos documentos curriculares brasileiros, passando por contribuições do debate especializado.

Apesar de existir um documento curricular homologado em 2017, essa pesquisa começou a ser escrita em 2016, por isso se situa em um processo de transição entre os dois documentos de referência. Dessa forma, foi pertinente comparar para descobrir se existiram mudanças significativas, no que se referiu a como ensinar proporcionalidade e quais os conhecimentos associados a esse ensino.

A leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais possibilitou perceber a proporcionalidade como uma ideia fundamental para a articulação de diferentes conhecimentos, como exemplificado em BRASIL (1998, p. 84):

> [...] A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais – os contraexemplos.

Essa citação deixou clara uma proposta de articulação de conhecimentos algébricos com geométricos baseada na proporcionalidade, indo além da semelhança de triângulos e trigonometria, como encontramos em nosso levantamento das pesquisas para o ensino de teorema de Tales, incluindo análise de tabelas, que foi um recurso utilizado por autores como Haruna (2000).

Em outra parte do documento, foram considerados conhecimentos que deveriam ser explorados, pelos alunos, no último ano do ensino fundamental: a divisão de segmentos em partes proporcionais, verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales. Em outro momento, existiu a orientação de que semelhança e proporcionalidade são conhecimentos em que é proveitoso estabelecer conexões. Então essa é uma visão de que o estudo de semelhança é consequência do estudo de proporcionalidade e conduziria ao teorema de Tales, que poderia assumir um papel de justificar essas técnicas de resolução de problemas.

Talvez por isso, em nosso levantamento das pesquisas que aplicaram o teorema de Tales, a posição mais explorada para o feixe de retas paralelas cortadas por transversais foi a que apresenta duas paralelas na horizontal cortadas por transversais que, se prolongadas, formavam triângulos sobrepostos, deixando implícita essa conexão, visto que foi uma estratégia explorada pelos pesquisadores levantados em nossa pesquisa, talvez por levarem em conta, implicitamente, as orientações existentes nesse documento curricular.

Encontramos, na Base Nacional Comum Curricular, a primeira referência à Proporcionalidade quando a situou como uma das ideias fundamentais, que produziam articulações entre “diferentes campos que compõem a matemática” e ainda que:

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo das operações com os números naturais, da representação fracionária dos números racionais, de áreas, de funções, probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. BRASIL (2019, p.268)

Sendo assim, não encontramos divergências relevantes entre os dois documentos de referência, quando comparamos essas orientações com a literatura especializada, encontramos argumentos como os de Bortoloti e Barbosa (2018), quando consideraram que os estudos, a respeito de proporcionalidade, perpassavam todos os anos do ensino fundamental. Por outro lado, Costa e Allevato (2015) ponderaram que essa ideia era tradicionalmente apresentada apenas a partir do sétimo ano do ensino fundamental. Oliveira e Santos (2000) concordaram com essa introdução mais tardia e ainda salientaram que o meio de resolução privilegiado era a regra de três, acreditamos que essas últimas visões reforçavam um caráter da proporcionalidade mais ligada ao ensino e resolução de equações.

Foi preciso comparar esses argumentos com os documentos curriculares, consultando BRASIL (1998), vimos a orientação de seu estudo de maneira intuitiva (ou não convencional) como recomendação para o terceiro ciclo do ensino fundamental (quinta e sexta de um ensino de oito séries). Nessa concepção, as multiplicações e porcentagens foram escolhidas como veículos para aprendizagens dessa ideia.

Para os anos finais do ensino fundamental, há uma orientação de trabalho para: "[...] resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções." (BRASIL, 1998, p. 84). Como métodos formais de resolução, a única recomendação expressa é o trabalho com a regra de três, além da ideia de que era possível trabalhar com escalas.

Já em BRASIL (2019) existe, a partir do sexto ano, a orientação para o trabalho com porcentagens, cálculo mental e estratégias pessoais (cabe o comentário de que, nesse documento, o ensino fundamental foi seriado em 9 anos, então o sexto e sétimo anos equivaleriam ao terceiro ciclo, no documento anterior). Para o sétimo ano, a orientação para resolução de problemas com variações proporcionais baseados em sentenças algébricas. Então, entendemos que equações e regra de três devem ser mobilizadas para resolução de problemas com princípios multiplicativos.

Para o nono ano, essa ideia está relacionada a problemas, que devem ser resolvidos ou elaborados por alunos, relacionando grandezas direta ou inversamente proporcionais, escalas, divisões e em contextos extra matemáticos. Também notamos ligação com a geometria, sendo um objeto de conhecimento previsto, no último ano do ensino fundamental, como “teoremas de proporcionalidade” e das habilidades: “relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes”.

Podemos relacionar os “teoremas de proporcionalidade” com o teorema de Tales e as relações métricas no triângulo retângulo, propostas para serem estudadas no último ano do ensino fundamental em BRASIL (1998), visto que Moise e Downs Jr (1972) explicaram que o teorema dos segmentos proporcionais também era conhecido como teorema de Tales. Por isso, podemos perceber que, na ideia de proporcionalidade está prevista articulação entre conhecimentos algébricos, no começo do ciclo, e geométricos, no final do ciclo, durante o ensino fundamental, culminando com o estudo de teorema de Tales.

Uma informação relevante foi de que, o documento mais atual, faz menção a construções geométricas, com régua e compasso, apenas no oitavo ano para: polígonos regulares, construção dos ângulos de 30º, 45º, 60º e 90º e construção de bissetrizes, enquanto no documento anterior há considerações a respeito de construções geométricas de números racionais e irracionais, além de construções referentes ao teorema de Tales. Essa escolha poderia significar um certo abandono do desenho geométrico, como subárea da Matemática.

Acreditamos que esse pode ser um movimento, como o descrito por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), de que, em certas épocas, alguns conteúdos do currículo eram priorizados, em detrimento de outros. Pode ser que tenha acontecido um tipo de omissão destas construções no currículo brasileiro, que priorizou teorema de Tales com abordagem geométrica, no último ano do ensino fundamental, em um contexto em que desenho geométrico estava sendo abandonado e essa abordagem pode ser um obstáculo ao seu ensino.

Percebemos que os documentos curriculares evidenciam a necessidade de articulação entre aritmética, álgebra e geometria, no tratamento de proporcionalidade. Também notamos que um dos primeiros conhecimentos, pensados para o trabalho com proporcionalidade, foi porcentagem, então o estudo de razões pôde ser considerado um dos primeiros contatos dos estudantes com essa ideia.

Um dos conhecimentos, presentes no currículo, que foi tradicionalmente associado ao ensino de proporcionalidade, era a regra de três. Bolea, Bosch e Gascón (2001) discutem sua utilização, pois era empregada de maneira que sequer alunos e tampouco professores conseguiam justificá-la, na resolução de problemas. Cabe ainda salientar que, na visão de Oliveira e Santos (2000, p. 02):

> No Brasil, o estudo da proporcionalidade ocorre, muitas vezes, de uma maneira fragmentada, onde cada assunto do capítulo referente ao tema proporcionalidade é visto como um objeto de estudo em si mesmo, provocando a transformação de ferramentas de resolução em objetos de estudo, o que ocorre, especificamente, com a regra de três.

Uma discussão, referente à dimensão didática do ensino de proporcionalidade, poderia ser que a superação dessa concepção de estudo fragmentada passaria pela articulação de atividades que mobilizassem outras perspectivas de resolução de problemas, talvez mudando essa priorização de um tratamento eminentemente algébrico do tema para uma abordagem mais geométrica, que poderia auxiliar na mudança dessa percepção desagregada, acerca de seu ensino.

Para Bortoloti e Barbosa (2018) são importantes as conexões entre aritmética, álgebra e geometria considerando conhecimentos de proporcionalidade. Ruiz e Carvalho (1990) também consideram essas articulações importantes e propõem que o ensino de proporcionalidade deveria ser iniciado com o estudo de frações. Além disso, salientam a importância de serem oferecidas condições de vivências aos discentes, para ajudar a formulação do conceito e não apenas a transmissão de fórmulas e regras. Costa e Allevato (2015) concordam com essa visão e reforçam a ideia da fragmentação e desconexão do trabalho com proporcionalidade, no ensino fundamental. Dessa forma, foi possível justificar a ideia de que, em nosso contexto, uma das razões de ser para o estudo do teorema de Tales poderia ser justificar técnicas de resolução de problemas, além de proporcionar um meio para a conexão entre esses métodos, sendo que a falta dessa articulação foi uma das dificuldades, mostradas pela literatura especializada, a serem superadas.

Uma maneira de verificar como foram tentadas essas conexões, em livros didáticos, foi pesquisar investigações que trataram desses recursos e sua abordagem do assunto, tema esse tratado na próxima seção. Justificamos essa opção por pretendermos, desse modo, cobrir maior quantidade de obras e utilizar as reflexões e concepções dos autores dessas investigações, além da comparação entre suas ideias, buscando estabelecer relações.

3.2 Teorema de Tales em Pesquisas referentes a Livros Didáticos

Considerando a afirmação de Souza (2015) de que o livro didático era um "recurso guia" para a maior parte dos professores de matemática, percebemos a importância de considerá-los em nosso estudo, pois poderiam impactar as concepções de professores e, por conseguinte, de alunos acerca desse tema.

Decidimos recorrer a produções acadêmicas que trataram de coleções de livros didáticos, visando cobrir maior quantidade de obras. Buscamos no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, optando pelos termos: "Proporcionalidade", "Teorema de Tales" e "Análise de Livros Didáticos", foram escolhidos alguns filtros, disponíveis no portal. Escolhemos os anos de 2015, 2016, 2017 e 2018. Como "Grande Área de Conhecimento", optamos por: Ciências Exatas e da Terra e Ciências Humanas. Como "Área de Conhecimento" decidimos por: Ensino de Matemática e Ciências, Matemática, Ensino e Educação e como "Área de Concentração" foram escolhidas as áreas de Ensino, Educação, Matemática/Probabilidade e Estatística.

Depois de aplicados os filtros, os resultados apontaram 35 pesquisas. Lendo os resumos dos trabalhos, percebemos que a única resposta em que o tema correspondia a pesquisa era a dissertação de mestrado: "Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano". As outras pesquisas tratavam de livros didáticos com outros conhecimentos, repetiam os resultados de nosso levantamento a respeito de teorema de Tales ou tratavam acerca de geometria sem analisar livros didáticos.

Nosso próximo passo foi repetir a pesquisa no Google Acadêmico, com as mesmas palavras chaves, onde encontramos 51 respostas. Depois da leitura dos resumos, selecionamos outros dois resultados (Quadro 7). O critério de exclusão das pesquisas foi mantido.

Quadro 7 – Pesquisas a respeito de proporcionalidade em Livros Didáticos

Autor	Título	Ano	Âmbito
PAIS	Estratégias de Ensino da Geometria em Livros Didáticos de Matemática em Nível de 5ª à 8ª Série do Ensino Fundamental	2006	Artigo em Periódico
BORTOLOTI e BARBOSA	A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura	2017	Artigo em Periódico
FERREIRA	Como o Teorema de Tales é Apresentado em Livros Didáticos do Nono Ano	2017	Dissertação de Mestrado

Fonte: Produção do autor

Fizemos uma breve descrição de cada pesquisa, com foco em como foi abordada a proporcionalidade em cada obra. Pais (2006), realizou uma pesquisa com o objetivo de caracterizar tendências, sinalizadas pelos livros didáticos, para o ensino de geometria. Foram analisadas 12 coleções de livros didáticos para os anos finais do ensino fundamental (sétimas e oitavas séries), essas obras foram lançadas entre 1985 e 2002. O primeiro ponto, ressaltado pelo autor, foi com relação aos conhecimentos que se repetiam nas obras:

> [...] são os seguintes: ponto, reta e plano, semirreta, segmento de reta, poligonais e polígonos, ângulos, retas perpendiculares e paralelas, triângulos, congruência, pontos notáveis de um triângulo, quadriláteros, circunferência e círculo, semelhança, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, relações métricas e trigonométricas, perímetros, áreas e volumes, polígonos regulares, comprimento da circunferência (PAIS, 2006, p. 08)

Outro dado relevante, destacado pelo pesquisador, foi de que a ordem em que esses conhecimentos eram tratados, nos livros didáticos, costumava ser a mesma da citação acima. Assim, teorema de Tales foi apontado como um dos conhecimentos hegemônicos, a serem ensinados, no ensino fundamental e costumava ser tratado depois de semelhança, antes de relações métricas em triângulos retângulos e, depois disso, era apresentado o teorema de Pitágoras.

Analisando os documentos de referência, examinados anteriormente, existiu a menção explícita em BRASIL (2019) do estudo do teorema fundamental da proporcionalidade após semelhança e antes das relações métricas no triângulo retângulo. Vimos em BRASIL (1998) que existiu uma ordem parecida, quando foi citado que se deveria ser desenvolvida a noção de semelhança de figuras planas e, posteriormente, verificações e aplicações do teorema de Tales e do teorema de Pitágoras. Isso nos levou a crer que os livros didáticos, analisados pelo autor, seguiam a ordem prevista nos documentos curriculares. Quanto à maneira com que eram abordados, o pesquisador encontrou três estratégias.

A primeira foi chamada de estratégia Lógico-Dedutiva e era hegemônica nos livros publicados entre 1985 e 1995. Consistia em uma sequência, baseada na apresentação da axiomática do conteúdo, seguida de exercícios. A segunda foi chamada de estratégia Indutivo-Dedutiva e foi soberana de 1995 até o início dos anos 2000. Consistia na apresentação de experimentações gráficas, seguidas por um enunciado, pela demonstração do conteúdo e finalizada com exercícios e problemas de aplicação. A terceira foi chamada de estratégia de Resolução de Problemas, começou a ser usada a partir do início dos anos 2000. Consistia na apresentação de problemas, que tratavam do conteúdo a ser ensinado, depois da exploração dos problemas o livro retomava procedimentos formais para seu tratamento.

Pais (2006) considerou a estratégia de Resolução de Problemas como a mais recente das três, sendo a opção encontrada com menos frequência. Também foi observado, nas coleções de livros mais recentes, um aumento da utilização de recursos visuais como desenhos, esquemas gráficos e quadrinhos, por exemplo, como estratégias de ensino.

Consideramos que esse estudo nos mostrou uma tendência de abandono de abordagens tradicionais de ensino (representadas pela estratégia Lógico-Dedutiva), até chegarmos a livros com abordagens de ensino baseadas em resoluções de problemas. Cabe o comentário de que em BRASIL (1998) uma estratégia considerada privilegiada para o ensino era a resolução de problemas, então aventamos a possibilidade que a mudança, vista nos livros didáticos pelo autor, fosse uma resposta das editoras a orientações presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Outra visão foi dada por Bortoloti e Barbosa (2017), que se propuseram a levantar uma bibliografia disponível entre os anos de 2000 e 2014. A escolha do material foi feita levando em consideração as produções que tratavam acerca de proporcionalidade, mesmo que esse não fosse o assunto principal das investigações. Assim, foram escolhidas 17 pesquisas, publicadas em diversos periódicos, nas quais os autores encontraram o que chamaram de “rotinas”, que eram usadas para ensinar. A primeira foi caracterizada pela utilização de razões do tipo: $\frac{a}{b}$ (a está para b). A segunda foi descrita como uma estratégia de ensino com proporções do tipo: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. A terceira utilizava a ideia de uma associação em que elementos de um conjunto correspondiam a elementos em outro conjunto.

Enquanto o primeiro tipo de rotina se baseava na aplicação direta de razões do tipo: $\frac{a}{b}$, no segundo foi utilizada a definição geométrica de proporcionalidade e a regra de três, como ferramenta para resolver esse tipo de problema, considerando a ideia de que tínhamos dois ou três dados para descobrir um outro, que variava proporcionalmente aos demais. Para os autores, o teorema de Tales era o que justificava a utilização da regra de três, nesses tipos de atividades.

No terceiro tipo de rotina, as variáveis se relacionavam com uma constante de proporcionalidade, em uma relação do tipo: $ax = y$, descrevendo uma lei de formação, em que as variáveis poderiam ser substituídas por valores, em uma tabela.

Percebemos a priorização da álgebra nessas rotinas, citadas pelos autores e foi plausível pensar em articulações entre elas e conhecimentos como, por exemplo, semelhança de polígonos. Pensamos que tratar simplesmente de razões do tipo: $\frac{a}{b}$ não era suficiente para ensinar proporcionalidade, que poderia ser trabalhada por meio de comparações entre diferentes razões. Da mesma forma, tratar relações proporcionais como: $ax = y$ nos pareceu um trabalho de introdução às funções, que estava previsto apenas de maneira intuitiva no currículo do ensino fundamental. Nossa visão era de que trabalhar com esse tipo de relação já foi mais do que uma forma intuitiva e por isso, nos pareceu inadequado para o ensino fundamental.

Visto desta forma, nesta obra, o teorema de Tales pareceu ter tido um papel de justificação do trabalho com métodos de resolução de problemas algébricos que tratavam de proporcionalidade. Também foram utilizadas técnicas de resolução de problemas ligados à construção e mensuração de polígonos ou de segmentos que poderiam, nesse caso, ser utilizados como alternativa para o ensino de teorema de

Tales, talvez por isso foram as estratégias utilizadas preponderantemente nas pesquisas presentes em nossa revisão da bibliografia. Apesar de estarem presentes em algumas das pesquisas, em nosso levantamento, não encontramos muitas menções ao trabalho com geometria (especialmente desenho geométrico) até o momento e coube refletir nas razões dessa aparente opção dos livros didáticos presentes na investigação de Bortoloti e Barbosa (2017).

Uma possibilidade poderia ser que o abandono do desenho geométrico, verificado em nosso estudo do currículo, tenha influenciado os autores de livros didáticos, fazendo com que se tornasse pouco usual, talvez essa ideia de que o ideal seria uma abordagem eminentemente algébrica fosse transposta para a abordagem cognitiva, visto que impactaria as concepções dos autores e de professores, que utilizaram essas obras.

Em Ferreira (2017), pudemos notar uma preocupação de como o teorema de Tales é tratado em quatro coleções de livros didáticos, tendo como principal objetivo analisar as demonstrações, presentes nestas obras. Para o autor, um ponto relevante era que algumas coleções tratavam apenas parte da demonstração do teorema, evitando discutir regras de incomensurabilidade.

Essas obras trouxeram parte da demonstração, pelo artifício conhecido como método de exaustão. O recorte escolhido era aquele em que o feixe de paralelas coincidia com as divisões do segmento e vale lembrar que esse foi um entre três possíveis casos. Consideramos que, uma vez que fosse decidido por essa demonstração, não se poderia omitir parte dela. Assim, existiu essa escolha que levou a um equívoco conceitual, nas coleções de livros didáticos analisadas pelo autor.

Visualizamos que esse pesquisador escolheu analisar livros didáticos que traziam sempre uma apresentação do conteúdo, seguida de exercícios. Outro fator é que escolheu ponderar a respeito de livros escritos entre os anos de 1980 e 1990, assim podemos estabelecer relação desse trabalho com o de Pais (2006) e dizer que as estratégias de ensino, utilizadas pelos autores de livros didáticos analisados, foram Lógico-Dedutivas. Cabe questionar a razão de uma pesquisa de 2017 analisar coleções de livros didáticos com 20 ou 30 anos do lançamento. Consideramos que a escolha poderia ter sido por coleções de livros mais atuais, que já tivessem sofrido influência de BRASIL (1998).

Uma possível explicação, para a escolha de omitir parte das demonstrações, pode ser dada por Almeida (2008), que analisou demonstrações em livros didáticos nos séculos XIX e XX. Neles, existiam demonstrações apoiadas em áreas e em segmentos. O autor também afirmou que existiam, em livros didáticos da primeira metade do século XX, demonstrações completas. Consideramos que a escolha de utilizar uma demonstração incompleta, para justificar o trabalho com proporcionalidade, como uma distinção feita pelos livros didáticos da segunda metade do século XX, no Brasil.

Esse encolhimento da discussão a respeito de demonstrações pode ter como razão o esvaziamento do estudo de desenho geométrico, promovido pelo movimento da matemática moderna, salientado por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) e que continua na atualidade, visto que agora existe um esvaziamento das construções com régua e compasso. Por isso, existiu a possibilidade que diferentes abordagens e demonstrações tenham sido abandonadas na segunda metade do século XX. Assim como pode ter sido adotada, em parte dos livros didáticos, uma demonstração incompleta para tratar da ideia de proporcionalidade, visto que a algebrização dos conteúdos, a serem tratados no ensino fundamental, era a tendência dessa época.

Aqui coube a reflexão de que esse esvaziamento do estudo de construções geométricas pode ter sido responsável pela utilização de métodos de resoluções de problemas algébricos com apoio de figuras, ao invés de geométricos, mobilizando conhecimentos como a regra de três, por exemplo.

Entre o final do século XX e início do século XXI, pudemos perceber uma mudança na abordagem dos livros didáticos, como salientado por Pais (2006), quando relatou uma tendência de mudança nas estratégias, empregadas por autores de livros e manuais, usando a resolução de problemas como estratégia de ensino. Apesar dessa mudança, nos pareceu não terem acontecido alterações no esvaziamento do estudo de geometria e na utilização de demonstrações incompletas para o teorema de Tales.

Apesar de não termos encontrado, em nosso levantamento, outros tipos de abordagens, podemos perceber essa escolha nos documentos de referência curriculares em outros países, quando apresentaram uma transição nas escolhas de ensino de geometria, que pôde ser exemplificada em PORTUGAL (2011), na medida em que existiu uma preocupação em amenizar essa algebrização do currículo.

Foram utilizadas outras opções que, comparando com o que vimos até agora, parecem ser diferentes do que foi feito no currículo brasileiro. O teorema fundamental da proporcionalidade foi tratado como tema inserido no tópico paralelismo e ensinado com base no Postulado das Paralelas. Outra mudança observada foi a demonstração do teorema feita por áreas ao invés de segmentos. Essa era uma ideia distinta, mas coube ressaltar que as escolhas foram feitas em um país que tinha o currículo diferente do brasileiro, mas que serviu como exemplo de opções didáticas diferenciadas daquelas vistas até aqui.

A discussão, a respeito do ensino do teorema de Tales, com base no paralelismo de retas realizada por Brousseau (1995), nos levou a crer que essa seja uma tendência europeia, mas nesta obra também existiu uma discussão acerca do uso de semelhança. Para o pesquisador, a aprendizagem pode acontecer por propriedades “perceptivas” e, dessa forma, mostrar figuras que poderiam se tornar prototípicas ajudaria na identificação e resolução de problemas. Talvez por isso identificamos, em nosso levantamento, o recurso de tratar prioritariamente de triângulos para ensinar teorema de Tales com base em semelhança de polígonos. Essa pôde ter sido considerada como uma figura prototípica, cabe salientar que o autor não aconselhou esse tipo de prática.

No mesmo caminho, citamos Andrade e Guerra (2011), que consideraram o teorema fundamental da proporcionalidade e semelhança, incluindo a semelhança de triângulos, como temas com grande articulação. Por outro lado, também foi salientada a possibilidade do ensino de teorema de Tales ser iniciado por razões e frações. Como os estudantes, dos anos finais do ensino fundamental, deveriam ter domínio desses conhecimentos, era possível que se estabelecessem caminhos para introdução de teorema de Tales utilizando inicialmente equivalência de frações, passando por semelhança de figuras planas.

Cabe salientar que seguindo por esse caminho seria necessário refletir acerca de como tratar teorema de Tales no contexto da proporcionalidade, pois seria preciso que não fosse apenas utilizado para justificar técnicas algébricas de resolução de problemas, mas mobilizado efetivamente, no contexto da geometria.

Para conseguir mais subsídios em nossa reflexão, decidimos consultar o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Ele era composto por avaliações, aplicadas a cada dois anos, para alunos dos sextos e nonos anos do ensino fundamental, além do terceiro ano do ensino médio. A última avaliação foi feita em 2017 e existia previsão para outra aplicação em 2019. Após consulta no site[21] do SAEB, descobrimos que o nível dos estudantes do nono ano do ensino fundamental em matemática era três, em uma escala que ia de um a nove, considerado insuficiente pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC).

Após consultar a tabela, com a escala de proficiência em matemática, para o nono ano do ensino fundamental[22] foi possível perceber que, nesse nível de aprendizagem, os estudantes provavelmente são capazes de: determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, mobilizando simplificação por três e por sete, resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros e analisar dados dispostos em uma tabela simples.

Apesar dos estudantes conseguirem resolver problemas com grandezas diretamente proporcionais, nesse nível, não foi mencionado o trabalho com semelhança, que seria uma habilidade presente a partir do nível seis de proficiência. Esse era o mesmo em que se consideraria que o estudante conseguiria trabalhar com frações equivalentes. O trabalho com grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais, era uma habilidade prevista para o nível cinco, enquanto com grandezas inversamente proporcionais era previsto no nível seis e qualquer menção a Tales só esteve presente a partir do nível sete.

Dessa forma, suspeitamos que talvez esteja em curso um certo abandono da geometria, quando comparamos pesquisas referentes ao currículo e a livros didáticos, se refletiu no SAEB e coube a preocupação do público especializado em como resgatar esse tipo de trabalho, sendo esse um aspecto cognitivo de nossa análise. Esse pôde ser um dos motivos para as dificuldades em ensinar teorema de

---

[21] Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/saeb-2017-revela-que-apenas-1-6-dos-estudantes-brasileiros-do-ensino-medio-demonstraram-niveis-de-aprendizagem-considerados-adequados-em-lingua-portug/21206. Acesso em 14/02/2019.

[22] Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/escala_proficiencia/2018/MT_9EF.pdf. Acesso em 14/02/2019.

Tales, visto que se tornou mais difícil tratar esse tipo de conhecimento com estudantes que estudaram, durante todo o ensino fundamental, com um currículo centrado na álgebra.

Com o intuito de ajudar nessa reflexão, decidimos realizar um estudo epistemológico do teorema, iniciando por suas demonstrações e passando pelo debate especializado, optamos pelas que foram citadas até o momento, para refletirmos, do ponto de vista do conhecimento matemático mobilizado em cada uma delas, quais outros conhecimentos poderiam ser considerados pré-requisitos ao ensino de teorema de Tales. Foi pertinente levar em consideração que uma maior quantidade de conhecimentos prévios também traria a questão de que seria necessário mais tempo de aula, para introduzir e desenvolver nossa engenharia didática.

3.3 Estudo do Objeto Matemático: teorema de Tales

Depois de fazer menção a dois tipos de demonstração para o teorema de Tales ou teorema dos segmentos proporcionais, decidimos iniciar nosso estudo da dimensão epistemológica desse conhecimento por uma reflexão centrada no objeto matemático com uma breve explicação a respeito de como se deram essas demonstrações, antes de tratar de perspectivas para seu ensino.

Para expor a demonstração analisada por Ferreira (2017) nós apoiamos na contribuição de Bongiovanni (2005), em que o autor supôs que, em um feixe de retas paralelas *a*, *b* e *c*, cortadas por retas transversais, para provar que: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ era necessário explorar a ideia de que os segmentos *A* e *B* poderiam ser divididos em *n* partes iguais. Assim, existiria um segmento *u*, tal que: $AB = n\,.\,u$ e que existiria uma quantidade *m* de segmentos *u* em *BC*. Refletindo a respeito do que poderia acontecer com a extremidade do último segmento (chamado pelo autor de *S*) marcado em *BC*, uma entre 3 possibilidades podiam ocorrer: *S* estar entre *B* e *C*, *S* estar depois do ponto *C* ou *S* coincidir com o ponto *C*.

Foi com base na exploração de cada uma dessas 3 possibilidades que foi realizada a demonstração. Para o caso de *S* estar entre *B* e *C*, foi construída a Figura 3 para explorar as relações: $AB = n.u \; e \; mAB = mnu$ e $BS = m.u \; e \; nBS = mnu$.

Chegando à conclusão que: $mAB = nBS$.

Soube-se que: $BS < BC$ e, portanto, $nBS < nBC$. Logo: $mAB = nBS < nBC$ e pela regra de transitividade: $mAB < nBC$.

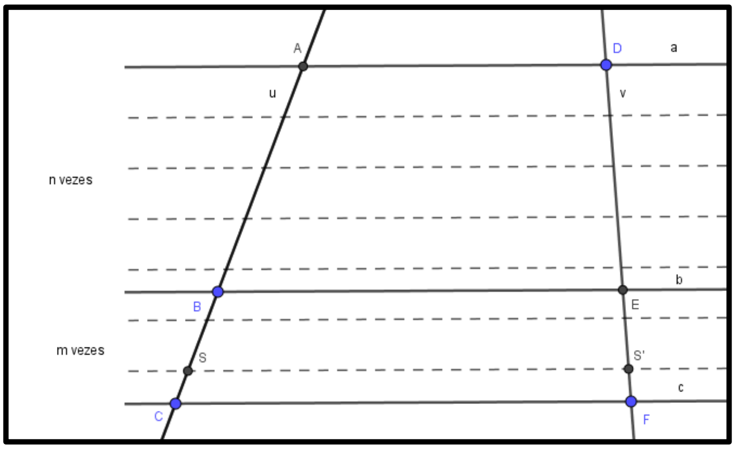
O mesmo raciocínio se aplicou a *DE* e *ES'*:

$$DE = nv \; e \; mDE = mnv$$

$$ES' = mv \; e \; nES' = mnv$$

Chegando à conclusão de que: $nES' = mDE$.

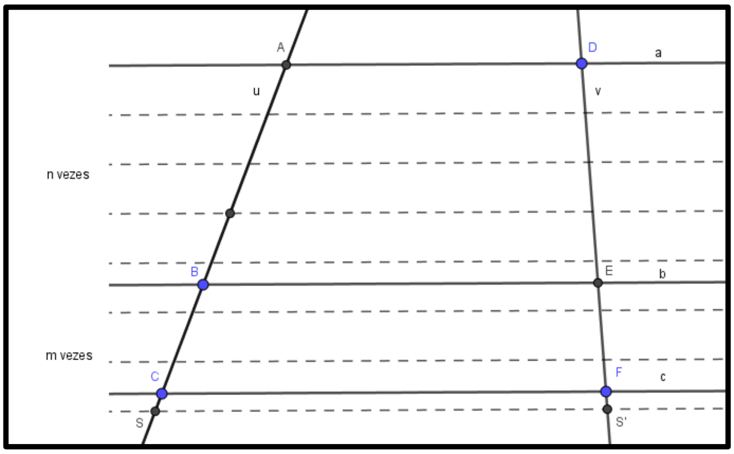
Figura 3 – Feixe de paralelas em que S está entre B e C



Fonte: Adaptado de Bongiovanni (2005, p.97)

Soube-se que $ES' < EF$, e que $nES' < nEF$ como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Feixe de paralelas em que S está depois de C



Fonte: Adaptado de Bongiovanni (2005, p.97)

Logo: $mDE = nES' < nEF$ e pela regra de transitividade: $mDE < nEF$.

Concluindo que: $mAB < nBC \rightarrow mDE < nEF$.

Para o caso de *S* estar depois do ponto *C*, algumas relações permaneceram, alterando somente o sinal da desigualdade:

$$AB = n.u\ e\ mAB = mnu$$

$$BS = m.u\ e\ nBS = mnu$$

Chegando à conclusão que $mAB = nBS$.

Soube-se que: $BS > BC$ e que: $nBS > nBC$.

Logo se $mAB = nBS > nBC$, pela regra de transitividade, $mAB > nBC$.

O mesmo raciocínio se aplicou a *DE* e *ES'*:

$$DE = n.v\ e\ mDE = mnv$$

$$ES' = m.v\ e\ nES' = mnv$$

Chegando à conclusão de que: $nES' = mDE$.

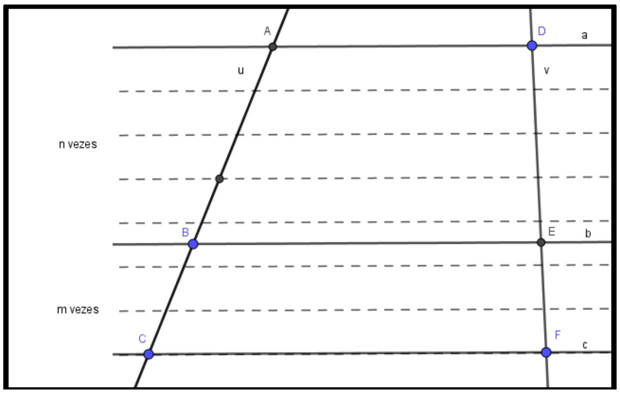
Sabe-se que $ES' > EF$, e que $nES' > nEF$.

Logo: $mDE = nES' > nEF$ e pela regra de transitividade: $mDE > nEF$.

Concluindo que: $mAB > nBC \rightarrow mDE > nEF$

No caso de *S* e *C* coincidirem, teríamos a Figura 5.

Figura 5 – Feixe de paralelas em que C e S coincidem



Fonte: Adaptado de Bongiovanni (2005, p.97)

Para este caso, algumas relações seriam: $AB = n.u\ e\ mAB = mnu$ e $BS = m.u\ e\ nBS = mnu$.

Chegando à conclusão que $mAB = nBS$.

Soube-se que: $BS = BC$, e que: $nBS = nBC$.

Logo: $mAB = nBS = nBC$ e pela regra de transitividade: $mAB = nBC$.

O mesmo raciocínio se aplicou a *DE* e *ES'*:

$$DE = n.v \ e \ mDE = mnv$$

$$ES' = m.v \ e \ nES' = mnv$$

Chegando à conclusão de que: $nES' = mDE$.

Soube-se que $ES' = EF$, e que $nES' = nEF$.

Logo: $mDE = nES' = nEF$ e pela regra de transitividade: $mDE = nEF$.

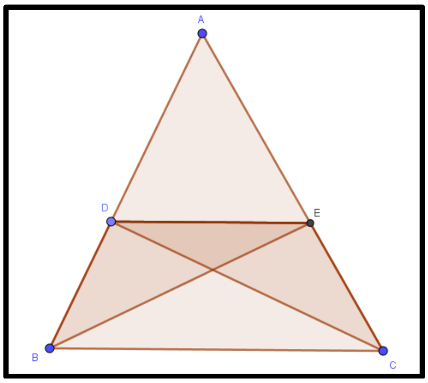
Concluindo que: $mAB = nBC \rightarrow mDE = nEF$

Já a demonstração do teorema de Tales por áreas foi explorada por Moise e Downs Jr[23] (1972, p.322, tradução nossa) que definiram proporcionalidade considerando medidas de segmento: se são dados os números positivos a, b, c, ... e p, q, r,.... se: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \cdots$

Então as sucessões a, b, c, ... e p, q, r, ... são proporcionais

A partir dessa igualdade, os autores exploraram áreas dentro de um triângulo (p. 330, tradução nossa)[24]: "no ΔABC temos D e E pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, tais que: $\overline{DE} // \overline{BC}$, então: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$." Os pesquisadores se apoiaram na Figura 6.

Figura 6 – Triângulo interceptado por reta paralela a um dos lados.



Fonte: Adaptado de Moise e Downs Jr (1972, p.330)

[23] Sean dadas dos sucesiones de números positivos a, b, c, ... y p, q, r, ... Si $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \cdots$ entonces las sucesiones a, b, c, ... y p, q, r, ... son proporcionales.

[24] En el ΔABC, sean D e E puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tales que $\overline{DE} // \overline{BC}$. Entonces, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$

A demonstração foi feita a partir da exploração dos triângulos *ADE* e *BDE*. Por terem o lado em comum $\overline{DE}$ foi considerada que essa era sua altura, para que passasse a valer um outro teorema, que diz que: se dois triângulos têm a mesma altura, a razão de suas áreas seria igual à razão de suas bases[25], obtendo $\frac{AD}{BD}$. Raciocínio análogo serviria para pensar nas áreas do ΔCDE e do ΔADE e chegarmos à razão $\frac{AE}{CE}$.

Considerando agora os ΔBDE e ΔCDE, tínhamos que as medidas de suas áreas eram iguais[26] e, por isso, pudemos estabelecer uma igualdade entre as razões obtidas a partir das áreas dos triângulos: $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$. A partir dessa igualdade, Moise e Downs Jr (1972, p. 331) somaram 1 unidade a cada um de seus membros para obter:

$$\frac{AD}{AD} + \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} + \frac{AE}{AE} \Longrightarrow \frac{AD + BD}{AD} = \frac{CE + AE}{AE} \Longrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Pudemos perceber que em Moise e Downs Jr (1972) existiu a ideia de que as medidas, dos segmentos de reta, tinham um tratamento numérico, a partir de igualdades de frações, para que se chegasse à conclusão de que eram proporcionais. Nessa segunda demonstração, existiu menção a outras propriedades e provas que precisaram ser mobilizadas para que se chegasse ao resultado esperado e, talvez por isso, não foi utilizada em alguns livros didáticos brasileiros.

A demonstração por áreas foi utilizada após o Postulado das Paralelas, no currículo português, justamente para que fosse possível o tratamento de todas as propriedades que necessitavam ser mobilizadas nesta demonstração. Assim, vimos que a opção por esse tipo de demonstração não pôde ser considerada usual em nosso currículo.

Quando pensamos em quais tratamentos puderam ser dados ao teorema de Tales no ensino fundamental, coube uma reflexão a partir de Brousseau (1995), quando considerou os pontos de vistas acerca da aplicação desse teorema no currículo francês na segunda metade do século XX.

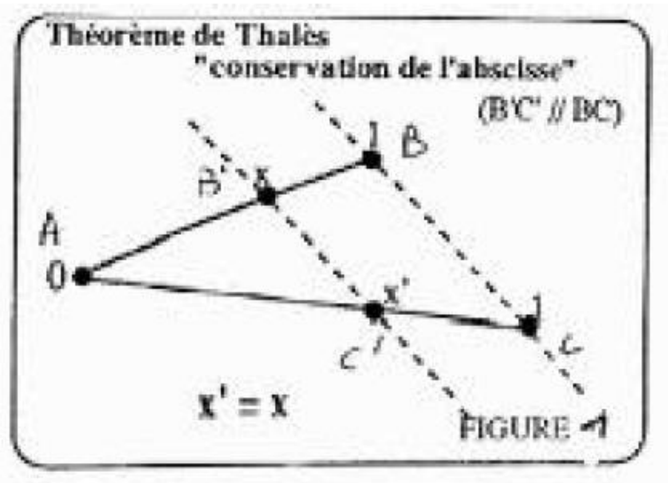
---

[25] Poderíamos provar esse teorema calculando as áreas: $\frac{A_{\Delta ADE}}{A_{\Delta ADE}} = \frac{AD.DE}{BD.DE} = \frac{AD}{BD}$

[26] Decorrendo da ideia de que eles têm a mesma base e as mesmas alturas, por DE e BC serem paralelos.

Começou sua reflexão pela ideia de que existiam três representações do teorema de Tales, propostas pelos programas franceses. A primeira era chamada de ponto de vista da “conservação das abscissas” e expressou que as razões entre os vetores que passavam pelo mesmo secante não dependiam dele, mas sim das paralelas consideradas, como ilustrado pela Figura 7, com $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC'}}$. Podendo ser representado na forma: se $AB =\propto AB'$, então $AC =\propto AC'$.

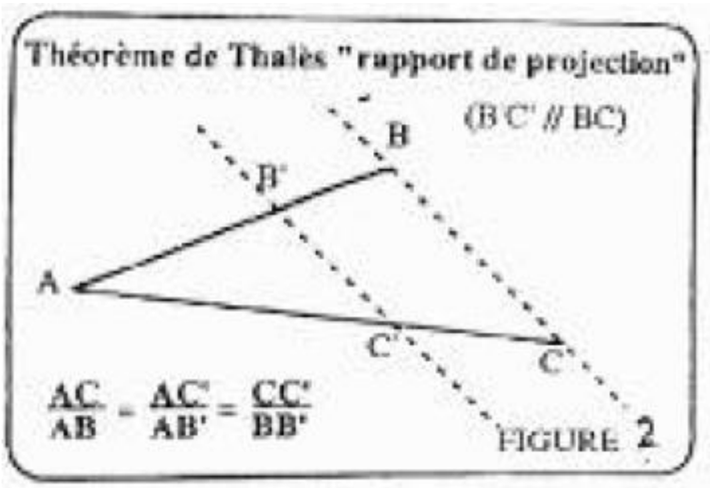
Figura 7 – Representação da conservação das abscissas



Fonte: Brousseau (1995, p.11)

Uma segunda representação foi chamada de ponto de vista da “conservação da razão de projeção” e expressava a igualdade da razão entre as medidas algébricas dos segmentos correspondentes, determinados por duas interseções. Podendo ser ilustrado pela Figura 8, com: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$.

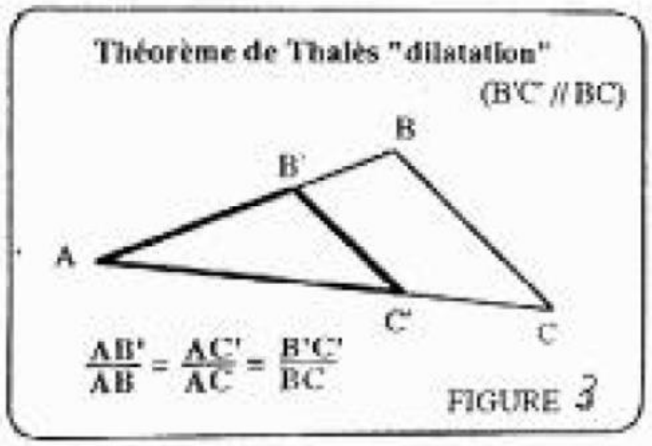
Figura 8 – Representação da conservação da razão de projeção



Fonte: Brousseau (1995, p.12)

A terceira representação foi chamada de ponto de vista da "dilatação" e expressava a semelhança dos vetores que passavam paralelos em uma homotetia, pelo centro de intersecção das secantes, como ilustrado pela Figura 9, com $\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}}$. Ou ainda: se $B'C' = \alpha BC$, então $AB' = \alpha AB$.

Figura 9 – Representação da dilatação



Fonte: Brousseau (1995, p.12)

Além disso, tratou da ideia de que existiam duas formas de conhecimento, o prototípico e o conceitual. Enquanto o primeiro privilegiou a percepção da figura observada com outras, consideradas típicas, o segundo tratou da análise das características da figura, em um tipo de compreensão mais ampla, problematizando suas propriedades em comum. Baseado na dualidade destas duas formas, o pesquisador refletiu acerca da limitação implícita em trabalhar apenas com conhecimentos prototípicos, na medida em que poderiam não ser reconhecidos em figuras complexas, o que tornaria essa estratégia pouco efetiva.

O autor considerou que as noções escolares básicas, que se relacionavam com teorema de Tales e suas aplicações a triângulos ou feixes de paralelas eram: razões (considerando as proporções), paralelismo e projeções. Outros conhecimentos, ensinados posteriormente, fariam referência às equivalências de razões, semelhanças e homotetias. Pudemos refletir que estas noções poderiam ser consideradas como integrantes da ideia de proporcionalidade, existente em BRASIL (2019).

Representar teorema de Tales no R^2, utilizando sobretudo triângulos com lados paralelos foi chamada pelo autor como parte do ponto de vista da dilatação e era considerada resultado de uma transposição didática antiga (encontramos essa mesma transposição em nosso levantamento da bibliografia, quando tratamos da altura da pirâmide). A partir dessa ideia, o autor discutiu que novas transposições deveriam considerar a necessidade de alterações na quantidade de interseções e paralelas presentes em uma figura e que seria necessário entender as implicações da transposição didática tradicionalmente utilizada (a saber, a lenda da altura da pirâmide de Quéops).

Uma maneira, pensada pelo autor, para tratar de novas transposições didáticas para o teorema de Tales foi pensar na divisão de segmentos em problemas com tábuas de assoalho ou em faixas, como a de pedestres. O pesquisador considerou a necessidade de pensar em uma regra transparente para projetar uma graduação de reta em outra reta. Outra aplicação do teorema, considerada pelo pesquisador, foi triangulação e problemas de medição do planeta. Pudemos considerar divisão de segmentos proporcionais e projeção de graduações de uma reta em outra como razões de ser para o Teorema de Tales (além da curricular, já explorada anteriormente).

A partir dessas ideias, acerca de que tipo de problemas puderam ser resolvidos pelo teorema de Tales, Brousseau (1995) refletiu com referência a relação entre a familiaridade de diferentes conhecimentos e seu possível desencadeamento no ensino, em uma engenharia didática. Utilizou esse entendimento para relacionar razões com equivalência, depois equivalência com semelhança e por último, semelhança com teorema de Tales. Não observamos esse tipo de desencadeamento em nosso estudo do currículo brasileiro, referente aos estudos com proporcionalidade, assim podemos inferir que esse foi um motivo das dificuldades que observamos em seu ensino.

O autor considerou que, para adquirir conhecimento, era necessário mostrar uma sucessão de descobertas e aventuras que levassem o aluno a conhecer, entender, aplicar, discutir e usar teorema de Tales em uma história inteligível para o estudante.

Para o pesquisador, existiu uma dimensão emocional na criação dessas histórias inteligíveis e este tipo de experiência poderia auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem. Acreditamos que a gamificação ajudaria na elaboração dessas histórias e na mobilização dessa dimensão emocional do ensino, que estaria ligada à motivação e engajamento citados em nossa revisão das pesquisas, que utilizaram gamificação para ensinar matemática.

Dessa forma, a gamificação poderia oferecer subsídios para a criação desse tipo de dinâmica, entretanto, como preconizado em nossos estudos referentes a gamificação, foi necessário escolher aportes teóricos que permitissem esse tipo de escolha, em uma engenharia didática e esse foi nosso foco na próxima seção.

3.4 Aporte Teórico

Necessitamos de auxílio para formular nosso instrumento de pesquisa e analisá-lo. Por isso, escolhemos teorias que, por um lado, ajudassem a formular e analisar engenharias didáticas e, por outro lado, permitissem modelizar sequências de ensino. Por esses motivos, optamos pela Teoria das Situações Didáticas e pela Dialética Ferramenta Objeto.

Enquanto a primeira é uma teoria que auxilia na elaboração e análise de sequências de ensino, a segunda é composta por construtos teóricos, criado a luz da primeira, para analisar fenômenos relacionados ao ensino e a aprendizagem.

3.4.1 Teoria das Situações Didáticas

Para Almouloud (2010, p. 42), o objetivo da Teoria das Situações Didáticas (TSD) é: “[...] estudar os fenômenos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem e propor um modelo teórico para a construção, a análise e a experimentação de situações didáticas.” Uma maneira de tentar apreender a TSD pode estar no entendimento de situação. Para Brousseau (2000, p.06, tradução nossa):

> Chamamos de ‘situação’ um modelo de interação de um sujeito com um meio que determina um conhecimento como o recurso disponível para o sujeito alcançar ou preservar nesse meio um estado favorável. Algumas dessas ‘situações’ exigem a aquisição ‘prévia’ de todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que oferecem a possibilidade de o sujeito construir para si um novo conhecimento em um processo ‘genético’.[27]

---

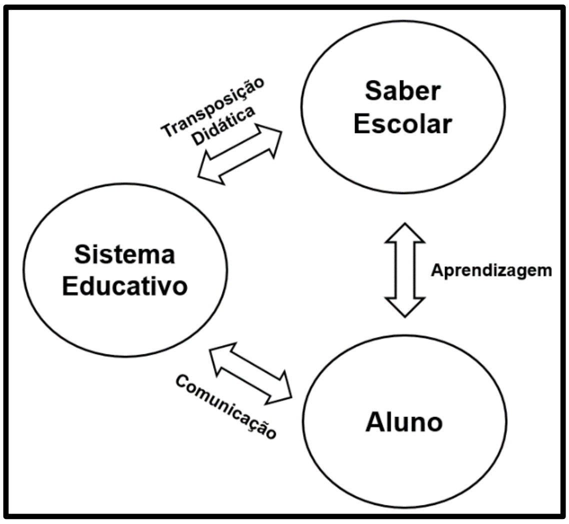
[27] Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”.

Então, essa concepção foi de que situações são modelos de interações com o meio e que o processo de aquisição de um novo saber se dava pela epistemologia genética, proposta por Piaget. O autor explicou que sua preocupação, a partir da década dos anos de 1970, era construir um modelo de situações utilizadas para introduzir ou ensinar noções matemáticas, assim como criticá-las e propor outras, mais apropriadas. Consideramos que construir uma engenharia didática com gamificação pode ser considerado como situação, no sentido proposto pelo autor.

Para o pesquisador, um fenômeno importante para o ensino são as relações do aluno com um sistema educativo que se preocupa com a transmissão do saber e pode ser definido por uma relação didática, com a comunicação de informações. Nessa concepção, o professor precisa organizar o que seria ensinado em uma série de mensagens que deviam ser entendidas pelos estudantes, em um processo chamado de "aculturação". A Figura 10 ilustrou esse modelo.

Aliada a esse arquétipo de relação didática, Brousseau (2000) considerou que a área da psicologia, com contribuições de Skinner, Piaget e Vygotsky, havia deixado clara a importância da adaptação dos sujeitos ao meio em que viviam e considerou o ensino como um misto de aculturação com adaptação independente.

Figura 10 – Relação didática

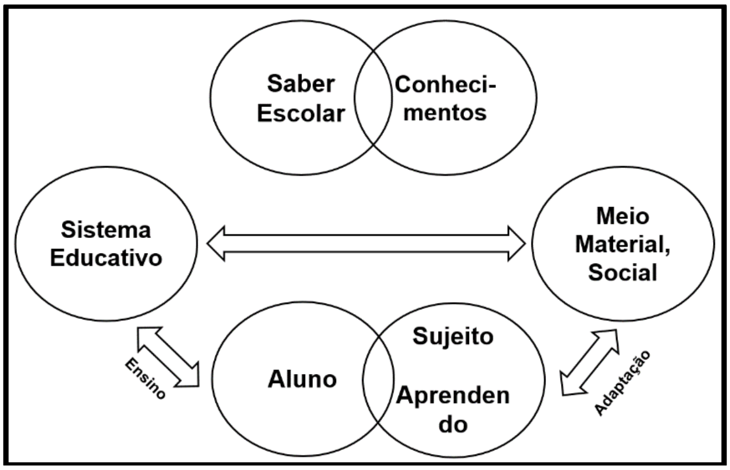


Fonte: Adaptado de Brousseau (2000, p.08)

A partir dessa ideia, o autor considerou como aprendizagem uma junção da relação didática com um esquema de adaptação ao meio, que pôde ser ilustrado pela Figura 11.

A partir do esquema de assimilação e acomodação, proposto por Piaget, Brousseau refletiu a respeito da necessidade de existirem problemas ou exercícios como dispositivos ou meios, que orientariam os estudantes para que sentissem necessidade de adquirirem conhecimento. Nesse ponto, o autor comparou o trabalho do estudante com o do jogador de xadrez e a situação de aprendizagem com o próprio jogo. A partir dessa comparação, o pesquisador questionou quais informações deveriam ser dadas ao estudante, pelo meio, para garantir que mobilizasse os conhecimentos que se desejava ensinar e não outros. Visto dessa forma, o meio foi considerado um sistema autônomo, antagonista do sujeito.

Figura 11 – Esquema de aprendizagem

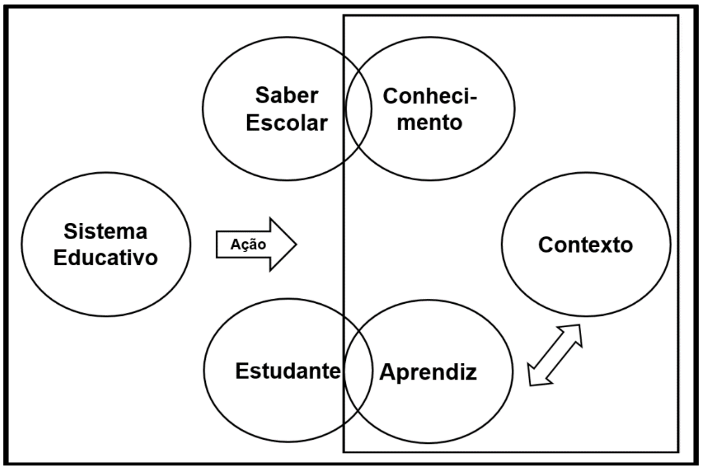


Fonte: Adaptado de Brousseau (2000, p. 08)

Foi valido lembrar que, para Brousseau (2002), um meio desprovido de intenções didáticas é considerado insuficiente para induzir o conhecimento cultural que é desejável que se adquira. Assim, cabe ao professor organizá-lo para que provocasse, nos estudantes, as adaptações que caracterizariam a aprendizagem. D'Amore (2007) desenvolveu essa ideia salientando que a "arte" do professor consiste em organizar uma relação entre o aluno e o meio que deixasse uma razoável incerteza, precisando ser reduzida pelos sujeitos e que fosse possível de ser resolvida. D'Amore interpretou o esquema de aprendizagem, presente na Figura 11, para explorar o "hexágono didático", criado originalmente por Brousseau e presente na Figura 12, tentando ilustrar a complexidade da evolução de uma situação didática e de como seriam as trocas de conhecimentos entre pessoas, organizações sociais, econômicas ou culturais.

Assim, pudemos perceber que o professor representa o sistema educativo e age em um contexto, que pode ser considerado o meio (um problema, atividade etc.). Nesse esquema, o estudante assume o papel de aprendiz e deve agir nesse meio. A partir destas ideias é importante refletir a respeito de outro tipo de situação, a adidática.

Figura 12 – Esquema da aprendizagem para D'Amore



Fonte: Adaptado de D'Amore (2007, p. 1186)

Para Brousseau (2002), a situação adidática pode ser caracterizada por problemas, que deviam ser aceitos pelos alunos, para que agissem, falassem, pensassem e evoluíssem por motivação própria, sem interferência do professor. Faziam referência a novos conhecimentos, que o professor desejava ensinar, mas podiam ser resolvidos e justificados pela lógica interna da situação.

Para o autor, a situação adidática acontecia em um movimento dialético, nele o estudante deve agir, formular e validar estratégias para resolver problemas propostos e recebe devolutivas do professor em uma outra dialética, chamada de institucionalização. As três primeiras dialéticas ocorrem em movimentos não lineares e podia existir sobreposição entre elas.

O pesquisador considerou que, para qualquer conhecimento ser ensinado, deve existir, ao menos, uma situação adidática que o caracterizasse e a nomeou como situação fundamental. Para poder ensinar, o professor precisa fazer escolhas como, por exemplo, comunicar informações, questões, métodos de ensino e outros. Para o pesquisador, essas escolhas se assemelham a um jogo formal com regras, que serve para regular o sistema de interação do aluno. Dessa forma, o pesquisador utiliza a ideia de jogo como metáfora para conceituar situação didática e nomeou essas escolhas, ou regras do jogo, como variáveis didáticas.

Seguindo essa analogia, Brousseau considerou a observância de regras e as estratégias de resolução da situação didática como um tipo de contrato didático. Ele pôde ser considerado como a justificativa que o professor tinha para apresentar a situação. Almouloud (2010) considera como contrato didático o que regula as relações entre professor e alunos, durante a situação didática, podendo ainda ser explicado como as atitudes esperadas entre discentes e docente.

Coube explicar ainda que, enquanto as variáveis didáticas são escolhidas pelo professor, para que a situação adidática pudesse introduzir o saber que se pretende ensinar (tempo de duração, quantidade de elementos nos grupos, uso ou não de materiais manipuláveis, etc.), o contrato didático é um conjunto de comportamentos esperados pelos sujeitos participantes da atividade (o professor pode esperar que os estudantes investigassem e pesquisassem como resolver as situações propostas, enquanto os estudantes podam esperar que o professor “ajudasse” na resolução, dando dicas, no sentido de tornar a situação inteligível pelos alunos, por exemplo). Assim, as variáveis didáticas precisam ser pensadas durante o planejamento e elaboração da situação didática, enquanto o contrato didático começava a ser executado e renegociado durante a realização da situação.

Brousseau considerou que a situação adidática pode ser concebida como um jogo formal e que considerá-la dessa forma pode favorecer sua compreensão. Para o autor, jogos como o de simulação podem facilitar a compreensão do real e por isso, comparou situações de ensino com jogos em vários momentos, em suas obras.

Para o autor, as situações propostas pelo professor podem adquirir um estatuto parecido com o de jogos em atividades que, inicialmente, foram formuladas para ensinar matemática. Dessa forma, podemos refletir que o movimento proposto pelo pesquisador seria de gamificar atividades de ensino, na medida em que propôs que os estudantes podem encarar problemas de um contexto, que é de ensino de matemática, como experiências lúdicas.

Podemos pensar que uma situação gamificada tem a função de auxiliar na adaptação do estudante ao meio. Assim, interpretamos a ludicidade como facilitadora para que o discente se sentisse responsável pelo próprio conhecimento. Essa ideia não levaria a uma alteração no esquema de aprendizagem, proposto anteriormente, na medida em que a adaptação do estudante ao meio seria auxiliada pela gamificação.

Existe a necessidade de pensar o papel da gamificação, pois temos um meio gamificado e podemos pensar no nível de abstração das experiências de gamificação como modificadores de variáveis didáticas, escolhas feitas pelos professores, levando em conta elementos de gamificação como uma contação de histórias, simulação ou fantasia que façam referência a jogos, por exemplo. Essas experiências podem fazer com que seja necessário adaptar variáveis didáticas como o tempo necessário para a resolução da atividade.

Para nós, a TSD auxiliou na elaboração de nossa engenharia didática e permitiu visualizar a possibilidade de que gamificação fosse articulada em situações didáticas, como modificadores do meio, a partir da ideia de que poderíamos pensar, por exemplo, em materiais que pudessem ajudar na imersão dos estudantes na história que estava sendo elaborada para gamificar a atividade. Essa possibilidade de articulação nos faz crer que a TSD era uma opção pertinente, nesta pesquisa.

Cabe explicitar que Brousseau considerou a metáfora de jogo quando teceu comentários acerca de como formular situações didáticas e comparou-as com jogos de regras. Influenciados em Brousseau (1995), vimos a criação de aventuras, desde que façam sentido para os estudantes, como uma oportunidade para testar potencialidades e limitações da gamificação, a partir do elemento: contação de histórias.

Apesar de possuirmos um referencial útil na elaboração de engenharias didáticas, ainda nos faltou uma construção teórica que desse conta de explicar as relações entre os saberes. Por isso, buscamos auxílio na Dialética Ferramenta Objeto.

3.4.2 Dialética Ferramenta Objeto

Almouloud (2010) considera a Dialética Ferramenta Objeto (DFO) como um construto para ajudar a analisar fenômenos, nos processos de ensino e de aprendizagem. Douady (1992) ponderou que foi possível introduzi-la a partir de referências didáticas, como a ideia de desequilíbrios e reequilíbrios, proposta por

Piaget, a TSD, proposta por Brousseau, e a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud.

A partir das dialéticas da ação, formulação e validação, propostas na TSD, foram formuladas novas dialéticas que visavam entender fenômenos presentes nas situações didáticas. A autora se inspirou no trabalho dos matemáticos profissionais, que mobilizam conhecimentos que dominavam para resolver novos problemas e realizar novas conjecturas. Para Douady (1992, p.134, tradução nossa): "uma ferramenta é quando focamos nosso interesse no uso que é feito de um conceito para resolver um problema. Uma ferramenta é utilizada por alguém, em um contexto problemático, em um dado momento".[28] Já objeto é um saber: "matematicamente definido, independentemente dos usos. [...] Também permite o reinvestimento em novos contextos, possivelmente distantes do contexto de origem".[29]

Podemos interpretar, então, que ferramenta é a aplicação de um conceito por alguém, enquanto objeto é um conceito definido matematicamente. Douady (1984, p.14, tradução nossa) refletiu a respeito das dificuldades do ensino tradicional e propôs uma outra organização para o ensino de matemática. Para a autora, nessa composição: [...] o professor leva em conta a construção do saber dos alunos pelos próprios alunos. Essa organização foi baseada cognitivamente em três pontos: dialética ferramenta/objeto; a dialética antigo/novo e o jogo dos quadros. [...].

Assim, cabe explicar como estes pontos se relacionavam, a DFO se organizava a partir do **conhecimento antigo** dos estudantes, que é o pontapé inicial para resolver um problema. Esses conhecimentos matemáticos, que o estudante dispunha, ganham o estatuto de conhecimentos antigos e são as ferramentas dos alunos, que devam se organizar para aprender um **novo conhecimento**, objetivado pelo professor e que, nessa situação, terá o estatuto de **objeto**. A estruturação e formulação da situação problema seguiria a organização sugerida pela TSD, então as dialéticas de ação, formulação, validação e de institucionalização serão presentes

[28] Ainsi, nous disons qu'un concept est **outil** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. *Un outil est engagé par quelqu'un, dans un contexte problématique, à un moment donné.*

[29] [...] L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de sus usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine.

e as dialéticas ferramenta/objeto, antigo/novo e o jogo de quadros se somariam a elas.

Nessa dinâmica, a partir da proposição de um problema e da mobilização de conhecimentos antigos pelos discentes começa uma nova etapa, chamada pela autora de **pesquisa**, nela os alunos agem e percebem que suas estratégias antigas não resolvem o novo problema. A pesquisadora considerou que, nesse momento, deve-se começar a falar em um novo conhecimento implícito, um novo objeto.

A terceira etapa é a **explicitação**, em que os estudantes explicitariam suas estratégias de resolução da atividade. A pesquisadora considerou que, neste momento, era facultado ao professor intervir, caso a resolução do problema não estivesse avançando, respeitando a liberdade de “manobra” dos alunos.

A próxima etapa é chamada de **institucionalização**, nela o professor estabelece o estatuto do saber a ser ensinado, definindo teoremas e demonstrações desse objeto. A seguir, aconteceria uma etapa chamada **familiarização**, que era a proposição de novos problemas, que mobilizariam explicitamente o objeto institucionalizado, dando um novo estatuto (de ferramenta).

Por último, uma de atividades mais complexas (**complexificação)**, em que seriam dados problemas considerados complexos e que requerem a mobilização dos conhecimentos/saberes aprendidos. Depois dessa etapa, o objeto muda de estatuto, sendo uma ferramenta, utilizada para resolver novos problemas.

Associando a DFO com nossa pesquisa, justificamos a necessidade de considerar os conhecimentos previstos para os anos anteriores do ensino fundamental, visto que, sob a ótica desta teoria, seriam tratados como mobilizáveis, uma vez que são previstos no currículo para serem trabalhados com os estudantes e recebam o estatuto de conhecimentos antigos. Além dessas dialéticas, Douady (1984) definiu outra noção, denominada **de jogo de quadros**. Para a autora:

> O jogo de quadros reflete a intenção de explorar o fato de que a maioria dos conceitos podem intervir em vários campos, vários quadros: físico, geométrico, numérico, gráfico ou outros. Um conceito se traduz em termos de objetos e relações que apelam ao significado do conceito no quadro. Os significados associados a eles podem eventualmente simbolizar outros conceitos no contexto daquele quadro. Este é o caso das representações gráficas de funções e suas representações no plano, desenvolvendo elementos materiais, algébricos ou outros, cujas propriedades geométricas, topológicas ou combinatórias podem ser estudadas. O resultado é uma

> correspondência entre significados do mesmo conceito em diferentes quadros e, por outro lado, entre significados de conceitos diferentes, representados no mesmo quadro. Mas, para os alunos no processo de aprendizagem, os conceitos funcionam de maneira parcial e diferente, dependendo dos quadros. Como resultado, as correspondências são incompletas.[30] (DOUADY, 1984, p. 18, tradução nossa)

Pensado dessa maneira a respeito do teorema de Tales, este pode ser representado no quadro da geometria, numérico e da álgebra. A mobilização desses diferentes quadros pode auxiliar a atribuir significado ao objeto ensinado, potencializando o ensino, acerca da ideia de proporcionalidade.

Assim, podemos fazer novamente uma analogia entre o trabalho do estudante e do matemático profissional, quando este enxergava dificuldades em uma resolução de um problema e busca respostas em outros campos da matemática, fazendo o que é chamado de resposta indireta. Dessa forma, podem ser evidenciadas relações entre as ferramentas, mobilizadas pelos estudantes, que talvez seriam difíceis de visualizar de outra maneira.

A mobilização de ferramentas relacionadas com razões, semelhança e homotetia, por exemplo, em situações problemas pode ajudar em um trabalho com o objetivo de trabalhar com o objeto teorema de Tales.

Douady (1984, p.19, tradução nossa) também tratou de quais as condições para que os problemas pudessem desencadear essas noções. Para a autora, elas só seriam possíveis caso fossem preenchidas 7 condições. Eram elas:

> 1 – O enunciado precisa fazer sentido para o aluno;
> 2 – O estudante deve ser capaz de responder à pergunta;
> 3 – O discente deve ser capaz de iniciar um procedimento, mas não deve fornecer uma resposta sem desenvolver um argumento que leve a perguntas que ele não saiba responder imediatamente;
> 4 – O problema é rico o suficiente para mobilizar uma rede de conceitos que o aluno possa administrar senão sozinho, em grupo;

[30] Le jeu de cadres traduit l'intention d'exploiter le fait que la plupart des concepts peuvent intervenir dans divers domaines, divers cadres physique, géométrique, numérique, graphique ou autres. Un concept se traduit dans chacun d'eux en termes d'objets et relations qu'on peut appeler les signifiés du concept dans le cadre. Les signifiants qui leur sont associés peuvent éventuellement symboliser d'autres concepts dans le cadre des signifiés. C'est le cas des représentations graphiques de fonctions et de représentations dans le plan, d'ensembles d'éléments matériels, algébriques, ou autres, dont on peut étudier les propriétés géométriques, topologiques ou combinatoires. Il en résulte des correspondances d'une part entre signifiés d'un même concept dans des cadres différents et d'autre part entre signifiés de concepts différents représentés dans le même cadre par les mêmes signifiants. Mais, pour les élèves en cours d'apprentissage, les concepts fonctionnent de manière partielle et différente selon les cadres. Par suite, les correspondances sont incomplètes.

> 5 – O problema deve mobilizar uma diversidade de questões ou estratégias que o aluno possa mobilizar, mas deve manter incerteza quanto às respostas;
> 6 – O problema deve poder ser expresso em, pelo menos, 2 quadros diferentes;
> 7 – Aprender o conhecimento objetivado pelo professor é a maneira de responder efetivamente ao problema, é a ferramenta adequada.[31]

Consideramos essas condições durante a elaboração de nossa engenharia didática, que foi o assunto tratado no próximo capítulo.

[31] Conditions sur les problèmes susceptibles d'enclencher uns D.O.O: Il reste à exprimer des conditions sur les problèmes pour que certains rapports de l'élève au problème soient assurés, que la dialectique outil/objet et le jeu des cadres soient possibles. Enonçons celles que nous avons retenues.
a) L'énoncé a du sens dans le champ de connaissances de l'élève.
b) L'élève doit pouvoir envisager ce que peut être une réponse au problème. Ceci est indépendant de sa capacité à concevoir une stratégie de réponse, ou d'une proposition de réponse.
c) Compte tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure. Mais la réponse n'est pas évidente. Cela veut dire qu'il ne peut pas fournir de réponse complète sans développer une argumentation le conduisant à des questions auxquelles il ne sait pas répondre immédiatement.
d) Le problème est riche. Cela veut dire que le réseau des concepts impliques est assez important, mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité, sinon tout seul, du moins en équipe ou même au sein de la collectivité classe.
e) Le problème est ouvert par la diversité des questions que l'élève peut poser ou par la diversité des stratégies qu'il peut mettre en œuvre et par l'incertitude qui en résulte pour l'élève.
Les conditions c), d), e), éliminent un découpage du problème en de trop petites questions.
f) Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents. Chacun ayant son langage et sa syntaxe et dont les signifiés qui les constituent font partiellement partie du champ des connaissances de l'élève.
g) La connaissance visée par l'apprentissage est le moyen scientifique de répondre efficacement au problème. Autrement dit, elle est un outil adapté.

4 A PESQUISA

Neste capítulo, caracterizamos nosso público-alvo, descrevemos como utilizamos alguns elementos de gamificação para a criação da sequência didática e confrontamos o que aconteceu com o que era esperado.

4.1 Sujeitos da Pesquisa e Descrição da Aplicação

Por conta da quarentena provocada pelo surto de COVID-19, que se iniciou no primeiro semestre de 2020, não pudemos ir a campo colher os dados necessários para o término da investigação, tendo como única opção a aplicação à distância da pesquisa.

Antes da aplicação do primeiro desafio, enviamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (**Anexo B**) e um convite para participar de nossa sequência didática.

Essas aplicações foram realizadas como atividade extracurricular facultativa, para duas turmas do nono ano do ensino fundamental de uma escola particular da cidade de São Paulo, das quais um aluno e duas alunas, com 14 anos cada, decidiram participar, foram nomeados como C, L e M para proteger seu sigilo e anonimato.

Os encontros foram realizados pelo aplicativo Google *Meet*, em um link criado pelo professor, em que convidou os estudantes e o pesquisador, ali se davam as interações com som e imagens. Assim, os discentes propunham respostas, cabendo um papel de mediação ao professor, sendo auxiliado pelo pesquisador. Foram feitas seis reuniões, cinco de 90 minutos cada e uma última com 20 minutos, depois das aulas regulares, duas vezes por semana, todas iniciadas as 11h30.

Na primeira reunião, em 10 de novembro de 2020, foram iniciados os trabalhos as 11h30 no *Meet*, por problemas de conexão dos alunos, esperamos até as 12h, o pesquisador se apresentou e foi feita a leitura da introdução da história e do primeiro desafio pelo professor.

Como os alunos se conectavam, saiam do ambiente e retornavam, não foi possível conversar com todos simultaneamente, mas a apresentação foi disponibilizada por e-mail para os estudantes. O professor terminou a leitura, perguntou se entenderam o desafio e pediu que tentassem responder.

Nessa reunião, esperamos pela conexão dos alunos por 30 minutos, utilizamos outros 15 minutos para leitura da introdução da história e do primeiro desafio. Depois utilizamos outros 45 minutos tirando dúvidas e fazendo releituras com os alunos que se reconectavam ao ambiente. Esse tempo foi necessário, pois muitas vezes os alunos perdiam conexão com o aplicativo durante a leitura ou explicação e era necessário aguardar sua reconexão.

No segundo encontro, em 12 de novembro de 2020, as 11h30 um aluno se conectou pontualmente, com o professor e o pesquisador. As outras duas atrasaram 30 minutos para entrarem no ambiente, utilizaram o encontro para discutir ideias referentes à semelhança de triângulos, presente em sua apostila, tentando responder ao primeiro desafio, realizando esboços de triângulos equiláteros e depois fizeram construções com régua e compasso.

No terceiro encontro, em 17 de novembro de 2020, a aluna M não conseguiu se conectar ao ambiente e a discussão se deu entre L e C. Responderam o primeiro desafio nos primeiros 19 minutos da reunião, o professor fez a leitura do segundo desafio e propôs que fosse solucionado. Resolveram o segundo e foi proposto o terceiro, nos 15 minutos finais do encontro, para que pudessem pensar na solução em suas casas.

No quarto encontro, em 19 de novembro de 2020, todos se conectaram pontualmente, resolveram o terceiro desafio nos 27 minutos iniciais, utilizaram 40 minutos para resolver o quarto desafio e foi proposto o quinto desafio nos 23 minutos finais da reunião.

No quinto encontro, em 24 de novembro de 2020, também se conectaram pontualmente e foi resolvido o quinto desafio nos primeiros 23 minutos, conversamos com os estudantes acerca de suas impressões quanto as ferramentas de resolução utilizadas por cerca de dez minutos, foi feita uma institucionalização do teorema de Tales usando um vídeo de sete minutos com uma demonstração e foram utilizados outros 20 minutos tirando dúvidas dos estudantes. Conversamos acerca das impressões referentes ao uso da gamificação em atividades para o ensino por outros 15 minutos e propusemos um desafio fora do contexto da gamificação, com objetivo de familiarizar os alunos com a institucionalização, nos 25 minutos finais da reunião.

No último encontro, em 26 de novembro de 2020, a aluna L não pôde participar por problemas pessoais, enquanto a aluna M não participou e não deu justificativa de sua ausência. Nos dispusemos a marcar um novo encontro para observar as respostas das alunas aos desafios, mas talvez por terem acabado as aulas remotas do ano de 2020 nessa semana, não obtivemos resposta das estudantes.

Então o aluno C resolveu o sexto desafio nos primeiros cinco minutos do sexto encontro e elaborou uma resposta ao sétimo desafio em dez minutos. Por conta disso, esse encontro foi mais curto que os demais. A seguir, descrevemos a elaboração, a aplicação e as análises.

4.2 Elaboração e Análises da Sequência Didática

Neste tópico descrevemos as escolhas feitas durante a elaboração da sequência, incluindo as análises *a priori* de cada desafio, os resultados esperados e a confrontação com o que de fato ocorreu.

4.2.1 Descrição das Escolhas de Gamificação Utilizadas

Elaboramos nossa estratégia embasados no esquema de níveis de abstração, ilustrado na Figura 1 no segundo capítulo dessa pesquisa e, portanto, a partir do quadro teórico e metodológico escolhidos para essa investigação.

Em seguida decidimos criar experiências que se referem a jogos e decidimos nos inspirar nas ideias de Sheldon (2012) que, para gamificar suas aulas, organizou seus grupos de alunos em guildas (equipes cooperativas e com objetivos em comum), as aulas em aventuras, os espaços da sala em mapas, as notas em experiência de personagens e o professor em “mestre do jogo” em uma disciplina semestral.

Por conta do tempo disponível, simplificamos essa dinâmica e criamos uma aventura, inspirados na construção de um *Role Playing Game* (RPG), que é um estilo de jogo que pode ser explicado por Jackson (1994, p. III):

> [...] O mestre inicia descrevendo o lugar onde estão os personagens, o seu nível de tecnologia, costumes, detalhes da política local e,

> então, leva a história até um ponto onde os personagens começam a atuar, a ter de enfrentar situações, resolver charadas ou lutar em guerras. O sucesso do jogo passa a depender de um esforço coletivo, uma espécie de teatro de ações e iniciativas. O objetivo de todos é sempre tornar o jogo instigante e divertido.

O papel de mestre foi assumido pelo professor, que teve a função de mediar os desafios propostos, enquanto os estudantes interpretaram o papel de personagens jogadores, que tinham de resolver problemas para continuar na aventura.

Empregamos elementos de gamificação do nível de abstração das experiências para criar uma narrativa que possibilitasse mobilizar os elementos: **contação de histórias**, **fantasia**, **colaboração** e **estética de jogos**. Assim, os estudantes receberam trechos de uma aventura (que se encontra, na íntegra, no **Apêndice A**), para serem lidos e que terminavam com a proposição de desafios, na forma de situações problemas, para serem resolvidos pelo grupo. A título de ilustração mostramos, na Figura 13, alguns personagens dessa aventura.

Figura 13 – O mago Alium roubando a gema e o grupo de aventureiros

Fonte: Ilustrações cedidas para esta pesquisa por Roberto Raposa

Introduzimos uma história fictícia para que os estudantes fizessem uma leitura coletiva e fossem iniciados em um mundo de fantasia, em que um reino devia sua abundância a uma pedra mágica. Devido a um desrespeito do rei, o poderoso mago Alium roubou a gema, para resgatá-la e garantir o retorno da prosperidade ao lugar, um grupo de aventureiros decidiu seguir o mago por portais mágicos e dimensões fantásticas.

Foram formulados cinco desafios que a cada resposta correta, faziam com que os aventureiros fossem transportados a novos lugares, para desafios mais complexos em que deveriam conversar com criaturas mágicas e passar por lugares extraordinários.

Lembramos que a história do jogo sofreu adaptações para que as situações problemas fizessem sentido na narrativa, ao mesmo tempo em que as situações também foram remodeladas. Dessa forma, o enunciado: “divida um segmento de reta em três partes congruentes com régua e compasso” se tornou: “um feitiço precisa ser recitado por quatro feiticeiros alinhados, mas com a mesma distância uns dos outros, os aventureiros reviraram suas mochilas e encontraram um cabo de vassoura, um pedaço de barbante e um pedaço de giz, como resolver esse enigma?”

Essa opção trouxe a adversidade de fazer com que os problemas se adaptassem ao contexto da história, em uma dinâmica que objetivou interação, para que fosse mais divertida e engajadora que atividades tradicionais para o ensino. Tornou mais complexa a formulação da sequência didática, visto que precisarmos respeitar as propriedades do conhecimento matemático tratado, ao mesmo tempo em que tínhamos que nos manter fiéis a um enredo. Os desafios, análises e aplicação foram apresentados no que segue.

4.2.2 Análises do Primeiro Desafio

Primeiro desafio

O feitiço precisa ser recitado por quatro feiticeiros alinhados, mas a mesma distância uns dos outros. Os aventureiros reviraram suas mochilas para verem o que trouxeram e encontraram um cabo de vassoura, um pedaço de barbante e um pedaço de giz. Como resolver esse enigma?

Análise *a priori*

O objetivo é criar uma atividade em que seja necessária a divisão de um segmento de reta em três partes congruentes, para que os estudantes não possam resolver aplicando a ideia de dividir um segmento a partir de seu ponto médio. Em nosso estudo do objeto matemático, essa divisão foi considerada uma das razões de ser para o teorema de Tales já, em nosso estudo do currículo, descobrimos que semelhança aparecia antes do teorema, de modo que consideramos a possibilidade de que semelhança de polígonos possa ser uma ferramenta a ser mobilizada pelos estudantes nesse desafio.

Uma primeira variável didática foi a escolha do elemento de gamificação: contação de histórias, que fazia referência aquelas presentes em jogos de RPG e seria construída pelo professor da turma, culminando com a proposição de um desafio. Acreditávamos que essa escolha traria engajamento e diversão, pois trabalharia com o nível de abstração das experiências.

Também pensamos em utilizar o elemento estética de jogos, com materiais para ajudar os alunos na imersão na história, que está relacionada com esse elemento de gamificação, escolhemos a variável didática dos materiais, um dos valores dessa variável foi a escolha de cabos de vassoura, que têm um padrão de 1,2 metro, por ser um utensílio de fácil obtenção. Outro valor dessa variável foi que decidimos dar aos estudantes pedaços de barbante de aproximadamente 30 centímetros, com o intuito de evitar que tivessem um pedaço de barbante com a terça parte da medida do cabo de vassoura. Esses materiais fariam parte da história contada pelo professor e dessa forma se relacionariam com a gamificação da atividade, no nível de abstração das mecânicas. Uma possibilidade era de que esboçassem um segmento no chão, com o cabo de vassoura e o giz, depois utilizassem o barbante para fazer subdivisões neste segmento, o que não responderia corretamente o desafio, porque o cabo de vassoura mediria 1,2 m e o pedaço de linha 30 cm.

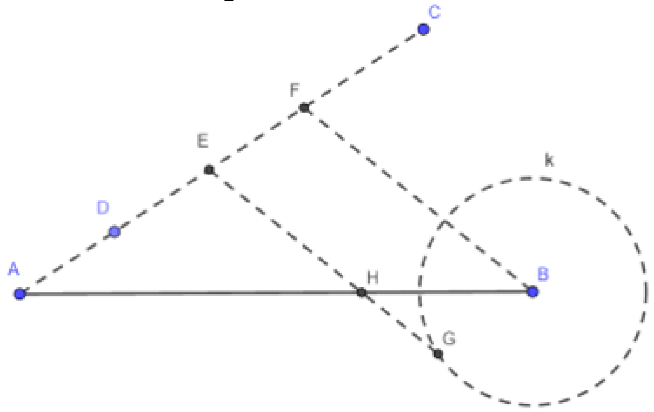
Na adaptação para aplicação a distância, decidimos não modificar os enunciados dos desafios, mas resolvemos deixar opcional aos estudantes a utilização de cabo de vassoura e linha, dessa forma poderiam resolver com régua e compasso, ou com aplicativos de geometria dinâmica.

Possíveis soluções

Uma possibilidade de solução era que os discentes utilizassem o barbante para esboçar no chão, com o giz, um segmento de reta de comprimento igual ao do barbante e depois repetissem esse procedimento três vezes, o mesmo procedimento poderia ser feito com o cabo de vassoura, tentando criar três segmentos colineares, para responder ao desafio, mas que traria a dificuldade de alinhamento dos três segmentos.

Uma nova possibilidade é que, conforme o enunciado do desafio, fosse criado o segmento AB e depois o segmento auxiliar AC utilizando o comprimento do cabo de vassoura e o giz, depois seria usado o comprimento do barbante para criar os pontos D, E e F equidistantes e a circunferência k. Depois seria utilizado o cabo de vassoura para transferir a medida FB, criando EG, dessa forma teríamos o paralelogramo FBGE e o ponto H seria a primeira divisão no segmento AB, como na Figura 14.

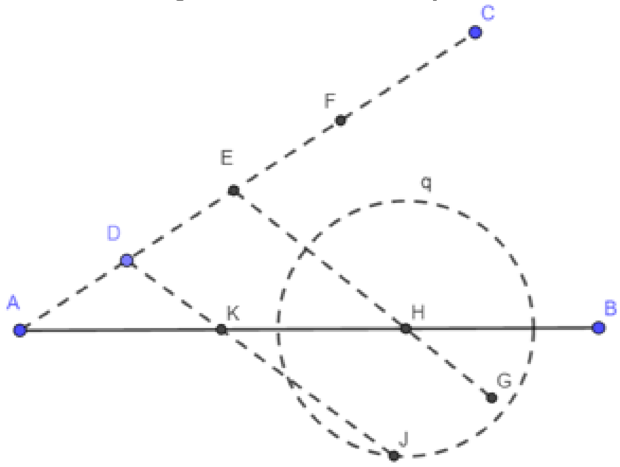
Figura 14 – Divisão do Segmento AB Utilizando Um Paralelogramo



Fonte: Produção do autor

Depois disso, utilizaríamos o mesmo artifício, criando a circunferência q e utilizando o comprimento do barbante e o cabo de vassoura para transferir o segmento EG, criando o segmento DJ. Assim, seria criado o paralelogramo DEGJ e obteríamos o ponto K, para criar às três divisões congruentes no segmento AB, como ilustrado pela Figura 15.

Figura 15 – Divisão do Segmento AB em Três partes com Paralelogramos



Fonte: Produção do autor

Construímos essa divisão com cabo de vassoura, compasso e giz seguindo os passos descritos nas figuras 14 e 15, essa construção pode ser vista na Figura 16.

Figura 16 – Esboço da divisão do segmento em três partes congruentes com cabo de vassoura, barbante e giz

Fonte: Produção do autor

Considerávamos que a dialética antigo/novo seria mobilizada nesse momento e uma vez que os estudantes conseguissem construir uma maneira de traçar paralelas, talvez essa pudesse se tornar uma nova ferramenta. Nesse caso, os conhecimentos antigos seriam os referentes a pontos, segmentos, diagonais, paralelismo e semelhança de polígonos, já os novos referiam-se a divisão de segmentos em partes congruentes.

Análise *a posteriori*

O **primeiro encontro** foi marcado por problemas de conexão à internet, em que os estudantes perdiam conexão e retornavam. O aplicativo *Meet* foi escolhido pelo professor por estar sendo utilizado pela escola nas aulas remotas, então tanto ele como os estudantes estavam familiarizados com seu funcionamento.

Nessa aplicação da sequência didática foi feita a narração da introdução de nossa história, utilizando *slides* com o Power Point. O professor assumiu o papel de narrador, mudando a voz para as falas de cada personagem e fazendo com que os estudantes imergissem na história, até o momento em que era pedido que respondessem os desafios.

Depois de lida a história, foi proposto o primeiro desafio, o professor perguntou se todos entenderam o que havia sido solicitado, ao que responderam afirmativamente. Nomeamos os participantes como C, M e L, o aluno C foi o primeiro a se pronunciar e relacionou o barbante com o compasso e o cabo de vassoura com a régua:

> Dá pra fazer tipo um compasso com a vassoura, com o barbante que é do tamanho, não importa e o giz. Tipo, põe, gira, toma um espaço, aí põe o giz no ponto que parou, estica o barbante, põe a vassoura e gira como se fosse um compasso mesmo, quatro vezes, três vezes na verdade e ficam quatro pontos. (Transcrição da fala do aluno C)

O aluno explicou, mas não esboçou nenhuma figura, essa explicação deixou claro que estava relacionando o cabo de vassoura com a régua e o barbante com o compasso. Tentava responder ao desafio de uma forma em que o barbante tivesse a terça parte do cabo de vassoura.

O professor replicou com a pergunta: “E se o barbante não dividisse o cabo de vassoura exatamente em três partes?” Enquanto o aluno C se comprometeu a pensar na resposta, repetiu a leitura para as alunas L e M, que perderam a conexão durante a leitura da introdução e do desafio. O aluno C tentou outra resolução:

> Outra coisa que a gente podia fazer era tipo, colocar o cabo de vassoura no chão, riscar as duas pontas, aí a partir de uma dessas pontas, estica de novo o cabo de vassoura e depois faz de novo usando o cabo da vassoura. Ele já é reto, aí alinha e vai ter sempre o mesmo tamanho.”

Vimos estar tentando utilizar o comprimento do cabo de vassoura para responder ao desafio, o professor respondeu: “Será que dessa forma vão ficar alinhados?”. Ficou combinado que o professor enviaria o arquivo com a introdução e o primeiro desafio aos alunos, como quase todo o tempo da reunião foi utilizado para que se inteirassem da história e do desafio, foi pedido que trouxessem respostas no próximo encontro.

Quanto às respostas propostas na primeira aplicação, foram as previstas como possíveis soluções em nossa análise do primeiro desafio, que utilizariam o comprimento do barbante e do cabo de vassoura, tendo dificuldades para alinhá-los.

No **segundo encontro** o professor da turma perguntou quais resoluções poderiam propor ao primeiro desafio, o aluno C disse: “podia fazer mais círculos, tipo, 12 círculos ao invés de três, pra ter uma distância maior.”

Nos pareceu claro que ainda procurava uma solução em que a medida do barbante coubesse exatamente no cabo de vassoura, como dissemos que utilizando o barbante não seria possível dividir o cabo de vassoura em três partes, tentou dividir por 12. O pesquisador disse que não seria possível dividir o cabo de vassoura numa quantidade exata ou múltipla de três com o barbante.

Como as outras duas alunas não tinham se conectado ao aplicativo, decidiu pesquisar em suas apostilas de matemática uma resolução ao desafio, disse ter as apostilas em casa e que pesquisaria uma nova resposta.

Depois que todos se conectaram e estavam tentando resolver o desafio, decidiram pesquisar em suas apostilas, pois todos dispunham desse material. Discutiram e resolveram utilizar o tópico referente a semelhança de triângulos reforçando a ideia, vista em nosso estudo do currículo, de que semelhança leva ao teorema de Tales. A transcrição a seguir mostrou como estavam tentando mobilizar semelhança:

> L: Se colocar todos em um lado eles ficam alinhados?
> Professor: Sim, mas como ficar a mesma distância?
> M: Então precisa ser um triângulo equilátero.
> Pesquisador: O que é um triângulo equilátero?
> M: O que tem todos os lados iguais.
> Pesquisador: Como você usaria o triângulo equilátero para ajudar a resolver o problema?
> C: Deixa eu desenhar aqui. Tem um jeito, eu lembro que teve uma aula ano passado do triângulo, como fazer ele perfeito, eu não lembro.
> M: Tem um negócio, lado, ângulo, lado.
> C: É.
> M: Eu pensei no triângulo equilátero porque ele tem os três ângulos iguais, os três lados iguais, então a distância ia ser a mesma.
> (Transcrição da fala dos alunos)

Ouvimos os alunos conversando acerca de semelhança de triângulos e um deles realizou esboços (Figura 17) no aplicativo Paint, em que pudemos ver a tentativa de explorar triângulos equiláteros que, caso fossem congruentes, poderiam ser utilizados para criar um feixe de retas paralelas cortadas por transversais.

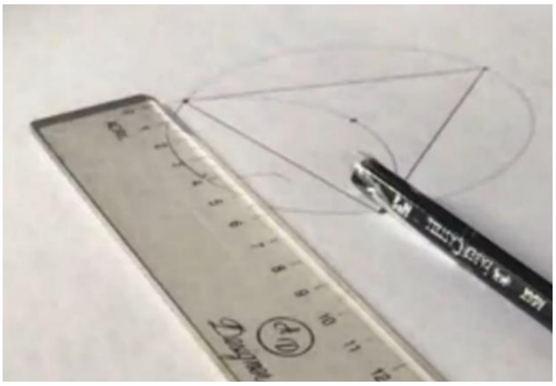
Figura 17 – Esboços do aluno C

Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Criou um primeiro esboço, com dois triângulos e metade de um terceiro, quando perguntado como construiria os triângulos equiláteros, criou um segundo esboço em azul, em que mostrou um triângulo inscrito. O professor explicou que os estudantes conheciam o aplicativo Geogebra e já utilizaram em aula, por isso pedimos que realizassem construções com o Geogebra, ou com régua e compasso. Nesses primeiros esboços, nos pareceu que os estudantes estavam mobilizando o circuncentro, por isso perguntamos onde viram esse tipo de construção, responderam ter visto na internet, apesar de estarem pesquisando nas apostilas.

O aluno C realizou a construção, presente na Figura 18, com régua e compasso. Como o tempo disponível para esse encontro estava acabando, ficou combinado que construiriam uma resposta e validariam entre si, antes da próxima reunião, por via remota. Assim tentariam trazer pelo menos uma solução para o próximo encontro.

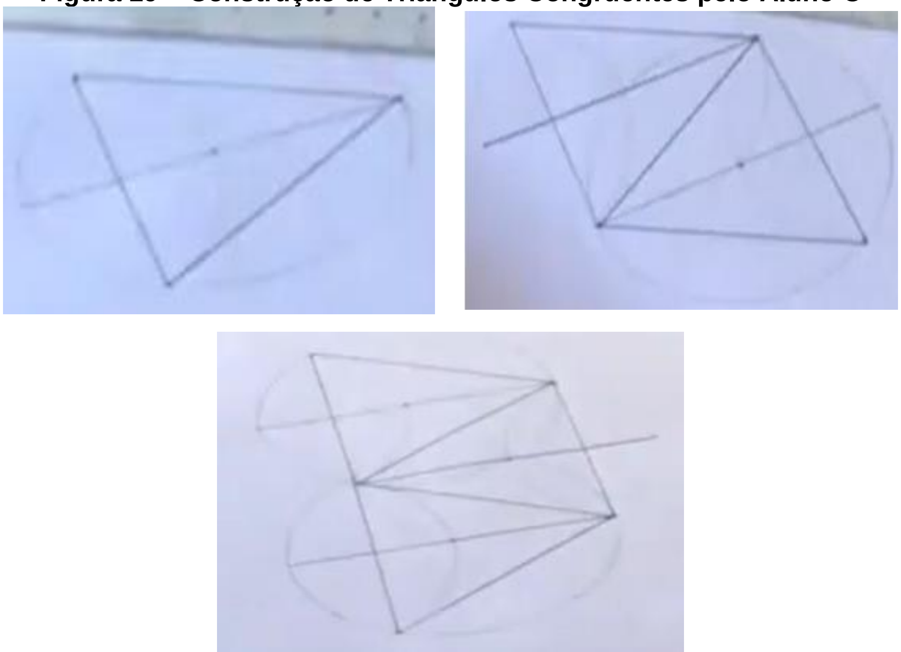
Figura 18 – Construção de um triângulo equilátero realizada pelo aluno C



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

No **terceiro encontro**, o aluno C mostrou uma filmagem de si mesmo, elaborando a construção do primeiro desafio (Figura 19). Construiu uma circunferência, depois um diâmetro, com a ponta seca do compasso em um ponto de interseção entre o diâmetro e a circunferência, abria-o até o centro da circunferência, traçava um semicírculo e usava os dois pontos em que o semicírculo se encontrava com a circunferência para criar um triângulo equilátero, o terceiro ponto do triângulo era a outra interseção entre a circunferência e o diâmetro.

Figura 19 – Construção de Triângulos Congruentes pelo Aluno C



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Acreditamos que os estudantes estavam construindo um método para divisão do segmento em partes congruentes, partindo de semelhança de triângulos para criar retas paralelas, visto que fizeram um triângulo equilátero e construíram outros, de forma que as alturas dos triângulos serviriam como paralelas e suas bases como transversais, respondendo assim o desafio.

Previmos, em nossa análise, que poderiam utilizar a ferramenta semelhança para responder ao desafio, apesar de não termos explorado o caso de semelhança de triângulos, essa foi a estratégia utilizada por esses estudantes, resultado que reforçou a ideia de que, em nosso currículo, semelhança leva ao teorema de Tales e o ponto de vista explorado no ensino fundamental, para esse conhecimento matemático, é o da dilatação, previsto em Brousseau (1995).

Consideramos que os conhecimentos antigos mobilizados (ferramentas) nesse desafio se referiram a circunferências, triângulos, semelhança de triângulos, altura de triângulos, congruência e paralelismo. O conhecimento novo (objeto) foi relacionado a um método para dividir um segmento em partes congruentes.

Comparando a Figura 19 com a 17, vimos que pretendiam utilizar metade do lado do triângulo como unidade, quando perguntado confirmou que apesar de ter dividido o segmento em quatro partes, pretendia utilizar as primeiras três em sua resposta.

Acreditamos que os estudantes formularam um procedimento para criar retas paralelas cortadas por transversais, baseados na construção de triângulos equiláteros. Apesar de termos pensado em uma possível solução, mobilizando paralelogramos e os estudantes terem construído triângulos, consideramos que mobilizaram a ferramenta semelhança, mas com outro polígono. Apesar disso, criaram um método para dividir um segmento em três partes congruentes, após responderem ao primeiro desafio, introduzimos um segundo.

4.2.3 Análises do Segundo Desafio

Segundo desafio

- Nesse caso, precisam invocar um novo portal! Para fazer isso primeiro devem pegar pedras no chão e desenhar um triângulo. Sabiam que as pedras desse lugar têm grande poder?

Esperou que os aventureiros fizessem como pedido, depois continuou dizendo:

- Essa é a primeira parte do ritual. Agora devem pegar outras pedras e montar outros dois triângulos. O segundo deve ter dois terços e o terceiro precisa ter três quartos do perímetro do primeiro triângulo. Como resolver esse enigma?

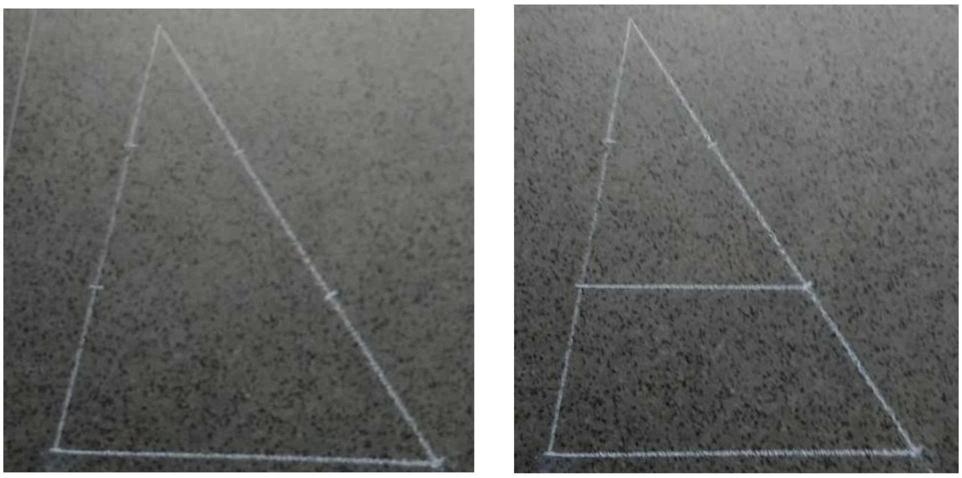
Análise *a priori*

Nosso objetivo foi mobilizar divisão de segmentos em uma situação com polígonos, formando um feixe de paralelas cortado por transversais. Como, no desafio anterior, exploramos a divisão do segmento em três partes congruentes, decidimos solicitar uma divisão por dois terços, para que os estudantes pudessem relacionar o que fizeram anteriormente com essa nova situação problema, também solicitamos uma divisão por três quartos. Após o primeiro desafio, considerávamos que os estudantes possuiriam o conhecimento antigo referente a um algoritmo para criar feixes de paralelas cortadas por transversais e conseguirem dividir segmentos em partes proporcionais.

Possíveis soluções

Uma possibilidade é de criar o primeiro triângulo já se preocupando com as divisões em dois de seus lados, para depois terminarem de construí-lo. Dessa forma, facilitaria a primeira parte da resolução do desafio, como na Figura 20. Poderiam marcar com giz o lugar a ser ocupado pelas pedras.

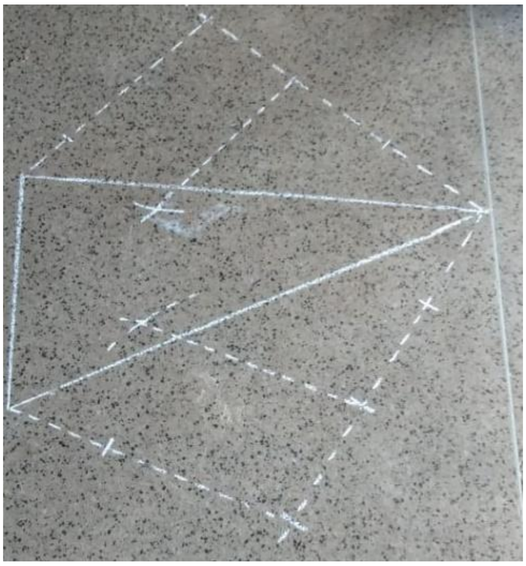
Figura 20 – Esboço de um triângulo qualquer com lados divididos em 3 partes congruentes



Fonte: Produção do autor

Expectávamos que outra possibilidade seria a criação de um triângulo qualquer, mobilizando o conhecimento referente à divisão do segmento em três partes, relacionado com o primeiro desafio, para criar o segundo triângulo, como na figura 21.

Figura 21 – Esboço da divisão dos lados de um triângulo qualquer em 3 partes congruentes



Fonte: Produção do autor

Concebemos que poderiam escolher construir triângulos sobrepostos. Essa configuração permitiria visualizar um feixe de paralelas cortadas por transversais, baseada nos vértices dos triângulos e poderia ser que percebessem a relação entre a congruência dos ângulos e a proporcionalidade das medidas dos lados dos triângulos, como na Figura 22.

Figura 22 – Esboço esperado com triângulos sobrepostos

Fonte: Produção do autor

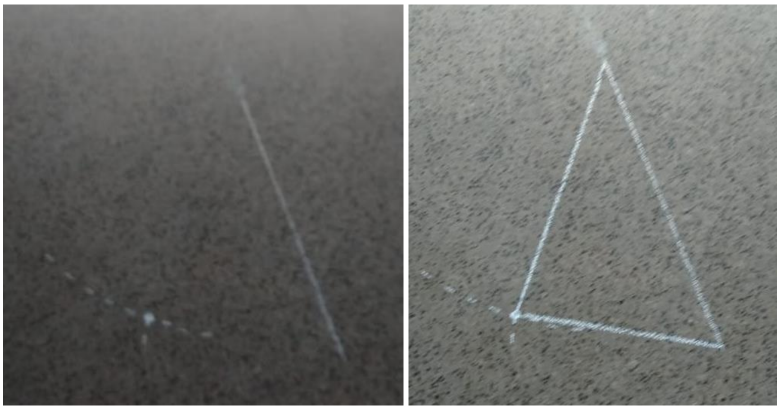
Esperávamos que os estudantes mobilizassem a ferramenta semelhança de triângulos, pois caso dividissem dois de seus lados estariam formando um segundo triângulo, semelhante ao primeiro, pelo caso: lado, ângulo, lado, com a razão de proporcionalidade $\frac{2}{3}$. Acreditávamos que aconteceriam discussões referentes à relação entre lados, perímetros e áreas e que pudesse acontecer mediação do professor para que fomentasse discussões referentes à ideia de que se dois triângulos fossem proporcionais, seus lados, perímetros e áreas variariam proporcionalmente.

As pedras foram pensadas para serem elementos de gamificação que conseguiriam ajudar em uma possível imersão na história, mas poderiam ser substituídas por pedaços de giz ou outros, dependendo da conveniência.

Em nosso estudo do currículo, verificamos que semelhança e teorema de Tales são conhecimentos com grande articulação. Considerávamos que a construção dos três triângulos sobrepostos poderia ajudar a visualizar uma possibilidade desta conexão em que, baseados em semelhança, poderiam chegar a uma solução que seria justificada pelo teorema.

Outra possibilidade era dividir os lados de um primeiro triângulo e transportar essas medidas, com o barbante, para construir outro~~,~~ na região poligonal externa ao primeiro, como na Figura 23. Para isso, as medidas dos lados do novo triângulo precisariam ser transportadas com o barbante ou o cabo de vassoura. Justificamos essa construção por ser uma estratégia presente em livros didáticos, por isso era possível que acontecesse em nossa atividade, visto que poderiam utilizá-los como fonte para pesquisas.

Figura 23 – Criação de novo Triângulo baseada no transporte de medidas



Fonte: Produção do autor

Apesar disso, acreditávamos que, pela possível falta de experiência dos educandos com esboços e construções geométricas, era improvável que escolhessem transportar as medidas dos lados de um triângulo para criar outros, assim como transferir seus ângulos.

Outra discussão poderia ser de que o segundo triângulo teria uma razão de proporcionalidade igual a dois terços do primeiro, assim como o terceiro teria uma razão de proporcionalidade que equivaleria a três quartos do primeiro.

Essa reflexão poderia levar a ideias como, por exemplo, de que essas eram atividades de proporcionalidade direta e de que, se os lados do triângulo medissem “a”, multiplicando-os pelo fator de proporcionalidade dois terços, descobriríamos os lados do segundo triângulo ($\frac{2}{3}a$). Da mesma forma, se multiplicássemos as medidas dos lados do primeiro triângulo pelo fator de proporcionalidade três quartos, descobriríamos as medidas dos lados do terceiro ($\frac{3}{4}a$). Acreditávamos que essas relações seriam reforçadas no desafio proposto.

Análise *a posteriori*

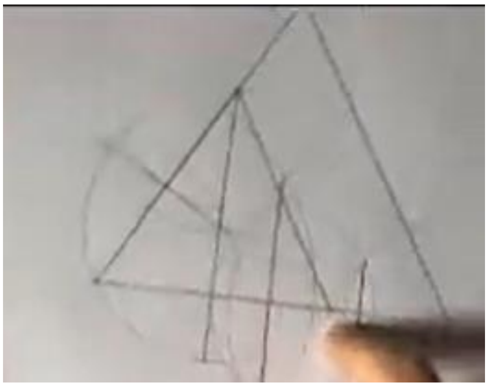
No **terceiro encontro** foi lido o segundo desafio, como a aluna M não conseguiu conexão nesse dia, as discussões se deram entre L e C. Enquanto L disse ser necessário encontrar as medidas para calcular o perímetro, C considerou que isso não era necessário.

Perguntou se ainda dispunha do cabo de vassoura, barbante e giz para continuar construindo triângulos, pois relacionava esses materiais com a régua e o compasso. Quando recebeu uma resposta afirmativa, pegou a régua e o compasso para realizar construções de triângulos, como no desafio anterior.

Os estudantes pareceram ter dificuldade de relacionar o que fizeram anteriormente com o desafio proposto. Apesar do pesquisador perguntar se existia relação entre os métodos de resolução do desafio um e a proposta do desafio dois, isso não pareceu estar claro para os discentes.

O aluno C mostrou, utilizando a câmera, o que estava construindo, como ilustrado pela Figura 24. Vimos que criou um primeiro triângulo, encontrando o ponto médio em dois de seus lados e prolongado esse segmento com o compasso com uma abertura que ia do vértice até o ponto médio, para criar um triângulo semelhante, dessa forma criou dois triângulos com a razão de 2:3.

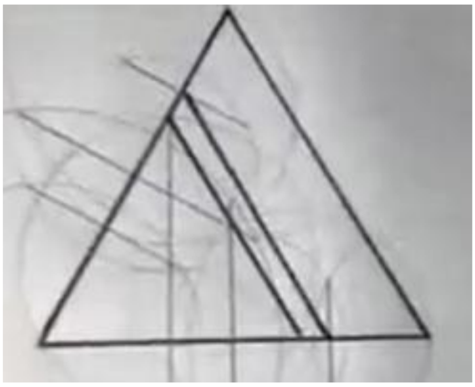
Figura 24 – Triângulos Semelhantes feitos pelo Aluno C



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Também marcou o ponto em que dividiu o lado do segundo triângulo em três quartos e indicou essa marcação com o dedo. O aluno mostrou na câmera sua construção, em que baseado nos dois primeiros triângulos construiu um terceiro, encontrando o ponto médio do maior triângulo da Figura 24 e depois encontrando o ponto médio novamente, como pudemos ver na Figura 25, como ele mesmo explicou: “[...] com isso eu tinha o triângulo maior e o com dois terços. Faltava o de três quartos, então eu achei ponto médio e o ponto médio do ponto médio. Que são três quartos.”

Figura 25 – Triângulos Semelhantes feitos pelo Aluno C



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Com essa resposta, discutimos serem triângulos semelhantes e os estudantes identificaram o caso de semelhança (referente a congruência dos ângulos). Identificaram que poderiam ter construído outras respostas, caso utilizassem outros casos de semelhança de triângulos e foi discutida a relação entre as medidas dos lados, perímetros e áreas desses triângulos.

Então, depois dessa mediação e discussão, acreditamos que os estudantes criaram um método para construir paralelas e entendiam que existia semelhança. Nosso objetivo era mobilizar o conhecimento de divisão de segmentos em uma situação com polígonos, formando um feixe de paralelas cortado por transversais e consideramos que os estudantes estavam percebendo essas relações.

Nesse caso, acreditamos que utilizaram intuitivamente a recíproca do teorema de Tales, quando fundamentados na proporcionalidade entre os lados dos triângulos, criaram paralelas para transportar essa relação utilizando a ferramenta semelhança para responder ao desafio.

Como conhecimentos antigos, mobilizaram triângulos sobrepostos, semelhança de triângulos e paralelismo, como previmos. Acreditávamos que perceberam a relação entre a congruência dos ângulos, a proporcionalidade das medidas dos lados dos triângulos e de seus perímetros.

Consideramos que os estudantes responderam o desafio com base na ideia de explorar as ampliações e divisões em um lado do triângulo para criar suas correspondentes em outros lados. Entretanto, utilizaram ponto médio para a resolução de parte da atividade e não seu método para obtenção de paralelas cortadas por transversais e por esse motivo, consideramos que deveríamos ter solicitado apenas divisões com denominador ímpar, para evitar esse tipo de resolução. O terceiro desafio foi proposto como seguiu.

4.2.4 Análises do Terceiro Desafio

Terceiro desafio

> - Devem me dizer como fazer para alinhar três de vocês antes de recitar a palavra mágica.
> Após uma pequena pausa, continuou dizendo:
> - Mas devem fazer de um jeito em que as distâncias quadrupliquem. Caso consigam, utilizarei meu poder para conjurar um portal e poderão seguir em frente. Darei um presente, para facilitar esse desafio.
> Dizendo isso, seus olhos brilharam e magicamente surgiu um estojo com um compasso, uma régua e um esquadro. Como superar esse desafio?

Análise *a priori*

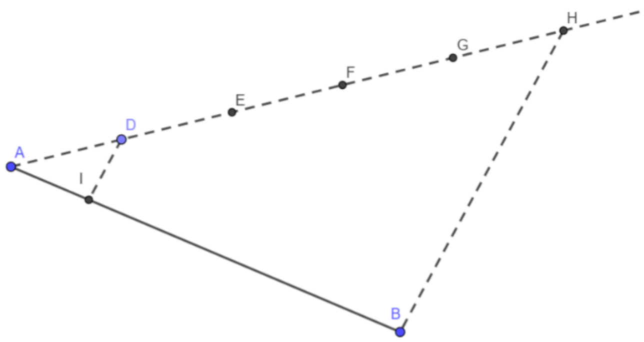
Nosso objetivo era utilizar a proporcionalidade em um feixe de paralelas cortado por transversais e o algoritmo para divisão de um segmento em partes proporcionais. Decidimos que, depois desse desafio, abandonaríamos a menção ao cabo de vassoura, do barbante e do giz por considerarmos que, uma vez explorados os primeiros desafios, os discentes já estariam imersos na história e seria feita a escolha de mencionar explicitamente régua, compasso e esquadro.

Solicitamos uma divisão de um segmento em duas partes com a razão 1:4 para testar a possibilidade de generalização que os alunos atribuiriam aos métodos de divisão de segmentos que desenvolveram, dessa forma, considerávamos que o ponto de partida seria conhecido pelos estudantes.

Possíveis soluções

Uma solução esperada era a criação de um segmento e de outro auxiliar para dividi-lo em cinco partes congruentes, garantindo a construção de paralelas e a divisão respeitando a razão 1:4, como ilustrado pela Figura 26 em que os pontos A, D e H representavam os três personagens, ou seja, a distância entre AD foi quadruplicada em DH.

Figura 26 – Divisão do segmento em duas partes com razão 1:4



Fonte: Produção do autor

Uma resposta possível, além da enunciada acima, era de que criassem um segmento e o dividissem em quatro partes. A seguir, esperávamos que os discentes prolongassem esse segmento, criando a quinta divisão.

Nessa situação problema existia a preocupação de observar qual a relação dos estudantes com as unidades de medidas presentes na régua e no esquadro. Apesar de conhecerem um método geral, o fato de existirem esses instrumentos de medição poderia alterar as estratégias dos estudantes, que poderiam criar segmentos com medidas que evitassem a mobilização dos conhecimentos antigos, desenvolvidos nos desafios anteriores, ao mesmo tempo em que garantiam respostas com números naturais.

Consideramos que possíveis erros poderiam estar relacionados ao não entendimento do enunciado ou ainda a possíveis dificuldades perceptivas na figura. Como a divisão do segmento em partes congruentes deveria ser mobilizada em todas as situações até aqui, acreditávamos que a utilização de um algoritmo desenvolvido pelos estudantes seria a estratégia dominante, a ser utilizada pelos discentes. Assim, esperávamos que percebessem que deveriam esboçar um segmento para que pudesse ser dividido em duas partes em que uma delas tivesse a quarta parte da outra.

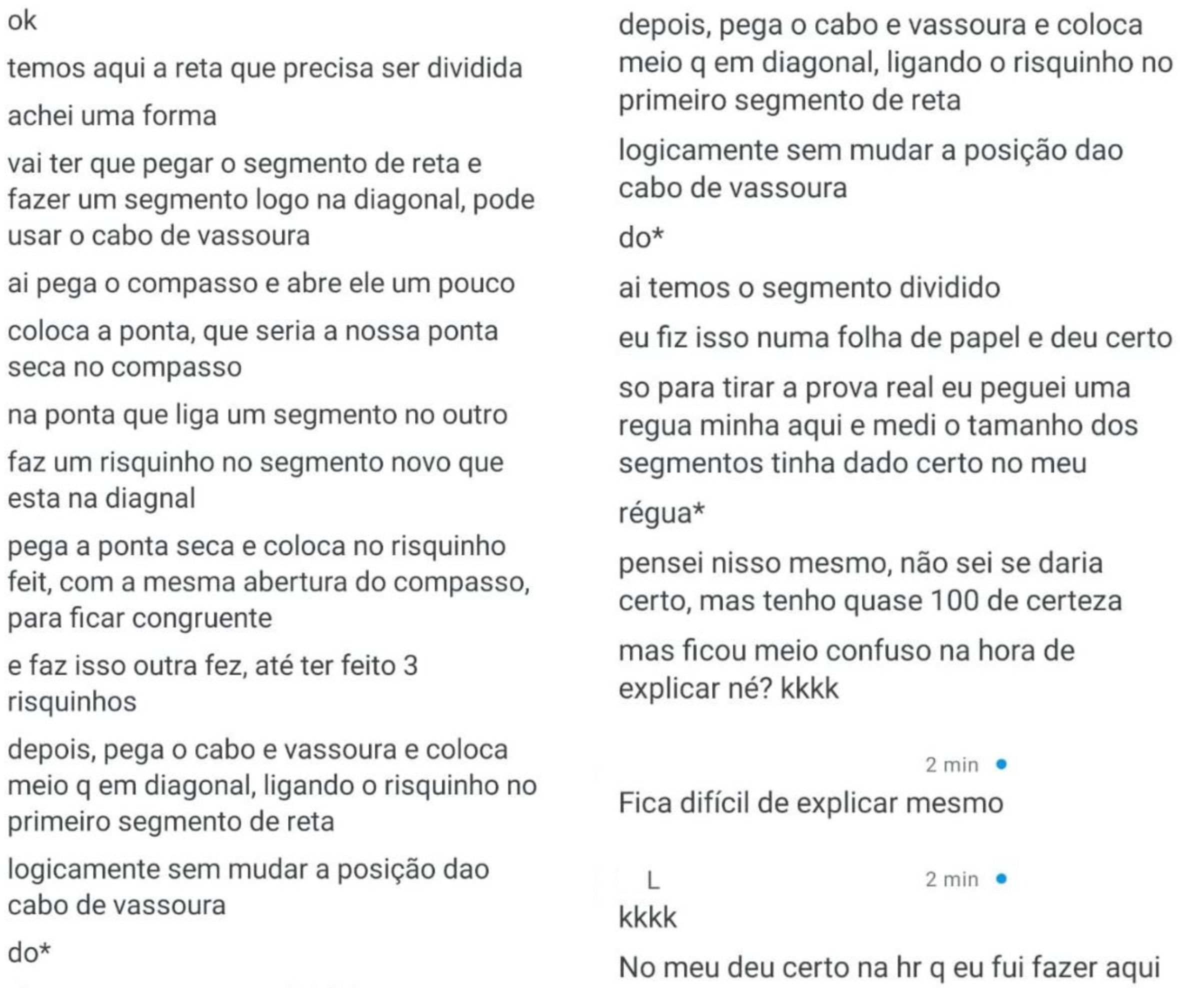
Análise *a posteriori*

A leitura do terceiro desafio se deu no **terceiro encontro**. A aluna L perguntou se poderia utilizar o teorema de Tales, quando perguntada onde viu salientou ter encontrado na internet. Pedimos que enunciasse o teorema, ao que respondeu:

> O teorema de Tales afirma que um feixe de retas paralelas determina em duas transversais quaisquer segmentos proporcionais, desse modo, se temos duas retas paralelas, cortadas por duas transversais, os segmentos formados por essa intersecção são proporcionais. (Transcrição da fala da aluna L)

Pedimos para mostrar como usaria o teorema e como o tempo de encontro estava acabando, pedimos que trouxessem novas respostas na próxima reunião. Entre o terceiro e o quarto encontros, o professor da turma enviou ao pesquisador a captura de tela de uma discussão, com uma resposta da aluna L, ilustrada pela Figura 27.

Figura 27 – Resposta da Aluna L



ok

temos aqui a reta que precisa ser dividida

achei uma forma

vai ter que pegar o segmento de reta e fazer um segmento logo na diagonal, pode usar o cabo de vassoura

ai pega o compasso e abre ele um pouco

coloca a ponta, que seria a nossa ponta seca no compasso

na ponta que liga um segmento no outro

faz um risquinho no segmento novo que esta na diagnal

pega a ponta seca e coloca no risquinho feit, com a mesma abertura do compasso, para ficar congruente

e faz isso outra fez, até ter feito 3 risquinhos

depois, pega o cabo e vassoura e coloca meio q em diagonal, ligando o risquinho no primeiro segmento de reta

logicamente sem mudar a posição dao cabo de vassoura

do*

depois, pega o cabo e vassoura e coloca meio q em diagonal, ligando o risquinho no primeiro segmento de reta

logicamente sem mudar a posição dao cabo de vassoura

do*

ai temos o segmento dividido

eu fiz isso numa folha de papel e deu certo

so para tirar a prova real eu peguei uma regua minha aqui e medi o tamanho dos segmentos tinha dado certo no meu

régua*

pensei nisso mesmo, não sei se daria certo, mas tenho quase 100 de certeza

mas ficou meio confuso na hora de explicar né? kkkk

2 min

Fica difícil de explicar mesmo

L 2 min

kkkk

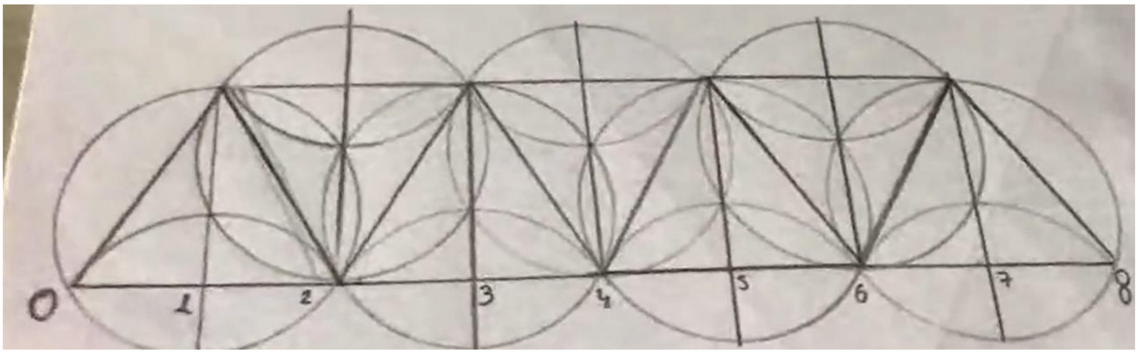
No meu deu certo na hr q eu fui fazer aqui

Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Essa contribuição mostrou que estava construindo um segmento e outro auxiliar, que chamou de diagonal. Quando disse criar dois “segmentos diagonais sem mudar a posição do cabo de vassoura” relacionamos isso com o transporte do ângulo, criando segmentos paralelos, que ajudariam a dividir um segmento dado em três partes proporcionais. Esperamos o quarto encontro para poder perguntar mais detalhes de como fez sua construção.

No **quarto encontro** o aluno C esboçou a Figura 28 para dizer que construiria um feixe de paralelas cortado por transversais com base em triângulos equiláteros e nos pontos médios dos lados desses triângulos. Numerou as divisões que obteve para dizer que a distância do zero até dois foi quadruplicada quando comparada com a distância do zero até oito.

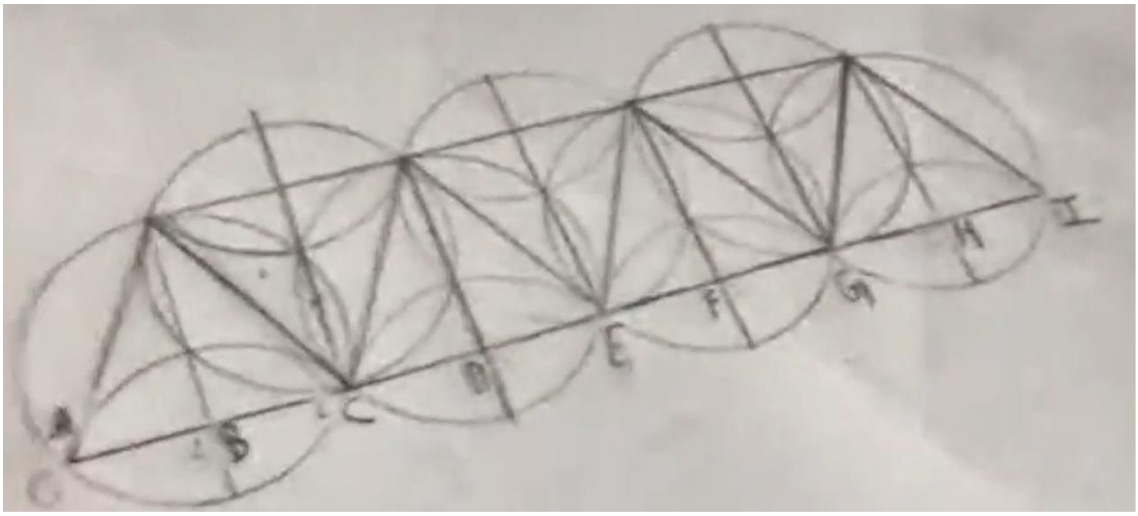
Figura 28 – Resposta ao Terceiro Desafio



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Pedimos que utilizasse letras ao invés de números e salientamos que o enunciado do desafio solicitava que descobrisse uma distância e depois quadruplicasse-a, então o estudante nos mostrou a Figura 29 e disse que poderia considerar a distância de A até B e de B até F.

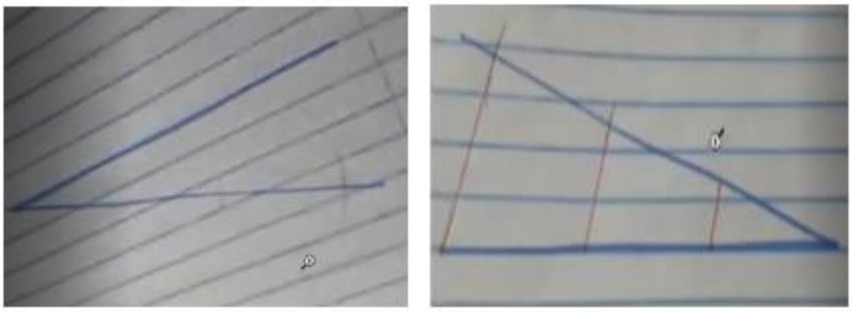
Figura 29 – Segunda Resposta ao Terceiro Desafio



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Vimos que utilizou o mesmo artificio utilizado no primeiro desafio para responder ao terceiro em que usa as alturas dos triângulos como paralelas e suas bases como transversais, então decidimos perguntar a aluna L acerca de sua resposta via chat. Deu uma explicação parecida com a da Figura 27 e nos mostrou a Figura 30, em que criou as divisões no segmento. Como eram três, sabemos estar pensando no primeiro desafio. Salientamos parecer correto, desde que os segmentos em vermelho fossem paralelos, perguntamos como fez para garantir o paralelismo, ao que respondeu: “Dá pra manter o cabo de vassoura reto, acho.”

Figura 30 – Nova Divisão de Segmentos



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Replicamos ser necessário garantir o paralelismo entre os segmentos e que o aluno C estava fazendo isso criando triângulos equiláteros. Assim, podia utilizar triângulos ou outros polígonos a sua escolha.

Consideramos, a resposta tardia da aluna L, como uma dificuldade ocasionada pela aplicação remota da atividade, pois atrapalhou o trabalho em grupo, especialmente, a dialética de validação, pois nos parecia que cada aluno estava realizando a atividade individualmente, apesar das discussões serem feitas em grupo. Essa resposta, remetendo ao primeiro desafio, fez parecer que a aluna L não se apropriou das ferramentas mobilizadas pelo aluno C.

Outro desafio foi ocasionado pelo pouco tempo que tivemos para sua aplicação, pois foi realizada nas últimas semanas antes das férias discentes, então tínhamos tempo limitado para desenvolver toda a sequência.

A aluna M foi a única que não entrou pontualmente no ambiente informatizado, conectou-se 20 minutos depois dos outros dois estudantes, quando terminamos a mediação com a aluna L, a discente M disse: “Eu só sei achar quanto que vale os negócio.”

Essa fala nos pareceu fazer menção a encontrar um valor numérico para uma medida relacionada a questões feitas em aulas tradicionais. Mediamos esse desconforto da estudante dizendo que as atividades propostas nessas aulas não tinham esse intuito e pedimos que tentasse chegar a uma resposta.

Depois dessa mediação, o estudante C comentou: “agora que eu me liguei que pra responder esse desafio é só dividir o segmento em cinco, uma parte pra um e quatro pro outro.” Dissemos ser um raciocínio correto, ao que a aluna L comentou: “a minha eu fiz, mas não consigo terminar agora. Quero ver o próximo desafio.”

Por termos poucos encontros antes do fechamento do ano letivo, concluímos precisarmos dar celeridade a aplicação dos desafios e prosseguimos. Nesse desafio o estudante C continuou mobilizando suas ferramentas de criação de feixes de paralelas cortadas por transversais usando semelhança de triângulos, mobilizou seus conhecimentos relativos à divisão de segmentos utilizando triângulos equiláteros.

Ainda existiam dificuldades para criar segmentos paralelos, enquanto C já dispunha de um método para construir feixes de paralelas com base em triângulos equiláteros, L ainda estava construindo uma maneira de criar paralelas e M considerava que somente sabia “calcular os negócio”, fazendo uma referência clara a resolução de exercícios em que as medidas assumiam valores numéricos e se estudavam apenas casos particulares.

Esperávamos que, com a proposição de novos desafios, tivessem oportunidades de construir algoritmos para divisão de segmentos em partes proporcionais, mas também vislumbrávamos que esses alunos teriam apenas mais uma semana de aulas e precisávamos terminar a sequência didática em apenas mais dois encontros, por isso propusemos a leitura do quarto desafio, como segue.

4.2.5 Análises do Quarto Desafio

Quarto desafio

Ao se aproximarem, viram um pergaminho mágico pregado na porta, quando o pegaram, visualizaram as palavras se formando: “Bem-vindos ao grande desafio! Para abrir a porta, é necessário desenhar três paralelas e depois outras duas retas, que interceptem as três primeiras. Meçam e digam se existe alguma relação entre essas medidas. ”

Análise *a priori*

O objetivo deste desafio foi explorar empiricamente a proporcionalidade presente em paralelas cortadas por transversais. Como paralelismo e proporcionalidade já foram explorados nos desafios anteriores, esperávamos que os estudantes não tivessem dificuldades para criar feixes de paralelas cortadas por transversais.

Depois de mensurarem as medidas, expectávamos que explorassem razões entre elas, chegando à ideia de que quando estabelecessem razões entre medidas correspondentes, estas permaneceriam iguais, devido à proporcionalidade entre os segmentos. Uma variável pertinente foi a previsão do uso de régua milimetrada para facilitar a obtenção das medidas, visto objetivarmos a exploração da proporcionalidade, considerávamos que poderiam, dessa forma, realizando um jogo entre o quadro da geometria e o quadro aritmético, estabelecendo razões.

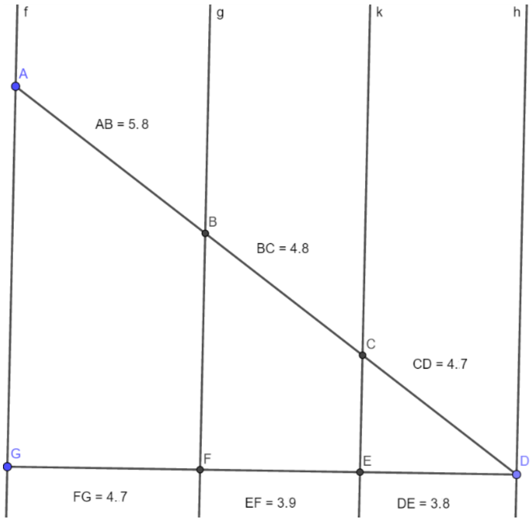
Acreditávamos que utilizariam a régua para medir os segmentos formados e conseguiriam chegar a medidas até décimos de centímetros, o que possibilitaria encontrar razões que não fossem iguais, devido à precisão do instrumento e ao ato de medir. Se isso acontecesse, mediação seria necessária para deixar claro que arredondamentos seriam feitos.

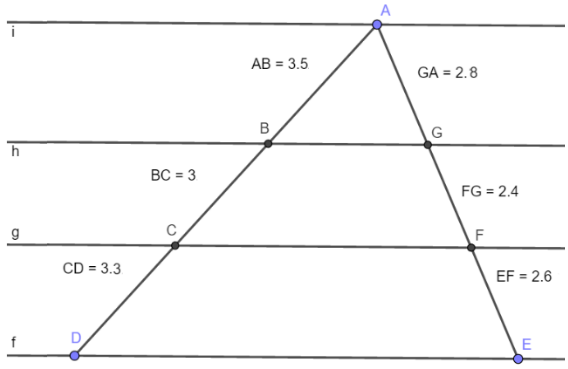
Possíveis soluções

Na Figura 31 ilustramos alguns exemplos que foram esboçados pelos estudantes, sendo os dois primeiros feixes mais parecidos com o que foi solicitado nos dois primeiros desafios.

Existia também um feixe de retas formado por paralelogramos, por isso seus lados eram congruentes e as razões iguais a uma unidade de medida. Havia a possibilidade de que outras configurações fossem esboçadas e a mediação do professor deveria considerar a exploração destas diferenças, focando na proporcionalidade.

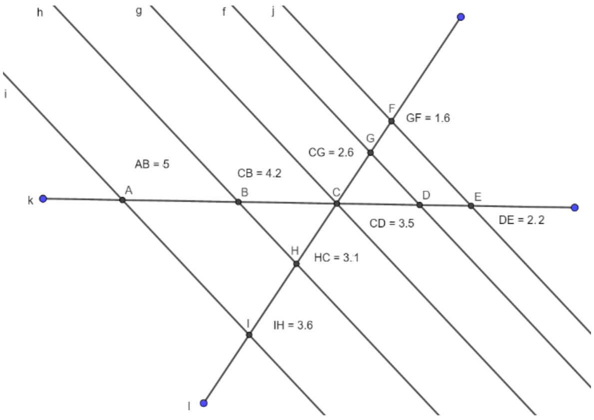
Figura 31 – Alguns exemplos de feixes de paralelas cortadas por transversais

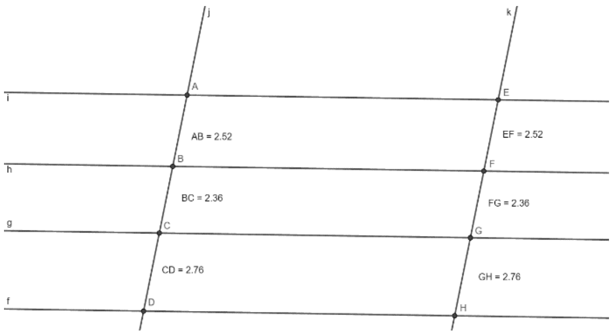




$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{EF} = \frac{CD}{DE} \cong 1{,}2$$

$$\frac{AB}{GA} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{EF} \cong 1{,}3$$





$$\frac{AB}{IH} = \frac{CB}{HC} = \frac{CG}{CD} = \frac{GF}{DE} \cong 1{,}4$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = 1$$

Fonte: Produção do autor

Quando refletimos acerca destas possibilidades, lembramos da contribuição de Brousseau (1995) quando afirmou que deveríamos evitar figuras que servissem de protótipo e explorar os conceitos a elas associados, por isso nossa tentativa foi de explorar diferentes configurações. Nesse desafio, a proporcionalidade seria explorada como igualdade de razões, por isso poderíamos relacionar essa atividade com a ideia de proporcionalidade geométrica.

Consideramos que aplicaríamos nossa sequência didática em sala de aula, pensávamos que os estudantes utilizariam calculadoras para dividir as medidas dos segmentos e chegassem às razões necessárias para a resolução dessa situação problema. Acreditamos que como nosso objetivo era a exploração da proporcionalidade entre essas medidas, era possível que a utilização da calculadora trouxesse agilidade aos cálculos.

Em nossa adaptação, o emprego da internet traria uma discussão a respeito do uso de aplicativos para o esboço das figuras solicitadas. Considerávamos que, por um lado, a utilização de aplicativos com representações dinâmicas poderia facilitar a exploração da proporcionalidade. Por outro lado, utilizá-los poderia gerar algumas dificuldades, visto que não planejávamos empregar nenhum meio informatizado e até por isso decidimos propor aos estudantes que poderiam utilizar ou não esses aplicativos, sendo seu uso facultativo.

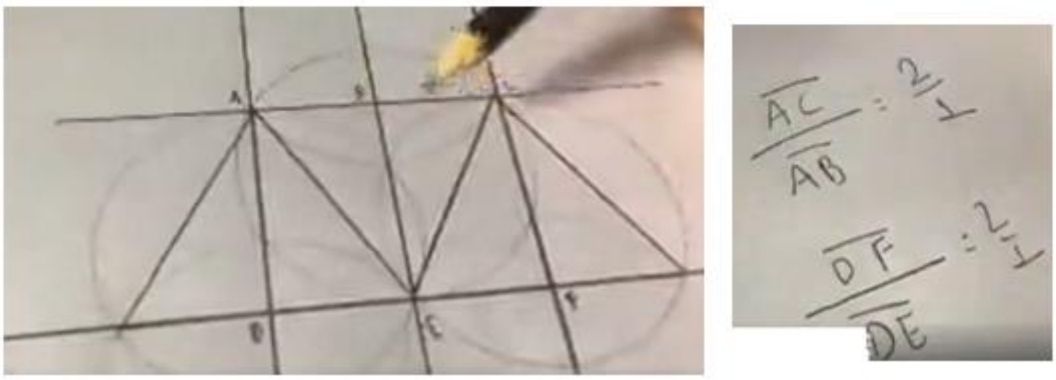
Acreditávamos que possíveis erros se dariam por dificuldades na construção do feixe de paralelas, na medição ou ainda no estabelecimento de razões, que deveriam ser superadas com o auxílio da mediação do professor.

Análise *a posteriori*

No **quarto encontro** foi feita a leitura do quarto desafio, enquanto o aluno C decidiu utilizar a mesma estratégia do desafio anterior, a aluna L disse saber fazer mediatrizes e que as utilizaria para construir quadrados, a aluna M não se manifestou, quando perguntada pelo professor como responderia ao desafio, disse que ajudaria L. Foi recorrente, durante a aplicação da sequência didática, que M não propunha respostas próprias, se limitando a auxiliar L.

Consideramos que se tivéssemos tido a oportunidade de aplicação presencial dessa sequência didática teríamos amenizado essa dificuldade, mas como tivemos que realizar uma aplicação a distância, foi difícil conseguir adesão dos estudantes e existiu esse problema de envolvimento de M com a atividade. O aluno C abriu a câmera e mostrou a Figura 32.

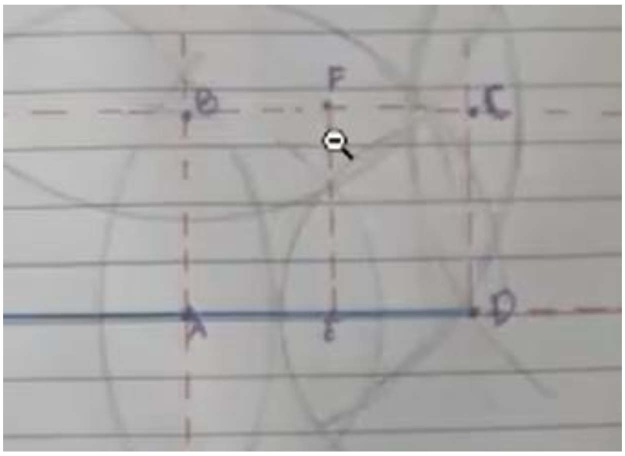
Figura 32 – Resposta ao Quarto Desafio



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Construiu triângulos para criar um feixe de paralelas cortadas por transversais, como nos outros desafios, nomeou os pontos, mediu-os com a régua e criou as razões, ao final respondeu: “a relação é o dobro, vou falar o óbvio.” Vimos que C respondeu adequadamente ao desafio, pedimos para ver a resposta de L e M, que estavam respondendo à atividade em um chat privado. A aluna L abriu a câmera e mostrou a Figura 33.

Figura 33 – Divisão do Quadrado



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

O pesquisador pediu para que comparasse as medidas, utilizando razões, ao que respondeu: “as razões são as mesmas, dá o mesmo resultado”. O pesquisador replicou que isso aconteceu por escolher comparar segmentos com a mesma medida e que esses eram casos em que existia proporcionalidade entre os segmentos comparados. Assim, os estudantes venceram o quarto desafio.

Vimos que os discentes conseguiram criar feixes de paralelas cortadas por transversais com base em semelhança de polígonos, sendo que C utilizou triângulos, enquanto M e L preferiram retângulos, por isso consideramos que venceram o quarto desafio. Acreditávamos que as respostas dos alunos foram muito parecidas com o que previmos *a priori*, sendo que utilizaram polígonos para garantir o paralelismo dos segmentos e por isso, prosseguimos.

4.2.6 Análises do Quinto Desafio

Quinto desafio

- Para falar com meu mestre devem desbloquear a porta, isso só acontecerá se encontrarem a chave correta.

- E como faremos isso? Perguntou Adjutor.

- A chave correta é um quadrado, vejam o buraco na parede.

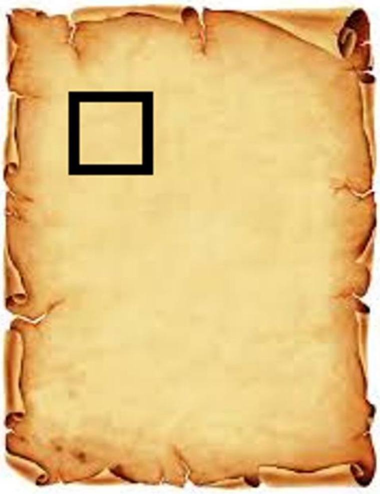
Quando apontou é que os aventureiros perceberam que existia um buraco com forma de um quadrado vazado na parede, ao lado da porta. Continuou dizendo:

- Para encontrar a chave devem fazer uma mágica! Tenho um pergaminho mágico e nele existe um quadrado menor que o necessário para abrir a porta, caso esbocem outro com o triplo dos comprimentos do primeiro, magicamente ele se materializará e poderão abrir a porta.

Depois de procurar um pouco disse:

- Aqui está!

Entregou um pergaminho aos aventureiros, onde estava esboçado um quadrado:



Análise *a priori*

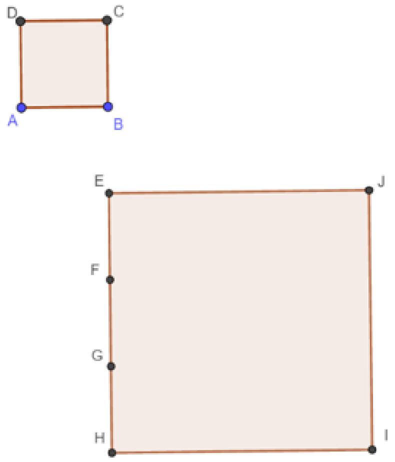
O objetivo desse desafio era mobilizar os conhecimentos antigos dos estudantes, referentes à proporcionalidade, relacionada a ampliações no plano. O conteúdo transformações geométricas era curricularmente previsto para o oitavo ano do ensino fundamental, dado que para ampliar um polígono seria necessário que suas medidas variassem proporcionalmente, essa era uma situação problema de proporcionalidade direta.

Em Brousseau (1995) encontramos uma menção a articulação entre a ferramenta homotetia e o objeto teorema de Tales e a consideramos nesta atividade. Além disso, ponderamos a afirmação, em Bolea (2002), de que todos os conhecimentos relacionados a proporcionalidade, no ensino fundamental, poderiam ser justificados pelo teorema.

Possíveis soluções

Uma resposta possível seria construir uma reta qualquer e transferir, com o compasso, a medida do quadrado a ser ampliado. Em seguida, seria necessário construir o quadrado ampliado (Figura 34), solicitado no desafio e para isso, poderiam utilizar o esquadro ou empregar métodos com compasso e régua para a construção de ângulos retos.

Figura 34 – Ampliação do quadrado com razão 1:3



Fonte: Produção do autor

Outra maneira de realizar essa ampliação seria medindo o lado do primeiro retângulo e atribuindo três vezes essa medida ao lado do novo quadrado. Enquanto a transferência das medidas com o compasso poderia significar uma generalização, ligada aos métodos de resolução que esperávamos que fossem utilizados desde os primeiros desafios. A mensuração com a régua poderia significar que os estudantes estariam relacionando a resolução desta atividade a métodos de exploração da razão de proporcionalidade entre as medidas do primeiro retângulo e de sua ampliação, como esperávamos que fosse levado a efeito no quarto desafio.

Possíveis erros poderiam estar relacionados ao não entendimento do que era uma ampliação, ou ainda a como transportar os ângulos, ou medidas dos lados do polígono e deveriam ser superados com a mediação do professor.

Análise *a posteriori*

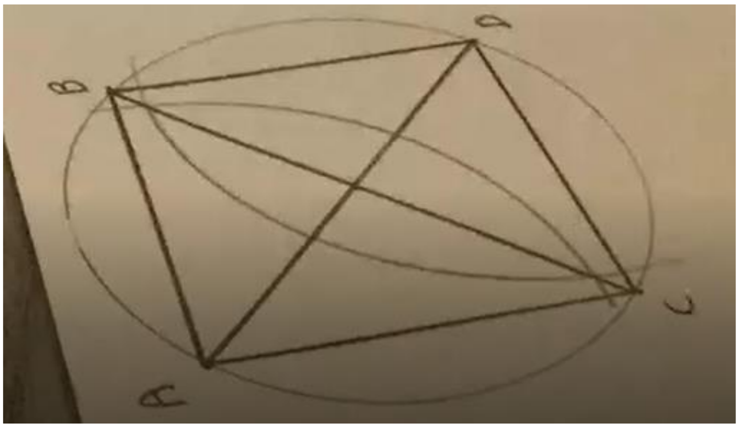
No **quarto encontro** foi feita a leitura do quinto desafio e os estudantes começaram a discutir como realizar essa ampliação:

L: Dá pra fazer mais oito quadrados.
Pesquisador: Como?
L: Dá pra usar o que fiz.
Pesquisador: Sim.
C: Com triângulo equilátero não dá.
L: Vai na mediatriz.
(Transcrição da fala dos alunos)

Como a reunião estava acabando, pedimos que trouxessem respostas ao desafio no próximo encontro. Vimos que a aluna L planejava utilizar os lados do quadrado para ampliá-lo, criando um segundo quadrado composto por nove quadrados congruentes ao primeiro, enquanto o aluno C descobriu que existiriam dificuldades de responder ao desafio utilizando triângulos equiláteros.

No **quinto encontro** todos se conectaram ao ambiente pontualmente, o estudante C abriu a câmera de seu celular e mostrou a construção de um quadrado inscrito com base em uma circunferência e em um diâmetro construiu sua mediatriz para obter as diagonais do quadrado ABCD (Figura 35).

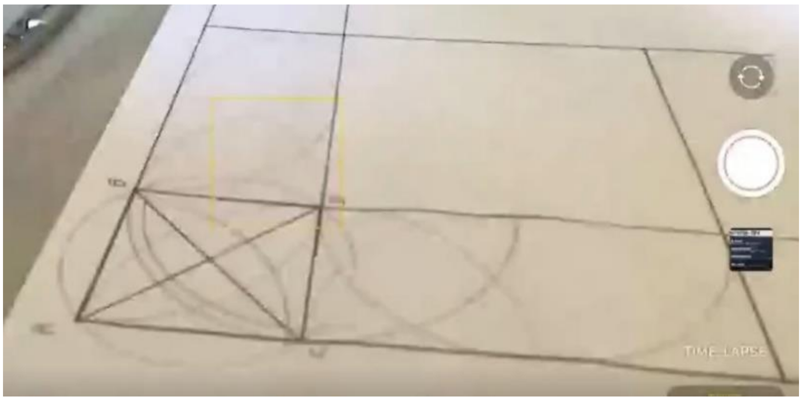
Figura 35 – Construção do Quadrado pelo Aluno C



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

A seguir, prolongou os lados desse quadrado para obter dois retângulos, em que um lado coincidia com o do quadrado ABCD e o outro tinha o dobro de sua medida. Por último, utilizou os lados maiores desses retângulos para obter um segundo quadrado, que era a ampliação do primeiro (Figura 36).

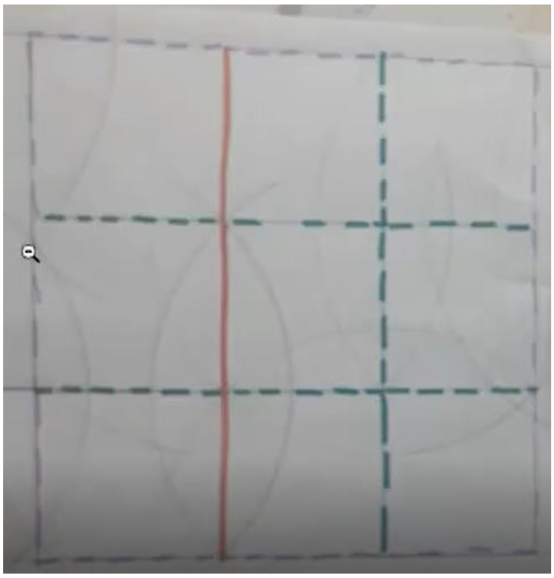
Figura 36 – Ampliação do Quadrado



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Já L disse ter construído um segmento em vermelho e depois fez mediatrizes nesse segmento, de modo a obter nove quadrados congruentes, como ilustrado pela Figura 37. Questionamos M acerca de suas respostas e respondeu ter se mudado a pouco tempo e estava com dificuldades de encontrar seu compasso.

Figura 37 – Ampliação do Quadrado da Aluna L



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Considerávamos que enquanto C utilizou a ideia de construir um quadrado e usou paralelismo para construir sua ampliação, L mobilizou seu conhecimento referente a mediatrizes para criar um feixe de paralelas cortado por transversais. Dessa forma, foram feitas ampliações baseadas em noções de semelhança de polígonos para mobilizar feixes de retas paralelas. Depois de resolvido esse desafio, a narrativa terminava com a vitória dos discentes na aventura e foi o momento de institucionalizar teorema de Tales.

4.2.7 Institucionalização do teorema de Tales

Após aplicados os cinco desafios que faziam parte da história, foi feita uma leitura coletiva do final da narrativa proposta na pesquisa, com uma vitória no Labirinto de Alium. No **quinto encontro**, depois de terminada a atividade gamificada, decidimos perguntar as impressões dos estudantes com relação a essa estratégia e depois prosseguir com a institucionalização.

Assim, dissemos que criamos uma história que fazia referência a jogos de *Role Playing Game* como "*Dungeons & Dragons*" e perguntamos se os estudantes conheciam essas referências. Enquanto C disse ter assistido "Caverna do Dragão", L relacionou o que fizemos com jogos que tinha visto no YouTube, já M disse que não gostava de jogos e que não conhecia essas referências.

O aluno C parecia o mais engajado com essa estratégia, inclusive externou essa empolgação: "foi da hora, a ideia de criar a história e transportar a gente pra história, parece aqueles videogames sabe, tipo ficar contando a historinha e de repente você tem que fazer as missões", já L teve mais dificuldades: "tipo RPG, eu gostei, fiquei meio confusa no início, [...] mas gostei sim" e M se limitou a dizer: "não sou muito chegada em jogo".

Nos pareceu que o estudante C foi o que melhor se engajou com a gamificação e isso talvez tenha relação com o fato de que foi o mais participativo entre os três estudantes pesquisados. Por outro lado, a aluna M não gostava dessas referências e é possível que isso tenha influenciado em sua pouca participação nas resoluções.

Foi proposto aos estudantes que assistissem um vídeo disponibilizado no Youtube[32], em que era proposta uma demonstração do teorema de Tales por áreas de triângulos, em um clipe de sete minutos.

Depois de assistirem, perguntamos aos estudantes se tinham entendido a demonstração. Responderam que tinham dúvidas e explicamos algumas das relações utilizadas para demonstrar o teorema, quando nos pareceu que tinham entendido, conversamos acerca das respostas dadas pelos estudantes nos desafios

---

[32] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Fg0Thd-EQSg. Acesso em 24-11-2020.

propostos até então e sua relação com a demonstração escolhida para ser mostrada aos discentes.

Quando nos pareceu que ficou claro que entenderam o que era o teorema de Tales e estavam convencidos de que justificava as respostas que deram aos desafios propostos até então, prosseguimos com a proposição de novos desafios, fora do contexto da gamificação

4.2.8 Análises do Sexto Desafio

Sexto desafio

Como descobrir a altura de uma árvore a partir de sua sombra?

Análise *a priori*

Nessa atividade, planejávamos inicialmente permitir que os estudantes utilizassem uma trena, para que pudessem efetuar medições. O objetivo foi trabalhar com a descoberta de medidas inacessíveis mobilizando a ferramenta teorema de Tales. Foi planejado que realizassem a atividade em um espaço aberto onde pudessem explorar sombras e compará-las.

Esperávamos que os estudantes medissem a sombra de uma árvore ou de outro objeto inacessível qualquer, para então medir a altura de uma pessoa ou de outro objeto acessível, estabelecessem comparações entre as medidas das sombras e percebessem existir proporcionalidade, que poderia ser utilizada para responder ao desafio.

Com a aplicação remota de nossa sequência didática resolvemos propor esse desafio como uma questão abstrata, na qual os estudantes poderiam resolvê-lo com régua e compasso.

Possíveis soluções

Nossa expectativa era de que os discentes descobrissem uma igualdade do tipo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e respondessem à situação problema, em que *a, b, c* e *d* seriam medidas de sombras e de alturas. Esperávamos que estabelecessem relações entre esse desafio e os anteriores, para que percebessem as relações entre as medidas das sombras e das alturas.

Considerávamos como dificuldade a necessidade de estabelecer comparações entre a altura e a sombra de um objeto acessível com outra, de um objeto inacessível, para comparar essas medidas. Possíveis erros poderiam acontecer caso não estabelecessem as razões corretamente ou não relacionassem essa atividade com o teorema de Tales.

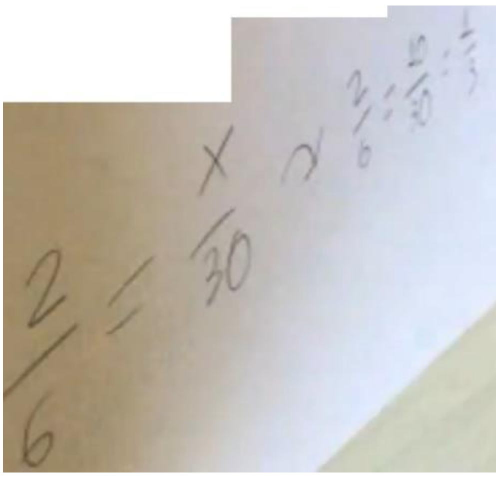
Acreditávamos que os estudantes dispunham de ferramentas suficientes para realizar essa atividade, todavia a ideia de que precisariam estabelecer comparações entre um objeto acessível e uma inacessível seria uma novidade, ainda não trabalhada durante nossa sequência didática.

Análise *a posteriori*

No **quinto encontro** foi lido o quinto desafio, mas como a reunião estava acabando, decidimos pedir aos estudantes que trouxessem respostas no próximo encontro. No **sexto encontro** a aluna L teve uma crise alérgica e não pôde participar, a aluna M não participou e não deu justificativa para sua ausência, então somente participou o aluno C. Quando perguntado se tinha uma resposta ao desafio respondeu:

> Vamos supor que a árvore tenha um tamanho aqui “x” e eu tenha dois metros de altura. Ai dependendo do horário do dia, a minha sombra ta em seis metros e a sombra da árvore ta em 30. Ai, usando aquele teorema de Tales, seria mais ou menos assim, dois para seis, igual x para 30. Não precisa de muito cálculo para perceber que a proporção seria três para um.

Figura 38: Resposta ao Quinto Desafio



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Percebemos que o estudante conseguiu estabelecer uma proporção do tipo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ para responder ao desafio e como era o que esperávamos, prosseguimos.

4.2.9 Análises do Sétimo Desafio

Sétimo desafio

Criar um segmento de reta e depois um triângulo, de tal modo que seu perímetro seja igual a medida do segmento.

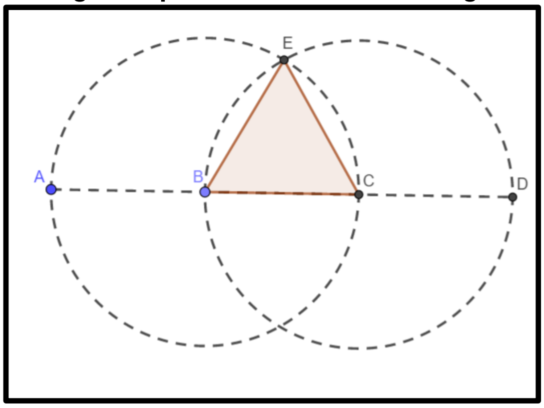
Análise *a priori*

O objetivo foi mobilizar teorema de Tales em uma situação que problematizasse a graduação de um segmento em um polígono. Considerávamos essa uma complexificação das situações problemas anteriores, na medida em que seria necessário dividir o segmento dado em partes para garantir a construção do triângulo.

Possíveis soluções

A resposta para triângulos equiláteros (Figura 39) consistiria em criar uma circunferência e com o compasso em um ponto qualquer dela criar uma outra que passasse pelo centro e tivesse o mesmo raio da primeira. Assim, poderíamos criar um segmento que passasse pelo centro das duas circunferências e esse procedimento garantiria que tivesse três divisões congruentes. Depois seria necessário transferir essas medidas com o compasso para determinar o triângulo.

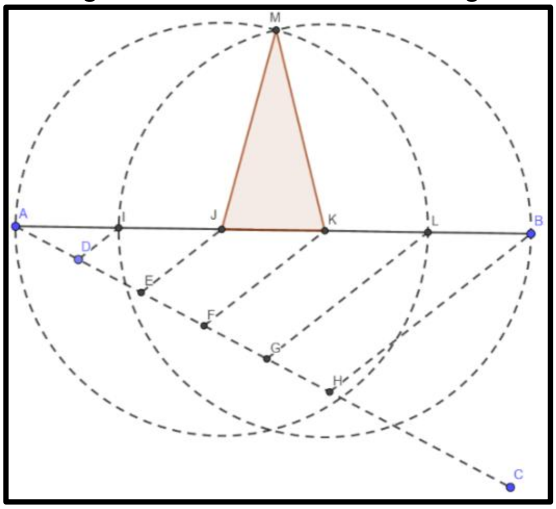
Figura 39 – Construção de triângulo equilátero baseado em segmento que mede seu perímetro



Fonte: Produção do autor

Para construir um triângulo isósceles (Figura 40) seria necessário dividir o segmento em partes de modo que duas fossem congruentes e então transferir as medidas com o compasso, para construir o triângulo. Uma maneira de resolver seria dividir um segmento auxiliar em cinco partes congruentes, considerar o segmento central como a base do triângulo e depois transferir as medidas dos segmentos laterais, com o compasso.

Figura 40 – Construção de triângulo Isósceles baseado em segmento que mede seu perímetro

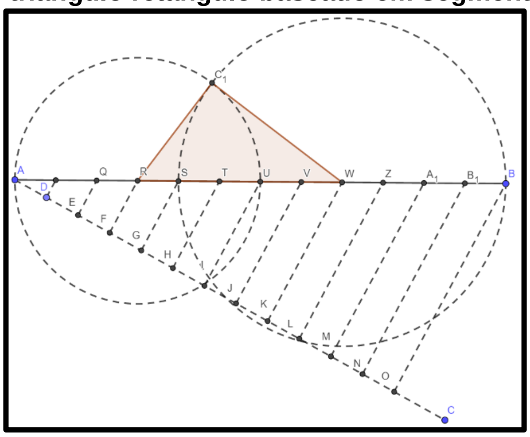


Fonte: Produção do autor

Caso optassem por essa construção, deveriam lembrar da condição de existência dos triângulos, que a medida de qualquer um de seus lados deveria ser menor que a soma dos outros dois, sob risco de não conseguirem levar a atividade a efeito.

Outra resposta possível seria criando um triângulo retângulo (Figura 41) uma maneira de realizá-la seria dividir um segmento de reta auxiliar em doze partes congruentes, para garantir que os lados medissem 3, 4 e 5 divisões do segmento. Era possível que escolhessem triângulos retângulos pelo trabalho com teorema de Pitágoras ser um conhecimento previsto para ser trabalhado no nono ano do ensino fundamental e talvez fosse uma ferramenta dos estudantes.

Figura 41 – Construção de triângulo retângulo baseado em segmento que mede seu perímetro



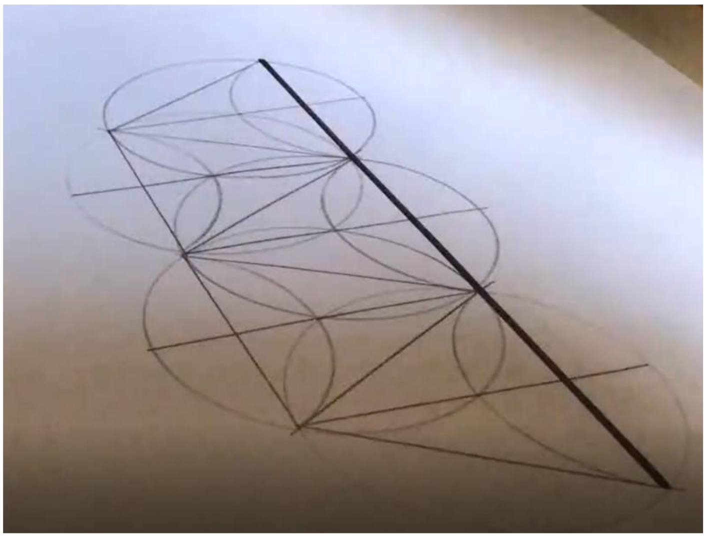
Fonte: Produção do autor

Acreditávamos que possíveis erros estariam relacionados às dificuldades na mobilização de teorema de Tales, pelos estudantes, para criar divisões congruentes de segmentos ou ainda no entendimento de como construir os triângulos com base nessas divisões.

Análise *a posteriori*

O desafio sete foi disponibilizado aos estudantes no final no **quinto encontro**, depois da institucionalização de teorema de Tales. No **sexto encontro** somente o aluno C se conectou ao ambiente, disse que poderia construir cinco triângulos equiláteros e que assim garantiria uma resposta correta ao desafio, pedimos que realizasse a construção e vimos o estudante construindo a Figura 42.

Figura 42 – Resposta do Desafio 7 com Régua e Compasso



Fonte: Produção dos estudantes pesquisados

Disse que em preto estava o segmento e que todos os triângulos dessa construção tinham perímetro igual ao do segmento. O método de construção dos triângulos foi o mesmo mobilizado desde o primeiro desafio e consideramos que, novamente, estava utilizando triângulos equiláteros para criar um feixe de paralelas cortado por transversais, pois assim poderia chegar a uma resposta correta. Dessa forma, realizou uma construção parecida com o que previmos para o caso dos triângulos equiláteros em nossa análise *a priori*. Como o aluno C respondeu os desafios em 20 minutos, encerramos a reunião.

4.2.10 Algumas Reflexões a Respeito da Aplicação

A ideia de que poderíamos elaborar um modelo de interações, seguindo os pressupostos da TSD e da DFO, em que nossa intencionalidade não ficasse clara aos estudantes e de que poderíamos utilizar gamificação para ajudar a formular situações didáticas, estimulada pela criação de aventuras para tratar do teorema de Tales nos pareceu uma estratégia de ensino significante e uma potencialidade da gamificação para o ensino de matemática.

Brousseau (1995) considerou que a história de como Tales de Mileto teria medido a altura de uma pirâmide carregava um certo aspecto emocional e que isso tinha de ser levado em conta na elaboração de situações didáticas. Consideramos que a gamificação pode ajudar na elaboração de nossa sequência didática, satisfazendo a necessidade de mobilização dessa dimensão, que podemos relacionar com diversão e engajamento. Nossa concepção foi de que essa era a pertinência da gamificação e sua maior potencialidade para o ensino de matemática.

Convém citar que Brousseau (op. cit.) explicitou a necessidade de inventar situações que formassem uma rede de aventuras para tratar de conhecimentos escolares. Consideramos imprescindível que pesquisadores da área de ensino se preocupassem com esse tipo de invenção e nossa pesquisa nos levou a acreditar que uma das potencialidades da gamificação é ser uma alternativa para levar a efeito essa criação, sendo essa uma diferença entre atividades tradicionais e gamificadas.

Percebemos que essas situações didáticas diferiam das atividades do dia a dia e relacionamos essa ideia com a reflexão, defendida por Huizinga (2008), de que quando as pessoas jogam, percebem desenvolver uma atividade diferente das rotineiras. Por isso, nossa insistência em defender o argumento de que a gamificação teve esse mesmo potencial e se desenrolou no nível de abstração das experiências, não importando a quantidade de elementos envolvidos. Realizamos a gamificação dessa atividade baseada na influência dos jogos de RPG, em que são criadas histórias, acreditamos que elas são capazes de fazerem os estudantes imergirem em uma aventura e vimos que isso aconteceu, especialmente com o aluno C.

Refletindo acerca das possibilidades associadas à criação de uma rede de aventuras para tratar do ensino de conhecimentos matemáticos, cabe lembrar que, para Brousseau (2002), um meio desprovido de intenções didáticas é considerado insuficiente para induzir o conhecimento cultural desejável que se adquirisse. Assim, cabe ao professor organizá-lo para que provocasse, nos estudantes, as adaptações que caracterizam a aprendizagem. Da mesma forma, consideramos que se o professor não intentar incluir ludicidade e essa dimensão emocional em situações problemas, é improvável que isso aconteça.

Devido às escolhas feitas pelos alunos, consideramos que existiu a mobilização do que Brousseau (1995) estabeleceu como ponto de vista da dilatação. Nossa pesquisa nos levou a acreditarmos que a maneira como o teorema era abordado no ensino fundamental e as escolhas feitas em nosso currículo foram responsáveis por esse enfoque.

Os estudantes construíram feixes de retas paralelas com base em polígonos e mobilizaram o objeto teorema de Tales durante os desafios. Cabe salientar que os discentes relataram estarem mobilizando o teorema de Tales antes mesmo da institucionalização, o que nos mostra que construíram conhecimentos referentes a esse conhecimento matemático. Terminada a aplicação, vimos que os estudantes construíram conhecimentos referentes ao teorema de Tales e os aplicaram em diferentes situações problema.

Com relação às escolhas que fizemos para gamificar as situações problemas, consideramos que conseguimos que os estudantes atribuíssem sentido aos elementos de gamificação elaborados. Assim, acreditamos na importância não só de formular elementos de gamificação, mas também na relevância da mediação em sua aplicação para que os alunos se engajem.

Vimos que dois estudantes foram mais receptivos à proposta, enquanto uma terceira disse não gostar dessa referência aos jogos e pareceu menos engajada na atividade. Esse foi um ponto relevante e uma possível limitação ao uso da gamificação em atividades escolares, a de que nem todos os estudantes são receptivos a gamificação. Por conta disso, acreditamos que não se trata de uma estratégia infalível, mas sim de uma possibilidade para as aulas de matemática.

Pelos resultados da aplicação realizada, consideramos validada nossa engenharia didática, visto que os estudantes foram capazes de construir seus conhecimentos referentes a proporcionalidade em feixes de paralelas cortados por transversais, criados desde polígonos semelhantes, percebendo a proporcionalidade antes mesmo da institucionalização. Além disso, conseguiram responder todas as atividades sem muitas dificuldades, mesmo se tratando de situações didáticas que consideramos complexas, especialmente o sétimo desafio.

Uma questão pertinente foi das dificuldades ocasionadas pela aplicação remota da sequência. Vimos que, apesar de conversarem entre si e de existir a proposição de respostas aos desafios, o trabalho em grupo nos pareceu prejudicado.

Pudemos observar que o aluno C elaborou uma resolução para os desafios mobilizando triângulos para criar feixes de paralelas cortadas por transversais, enquanto o aluno L elaborou um procedimento com retângulos e não podemos dizer que existiu, efetivamente, um trabalho em grupo, acreditamos que as trocas entre os estudantes não foram suficientes para que a dialética de validação pudesse acontecer satisfatoriamente.

Da mesma forma, acreditamos que se a aluna M estivesse presencialmente com seus colegas poderia ter se engajado na atividade pela socialização inerente a atividade e por nossa escolha de criarmos uma referência a um jogo colaborativo. Por tudo isso, acreditamos na necessidade de uma reaplicação presencial dessa sequência didática quando a sociedade não estiver cumprindo medidas de distanciamento social.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso primeiro objetivo específico foi elaborar uma sequência para ensinar matemática, utilizando gamificação como estratégia para o ensino, decidimos utilizar como inspiração o trabalho de Sheldon (2012) e nossa própria prática, realizada durante o mestrado, em que criamos um jogo de *Role Playing Game* com objetivos didáticos. Utilizando algumas dessas experiências e elementos durante a elaboração da história de um labirinto em que, baseado em sua narrativa, foram propostos desafios para que os alunos superassem antagonistas e progredissem na história.

Para vencer, os estudantes deveriam resolver situações problema, mobilizando conhecimentos referentes ao teorema de Tales. Existiu uma descrição de algumas das escolhas feitas no capítulo quatro e a sequência foi disponibilizada no apêndice.

Nosso segundo objetivo foi aplicar essa sequência com alunos do nono ano do ensino fundamental. Apesar das dificuldades, ocasionadas pela pandemia do novo corona vírus, fizemos a aplicação de nossa sequência didática utilizando ferramentas de comunicação informatizadas, para não quebrar o isolamento social que foi realizado no ano de 2020.

Dessa forma, realizamos uma aplicação de nossa sequência didática com três estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola particular da cidade de São Paulo no contraturno das aulas. Foram feitos encontros semanais, iniciados em 10 de novembro de 2020, totalizando cinco reuniões de 90 minutos cada e uma reunião com 20 minutos. Foi uma atividade facultativa, dessa forma não tínhamos controle referente a quantidade de estudantes que participariam.

O terceiro objetivo específico dessa tese foi investigar a pertinência da gamificação para o ensino de matemática, após a aplicação de nossa sequência didática, acreditamos que a gamificação pôde ser pertinente para ensinar matemática na medida em que foi possível articular experiências que se referiam a jogos em atividades didáticas.

Parte dessa pertinência estava na ideia de que a gamificação poderia ser útil para auxiliar na elaboração de um modelo de interações em que nossa intencionalidade não ficasse clara aos estudantes e de que pudemos utilizar para ajudar a formular situações adidáticas, constatada a necessidade de criar uma rede de aventuras para tratar de teorema de Tales.

Dessa forma, acreditamos que o engajamento, citado em nosso levantamento de pesquisas que se propuseram a refletir e a aplicar gamificação em diferentes contextos realmente existiu, mas mais do que isso, foi possível ensinar teorema de Tales utilizando essas experiências e elementos de gamificação, criados como parte de uma situação didática para o ensino.

Julgamos que a escolha pela TSD e a DFO, como aportes para a criação dessa engenharia didática com gamificação foi pertinente, mas consideramos a necessidade de novas investigações, com utilização de outros aportes teóricos como uma necessidade em futuras pesquisas, para ajudar a entendermos as potencialidades da gamificação sob diferentes perspectivas.

Nosso último objetivo específico foi analisar as potencialidades e restrições dessa estratégia gamificada. Para isso necessitamos discutir a percepção dos alunos, pois acreditamos que os estudantes perceberam essa atividade de maneira distinta das desenvolvidas tradicionalmente.

Discutimos a ideia, defendida por Huizinga (2008), de que quando as pessoas jogam, desenvolvem atividades diferentes das cotidianas. Defendemos várias vezes o argumento de que a gamificação teve esse mesmo potencial e se desenrolou no nível de abstração das experiências, não importando a quantidade de elementos envolvidos, diferente do que foi defendido por autores como Kaap (2012) e Zichermann e Cunningham (2011), por exemplo. Essa faceta da gamificação, como mobilização de experiências que fazem referência aos jogos, também precisa ser explorada por futuras pesquisas.

Uma adversidade da gamificação é que podem existir pessoas que não se interessem por jogos e existe a possibilidade de que sejam avessas a atividades gamificadas, essa possível restrição da gamificação precisa ser considerada. Apesar disso, essa aversão pode ter acontecido devido ao formato remoto, que tivemos de adotar, pois acreditamos que nessa modalidade a socialização entre os participantes ficou prejudicada e novas investigações são necessárias para descobrir como pessoas que tem essa aversão se comportam nesse tipo de atividade presencialmente, pois é possível que a socialização possa ajudar a engajar esses estudantes.

O fato de a percepção ser subjetiva reforça nosso argumento de que podem existir muitas maneiras de gamificar atividades de ensino, visto que cada pessoa percebe a gamificação de maneira diferente. Dessa forma, é possível que experiências gamificadas possam ajudar a criar um ambiente onde os estudantes se sintam estimulados a exercer protagonismo, identificação, criticidade, autonomia, trabalho com adversidades, tomadas de decisões, relacionamento interpessoal e a encarar seus erros de maneira mais positiva, atingindo uma percepção que normalmente está associada aos jogos.

Também existe a perspectiva de que a mobilização de que é a experiência que engaja os estudantes e por isso poucos elementos de gamificação podem capturar essa percepção, por isso uma narrativa pode ser capaz de gamificar uma atividade de ensino e consideramos que essa é uma das principais contribuições dessa investigação para área da educação matemática, ou seja, mostrar que foi possível construir uma sequência para ensinar teorema de Tales articulada com gamificação e que esta pôde apoiar seu ensino, com base na construção de situações que formaram uma rede de aventuras para tratar deste conhecimento, de modo que os estudantes foram capazes de agir, formular e validar seus conhecimentos, percebendo essas atividades como divertidas e engajadoras, capazes de trabalhar com a dimensão emocional, citada por Brousseau (1995).

Contemplamos que essa reflexão pode ajudar a criar subsídios para fazer da gamificação mais do que uma estratégia, convertendo-a em uma metodologia de ensino e para tanto, concebemos essa discussão, acerca de potencialidades e limitações de diferentes experimentos gamificados, como um passo inicial dessa pesquisa e como perspectiva para futuras investigações.

Pensando, com base em nossa pesquisa, na gamificação como um caminho profícuo ou uma geradora de ações docentes e discentes, consideramos possível discuti-la como metodologia de ensino. Para isso, voltamos ao nosso esquema de níveis de abstração, elaborado no capítulo dois, para refletir como enxergamos a possibilidade de gamificar atividades para o ensino de matemática.

Partimos do nível de abstração dos métodos para tratar de conhecimentos a serem ensinados. Nesse nível foram feitos estudos preliminares que embasaram a formulação de situações didáticas para o ensino de teorema de Tales, como preconizado na engenharia didática e que foram essenciais nessa pesquisa.

Em um segundo momento, necessitamos fazer escolhas acerca de qual experiência seria criada. Conforme salientado anteriormente, poderiam existir exemplos de concepção de narrativas, como nessa pesquisa, de simulações da realidade, criação de tabuleiros ou ainda outros. A seguir, em um terceiro instante, aconteceriam inclusões de outros elementos de gamificação, mas em níveis menos abstratos como: ilustrações, adoção de objetos para auxiliar na imersão (em nosso caso: cabo de vassoura, barbante e giz) e essa inclusão estava diretamente relacionada com a escolha da experiência a ser explorada, pelo criador da atividade.

Enquanto a adoção de um tabuleiro pressupõe a utilização de peças como: pinos, dados ou fichas, a escolha por simulações da realidade exigiria o emprego de elementos como: personagens e conhecimentos acerca da reprodução de uma situação específica, por exemplo. Portanto, não existiria uma regra fixa para a concepção de situações gamificadas. Essa seria uma das dificuldades em sua realização e vivenciamos alguns desses desafios durante a elaboração de nossa pesquisa, principalmente as adversidades relacionadas a elaboração de uma narrativa. Dessa forma, o repertório do criador da gamificação é o que dita suas escolhas e isso reforça a necessidade de conhecimento referente as experiências que podem ser criadas.

Essa complexidade pode ser impeditiva para a criação de aventuras com alguns conhecimentos matemáticos. Assim, reforçamos como limitação da gamificação a dificuldade de implementá-la, fato esse previsto por Kaap (2012), Deterding et. al. (2011) e Zichermann e Cunningham (2011). Apesar dessas dificuldades, consideramos serem necessárias mais investigações para explicitar os desafios de gamificar conhecimentos do currículo como outra perspectiva para futuras pesquisas.

Por tudo o que foi exposto até aqui, consideramos que atingimos o objetivo geral dessa pesquisa, que foi construir uma sequência didática articulada com gamificação para ensinar o teorema de Tales e de que confirmamos nossa hipótese, de que ensinar com gamificação teve potencial para fazer com que os estudantes construíssem e depois mobilizassem seus próprios conhecimentos de maneira engajadora.

Assim, como resultado da investigação e das reflexões realizadas, pudemos responder nossa questão de pesquisa: **como uma estratégia didática gamificada pode apoiar o ensino de teorema de Tales?**

Uma estratégia didática gamificada pôde apoiar o ensino de teorema de Tales na medida em que permitiu criar ações discentes, relacionando o ensino com experiências gamificadas, para engajar os estudantes em atividades de ensino, tornando-o mais divertido.

Devido às dificuldades ocasionadas pela aplicação remota dessa sequência, consideramos como outra perspectiva para futuras pesquisas uma nova aplicação dessa sequência didática presencialmente, depois que a pandemia for superada.

REFERÊNCIAS

ABREU, Cristiano Nabuco de, *et al*. Dependência de Internet e de Jogos Eletrônicos: Uma Revisão. **Revista Brasileira de Psiquiatria.** Número 30. P. 156-167. 2008.

ALMEIDA, Regina de Cassia Manso. **Demonstrações em Geometria Plana em Livros-Texto no Brasil a partir do Século XIX.** Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2008.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** 2ª edição. Curitiba. Editora da Universidade Federal do Paraná. 2010.

AMORIM, Alexandre Santos de. **A Globalização do Radicalismo Islâmico. Um Estudo de Caso da Al Qaeda Sob a Luz do Choque de Civilizações.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília. Brasília. 2008.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas; GUERRA, Renato Borges. **O Teorema de Tales como Tema de Articulação nas Organizações Matemáticas para o Ensino Básico.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife. 2011.

ARRIBAS, Javier Sanz. **Diseño de Una App Educativa de Matemáticas.** Universidad de Valladolid. Trabalho de Conclusão de Curso. Faculdade de Educação. Valladolid. 2016.

ARTIGUE, Michèle. Ingeniería Didáctica. In: GÓMEZ, Pedro (Org). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Um Esquema para la Investigación y el Aprendizaje de las Matemáticas.** Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica. 1995.

AUGUSTO, Cesar. **Star Wars versus Star Trek: por que os fãs não podem ficar juntos?** Disponível em: http://startrekkers.com.br/comunicacoes/noticias-trekker/star-wars-versus-star-trek-por-que-nao-os-fas-podem-ficar-juntos.html. Acesso em 27/09/2017.

BAIGORRI, Laura. Game art. Nuevas Interfaces para el Arte y el Juego. **Revista Kepes**. Ano 7. Número 6. P. 151-165. 2010.

BECHARA, Evanildo C. **Dicionário Escolar da Academia Brasileira de Letras.** 3ª edição. São Paulo. Companhia Editora Nacional. 2011.

BORTOLOTI, Roberta D'Angela Meduni; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade a partir de Um Estudo do Conceito. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. Volume 20. Nº 01. P 269-293. São Paulo. 2018.

BOLEA, Pilar; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. La Transposición Didáctica de Organizaciones Matemáticas en Proceso de Algebrización: El Caso de La Proporcionalidad. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol. 21. Nº 03. P. 247-304. 2001.

BOLEA, Pilar. **El Proceso de Algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares**. Tese de Doutorado. Universidade de Saragoça. Saragoça. 2002.

BONGIOVANNI, Vincenzo. As Duas Maiores Contribuições de Eudoxo de Cnido <<A Teoria das Proporções e o Método de Exaustão>>. **Revista Ibero Americana de Educação Matemática**. Número 02. P. 91-110. 2005.

BONGIOVANNI, Vincenzo. O Teorema de Tales: Uma Ligação entre o Geométrico e o Numérico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Volume 25. P. 94-106. 2007.

BONGIOVANNI, Vincenzo. **Desenhar ou Construir.** Notas de Aula. 2009.

BORGES, Simone de S. *et al*.. **Gamificação Aplicada a Educação: Um Mapeamento Sistemático.** Anais do II Congresso Brasileiro de Informática Aplicada a Educação. 2013.

BORTOLOTI, Roberta D'Angela Menduni; BARBOSA, Jonei Cerqueira. A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de Uma Revisão Sistemática de Literatura. **Revista Boletim de Educação Matemática**. Volume 31. Número 59. P.947-967. Rio Claro. 2017.

BOULLOSA, Neca. **A disputa entre cinema e jogos na indústria do entretenimento.** Disponível em: http://cinemacomrapadura.com.br/colunas/games/244678/gameshq-a-disputa-entre-cinema-e-jogos-na-industria-do-entretenimento/. Acesso em 22/09/2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Brasília. 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular –** Educação é a base**.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Brasília. 2019.

BRAZ, Maria Edilande. **História da Matemática e Teatro nas Aulas sobre Teorema de Tales: Um *Script* Proposto.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2014.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of Didactical Situations in Mathematics.** Traduzido por Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland e Virginia Warfield. Kluwer Academic Publishers. New York. 2002.

BROUSSEAU, Guy. **Promenade avec THALES, entre la Maternelle et l'Université.** Boletim Inter-IREM. Coletânea Graduação. P.87-124. Lyon. 1995.

BROUSSEAU, Guy. Educación y didáctica de las matemáticas. **Revista Educación Matemática**. Vol. 12. Nº 01. P. 05-38. 2000.

BUTEAN, Alexandru, *et al* . **From Classic Math School Books to Interactive Gamified Elearning**. The 11th International Scientific Conference eLearning and Software for Education, Bucharest. 2015. Disponível em: https://www.ceeol.com/search/article-detail?id=289790. Acesso em 24/10/2017.

CAILLOIS, Roger. **Los Juegos y Los Hombres: La Máscara y El Vértigo.** Traducción de Jorge Ferreiro. 1ª reimpresión. México, D.F. Fondo de Cultura Econômica, S.A..1994.

CAROLEI, Paula; TORI, Romero. Gamificação Aumentada: Explorando a Realidade Aumentada em Atividades Lúdicas de Aprendizagem. **Revista TECCOGS**. Nº 9. Janeiro-Junho. 2014.

CARSTENS, Adam. BECK, John. Get ready for the gamer generation. **TechTrends: Linking Research & Practice to Improve Learning**. Volume 49. Number 03. P. 22-25. 2005.

CATER, Bruce; KANG, Sohee; POLLANEN, Marco. **An Efficient Gamified Model for Online Homework in the Mathematical Sciences**. International Symposium on Teaching Education & Learning. Kurune. 2015.

COELHO, Carlos Serra Magalhães; SANTOS, Jorge Manuel Ferreira de Almeida. Realidade Virtual & Investigação em Psicologia e no Exército. **Revista Militar**. Nº 2487. Abril. 2009. Disponível em: https://www.revistamilitar.pt/artigo.php?art_id=471. Acesso em 21/11/2017.

COSTA, Evandro Alexandre da Silva. **Analisando Algumas Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática no Ensino da Disciplina Desenho Geométrico por Meio da Teoria Fundamentada.** Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. 2013.

COSTA, Manoel dos Santos; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Proporcionalidade: Eixo de Conexão entre Conteúdos Matemáticos. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana**. Volume 6. Número 1. P 01-26. Pernambuco. 2015.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. Tradução de Giovanni Giuseppe Nicosia. **Boletim de Educação Matemática**. Volume 20. Número 28. P. 1179 – 1205. Rio Claro. 2007.

DETERDING, Sebastian, *et al*. **From Game Design Elements to Gamefulness: Defining Gamification.** *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference*: *Envisioning Future Media Environments*, Nova Iorque. 2011.

DOUADY, Régine. **Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet dans L'enseignement des Mathematiques – Une Realisation dans tout le Cursus Primaire.** Tese de Doutorado. Universidade de Paris VII. Paris. 1984.

DOUADY, Régine. Un Exemple D'ingénierie Didactique où Sont à L'oeuvre Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet. **Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes**. Fascicule 5. Séminaires de didactique des mathématiques. Nº 1. P. 1-17. 1987.

DOUADY, Régine. Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. Une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde**. Repères IREM**. n° 15, avril. Topiques Éditions. Paris. 1994.

FARDO, M. L. A Gamificação Aplicada em Ambientes de Aprendizagem. **Revista Renole - Novas Tecnologias na Educação.** Volume 11. Número 1. Cinted/UFRGS. P. 01-09. 2013.

FERREIRA, Bruno Santos. **O Uso da Gamificação como Estratégia Didática na Capacitação de Professores para o Uso de Softwares Educativos**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Universidade de Brasília. Brasília. 2015.

FERREIRA, Leonardo dos S. **Como o Teorema de Tales é Apresentado em Livros Didáticos do Nono Ano.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus. 2017.

FERREIRA, Patrícia Arriaga. Violência (IR)Real? Contributo para uma Reflexão Acerca do Impacto da Violência dos Jogos Electrónicos nas Crianças e nos Jovens. **Revista Caleidoscópio**. Nº4. Julho. P.95-106. 2011.

FIGUEIREDO, Mércia; PAZ, Tatiana; JUNQUEIRA, Eduardo. **Gamificação e Educação: Um Estado da Arte das Pesquisas Realizadas no Brasil.** Anais do IV Congresso Brasileiro de Informática na Educação. 2015.

FIOREZE, Leandra Anversa. **Atividades Digitais e a Construção dos Conceitos de Proporcionalidade: Uma Análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais.** Tese de Doutorado em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2010.

FLORES, Elvira G. Rincón; RIVERA, Lorenza Illanes Días. **Aprendizaje Gamificado en un Curso de Cálculo para Ingeniería**. Anais do II Congresso Internacional de Inovação Educativa. México. 2015. Disponível em: http://ciie.mx/memorias/.

FONSECA, Willian. **A História do FPS.** Tec Mundo. Disponível em: https://www.tecmundo.com.br/video-game-e-jogos/1950-a-historia-do-fps-.htm. Acesso em 27/11/2017.

GALEANO, Diego Alejandro Pérez; ÁLVAREZ, Carlos Augusto Montoya. **Ludificación de un Curso Universitário de Matemáticas. Diseño de un Simulador para la Formación del Futuro Empresario Colombiano.** Atas do 6º Simpósio Internacional em Educação e Comunicação. Volume 5. Aracajú. 2015.

GARCIA, Mada Victória Fernandez. **International Age Rating Coalition (IARC) Possibilitando a Unificação da Classificação Indicativa de Jogos Eletrônicos e Aplicativos no Mundo.** Trabalho de Conclusão de Curso em Comunicação Social. Universidade de Brasília. Brasília. 2015.

GERONIMO, Rafael Rix. **Elaboração e Proposta de um RPG (*Role Playing Game*) a partir do Papiro de Rhind.** Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2011.

GODINHO, Jacinto. Com Quantas Imagens se Faz um Crime. In: **Imagem e Pensamento**. Martins, Moisés de Lemos, *et al*. Universidade do Minho. 1ª edição. Grácio Editor. Coimbra. 2011.

GOMES, Marcelo dos Santos. **Gamificação e Educação Matemática: Uma Reflexão pela Ótica da Teoria das Situações Didáticas.** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Mestrado em Educação Matemática. São Paulo. 2017.

GUEDES, Roberto. **A incrível história dos X-MEN.** Disponível em: http://hqmaniacs.uol.com.br/principal.asp?acao=materias&cod_materia=518. Acesso em 27/09/2017.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. **Teorema de Thales: Uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2000.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens: O Jogo como Elemento da Cultura.** Tradução João Paulo Monteiro. 3ª reimpressão. 5ª edição. São Paulo. Perspectiva. 2008.

JACKSON, Steve. GURPS: ***Generic Universal Role-Playing System***: Módulo Básico. Tradução de Douglas Quinta Reis. Revisão Cynthia Monegaglia Fink. Editora Devir. São Paulo. 1994.

SOUSA JUNIOR, Valdir D., *et al*.. **MOVER: Serious Game Aplicado à Reabilitação Motora Usando Sensor de Movimento Knect.** XXXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. Maceio. 2013.

KAAP, Karl M. **The Gamification of Learning and Instruction. Game-Based Methods and Strategies for Training and Education.** Pfeiffer. São Francisco. 2012.

KUHN, Christian Carlos. Intuição, Heurística e Insight. **Revista Alamedas**. Volume 03. Número 01. P. 01-12. Toledo. 2015.

LEITE, Rubervan da Silva. **Formação de Professores de Matemática e Tecnologias Digitais: Um Estudo sobre o Teorema de Tales.** Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2017.

MAIA, Fernanda. **World of Warcraft: Comunicação, Comércio e Sociedade.** XIII SBGames. P. 663-666. Porto Alegre. 2014.

MARINHO, Aldenia da Silva; *et al*. Aplicação Móvel de Matemática no Ensino Básico para Crianças do Ensino Fundamental I do 1º ao 3º Ano. **Revista Research, Society and Development.** Volume 03. Número 01. Páginas 69 - 90. 2016.

MAZETTO, Francisco de Assis Penteado. **O terrorismo na história**. Juiz de Fora, 2002. Disponível em: http://www.ecsbdefesa.com.br/fts/Terrorismo.pdf. Acesso em 27/11/2017.

MEDINA, Ana Isabel Cárceres. **Viaje Espacial: Una Experiencia de Gamificación en la Formación de Maestros.** 17ª Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Comunicação Científica. Cartagena. 2015.

MCGONIGAL, Jane. **A Realidade em Jogo: Por que os Games nos Tornam Melhores e como Eles Podem Mudar o Mundo.** Tradução Eduardo Rieche. Best Seller. Rio de Janeiro. 2012.

MEDEIROS, Ana Paula Nunes. **A Gamificação Inserida como Material de Apoio que Estimula o Aluno no Ensino de Matemática.** Trabalho de Conclusão de

Curso. Especialização em Mídias na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2015.

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Revista Proposições**. Volume 3. Número 01. P 39-54. 1992.

MOISE, Edwin E.; DOWNS JR, Floyd L. **Geometria.** Tradução Addison Wesley. 2ª reimpressão. Cali. Editora Fundo Educativo Interamericano. 1972.

OLIVEIRA, Osvaldo L.; BARANAUSKAS, M. Cecília C. **Interface entendida como um espaço de comunicação**. Atas do II Workshop sobre Fatores Humanos em Sistemas Computacionais – IHC'99. Campinas. 1999

OLIVEIRA, Isabella A. F. G.; SANTOS, Marcelo Câmara. **O Ensino Fundamental e a Resolução de Problemas de Proporção Simples: Uma Análise das Estratégias.** CD – 23a ANPEd. 2000.

PAIS, Luiz Carlos. **Estratégias de ensino da geometria em livros didáticos de matemática em nível de 5ª à 8ª série do ensino fundamental**. In: III SIPEM, 2006, Águas de Lindóia. Anais do III Sipem. São Paulo: SBEM, 2006. v. 01. p. 01-18. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_29/estrategias.pdf. Acesso em 26/03/2018.

PELED, Shir; SCHOCKEN, Shimon. **Mobile Learning and Early Age Mathematics**. 10th International Conference Mobile Learning 2014. Espanha. 2014. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED557203. Acesso em 24/10/2017.

PESSANHA, Rogério Maurício Fernandes. **Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos na Educação de Jovens e Adultos: Uma Aprendizagem Significativa.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Estadual do Norte Fluminense. Goytacazes. 2017.

POLTRONIERI, Fabrizio Augusto. Apontamentos sobre Novos Rumos Estéticos para as Sociedades Gamificadas. In: **Gamificação em Debate**. Organizado por Lucia Santaella, Sérgio Nesteriuk e Fabricio Fava. P. 83-93. Editora Blucher. São Paulo. 2018.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Tradução e Adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Segunda Reimpressão. Editora Interciência. Rio de Janeiro. 1995.

PONTE, João Pedro da. Uma Agenda para Investigação sobre Padrões e Regularidades no Ensino-Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores. In: **Padrões: Múltiplas Perspectivas e Contextos em Educação Matemática**. Organização de Izabel Vale e Ana Barbosa. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior. Portugal. 2009.

PORTUGAL. **Geometria e Medida no Ensino Básico.** Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. 2011.

PRENSKY, Marc. **Digital Natives, Digital Immigrants.** MCB University Press. Volume 09. Número 05. 2001. Disponível em: http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf. Acesso em 19/10/2017.

REIS, Paulo Fernando Silva dos. **O Teorema de Tales por Meio de Atividades Investigativas.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Estadual do Norte Fluminense. Goytacazes. 2014.

REZENDE, Sérgio Ricardo Abreu. **Ensino Desenvolvimental e Investigação Matemática com o Geogebra: Uma Intervenção Pedagógica sobre o Teorema de Tales.** Dissertação de Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Goiânia. 2016.

RIBERA, Ricardo. A Guerra Fria: Breves Notas para um Debate**. Revista Novos Rumos**. Marília. V 49. Número 01. p. 87-106. Jan-Jun. 2012.

RIBEIRO, Bessie de Assumpção; MOTA, Rosa Amelita Sá Menezes da; OLIVEIRA, Altemar Sales de. **O Uso da Realidade Virtual como Auxiliar no Tratamento de Indivíduos com Déficit de Memória e Aprendizagem Oriundos do Transtorno de Estresse Pós Traumático.** Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia. Rio de Janeiro. 2013.

RINCÓN, E.; ILLANES, L. **Aprendizaje Gamificado en un curso de Cálculo para Ingeniería**. Memorias del II Congreso Internacional de Innovación Educativa. Disponível em: http://ciie.mx/memorias/. Acesso em 16/10/2017.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática.** Rio de Janeiro. Zahar. 2012.

RUIZ, Adriano Rodrigues; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. O Conceito de Proporcionalidade. **Revista da Faculdade de Educação**. Volume 16. P 97-131. São Paulo. 1990.

SALEN, Katie, *et al*. **Quest to Learn. Developing School for Digital Kids.** Londres. The MIT Press. 2011.

SANTOS, Márcia Nunes dos. **A História da Matemática como Desencadeadora de Atividades Investigatórias sobre o Teorema de Tales: Análise de Uma Experiência Realizada com Uma Classe de 9º Ano do Ensino Fundamental de Santos – Ouro Preto (MG).** Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. 2012.

SANTOS, Rosana Perleto dos. **As Dificuldades e Possibilidades de Professores de Matemática ao Utilizarem o Software Geogebra em Atividades que Envolvem o Teorema de Tales.** Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2010.

SCHITCOSKI, Robertson. **Uma Arquitetura Modular para Sistemas de Treinamento Militar em Operações Táticas.** Dissertação de Mestrado. Ministério da Defesa. Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro. 2009.

SEIXAS, Luma da Rocha. **A Efetividade de Mecânicas de Gamificação sobre o Engajamento de Alunos no Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Pós Graduação em Ciência da Computação. Recife. 2014.

SERPE, Rachel L., **Gamification Through Algebraic Coding**. Education and Human Development Master's Theses. 711. http://digitalcommons.brockport.edu/ehd_theses/711. Acesso em 23/10/2017.

SHELDON, Lee. **The Multiplayer Classroom: Designing Cousework as a Game.** Boston. CENGACE Learning. 2012.

SILVA NETO, Benjamim Cardoso da. **História da Matemática e Produção de Significado: Proposta de Tarefas Didáticas para o Ensino do Teorema de Tales.** Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. Goiânia. 2016.

SOARES, Thiago. Abordagens teóricas para estudos sobre cultura pop. LOGOS 41 - Cidades, Culturas e Tecnologias Digitais. Volume 2. Número 24. P.01-14. 2014.

SOUZA, Denize da Silva. **O Universo Explicativo do Professor de Matemática ao Ensinar o Teorema de Tales: Um Estudo de Caso na Rede Estadual de Sergipe.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Universidade Anhanguera. São Paulo. 2015.

TORRES, Enma Janeiro. **Scratch y Videojuegos Aplicados a la Enseñanza de la Geometría**. Universidade Internacional de Rioja. Trabalho de Conclusão de Curso. Faculdade de Educação. Cali. 2016.

TRAUMANN, Thomas. **Os Novos Reis do Xadrez.** Disponível em: http://revistaepoca.globo.com/Revista/Epoca/0,,EDR74688-6014,00.html. Acesso em 16/11/2017.

URRUTIA, Kathleen. **Gamification and Algebra 1: Will a Gamified Classroom Increase Student Achievement and Motivation?** Universidade da California. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. California. 2014.

WU, Michael. **What is Gamification, Really?** Disponível em: https://community.lithium.com/t5/Science-of-Social-Blog/What-is-Gamification-Really/ba-p/30447_Acesso em 29/09/2017.

YÁNEZ, Ortegón; EMILIA, Martha. **Gamificación de las Matemáticas en la Enseñanza del Valor Posicional de Cantidades**. Universidade Internacional de Rioja. Dissertação de Mestrado em E-learning e Redes Sociais. Cali. 2016.

ZICHERMANN, Gabe; CUNNINGHAM, Christopher. **Gamification by Design: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps.** Canadá. O'Reilly Books. 2011.

Anexo A: Parecer do Comitê de Ética da PUC-SP[33]

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO - PUC/SP

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: GAMIFICAÇÃO, ENGENHARIA DIDÁTICA E PROPOR-CIONALIDADE: O CASO DO TEOREMA DE TALES

Pesquisador: Rafael Rix Geronimo

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 16756719.1.0000.5482

Instituição Proponente: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matématica

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.727.749

Apresentação do Projeto:

Trata-se de protocolo de pesquisa para elaboração de Tese de Doutorado no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPG em EDM), vinculado à Faculdade de Ciências Exatas eTecnologia (FCET) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).

Projeto de pesquisa de autoria de Rafael Rix Geronimo, sob a orientação da Profa. Dra. Maria José Ferreirada Silva.

Projeto de pesquisa ora apresentado, informa resumidamente que "(...) Propor novas estratégias e abordagens para o ensino é uma das responsabilidades da área de educação matemática. A partir dessa premissa, exploramos gamificação como estratégia de ensino de matemática para tratar do Teorema de Tales no ensino fundamental. Levantamos problemas relacionados ao ensino de matemática com gamificação e relacionados ao ensino do teorema de tales para criar uma engenharia didática com gamificação para explorar as potencialidades didáticas dessa abordagem."

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Construir uma sequência de ensino para Teorema de Tales articulada com gamificação.

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes **CEP:** 05.015-001
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br

[33] O nome do projeto foi modificado depois da qualificação.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
O pesquisador responsável apresenta como avaliação dos RISCOS e BENEFÍCIOS:

Riscos:
Os riscos são considerados baixos a saúde dos estudantes.

Benefícios:
Entender de maneira local a complexidade dos fenômenos de classe.Entender as relações entre ensino e aprendizagem.Distinguir relações entre objetos de conhecimento.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
A exposição do Projeto é clara e objetiva, feita de maneira concisa e fundamentada, permitindo-se concluir que a pesquisa possui uma linha metodológica definida, base da qual será possível auferir conclusões consistentes.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:
A lista de documentos obrigatórios necessários a análise e revisão ética de seu projeto de pesquisa pelo Comitê de Ética em Pesquisa da PUC/SP campus Monte Alegre (CEP-PUC/SP) é a seguinte:

1. Folha de Rosto - OK;
2. TCLE - OK;
3. Ofício de Apresentação - OK;
4. Projeto de Pesquisa - OK;
5. Autorização para realização da Pesquisa - OK;
6. Parecer de mérito acadêmico - OK;

Esta lista está disponível no site: www.pucsp.br/cometica/documentos-obrigatorios

Observação: aconselhamos que antes de qualquer procedimento de submissão na Plataforma Brasil, seja consultado o referido sitio, onde há vídeos tutoriais indicando o correto processo de submissão do projeto de pesquisa de acordo com as orientações do CEP-PUC/SP.

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes **CEP:** 05.015-001
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br

Recomendações:
Recomendamos que o desenvolvimento da pesquisa siga os fundamentos, metodologia, proposições, pressupostos em tela, do modo em que foram apresentados e avaliados por este Comitê de Ética em Pesquisa. Qualquer alteração deve ser imediatamente informada ao CEP-PUC/SP, indicando a parte do protocolo de pesquisa modificada, acompanhada das justificativas.

Também, a pesquisadora deverá observar e cumprir os itens relacionados abaixo, conforme indicado pela Res. 466/12:

a) desenvolver o projeto conforme delineado;
b) elaborar e apresentar o relatório final;
c) apresentar dados solicitados pelo CEP, a qualquer momento;
d) manter em arquivo, sob sua guarda, por um período de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa, os seus dados, em arquivo físico ou digital;
e) encaminhar os resultados para publicação, com os devidos créditos aos pesquisadores associados e ao pessoal técnico participante do projeto;
f) justificar, perante o CEP, interrupção do projeto.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:
Sem pendências ou lista de inadequações, portanto, recomenda-se o encaminhamento da aprovação deste protocolo de pesquisa.

Considerações Finais a critério do CEP:
O Colegiado do Comitê de Ética em Pesquisa, campus Monte Alegre da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - CEP-PUC/SP, aprova integralmente o parecer oferecido pelo(a) relator(a).

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1279174.pdf	30/10/2019 13:18:15		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento /	TCLE.docx	30/10/2019 13:17:00	Rafael Rix Geronimo	Aceito

Justificativa de Ausência	TCLE.docx	30/10/2019 13:17:00	Rafael Rix Geronimo	Aceito
Outros	Termo_de_Autorizacao.pdf	25/09/2019 08:39:09	Rafael Rix Geronimo	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Oficio_Apresentacao.docx	26/06/2019 16:32:11	Rafael Rix Geronimo	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto.docx	26/06/2019 16:29:05	Rafael Rix Geronimo	Aceito
Parecer Anterior	Parecer_PUC.pdf	26/06/2019 16:27:28	Rafael Rix Geronimo	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_Rosto.pdf	26/06/2019 16:26:41	Rafael Rix Geronimo	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

SAO PAULO, 26 de Novembro de 2019

Assinado por:
Antonio Carlos Alves dos Santos
(Coordenador(a))

Anexo B: Termo de Assentimento para Participante

TERMO DE ASSENTIMENTO PARA PARTICIPANTE

Prezado(a) Participante,

Esta pesquisa é sobre Gamificação, Engenharia Didática e Proporcionalidade e está sendo desenvolvida por Rafael Rix Geronimo, do Curso de Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da Profa. Dra. Maria Jose Ferreira da Silva.

O objetivo do estudo é criar e aplicar uma sequência de ensino. A finalidade deste trabalho é contribuir para conhecer potencialidades e limitações da gamificação como estratégia de ensino.

Solicitamos a sua colaboração respondendo atividades, como também sua autorização para apresentar os resultados deste estudo em eventos da área de ensino e publicar em revista científica, livros ou eventos; sem prejuízo do direito dos participantes ao sigilo e anonimato, ou a divulgação de qualquer outro dado secundário que poderá vir revelar-lhe a identidade. Por ocasião da publicação dos resultados, seu nome será mantido em sigilo absoluto. Informamos que essa pesquisa tem potencialmente poucos riscos à saúde de seus participantes.

Esta pesquisa foi aprovada por um Comitê de Ética em Pesquisa – CEP da PUC/SP, que é um colegiado interdisciplinar e independente, com função pública, que deve existir nas instituições que realizam pesquisas envolvendo seres humanos no Brasil, criado para defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade, contribuindo dessa forma, no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos (Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos - Res. CNS/MS nº 466/2012 complementada pela Res. CNS/MS nº 510/2016).

Em caso de qualquer dúvida, o CEP da PUC/SP se reúne à Rua Ministro de Godói, 969 – sala 63 C, no Bairro de Perdizes, CEP: 05.015-001, no Município de São Paulo. Podendo ser contatado pelo telefone: (11) 3670-8466, ou pelo e-mail: cometica@pucsp.br.

Esclarecemos que sua participação no estudo é voluntária e, portanto, você não é obrigado(a) a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas pelo Pesquisador. Caso decida não participar do estudo, ou resolver a qualquer momento desistir do mesmo, não sofrerá nenhum dano. Os pesquisadores estarão à sua disposição para qualquer esclarecimento que considere necessário em qualquer etapa da pesquisa.

____

Assinatura do pesquisador

Eu aceito participar da pesquisa, que tem o objetivo aplicar uma sequência gamificada de ensino. Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir sem que nada me aconteça. Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus pais e/ou responsáveis. Li e concordo em participar como voluntário da pesquisa descrita acima. Estou ciente que meu pai e/ou responsável receberá uma via deste documento.

São Paulo, ____de __________de 2020

____

Assinatura do participante

Contato com o Pesquisador Responsável:

Caso necessite de maiores informações sobre o presente estudo, favor ligar para o pesquisador:

Telefone: (11) 971492148 ou entre em contato com a escola

Apêndice A: O Labirinto de Alium

- Traidor, traidor! Que grande traidor!

A revolta fazia com que o grande Alium tremesse, ficando vermelho.

Durante séculos o reino vivia em riqueza devido às bênçãos dadas pela gema do rei. Essa era uma pedra preciosa oferecida ao reino pela ordem dos magos, devido ao seu poder, as colheitas sempre eram fartas e o povo jamais sofria com doenças.

O rei era responsável por manter a ordem dos magos e por não aceitar qualquer feiticeiro ou magia, que não fizesse parte da ordem, em seu reino.

Gerações se passaram com o acordo sendo cumprido.

Uma nova geração surgia e o rei Audendun chegou ao trono. Esse soberano não se preocupava com seu dever e parecia apenas interessado em aproveitar a riqueza.

Desfrutava dessa situação para oferecer banquetes a clérigos rebeldes, que não respeitavam qualquer concílio ou regra, desde que fizessem truques maravilhosos e deixou de escutar ou dar tributos à ordem dos magos.

Era comum ouvir, pelos corredores da ordem, vários magos revoltados, desde os mais jovens até os mais antigos.

Dentre todas, a pior situação era a de Alium, como líder, não podia deixar que isso ficasse assim. Como resposta, o grande líder se trancou na biblioteca da ordem e lá ficou por meses. Depois de algumas semanas era possível ouvir um sussurro constante, como de alguém conjurando encantamentos e, pela noite, luzes de diferentes cores podiam ser vistas saindo da biblioteca. Como as portas e janelas estavam seladas por magia, ninguém conseguia averiguar o que estava acontecendo.

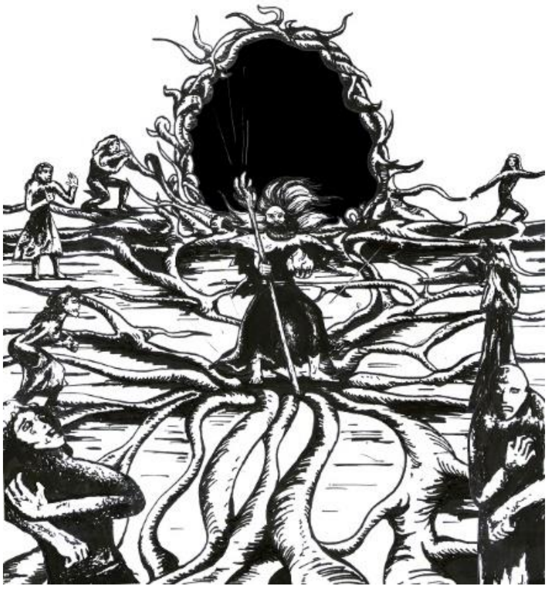
Até que um dia, uma forte explosão pôde ser ouvida e as portas da biblioteca foram escancaradas. Um forte cheiro de enxofre era tudo que sobrou no lugar, muitos reagentes mágicos e vários livros de alta magia sumiram, junto com o líder da ordem dos mágicos.

Vários altos magos foram mandados aos quatro cantos, procurar por Alium, mas nada se sabia sobre seu paradeiro. Todos ficaram chocados, menos o rei, que continuava em sua vida de prazeres.

Certo dia, em um de seus maravilhosos banquetes, o rei Audendun viu um mendigo, com um cajado, entrando no grande salão. Pouco se importou até que esse ser em farrapos teve a ousadia de se sentar no lugar de honra da mesa. Mandou que os guardas jogassem esse louco nas masmorras. Mas logo que alguns deles se aproximaram, viraram pedra. O alvoroço foi geral! Entre gritos e correria, essa estranha figura se levantou e, assim que começou a falar com sua voz retumbante, todos se paralisaram e ficaram mudos:

-Por muito tempo aceitei essa desonra! Por muito tempo não fiz nada diante desse insulto! Agora acabou!

Muitos reconheceram a voz de Alium. Nesse momento, o mago bateu o cajado no chão e após isso, o rei se transformou em uma grande árvore e suas raízes penetraram nas pedras do grande salão. A pedra do rei flutuou até as mãos do mago e um portal apareceu a sua frente, ele entrou e sumiu.



O tumulto foi geral, muitos choravam, outros corriam e houve quem gritou sem parar. Os magos condenados, que faziam parte do banquete deliberaram por instantes e entraram no portal, dizendo que resolveriam a situação. Após dias, semanas e meses nenhum voltou. Pior que isso, as colheitas começaram a murchar e surgiram doenças na população! O reino ruía!

Logo, os maiores guerreiros resolveram entrar no portal do grande salão real, que continuava aberto. Assim que entravam, o portal mudava de cor. Só que ninguém jamais voltou. Foi solicitada ajuda da ordem dos magos, que se recusou a enfrentar o grande Alium, famoso por seus hábitos estranhos e pelo grande poder.

O desespero dos grandes lordes fez com que fosse lançado o desafio a todos os reinos, de que aquele que entrasse pelo portal e trouxesse a pedra do rei seria coroado como novo soberano e, com essa recompensa, muitos viajantes e aventureiros entraram pelo portal, mas jamais retornaram.

Nenhum até então, porque a grande Prudens e sua companhia estavam prestes a chegar.

Essa companhia era diferente de tudo o que se podia esperar, era formada de 4 pessoas: Prudens, Adjútor, Pupillam e Dominus. Prudens era o grande prodígio e uma integrante feminina do grupo, mas devia muito a Dominus, seu mentor mais velho e que muito ensinou-lhe. Pupillam era a integrante mais nova, dotada de grande inteligência, prometia ser ainda maior que Prudens no futuro. Já Adjútor precisava de um pontapé inicial, ele era expert em completar raciocínios e sempre tinha à mão ferramentas, que se mostravam essenciais.

Passavam pelos vilarejos e cidades, ajudando as pessoas. Muitas ficavam incrédulas que poderiam ser ajudadas pelo quarteto, mas era difícil depender do humor dos magos. Muitas vezes, os poderosos feiticeiros simplesmente se recusavam a ajudar mortais em seus problemas “pequenos” e preferiam se dedicar a desafios superiores. Assim, Prudens, Adjútor, Pupillam e Dominus andavam pelo reino, com o lema: “o conhecimento dá poder aos homens”.

Ao saber do fatídico banquete, decidiram ir ao palácio. Sequer foram recebidos pelos nobres, que estavam no castelo. Dia após dia solicitavam audiência, a qual era negada. E, enquanto isso, magos com poderosos encantos, guerreiros, com armaduras brilhantes, entravam pelo portal. Como ninguém retornava, o desespero atacava a todos. Em uma manhã, a estranha companhia foi aceita no castelo e grande foi o espanto quando pediram para entrar pelo portal.

Dominus, como o mais velho, tomou a palavra:

- Depois de conversarmos, percebemos que nem a magia e nem a força bruta foram suficientes para vencer o grande Alium. Assim, entraremos no portal para testar outra grande qualidade. O silêncio deu lugar à pergunta, que saiu de todas as gargantas: “Qual? Qual? Qual?”.

Dominus, pacientemente, esperou o silêncio para responder:

- A inteligência!

Alguns riram, outros deixaram o salão, mas frente ao fato de que nada tinham a perder, os nobres autorizaram a companhia a entrar pelo portal. Um a um todos entraram e após a entrada do último, o portal mudou de cor.

Primeiro Desafio

Nesse novo lugar, era possível perceber que estas não eram as terras do reino. Olhando para cima, era como se fosse noite, mas mal havia começado o dia! Com certeza isso é magia! Dos dois lados do caminho existia uma cerca viva de árvores, da mesma espécie da que cresceu no salão do castelo. Era impossível seguir qualquer caminho que não em frente. Dessa forma, os viajantes seguiram sempre em linha reta.

O chão era de uma fina areia. Depois de alguns minutos, o caminho parecia acabar. Entretanto, era possível distinguir algumas sombras. Essas criaturas pareciam serem feitas de um tipo de energia e não tinham pés, também não tinham rostos e só o que se podia ver eram túnicas escuras, flutuantes.

O grupo decidiu seguir até esses estranhos. Mal terminaram e foi possível escutar:

-Bem-vindos ao desafio de Alium! Aqui não há alternativa, somente a resposta certa pode fazê-los prosseguir! Saibam que daqui não existe volta!

- Qual é o enigma? Perguntou Dominus.

- O desafio é nos ajudar em um ritual para sair dessa prisão. Fomos exilados por usar encantamentos proibidos e temos que fazer o contrafeitiço.

- Mas como ajudar? Perguntou Prudens.

- O feitiço precisa ser recitado por quatro feiticeiros alinhados, mas a mesma distância uns dos outros. Os aventureiros reviraram suas mochilas para verem o que trouxeram e encontraram um cabo de vassoura, um pedaço de barbante e um giz. Como resolver esse enigma?

Os aventureiros contaram como fazer e tão logo os magos se colocaram nos lugares certos começaram a cantar. Era uma música que parecia conhecida, mas ninguém conseguia descobrir qual, pois era cantada em uma língua muito estranha. Terminado o ritual, os espectros começaram a desaparecer, não era possível saber se estavam se libertando ou ficando invisíveis.

Assim que terminaram de sumir, um novo portal mágico se abriu e os aventureiros souberam que venceram o desafio.

Segundo Desafio

Quando passaram pelo portal, entraram em um lugar muito escuro. Seguindo por esse novo caminho, nossos heróis escorregaram, reclamando, desequilibrando e trombando uns nos outros. Em certo momento, foi possível ver uma luz. Se animaram e seguiram.

Olhando em volta, perceberam que estavam em um lugar encharcado e o caminho reto era raso, mas os lados pareciam fundos e decidiram não o explorar!

Depois de percorrerem certa distância, encontraram um grande sapo, maior que um ser humano. A surpresa fez com que Pupillam gritasse:

-Um sapo! Que medo!

Os outros integrantes da comitiva acharam graça e Dominus riu abertamente. Ao observar a conversa, o sapo indagou:

-Não sei o que é pior! Se o medo desse inseto estranho, ou esses outros achando graça! Acho melhor comer todos vocês para ninguém me perturbar!

Frente a essa ameaça, Prudens se adiantou e explicou ao grande sapo:

-Não somos insetos, estamos em uma grande aventura para desvendar os enigmas de Alium!

O sapo olhou demoradamente para cada um dos integrantes da companhia, desconfiado. Pensou um pouco e disse:

- Nesse caso, precisam invocar um novo portal! Para fazer isso primeiro devem pegar pedras no chão e desenhar um triângulo. Sabiam que as pedras desse lugar têm grande poder?

Esperou que os aventureiros fizessem como pedido, depois continuou dizendo:

- Essa é a primeira parte do ritual. Agora devem pegar outras pedras e montar outros dois triângulos. O segundo deve ter dois terços e o terceiro precisa ter três quartos do perímetro do primeiro triângulo. Como resolver esse enigma?

Terceiro Desafio

Tão logo terminaram de esboçar os triângulos, as riscas de giz se iluminaram e um novo portal apareceu, os aventureiros se despediram do grande sapo e continuaram sua jornada. Chegaram em outro lugar que parecia a entrada de uma caverna, uma cabeça de cobra tinha sido esculpida de maneira que quando entravam, pareciam estar sendo engolidos pelo grande animal. Com uma sensação de medo, entraram e logo que terminaram, a boca se fechou, prendendo todos.

Avançando por esse novo lugar, perceberam que se tratava de uma caverna e que em certo ponto o caminho parecia terminar. Quando chegaram ao que parecia um beco sem saída, perceberam uma criatura que parecia um dragão, encarando-os.

Quando viram o grande ser mágico, ficaram paralisados e puderam ouvir:

- Parece que estão presos, querem saber como sair?

Acenaram com a cabeça, pois ainda estavam sob o poder do dragão. Puderam ouvir a risada da grande fera, que continuou dizendo:

- Devem me dizer como fazer para alinhar três de vocês antes de recitar a palavra mágica.

Após uma pequena pausa, continuou dizendo:

- Mas devem fazer de um jeito em que as distâncias quadrupliquem. Caso consigam, utilizarei meu poder para conjurar um portal e poderão seguir em frente. Darei um presente, para facilitar esse desafio.

Dizendo isso, seus olhos brilharam e magicamente surgiu um estojo com um compasso, uma régua e um esquadro. Como superar esse desafio?

Quarto Desafio

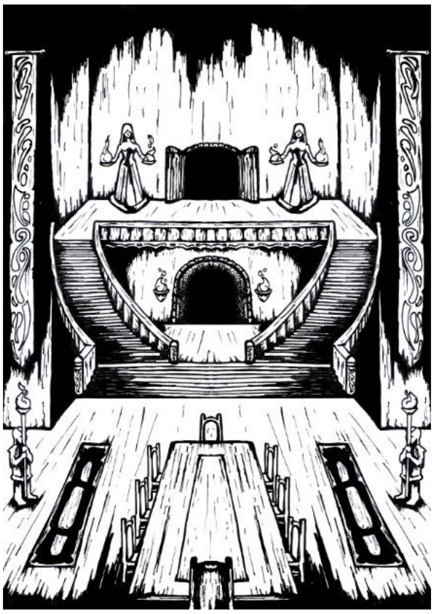
Ao se colocarem nos lugares corretos, o ser mágico disse: “patentibus”. Neste momento os aventureiros foram transportados a uma ilha, em que a única coisa que podiam ver era um casebre. Ao se aproximarem, viram um pergaminho mágico pregado na porta, quando o pegaram, visualizaram as palavras se formando:

“Bem-vindos ao grande desafio! Para abrir a porta, é necessário desenhar três paralelas e depois outras duas retas, que interceptem as três primeiras. Meçam e digam se existe alguma relação entre essas medidas.”

Quinto Desafio

Quando responderam ao desafio a porta do casebre se abriu e ao entrarem, enxergaram uma ampla mansão. Não acreditaram no que viram, só podia ser uma brincadeira desse mago lunático!

Apesar disso, seguiram pela única porta aberta.



Quanto entraram na sala encontraram um ser feito de madeira que parecia estar organizando e limpando uma pilha de livros, quando viu os aventureiros, disse:

- Bem-vindos aventureiros! O que desejam?

- Viemos falar com Alium – responderam.

- Para falar com meu mestre devem desbloquear a porta, isso só acontecerá se encontrarem a chave correta.

- E como faremos isso? Perguntou Adjutor.

- A chave que abre essa porta é em forma de quadrado, vejam o buraco na parede.

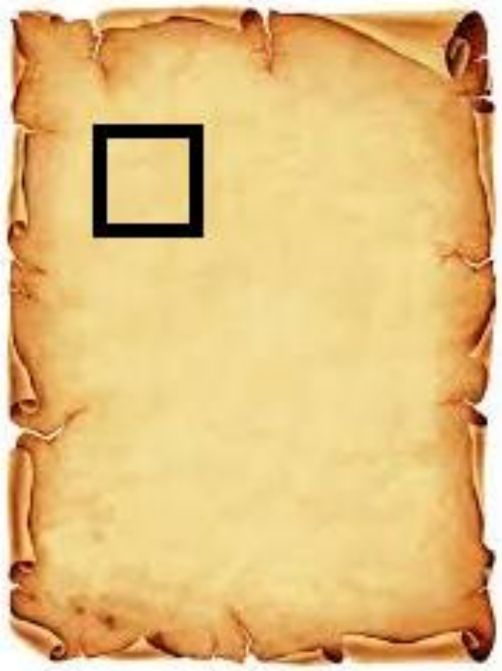
Quando apontou é que os aventureiros perceberam que existia um buraco com forma de um quadrado vazado na parede, ao lado da porta. Continuou dizendo:

- Para encontrar a chave devem fazer uma mágica! No meu pergaminho mágico existe o desenho de um quadrado menor que o necessário para abrir a porta, caso esbocem outro quadrado com o triplo das medidas de seus lados, magicamente ele se materializará e poderão abrir a porta. Deixem procurar o pergaminho.

Depois de procurar um pouco o ser mágico disse:

- Aqui está!

Entregou um pergaminho aos aventureiros onde estava esboçado quadrado:



Ao responder ao enigma, a última porta se abriu e puderam ver Alium lendo um livro, quando percebeu que a porta estava aberta interrompeu sua leitura e disse:

- Que tipo de seres venceram meu desafio? Nem guerreiro em armadura e nem mago com feitiços. Os únicos que conseguiram chegar ao fim de meu teste foram pequenos seres, como o mundo é estranho. Isso pode querer dizer que mesmo as menores criaturas têm alguma importância. Que interessante!

Pronunciou uma palavra mágica.

- *Videtur*!

Nesse momento, todos conseguiram ver a pedra do Rei na mão de Alium. O mago a estendeu aos aventureiros e Prudens perguntou:

- E agora amigos? Quem será o rei?

Responderam ao mesmo tempo:

- Todos nós!

Disseram e começaram a rir.