Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC-SP

Débora Cristina Borba Pereira Favero

As mudanças geradas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em uma coleção de livros didáticos para o ciclo de alfabetização na abordagem do pensamento algébrico

Mestrado em Educação Matemática

São Paulo
2020

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC-SP

Débora Cristina Borba Pereira Favero

As mudanças geradas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em uma coleção de livros didáticos para o ciclo de alfabetização na abordagem do pensamento algébrico

Mestrado em Educação Matemática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Profª. Drª. Ana Lúcia Manrique.

São Paulo
2020

Favero, Débora Cristina Borba Pereira
As mudanças geradas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em uma coleção de livros didáticos para o ciclo de alfabetização na abordagem do pensamento algébrico / Débora Cristina Borba Pereira Favero. - São Paulo: [s.n.], 2020.
191p.

Orientador: Profª. Drª Ana Lúcia Manrique.
Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 2020.

1. Pensamento Algébrico. 2. Livros Didáticos. 3. Anos Iniciais. 4. BNCC. I. Manrique, Ana Lúcia. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educacão:Matemática. III. Título.

Débora Cristina Borba Pereira Favero

As mudanças geradas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em uma coleção de livros didáticos para o ciclo de alfabetização na abordagem do pensamento algébrico

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática.

Aprovado em: _____/______/________

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Ana Lúcia Manrique – PUC-SP

Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima – PUC-SP

Prof. Dr. Gilberto Januario – UFOP

Aos meus pais, Nilza e José, meus maiores exemplos e grandes incentivadores de meus estudos; e ao meu marido, Fabio, pelo apoio, carinho e compreensão.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 88887.185895/2018-00.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 88887.185895/2018-00.

Agradecimentos

Gostaria de prestar meus agradecimentos por aqueles que tanto me ajudaram nesta trajetória:

à Profª. Drª. Ana Lúcia Manrique, pela orientação, dedicação e confiança do início ao fim do percurso desta pesquisa;

ao Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima e ao Prof. Dr. Gilberto Januario, que aceitaram o convite para fazer parte da banca e que contribuíram generosamente com este trabalho;

aos professores do Programa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da PUC-SP, que tanto se preocupam com a formação de seus alunos, contribuindo não só para minha formação pessoal e acadêmica, mas para o percurso deste trabalho;

aos colegas, Ederson, João, Laura, Milenko e Patrícia, que estiveram presentes nesta trajetória;

a todos os meus amigos e familiares que me apoiaram, especialmente meus pais, Nilza e José, e meu marido Fabio, que tanto me incentivaram neste itinerário.

FAVERO, Débora Cristina Borba Pereira. *As mudanças geradas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em uma coleção de livros didáticos para o ciclo de alfabetização na abordagem do pensamento algébrico*. 2020. 191 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma pesquisa de abordagem qualitativa, do tipo análise documental, cujo principal objetivo é comparar as praxeologias, segundo Chevallard, na abordagem do pensamento algébrico de duas edições de uma coleção de livros didáticos para o ciclo da alfabetização — três primeiros anos do Ensino Fundamental —, sendo uma edição anterior à homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); e outra por ela orientada. Para isso, analisamos a parte da BNCC referente aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tendo como referencial as categorias do pensamento algébrico propostas por Blanton e Kaput; e depois analisamos as atividades de duas edições de uma mesma coleção de livros para o ciclo da alfabetização, por meio da organização praxeológica de Chevallard, que propiciou condições de comparar as tarefas, as técnicas e os discursos tecnológico-teórico das atividades, à luz das categorias de Blanton e Kaput. A coleção de livros escolhida teve uma edição aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2016, quando a Base ainda não estava homologada; e outra edição aprovada pelo PNLD 2019, em que as coleções buscaram se ajustar às habilidades e às competências propostas pela BNCC. As análises mostraram que houve uma reorganização nas coleções. Diversas tarefas passaram a ser mais bem distribuídas ao longo dos três anos. No entanto, a maioria das categorias sofreu diminuições, abrindo espaço para um trabalho mais intencional, como no caso de sequências, incluindo a descrição de regras de formação e criação de sequências; e com a igualdade, propondo mais atividades em que há explicitamente a utilização do sinal de igualdade, além de abordar, inclusive, verificação e justificativa de igualdade, com um caráter mais estrutural e argumentativo. Podemos dizer que as abordagens concernentes ao pensamento algébrico foram ampliadas, no entanto, nos preocupa que o predomínio de sequências e igualdade, com as características do sistema de numeração decimal — três assuntos mais abordados na coleção atual — reduzam a presença de outros contextos, igualmente importantes. No âmbito da organização praxeológica, se evidenciou que o discurso tecnológico-teórico das tarefas com potencial para desenvolver o pensamento algébrico se relaciona não só com o campo algébrico, mas também com outros campos matemáticos, o que era esperado no contexto do pensamento algébrico, cuja proposta não é trabalhar propriamente com a Álgebra, mas desenvolver aspectos do pensamento que são fundamentais para a aprendizagem da Álgebra, perpassando diferentes campos matemáticos.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Livros didáticos. Anos Iniciais. BNCC. Análise praxeológica.

FAVERO, Débora Cristina Borba Pereira. *The changes caused by the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (National Common Curricular Base) in a collection of textbooks for the literacy cycle in the approach to algebraic reasoning*. 2020. 191 p. Dissertation (Masters in Mathematics Education). Program of Postgraduate Studies in Mathematics Education. Pontifical Catholic University of São Paulo. São Paulo.

ABSTRACT

In this work, we present a qualitative documentary research, whose main objective is to compare the praxeologies, according to Chevallard, in the approach of algebraic reasoning of two editions of a collection of textbooks for the literacy cycle — from the first to third year of elementary education - one prior to the homologation of the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (National Common Curricular Base); and another guided by it. For this, we analyzed the BNCC of the early years of Elementary School, using as reference the categories of algebraic thought proposed by Blanton and Kaput; and then we analyzed the activities of two editions of the same collection of books for the Literacy Cycle, through the praxeological organization of Chevallard, which provided conditions to compare the tasks, techniques and technological-theoretical discourses of the activities, in the light of the categories Blanton and Kaput. The chosen textbook collection had an edition approved by the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2016 (National Textbook Program 2016), when the BNCC was not yet approved; and another edition approved by PNLD 2019 in which the collections sought to adjust to the skills and competencies proposed by the BNCC. The analyzes showed that there was a reorganization. Several tasks started to be better distributed over the three years. However, most categories have decreased, making room for more intentional work like patterns, including the description of a rule that describes them and their creation; and with equality, proposing more activities with the explicit sign of equality and addressing, also, verification and justification of equality, with a more structural and argumentative character. We can say that the approaches concerning algebraic reasoning have increased, however, our concern is that the decimal numbering system, as well as sequences and equality - the three most adressed subjects in the current collection — would decrease the presence of other contexts, which are also relevant. In the context of the praxeological organization, it became evident that the technological-theoretical discourse of tasks with the potential to develop algebraic reasoning related not only to the algebraic field, but also to other mathematical fields, which was expected in the context of algebraic reasoning, whose proposal is not to work with Algebra, but to develop aspects of thought that are fundamental to the learning of Algebra, crossing different mathematical fields.

Keywords: Algebraic reasoning. Textbooks. Elementary Education. BNCC. Prexeological analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO E LEVANTAMENTO DE PESQUISAS CORRELATAS

Neste capítulo, fazemos uma introdução à problemática da pesquisa e uma apresentação da organização da dissertação. Em seguida, discorremos a respeito do processo de levantamento de pesquisas correlatas, tendo como mecanismo de busca o Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com a finalidade de levantar pesquisas relacionadas ao tema e escolher trabalhos relevantes que possam apontar caminhos para nossa investigação.

1.1 Introdução

A aproximação com os Anos Iniciais do Ensino Fundamental foi motivada desde minha formação inicial na licenciatura em Matemática. Inicialmente, eu considerava que o professor de Matemática não precisava se preocupar com a formação dos alunos nos Anos Iniciais, pois ele atuaria a partir dos Anos Finais, quando os alunos já teriam constituído algumas primeiras noções. De fato, a licenciatura tem por objetivo preparar o professor para o ensino nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, e, portanto, não aborda temáticas referente aos Anos Iniciais.

No entanto, ainda na formação inicial, comecei a me perguntar como se dava a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Eu trabalho com produção de livros didáticos, e minha equipe recebe relatos, dúvidas e solicitações das escolas que adotam o material produzido; um relato recorrente é de turmas que adoravam Matemática, apresentavam boas notas nos Anos Iniciais, mas passaram a ter notas baixas e, por isso, deixaram de gostar da disciplina. Uma das justificativas apontada pelos professores é de que os alunos estão com dificuldade na “passagem do concreto para o abstrato”.

Tenho como hipótese que, muitas vezes, o ensino da Matemática está mais vinculado aos aspectos procedimentais, a repetições de etapas, e menos vinculado ao estudo de conceitos que permitem compreender estruturas e atuar de forma mais autônoma e menos repetitiva. Importante ressaltar que os aspectos procedimentais são tão importantes quanto os conceituais, constituindo, inclusive, meio para que os alunos formem conceitos. E, portanto, os dois aspectos precisam ser trabalhados. No meu percurso de leitura de pesquisas a respeito do assunto, encontrei que o desenvolvimento de aspectos do pensamento algébrico já nos Anos Iniciais poderia ser um caminho para um ensino de Matemática que equilibre conceitos e procedimentos. O pensamento algébrico é proposto pela corrente de pesquisa denominada *Early Algebra*, que busca recuperar o valor instrumental da Álgebra, estudando a estrutura da Matemática de forma longitudinal ao currículo, abrangendo outros campos da Matemática, além de olhar para a linguagem algébrica como um meio de representar ideias, e não apenas um conjunto de regras.

Em meio a isso, em dezembro de 2017, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi homologada, prescrevendo habilidades com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico e instituindo a *unidade temática* Álgebra já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o que antes só estava previsto para os Anos Finais, surgindo a necessidade de adaptação ou reelaboração nos currículos das escolas brasileiras.

1.1.1 Problemática de pesquisa

A homologação da Base Nacional Comum Curricular, em 2017, oficializa um novo documento normativo que define um conjunto de objetos de conhecimento e habilidades que devem ser abordados na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. O documento organiza os conteúdos matemáticos em *unidades temáticas*. Uma mudança estrutural por nós observada, e apontada por Lima (2018), foi a instituição de uma *unidade temática* dedicada à Álgebra desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Desse modo, os conteúdos de Matemática, segundo a BNCC, estão organizados em: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2017). Os documentos que orientavam os currículos brasileiros, até então, eram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que organizavam os conteúdos matemáticos dos Anos Iniciais em *blocos de conteúdos*: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação (BRASIL, 1997).

Com essa mudança, surge a necessidade de reelaborar o currículo das escolas brasileiras. Sacristán (2008) propõe um modelo que interpreta o currículo como algo construído na inter-relação de diversos campos e influências, e ele o organiza em seis diferentes níveis: (1) *currículo prescrito*, prescrições e orientações oficiais de um país; (2) *currículo apresentado* aos professores, meios que costumam traduzir o significado e os conteúdos do currículo prescrito cujo principal representante é o livro didático; (3) *currículo moldado* pelos professores, dado que o professor é um agente na concretização do currículo, pois, quando ele realiza seu planejamento, intervém na proposta curricular; (4) *currículo em ação*, quando o planejamento é colocado em prática, ele sofre novas interferências guiadas pelo professor, uma vez que cada sala de aula apresenta uma dinâmica particular; (5) *currículo realizado*, efeitos diversos (cognitivo, afetivo, emocional etc.) decorrentes da prática que afetam tanto alunos como professores, sendo a aprendizagem um exemplo desse currículo; (6) *currículo avaliado*, pressões exteriores sofridas pelos professores de diversas ordens, incluindo cultura, ideologia e teorias pedagógicas, no entanto, se destacam os conteúdos cobrados em diferentes avaliações, ressaltando que estas podem estar ou não alinhadas às prescrições oficiais e aos próprios objetivos do professor.

Dentro dessa perspectiva, nos interessa em especial o nível do *currículo prescrito*, em que se encontra a BNCC como prescrição oficial, e o nível do *currículo apresentado*, em que se encontra o livro didático. Ainda segundo Sacristán (2008), a prescrição curricular desempenha um papel importante para definir as opções pedagógicas, mas é pouco produtiva na orientação da prática do professor. Para planejar a prática, os professores recorrem a “pré-elaborações” do currículo, sendo que os livros didáticos lideram esse papel no planejamento do professor. Cabe aqui ressaltar que concordamos com Lima (2017), quando propõe que não é por recorrer a pré-elaborações que os professores sejam meros implementadores de currículos apresentados ou prescritos; eles são agentes que moldam e constroem o currículo em ação.

Januario (2017) e Januario e Manrique (2019) evidenciam o volume de materiais disponíveis para o desenvolvimento do currículo de Matemática. Desde 1935 foram criados diversos programas para fornecer livros didáticos às escolas públicas, incluindo a criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 1985. Por volta de dez anos depois, os professores passaram a contar com uma considerável oferta de materiais de Matemática. Os autores aponta que, embora no Brasil os livros didáticos sejam os materiais curriculares mais difundidos e utilizados, eles não têm sido muito investigados pela comunidade de Educação Matemática. Eventos nacionais até apresentam alguns textos a respeito do assunto, mas não têm sido foco de circulação de resultados de pesquisas e debates.

Como parte de sua pesquisa de doutorado, Januario (2017) mapeou teses e dissertações sobre materiais curriculares de Matemática e encontrou uma reduzida quantidade de investigações que buscassem compreender a relação entre os materiais curriculares e outras variáveis, por exemplo, orientações curriculares oficiais. Dentre suas conclusões, o autor aponta para a necessidade de pesquisas que tratem esses materiais como agentes que influenciam e são influenciados por fatores externos, que implicam o desenvolvimento curricular de Matemática, sendo fundamental compreender como se dão essas influências.

Nesse contexto de mudança no nível do *currículo prescrito*, sendo os livros didáticos um forte recurso do professor no nível do *currículo apresentado,* e apoiados na necessidade de investigações que relacionem materiais curriculares com documentos oficiais, apontada por Januario (2017), propomos a seguinte questão de pesquisa: **Quais são as mudanças ocorridas em uma coleção de livros didáticos de Matemática para o ciclo de alfabetização relacionadas ao pensamento algébrico, com a publicação da BNCC?**

Para a análise dos livros didáticos, utilizaremos a organização *praxeológica* da Teoria Antropológica do Didático (TAD) segundo Chevallard (1999), que resumidamente divide uma atividade humana em dois blocos. O bloco "prático-técnico", formado por uma tarefa e as respectivas maneiras de realizar esta tarefa. E o bloco "tecnológico-teórico", que garante e justifica as maneiras de realizar tal tarefa. Respaldados nessa teoria, levantamos duas questões secundárias, cujas respostas permitirão responder à questão principal:

- Quais são as praxeologias apresentadas nessa coleção, referentes ao pensamento algébrico, anterior à publicação da BNCC?
- Quais são as praxeologias apresentadas nessa coleção, referentes ao pensamento algébrico, com a publicação da BNCC?

Dessa forma, propomos o seguinte **objetivo geral**: investigar praxeologias na abordagem do pensamento algébrico propostas em duas edições de uma coleção de livros didáticos de Matemática para o ciclo de alfabetização, sendo uma edição anterior à BNCC e outra edição por ela orientada.

Para definir as categorias do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, utilizaremos as propostas de Blanton e Kaput (2005). Assim, definimos os seguintes **objetivos específicos**:

- Analisar, na BNCC, as orientações apresentadas para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental com base nas categorias de Blanton e Kaput (2005).
- Compreender as mudanças apresentadas nas duas edições dessa coleção de livros, uma aprovada pelo PNLD 2016 e a outra, pelo PNLD 2019, no que se refere à abordagem do pensamento algébrico no ciclo da alfabetização.

Resumidamente, analisaremos as influências da BNCC nas propostas de uma coleção de livros didáticos no ciclo de alfabetização no que diz respeito ao pensamento algébrico. Como referencial teórico, adotamos alguns pressupostos da TAD, de acordo com Chevallard (1999), e categorizamos o pensamento algébrico de acordo com Blanton e Kaput (2005). Elaboramos uma investigação de abordagem qualitativa, do tipo análise documental, conforme Fiorentini e Lorenzato (2012), nos dedicando, principalmente, a investigar livros didáticos, além de pesquisas sobre o tema e a BNCC.

A dissertação foi estruturada em seis capítulos, este primeiro dedicado à introdução, em que descrevemos as escolhas mais gerais da investigação, e ao levantamento de teses e dissertações correlatas. O segundo destinado ao nosso objeto de estudo, a Álgebra e o ensino de Álgebra, em que fazemos uma breve contextualização histórica, discutindo a Álgebra no currículo, o modelo de ensino e o pensamento algébrico.

O terceiro capítulo é dedicado aos referenciais teóricos e aos procedimentos metodológicos, destacando os aspectos que servirão de parâmetro para a análise dos dados. O quarto é dedicado à análise da BNCC e o quinto, à análise das duas edições de uma coleção de livros didáticos no ciclo da alfabetização. Por fim, o sexto capítulo é dedicado às considerações finais.

1.2 Levantamento de pesquisas correlatas

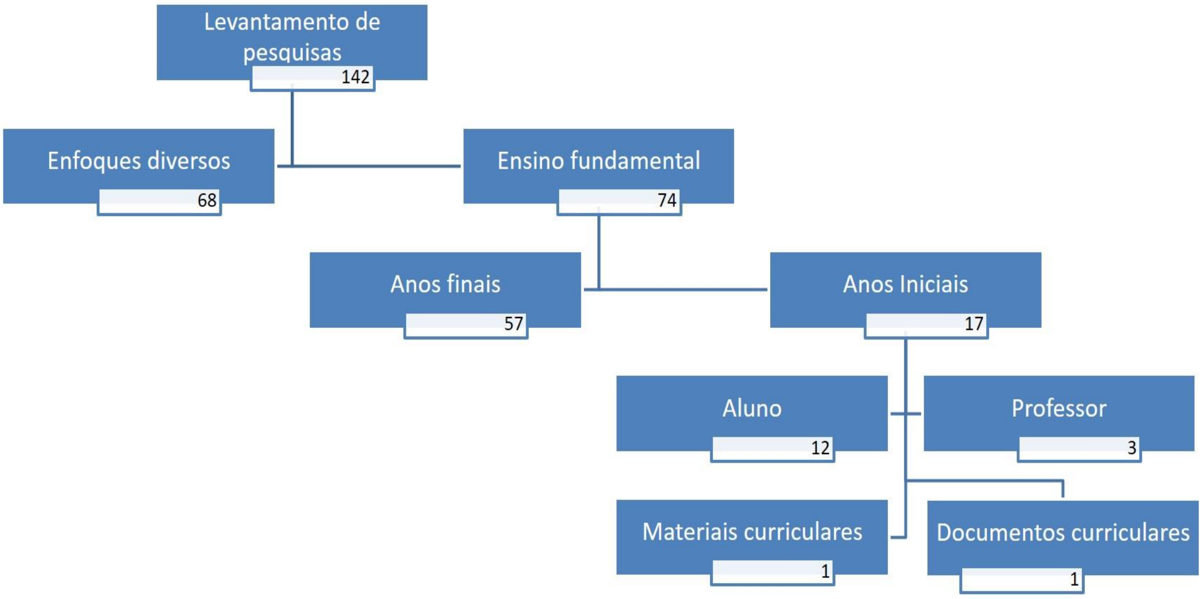
Para compor a revisão de literatura, fizemos algumas buscas[1] no Banco de Teses da CAPES com as seguintes palavras-chave, as quais foram encontradas ao longo da leitura de artigos: “early algebra”, “pré-álgebra”, “álgebra nos Anos Iniciais”,

1 Foi realizada uma primeira consulta em junho de 2018 que apresentou resultados até 2017. Para complementar com trabalhos posteriores, foi feita uma segunda consulta em setembro de 2019, aplicando o filtro 2018 e não constando pesquisas de 2019. Ambas consultas foram realizadas no *site* https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses.

"pensamento algébrico" e "educação algébrica". Cada termo foi pesquisado separadamente e não foi feito nenhum tipo de recorte. Encontramos 156 pesquisas como resultados e, dentre estas, 14 se repetiram.

Dessas pesquisas, foram lidos os títulos e, quando necessário, consultado o resumo para compreender seu foco de interesse a fim de organizá-las em agrupamentos. Das 142 pesquisas encontradas, 74 se dedicavam ao Ensino Fundamental, sendo grande parte dedicada aos Anos Finais (57 pesquisas). A Figura 1 ilustra a organização das pesquisas encontradas.

Figura 1: Distribuição das pesquisas encontradas.



Fonte: elaboração da autora.

Uma pequena parte das pesquisas tem como foco os Anos Iniciais (17 estudos). No Quadro 1 a seguir foram listadas as 17 pesquisas dedicadas à essa etapa escolar. Algumas têm como sujeito de pesquisa o aluno, analisam suas produções ou aplicam sequências de atividades nos Anos Iniciais (12 trabalhos). Poucas se preocupam com o professor dos Anos Iniciais, sua formação e seus conhecimentos (3 pesquisas). Apenas uma se dedica à análise de materiais curriculares, e outra investiga documentos curriculares. As demais (68 trabalhos) possuem outros focos de interesse, como história da Matemática e jogos; sujeitos diferentes, como o professor especialista de Matemática; ou diferentes segmentos da educação, como Ensino Médio, Ensino Superior, Educação de Jovens e Adultos (EJA), educação a distância e educação inclusiva.

Quadro 1: Pesquisas direcionadas aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Ano	Título	Autor	Nível	Foco
2018	Early Algebra na perspectiva do livro didático	BITENCOURT, Daiane Venancio	Mestrado	Materiais curriculares
	Early Algebra: prelúdio da Álgebra por estudantes do 3º e 5º anos do ensino fundamental	PORTO, Rozimeire Soares de Oliveira	Mestrado	Aluno
	Formação continuada de professores e a Early Algebra: Uma intervenção híbrida	OLIVEIRA, Caio Fabio dos Santos de	Mestrado	Professor
	Pensamento algébrico no currículo do ciclo de alfabetização: estudo comparativo de duas propostas	LIMA, Jose Roberto de Campos	Mestrado	Documentos curriculares
2017	Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico	FERREIRA, Miriam Criez Nobrega	Mestrado	Professor
	Contribuições dos jogos para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: perspectivas histórica e atual	ROCHA, Amanda Moura da	Mestrado	Aluno
	O pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: a percepção de regularidades e o pensamento relacional	SANTOS, Carla Cristiane Silva	Mestrado	Aluno
2016	A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do Ensino Fundamental: uma proposta de intervenção	TEIXEIRA, Antonio Cesar Nascimento	Mestrado	Aluno
2015	Introdução ao estudo da Aritmética e da Álgebra no Ensino Fundamental	CIVINSKI, Daiana Dallagnoli	Mestrado	Aluno
	Os problemas aditivos e o pensamento algébrico no ciclo da alfabetização	BECK, Vinicius Carvalho	Mestrado	Aluno
2014	Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em tarefas não rotineiras.	BONI, Keila Tatiana	Mestrado	Aluno
	Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do Ensino Fundamental I	FERNANDES, Renata Karoline	Mestrado	Aluno

2013	Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I	SILVA, Daniele Peres da	Mestrado	Aluno
2011	Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	FREIRE, Raquel Santiago	Doutorado	Professor
2007	O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em Matemática	SANTOS, João Ricardo Viola dos	Mestrado	Aluno
	Objetos de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental	FREIRE, Raquel Santiago	Mestrado	Aluno
2001	A atribuição de significado em atividades pré-algébricas por crianças do 2º ano do 1º ciclo do Ensino Fundamental	PINTO, Geórgia Albuquerque de Toledo	Mestrado	Aluno

Fonte: elaboração da autora.

Dentre essas pesquisas, identificamos que três delas abordam a Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Bitencourt (2018), com foco em materiais curriculares; Lima (2018), com foco em documentos curriculares; e Ferreira (2017), com foco no professor que ensina Matemática. A seguir, apresentaremos as duas pesquisas com foco em materiais e documentos curriculares por se tratar de assuntos diretamente relacionados à pesquisa e incluiremos a pesquisa com foco no professor que ensina Matemática, que, por tratar da BNCC, também entendemos que se relaciona com a presente pesquisa.

A pesquisa de mestrado de Bitencourt (2018) tem por objetivo analisar como os livros didáticos têm abordado o pensamento algébrico. Para isso, ela utiliza referenciais da corrente de pesquisa *Early Algebra* para levantar três categorias de análise: (1) padrão de sequência; (2) equivalência; e (3) relação funcional.

Em relação à BNCC, a autora lista os objetos de conhecimentos e habilidades contidos no documento e discorre sobre eles, acrescentando um exemplo de atividade. Em sua pesquisa, Bitencourt analisa duas coleções de livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, e os critérios de escolha foram a aprovação no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2016 — regidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e não pela BNCC — e por terem sido as coleções mais e menos distribuídas. A análise, além de seguir as três categorias — padrão de sequência, equivalência e relação funcional —, classificou, em cada uma, as tarefas entre numérica e pictórica.

A autora concluiu que, apesar de as coleções terem sido elaboradas à luz dos PCN, as tarefas das coleções também estão em consonância com a BNCC e com as propostas da *Early Algebra*, sendo que em todos os livros as três categorias são abordadas em maior ou menor complexidade, com exceção de um dos livros do 5º ano, que não apresenta tarefa da categoria *padrão de sequência*. Na categoria *padrão de sequência,* a maioria das tarefas é de sequências numéricas e crescentes; nos dois primeiros anos as sequências estão vinculadas principalmente à estrutura aditiva. Na categoria *equivalência,* as tarefas estão associadas à decomposição dos números, a operações com mesmo resultado e, principalmente, ao ícone da balança.

Na categoria *relação funcional,* as atividades são apresentadas na forma de situações-problema; há uso de tabelas, e o assunto proporção é abordado mesmo nos primeiros anos, antes da formalização da estrutura multiplicativa. Portanto, ela conclui que os livros analisados oportunizam ao professor explorar discussões que possibilitam o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico.

O trabalho de Bitencourt (2018), assim como a presente pesquisa, analisa coleções de livros didáticos dos Anos Iniciais. Nossa pesquisa, de certa maneira, complementará o trabalho de análise de materiais curriculares, fazendo a comparação entre livros didáticos anteriores à BNCC e outros já de acordo com ela, mesmo que nossa investigação conte com categorias de análise e referencial teórico-metodológico diferentes.

A dissertação de Ferreira (2017) é organizada no formato *multipaper* composta de três artigos independentes, cada um com um objetivo específico que se articula aos demais para alcançar o objetivo geral da pesquisa: investigar o conhecimento matemático para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

O primeiro artigo consiste na análise de documentos curriculares e documentos que orientam a formação de professores. Foram levantadas as categorias do pensamento algébrico mais trabalhadas nos Anos Iniciais — Aritmética generalizada e Pensamento funcional — e suas subcategorias, com base na pesquisa de Blanton e Kaput (2005). A partir da análise documental, a autora concluiu que diretrizes curriculares mais antigas têm enfoque maior nas propriedades dos números e das operações dentro da categoria Aritmética generalizada, e menor em outras subcategorias da mesma e na categoria Pensamento funcional.

Em 2012, surge, com os Direitos de Aprendizagem do PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa), um eixo específico para o pensamento algébrico, porém com o trabalho mais voltado para padrões. No geral, são poucas subcategorias do pensamento algébrico nos currículos oficiais, sendo a primeira versão da BNCC, divulgada em setembro de 2015, o documento que tratou com maior intencionalidade e abrangeu o maior número das subcategorias elencadas pela autora.

O segundo e o terceiro artigos foram elaborados com base em uma formação continuada, respectivamente com os objetivos de identificar qual a compreensão de professores dos Anos Iniciais sobre o significado do pensamento algébrico e em que medida eles reconhecem os elementos que o constituem, além de identificar os conhecimentos matemáticos revelados por um grupo de professores dessa etapa escolar quando discutem tarefas com potencial para desenvolver o pensamento algébrico. A autora concluiu que o conhecimento dos professores em relação ao pensamento algébrico é mais metodológico e menos voltado ao conteúdo. Já no terceiro artigo, inferiu que esse conhecimento está muito relacionado ao saber fazer, e não alcança os porquês matemáticos associados ao que se faz.

Nas considerações finais da dissertação, Ferreira (2017) constatou haver mudanças nos documentos oficiais a respeito do pensamento algébrico, trazendo a necessidade de remanejar o conhecimento e o papel do professor que ensina Matemática; confirmou-se a hipótese de que a baixa presença de elementos caracterizadores do pensamento algébrico em documentos curriculares se refletiria no conhecimento do professor.

As questões que mais se relacionam à presente pesquisa são a análise de documentos oficiais e a definição de categorias do pensamento algébrico para a análise documental elaborada no primeiro artigo da dissertação. Destacamos também o apontamento de que a BNCC, ainda em sua primeira versão, já mostrava maior intencionalidade e abrangência em relação ao pensamento algébrico do que documentos anteriores.

Lima (2018) investiga a abordagem do pensamento algébrico no ciclo de alfabetização — três primeiros anos do Ensino Fundamental. Para isso, ele faz uma análise de conteúdo, segundo Laurence Bardin, de dois documentos oficiais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as Orientações Curriculares de Matemática para os Anos Iniciais (OCMAI), sendo este último um documento publicado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. A análise foi elaborada com base em três categorias: uma dedicada à estrutura do documento; outra, à abordagem dada ao pensamento algébrico nos outros eixos matemáticos; e a última dedicada aos conceitos do pensamento algébrico abordados.

O autor identifica o pensamento algébrico no ciclo de alfabetização como a compreensão e a identificação de padrões e regularidades que possam ser generalizados em contextos diversos e ainda sem o uso de símbolos algébricos. Ele concluiu existir uma aproximação entre a BNCC e a área de pesquisa denominada *Early Algebra*, que propõe a abordagem do pensamento algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O documento dedica uma *unidade temática* à Álgebra, mas também apresenta indícios do pensamento algébrico em outras *unidades temáticas*, principalmente na *unidade* Números. Já nas OCMAI, existem indícios de um pensamento algébrico desde os Anos Iniciais, porém muito mais implícito do que na BNCC, e sem articulação com outros campos da Matemática. Após o levantamento de pesquisas, nosso primeiro passo foi estudar o objeto matemático da investigação, a Álgebra. Para tanto, recorremos à uma visão geral do ensino de Álgebra antes de estreitar a pesquisa aos Anos Iniciais. Tomamos essa decisão por considerar o estudo da Álgebra recente nessa etapa escolar, em contraposição ao estudo da Álgebra que já é consolidado há muito tempo.

CAPÍTULO 2 – A ÁLGEBRA E SEU ENSINO

Neste capítulo, apresentamos alguns aspectos históricos da Álgebra, suas definições e seu desenvolvimento. Em seguida, abordamos a questão curricular, principalmente a reforma da década de 1960, em ocasião do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Apresentamos também diferentes perspectivas da Álgebra escolar. E, por fim, discorremos sobre a corrente de pesquisa *Early Algebra* e o pensamento algébrico.

2.1 Aspectos históricos

As origens da Álgebra, para Ponte, Branco e Matos (2009), estão na formalização e na sistematização de técnicas de resolução de problemas, usadas desde a Antiguidade. Essas técnicas se encontram documentadas, por exemplo, no *Papyro de Rhind*, do Egito, de 1650 a.C. —, que é cópia de um original datado por volta de 200 anos antes —; nas tábuas de argila babilônicas, datadas por volta de 1700 a.C.; e no livro chinês *Jiuzhang suanshu* — nove capítulos sobre a Arte Matemática — por volta de 200 a.C. (KATZ, 1995).

Muitos consideram Diofanto (200-284) o fundador da Álgebra. Ele desenvolveu métodos de resolução de equações e sistemas de equações em uma linguagem “sincopada”, que consistia em abreviar parte das palavras de problemas expressos em linguagem natural (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Historicamente, é considerado o primeiro verdadeiro texto de Álgebra a obra de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, intitulada *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wál-muqabala* — *Pequena obra sobre o cálculo de al-Jabr* e *al-Muqabala* —, que data por volta de 825. *Al-jabr* consiste em transpor uma quantidade subtraída de um lado de uma equação para o outro lado onde ela se torna uma quantidade adicionada. Um exemplo de seu uso seria a conversão de $3x + 5 = 7 – x$ para $4x + 5 = 7$. *Al-muqabala* consiste em reduzir um termo positivo pela subtração de quantidades iguais nos dois membros da equação. Um exemplo de seu uso é a conversão de $4x + 5 = 7$ para $4x = 2$. A obra aborda a resolução de equações voltada à solução de problemas aritméticos, assim como as outras obras citadas anteriormente (KATZ, 1995).

Sua legitimidade é concedida por ser a primeira obra a justificar as soluções. Nela, a justificativa é feita por meio da Geometria. Nesse contexto, desenvolveram-se principalmente as resoluções de equações de 1º e 2º graus e surgiram as primeiras definições a respeito do assunto. O islâmico Omar Khayyam define como um ramo de conhecimento da Matemática: “[...] a ciência de al-jabr e al-muqabala que visa a determinação de incógnitas numéricas e geométricas” (KASIR, 1931, p. 23, a*pud* KATZ, 1995, p. 15, tradução nossa). Ou seja, a Álgebra surge essencialmente ligada à resolução de problemas, problemas estes que traduzimos hoje como sendo problemas resolvidos por equações.

Importante ressaltar que, assim como para Roque e Pitombeira (2012), não nos interessa determinar “o pai da Álgebra”, mas perceber que o desenvolvimento algébrico não é herança de um autor, mas o resultado de práticas compartilhadas que ocorreram em um determinado contexto. Outra consideração importante salientada pelos mesmos autores é a distância entre o que era feito na época e o que hoje chamamos de equações. Na época em que tais documentos foram escritos, as incógnitas e as operações não eram representadas por símbolos. As sentenças simbólicas que utilizamos para exemplificar *al-Jabr* e *al-Muqabala* há pouco não eram utilizadas naquele período; os problemas eram apresentados de maneira descritiva. Outro ponto importante de distinção é que na época não havia a generalização das equações como fazemos hoje, com todas as parcelas possíveis e coeficientes indeterminados.

No século XVI ocorreu uma transformação fundamental com a introdução de símbolos por François Viète (1540-1603), originando a “Álgebra simbólica”. Em seguida, alguns matemáticos italianos renascentistas marcaram um momento de grande desenvolvimento da Álgebra com a resolução da equação geral do 3º grau feita por Scipione del Ferro (1465-1526) e Tartaglia (1500-1557), publicada por Cardano (1501-1565); e de 4º grau por Ferrari (1522-1565). É a primeira vez que os êxitos da Antiguidade são claramente ultrapassados pela ciência moderna (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Outra contribuição, destacada por Katz (1995), foi a desvinculação do contexto geométrico apresentada por Leonhard Euler (1707-1783). Euler manipula apenas grandezas numéricas e entende que, apesar de algumas ideias terem surgido no contexto geométrico, ele já não seria necessário em um trabalho rigoroso.

Simultaneamente ao desenvolvimento das equações algébricas, desenvolveu-se também o conceito de função, como correspondência entre valores de duas variáveis. Funções polinomiais e racionais logo deram lugar a mais funções. Os conceitos de infinitésimo e derivada ocupam papel importante na teoria das funções e deram origem a um novo ramo, a Análise Infinitesimal (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Essa segunda etapa do desenvolvimento da Álgebra pode ser chamada de período da "Álgebra clássica". Em definições europeias do século XVIII — "método geral de cálculo por certos sinais e símbolos que foram criados para esse fim e considerados convenientes" (MACLAURIN, 1756, p. 1, a*pud* KATZ, 1995, p. 16, tradução nossa); "A Álgebra foi definida como a ciência que ensina a determinar quantidades desconhecidas por meio daquelas que são conhecidas" (EULER, 1767, p. 186, *apud* KATZ, 1995, p. 16, tradução nossa) —, percebemos que não há grandes mudanças em relação às primeiras definições, mas a representação simbólica é acrescentada à resolução de equações.

Ao longo do século XIX a Álgebra passa por uma evolução profunda com o estudo de estruturas abstratas, como grupo, anel, corpo e espaço vetorial, que passam a formar o núcleo da "Álgebra moderna" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). É nesse momento em que a ferramenta algébrica penetra todos os campos matemáticos e encontra outros campos de aplicação. Dessa forma, é muito difícil encontrar atividades matemáticas que não utilizem o simbolismo algébrico para serem realizadas (RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2015).

Definições norte-americanas do século XIX não fogem do que já se havia estabelecido: "A Álgebra é um método de investigar quantidade por meio de caracteres chamados símbolos" (BROOKS, 1871 p. 19, a*pud* KATZ, 1995, p. 16, tradução nossa); "A ciência que emprega letras no raciocínio sobre números, ou para descobrir suas propriedades gerais ou encontrar o valor de um número desconhecido de suas relações com números conhecidos, é chamada Álgebra" (WENTWORTH, 1881, p. 4, *apud* KATZ, 1995, p. 16, tradução nossa), mas acrescentam o estudo de propriedades gerais. Segundo Katz (1995), textos elementares e avançados de Álgebra do século XX normalmente não trazem uma definição de Álgebra.

Resumidamente, podemos dividir o desenvolvimento da Álgebra em três etapas. A primeira concebe a Álgebra para resolver "equações", principalmente para a solução de problemas aritméticos. A segunda corresponde a estudos de tipos gerais de equações, incluindo o cálculo numérico; o estudo das funções; e sua constituição como uma área da Matemática. A terceira é o momento da Álgebra moderna, em que a ferramenta algébrica adentra os campos da Matemática e outros campos de aplicação, tornando a ferramenta algébrica imprescindível para a atividade matemática (RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2015).

2.2 A reforma curricular da Matemática Moderna

O currículo de Matemática passou por grandes transformações ao longo do tempo. Por volta da década de 1960 houve uma reforma que ficou conhecida como Movimento da Matemática Moderna (MMM) e que foi responsável por mudanças curriculares.

Antes da reforma da década de 1960, a Álgebra consistia na porta de entrada para a “Matemática superior”. Aos Anos Iniciais cabia apenas a Aritmética, com suas quatro operações, sistema de medidas, frações e proporções. No equivalente aos Anos Finais do Ensino Fundamental, a Matemática era dividida em Aritmética, Álgebra e Geometria. Essa organização é chamada pelos pesquisadores de “clássica”, e era encontrada na França, na Espanha e na maioria dos currículos básicos ocidentais antes da reforma, segundo Ruiz, Bosch e Gascón (2015). Nessa organização, a iniciação à Álgebra se concentrava em três tópicos: (1) os números algébricos (o conjunto dos inteiros); (2) o cálculo de expressões algébricas, incluindo raízes e potências; e (3) as equações algébricas e problemas associados.

Também é possível notar um movimento semelhante no Brasil. Segundo Soares, Dassie e Rocha (2004), antes do MMM ocorreram outras duas reformas curriculares que ficaram conhecidas como Reforma Francisco Campos e Reforma Capanema. A Reforma Francisco Campos ocorreu logo após a Revolução de 1930 e foi uma importante tentativa de organizar o sistema educacional brasileiro. Uma das propostas dessa reforma era a fusão dos diferentes ramos da Matemática clássica para a formação de uma única disciplina, proposta esta que permanece até hoje. Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria passaram a configurar apenas uma disciplina. A Reforma Francisco Campos recebeu muitas críticas, e onze anos depois outra reforma foi efetivada, a Reforma Capanema. Esta foi muito mais uma reação às inovações propostas pela reforma anterior do que uma proposta de mudança.

Para Chevallard (1984), a Álgebra, foi a parte mais atingida com a reforma da Matemática Moderna. Sua “parte numérica” — as frações e os números algébricos — resistiu e teve seu papel engrandecido. No entanto, o mesmo não ocorreu com o cálculo algébrico e o estudo de equações, que constituíam sua parte principal. Estes sofreram grandes diminuições no programa reformado. Existiram duas principais razões para essa diminuição: a primeira era que o cálculo algébrico recebia tanta ênfase que estava, de fato, sufocando outras partes do currículo; a segunda é o surgimento da Álgebra moderna, com estudo de estruturas, como grupo, anel e corpo.

Nesse sentido, a mudança também foi percebida no Brasil. Segundo Soares (2001), antes de 1950 eram parte do ensino de Matemática expressões matemáticas enormes que exigiam habilidade com os números, mas não provavam capacidade de raciocínio. O MMM acrescentou certos temas chamados de Matemática moderna, como o estudo de conjuntos, grupo, anel e corpo, conforme Soares, Dassie e Rocha (2004).

Já a Aritmética, apesar de fragmentada, teve seu papel engrandecido, houve uma valorização das estruturas numéricas. Chevallard (1984) atribui essa mudança à tendência empirista trazida pela reforma, com ênfase na observação e na experimentação matemática. Nas aproximações e nas abordagens de situações reais, o numérico representa a parte “real”, concreta, da Matemática. Na busca empirista entre teoria e realidade, a Álgebra se dissolve na Aritmética, como sendo a abstração do real, ou seja, a Álgebra é vista como abstração e a Aritmética, como concreto.

Para o autor, a perda da oposição entre o numérico e o algébrico foi um grande prejuízo trazido pela reforma. Nesse novo cenário se estabeleceram novas relações entre os dois campos; não é mais o algébrico que estuda o numérico, mas apenas o numérico que “justifica”, que “permite entender” o algébrico. Para entender a proposta de Chevallard (1984), vamos nos aprofundar na relação que o autor propõe entre os dois campos.

2.2.1 O algébrico e o aritmético de Chevallard

Vamos olhar com mais atenção a dicotomia entre Aritmética e Álgebra destacada por Chevallard (1984, 1989, 1990). Essa tradicional oposição entre as duas áreas que desaparece após a reforma da Matemática moderna.

A oposição entre os dois campos existe tanto epistemologicamente como didaticamente. Na escola, a Aritmética constitui a primeira base, ela é muito trabalhada nos Anos Iniciais e constitui um alicerce para a continuidade do trabalho matemático, inclusive o ensino da Álgebra. Historicamente, enquanto a Aritmética era encontrada no dia a dia, a aprendizagem da Álgebra era para poucos, pois constituía uma forma de elevar-se socialmente. Apesar de a Álgebra estar na continuidade da Aritmética, elas mantinham uma relação de oposição, relação esta que desaparecerá após a reforma da Matemática moderna nos currículos.

Para abordar o aspecto epistemológico, Chevallard (1984) traz um recuo histórico dessa relação entre o algébrico e o numérico. A oposição entre os dois campos é mais antiga que a própria Álgebra. Os gregos já distinguiam a Aritmética em duas: uma "vulgar", utilizada pelos calculadores; e outra considerada "própria dos filósofos", dedicada ao estudo das estruturas numéricas. Ambos manipulavam números, mas as tarefas eram diferentes.

No âmbito do cálculo numérico, rege o "princípio de acabamento de cálculos", em que a expressão "4 + 8" não é uma resposta, mas um cálculo inacabado. Já no âmbito da Aritmética "nobre", a apresentação aditiva do número é interessante, ela pode ser apresentada como a adição entre duas potências de base 2 ($2^2 + 2^3$), destacando características que interessam ao estudo das estruturas numéricas. Mas é com a linguagem algébrica que o campo da Álgebra se institui e permite delinear melhor a diferença entre os dois campos, de uma maneira que as ferramentas disponíveis, até então, não permitiam.

A grande inovação da Álgebra consiste na introdução dos símbolos algébricos. Com isso, as explicações retóricas são substituídas pela escrita simbólica, que é capaz de conservar o pensamento efetuado em uma resolução, uma espécie de memória, permitindo o estudo da estrutura do problema. Ela explicita a maneira de lidar com o numérico que estava implícita na Aritmética e permite abordar problemas complexos que antes estavam limitados a equações de 1º e 2º graus. Nesse contexto, ela generaliza a Aritmética, a extensão de números particulares para números quaisquer.

2.3 Perspectivas da Álgebra e da Álgebra escolar

Para Ponte, Branco e Matos (2009), a natureza dos campos matemáticos está relacionada aos objetos com os quais trabalham mais diretamente. Para a Álgebra, há trezentos anos, esses objetos seriam as equações e as expressões. Hoje em dia, são as relações abstratas da Matemática. No entanto, a visão de uma Álgebra voltada ao trabalho com expressões continua a existir na escola.

Os autores destacam duas perspectivas de uma visão “letrista”, que assume a Álgebra como um instrumento técnico para resolver problemas, mais poderoso do que a Aritmética, dando ênfase no domínio das regras sintáticas para transformação de expressões. A primeira considera a Álgebra como um conjunto de regras e de processos de transformação de expressões algébricas, resolução de equações do 1º e 2º graus e de sistemas de equações. A segunda coloca o simbolismo como objeto central e se concentra na manipulação dos símbolos por treino e prática. Ela pode contar com recursos intuitivos, como a balança, com a finalidade de dar significado às manipulações, mas raramente consegue, dada sua preocupação com os aspectos sintáticos.

Gascón (1999), partindo das pesquisas de Chevallard (1984, 1989, 1990), aponta um modelo dominante da Álgebra, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, reduzido à Aritmética generalizada, sendo sua principal característica a utilização do simbolismo algébrico. Nesse modelo, a Álgebra está confinada à Aritmética, tratando ou de números desconhecidos específicos, que é o caso das equações, ou de números generalizados, por exemplo, nas propriedades das operações aritméticas, ou, ainda, como variáveis. As principais tarefas se resumem à “tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica, cálculo algébrico (interpretado como a manipulação formal de regras aritméticas com letras e números) e a resolução de equações” (RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 656, tradução nossa).

O simbolismo é uma das grandes potencialidades da Álgebra, uma vez que ele cria a possibilidade de distanciamento dos elementos semânticos representados pelos símbolos. No entanto, pode ser também sua fraqueza, pois, desligar-se de referentes significativos, pode tornar a Álgebra incompreensível para os alunos, reduzindo-a a um jogo repetitivo de manipulações (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Outro grande problema para Gascón (1999) é a ausência de uma organização para proporcionar uma progressiva algebrização da atividade matemática. Como vimos, a Matemática atual está completamente algebrizada, mas o ensino nos Anos Finais do Ensino Fundamental é incompatível a essa realidade. Assim, a Álgebra será bruscamente apresentada para os alunos ao final da escola básica, quando o currículo não resiste à pressão de certas necessidades que requerem o uso do instrumento algébrico.

Para Gascón (1999) e Chevallard (1984, 1989, 1990), uma nova proposta curricular precisa enxergar a Álgebra como instrumento para fazer Matemática, e destacam o uso de parâmetros e a modelização, como essenciais a essa nova proposta. O jogo entre incógnitas — valor desconhecido que se busca determinar — e parâmetros — variáveis cujos valores supostamente são conhecidos — é uma das potencialidades da Álgebra permitindo

> resolver simultaneamente uma ampla classe de problemas, justificar, interpretar e controlar o escopo de aplicação das técnicas pré-algébricas (sejam elas "aritméticas", "geométricas" ou "combinatórias") e, além de obter a incógnita quando o problema tem solução, explicar quais são as condições de existência da dita solução e descrever a estrutura do conjunto das soluções (GASCÓN, 1999, p. 80, tradução nossa).

A modelização proposta por Chevallard (1990) é bem diferente das aplicações e dos problemas que estão no currículo hoje, em que as situações já estão matematizadas, o campo da aplicação é controlado e as ferramentas a serem utilizadas estão definidas. Na modelização, o campo do conhecimento é o mais importante, seja extra ou intramatemático, a Álgebra é vista como uma ferramenta a serviço de um fim.

Nesse sentido, Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam consonância com Chevallard (1984, 1989, 1990) e Gascón (1999), quando afirmam que as situações extramatemáticas têm se apresentado como secundárias, resumidas a simples ilustração ou aplicação. Os autores indicam uma nova corrente que busca recuperar o valor instrumental da Álgebra, sem reduzi-la à resolução de problemas solucionáveis por uma equação ou sistema; que enfatiza um "pensar funcionalmente", estabelecendo relações entre variáveis; e que valoriza a linguagem algébrica, não como conjunto de regras, mas como um meio de representar ideias.

2.4 Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

2.4.1 *Early Algebra*

Uma nova visão da Álgebra começou a ganhar força principalmente a partir da década de 1980. Em novembro de 2006, a Associação de Matemática da América promoveu uma conferência com representantes das comunidades de Matemática e de Educação Matemática a respeito do ensino de Álgebra. Os especialistas foram divididos em cinco grupos que pesquisaram a Álgebra em diferentes níveis. O primeiro deles foi denominado *Early Algebra*, responsável pela primeira etapa da Álgebra escolar, e é assim que a expressão *Early Algebra* aparece pela primeira vez (KATZ, 2007).

O documento resultante desse grupo de pesquisadores relata que a Matemática escolar se concentrou por muito tempo na fluência aritmética nos Anos Iniciais, seguida de uma abordagem procedimental da Álgebra nos anos seguintes, que não teve êxito em termos de desempenho dos estudantes. Portanto, indicam uma nova proposta, que cultive hábitos mentais relacionados à estrutura da Matemática e que seja longitudinal no currículo, perpassando outros campos de estudo da Matemática, desde os Anos Iniciais de escolarização (BLANTON *et al*., 2007).

Essa abordagem da Matemática no Ensino Fundamental passou a ser conhecida como *Early Algebra*, e, embora não haja uma definição única devido a variações na cultura da Álgebra entre comunidades e países, há um consenso de que ela compreende duas características principais: (1) generalização, identificação, expressão e justificativa de estruturas, propriedades e relações matemáticas; e (2) raciocínio e ações com base nas formas de generalizações. Embora esses aspectos sejam comuns a diversos campos da Matemática, as pesquisas frequentemente trazem a Aritmética como domínio.

Os pesquisadores desse grupo ainda destacam que não se trata de um novo conteúdo, algo a ser ensinado depois de procedimentos e habilidades aritméticos; mas de uma forma de pensar que traz significado, profundidade e coerência para o entendimento matemático dos alunos e permite que se iniciem na linguagem simbólica para expressar e justificar suas ideias.

Ruiz, Bosch e Gascón (2015) questionam a hierarquia unidimensional estabelecida entre Aritmética e Álgebra. Nesse sentido, concordam que a algebrização da Aritmética e de outras áreas da Matemática, introduzindo de maneira progressiva e formal a sintaxe adequada do cálculo algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresenta um novo caminho para a Álgebra escolar.

Essa corrente de pesquisa busca delimitar o que deve ser ensinado na escola e definir “pensamento algébrico”. Ponte, Branco e Matos (2009) trazem uma definição apoiada nos estudos de James Kaput, um dos autores que pesquisa o tema:

> algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 9).

Tal abordagem tem se mostrado um caminho em busca de uma proposta curricular mais exitosa, em oposição à abordagem procedimental da Álgebra e à demasiada valorização da fluência de cálculos aritméticos nos primeiros anos.

2.4.2 Pensamento algébrico em estudos brasileiros

Descrever o que se entende por pensamento algébrico é uma difícil tarefa, uma vez que não há uma visão única na comunidade de Educação Matemática. Para isso, traremos uma síntese da abordagem de pensamento algébrico feita nas três pesquisas que expusemos no 1º capítulo, com o intuito de apresentar como a temática tem se constituído um campo de pesquisa em Educação Matemática aqui no Brasil. Em seguida, delimitaremos alguns pontos a respeito de pensamento algébrico, não com a intenção de esgotar as discussões, mas de delimitar nossa compreensão para o contexto desta pesquisa.

Geralmente, os autores de pesquisas sobre o assunto recorrem a diferentes estudiosos compondo uma revisão a respeito do que se entende por pensamento algébrico. A seguir, sintetizamos as principais ideias trazidas em cada uma das pesquisas escolhidas em suas revisões sobre o assunto.

Na pesquisa de Bitencourt (2018), é proposto que o pensamento algébrico não é um novo conteúdo, e também, não é o desenvolvimento de habilidades de manipulação simbólica e de procedimentos algébricos. Mas uma forma de pensar que traz coerência, profundidade e compreensão ao abordar profundamente conceitos que já são ensinados, oportunizando a generalização de relações e de propriedades matemáticas. Ele favorece ao aluno desenvolver formas de pensar subjacentes à estrutura Matemática.

Configuram aspectos importantes do pensamento algébrico, segundo a pesquisa (BITENCOURT, 2018), os processos de generalizar; representar e simbolizar; e argumentar e justificar. Mostrando um papel importante atribuído à linguagem do estudante, que não deve ser formal desde o princípio, mas se formaliza ao longo de um processo. Frequentemente figuram como objeto desses processos as propriedades e as relações aritméticas; as sequências de padrão; os problemas contextualizados (modelização); e as relações funcionais. E especificamente a relação de equivalência representada pelo símbolo de igualdade. Importante destacar que, apesar da importância dos símbolos, o objetivo é que eles sejam um recurso para representar ideias gerais provenientes de um raciocínio com compreensão. A pesquisadora delimita como foco de sua pesquisa o estudo de padrões de sequência, a equivalência e a relação funcional.

A pesquisa de Ferreira (2017), por sua vez, destaca que o pensamento algébrico está na compreensão das estruturas matemáticas, com ênfase na construção de significados e do fazer matemático. A questão da linguagem figura um fator importante, sendo aceitas linguagens não formais e entendendo uma relação dialógica entre linguagem e pensamento, visto que a linguagem é proveniente de um certo pensamento, ao mesmo tempo em que essa mesma linguagem contribui para a estruturação do pensamento.

Outro ponto interessante proposto pela autora é o de que um problema matemático em si não é algébrico, geométrico ou aritmético, uma vez que pode ser resolvido de diferentes formas. O que o difere é o percurso cognitivo realizado para resolver a tarefa.

Configuram, para a autora (FERREIRA, 2017), aspectos do pensamento algébrico muito próximos do que foi proposto por Bitencourt (2018), generalizar, representar, simbolizar (incluindo o sinal de igualdade como equivalência), modelizar, argumentar, prever; contextos como a Aritmética, padrões numéricos, problemas; e a operação com incógnitas e pensamento com variáveis (mesmo sem a notação algébrica). A pesquisadora conclui que o pensamento algébrico está em uma forma de estruturação do pensamento que pressupõe a generalização, ou seja, a condução de situações particulares a ideias gerais.

A pesquisa de Lima (2018) também converge para os mesmos aspectos propostos por Bitencourt (2018). Está em consonância com Ferreira (2017) quando aponta que o pensamento algébrico não possui dependência direta com a tarefa realizada; e aborda o pensamento com variáveis. Ele dá destaque ao pensamento funcional como o estudo da relação entre quantidades que variam conjuntamente. O autor compreende que o pensamento algébrico contempla os pensamentos simbólico, representacional, relacional e funcional, e, no ciclo de alfabetização, se relaciona à observação de padrões e regularidades, estabelecimento de relações e generalização, sem a necessidade do formalismo simbólico algébrico.

Delimitaremos os pontos que consideramos importantes para o presente estudo a respeito do pensamento algébrico, sem, no entanto, tratar de objetos específicos.

Consideramos todos os estudos feitos até aqui, relacionando o que foi proposto sobre a Álgebra escolar com os novos estudos dedicados aos Anos Iniciais.

(1) Considerar a Álgebra como instrumento para fazer Matemática. Além de estudar variáveis e incógnitas, estudar também parâmetros, permitindo exceder a obtenção de incógnitas e resolução de problemas, permitindo generalizar e estudar suas estruturas. Essa concepção da Álgebra permite o estudo de estruturas de diversos contextos, incluindo relações abstratas da Matemática, sendo possível uma algebrização da Aritmética e de outros campos de forma longitudinal ao currículo.

(2) Considerar o simbolismo importante para a Álgebra, não como um conjunto de regras, mas como um meio de representar ideias. Essa concepção permite flexibilizar as representações, não exigindo uma formalidade nos Anos Iniciais, mas fomentando a expressão e a justificativa de ideias de maneira a ser formalizada processualmente.

Tendo delimitado nosso objeto de estudo historicamente e suas perspectivas escolares, incluindo a abordagem nos Anos Iniciais, iremos agora definir os procedimentos metodológicos e o referencial teórico de nossa investigação.

CAPÍTULO 3 – ASPECTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Este capítulo é dedicado à apresentação das escolhas de pesquisa, explicitando os pressupostos teóricos escolhidos e os procedimentos metodológicos neles fundamentados.

Diante da problemática descrita na Introdução, propomos a realização de um estudo comparativo em termos de atividades com potencial para desenvolver o pensamento algébrico apresentadas pelo currículo nos livros didáticos no ciclo de alfabetização (1º ao 3º ano do Ensino Fundamental) entre uma edição anterior à BNCC e outra já orientada por ela, de uma mesma coleção de livros didáticos, com o propósito de observar como o documento curricular, um *currículo prescrito*, influenciou a elaboração do livro didático, um *currículo apresentado*.

Para tanto, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: **Quais são as mudanças ocorridas em uma coleção de livros didáticos de Matemática para o ciclo de alfabetização relacionadas ao pensamento algébrico, com a publicação da BNCC?**

Definimos como **objetivo geral** da pesquisa investigar praxeologias, na abordagem do pensamento algébrico, proposto em duas edições de uma coleção de livros didáticos de Matemática para o Ciclo de Alfabetização, uma anterior à BNCC e outra por ela orientada. E definimos os seguintes **objetivos específicos**: (1) analisar, na BNCC, as orientações apresentadas para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental com base nas categorias de Blanton e Kaput (2005); (2) compreender as mudanças apresentadas nas duas edições dessa coleção de livros, uma aprovada pelo PNLD 2016 e a outra, pelo PNLD 2019, no que se refere à abordagem do pensamento algébrico no ciclo de alfabetização.

3.1 Referencial teórico-metodológico

Apresentamos a seguir os referenciais teórico-metodológico que embasarão nossa pesquisa. A organização praxeológica proposta por Chevallard (1999), que compõe parte da TAD, será a teoria balizadora para a organização das tarefas selecionadas dos livros didáticos. E as categorias propostas por Blanton e Kaput (2005) orientarão a seleção tanto das habilidades propostas pela BNCC nos Anos

Iniciais quanto das tarefas presentes nos três primeiros anos da coleção de livros didáticos.

3.1.1 A organização praxeológica da Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Embasaremos a análise dos dados segundo a organização *praxeológica* da TAD (CHEVALLARD, 1999). A TAD situa a atividade de estudo da Matemática no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Por isso, a utilização do termo “antropológico”. Um objeto matemático só existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece (ALMOULOUD, 2014).

A *praxeologia* proposta pela TAD é um modelo capaz de organizar toda atividade humana, inclusive a atividade matemática, e é nesse sentido que se justifica sua utilização neste trabalho, para dar suporte à análise da organização das práticas matemáticas nos materiais analisados. A palavra *praxeologia* junta dois termos gregos: *práxis* e *logos* — prática e razão —, e indica a divisão entre um saber prático e um saber lógico ou racional (ALMOULOUD, 2014).

Segundo Chevallard (1999), a raiz da noção de *praxeologia* se dá com base nas noções de tarefa (t) e de tipos de tarefas (T). A maioria das tarefas é expressa por um verbo: limpar a casa; desenvolver uma expressão; dividir um inteiro por outro; subir uma escada etc. Uma tarefa e um tipo de tarefa supõem um objeto relativamente preciso; já o verbo sozinho indica um gênero de tarefa. As tarefas, os tipos de tarefas e os gêneros de tarefas são construções de uma instituição.

Uma *praxeologia* relativa a um tipo de tarefa (T) requer uma maneira de realizar as tarefas (t) pertencentes a T ($t \in T$). A essa “maneira de fazer” é dado o nome de técnica ($\boldsymbol{\tau}$). Um tipo de tarefa junto à técnica relativa à ela forma o bloco “prático-técnico” [T / $\boldsymbol{\tau}$] que se identifica com o “saber-fazer” na linguagem corrente. Toda técnica tem um certo alcance e funciona em parte de um certo tipo de tarefa. Uma técnica não é, necessariamente, um algoritmo ou apresenta etapas estruturadas. Em geral, em uma instituição, existe uma técnica ou um pequeno conjunto de técnicas que são reconhecidas, mas podem existir técnicas alternativas que existem ainda em outras instituições.

Tecnologia ($\boldsymbol{\theta}$) é um discurso lógico sobre a técnica, e seu principal objetivo é justificar a técnica, garantindo que ela permita realizar as tarefas do tipo T. Essa forma de justificativa pode variar de instituição para instituição. Além de garantir que uma técnica funcione, a tecnologia é responsável por explicar seu funcionamento, além de ser uma fonte de produção de novas técnicas. Toda técnica τ, relativa a um tipo de tarefa T, está sempre acompanhada de uma tecnologia embrionária, ou de pelo menos vestígios de uma tecnologia. Pode acontecer de alguns elementos tecnológicos estarem integrados à própria técnica.

Por fim, a *praxeologia* ainda conta com um nível superior de justificativa, a teoria, Θ. Ela é a justificativa da tecnologia, e, juntas, formam o bloco “tecnológico-teórico” [θ, Θ]. Assim, a organização *praxeológica* conta com três níveis — técnica, tecnologia e teoria — para analisar uma atividade.

A seguir, analisamos a atividade ilustrada na Figura 2, retirada do livro do professor do 3º ano da coleção aprovada pelo PNLD 2019 — 3A19 — para exemplificar a análise praxeológica. Nesta atividade, o estudante deve colocar em cada um dos quadradinhos em branco uma resposta para que a sentença seja verdadeira. Neste exemplo, a resposta em vermelho é a resposta correta que o estudante deveria fornecer.

Figura 2: Atividade do livro 3A19.

2. Complete cada quadrinho para que a sentença seja verdadeira. Explique oralmente como você pensou.

a)	13	+	29	=	29	+	13
b)	58	+	75	=	75	+	58
c)	19	+	26	=	20	+	25
d)	103	+	29	=	100	+	32

Fonte: 3A19, p. 215.

Neste caso, a tarefa t é completar a parcela desconhecida, mantendo a equivalência com a adição do outro membro. Ela pertence ao tipo T (t ϵ T), completar o valor desconhecido mantendo a equivalência com o outro membro.

A técnica $\tau 1$ consiste em determinar a soma da adição apresentada no primeiro membro e subtrair dela a parcela conhecida, determinando a parcela desconhecida. A técnica $\tau 2$ consiste na percepção de que a ordem das parcelas não altera a soma, sem a necessidade de cálculos, podendo ser utilizada apenas nos itens a) e b). A técnica $\tau 3$ consiste na observação da diferença entre as parcelas dadas e a compensação para determinar a parcela desconhecida. Essa técnica pode ser utilizada para os itens c) e d). Por exemplo, no item c), se a primeira parcela do segundo membro (20) é uma unidade maior do que a primeira parcela do primeiro membro (19), basta subtrair uma unidade da segunda parcela do primeiro membro (26) para encontrar a segunda parcela do segundo membro (26 –1 = 25). Para os itens c) e d) ainda é possível utilizar a técnica $\boldsymbol{\tau}$4, adicionar e subtrair uma quantidade conveniente ao primeiro membro e reagrupar de maneira favorável. Por exemplo, no item d), 103 + 29 = 103 + 29 +3 – 3 = (103 – 3) + (29 + 3) = 100 + 32.

Assim, está constituído o bloco "prático-técnico" [T / $\boldsymbol{\tau}$] formado pelo tipo de tarefa T — completar o valor desconhecido mantendo a equivalência com o outro membro — e pelo conjunto de técnicas $\boldsymbol{\tau}$1, $\boldsymbol{\tau}$2, $\boldsymbol{\tau}$3 e $\boldsymbol{\tau}$4 pertinentes aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Importante ressaltar que podem existir outras tarefas pertencentes ao mesmo tipo de tarefa T e que ainda pode haver outras técnicas de resolução.

Cada uma dessas técnicas — $\boldsymbol{\tau}$1, $\boldsymbol{\tau}$2, $\boldsymbol{\tau}$3 e $\boldsymbol{\tau}$4 — é justificada por um discurso tecnológico-teórico [$\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$]. A técnica $\boldsymbol{\tau}$1 tem sua justificativa no campo da Aritmética. A técnica $\boldsymbol{\tau}$2 é justificada pela propriedade comutativa da adição. E as técnicas $\boldsymbol{\tau}$3 e $\boldsymbol{\tau}$4 são justificadas pela propriedade associativa da adição. Aqui, diante das justificativas das técnicas, vale ressalvar que algumas atividades com potencial algébrico podem apresentar também técnicas não algébricas, como é o caso da $\boldsymbol{\tau}$1. Já as técnicas $\boldsymbol{\tau}$2, $\boldsymbol{\tau}$3 e $\boldsymbol{\tau}$4 são justificadas pelas propriedades das operações, estudadas no campo da Álgebra. Ou seja, uma atividade sozinha não garante uma solução algébrica. O trabalho em sala de aula é essencial, como a observação do professor, as problematizações entre grupos de alunos e a socialização das técnicas entre os colegas.

Em nosso estudo, além de comparar as praxeologias propostas nas edições anterior e posterior à BNCC, da coleção de livros didáticos, também classificaremos as tarefas de acordo com as categorias propostas por Blanton e Kaput (2005) para o pensamento algébrico.

3.1.2 Categorias da *Early Algebra*

Blanton e Kaput (2005) dividem o pensamento algébrico com base nas práticas de sala de aula realizadas com crianças do 3º ano, em 13 categorias agrupadas em três blocos, a saber:

Aritmética generalizada — categorias de A a E:

- Categoria A: explorar propriedades e relações de números inteiros.
- Categoria B: explorar propriedades das operações com os números inteiros.
- Categoria C: explorar a igualdade como relação entre quantidades.
- Categoria D: tratar o número algebricamente.
- Categoria E: encontrar valores desconhecidos.

Pensamento funcional — categorias de F a J:

- Categoria F: simbolizar quantidades e operar com expressões simbolizadas.
- Categoria G: representar dados graficamente.
- Categoria H: encontrar relações funcionais.
- Categoria I: prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.
- Categoria J: identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

"Hábitos avançados" — categorias de K a M:

- Categoria K: usar generalizações para resolver tarefas algébricas.
- Categoria L: justificar, provar e testar conjecturas.
- Categoria M: generalizar um processo matemático.

Esse último bloco é intitulado "Mais sobre generalização e justificativa" pelos autores, que propõem que sejam categorias diferentes das demais, por refletirem uma capacidade mais evoluída dos alunos em relação ao raciocínio algébrico. Portanto, utilizamos os dois primeiros blocos de categorias para as análises, as mesmas utilizadas por Ferreira (2017) em sua análise de documentos curriculares.

A categoria A, explorar propriedades e relações de números inteiros, inclui a composição e a decomposição de números inteiros, observando suas estruturas; a compreensão do valor posicional dos algarismos no sistema de numeração decimal; a generalização de propriedades, como o resultado da subtração de um número por ele mesmo, resultado da adição ou da multiplicação de números pares ou ímpares. Pode ser exemplificada por meio de uma atividade em que os alunos, utilizando malhas quadriculadas, adicionam números pares e ímpares, e concluem, por exemplo, que a adição entre dois números ímpares é sempre par, porque é possível combinar as duas “sobras”.

A categoria B, explorar propriedades das operações com números inteiros, inclui a estrutura das operações matemáticas, como a subtração de números negativos; e as propriedades, como a comutativa, que vale para a adição e para a multiplicação, e a distributiva da multiplicação sobre a adição. A atividade exemplificada pelos autores é feita com base na descrição de deslocamentos em quadros organizados em 10 colunas, conforme o Quadro 2.

Quadro 2: Números de 1 a 100 organizados em um quadro de 10 colunas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: elaboração da autora.

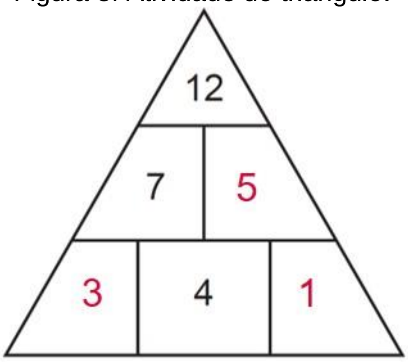
Perguntou-se, por exemplo, qual é o deslocamento necessário para ir de 75 para 65, sendo possível deslocar uma posição para cima, ou repetir 10 deslocamentos para a esquerda. A partir de atividades como essas, os alunos começaram a generalizar espontaneamente, por exemplo, que o resultado de deslocar duas posições para baixo e depois duas posições para cima (↓↓↑↑) resultava no próprio número de partida; ou, então, que deslocar uma posição para baixo e uma posição para a direita (↓→) teria o mesmo resultado do que deslocar uma posição para a direita e uma posição para baixo (→↓), enfatizando a relação entre as operações, e não o resultado do cálculo da operação.

A categoria C, explorar a igualdade como relação entre as quantidades, é explicada por seu próprio nome, e é um movimento oposto ao "princípio do acabamento de cálculo" da Aritmética, em que o sinal de igualdade aparece como um comando para que um cálculo seja efetuado. Pode ser exemplificada por situações com balança de pratos e por sentenças de igualdade em que os membros não são resultados, mas cálculos, como $8 + 4 = \square + 5$ em que o sinal representa uma relação de equivalência entre os dois membros da sentença.

A categoria D, tratar o número algebricamente, traz a ideia de observar a estrutura dos números em vez de valores específicos. Não é impreterível que os valores sejam simbolizados, um exemplo é o uso de números de cinco ordens para responder a questões, como se a soma deles seria par ou ímpar, levando os alunos a observarem se as parcelas em questão eram pares ou ímpares, em vez de efetuarem o cálculo. Dentre as categorias que selecionamos, essa foi uma das menos recorrentes na investigação de Blanton e Kaput (2005).

A categoria E, encontrar valores desconhecidos, pode ser exemplificada por meio da atividade ilustrada na Figura 3, que apresenta um triângulo dividido em partes. Algumas delas exibem valores conhecidos, e o objetivo é completar os valores desconhecidos apresentados nas partes, sabendo que a soma de valores apresentados em duas partes vizinhas é exibida na parte superior a elas. No exemplo a seguir, a resposta correta, que deveria ser apresentada, está em vermelho.

Figura 3: Atividade do triângulo.



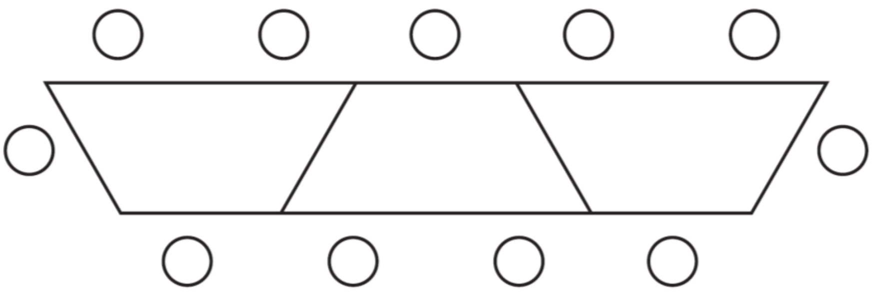
Fonte: BLANTON e KAPUT (2005, p. 423).

A categoria F, explicada no próprio título, consiste em simbolizar quantidades e operar com essas expressões simbolizadas. A simbolização de quantidades, neste caso, tem o objetivo de modelar problemas e operar com essas expressões. Um exemplo foi a criação de códigos simbólicos para a conversão de unidades de medida, após realizarem a mesma conversão para diferentes valores. Os alunos criaram a expressão F(12) + I, em que F representava o número de pés (*feet)* a ser multiplicado por 12 e I, o número de polegadas (*inches*) a fim de converter uma medida que estava em pés e polegadas para somente polegadas. Neste caso, F era uma variável que poderia assumir diversos valores, e o código atuava como uma função para converter as medidas mistas para polegadas; a categoria também abrange a simbolização de valores desconhecidos, que poderiam ser utilizados em atividades como a do triângulo exemplificado na categoria E (caso o aluno espontaneamente fizesse uso de algum símbolo).

Sobre a categoria G, representar dados graficamente, os autores ressalvam que, embora não seja um raciocínio inerentemente algébrico, ele é incluído por representar uma maneira de codificar informações que permite a análise de relações funcionais e pelo trabalho com pares ordenados ser tradicionalmente algébrico. Representações gráficas estatísticas não foram consideradas, por servirem a um propósito mais amplo, não sendo restrito ao pensamento algébrico. Dentre as categorias, essa é a que menos aparece nos estudos de Blanton e Kaput (2005).

A categoria H, encontrar relações funcionais, consiste em explorar relações entre quantidades e desenvolver uma regra que descreva essa relação. Tanto em exercícios mais simples, em que o aluno precisa descobrir a transformação ocorrida entre um valor inicial e um valor final, quanto em problemas mais complexos. Por exemplo, em um problema, os alunos deveriam descobrir quantas pessoas poderiam sentar-se em diferentes arranjos de mesas trapezoidais, conforme a Figura 4, generalizando a relação entre a quantidade de mesas, que deve ser multiplicada por três lugares de cada mesa e adicionada aos dois lugares das pontas das mesas, para encontrar a quantidade de pessoas sentadas.

Figura 4: Uma configuração da mesa para o problema da mesa trapezoidal.



Fonte: BLANTON e KAPUT (2005, p. 425).

A categoria I, prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos, pode ser exemplificada pelo problema dos apertos de mãos, em que há um grupo de pessoas, e se questiona quantos apertos de mãos serão dados, se todos se cumprimentarem apenas uma vez. Inicialmente, os alunos contam os apertos de mão, mas, a partir do momento que compreendem o padrão, são capazes de calcular os apertos de mãos de diversos grupos, sem a necessidade de contar.

A categoria J, identificar e descrever padrões numéricos e geométricos, não inclui apenas padrões de sequências de formas geométricas ou de números, mas também observações de padrões em atividades, como o problema dos apertos de mãos. Além de prever as quantidades de apertos de mãos para grupos com diferentes quantidades de pessoas (categoria I), eles descreveram uma regra geral, para encontrar a quantidade de apertos de mãos. Era necessário, assim, somar os números de 0 até um a menos do que a quantidade de pessoas que havia no grupo.

3.2 Procedimentos metodológicos

A presente investigação constitui-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, do tipo análise documental. Na pesquisa qualitativa, o investigador coleta dados descritivos com base no contato direto com a situação investigada (LÜDKE e ANDRÉ, 2018). Segundo Lorenzato e Fiorentini (2012), documentos são fontes ricas de informação apresentando-se estáveis no tempo; e incluem livros, propostas curriculares, dissertações e teses acadêmicas, entre outros. Em nossa investigação, descrevemos e analisamos o conteúdo de teses, dissertações e artigos a respeito do tema, da BNCC, do guia do livro didático e de duas edições de uma coleção de livros didáticos. Para desenvolver nosso estudo, delineamos os seguintes procedimentos:

- levantamento de teses e dissertações correlatas;
- levantamento de investigações para fundamentação teórica;
- análise, na BNCC, das orientações apresentadas para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental;
- levantamento e estudo das atividades nos livros didáticos do 1º ao 3º ano (ciclo de alfabetização) com potencial para desenvolver o pensamento algébrico;
- identificação e análise das organizações praxeológicas pontuais: tipos de tarefas, tipos de técnicas e discurso teórico-tecnológico das atividades dos livros didáticos (PNLD 2016 e 2019);

- organização dos tipos de tarefas encontradas, de acordo com o referencial teórico;
- comparação entre a análise de uma coleção anterior à BNCC e a mesma coleção posterior à BNCC;
- comparação entre a análise dos livros didáticos e a análise da BNCC.

A decisão pelo ciclo de alfabetização, que compreende do 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental, se deu pela necessidade de definir um recorte com a finalidade de haver tempo suficiente para coletar, organizar e analisar todos os dados dos livros das duas coleções. Como a novidade da BNCC está em trazer a *unidade temática* Álgebra desde os Anos Iniciais, nos motivava estudar o pensamento algébrico no início dessa etapa escolar, por isso optamos do 1º ao 3º ano, que configura o ciclo de alfabetização.

As análises serão apresentadas em dois capítulos. O capítulo 4 é dedicado à análise da BNCC. Optamos por analisar a BNCC por ela ser o documento que orientou a elaboração da edição mais atual da coleção de livros didáticos, nos preparando para encontrar caminhos para a análise deles. Foram lidas todas as habilidades da BNCC de todas as *unidades temáticas*, por entendermos que o pensamento algébrico perpassa os campos matemáticos.

Durante a leitura, identificamos quais habilidades se relacionavam com alguma das categorias elencadas com base nos autores Blanton e Kaput (2005), e assim selecionamos as habilidades com potencial de desenvolver o pensamento algébrico a partir de nosso referencial. Como a *unidade temática* Álgebra é uma novidade para todos os Anos Iniciais, optamos por analisar a Base para os cinco primeiros anos do Ensino Fundamental.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais, e é possível que o livro didático aborde habilidades além das previstas para cada ano no documento. Nesse sentido, conhecer os dois anos seguintes pode nos ajudar a prever outros assuntos abordados, também com potencial para desenvolver o pensamento algébrico. Em seguida, organizamos as habilidades selecionadas de acordo com cada categoria.

O capítulo 5 é dedicado à análise praxeológica dos livros didáticos. Para a escolha da coleção de livros didáticos analisados, o primeiro critério adotado foi a aprovação dos cinco livros destinados aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental pelo PNLD 2016 e pelo PNLD 2019. Esse critério garante a comparação de uma mesma coleção concebida antes da homologação da BNCC — PNLD 2016 — com outra já elaborada de acordo com o documento — PNLD 2019 —, evidenciando diferenças a partir das prescrições do documento curricular, além de garantir também que a pesquisa possa ser estendida para o 4º e 5º anos em outra ocasião.

Com base no primeiro critério, foram selecionadas seis coleções. Para escolher dentre estas, o segundo critério foi o tratamento dado ao desenvolvimento de aspectos da *unidade temática* Álgebra segundo o Guia do Livro Didático 2019. Esse critério garante que a coleção escolhida se dedique ao pensamento algébrico e que haja atividades para serem analisadas. Considerando o segundo critério, restaram apenas duas coleções. O terceiro critério para a escolha foi o acesso ao material, pois somente uma das editoras cedeu as coleções de livros do professor de 2016 e 2019 para a pesquisa.

A coleção escolhida é intitulada *Nosso Livro de Matemática*, dos autores Célia Maria Carolino Pires e Ivan Cruz Rodrigues. Para identificarmos as duas edições da coleção, utilizamos a seguinte nomenclatura:

- 1A16 — livro do **1º a**no pertencente à coleção aprovada pelo PNLD 20**16**.
- 1A19 — livro do **1º a**no pertencente à coleção aprovada pelo PNLD 20**19**.

E continuaremos a indicação, alterando apenas o primeiro número para indicar os demais anos: 2A16, 2A19; 3A16, 3A19.

A análise dos livros foi feita aos pares, analisando cada ano da edição aprovada pelo PNLD 2019 e da edição aprovada pelo PNLD 2016. No primeiro momento, analisamos a coleção de 2019, que apresenta na lateral de cada página do livro do professor qual é a habilidade da BNCC abordada. Vale observar que existem também algumas habilidades criadas pelos autores do livro que não estão presentes na BNCC.

Com base nas habilidades levantadas no capítulo 4 — habilidades que entendemos ter potencial para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, independentemente de estar na *unidade temática* Álgebra ou em outra *unidade temática* —, identificamos as páginas que tratavam dessas habilidades. Depois, lemos as habilidades criadas pelos autores para verificar quais tinham potencial de desenvolver o pensamento algébrico. Por fim, analisamos os exercícios de cada uma dessas páginas a fim de selecionar as atividades que tinham, de fato, potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Após a seleção de atividades, elaboramos a análise praxeológica definindo os tipos de tarefas, as tarefas, as técnicas e vislumbrando também tecnologias e teorias.

Dada a proximidade entre os dois livros, ao observar a edição anterior, selecionamos quais exercícios se repetiam e quais eram novidade, nos atendo às atividades diferentes entre as edições. Houve também uma breve leitura de todas as páginas dos livros, momento que nos levou a acrescentar alguns exercícios identificados na obra com outras habilidades da BNCC, mas que consideramos ter potencial para desenvolver o pensamento algébrico a partir de nosso referencial teórico. Nosso olhar se deteve, principalmente, às habilidades da BNCC descritas no capítulo 4; às habilidades criadas pelos autores na edição atual com potencial para desenvolver o pensamento algébrico; e na observação comparativa entre as duas edições.

Depois de elaborar a análise praxeológica dos três anos e ter uma ideia mais geral das tarefas e dos tipos de tarefas, percebemos a necessidade de reorganizar e reescrever todos os tipos de tarefas e tarefas para refinar a hierarquia e o paralelismo entre eles. Nesse momento, organizamos os tipos de tarefas em oito assuntos, apresentados a seguir, levando em consideração as categorias propostas por Blanton e Kaput (2005) e os assuntos que se destacavam na análise.

1. Sistema de numeração decimal: este assunto está compreendido na categoria A — explorar propriedades e relações de números inteiros –, não representa a categoria em sua totalidade, mas é bastante abordado no livro.

2. Números: o assunto compreende o restante da categoria A, as propriedades e as relações de números inteiros que não se relacionam diretamente com o sistema de numeração decimal.

3. Operações: este assunto compreende a categoria B, explorar propriedades das operações com os números inteiros.

4. Igualdade: compreende a categoria C, explorar a igualdade como relação entre quantidades, incluindo situações em que não há o sinal de igualdade, mas há a noção de equivalência relacionada à igualdade.

5. Valores desconhecidos: compreende a categoria E, encontrar valores desconhecidos.

6. Relações funcionais: este assunto compreende a categoria H, encontrar relações funcionais.

7. Sequências: é o assunto mais presente nos livros analisados, por isso optamos por unir a categoria I com a parte da categoria J que se relaciona com sequências para formar este assunto.

8. Organização de objetos: este assunto se relaciona a uma parte da categoria J, mas não se relaciona diretamente com sequências, por isso optamos por separá-los de sequências em um assunto específico.

Após a reorganização, retomamos as coleções, relemos e verificamos se a nova organização proposta estava adequada, fazendo as adaptações necessárias. Uma nota específica do percurso deste trabalho foi que, inicialmente, a intenção da pesquisa era analisar os cinco Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, ao terminar a análise do terceiro ano, já havia uma quantidade de dados muito grande e que precisava de uma ampla organização.

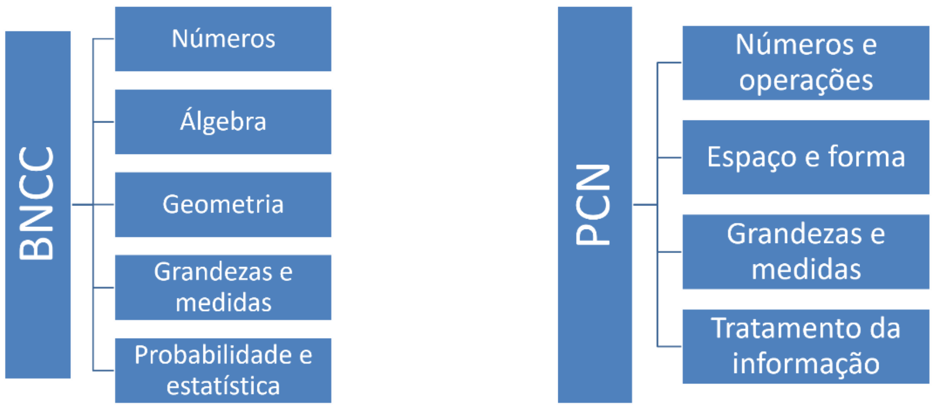
CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) referente à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental foi homologada em dezembro de 2017. Segundo o Ministério da Educação (MEC) (BRASIL, 2018), a BNCC orientará os currículos e as propostas pedagógicas da educação básica, das escolas públicas e privadas de todo o Brasil.

Até então, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) eram a referência para os currículos e as propostas pedagógicas. Neles, é feita a divisão dos conteúdos matemáticos em quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação (BRASIL, 1997).

Já a BNCC organiza tal conteúdo em cinco *unidades temáticas*: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2017). Esse documento institui, portanto, a Álgebra como *unidade temática* desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, surgindo a necessidade de reformular materiais curriculares e reelaborar a prática dos professores para cumprir a nova demanda. A Figura 5 ilustra a organização dos conteúdos nos dois documentos.

Figura 5: Unidades temáticas da BNCC e eixos dos PCN.



Fonte: elaboração da autora.

No documento BNCC tem uma seção para a área da Matemática, apresentando, dentre outras questões, um quadro com os objetos de conhecimentos e as respectivas habilidades para cada série dos Anos Iniciais. Esta é a parte que analisaremos a seguir, por considerar a mais relevante para nossa análise de livros didáticos.

No entanto, cabe ressalvar que não temos a pretensão de discorrer sobre aspectos contrários ou favoráveis ao documento, mas de estudá-lo à luz do referencial proposto.

4.1 Outras análises da BNCC

Conforme mencionado na revisão de literatura, os trabalhos de Lima (2018) e de Ferreira (2017) analisaram respectivamente a BNCC e uma de suas versões prévias. Vamos, então, trazer alguns aspectos das pesquisas para contribuir e para diferenciá-los do estudo feito neste trabalho.

A pesquisa de Lima (2018) faz uma análise de conteúdo, segundo Laurence Bardin, e descreve de maneira objetiva, sistemática e quantitativa o conteúdo dos documentos analisados. O autor cria três categorias de análise. Na primeira, categoria estrutural, o autor observa a dedicação de uma *unidade temática* para a Álgebra já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o que condiz com a linha de pesquisa *Early Algebra*. Na segunda, categoria intramatemática, o autor verifica se a Álgebra permeia outros campos da Matemática, identificando um discurso a respeito da relação entre as *unidades temáticas*, que aparece de maneira mais sutil no quadro de habilidades proposto para os Anos Iniciais. Na terceira, categoria conceitual, o pesquisador destaca como principais ideias a serem trabalhadas nos três primeiros anos do Ensino Fundamental as regularidades; a generalização de padrões; as propriedades da igualdade; a equivalência; e a relação entre variáveis, fazendo uso de símbolos, mas sem a exigência do formalismo algébrico.

O autor concluiu que a concepção de ensino de Álgebra apresentada para os Anos Iniciais na BNCC é bastante próxima da corrente *Early Algebra,* apesar de a Base declarar a *unidade temática* Álgebra, há conceitos algébricos, também, em outras *unidades temáticas*, articulando a Álgebra com outros campos da Matemática. Com base nas conclusões de Lima (2018), tomamos a decisão de analisar todas as habilidades dos Anos Iniciais e não apenas as habilidades pertencentes à *unidade temática* Álgebra.

A pesquisa de Ferreira (2017) analisa a primeira versão da BNCC de uma maneira mais próxima da que faremos a seguir. Ela levantou categorias e subcategorias do ensino de Álgebra nos Anos Iniciais a partir da pesquisa de Blanton e Kaput (2005), mesma referência e categorias que utilizaremos para nosso estudo. Uma das principais diferenças, porém, é que a autora verificou quais subcategorias eram abordadas pela BNCC, e nós faremos também um movimento inverso, relacionando cada habilidade às subcategorias. Além disso, à época das pesquisas de Ferreira (2017), só estavam disponíveis versões preliminares da Base, e, atualmente, nós já temos a versão homologada. A autora concluiu que, dentre os documentos analisados, a BNCC era o que tratava com maior intencionalidade e abrangia o maior número de subcategorias do trabalho com Álgebra nos Anos Iniciais. Documentos anteriores, incluindo os PCN, tinham o trabalho mais voltado para a categoria Aritmética generalizada.

4.2 Análise da BNCC

Antes de apresentar os quadros dedicados às habilidades, o documento apresenta suas expectativas em relação à *unidade temática* Álgebra para os Anos Iniciais, enfatizando as propriedades da igualdade, a ideia de regularidade, a generalização de padrões e a noção intuitiva de função. Não exige o uso de letras. E sugere ainda a articulação com outras *unidades temáticas*, principalmente a *unidade* Números, conforme observado por Lima (2018).

Relacionamos as habilidades presentes na BNCC dedicadas à *unidade temática* Álgebra, e também, de outras *unidades temáticas* que possam se enquadrar nas categorias elencadas. Nem todas se relacionam em sua totalidade ao pensamento algébrico, mas abrangemos todas que consideramos ter algum potencial de contribuir para o desenvolvimento de tal pensamento. Além disso, algumas habilidades apresentam características de mais de uma categoria, e, por isso, foram consideradas em diferentes categorias.

As categorias por nós utilizadas para essa análise da BNCC são bastante próximas das de Ferreira (2017), conforme descritas em nosso estudo com base em Blanton e Kaput (2005).

Quadro 3: Categorias da Álgebra nos Anos Iniciais.

Categorias	
A	Explorar propriedades e relações de números inteiros.
B	Explorar propriedades das operações com os números inteiros.

C	Explorar a igualdade como relação entre quantidades.
D	Tratar o número algebricamente.
E	Encontrar valores desconhecidos.
F	Simbolizar quantidades e operar com expressões simbolizadas.
G	Representar dados graficamente.
H	Encontrar relações funcionais.
I	Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.
J	Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

Fonte: elaboração da autora.

Algumas habilidades referentes à equivalência ora foram categorizadas como C — explorar a igualdade como relação entre quantidades —, por entendermos que se relacionavam mais à questão da igualdade; ora foram categorizadas como H — encontrar relações funcionais —, por entendermos que tinham maior enfoque na relação entre duas quantidades.

A seguir, organizamos para cada categoria de Blanton e Kaput (2005) quais as habilidades da BNCC estão relacionadas e tecemos os comentários a respeito de cada uma.

A categoria A explora propriedades e relações de números inteiros, com enfoque nas estruturas numéricas, explorando também características do sistema numérico decimal.

Quadro 4: Habilidades da categoria A.

Unidade temática	Habilidade
Números	(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.
	(EF02MA01) Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero).
	(EF02MA04) Compor e decompor números naturais de até três ordens, com suporte de material manipulável, por meio de diferentes adições.
	(EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens.
	(EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo.
	(EF04MA10) Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um

	número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.
	(EF05MA01) Ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem das centenas de milhar com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal.
	(EF05MA02) Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica.
Álgebra	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Fonte: elaboração da autora.

A partir do Quadro 4, notamos que a categoria A é uma das que apresenta maior quantidade de habilidades, são nove no total; está bem distribuída aparecendo em todos os Anos Iniciais (os dois primeiros números do código da habilidade se referem ao ano; por exemplo, EF**01**MA07 é uma habilidade do 1º ano do Ensino Fundamental); há uma concentração maior na *unidade temática* Números, são oito habilidades de Números e apenas uma habilidade da *unidade temática* Álgebra. O grande foco do trabalho da BNCC localizado nessa categoria está na composição e na decomposição dos números inteiros e no valor posicional dos algarismos, no entanto, não há uma abordagem sólida das relações e das propriedades dos números inteiros.

A categoria B explora propriedades das operações com números inteiros.

Quadro 5: Habilidades da categoria B.

Unidade temática	Habilidade
Números	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.
	(EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.
Álgebra	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.

Fonte: elaboração da autora.

A partir do Quadro 5, observa-se que a categoria B não apresenta muitas habilidades, são três no total; está concentrada no 4º ano; e aparece tanto na *unidade temática* Números (duas habilidades) como em Álgebra (uma habilidade). Apesar de não concentrar tantas habilidades, aborda o que é proposto na categoria de maneira relacionada a estratégias de cálculo. Não inclui especificamente números negativos, que não estão entre os objetos do conhecimento dos Anos Iniciais.

A categoria C explora a igualdade como relação entre as quantidades.

Quadro 6: Habilidades da categoria C.

Unidade temática	**Habilidade**
Grandezas e Medidas	(EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas.
	(EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.
Álgebra	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
Números	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.

Fonte: elaboração da autora.

No Quadro 6, observamos que a categoria C é bastante explorada, com seis habilidades da BNCC; está bem distribuída ao longo dos anos, não aparecendo apenas no 1º ano; aparece como uma ideia latente na *unidade temática* Grandezas e Medidas ainda no 2º ano, e é tratada de maneira sólida dentro de Álgebra do 3º ao 5º ano, sendo que no 5º ano aparece também na *unidade temática* Números. Nessa categoria, incluímos habilidades que não tratavam diretamente da igualdade, mas de equivalência de maneira próxima à igualdade.

A categoria E explora exercícios cujo objetivo seja encontrar valores desconhecidos.

Quadro 7: Habilidades da categoria E.

Unidade temática	**Habilidade**
Álgebra	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Fonte: elaboração da autora.

A partir do Quadro 7, vemos que essa categoria só aparece relacionada à uma habilidade, do 4º ano da *unidade temática* Álgebra. Além do trabalho apenas em um ano ser muito pontual, a habilidade também é muito específica.

A categoria F explora a simbolização de quantidades e a operação com expressões simbolizadas.

Quadro 8: Habilidades da categoria F.

Unidade temática	Habilidade
Álgebra	(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.

Fonte: elaboração da autora.

No Quadro 8, vemos que a categoria F aparece relacionada a apenas uma habilidade 5º ano da *unidade temática* Álgebra, o que já era esperado, uma vez que o documento declara anteriormente que, nos Anos Iniciais, não haveria exigência do simbolismo.

A categoria G explora a representação de dados em gráficos com o objetivo de analisar relações funcionais.

Quadro 9: Habilidades da categoria G.

Unidade temática	Habilidade
Geometria	(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

Fonte: elaboração da autora.

Em relação à habilidade G, não foram consideradas as habilidades da *unidade* Probabilidade e Estatística. Conforme Blanton e Kaput (2005), a representação gráfica não é um raciocínio inerentemente algébrico, no entanto, nos interessa a possiblidade de analisar relações funcionais e lidar com pares ordenados. As habilidades relacionadas à *unidade* Probabilidade e Estatística não trazem pares ordenados ou relações funcionais, portanto, não foram consideradas.

A partir do Quadro 9 percebemos que a categoria G aparece em apenas uma habilidade do 5º ano da *unidade temática* Geometria, sendo relacionada à localização de objetos no plano cartesiano. O trabalho se dá em um contexto muito específico e é muito pontual, aparecendo em apenas um ano.

A categoria H explora relações funcionais com o objetivo de descrevê-las.

Quadro 10: Habilidades da categoria H.

Unidade temática	Habilidade
Grandezas e Medidas	(EF01MA17) Reconhecer e relacionar períodos do dia, dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, quando necessário.
	(EF03MA23) Ler horas em relógios digitais e em relógios analógicos e reconhecer a relação entre hora e minutos e entre minuto e segundos.
	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
Números	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
Álgebra	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: elaboração da autora.

O Quadro 10 nos mostra que a categoria H é uma das categorias que apresenta mais habilidades, são seis no total; está distribuída ao longo de quatro, dos cinco anos, no entanto, aparece no 1º e no 3º anos na *unidade temática* Grandezas e Medidas, que concentra três das seis habilidades da categoria, não aparece no 2º ano, aparece no 4º ano na *unidade temática* Números e no 5º ano na *unidade temática* Álgebra com duas habilidades. Apesar de a categoria H aparecer diversas vezes, o trabalho intencional dentro da *unidade* Álgebra aparece apenas no 5º ano. Aqui, nessa categoria, colocamos as habilidades que entendemos lidar com relações funcionais, não necessariamente com o rigor descrito pelo referencial teórico, que é o caso das habilidades de Grandezas e Medidas.

A seguir, apresentaremos os quadros 11 e 12, respectivamente relacionados às categorias I e J, e faremos considerações conjuntas por serem habilidades relacionadas, conforme explicitamos no referencial teórico e por concentrarem habilidades que abordam sequências de padrões.

A categoria I explora a previsão de resultados com base em dados desconhecidos.

Quadro 11: Habilidades da categoria I.

Unidade temática	Habilidade
Álgebra	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

Fonte: elaboração da autora.

O Quadro 11 nos mostra que a categoria I é abordada em quatro habilidades; está distribuída ao longo dos três primeiros Anos Iniciais do Ensino Fundamental; presente exclusivamente na *unidade temática* Álgebra.

A categoria J identifica e descreve padrões numéricos e geométricos que podem ser apresentados por meio de situações-problema.

Quadro 12: Habilidades da categoria J.

Unidade temática	Habilidade
Álgebra	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	(EF01MA15) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.
	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.

	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
Números	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Fonte: elaboração da autora.

A partir do Quadro 12, notamos que a categoria J é uma das que apresenta maior quantidade de habilidades, são nove no total; está distribuída ao longo dos quatro primeiros anos, não aparecendo no 5º ano; a categoria está concentrada na *unidade temática* Álgebra, com oito habilidades, e apresenta uma habilidade na *unidade* Números. Há duas habilidades (EF01MA09 e EF01MA15) que tratam de organização de objetos, as quais relacionamos aqui à categoria J, por compreender que tais organizações envolvem critérios ou padrões.

Nos quadros 11 e 12, fica clara a abundância do trabalho com regularidades e padrões, o que é bastante significativo, uma vez que esse trabalho desde os primeiros anos é uma das estratégias da *Early Algebra*. No entanto, está muito centrada em sequências. Para cumprir o que a categoria propõe é necessário explorar também regularidades e padrões em problemas e outras situações. Nas habilidades da BNCC, é proposta a construção de sequências numéricas a partir de uma regularidade, algo que não está presente nas categorias I e J.

A categoria D — tratar o número algebricamente — é a única que não aparece. De fato, não se evidencia no documento o tratamento do número algebricamente, com o foco na estrutura, evitando casos particulares para abstrair características gerais.

Em termos de quantidade de habilidades, se destacam as categorias A — explorar propriedades e relações de números inteiros — e J — identificar e descrever padrões numéricos e geométricos —, com nove habilidades cada uma; e as categorias C — explorar a igualdade como relação entre quantidades — e H — encontrar relações funcionais —, com seis habilidades cada uma. A categoria I — prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos — apresenta quatro habilidades; a categoria B — explorar propriedades das operações com os números inteiros — apresenta três habilidades; e as categorias E — encontrar valores desconhecidos —, F — simbolizar quantidades e operar com expressões simbolizadas — e G —

representar dados graficamente — apresentam uma habilidade cada uma. Veja o Quadro 13 a seguir.

Quadro 13: Relação entre as categorias e as habilidades da BNCC

Categoria	Habilidades			Total
A - Explorar propriedades e relações de números inteiros.	EF01MA07 EF02MA01 EF02MA04	EF03MA02 EF04MA02 EF04MA10	EF04MA012 EF05MA01 EF05MA02	9
B - Explorar propriedades das operações com os números inteiros.	EF04MA04 EF04MA05	EF04MA13		3
C - Explorar a igualdade como relação entre quantidades.	EF02MA20 EF03MA11	EF03MA24 EF04MA14	EF05MA04 EF05MA10	6
D - Tratar o número algebricamente.				0
E - Encontrar valores desconhecidos.	EF04MA15			1
F - Simbolizar quantidades e operar com expressões simbolizadas.	EF05MA11			1
G - Representar dados graficamente.	EF05MA15			1
H - Encontrar relações funcionais.	EF01MA17 EF03MA23	EF04MA06 EF05MA12	EF05MA13 EF05MA19	6
I - Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.	EF01MA10 EF02MA09	EF02MA11 EF03MA10		4
J - Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.	EF01MA09 EF01MA10 EF01MA15	EF02MA09 EF02MA10 EF03MA10	EF04MA06 EF04MA11 EF04MA12	9

Fonte: elaboração da autora.

A categoria A, além da quantidade de habilidades, apresentou boa distribuição, estando presente ao longo de todos os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, destacando-se o 4º ano com três habilidades. O trabalho acontece principalmente na *unidade temática* Números, o que é coerente, uma vez que a habilidade trata das propriedades e das relações entre os números. Nas habilidades, tem destaque o sistema de numeração decimal, com a exploração do valor posicional dos algarismos, a composição e a decomposição de números. As relações e as propriedades de números observando suas estruturas, além do sistema de numeração decimal, aparecem apenas na única habilidade da *unidade temática* Álgebra. Essa questão poderia ser explorada com mais habilidades e nos anos anteriores também.

A categoria C, que se destaca pela quantidade de habilidades, se apresenta também bem distribuída, não aparecendo apenas no 1º ano. A habilidade do 2º ano é da *unidade temática* Grandezas e Medidas, que, apesar de não trazer o símbolo da igualdade, trata da noção de equivalência. Do 3º ao 5º ano há uma habilidade para cada ano dentro da *unidade temática* Álgebra, tratando do símbolo de igualdade. No 5º ano a equivalência será tratada também na *unidade temática* Números.

A categoria H tem grande quantidade de habilidades e não aparece apenas no 2º ano. No 1º e no 3º anos as habilidades estão na *unidade temática* Grandezas e Medidas, e poderiam ter tido continuidade no 2º ano. No 4º ano a habilidade está na *unidade temática* Números. O trabalho aparece latente em outras unidades temáticas até o 4º ano, e só aparece em Álgebra a partir do 5º ano exemplificada por problemas bastante específicos. Isso indica que a categoria poderia ser mais bem distribuída ao longo dos anos dentro da *unidade temática* Álgebra, abrangendo não só a proporcionalidade, uma vez que as relações funcionais são importantes para o pensamento algébrico e não estão relacionadas diretamente a nenhuma outra *unidade temática* (mas pode ser explorada em diversos contextos).

A categoria B apresenta apenas três habilidades no 4º ano. Ela menciona as propriedades das operações; traz as relações entre as operações (adição e subtração, e multiplicação e divisão) que, apesar de não estarem explícitas na categoria, entendemos como estudo das estruturas das operações. A BNCC não inclui números negativos, eles não são apresentados no documento como objeto do conhecimento. Além da ausência desse conteúdo, notamos a má distribuição da categoria ao longo dos anos, que deveria, no mínimo, ser continuada no 5º ano.

Seguindo o mesmo procedimento já utilizado, juntaremos as categorias I e J, pela relação que apresentam já no referencial de Blanton e Kaput (2005), e por trazerem com muita força o assunto sequências e padrões. A categoria J (assim como a categoria A) é das mais exploradas em termos de quantidade de habilidades presentes na BNCC e está presente do 1º ao 4º ano; a categoria I apresenta quatro habilidades, está presente do 1º ao 3º ano; portanto, falta continuidade das habilidades até o 5º ano. Outro dado expressivo é a presença constante de sequências, que estão presentes nas quatro habilidades da categoria I e em cinco das nove habilidades da categoria J. Sequências é um assunto recorrente da *Early Algebra*, assim como a utilização do contexto aritmético. No entanto, observando o referencial teórico, percebemos que elas não são o único contexto possível para trabalhar com padrões. Consequentemente, outros contextos estão deixando de ser explorados.

As categorias E, F e G apresentaram apenas uma habilidade cada uma e precisam ser exploradas com mais habilidades ao longo dos anos. A habilidade da categoria E é muito específica, limitando a exploração de valores desconhecidos, lembrando que essa categoria não trata especificamente de quantidades simbolizadas, apenas desconhecidas. A questão simbólica da categoria F aparece de forma latente em uma habilidade. Apesar de a BNCC declarar que não exigiria o simbolismo, ele constitui papel importante na Álgebra, e a intenção de construí-lo poderia aparecer mais no documento. A única habilidade da categoria G, pertencente à *unidade temática* Geometria, trata do plano cartesiano, de maneira muito relacionada à localização de objetos. Nesse sentido, falta um trabalho de gráficos centrado na variação entre duas quantidades.

O documento, portanto, apresenta um trabalho com elementos do pensamento algébrico já nos Anos Iniciais, algo em consonância com a corrente *Early Algebra*, mas não abrange todas as categorias propostas nesse estudo, e das categorias que abrange, não o faz, necessariamente, em sua totalidade. Destaque para a necessidade de explorar relações e propriedades de números observando suas estruturas, além do sistema de numeração decimal (categoria A); investigar relações funcionais em contextos diversos (categoria H); trabalhar números negativos (categoria B); descentralizar o trabalho de padrões com sequências, explorando outros contextos; ampliar o trabalho com valores desconhecidos não simbolizados e simbolizados (categorias E e F); representar dados graficamente com objetivo de analisar relações funcionais; e tratar o número algebricamente (categoria D), lembrando que existem formas de fazer isso sem a utilização de símbolos.

A seguir, tendo melhor compreensão do documento que orientou a elaboração da coleção atual de livros didáticos, e sob o qual pretendemos analisar as influências nas propostas dos livros, passaremos, então, para a análise praxeológica da coleção.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE COMPARATIVA DE DUAS EDIÇÕES DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, apresentamos a análise *praxeológica* das coleções de livros didáticos e fazemos considerações a respeito dela. Organizamos a análise por assunto, descrevendo as tarefas, os tipos de tarefas e as técnicas, e apresentamos em um quadro a distribuição das tarefas nos livros.

5.1 A coleção analisada

A coleção analisada é dos autores Célia Maria Carolino Pires e Ivan Cruz Rodrigues, intitulada *Nosso Livro de Matemática*. Essa coleção teve sua 2ª edição aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 2016, e sua 3ª edição aprovada pelo PNLD, em 2019. Tivemos acesso, por meio da editora, à versão do professor, que inclui anotações e comentários.

A organização das duas coleções é muito próxima. Há um livro destinado para cada ano. O livro é dividido em 8 unidades que possuem os mesmos títulos nas duas edições. O conteúdo das edições é parecido, havendo, porém, algumas diferenças. Os títulos das unidades são "fantasiosos", no sentido de que não anunciam objetos matemáticos, mas questões narrativas, por exemplo, a unidade 1 do 1º ano, intitulada "Descobertas de dois curiosos".

A divisão dos conteúdos não é feita por unidade. Cada unidade abarca diferentes objetos matemáticos dos diferentes campos. Não há uma unidade dedicada para Geometria, por exemplo, que é abordada em diferentes unidades ao longo do livro. Cada unidade do livro apresenta mais de uma *unidade temática* da BNCC, e toda *unidade temática* é tratada em mais de uma unidade do livro.

5.2 Procedimentos

A análise do livro teve início pela edição aprovada pelo PNLD 2019. Essa opção se deu porque o livro (do professor) apresenta em cada página os códigos das habilidades da BNCC abordadas. A partir da análise da Base, os códigos das habilidades foram selecionados e, portanto, nos auxiliaram no processo de busca pelas atividades. Além disso, havia habilidades criadas pelos próprios autores, e cada uma delas foi lida para verificar se havia potencial algébrico. Apesar de a seleção ter tido como base esse processo, todas as atividades eram brevemente lidas em busca de potencial algébrico a partir de Blanton e Kaput (2005).

Depois que foram selecionadas as atividades de um livro, elaboramos a análise praxeológica, definindo os blocos “prático-técnico” e “tecnológico-teórico” das atividades. Em seguida, a análise era repetida na edição anterior do mesmo ano. Como os livros são bem parecidos, foi necessário atentar ao que havia de diferente.

Após realizar esse processo nos três anos analisados, pudemos ter uma ideia geral das tarefas e dos tipos de tarefas presentes no material. E então reescrevemos todo o bloco “prático-técnico” para organizar as tarefas, hierarquizando-as corretamente e garantindo paralelismo nas descrições. Essa reorganização nos levou a dividir a análise em oito assuntos: **Sistema de numeração decimal**; **Números**; **Operações**; **Igualdade**; **Valores desconhecidos**; **Relações funcionais**; **Sequências**; e **Organização de objetos**. Os critérios utilizados para essa divisão foram os assuntos que emergiram nas análises e nas categorias propostas por Blanton e Kaput (2005).

5.3 Análise praxeológica

Conforme descrito no referencial teórico-metodológico, a análise praxeológica é dividida em um bloco “prático-técnico” [T / τ], composto pelos tipos de tarefa (T), as tarefas (t) e pelas técnicas (τ) que constituem um “saber fazer”; além de um bloco “tecnológico-teórico” que justifica a técnica e garante seu funcionamento. No entanto, apesar de toda técnica τ relativa a um tipo de tarefa T estar acompanhada, no mínimo, de uma tecnologia embrionária, pode acontecer de alguns elementos tecnológicos estarem integrados à própria técnica. E é por esse motivo que os livros didáticos elaborados para os Anos Iniciais não costumam ter, como objeto de estudo, elementos teóricos e tecnológicos. Essa é a justificativa para não explicitarmos esses elementos para cada técnica em nossa análise, da mesma maneira que fazemos com as técnicas, as tarefas e os tipos de tarefas. Mas, sempre que for possível, explicitaremos também o discurso tecnológico-teórico.

Ressaltamos, também, que as tarefas e os tipos de tarefas levaram em consideração não apenas o enunciado das atividades, mas o contexto em que estava inserido. Quanto às técnicas para a resolução das tarefas, podem existir outras que não foram consideradas, pois buscamos caracterizar a proposta de ensino do livro didático. Dessa forma, privilegiamos técnicas apresentadas no livro do professor e compatíveis com as respectivas séries.

5.3.1 Sistema de numeração decimal

Esse grupo de tipos de tarefas (TD) trata de regularidades do sistema de numeração decimal, trabalha com o valor posicional da escrita dos numerais, bem como a composição e a decomposição de números na estrutura decimal. É um assunto contido na categoria A — explorar propriedades e relações de números inteiros —, mas não abrange sua totalidade. Para esse grupo de tarefas, a estrutura posicional do sistema de numeração decimal é o que caracteriza o discurso tecnológico-teórico de suas técnicas.

O tipo de tarefa TD1 é dedicado à descrição de algumas regularidades nas ordens das unidades, das dezenas e das centenas de numerais organizados em tabelas com 10 colunas. A atividade da Figura 6 exemplifica as tarefas td1.1 (item c), td1.2 (item d) e td1.3 (itens c e d), descritas a seguir. Além de completar o quadro com os números, nos itens c) e d) é esperada a descrição de regularidades nas ordens das unidades, das dezenas e das centenas. A figura apresenta em vermelho as respostas que os alunos deveriam fornecer.

TD1 — Descrever regularidades do sistema numérico decimal.

td1.1 — Descrever regularidades na ordem das unidades de números naturais em tabelas de 10 colunas.

$\boldsymbol{\tau}$d1.1.1 — Observar algarismo da direita dos números que estão em uma mesma coluna.

td1.2 — Descrever regularidades na ordem das dezenas de números naturais em tabelas de 10 colunas.

$\boldsymbol{\tau}$d1.2.1 — Observar o algarismo do meio dos números que estão em uma mesma linha.

td1.3 — Descrever regularidades na ordem das centenas de números naturais em tabelas de 10 colunas.

$\boldsymbol{\tau}$d1.3.1 — Observar o algarismo da esquerda dos números que estão em uma mesma linha ou coluna.

Figura 6: Exemplo de descrição de regularidades nas ordens das unidades, das dezenas e das centenas.

A TURMA DE ESTELA ESTÁ CONFECCIONANDO CARTÕES NUMERADOS, QUE SERÃO DISTRIBUÍDOS AOS CONVIDADOS NA ENTRADA DA FESTA DA PRIMAVERA NA ESCOLA BRASIL.

1. VEJA ALGUNS DOS CARTÕES E COMPLETE A NUMERAÇÃO DE ACORDO COM A SEQUÊNCIA:

300	301	302	303	304	305	306	307	308	309
310	311	312	313	314	315	316	317	318	319
320	321	322	323	324	325	326	327	328	329
330	331	332	333	334	335	336	337	338	339
340	341	342	343	344	345	346	347	348	349
350	351	352	353	354	355	356	357	358	359
360	361	362	363	364	365	366	367	368	369

C) O QUE HÁ DE PARECIDO NOS NÚMEROS DOS CARTÕES DA QUARTA LINHA? Todos são formados por três algarismos e começam pelo algarismo 3, seguido de outro algarismo 3.

D) E NOS NÚMEROS DOS CARTÕES DA QUARTA COLUNA?

Todos são formados por três algarismos, começam por 3 e terminam em 3.

Fonte: 2A19, p. 136.

O Quadro 13 sintetiza a distribuição do tipo de tarefa TD1 ao longo dos livros analisados.

Quadro 14: Distribuição das tarefas de descrição de regularidades do sistema de numeração decimal.

Tipo de tarefa (TD)		Tarefa (td)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TD1	Descrever regularidades do sistema numérico decimal.	td1.1	Descrever regularidades na ordem das unidades de números naturais em tabelas de 10 colunas.	4	0	1	1	1	1
		td1.2	Descrever regularidades na ordem das dezenas de números naturais em tabelas de 10 colunas.	4	4	1	1	1	1

		td1.3	Descrever regularidades na ordem das centenas de números naturais em tabelas de 10 colunas.	0	0	2	2	2	2

Fonte: elaboração da autora.

Em relação à descrição de regularidades na ordem das dezenas (td1.2) e das centenas (td1.3) não há qualquer diferença entre as duas coleções. No entanto, a descrição de regularidades na ordem das unidades (td1.1), que era abordada desde o 1º ano na edição anterior à Base, deixou de ser abordada na edição atual.

Os tipos de tarefa TD2 e TD3 tratam da composição e da decomposição de números de acordo com as ordens do sistema de numeração decimal por meio de diferentes recursos. Consideramos, como compor, as atividades nas quais o enunciado apresenta o número decomposto e é esperada a escrita do número com numeral ou por extenso; e decompor quando o número é dado por meio do numeral ou por extenso e é esperada a escrita de uma maneira decomposta.

As figuras 7 a 12 apresentam, cada uma, um exemplo em que um número é apresentado decomposto de acordo com a organização do sistema de numeração decimal. O que as difere são os recursos utilizados, respectivamente, fichas, adição, quadro valor de lugar, ábaco, objetos e a descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades. Os alunos devem compor cada número, e as respostas estão apresentadas em vermelho nas figuras.

TD2 — Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal.

td2.1 — Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de fichas com valores descritos.

τd2.1.1 — Adicionar as centenas descritas na ficha vermelha, com as dezenas descritas na ficha amarela e com as unidades descritas na ficha azul compondo o número.

τd2.1.2 — Sobrepor as fichas fazendo a composição posicional do numeral.

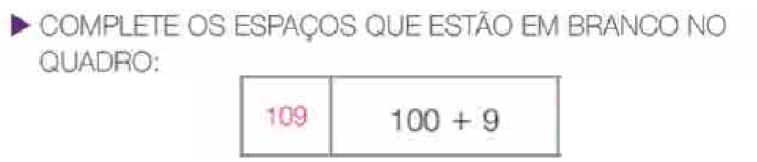
Figura 7: Exemplo de composição com fichas.

Fonte: 3A19, p. 18.

td2.2 — Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de uma adição em que apenas a última ordem de cada parcela não é zerada.

τd2.2.1 — Calcular a adição.

Figura 8: Exemplo de composição com adição.

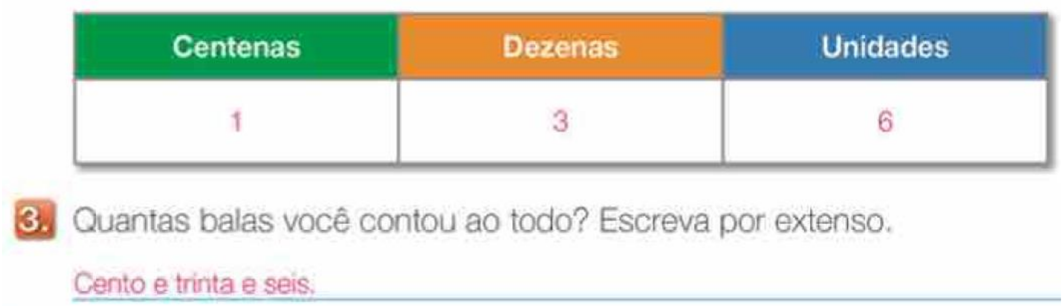


Fonte: 2A19, p. 187.

td2.3 — Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de quadro valor de lugar.

τd2.3.1 — Contabilizar a coluna da esquerda como centenas, a coluna do centro como dezenas e a coluna da direita como unidades e compor o número com base na quantidade de centenas, de dezenas e de unidades.

Figura 9: Exemplo de composição com quadro valor de lugar.



Fonte: 3A19, p. 15.

td2.4 — Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio do ábaco.

τd2.4.1 — Contabilizar a posição da esquerda como centenas, a do centro como dezenas e a coluna da direita como unidades e compor o número com base nessas quantidades.

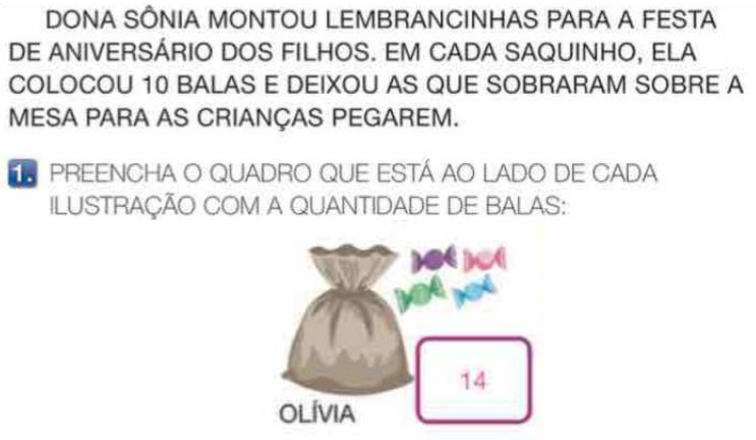
Figura 10: Exemplo de composição com ábaco.

Fonte: 2A19, p. 112.

td2.5 — Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de objetos em que uma característica (como cor) representa cada ordem.

τd2.5.1 — Contabilizar cada saquinho como uma dezena e cada bala como uma unidade e compor o número com base na quantidade de dezenas e de unidades.

Figura 11: Exemplo de composição com objetos.

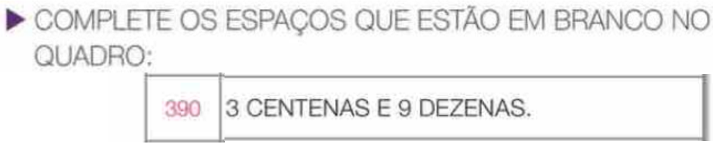


Fonte: 2A19, p. 113.

td2.6 — Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio da descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades.

τd2.6.1 — Posicionar a quantidade de centenas na ordem das centenas (esquerda); a quantidade de dezenas na ordem das dezenas (central); e a quantidade de unidades na ordem das unidades (direita).

Figura 12: Exemplo de composição com descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades.



Fonte: 2A19, p. 187.

O Quadro 14 resume a distribuição do tipo de tarefa TD2, sobre composição de números pela organização do sistema de numeração decimal, nos livros analisados.

Quadro 15: Distribuição das tarefas de composição de números pela organização do sistema de numeração decimal.

Tipo de tarefa (TD)		**Tarefa (td)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TD2	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal.	td2.1	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de fichas com valores descritos.	0	0	0	0	9	9
		td2.2	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de uma adição em que apenas a última ordem de cada parcela não é zerada.	0	0	3	3	0	0
		td2.3	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de quadro valor de lugar.	0	0	0	0	1	1
		td2.4	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio do ábaco.	0	0	4	4	0	0

		td2.5	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de objetos em que uma característica (como cor) representa cada ordem.	0	0	24	24	9	3
		td2.6	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio da descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades.	0	0	12	2	0	0

Fonte: elaboração da autora.

A composição de números por meio de objetos (td2.5) diminui no 3º ano (de 9 em 2A16 para 3 em 2A19), e por meio da descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades (td2.6) diminui no 2º ano (de 12 em 2A16 para 2 em 2A19).

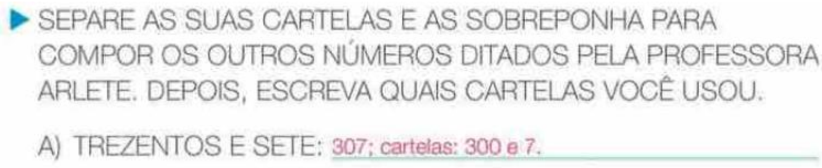
As figuras 13 a 18 apresentam, cada uma, um exemplo de atividade de decomposição de números de acordo com a organização do sistema de numeração decimal. O que as difere são os recursos utilizados, respectivamente, fichas, adição, quadro valor de lugar, ábaco, objetos e a descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades. Os alunos devem decompor cada número, e as respostas estão apresentadas em vermelho nas figuras.

TD3 — Decompor números, organizando-os de acordo com as ordens do sistema numérico decimal.

td3.1 — Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de fichas com valores descritos.

τd3.1.1 — Selecionar uma cartela contendo as centenas, uma cartela contendo as dezenas e uma cartela contendo as unidades. Neste caso, para as centenas a cartela 300; para as dezenas não foi necessária cartela, pois o algarismo é zero na ordem das dezenas; e para as unidades a cartela 7.

Figura 13: Exemplo de decomposição com fichas.


▶ SEPARE AS SUAS CARTELAS E AS SOBREPONHA PARA COMPOR OS OUTROS NÚMEROS DITADOS PELA PROFESSORA ARLETE. DEPOIS, ESCREVA QUAIS CARTELAS VOCÊ USOU.

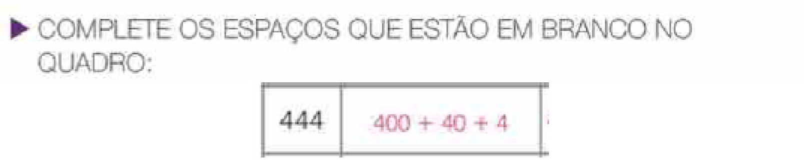
A) TREZENTOS E SETE: 307; cartelas: 300 e 7.

Fonte: 2A19, p. 114.

td3.2 — Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de uma adição em que apenas a última ordem de cada parcela não é zerada.

τd3.2.1 — Escrever uma adição, cuja soma resulte no número proposto, de três parcelas, em que a primeira parcela tem três ordens, zero na ordem das dezenas e zero na ordem das unidades; a segunda parcela tem duas ordens e zero na ordem das unidades; a terceira parcela tem apenas a ordem das unidades.

Figura 14: Exemplo de decomposição com adição.


▶ COMPLETE OS ESPAÇOS QUE ESTÃO EM BRANCO NO QUADRO:

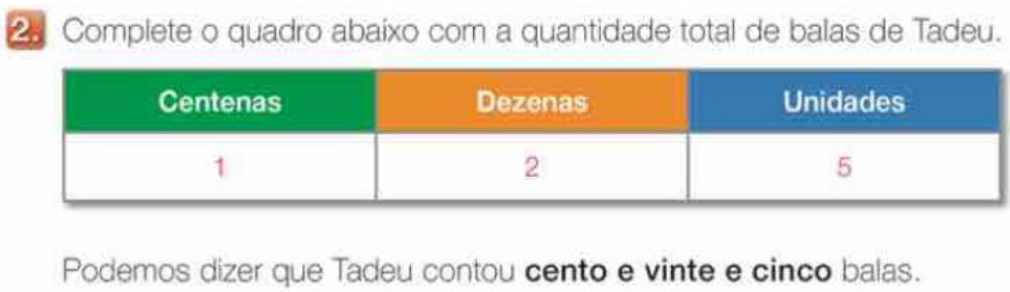
444	400 + 40 + 4

Fonte: 2A19, p. 187.

td3.3 — Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de quadro valor de lugar.

τd3.3.1 — Posicionar o algarismo da ordem das centenas na coluna das centenas (esquerda), o algarismo da ordem das dezenas na coluna das dezenas (meio) e o algarismo das unidades na coluna das unidades (direita).

Figura 15: Exemplo de decomposição com quadro valor de lugar.


2. Complete o quadro abaixo com a quantidade total de balas de Tadeu.

Centenas	Dezenas	Unidades
1	2	5

Podemos dizer que Tadeu contou **cento e vinte e cinco** balas.

Fonte: 3A19, p. 14.

td3.4 — Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio do ábaco.

τd3.4.1 — Representar a quantidade representada pelo algarismo da ordem das centenas, com discos na coluna da esquerda; a quantidade representada pelo algarismo da ordem das dezenas, com discos na coluna do meio; e a quantidade representada pelo algarismo da ordem das unidades com discos na coluna da direita.

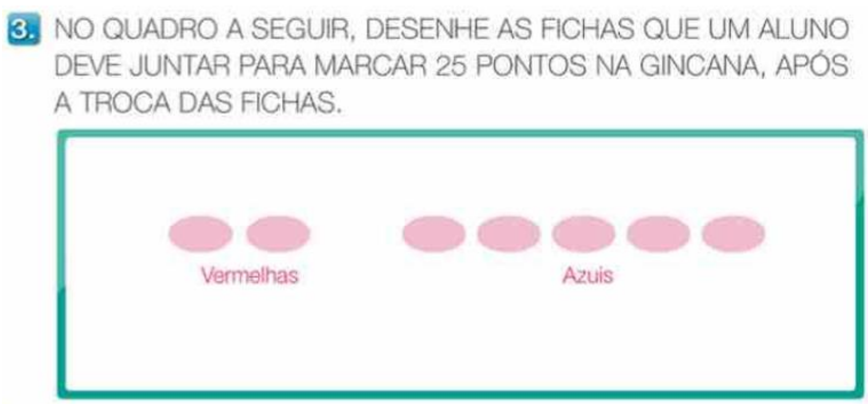
Figura 16: Exemplo de decomposição com ábaco.

Fonte: 2A19, p. 112.

td3.5 — Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de objetos em que uma característica (como cor, forma etc.) representa cada ordem.

τd3.5.1 — Representar a quantidade representada pelo algarismo da ordem das dezenas, com fichas vermelhas; e a quantidade representada pelo algarismo da ordem das unidades com fichas azuis.

Figura 17: Exemplo de decomposição com objetos.

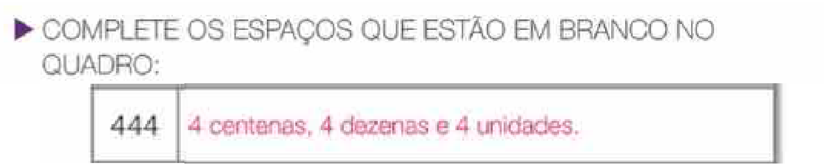


Fonte: 2A19, p. 111.

td3.6 — Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio da descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades.

τd3.6.1 — Descrever a quantidade de centenas, de dezenas e de unidades de um número, de acordo com a quantidade representada pelos algarismos.

Figura 18: Exemplo de decomposição com descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades.


▶ COMPLETE OS ESPAÇOS QUE ESTÃO EM BRANCO NO QUADRO:

444	4 centenas, 4 dezenas e 4 unidades.

Fonte: 2A19, p. 187.

O Quadro 15 resume a distribuição do tipo de tarefa TD3 sobre decomposição de números pela organização do sistema de numeração decimal, nos seis livros analisados.

Quadro 16: Distribuição das tarefas de decomposição de números pela organização do sistema de numeração decimal.

Tipo de tarefa (TD)		Tarefa (td)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TD3	Decompor números, organizando-os de acordo com as ordens do sistema numérico decimal.	td3.1	Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de fichas com valores descritos.	0	0	6	6	9	11
		td3.2	Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de uma adição em que apenas a última ordem de cada parcela não é zerada.	0	0	4	4	0	0
		td3.3	Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de quadro valor de lugar.	0	0	0	0	2	2
		td3.4	Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio do ábaco.	0	0	0	2	0	0
		td3.5	Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio de objetos em que uma característica (como cor, forma etc.)	0	0	1	1	3	3

			representa cada ordem.						
		td3.6	Decompor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal por meio da descrição da quantidade de centenas, de dezenas e de unidades.	0	0	5	5	0	0

Fonte: elaboração da autora.

A decomposição por meio de fichas (td3.1) no 3º ano teve um aumento pouco expressivo (de 9 em 3A16 para 11 em 3A19). E no 2º ano foi acrescentada a tarefa td3.4, de decomposição tendo o ábaco como recurso.

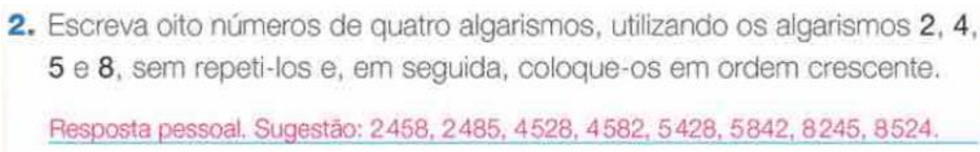
O tipo de tarefa TD4 trata a formação de números a partir de algarismos dados. As figuras 19, 20 e 21 trazem exemplos dessas atividades, e a diferença entre elas está nas restrições que podem ou não serem propostas nas atividades. Em vermelho, estão as respostas que os estudantes deveriam fornecer.

TD4 — Formar números a partir de algarismos dados.

td4.1 — Formar números com os algarismos dados.

τd4.1.1 — Posicionar os algarismos em qualquer ordem, sem repeti-los.

Figura 19: Exemplo de formação de números com base em algarismos.


2. Escreva oito números de quatro algarismos, utilizando os algarismos **2**, **4**, **5** e **8**, sem repeti-los e, em seguida, coloque-os em ordem crescente.

Resposta pessoal. Sugestão: 2458, 2485, 4528, 4582, 5428, 5842, 8245, 8524.

Fonte: 3A19, p. 110.

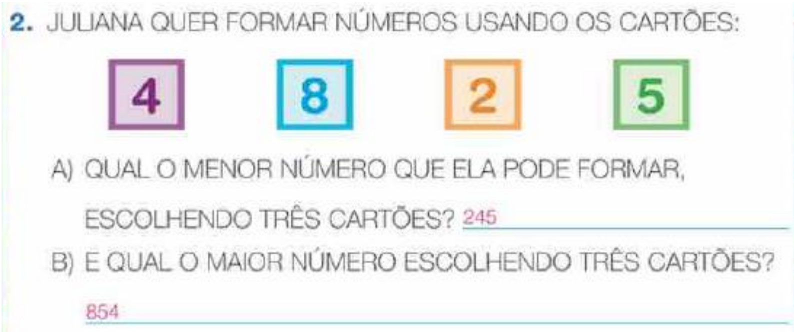
td4.2 — Formar o maior número possível com os algarismos dados (item b da Figura 20).

τd4.2.1 — Selecionar os algarismos que representam números maiores e posicioná-los em ordem decrescente.

td4.3 — Formar o menor número possível com os algarismos dados (item a da Figura 20).

τd4.3.1 — Selecionar os algarismos que representam números menores e posicioná-los em ordem crescente.

Figura 20: Exemplo de formação do maior e do menor número com base em algarismos.


2. JULIANA QUER FORMAR NÚMEROS USANDO OS CARTÕES:

4 8 2 5

A) QUAL O MENOR NÚMERO QUE ELA PODE FORMAR, ESCOLHENDO TRÊS CARTÕES? 245

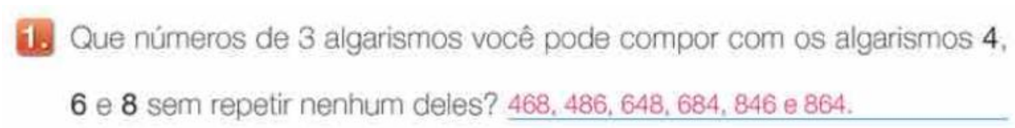
B) E QUAL O MAIOR NÚMERO ESCOLHENDO TRÊS CARTÕES? 854

Fonte: 2A19, p. 206.

td4.4 — Formar todos os números possíveis com os algarismos dados.

τd4.4.1 — Arranjar os algarismos dados de todas as maneiras possíveis.

Figura 21: Exemplo de formação de todos os números possíveis com base em algarismos.


1. Que números de 3 algarismos você pode compor com os algarismos 4, 6 e 8 sem repetir nenhum deles? 468, 486, 648, 684, 846 e 864.

Fonte: 3A19, p. 16.

O Quadro 16 indica a distribuição do tipo de tarefa de formação de número com base em algarismos fornecidos, TD4, ao longo dos livros.

Quadro 17: Distribuição das tarefas de formação de números com base em algarismos fornecidos.

Tipo de tarefa (TD)		Tarefa (td)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TD4	Formar números com base em algarismos dados.	td4.1	Formar números com os algarismos dados.	0	0	0	0	10	11
		td4.2	Formar o maior número possível com os algarismos dados.	0	0	5	5	7	6
		td4.3	Formar o menor número possível com os algarismos dados.	0	0	2	2	2	0
		td4.4	Formar todos os números possíveis com os algarismos dados.	0	0	0	0	2	1

Fonte: elaboração da autora.

Em relação à formação de números com base em algarismos, há algumas oscilações pouco expressivas (no 3º ano, há aumento de uma tarefa em td4.1 e redução de uma tarefa em td4.2 e td4.4), e temos, no 3º ano, a saída da tarefa td4.3 (formar o menor número possível com os algarismos dados), passando a ficar apenas no 2º ano.

Em relação ao *assunto* Sistema de numeração decimal, percebemos que ele já era tratado antes da BNCC. Uma nova tarefa é acrescentada no 3º ano, de decomposição com a utilização do ábaco (td3.4), e outras estão presentes em maior quantidade (td3.1 e td4.1). Mas, no balanço geral, esse *assunto* ficou um pouco reduzido com a diminuição na quantidade de algumas tarefas (td2.5, td2.6, td3.1, td4.2 e td4.4) e com a saída das tarefas td1.1 do 1º ano (descrição de regularidades na ordem das unidades) e td4.3 no 3º ano (formar o menor número possível com os algarismos dados).

5.3.2 Números

O grupo de tipos de tarefa do *assunto* Números (TN) é composto de tarefas da categoria A que não se relacionam diretamente ao sistema de numeração decimal. Trata-se das propriedades e das relações de números inteiros. O respaldo tecnológico-teórico das técnicas desse grupo de tarefas é dado por meio da estrutura dos números naturais.

O tipo de tarefa TN1 trata da descrição do processo de cálculo por meio de decomposição. Apesar de esse tipo de tarefa tratar de decomposição em dezenas e em unidades, consideramos que ele não trata simplesmente da composição e da decomposição dos números, mas utiliza propriedades como ferramenta de cálculo, e, portanto, o colocamos no *assunto* Números. Seu discurso tecnológico-teórico também inclui a organização do sistema de numeração decimal. Já a TN2 é focada em relações entre os números naturais, também trata de operações, mas consideramos ter mais destaque a relação entre os números.

A Figura 22 apresenta um exemplo de descrição de processos de cálculos utilizando como ferramenta a decomposição de acordo com a organização do sistema de numeração decimal. Algumas sugestões de respostas esperadas estão descritas em vermelho.

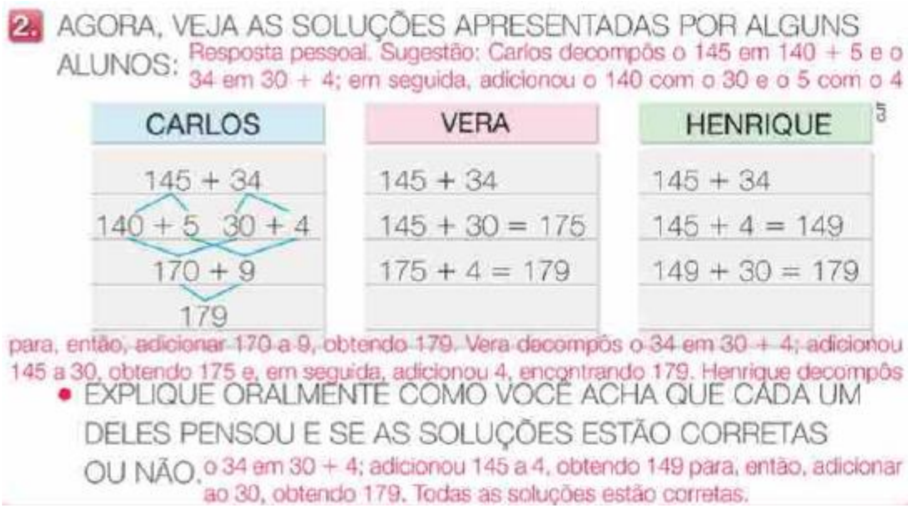
TN1 — Descrever o processo de cálculo por meio de decomposição.

tn1.1 — Descrever o processo de cálculo de uma adição por meio de decomposição.

*τ*n1.1.1 — Descrever a decomposição de cada parcela em adições de dezenas e de unidades. Adicionar as dezenas entre si, adicionar as unidades entre si, e, por fim, adicionar as dezenas e as unidades.

*τ*n1.1.2 — Decompor apenas uma das parcelas em dezenas e em unidades. Adicionar ao número não decomposto as dezenas e, depois, as unidades.

Figura 22: Exemplo de descrição de processos de cálculo por meio de decomposição.



2. AGORA, VEJA AS SOLUÇÕES APRESENTADAS POR ALGUNS ALUNOS: Resposta pessoal. Sugestão: Carlos decompôs o 145 em 140 + 5 e o 34 em 30 + 4; em seguida, adicionou o 140 com o 30 e o 5 com o 4

CARLOS	VERA	HENRIQUE
145 + 34	145 + 34	145 + 34
140 + 5 30 + 4	145 + 30 = 175	145 + 4 = 149
170 + 9	175 + 4 = 179	149 + 30 = 179
179		

para, então, adicionar 170 a 9, obtendo 179. Vera decompôs o 34 em 30 + 4; adicionou 145 a 30, obtendo 175 e, em seguida, adicionou 4, encontrando 179. Henrique decompôs

• EXPLIQUE ORALMENTE COMO VOCÊ ACHA QUE CADA UM DELES PENSOU E SE AS SOLUÇÕES ESTÃO CORRETAS OU NÃO. o 34 em 30 + 4; adicionou 145 a 4, obtendo 149 para, então, adicionar ao 30, obtendo 179. Todas as soluções estão corretas.

Fonte: 2A19, p. 163.

TN2 — Descrever relações de números naturais.

A atividade mostrada na Figura 23 leva o aluno a comparar diversos resultados da multiplicação de um número duas vezes por dois, e o resultado da multiplicação desse mesmo número por quatro.

tn2.1 — Comparar a relação entre uma sequência de duas multiplicações por dois e a multiplicação do mesmo fator por quatro.

*τ*n2.1.1 — Observar os resultados de um número multiplicado por dois duas vezes e do mesmo número multiplicado por quatro e concluir que são iguais.

Figura 23: Exemplo de atividade de relação entre números.

O professor Carlos explicou que, quando queremos encontrar o resultado da multiplicação de um número por 4, podemos dobrar esse número duas vezes seguidas.

1. Complete calculando os dobros conforme indicam as flechas verdes no esquema abaixo. Você vai descobrir o **quádruplo** dos números escritos em azul.

a)	1	× 2 →	2	× 2 →	4	1	× 4 →	4
b)	2	× 2 →	4	× 2 →	8	2	× 4 →	8
c)	3	× 2 →	6	× 2 →	12	3	× 4 →	12
d)	4	× 2 →	8	× 2 →	16	4	× 4 →	16
e)	5	× 2 →	10	× 2 →	20	5	× 4 →	20
f)	6	× 2 →	12	× 2 →	24	6	× 4 →	24
g)	7	× 2 →	14	× 2 →	28	7	× 4 →	28
h)	8	× 2 →	16	× 2 →	32	8	× 4 →	32
i)	9	× 2 →	18	× 2 →	36	9	× 4 →	36

Fonte: 3A19, p. 54.

O item a) da atividade 2 na Figura 24 leva o aluno a comparar o resultado da multiplicação de diversos números por um e explicitar uma regra.

tn2.2 — Descrever o número um como elemento neutro da multiplicação.

τn2.2.1 — Observar multiplicações de diversos números por um e perceber que o resultado é o próprio número.

Figura 24: Exemplo da descrição de 1 como elemento neutro da multiplicação.

1. Helena mostrou a Pablo um quadro de multiplicação. Ela lhe pediu que completasse esse quadro de acordo com uma sequência. Faça você também!

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

2. O que acontece quando multiplicamos um número por:

a) 1? Obtemos como resultado o próprio número.

Fonte: 3A19, p. 202.

A atividade da Figura 25 leva o aluno a descrever um número em função de outros.

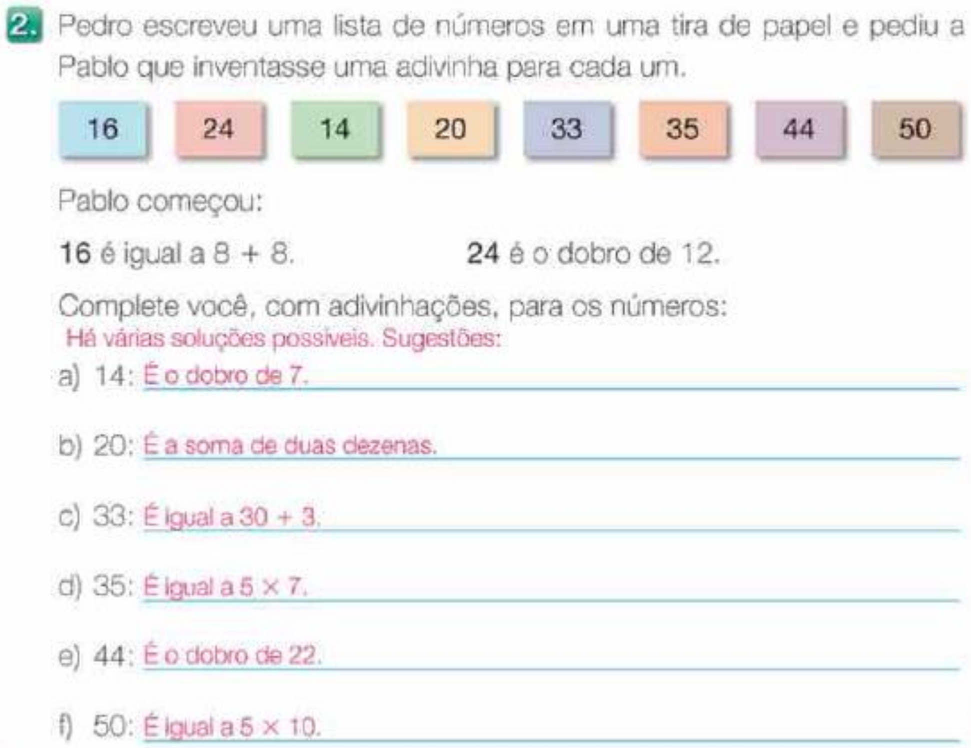
tn2.3 — Descrever um número em função de outros números.

τn2.3.1 — Decompor o número em uma adição.

τn2.3.2 — Decompor o número em uma multiplicação.

Esta tarefa permite diferentes respostas e diferentes técnicas, mas, conforme respostas propostas para o professor, a expectativa é de que o aluno nessa idade decomponha o número por meio de uma adição ou de uma multiplicação.

Figura 25: Exemplo de descrição de um número pela relação de outros números.



2. Pedro escreveu uma lista de números em uma tira de papel e pediu a Pablo que inventasse uma adivinha para cada um.

16 24 14 20 33 35 44 50

Pablo começou:

16 é igual a 8 + 8. **24** é o dobro de 12.

Complete você, com adivinhações, para os números:

Há várias soluções possíveis. Sugestões:

a) 14: É o dobro de 7.

b) 20: É a soma de duas dezenas.

c) 33: É igual a 30 + 3.

d) 35: É igual a 5 × 7.

e) 44: É o dobro de 22.

f) 50: É igual a 5 × 10.

Fonte: 3A19, p. 208.

O Quadro 17 apresenta a síntese da distribuição dos tipos de tarefa TN1 e TN2 ao longo dos livros dos três primeiros anos do Ensino Fundamental.

Quadro 18: Distribuição das tarefas de descrição de cálculo com decomposição e relação entre números naturais.

Tipo de tarefa (TN)		Tarefa (tn)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TN1	Descrever o processo de cálculo por meio de decomposição.	tn1.1	Descrever o processo de cálculo de uma adição por meio de decomposição.	0	0	2	1	1	1
TN2	Descrever relações de números naturais.	tn2.1	Descrever a relação entre duas sequências de produtos em que o primeiro fator é o mesmo para cada termo e o segundo, um é o dobro do outro.	0	0	0	0	3	4
		tn2.2	Descrever o número 1 como elemento neutro da multiplicação.	0	0	0	0	1	1
		tn2.3	Descrever um número em função de outros.	0	0	0	0	6	6

Fonte: elaboração da autora.

Os tipos de tarefa TN1 e TN2 apresentaram pequenas alterações na quantidade de vezes em que uma determinada tarefa é abordada com a diminuição de uma no 2º ano (tn1.1) e aumento de uma no 3º ano (tn2.1).

As tarefas de TN3 a TN6 abordam propriedades e relações dos números pares e ímpares.

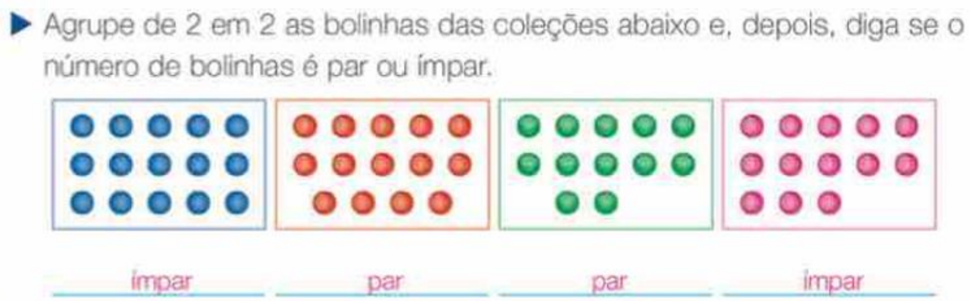
TN3 — Identificar características comuns a números pares ou ímpares.

A Figura 26 exemplifica uma atividade em que os objetos ilustrados devem ser agrupados dois a dois para determinar se a quantidade é par ou ímpar. A resposta que deveria ser fornecida está em vermelho.

tn3.1 — Identificar se há sobra mediante a formação de pares em um conjunto de objetos, identificando se a quantidade é par ou ímpar.

τn3.1.1 — Agrupar os objetos dois a dois e inferir de acordo com o resultado: se sobrar uma bolinha, é ímpar; se não sobrar, é par.

Figura 26: Exemplo de pareamento de objetos para identificação de quantidades pares ou ímpares.



Fonte: 3A19, p. 43.

A Figura 27 apresenta uma atividade em que um quadro deve ser preenchido mediante a quantidade de duplas formadas e a sobra em um grupo de alunos. Em vermelho estão as respostas.

tn3.2 — Identificar se há sobra mediante a formação de duplas em números.

τn3.2.1 — Utilizando recurso de desenho, desenhar um símbolo para cada unidade; por exemplo, um risco e agrupá-los dois a dois verificando se sobra zero ou um.

τn3.2.2 — Verificar se o número proposto pertence à tabuada do dois; neste caso, a sobra é zero, caso contrário a sobra é um.

τn3.2.3 — Verificar se o número termina em 0, 2, 4, 6, ou 8; neste caso, a sobra é zero, caso contrário a sobra é um.

τn3.2.4 — Observar que o número de alunos está aumentando de um em um. Perceber que, neste caso, a sobra segue o padrão 0, 1, 0, 1, ... uma vez que em um número par a sobra é zero; ao acrescentar um, o número passa a ser ímpar e a sobra passa a ser um; ao acrescentar mais um, um novo par é formado, a sobra volta a ser zero, e assim por diante.

Figura 27: Exemplo de identificação de quantidades pares ou ímpares mediante a formação de duplas.

A PROFESSORA MARTA PRECISA FORMAR DUPLAS PARA A APRESENTAÇÃO DE DANÇA. COMO NÃO SABIA O NÚMERO DE ALUNOS QUE IRIAM PARTICIPAR, ELA FEZ O QUADRO ABAIXO:

NÚMERO DE ALUNOS	NÚMERO DE DUPLAS	SOBRA
8	4	0
9	4	1
10	5	0
11	5	1
12	6	0
13	6	1
14	7	0
15	7	1
16	8	0
17	8	1

1. COMPLETE O QUADRO E RESPONDA ÀS PERGUNTAS.

Fonte: 2A19, p. 138.

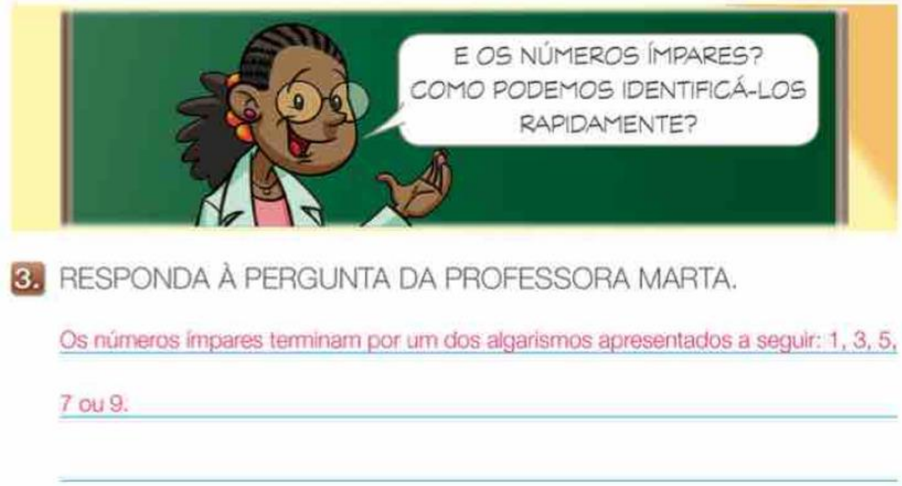
A atividade da Figura 28 trata da descrição da regularidade apresentada na ordem das unidades de números ímpares. A resposta está em vermelho.

TN4 — Descrever regularidades de números pares ou ímpares.

tn4.1 — Descrever a regularidade apresentada na ordem das unidades de números pares ou ímpares.

τn4.1.1 — Descrever que números pares têm os algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8 na ordem das unidades ou que números ímpares têm os algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9 na ordem das unidades.

Figura 28: Exemplo de descrição de regularidade na ordem das unidades de números pares ou ímpares.



Fonte: 2A19, p. 139.

A Figura 29 traz uma atividade em que os alunos devem identificar que os números propostos são pares.

TN5 — Identificar números pares e ímpares.

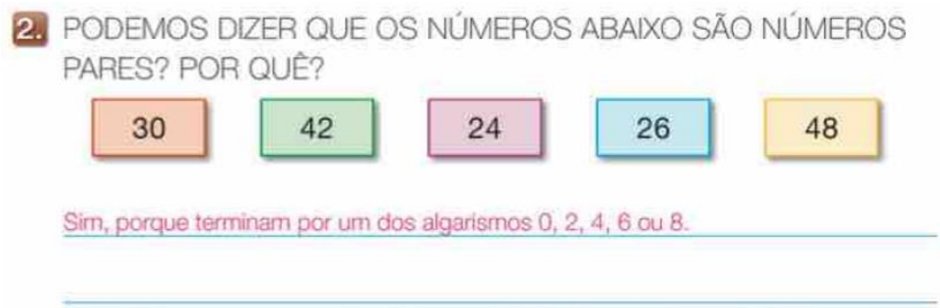
tn5.1 — Identificar se um número é par.

τn5.1.1 — Verificar se os números apresentam os algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8 na ordem das unidades.

τn5.1.2 — Formar pares com a quantidade e verificar se não há “sobra”.

τn5.1.3 — Dividir o número por dois e verificar se o resto é igual a zero.

Figura 29: Exemplo de identificação de números pares.



Fonte: 2A19, p. 139.

Na atividade da Figura 30, os alunos devem identificar se o número fornecido é par ou ímpar. Em vermelho, estão as respostas que o estudante deveria fornecer.

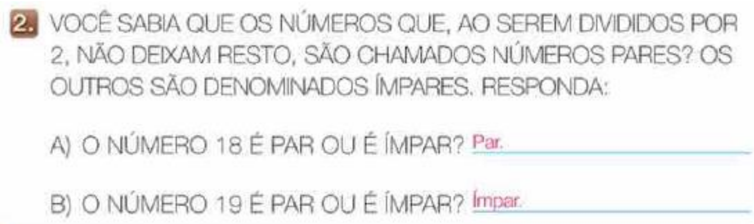
tn5.2 — Identificar se um número é par ou ímpar.

τn5.2.1 — Verificar o algarismo das unidades do número: se for 0, 2, 4, 6 ou 8, é par; se for 1, 3, 5, 7, ou 9, é ímpar.

τn5.2.2 — Formar pares com a quantidade e verificar: se não houver “sobra”, é par; se houver “sobra”, é ímpar.

τn5.2.3 — Dividir o número por dois e verificar: se o resto for igual a zero, é par; se o resto for igual a um, é ímpar.

Figura 30: Exemplo de identificação de números pares ou ímpares.


2. VOCÊ SABIA QUE OS NÚMEROS QUE, AO SEREM DIVIDIDOS POR 2, NÃO DEIXAM RESTO, SÃO CHAMADOS NÚMEROS PARES? OS OUTROS SÃO DENOMINADOS ÍMPARES. RESPONDA:

A) O NÚMERO 18 É PAR OU É ÍMPAR? Par.

B) O NÚMERO 19 É PAR OU É ÍMPAR? Ímpar.

Fonte: 2A19, p. 138.

Na Figura 31, a atividade propõe alguns números e solicita que o estudante selecione, dentre eles, três números pares e três números ímpares.

tn5.3 — Identificar um número par ou ímpar em um conjunto de números.

A tarefa tn5.3 apresenta uma diferença sutil em relação à tarefa tn5.2, no entanto, as técnicas de resolução são as mesmas.

Figura 31: Exemplo de identificação de números pares ou ímpares em um conjunto de números.


A PROFESSORA MARTA PEDIU A DOIS ALUNOS QUE ESCREVESSEM NO QUADRO DE GIZ OS NÚMEROS QUE DESEJASSEM.

RITA ANOTOU OS NÚMEROS:

428, 708, 343, 254, 99

LEONARDO REGISTROU ESTES OUTROS NÚMEROS:

408, 399, 55, 118, 670

3. ESCOLHA TRÊS NÚMEROS PARES E TRÊS NÚMEROS ÍMPARES DOS NÚMEROS REGISTRADOS POR RITA E LEONARDO.

Resposta pessoal. Números pares: 428, 708, 254, 408, 118, 670. Números ímpares 343, 99, 399, 55.

NÚMEROS PARES NÚMEROS ÍMPARES

Fonte: 2A19, p. 140.

Na atividade da Figura 32, os alunos devem verificar se as adições propostas resultarão em somas pares ou ímpares. As respostas estão apresentadas em vermelho.

tn5.4 — Identificar se a soma de uma adição será par ou ímpar.

A tarefa tn5.4 também poderia ser resolvida pelas mesmas técnicas da tarefa tn5.2, após o cálculo da adição proposta. Mas por não haver espaço para o resultado da adição, podemos propor uma técnica diferente.

*τ*n5.4.1 — Verificar três casos: se as duas parcelas são pares, a soma é par; se as duas parcelas são ímpares, a soma é par; se uma das parcelas é par e a outra ímpar, a soma é ímpar.

Figura 32: Exemplo de identificação de somas pares ou ímpares.

Fonte: 3A19, p. 62.

A Figura 33 traz a mesma atividade da Figura 29, mas nosso foco está na justificativa solicitada.

TN6 — Justificar se um número é par ou ímpar.

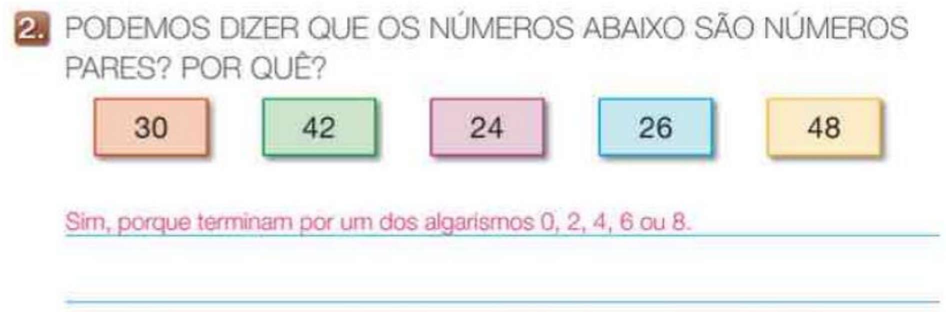
tn6.1 — Justificar que um número é par.

*τ*n6.1.1 — Justificar que os números são pares por apresentarem os algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8 na ordem das unidades.

*τ*n6.1.2 — Justificar que os números são pares por não deixarem “sobra” na formação de duplas.

*τ*n6.1.3 — Justificar que os números são pares por deixar resto zero na divisão por 2.

Figura 33: Exemplo de justificativa de números pares ou ímpares.


2. PODEMOS DIZER QUE OS NÚMEROS ABAIXO SÃO NÚMEROS PARES? POR QUÊ?

30 42 24 26 48

Sim, porque terminam por um dos algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8.

Fonte: 2A19, p. 139.

O Quadro 18, a seguir, sintetiza a distribuição dos tipos de tarefa a respeito de números pares ou ímpares, TN3, TN4, TN5 e TN6.

Quadro 19: Distribuição das tarefas a respeito de números pares e ímpares.

Tipo de tarefa (TN)		Tarefa (tn)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TN3	Identificar características comuns a números pares ou ímpares.	tn3.1	Identificar se há sobra mediante a formação de pares em um conjunto de objetos, identificando se a quantidade é par ou ímpar.	0	0	0	0	4	4
		tn3.2	Identificar se há sobra mediante a formação de pares em números.	0	0	7	7	0	0
TN4	Descrever regularidades de números pares ou ímpares.	tn4.1	Descrever a regularidade apresentada na ordem das unidades de números pares ou ímpares.	0	0	1	1	2	2
TN5	Identificar números pares e ímpares.	tn5.1	Identificar se um número é par.	0	0	5	5	0	0
		tn5.2	Identificar se um número é par ou ímpar.	0	0	2	2	0	0
		tn5.3	Identificar um número par ou ímpar em um conjunto de números.	0	0	6	6	12	9
		tn5.4	Identificar se a soma de uma adição será par ou ímpar.	0	0	0	0	12	12
TN6	Justificar se um número é par ou ímpar.	tn6.1	Justificar que um número é par.	0	0	1	1	0	0

Fonte: elaboração da autora.

O Quadro 18 destaca que há apenas uma diferença, que foi uma pequena diminuição da quantidade de vezes em que a tarefa de identificação de paridade em um conjunto de números (tn5.3) passou de 12 para 9 vezes.

O *assunto* Números se mostra bastante estável. Ele estava presente já na edição anterior ao documento da coleção de livros didáticos e sofre uma pequena diminuição na edição atual.

5.3.3 Operações

O grupo de tipos de tarefa sobre operações, TO, é composto de tarefas pertencentes à categoria B — explorar propriedades das operações com os números inteiros. Em geral, o discurso tecnológico-teórico para a resolução das tarefas é feito com base nas estruturas aritméticas das operações e nas suas propriedades.

Os tipos de tarefa TO1 e TO2 tratam das relações inversas entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.

As figuras 34 e 35 apresentam atividades em que os alunos devem relacionar operações inversas. Na Figura 34, a relação é entre uma adição e duas subtrações, e na Figura 35 entre uma multiplicação e duas divisões. As respostas das atividades estão apresentadas em vermelho.

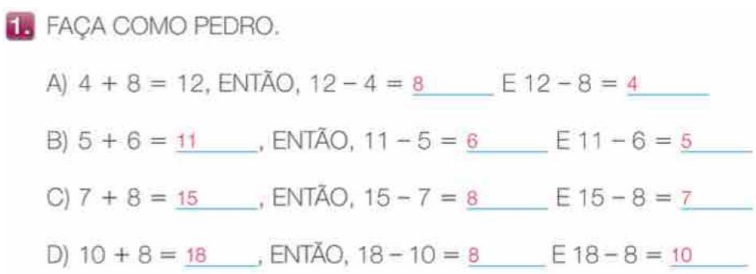
TO1 — Estabelecer cálculos relacionados por meio da operação inversa.

to1.1 — Estabelecer duas subtrações relacionadas a uma adição.

τo1.1.1 — Calcular cada sentença de adição e subtração proposta.

τo1.1.2 — Calcular a adição e, a partir da relação entre as operações, completar os resultados das subtrações.

Figura 34: Exemplo de estabelecimento de duas subtrações relacionadas a uma adição.


1. FAÇA COMO PEDRO.

A) 4 + 8 = 12, ENTÃO, 12 − 4 = 8 E 12 − 8 = 4

B) 5 + 6 = 11, ENTÃO, 11 − 5 = 6 E 11 − 6 = 5

C) 7 + 8 = 15, ENTÃO, 15 − 7 = 8 E 15 − 8 = 7

D) 10 + 8 = 18, ENTÃO, 18 − 10 = 8 E 18 − 8 = 10

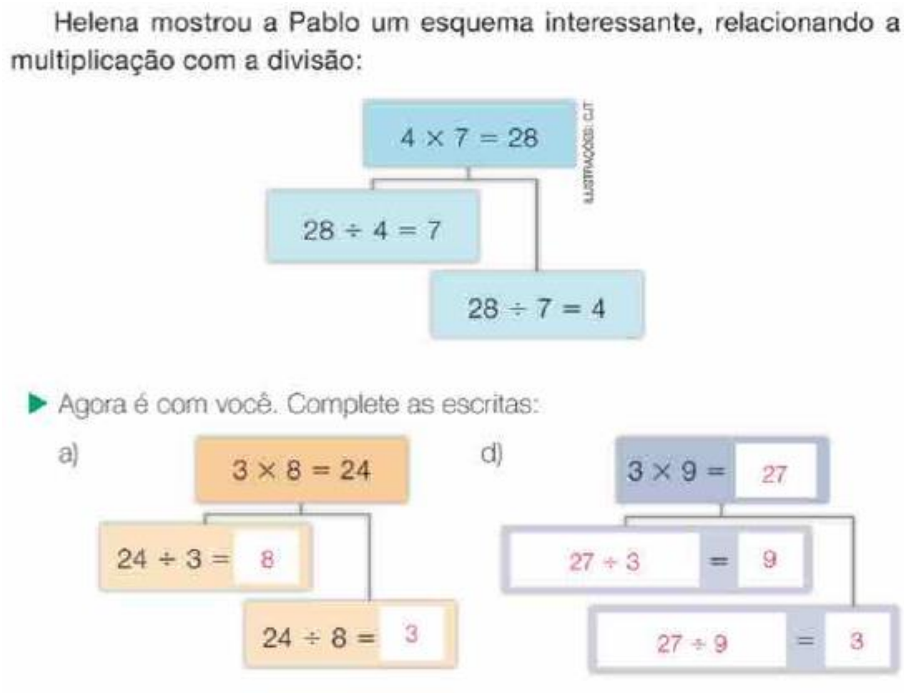
Fonte: 1A19, p. 101.

to1.2 — Estabelecer duas divisões relacionadas a uma multiplicação.

τo1.2.1 — Calcular cada sentença de multiplicação e divisão proposta.

τo1.2.2 — Calcular a multiplicação e, a partir da relação entre as operações, completar os cálculos de divisão.

Figura 35: Exemplo de estabelecimento de duas divisões relacionadas a uma multiplicação.



Fonte: 3A19, p. 203.

A Figura 36 apresenta atividades em que os alunos devem não só utilizar, mas descrever a utilização de operações inversas para encontrar valores desconhecidos. As respostas esperadas estão escritas na cor vermelha.

TO2 — Descrever a utilização de operações inversas para encontrar valores desconhecidos.

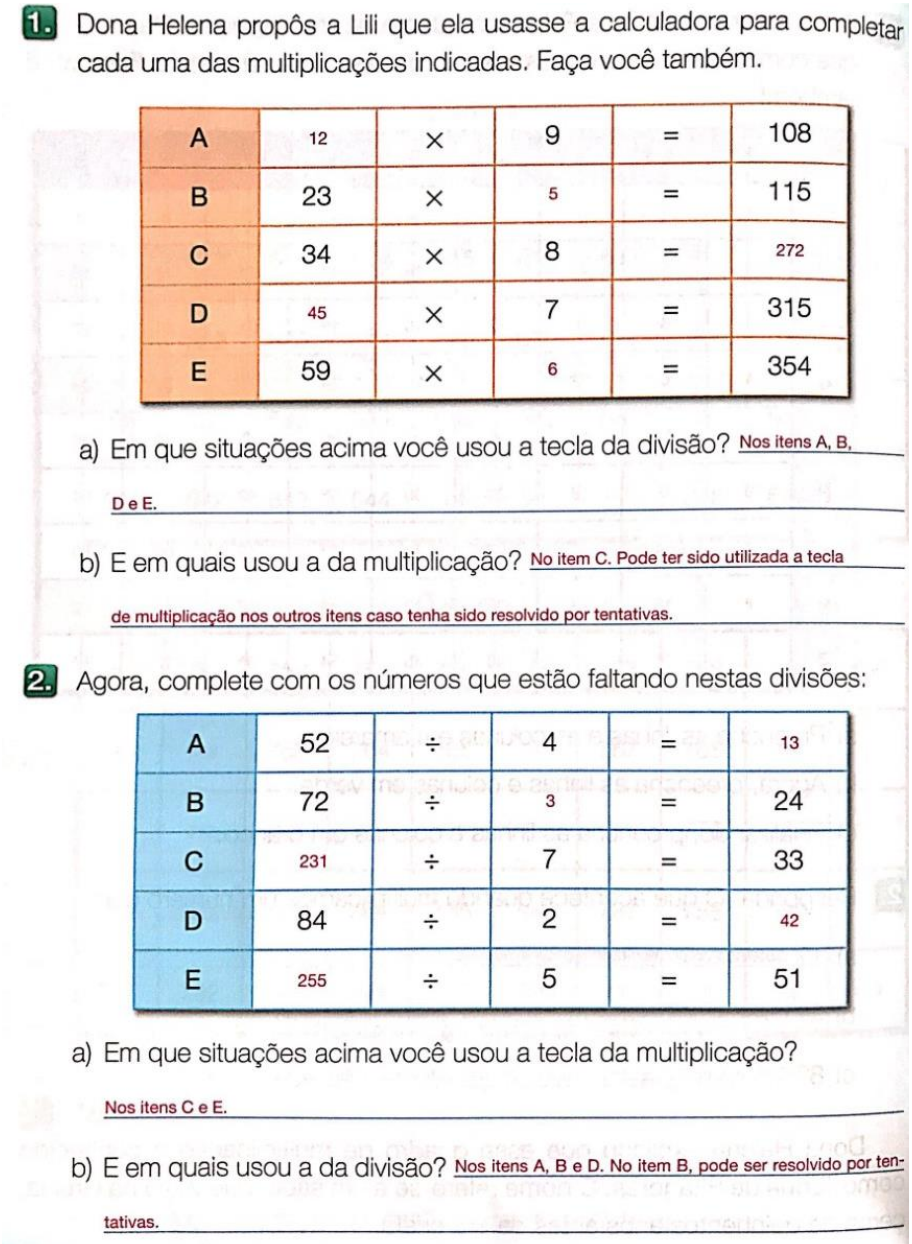
to2.1 — Descrever a utilização da divisão para encontrar fator desconhecido na multiplicação (item 1a da Figura 36).

τo2.1.1 — Descrever a utilização da divisão para resolver uma sentença de multiplicação em que se deseja encontrar um dos fatores.

to2.2 — Descrever a utilização da multiplicação para encontrar o divisor desconhecido na divisão (item 2a da Figura 36).

τo2.2.1 — Descrever a utilização da multiplicação para resolver uma sentença de divisão em que se deseja encontrar o dividendo.

Figura 36: Exemplo de utilização da divisão e da multiplicação como operações inversas para encontrar valores desconhecidos.



1. Dona Helena propôs a Lili que ela usasse a calculadora para completar cada uma das multiplicações indicadas. Faça você também.

A	12	×	9	=	108
B	23	×	5	=	115
C	34	×	8	=	272
D	45	×	7	=	315
E	59	×	6	=	354

a) Em que situações acima você usou a tecla da divisão? Nos itens A, B, D e E.

b) E em quais usou a da multiplicação? No item C. Pode ter sido utilizada a tecla de multiplicação nos outros itens caso tenha sido resolvido por tentativas.

2. Agora, complete com os números que estão faltando nestas divisões:

A	52	÷	4	=	13
B	72	÷	3	=	24
C	231	÷	7	=	33
D	84	÷	2	=	42
E	255	÷	5	=	51

a) Em que situações acima você usou a tecla da multiplicação? Nos itens C e E.

b) E em quais usou a da divisão? Nos itens A, B e D. No item B, pode ser resolvido por tentativas.

Fonte: 3A16, p. 238.

O Quadro 19 resume a distribuição ao longo dos livros analisados, dos tipos de tarefa TO1 e TO2 que tratam das relações inversas entre as operações.

Quadro 20: Distribuição das tarefas de operações inversas.

Tipo de tarefa (TO)		**Tarefa (to)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TO1	Estabelecer cálculos relacionados por meio da	to1.1	Estabelecer duas subtrações relacionadas a uma adição.	0	4	0	0	7	4

	operação inversa.	to1.2	Estabelecer duas divisões relacionadas a uma multiplicação.	0	0	0	0	5	5
TO2	Descrever a utilização de operações inversas para encontrar valores desconhecidos.	to2.1	Descrever a utilização da divisão para encontrar fator desconhecido na multiplicação.	0	0	0	0	1	0
		to2.2	Descrever a utilização da multiplicação para encontrar o divisor desconhecido na divisão.	0	0	0	0	1	0

Fonte: elaboração da autora.

Em relação aos tipos de tarefa TO1 e TO2, percebemos que, apesar da tarefa que estabelece adições e subtrações relacionadas (to1.1) ter sido reduzida no 3º ano, ela também passa a ser tratada desde o 1º ano, mostrando antecipação dessa tarefa já para o 1º ano. Já o tipo de tarefa que descreve a utilização da operação inversa (TO2), que estava presente no 3º ano da edição anterior, desaparece na edição atual.

O tipo de tarefa TO3 está centrado nas operações, pois trata de realizar cálculos. No entanto, podem ser utilizadas estratégias realizadas com base nas propriedades das operações, mas também no sistema de numeração decimal. Consideramos como pertencente ao *assunto* Operações, por entendermos que o foco principal é a realização do cálculo.

TO3 — Realizar cálculos utilizando estratégias.

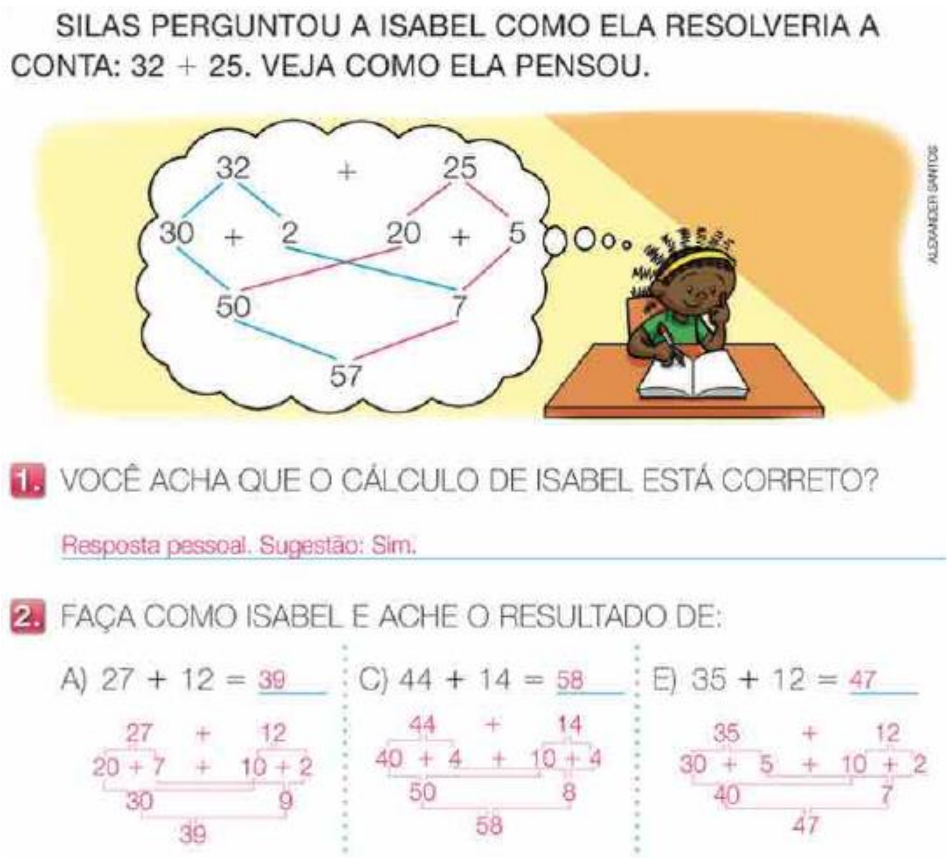
As atividades das figuras 37 e 38 propõem o cálculo de adição utilizando como estratégia a decomposição na estrutura do sistema de numeração decimal. A diferença é que a atividade da Figura 38 utiliza fichas como recurso. Em vermelho, estão as respostas que os estudantes deveriam fornecer.

to3.1 — Calcular uma adição utilizando decomposição como estratégia.

τo3.1.1 — Decompor cada parcela em adições de dezenas e de unidades. Adicionar as dezenas entre si, adicionar as unidades entre si e, por fim, adicionar as dezenas e as unidades.

τo3.1.2 — Decompor apenas uma das parcelas em dezenas e unidades. Adicionar ao número não decomposto as dezenas e as unidades.

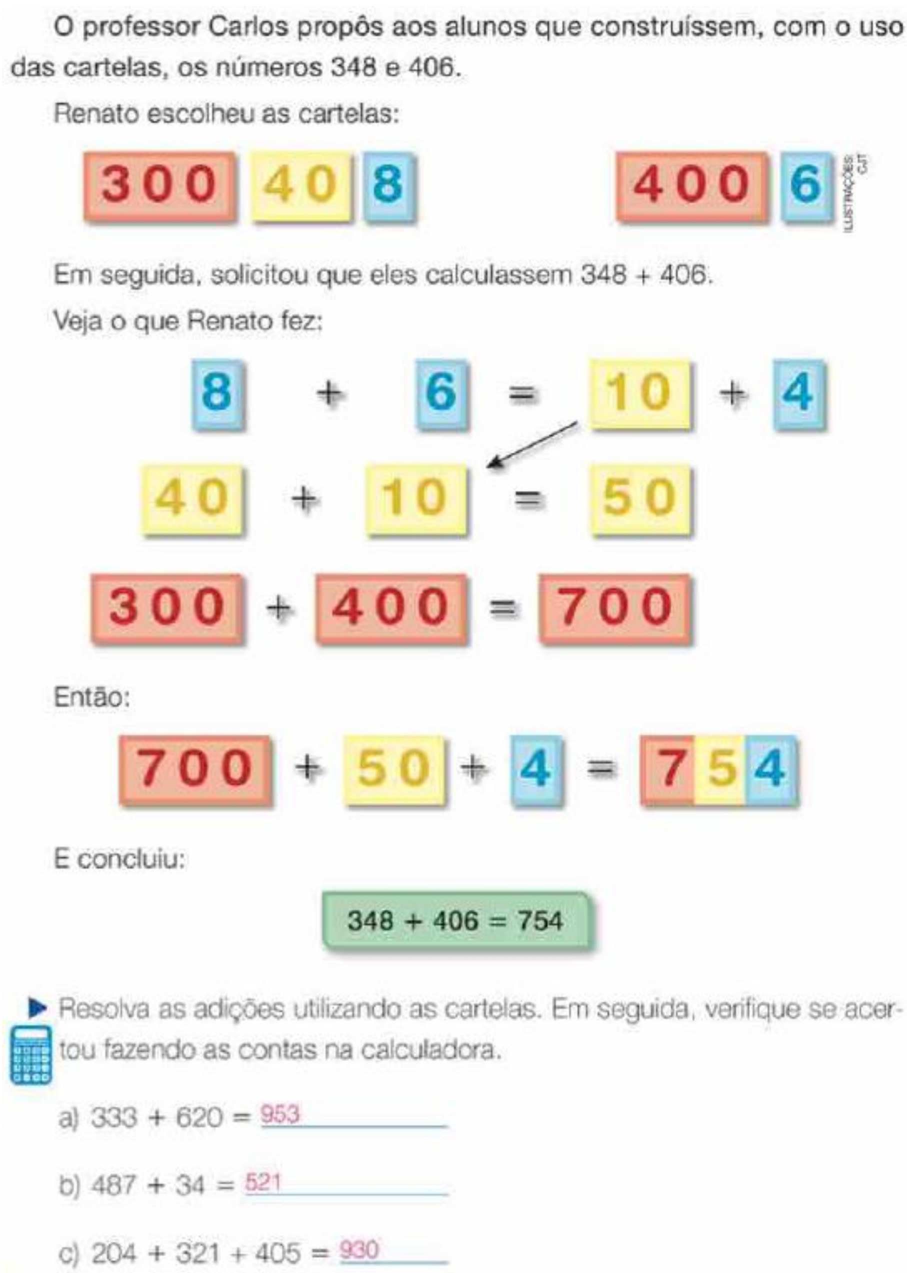
Figura 37: Exemplo de cálculo de adição utilizando decomposição como estratégia.



Fonte: 2A19, p. 160.

Destacamos mais um exemplo para este tipo de tarefa, que apresenta números de três ordens e que a decomposição é feita por meio de fichas. Para realizar o cálculo, é feita a troca das fichas de 10 unidades por uma ficha da dezena.

Figura 38: Exemplo de cálculo de adição utilizando decomposição com fichas.


O professor Carlos propôs aos alunos que construíssem, com o uso das cartelas, os números 348 e 406.

Renato escolheu as cartelas:

300 40 8 400 6

Em seguida, solicitou que eles calculassem 348 + 406.

Veja o que Renato fez:

8 + 6 = 10 + 4

40 + 10 = 50

300 + 400 = 700

Então:

700 + 50 + 4 = 754

E concluiu:

348 + 406 = 754

▶ Resolva as adições utilizando as cartelas. Em seguida, verifique se acertou fazendo as contas na calculadora.

a) 333 + 620 = 953

b) 487 + 34 = 521

c) 204 + 321 + 405 = 930

Fonte: 3A19, p. 47.

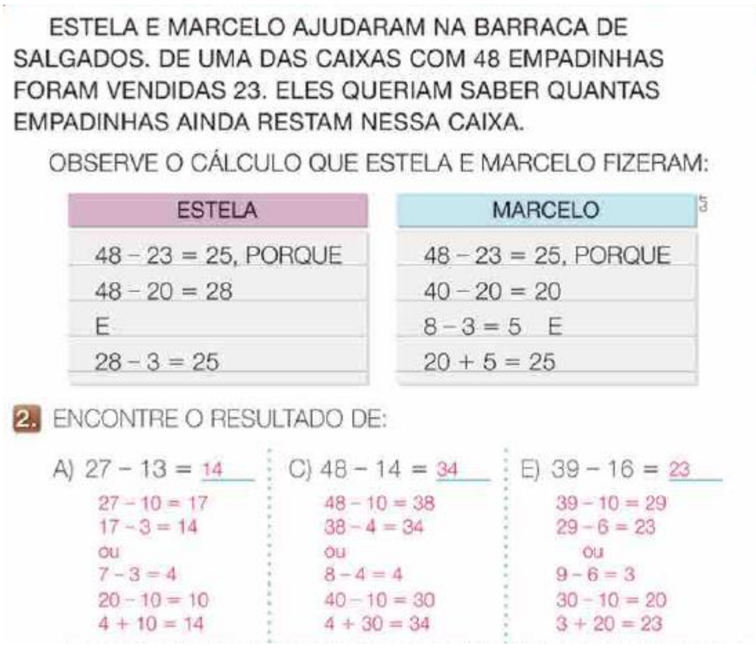
A atividade da Figura 39 propõe a resolução de cálculos de subtração utilizando como estratégia a decomposição conforme a organização do sistema de numeração decimal. Em vermelho, estão as respostas esperadas.

to3.2 — Calcular uma subtração utilizando decomposição como estratégia.

τo3.2.1 — Subtrair do minuendo as dezenas do subtraendo; e subtrair do minuendo as unidades do subtraendo.

*τ*o3.2.2 — Subtrair das unidades do minuendo as unidades do subtraendo; subtrair das dezenas do minuendo as dezenas do subtraendo; compor a diferença com as dezenas e as unidades encontradas.

Figura 39: Exemplo de cálculo de subtração utilizando decomposição como estratégia.


ESTELA E MARCELO AJUDARAM NA BARRACA DE SALGADOS. DE UMA DAS CAIXAS COM 48 EMPADINHAS FORAM VENDIDAS 23. ELES QUERIAM SABER QUANTAS EMPADINHAS AINDA RESTAM NESSA CAIXA.

OBSERVE O CÁLCULO QUE ESTELA E MARCELO FIZERAM:

ESTELA	MARCELO
48 − 23 = 25, PORQUE	48 − 23 = 25, PORQUE
48 − 20 = 28	40 − 20 = 20
E	8 − 3 = 5 E
28 − 3 = 25	20 + 5 = 25

2. ENCONTRE O RESULTADO DE:

A) 27 − 13 = 14	C) 48 − 14 = 34	E) 39 − 16 = 23
27 − 10 = 17	48 − 10 = 38	39 − 10 = 29
17 − 3 = 14	38 − 4 = 34	29 − 6 = 23
ou	ou	ou
7 − 3 = 4	8 − 4 = 4	9 − 6 = 3
20 − 10 = 10	40 − 10 = 30	30 − 10 = 20
4 + 10 = 14	4 + 30 = 34	3 + 20 = 23

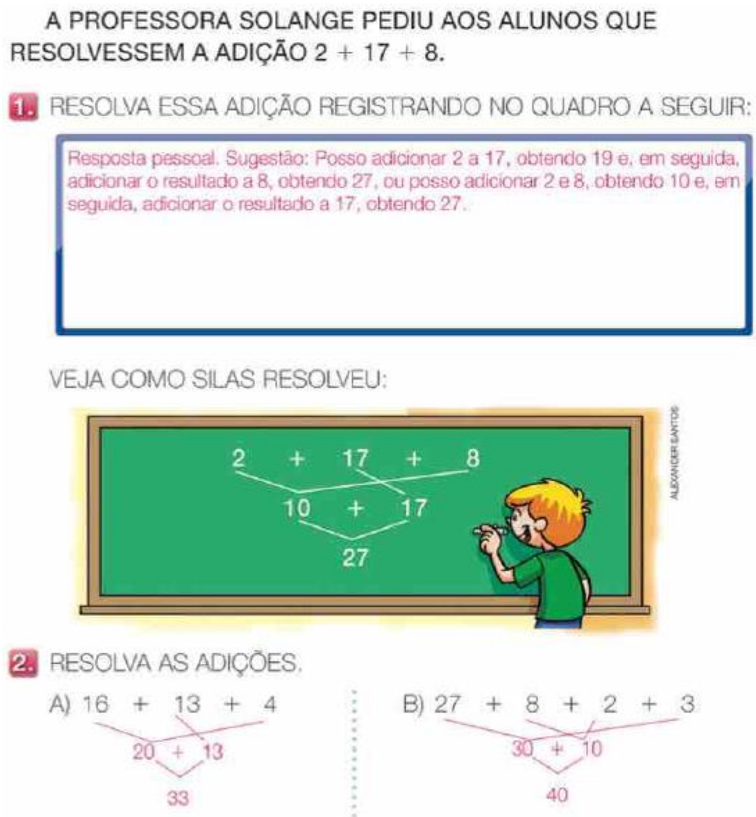
Fonte: 2A19, p. 142.

A Figura 40 traz uma atividade em que é apresentada ao aluno a possibilidade de utilizar a propriedade associativa da adição para facilitar os cálculos. As respostas estão apresentadas na figura na cor vermelha.

to3.3 — Calcular uma adição utilizando a propriedade associativa.

*τ*o3.3.1 — Em uma adição, associar as parcelas de maneira conveniente, realizando as adições até chegar ao resultado.

Figura 40: Exemplo de cálculo de adição utilizando a propriedade associativa.



Fonte: 2A19, p. 161.

A Figura 41 apresenta a atividade 2, que leva o aluno a calcular uma multiplicação explorando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Em vermelho estão as respostas.

to3.4 — Calcular uma multiplicação utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo um dos fatores em uma adição (atividade 2b da Figura 41).

τo3.4.1 — Decompor um dos fatores em uma adição conveniente e realizar a adição do produto do outro fator em cada uma das parcelas da adição. Neste caso, 12 pode ser decomposto, por exemplo, em 10 + 2, por isso o produto de 12 por 2 pode ser calculado pela adição do produto de 10 por 2 com o produto de 2 por 2 (20 + 4).

Figura 41: Exemplo de utilização da propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição.

1. Na barraca de doces, cada unidade custava 2 reais. Preencha o quadro com o custo de cada quantidade de doces:

1	R$ 2,00
2	R$ 4,00
3	R$ 6,00
4	R$ 8,00
5	R$ 10,00

6	R$ 12,00
7	R$ 14,00
8	R$ 16,00
9	R$ 18,00
10	R$ 20,00

2. Responda:

a) Você observou que juntando o preço de 3 doces com o de 5 doces o resultado é igual ao preço de 8 doces? Por que isso acontece?

Porque a soma de 3 com 5 é igual a 8, e 8 doces a R$ 2,00 cada custam R$ 16,00.

b) Então, como poderíamos calcular o preço de 12 doces?

Resposta pessoal. Há várias possibilidades. Sugestão: Juntando o preço de 10 doces e de 2 doces ou juntando o preço de 5 doces e de 7 doces.

Fonte: 3A19, p. 174.

O Quadro 20 apresenta a distribuição ao longo dos livros dos três primeiros anos do Ensino Fundamental, do tipo de tarefa TO3, a respeito da utilização de estratégias para resolução de cálculos.

Quadro 21: Distribuição das tarefas de cálculos com estratégias.

Tipo de tarefa (TO)		Tarefa (to)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TO3	Realizar cálculos utilizando estratégias.	to3.1	Calcular uma adição utilizando decomposição como estratégia.	0	1	19	7	6	9
		to3.2	Calcular uma subtração utilizando decomposição como estratégia.	0	0	8	9	6	6
		to3.3	Calcular uma adição utilizando a	0	0	2	2	0	0

			propriedade associativa.						
		to3.4	Calcular uma multiplicação utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo um dos fatores em uma adição.	0	0	0	0	7	6

Fonte: elaboração da autora.

O Quadro 20 nos mostra que a tarefa de cálculo de adição utilizando a decomposição (to3.1) teve uma diminuição expressiva no 2º ano (de 19 para 7), um aumento no 3º ano (de 6 para 9) e passou a ser abordada já no 1º ano. Já as tarefas to3.2 e to3.4 sofreram pequenas alterações, respectivamente, aumento de um no 2º ano e diminuição de um no 3º ano.

O tipo de tarefa TO4 aborda as propriedades das operações de maneira investigativa. As figuras 42, 43 e 44 trazem atividades que propiciam a investigação de propriedades das operações, respectivamente, a propriedade comutativa da adição, da multiplicação e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. As respostas estão apresentadas nas figuras em vermelho. A Figura 44 repete a atividade da Figura 41, porque agora o foco é a investigação, e não só a utilização da propriedade.

TO4 — Investigar propriedades das operações.

to4.1 — Investigar a propriedade comutativa da adição no quadro de adição de parcelas de 1 a 9 com uma segunda parcela também de 1 a 9 (atividade 2 da Figura 42).

$\boldsymbol{\tau}$o4.1.1 — Observar, no quadro proposto, a repetição de somas destacadas percebendo que, em uma adição, a ordem das parcelas não altera a soma.

Figura 42: Exemplo de investigação da propriedade comutativa da adição.

Rita, uma das filhas de seu João, está no 3º ano e aprendeu com seus pais a fazer cálculos de adição mentalmente. Na escola, com ajuda da professora Clara, ela organizou um quadro colorido com os resultados de várias adições.

1. Alguns resultados já foram preenchidos. Verifique se estão corretos e termine de completar o quadro.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

2. A professora Clara coloriu uma parte do quadro de verde e a outra parte de rosa. Você sabe o que ela quis destacar?

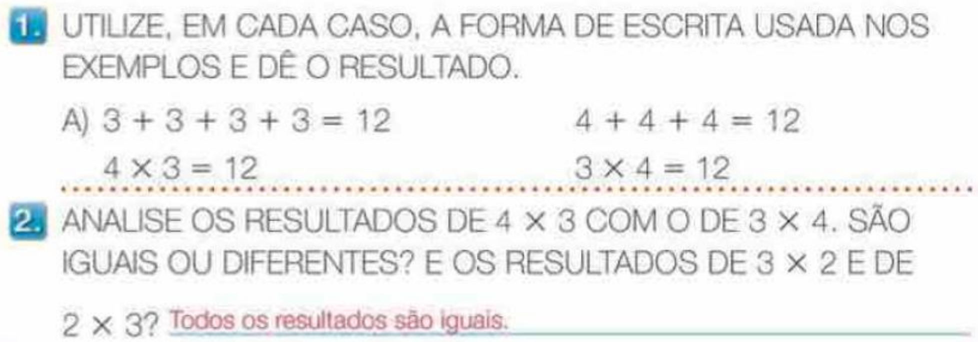
Que há uma repetição de valores e isso ocorre em função da propriedade comutativa da adição. Assim, o resultado de 2 + 3 é igual ao resultado de 3 + 2, por exemplo.

Fonte: 3A16, p. 74.

to4.2 — Investigar a propriedade comutativa da multiplicação (atividade 2 da Figura 43).

*τ*o4.2.1 — Perceber que duas multiplicações em que os fatores são iguais, apenas com ordem diferente, resultam no mesmo produto.

Figura 43: Exemplo de investigação da propriedade comutativa da multiplicação.



1. UTILIZE, EM CADA CASO, A FORMA DE ESCRITA USADA NOS EXEMPLOS E DÊ O RESULTADO.

A) $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ $\quad$ $4 + 4 + 4 = 12$

$4 \times 3 = 12$ $\quad$ $3 \times 4 = 12$

2. ANALISE OS RESULTADOS DE 4×3 COM O DE 3×4. SÃO IGUAIS OU DIFERENTES? E OS RESULTADOS DE 3×2 E DE 2×3? Todos os resultados são iguais.

Fonte: 2A19, p. 121.

to4.3 — Investigar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo um dos fatores em uma adição.

τo4.3.1 — Decompor um dos fatores em uma adição e calcular a adição do produto do outro fator em cada uma das parcelas da adição. Neste caso, 8 pode ser decomposto em 3 + 5, e o produto de 8 por 2 pode ser calculado pela adição dos produtos de 3 por 2 e de 5 por 2 (6 + 10). Em seguida, calcular o produto sem decomposição; neste caso, 8 x 2 = 16, e comparar os dois resultados (atividade 2a da Figura 44).

Nesta tarefa, além da propriedade comutativa da multiplicação, imbricada à própria técnica, a demonstração direta também configura o suporte tecnológico-teórico.

Figura 44: Exemplo de investigação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

1. Na barraca de doces, cada unidade custava 2 reais. Preencha o quadro com o custo de cada quantidade de doces:

1	R$ 2,00
2	R$ 4,00
3	R$ 6,00
4	R$ 8,00
5	R$ 10,00

6	R$ 12,00
7	R$ 14,00
8	R$ 16,00
9	R$ 18,00
10	R$ 20,00

2. Responda:

a) Você observou que juntando o preço de 3 doces com o de 5 doces o resultado é igual ao preço de 8 doces? Por que isso acontece?

Porque a soma de 3 com 5 é igual a 8, e 8 doces a R$ 2,00 cada custam R$ 16,00.

Fonte: 3A19, p. 174.

O Quadro 21 resume a distribuição do tipo de tarefa TO4, de investigação das propriedades das operações, ao longo dos seis livros analisados.

Quadro 22: Distribuição das tarefas de investigação das propriedades das operações.

Tipo de tarefa (TO)		Tarefa (to)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TO4	Investigar propriedades das operações.	to4.1	Investigar a propriedade comutativa da adição no quadro de adição de parcelas de 1 a 9 com uma segunda parcela também de 1 a 9.	0	0	0	0	1	0
		to4.2	Investigar a propriedade comutativa da multiplicação.	0	0	2	1	0	0
		to4.3	Investigar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo um dos fatores em uma adição.	0	0	0	0	1	0

Fonte: elaboração da autora.

Em relação ao tipo de tarefa TO4, percebemos o desaparecimento de duas das tarefas investigativas a respeito das propriedades das operações (to4.1 e to4.3), restando apenas uma tarefa (to4.2) com pequena diminuição.

O *assunto* Operações sofre pequeno aumento em uma tarefa (to3.2) e reduções em outras (to3.4 e to4.2). Quatro tarefas somem da edição atual, duas delas que tratam da descrição do uso de operações inversas (to2.1 e to2.2) e as outras duas investigativas das propriedades das operações (to4.1 e to4.3). Duas tarefas (to1.1 e to3.1) sofrem oscilações nas quantidades de vezes em que aparecem no 2º ou 3º ano, mas passam a ser abordadas desde o 1º ano, ambas tarefas práticas com cálculo de adição ou estabelecimento de adições e subtrações relacionadas.

De maneira, geral percebemos que o *assunto* já era abordado antes da orientação da Base, no entanto, sofre reduções e reorganização. Redução de tipos de tarefas (TO2 é descontinuado) e tarefas (to2.1, to2.2, to4.1 e to4.3) com características descritivas e investigativas, e adiantamento de tarefas práticas (to1.1, to3.1), envolvendo a adição para o 1º ano.

5.3.4 Igualdade

O *assunto* Igualdade agrupa os tipos de tarefas relacionadas à categoria C (TI) — explorar a igualdade como relação entre quantidades —, que inclui não só situações em que o sinal de igualdade tem o significado de equivalência, mas também situações em que há esse mesmo sentido de equivalência, sem necessariamente a utilização do símbolo de igualdade, incluindo situações com balança de pratos. Em geral, o respaldo tecnológico-teórico consiste na própria equivalência da igualdade.

Os tipos de tarefa TI1, TI2 e TI3 tratam da identificação e da proposição de diferentes cálculos que tenham o mesmo resultado. E o tipo de tarefa TI4 propõe a determinação de um valor desconhecido em uma igualdade.

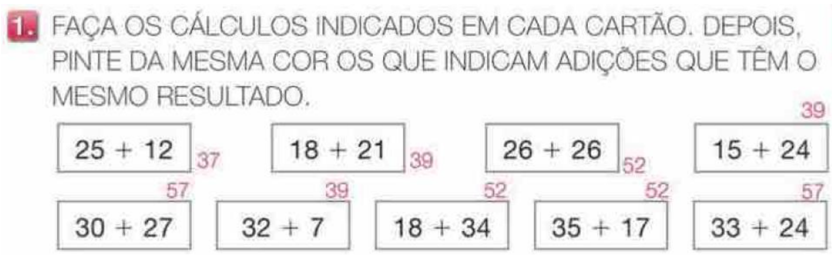
As figuras 45, 46 e 47 trazem atividades em que diversos cálculos são apresentados, e os estudantes devem pintar da mesma cor os cálculos com resultados iguais. A diferença entre as atividades é a operação com que cada uma trabalha, Figura 45, adição; Figura 46, subtração; e Figura 47, multiplicação. As respostas dos cálculos estão em vermelho, ou há símbolos indicando quais cálculos deveriam ser pintados da mesma cor.

TI1 — Identificar diferentes cálculos com resultados iguais.

ti1.1 — Identificar diferentes adições que resultem na mesma soma.

*τ*i1.1.1 — Calcular duas (ou mais) adições diferentes e reconhecer quais delas resultam na mesma soma.

Figura 45: Exemplo de identificação de adições com resultados iguais.



1. FAÇA OS CÁLCULOS INDICADOS EM CADA CARTÃO. DEPOIS, PINTE DA MESMA COR OS QUE INDICAM ADIÇÕES QUE TÊM O MESMO RESULTADO.

25 + 12 (37) | 18 + 21 (39) | 26 + 26 (52) | 15 + 24 (39)

30 + 27 (57) | 32 + 7 (39) | 18 + 34 (52) | 35 + 17 (52) | 33 + 24 (57)

Fonte: 2A19 p. 180.

ti1.2 — Identificar diferentes subtrações que resultem na mesma diferença.

*τ*i1.2.1 — Calcular duas (ou mais) subtrações diferentes e reconhecer quais delas resultam na mesma diferença.

Figura 46: Exemplo de identificação de subtrações com resultados iguais.

2. PINTE DA MESMA COR AS CARTELAS EM QUE O RESULTADO DAS SUBTRAÇÕES INDICADAS É O MESMO.

9 − 1 (8) | 10 − 2 (8) | 8 − 1 (7) | 10 − 4 (6) | 8 − 2 (6)

9 − 2 (7) | 12 − 5 (7) | 9 − 3 (6) | 10 − 5 (5)

7 − 1 (6) | 6 − 1 (5) | 11 − 3 (8) | 12 − 4 (8) | 7 − 2 (5)

10 − 3 (7) | 9 − 4 (5) | 11 − 5 (6) | 11 − 4 (7)

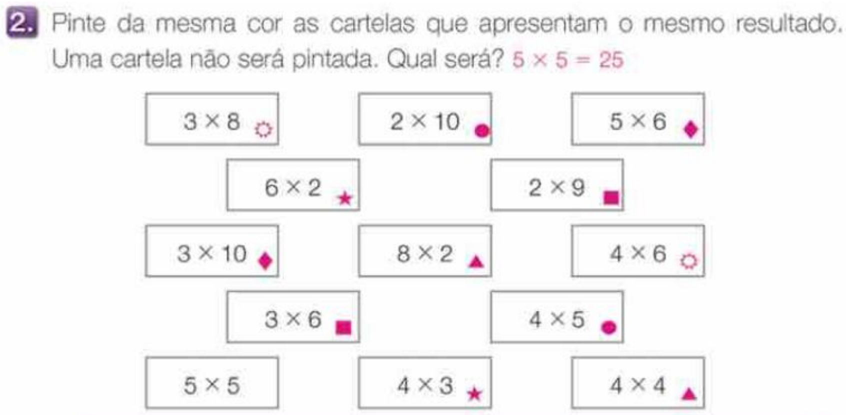
13 − 7 (6) | 8 − 3 (5) | 9 − 5 (4) | 11 − 5 (6)

Fonte: 2A19, p. 141.

ti1.3 — Identificar diferentes multiplicações que resultem no mesmo produto.

*τ*i1.3.1 — Calcular duas (ou mais) multiplicações diferentes e reconhecer quais delas resultam em um mesmo produto.

Figura 47: Exemplo de identificação de multiplicações com resultados iguais.



Fonte: 3A19 p. 170.

A Figura 48 apresenta uma atividade em que os estudantes devem assinalar quais as trocas possíveis para uma cédula de 50 reais, ou seja, quais conjuntos de notas têm valores equivalentes a 50 reais.

TI2 — Reconhecer valores monetários equivalentes.

ti2.1 — Estabelecer equivalência entre cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.

*τ*i2.1.1 — Calcular as diversas combinações de cédulas e moedas e assinalar as opções cujo resultado é um dado valor; neste caso, 50 reais.

Figura 48: Exemplo de equivalência entre cédulas e moedas.

Fonte: 2A19 p. 196.

A Figura 49 nos mostra uma atividade em que os estudantes devem propor diferentes duplas de parcelas que resultem em 10. Em vermelho, estão apresentadas sugestões de respostas.

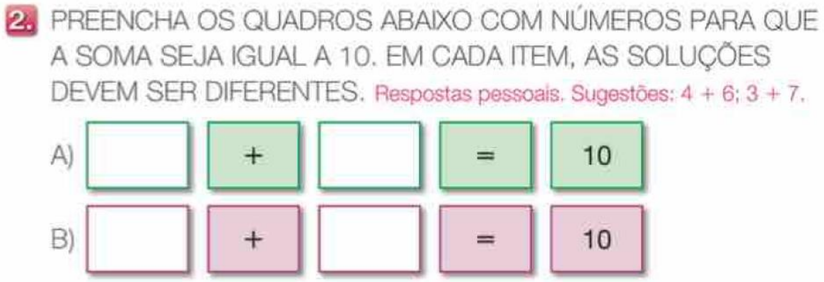
TI3 — Propor diferentes cálculos com o mesmo resultado.

ti3.1 — Propor diferentes adições que resultem na mesma soma.

τi3.1.1 — Escolher um número menor ou igual à soma para uma das parcelas, e contar a partir dela quanto falta para chegar à soma.

τi3.1.2 — Escolher um número menor ou igual à soma para uma das parcelas, e subtraí-lo da soma para encontrar a segunda parcela.

Figura 49: Exemplo de proposição de diferentes adições que resultem na mesma soma.



Fonte: 1A19, p. 173.

Consideramos também, como a mesma tarefa, quando a situação era contextualizada. Na Figura 50, a seguir, é proposta uma atividade em que o aluno precisa encontrar todas as maneiras possíveis de distribuir quatro palitos de fósforo em duas caixinhas, uma azul e uma vermelha. Ao realizar a distribuição, ele proporá cinco diferentes adições que resultam em quatro. As respostas estão apresentadas na cor vermelha.

Figura 50: Exemplo contextualizado que leva a adições que resultem na mesma soma.

Fonte: 2A19, p. 56.

As figuras 51 e 52 apresentam atividades em que há uma igualdade entre duas adições de duas parcelas, e uma das parcelas é desconhecida. A diferença é que a atividade da Figura 52 é um caso particular que permite a solução por meio da propriedade comutativa da adição. As respostas das atividades estão em vermelho nas imagens.

TI4 — Completar o valor desconhecido mantendo a equivalência.

ti4.1 — Completar o valor desconhecido mantendo a equivalência com o outro membro.

τi4.1.1 — Determinar a soma resultante da adição apresentada no primeiro membro e subtrair dela a parcela conhecida, determinando a parcela desconhecida. Justificada pelo campo da Aritmética e pela relação inversa entre as operações de adição e subtração

τi4.1.2 — Observar a diferença entre as parcelas dadas e a compensação para determinar a parcela desconhecida. Por exemplo, no item a), se a primeira parcela do segundo membro (3) é uma unidade maior do que a primeira parcela do primeiro membro (2), basta subtrair uma unidade da segunda parcela do primeiro membro (7) para encontrar a segunda parcela do segundo membro (8 – 1 = 7).

τi4.1.3 — Adicionar e subtrair uma quantidade conveniente ao primeiro membro e reagrupar de maneira favorável. Por exemplo no item a), 2 + 8 = 2 + 8 +1 – 1 = (2 + 1) + (8 – 1) = 3 + 7.

As técnicas τi4.1.2 e τi4.1.3 são respaldadas na propriedade associativa da adição.

Figura 51: Exemplo de determinação de parcela em uma igualdade entre duas adições.

Fonte: 2A19, p. 54.

A tarefa ti4.1 aceita ainda uma quarta técnica em algumas atividades, respaldada pela propriedade comutativa da adição.

τi4.1.4 — Perceber que a ordem das parcelas não altera a soma e repetir a parcela que falta.

Figura 52: Exemplo de caso particular de determinação de uma parcela de igualdade entre duas adições.

Fonte: 2A19, p. 130.

Apesar de o tipo de tarefa TI4 tratar de valores desconhecidos, consideramos o aspecto da igualdade como equivalência mais forte, portanto, optamos por agrupá-lo no *assunto* Igualdade, dentro da categoria C, conforme Blanton e Kaput (2005).

O Quadro 22 resume a distribuição nos livros dos tipos de tarefa de TI1 a TI4, que tratam de cálculos com resultados iguais.

Quadro 23: Distribuição das tarefas de cálculos com resultados iguais.

Tipo de tarefa (TI)		**Tarefa (ti)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TI1	Identificar diferentes cálculos com resultados iguais.	ti1.1	Identificar diferentes adições que resultem na mesma soma.	0	0	19	10	6	0
		ti1.2	Identificar diferentes subtrações que resultem na mesma diferença.	0	0	4	4	0	0
		ti1.3	Identificar diferentes multiplicações que resultem no mesmo produto.	0	0	0	0	6	6
TI2	Reconhecer valores monetários equivalentes.	ti2.1	Identificar diferentes maneiras de compor um mesmo valor com cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.	0	0	9	9	22	7
TI3	Propor diferentes cálculos com o mesmo resultado.	ti3.1	Propor diferentes adições que resultem na mesma soma.	0	1	1	1	5	2
TI4	Completar o valor desconhecido mantendo a equivalência	ti4.1	Encontrar a parcela desconhecida em uma igualdade entre duas adições.	0	0	0	5	0	7

Fonte: elaboração da autora.

Percebemos que a tarefa relacionada à identificação de diferentes adições (ti1.1) sofre diminuição no 2º ano e é retirada do 3º ano. O tipo de tarefa que relaciona valores monetários equivalentes (TI2) também sofreu diminuição no 3º ano. No entanto, o tipo de tarefa de proposição de diferentes cálculos com o mesmo resultado (TI3), apesar de ter diminuído no 3º ano, passa a ser abordado desde o 1º ano. E o tipo de tarefa que envolve encontrar um valor desconhecido em uma igualdade (TI4) é inserido na edição atual a partir do 2º ano.

Os tipos de tarefa TI5 e TI6 são estruturais, tratam da verificação e da justificativa da igualdade. As técnicas dessas tarefas são respaldadas também pela demonstração direta no âmbito tecnológico-teórico. Esses dois tipos de tarefas sempre explicitam o sinal de igualdade.

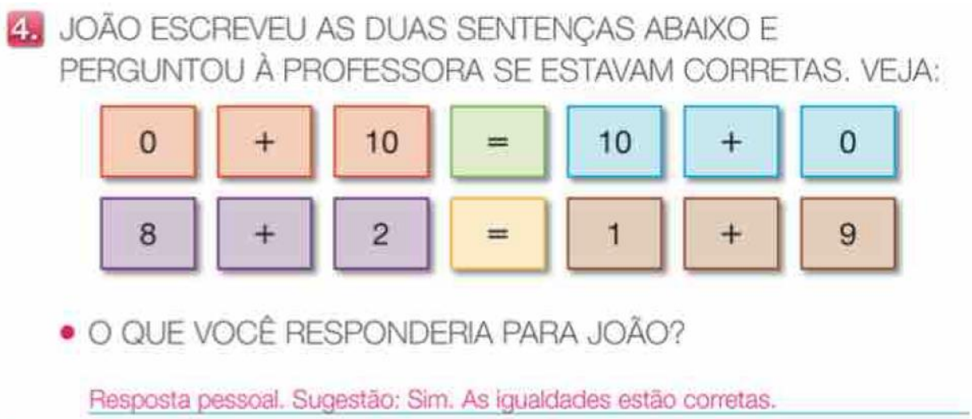
As atividades das figuras 53 e 54 solicitam que o aluno verifique a validade de igualdades, respectivamente, entre duas adições e entre duas subtrações. As respostas estão apresentadas em vermelho.

TI5 — Verificar a validade de uma igualdade.

ti5.1 — Verificar se uma igualdade entre duas adições é verdadeira.

τi5.1.1 — Calcular a adição do primeiro e do segundo membros da igualdade e comparar os resultados; se forem iguais, a igualdade é verdadeira, se não, é falsa.

Figura 53: Exemplo de verificação de uma igualdade entre duas adições.

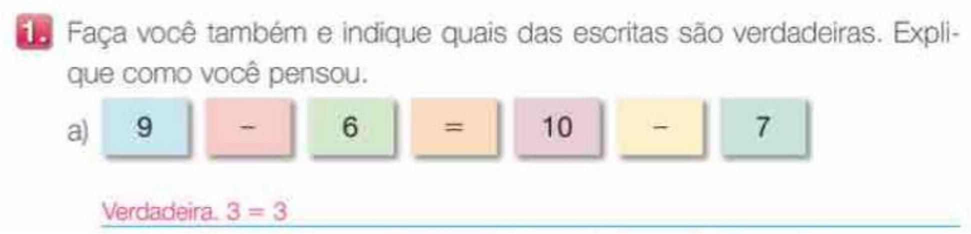


Fonte: 1A19, p. 173.

ti5.2 — Verificar se uma igualdade entre duas subtrações é verdadeira.

τi5.2.1 — Calcular a subtração do primeiro e do segundo membros da igualdade e comparar os resultados; se forem iguais, a igualdade é verdadeira, se não, é falsa.

Figura 54: Exemplo de verificação de uma igualdade entre duas subtrações.



Fonte: 3A19, p. 151.

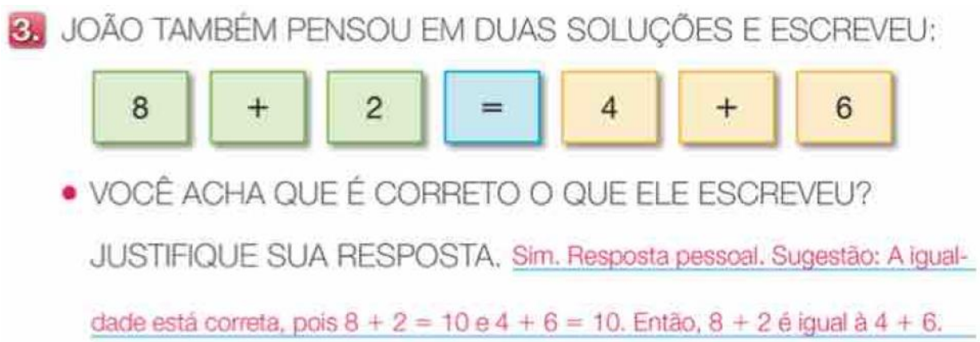
As figuras 55 e 56 trazem atividades em que os alunos devem justificar a validade de uma igualdade, respectivamente, entre duas adições e entre duas subtrações.

TI6 — Justificar uma igualdade.

ti6.1 — Justificar uma igualdade entre duas adições.

*τ*i6.1.1 — Descrever o processo de calcular a adição do primeiro e do segundo membros da igualdade e comparar os resultados, verificando a validade da igualdade.

Figura 55: Exemplo de justificativa de uma igualdade entre duas adições.

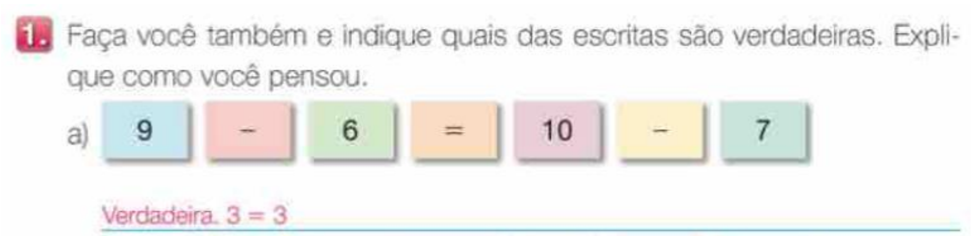


Fonte: 1A19, p. 173.

ti6.2 — Justificar uma igualdade entre duas subtrações.

*τ*i6.2.1 — Descrever o processo de calcular a subtração do primeiro e do segundo membros da igualdade e comparar os resultados, verificando a validade da igualdade.

Figura 56: Exemplo de justificativa de uma igualdade entre duas subtrações.



Fonte: 3A19, p. 151.

O Quadro 23 sintetiza a distribuição dos tipos de tarefa TI5 e TI6, sobre verificação e justificativa de igualdades, ao longo dos seis livros analisados.

Quadro 24: Distribuição das tarefas de verificação e de justificativa de igualdade.

Tipo de tarefa (TI)		Tarefa (ti)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TI5	Verificar a validade de uma igualdade.	ti5.1	Verificar se uma igualdade entre duas adições é verdadeira.	0	2	0	14	4	13
		ti5.2	Verificar se uma igualdade entre duas subtrações é verdadeira.	0	0	0	0	0	5
TI6	Justificar uma igualdade.	ti6.1	Justificar uma igualdade entre duas adições.	0	1	0	7	0	11
		ti6.2	Justificar uma igualdade entre duas subtrações.	0	0	0	0	0	4

Fonte: elaboração da autora.

Os tipos de tarefa de verificação e justificativa da igualdade são novidade no *assunto* Igualdade em relação à edição anterior. Todas as tarefas aparecem na nova edição variando entre os três anos. A única tarefa que já tinha aparecido na edição anterior à BNCC é a verificação da igualdade entre duas adições (ti5.1) que aparecia apenas no 3º ano e passou a ser abordada nos três anos analisados.

O tipo de tarefa TI7 trata da identificação de correspondências em uma situação de jogo, enquanto os tipos de tarefa TI8, TI9 e TI10 tratam de situações com balança de pratos.

A Figura 57 exemplifica o tipo de tarefa TI7, que é uma tarefa pontual. Consiste em uma situação de jogos, que, por meio da pontuação, é solicitada a identificação de quais jogadores se enfrentaram. A justificativa da técnica se dá em um contexto concreto de um jogo em que dois oponentes se enfrentam, e tudo o que um jogador perde o outro ganha.

TI7 — Identificar correspondência.

ti7.1 — Identificar correspondência em situações de ganho e perda.

τi7.1.1 — Relacionar quantidades iguais de ganho e perda. Buscar na coluna da rodada indicada e na linha do nome do jogador se ele perdeu (ou ganhou) e a quantidade de figurinhas. Localizar na mesma coluna o nome que tenha ganhado (ou perdido) a mesma quantidade, descobrindo quais jogadores se enfrentaram na rodada do jogo.

Figura 57: Exemplo de identificação de ganho e de perda no contexto de jogos.

Um grupo de alunos organizou um quadro para marcar os resultados de um jogo com figurinhas. Cada um deles iniciou o jogo com 40 figurinhas. Em cada rodada, Pedro foi anotando quantas figurinhas cada um ganhou e quantas perdeu.

Nome	1ª rodada	2ª rodada	Total
Pedro	Ganhou 1	Perdeu 5	36
Francisco	Perdeu 5	Ganhou 2	37
Rita	Ganhou 5	Perdeu 2	43
Lucas	Perdeu 8	Ganhou 1	33
Andréa	Ganhou 8	Perdeu 1	47
Sílvia	Perdeu 1	Ganhou 5	44

1. Na primeira rodada, você pode observar que Pedro ganhou uma figurinha e Sílvia perdeu uma figurinha. Ou seja, Pedro competiu com Sílvia.

a) Quem competiu com Francisco? Rita

b) Quem competiu com Lucas? Andréa

Fonte: 3A16, p. 50.

A Figura 58 traz atividades que têm como recurso a balança de pratos. Os itens c) e d) do 1º exercício tratam da comparação da massa de diferentes objetos, enquanto o 2º exercício trata de estabelecer equivalência entre as massas dos objetos e justificá-la.

TI8 — Estabelecer comparação com balança de pratos.

ti8.1 — Comparar a massa de diferentes objetos a partir de situação de equilíbrio com balança de pratos (atividade 1, itens c) e d)).

τi8.1.1 — Observar o conjunto de objetos de cada prato e "retirar" objetos iguais e em mesma quantidade dos dois lados simplificando a equivalência de massa.

Esta tarefa traz a ideia de um objeto concreto, a balança. A técnica conta com um recurso concreto relacionado à equivalência de massas em uma balança de pratos.

TI9 — Estabelecer equivalência com balança de pratos.

ti9.1 — Estabelecer equivalência entre massas desconhecidas de objetos que são comparadas por meio de uma balança de pratos (atividade 2, item a)).

τi9.1.1 — Partindo do pressuposto de que uma lata tem massa igual a três bolas, basta colocar três bolas para cada lata; neste caso, duas latas, seis bolas (3 + 3 = 6).

τi9.1.2 — Estabelecer a proporção multiplicando a quantidade de latas por três, partindo do pressuposto de que uma lata tem massa igual a três bolas; neste caso, duas latas, seis bolas (2 x 3 = 6).

Estas duas técnicas também estão embasadas na proporcionalidade para manter a equivalência.

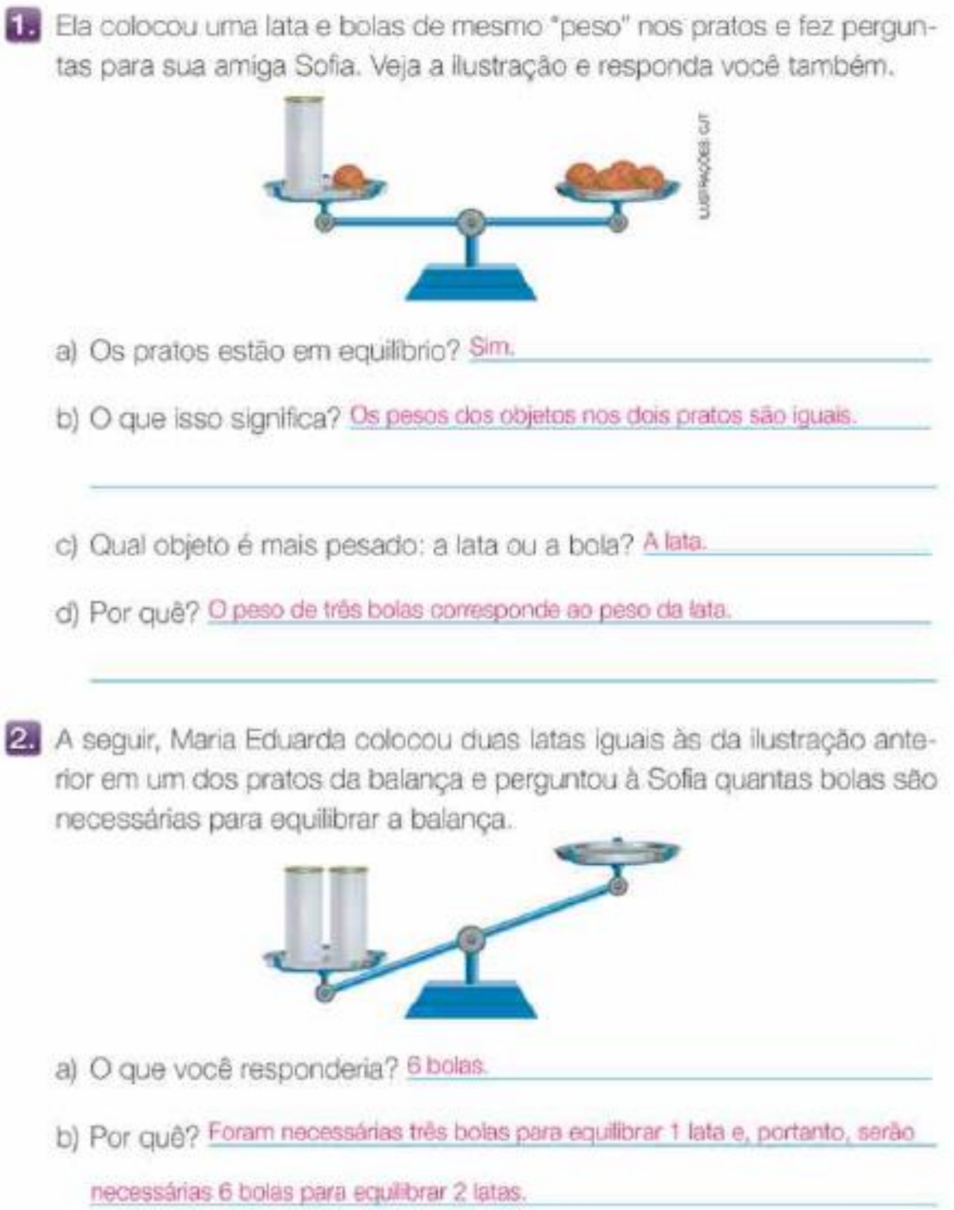
T10 — Justificar equivalência.

ti10.1 — Justificar equivalência entre massas desconhecidas de objetos que são comparadas por meio de uma balança de pratos (atividade 2, item b)).

τi10.1.1 — Descrever a proporção unitária, de que são necessárias três bolas para equilibrar uma lata, e calcular a quantidade de bolas para a quantidade de latas de acordo com a proporção descrita.

Aqui temos novamente a demonstração direta como respaldo da justificativa, além da proporcionalidade.

Figura 58: Exemplo de atividades com balança de pratos.



1. Ela colocou uma lata e bolas de mesmo "peso" nos pratos e fez perguntas para sua amiga Sofia. Veja a ilustração e responda você também.

a) Os pratos estão em equilíbrio? Sim.

b) O que isso significa? Os pesos dos objetos nos dois pratos são iguais.

c) Qual objeto é mais pesado: a lata ou a bola? A lata.

d) Por quê? O peso de três bolas corresponde ao peso da lata.

2. A seguir, Maria Eduarda colocou duas latas iguais às da ilustração anterior em um dos pratos da balança e perguntou à Sofia quantas bolas são necessárias para equilibrar a balança.

a) O que você responderia? 6 bolas.

b) Por quê? Foram necessárias três bolas para equilibrar 1 lata e, portanto, serão necessárias 6 bolas para equilibrar 2 latas.

Fonte: 3A19, p. 182.

O Quadro 24 apresenta a distribuição, ao longo dos três anos nas edições anterior e posterior à BNCC, dos tipos de tarefa de TI7 a TI10 de igualdade em contextos de jogos ou com a balança de pratos.

Quadro 25: Distribuição das tarefas de igualdade em contexto de jogos e de balança de pratos.

Tipo de tarefa (TI)		Tarefa (ti)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TI7	Identificar correspondência.	ti7.1	Identificar correspondência em situações de ganho e perda.	0	0	0	0	1	0
TI8	Estabelecer comparação com balança de pratos.	ti8.1	Comparar a massa de diferentes objetos a partir de situação de equilíbrio com balança de pratos.	0	0	0	0	1	1
TI9	Estabelecer equivalência com balança de pratos.	ti9.1	Estabelecer equivalência entre massas desconhecidas de objetos que são comparadas por meio de uma balança de pratos.	0	0	0	0	1	1
TI10	Justificar equivalência.	ti10.1	Justificar equivalência entre massas desconhecidas de objetos que são comparadas por meio de uma balança de pratos.	0	0	0	0	1	1

Fonte: elaboração da autora.

O tipo de tarefa de identificação de correspondência (TI7) é pontual, aparecia apenas uma vez no 3º ano e deixou de ser abordada na edição da coleção de livros didáticos orientada pela Base. Já os tipos de tarefa envolvendo balança de pratos (TI8, TI9 e TI10) não sofreram alterações.

Pudemos perceber alterações relevantes em relação ao *assunto* Igualdade. Há pequena diminuição na identificação de diferentes adições com mesmo resultado (ti1.1) e na equivalência de valores monetários (TI2); as tarefas de proposição de diferentes cálculos com o mesmo resultado (ti3.1) e verificação de igualdade entre duas adições (ti5.1) passam a ser abordadas desde o 1º ano. Diversas tarefas são inseridas na edição atual (ti4.1, ti5.2, ti6.1 e ti6.2), incluindo tarefas mais intencionais de verificação e de justificativa de igualdade (ti5.2, ti6.1 e ti6.2). Mesmo com a saída de identificação de correspondência (TI7), o balanço geral é de melhor distribuição das tarefas, aumento da quantidade e dos tipos de tarefas, incluindo tarefas mais intencionais e maior quantidade de tarefas com o sinal explícito.

5.3.5 Valores desconhecidos

Este grupo de tipos de tarefas (TV) trata, principalmente, de encontrar valores desconhecidos. As situações podem ser mais simples, como uma adição que tem uma parcela desconhecida, ou, então, de forma a depender de relações entre os valores desconhecidos. O discurso “tecnológico-teórico” que respalda as técnicas é variado, portanto, o apresentaremos após cada técnica.

O tipo de tarefa TV1 trata das tarefas de valores desconhecidos mais diretos, ou seja, trata quase sempre de um cálculo que tem o resultado conhecido e um valor desconhecido.

TV1 — Encontrar o valor desconhecido em um cálculo.

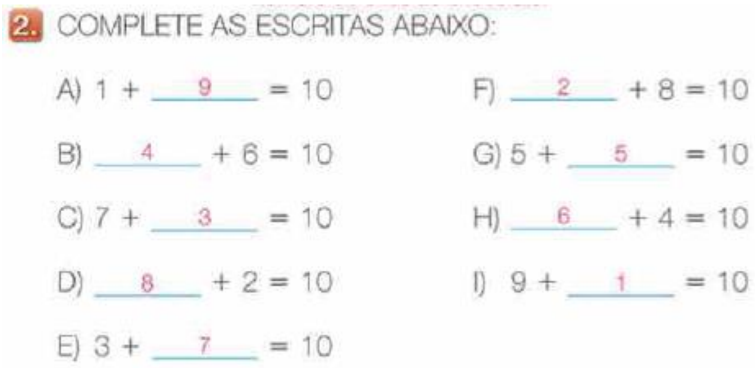
A atividade da Figura 59 apresenta uma sentença de adição de duas parcelas, em que a soma é conhecida, e uma de suas parcelas, desconhecida. O aluno deve encontrar a parcela desconhecida. As respostas que o aluno deveria fornecer estão apresentadas em vermelho.

tv1.1 — Encontrar uma das parcelas de uma adição conhecendo a soma e a outra parcela.

τv1.1.1 — Subtrair a parcela conhecida da soma para determinar a parcela desconhecida. Seu respaldo tecnológico-teórico está na relação entre as operações de adição e subtração.

τv1.1.2 — Contar a partir da parcela conhecida até chegar à soma para determinar a parcela desconhecida. A simples contagem é suportada pela sequência numérica.

Figura 59: Exemplo de determinação de uma parcela.


2. COMPLETE AS ESCRITAS ABAIXO:

A) 1 + 9 = 10
B) 4 + 6 = 10
C) 7 + 3 = 10
D) 8 + 2 = 10
E) 3 + 7 = 10
F) 2 + 8 = 10
G) 5 + 5 = 10
H) 6 + 4 = 10
I) 9 + 1 = 10

Fonte: 2A19, p. 54.

A Figura 60 traz uma atividade em que a parcela de uma adição precisa ser encontrada, e o que se conhece é a soma e a relação entre as parcelas. A resposta da atividade está em vermelho.

tv1.2 — Encontrar as parcelas de uma adição conhecendo a soma e a relação entre as parcelas.

Essa é a única tarefa pertencente ao tipo de tarefa TV1, que envolve algum tipo de relação entre valores desconhecidos; no entanto, como a relação é direta e está explícita, foi considerada dentro desse tipo de tarefa. A técnica tem seu suporte no campo da Aritmética.

τv1.2.1 — Dividir o resultado por 2, encontrando as duas parcelas.

Figura 60: Exemplo de determinação das parcelas com base na relação entre elas.


a) Qual é o número que adicionado a ele mesmo resulta 86? 43 (A metade de 86).

Fonte: 3A19, p. 71.

A Figura 61 apresenta uma atividade em que o estudante deve descobrir o valor oculto que pode ser o subtraendo (item k) ou o minuendo (item l). Em vermelho, está a resposta que o estudante deve fornecer.

tv1.3 — Encontrar o minuendo de uma subtração conhecendo a diferença e o subtraendo.

τv1.3.1 — Calcular a adição entre a diferença e o subtraendo para encontrar o minuendo. Seu suporte "teórico-tecnológico" é a relação entre as operações de adição e de subtração.

tv1.4 — Encontrar o subtraendo de uma subtração conhecendo a diferença e o minuendo.

*τ*v1.4.1 — Subtrair a diferença do minuendo para encontrar o subtraendo. Com respaldo aritmético na estrutura da subtração.

*τ*v1.4.2 — Realizar uma contagem regressiva partindo do minuendo até chegar à diferença para encontrar o subtraendo. A simples contagem é respaldada pela própria sequência numérica.

Figura 61: Exemplo de determinação de minuendo e de subtraendo.

Fonte: 2A19, p. 72.

Na Figura 62, temos uma atividade em que o aluno deve determinar o fator de uma multiplicação conhecendo o outro fator e o produto.

tv1.5 — Encontrar um dos fatores de uma multiplicação conhecendo o produto e o outro fator.

*τ*v1.5.1 — Dividir o produto pelo fator conhecido para encontrar o fator desconhecido. Seu respaldo tecnológico-teórico está na relação entre as operações de multiplicação e de divisão.

*τ*v1.5.2 — Fazer uma contagem pulando o valor do fator, ou seja, "recitar" a tabuada do fator conhecido até chegar ao produto, contando quantas vezes foram necessárias, para encontrar o fator desconhecido. A contagem é suportada pela sequência numérica.

Figura 62: Exemplo de determinação de um fator.

Fonte: 3A19, p. 71.

Nas atividades das figuras 63, 64 e 65 é solicitada a determinação de um valor em uma divisão. Respectivamente, do dividendo de uma divisão, em que o resto é zero; do divisor; e do dividendo de uma divisão, em que o resto é diferente de zero. As respostas que os estudantes devem fornecer estão apresentadas em vermelho.

tv1.6 — Encontrar o dividendo de uma divisão exata, conhecendo o quociente e o divisor.

*τ*v16.1 — Multiplicar o divisor e o quociente para encontrar o dividendo. Seu respaldo é a relação entre as operações de multiplicação e divisão.

Figura 63: Exemplo de determinação de dividendo de uma divisão com resto zero.

Fonte: 3A19, p. 71.

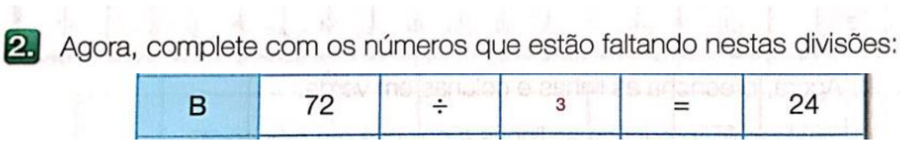
tv1.7 — Encontrar o divisor de uma divisão conhecendo o quociente e o dividendo.

*τ*v1.7.1 — Dividir o dividendo pelo quociente para encontrar o divisor.

*τ*v1.7.2 — Tentativa e erro. Dividir o dividendo por um divisor qualquer, se o resultado for maior do que o quociente, aumentar o divisor, se for menor, diminuir o divisor; repetir o procedimento até encontrar o cálculo correto.

As duas técnicas têm sua justificativa no campo aritmético, sendo que a primeira trata da estrutura da divisão.

Figura 64: Exemplo de determinação de divisor.

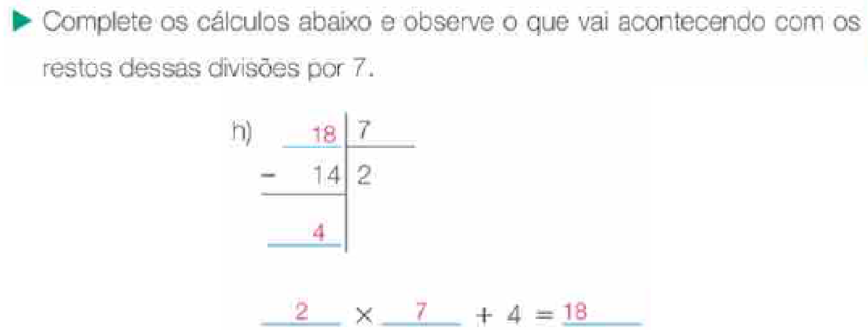


Fonte: 3A16, p. 238.

tv1.8 — Encontrar o dividendo de uma divisão conhecendo o quociente, o divisor e o resto.

*τ*v1.8.1 — Multiplicar o divisor pelo quociente e adicionar o resto para encontrar o dividendo. Tem seu respaldo tecnológico-teórico na relação entre as operações de multiplicação e de divisão; e na relação fundamental da divisão.

Figura 65: Exemplo de determinação de dividendo de uma divisão em que o resto é diferente de zero.



Fonte: 3A19, p. 204.

O Quadro 25 resume a distribuição do tipo de tarefa TV1, que trata da definição de valores desconhecidos.

Quadro 26: Distribuição das tarefas de definição de valores desconhecidos.

Tipo de tarefa (TV)		Tarefa (tv)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TV1	Encontrar o valor desconhecido.	tv1.1	Encontrar uma das parcelas de uma adição conhecendo a soma e a outra parcela.	0	0	15	15	11	4
		tv1.2	Encontrar as parcelas de uma adição conhecendo a soma e a relação entre as parcelas.	0	0	0	0	1	1
		tv1.3	Encontrar o minuendo de uma subtração conhecendo a diferença e o subtraendo.	0	0	2	2	10	3
		tv1.4	Encontrar o subtraendo de uma subtração conhecendo a diferença e o minuendo.	0	0	4	4	19	5
		tv1.5	Encontrar um dos fatores de uma multiplicação conhecendo o produto e o outro fator.	0	0	0	0	6	2
		tv1.6	Encontrar o dividendo de uma divisão exata, conhecendo o quociente e o divisor.	0	0	0	0	5	2
		tv1.7	Encontrar o divisor de uma divisão conhecendo o quociente e o dividendo.	0	0	0	0	1	0
		tv1.8	Encontrar o dividendo de uma divisão conhecendo o quociente, o divisor e o resto.	0	0	0	0	1	1

Fonte: elaboração da autora.

Percebemos nesse quadro um movimento de redução, diversas tarefas são reduzidas na quantidade de vezes que aparecem no 3º ano (tv1.1, tv1.3, tv1.4, tv1.5 e tv1.6). Há a saída da tarefa cujo valor desconhecido é o divisor (tv1.7).

O tipo de tarefa TV2 também trata de valores desconhecidos, mas que não estão propostos em uma sentença numérica, mas em outros contextos.

TV2 — Determinar uma combinação de parcelas que cumpra as restrições propostas.

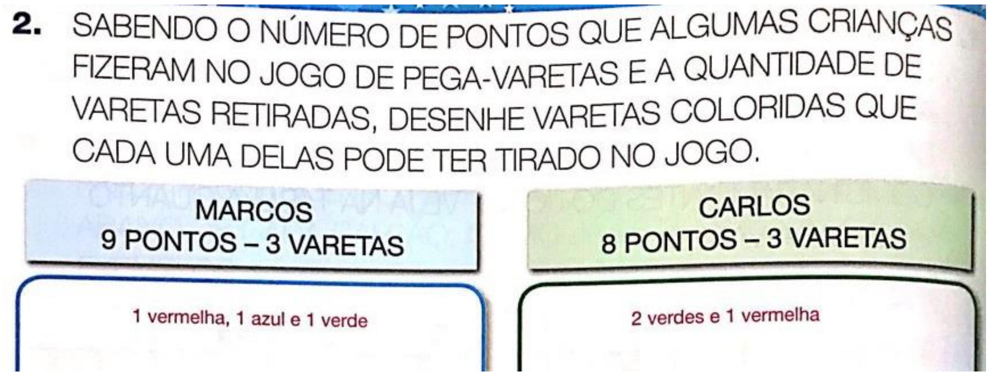
A Figura 66 trata de uma atividade em um contexto de jogo de pega-varetas, em que, conhecendo a pontuação de um jogador, a quantidade de varetas que ele pegou e conhecendo o valor de cada cor de varetas, o estudante deve determinar a combinação de varetas retiradas pelo jogador. A resposta é apresentada em vermelho.

tv2.1 — Determinar uma combinação de objetos conhecendo o total da adição dos pontos dos objetos e o valor de cada objeto.

τv2.1.1 — Realizar uma adição com o número de parcelas indicado, por tentativa e erro, até encontrar o total proposto.

Mesmo a tarefa apresentando valores desconhecidos, a técnica disponível ainda é por tentativa e erro, tendo seu respaldo no campo da Aritmética.

Figura 66: Exemplo de determinação de combinação de objetos de acordo com valores.



Fonte: 2A16, p. 224.

A atividade da Figura 67 é um quadrado mágico, em que a determinação dos valores depende da relação entre as linhas e as colunas do quadrado, que devem totalizar 12 cada uma. Os números variam de 1 a 9 e não podem ser repetidos.

tv2.2 — Determinar uma combinação de adições cuja soma é a mesma, conhecendo a soma e as relações entre as parcelas.

τv2.2.1 — Neste caso, trata-se de adições de três parcelas com valores de 0 a 9 e total 12. Inicialmente, basta subtrair as duas parcelas conhecidas do total, para encontrar o valor que completa a linha diagonal (5, 4, 3). A segunda etapa é por tentativa e erro. Deve-se escolher uma linha, subtrair a parcela conhecida do total para descobrir a soma das outras duas parcelas da linha. Em seguida, deve-se verificar as possibilidades de duas parcelas que somam o valor encontrado, lembrando que os números não podem se repetir. Por fim, posicionar as parcelas nas lacunas, verificando se é possível completar a soma de todas as linhas, lembrando que os números não podem ser repetidos.

Neste caso, podemos considerar que, além de tentativas e erros das adições, respaldadas pela Aritmética, também há a relação entre as operações de adição e de subtração.

Figura 67: Exemplo de determinação de adições com base nas relações entre as parcelas.

Fonte: 3A19, p. 87.

O Quadro 26 sintetiza a distribuição do tipo de tarefa TV2, que trata da definição de valores desconhecidos relacionados.

Quadro 27: Distribuição das tarefas de valores desconhecidos relacionados.

Tipo de tarefa (TV)		**Tarefa (tv)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TV2	Determinar uma combinação de parcelas que cumpra as restrições propostas.	tv2.1	Determinar uma combinação de objetos conhecendo o total da adição dos pontos dos objetos e o valor de cada objeto.	0	0	6	0	2	0
		tv2.2	Determinar uma combinação de adições cuja soma é a mesma, conhecendo a soma e as relações entre as parcelas.	0	0	0	0	6	3

Fonte: elaboração da autora.

Percebemos novamente uma diminuição, não só na quantidade de vezes em que uma determinada tarefa aparece no 3º ano (tv2.2), mas na descontinuidade da tarefa tv2.1, que deixa de ser abordada.

Os tipos de tarefa relacionados a valores desconhecidos (TV) perdem espaço com a diminuição da quantidade de diversas tarefas no 3º ano (tv1.1, tv1.3, tv1.4, tv1.5 e tv1.6 e tv 2.2) e a saída de outras duas tarefas (tv1.7 e tv2.1).

5.3.6 Relações funcionais

Os tipos de tarefas do *assunto* Relações funcionais tratam de quantidades proporcionais ou equivalentes. A relação de equivalência, assim como na análise da BNCC (cap. 4), ora foi considerada igualdade, ora foi considerada relação funcional, por entendermos que, em alguns momentos, se relacionava mais à questão da igualdade, e em outros, à relação entre as quantidades.

O tipo de tarefa TF1 trata de proporcionalidade, que é um *assunto* bastante difícil de definir se há potencial para desenvolvimento do pensamento algébrico, ou se é apenas a multiplicação no campo da Aritmética. Por isso, não consideramos problemas em que a multiplicação tinha ideia de proporcionalidade, mas, sim, exercícios que formavam sequências com a proporcionalidade e um único problema, em que a proporcionalidade não passa despercebida em sua resolução. O bloco teórico-tecnológico apresenta algumas variações, por isso o apresentaremos a cada tarefa ou técnica.

TF1 — Calcular quantidades proporcionais por meio da multiplicação.

A Figura 68 traz um exemplo de uma sequência proporcional; neste caso, o estudante deveria calcular a quantidade de patas de acordo com a quantidade de abelhas. No quadro, estão em vermelho as respostas que os estudantes deveriam dar.

tf1.1 — Calcular quantidades que formam uma sequência numérica dada pela multiplicação da posição do termo por um certo valor.

τf1.1.1 — Fazer uma contagem “pulando” certa quantidade (5) de números, a partir de um determinado número (12).

τf1.1.2 — Adicionar certa quantidade (6) de unidades ao termo anterior para obter o termo seguinte.

τf1.1.3 — Escrever a sequência de múltiplos (de 6) a partir de certo número (18).

τf1.1.4 — Multiplicar o número referente à posição do termo por um certo número.

O respaldo das técnicas está na Aritmética, com as operações de multiplicação e de adição ou na sequência numérica, quando a tarefa é resolvida por meio de contagem.

Figura 68: Exemplo de sequência de quantidades proporcionais.

▶ COMPLETE O QUADRO ABAIXO COM O NÚMERO DE PERNAS, DE ACORDO COM O NÚMERO DE ABELHAS.

ABELHAS	1	2	3	4	5
PATAS	6	12	18	24	30

Fonte: 1A19, p. 148.

Selecionamos o problema da Figura 69 por entender que, dentre os problemas de multiplicação, esse tipo implica no uso da proporcionalidade. O problema solicita que os alunos calculem quanto custaria uma quantidade de cadernos. Até o 3º ano, costumam ser trabalhados apenas os números naturais, os quais, neste caso, não permitem descobrir o valor unitário do caderno. E mesmo que os alunos conhecessem os racionais, como se trata de um contexto monetário, não há um valor exato em reais e centavos para uma unidade do caderno, por isso a única técnica possível é o uso da proporção. O respaldo da técnica permanece no campo da Aritmética, utilizando a ideia de proporcionalidade da multiplicação.

tf1.2 — Calcular uma quantidade por meio de uma relação proporcional não unitária.

τf1.2.1 — Multiplicar o preço proporcionalmente à quantidade de produtos. Neste caso, é conhecido o valor de três cadernos e deseja-se descobrir o valor de seis cadernos, ou seja, o dobro. Portanto, basta multiplicar o preço por dois.

Figura 69: Exemplo de problema que faz uso da proporcionalidade.

b) Paulo comprou 3 cadernos e pagou R$ 14,00. Quanto pagaria se tivesse comprado 6 cadernos desse tipo? R$ 28,00

Fonte: 3A16, p. 184.

O Quadro 27 apresenta a distribuição, ao longo dos três anos analisados, do tipo de tarefa TF1, que utiliza a proporcionalidade.

Quadro 28: Distribuição das tarefas que utilizam proporcionalidade.

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de tarefa (TF)</th><th colspan="2">Tarefa (tf)</th><th>1A16</th><th>1A19</th><th>2A16</th><th>2A19</th><th>3A16</th><th>3A19</th></tr>
<tr><td rowspan="2">TF1</td><td rowspan="2">Calcular quantidades proporcionais por meio da multiplicação.</td><td>tf1.1</td><td>Calcular quantidades que formam uma sequência numérica dada pela multiplicação da posição do termo por um certo valor.</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>tf1.2</td><td>Calcular uma quantidade por meio de uma relação proporcional não unitária.</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração da autora.

Em relação ao cálculo de quantidades proporcionais, houve uma diminuição da tarefa tf1.1 no 1º e no 3º ano, e a descontinuidade da tarefa tf1.2, para a qual a ideia de proporcionalidade da multiplicação era necessária.

O tipo de tarefa TF2 trata do estabelecimento de equivalências e aparece na *unidade temática* Grandezas e Medidas, na relação entre unidades de medidas de mesma grandeza. Nestes casos, o discurso tecnológico-teórico que dá sustentação é o sistema de unidades e medidas utilizado em cada tarefa e a Aritmética, quando há necessidade de realizar algum cálculo. A Figura 70 apresenta uma situação de conversão entre metros e centímetros.

TF2 — Estabelecer equivalências entre unidades de medida.

tf2.1 — Estabelecer equivalência entre unidades de medida de mesma grandeza (tempo, comprimento, massa, capacidade etc.).

τf2.1.1 — Estabelecer a proporção multiplicando a quantidade de metros por 100; neste caso, um metro, 100 cm (1 x 100 = 100).

τf2.1.2 — Por se tratar de um metro, essa correspondência costuma ser memorizada, então basta recorrer à informação já aprendida ou a algum material de pesquisa.

Figura 70: Exemplo de equivalência entre unidades de medida de mesma grandeza.


5. QUANTOS CENTÍMETROS SÃO NECESSÁRIOS PARA COMPLETAR UM METRO? 100 centímetros.

Fonte: 1A19, p. 129.

O Quadro 28 apresenta a distribuição, nos seis livros analisados, dos tipos de tarefa TF2, que tratam do estabelecimento e da justificativa de equivalências.

Quadro 29: Distribuição das tarefas de estabelecimento e de justificativa de equivalências.

Tipo de tarefa (TF)		**Tarefa (tf)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TF2	Estabelecer equivalências entre unidades de medida.	tf2.1	Estabelecer equivalência entre unidades de medida de mesma grandeza (tempo, comprimento, massa, capacidade, etc).	9	2	6	6	6	3

Fonte: elaboração da autora.

O quadro aponta para uma diminuição da quantidade de vezes em que as tarefas tf2.1 aparece, mas continua sendo abordada nos três anos.

O tipo de tarefa TF3 trata de transformações desconhecidas, e o suporte de suas técnicas estão no campo da Aritmética. A Figura 71 apresenta uma atividade em que é necessário verificar qual a transformação que leva de um número até o outro.

Embaixo de cada seta está descrito em vermelho a cor que cada seta deveria ser pintada.

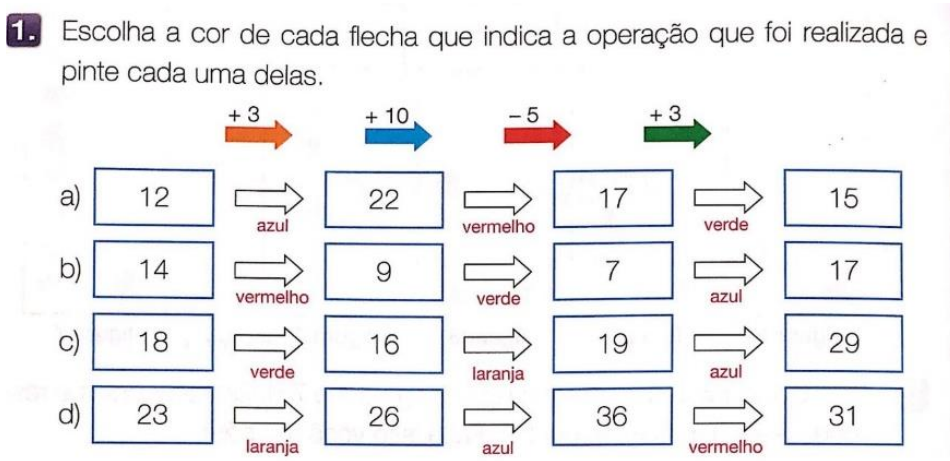
TF3 — Encontrar a transformação desconhecida.

tf3.1 — Determinar a transformação aplicada em um valor inicial para transformá-lo no valor final.

τf3.1.1 — Aplicar cada transformação proposta até encontrar o resultado.

τf3.2.1 — Por se tratar de adição e subtração, é possível verificar se o valor aumenta ou diminui. Se diminuir, há apenas uma opção de subtração. Se aumentar, subtrair o valor inicial do final para encontrar a parcela que será adicionada.

Figura 71: Exemplo de identificação de transformação.



Fonte: 3A16, p. 220.

O Quadro 29 resume a distribuição do tipo de tarefa TF5, encontrar a transformação desconhecida, nos livros analisados.

Quadro 30: Distribuição da tarefa de determinação de transformação desconhecida.

Tipo de tarefa (TF)		Tarefa (tf)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TF3	Encontrar a transformação desconhecida.	tf3.1	Determinar a transformação aplicada em um valor inicial para transformá-lo no valor final.	0	0	0	0	49	0

Fonte: elaboração da autora.

O tipo de tarefa referente a transformações desconhecidas é descontinuado na edição atual. Em geral, percebemos que o *assunto* de Relações funcionais já era tratado na edição anterior, por meio da proporcionalidade da multiplicação, da equivalência entre unidades de medidas de mesma grandeza e de transformações desconhecidas. Na edição atual, sofreu diminuição com a redução da quantidade de algumas tarefas (tf1.1 e tf2.1) e descontinuidade de outras (tf1.2 e tf3.1).

5.3.7 Sequências

O *assunto* Sequências se mostrou muito presente nos livros analisados, por isso juntamos a categoria I — prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos — e parte da categoria J — identificar e descrever padrões numéricos e geométricos — neste *assunto*.

Os tipos de tarefa de TS1 a TS4 tratam de representar ou descrever elementos ausentes de sequências repetitivas ou recursivas. E o tipo de tarefa TS5 trata da posição de um elemento dada uma característica, que também consideramos tratar de elementos ausentes. Esse tópico é extenso e algumas tarefas apresentam técnicas muito semelhantes ou até iguais. Isso se deve a dois principais fatores.

O primeiro é o fato de entendermos que cada tipo de tarefa tem uma relação com o verbo que a descreve (CHEVALLARD, 1999), e mesmo sendo semelhante, optamos por separar atividades em que é solicitada a representação da descrição dos elementos ausentes. O segundo é por entendermos que cada tarefa tem um objeto preciso, e por isso dividimos um tipo de tarefa em algumas tarefas, considerando os detalhes de cada uma. Para as sequências repetitivas, o respaldo “tecnológico-teórico” está imbricado na técnica de repetir o motivo inicial da sequência. Já as sequências recursivas normalmente têm seu suporte associado à lei de formação da sequência, geralmente relacionada à Aritmética.

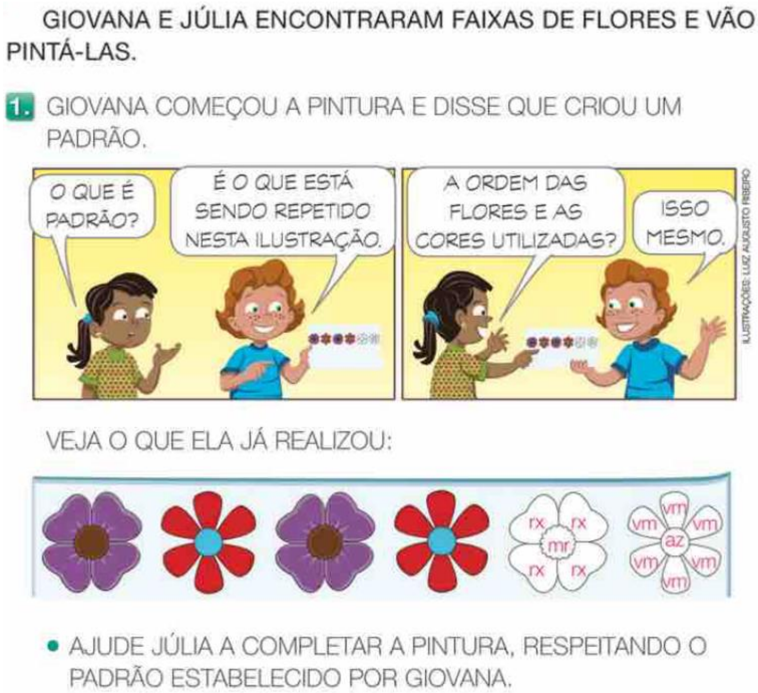
As atividades apresentadas nas figuras 72, 73 e 74 solicitam aos estudantes representar elementos de uma sequência repetitiva. Na Figura 72, os elementos dão continuidade à sequência; na Figura 73, os elementos estão no meio da sequência; e na Figura 74, o elemento é solicitado de acordo com sua posição. As respostas estão apresentadas em vermelho.

TS1 — Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva.

ts1.1 — Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

$\boldsymbol{\tau}$s1.1.1 — Representar os elementos seguintes, de acordo com o motivo inicial, dando continuidade à sequência.

Figura 72: Exemplo de representação de elementos dando continuidade à sequência repetitiva.



Fonte: 1A19, p. 46.

ts1.2 — Representar elementos ausentes no meio de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

τs1.2.1 — Representar os elementos faltantes no meio da sequência, de acordo com o motivo inicial.

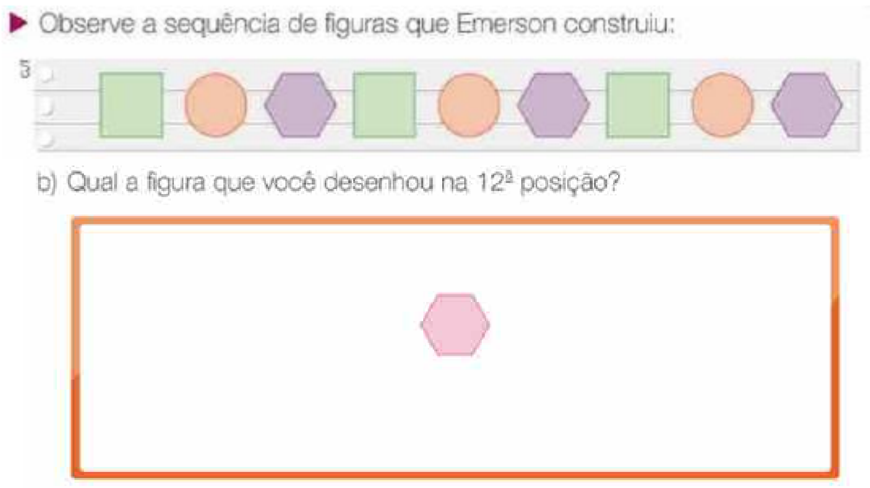
Figura 73: Exemplo de representação de elementos no meio da sequência repetitiva.

Fonte: 3A19, p. 84.

ts1.3 — Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas), a partir de sua posição.

τs1.3.1 — Verificar quantos elementos há no motivo inicial e verificar qual é o elemento que se repetirá na posição indicada. Neste caso, o motivo inicial da sequência possui 3 elementos, então o quadrado, que é o primeiro elemento, se repetirá nas posições 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 etc.

Figura 74: Exemplo de representação de elemento de acordo com sua posição na sequência repetitiva.



Fonte: 3A19, p. 85.

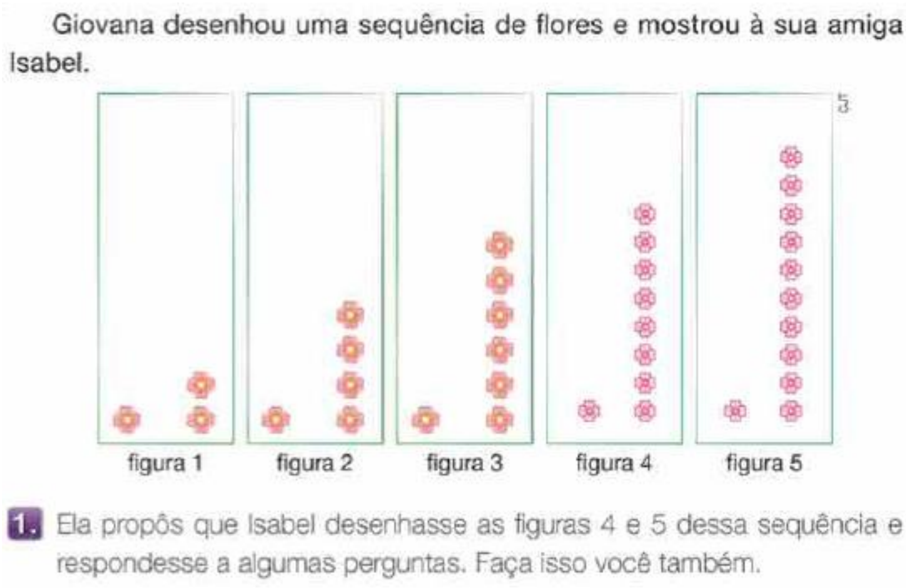
TS2 — Representar elementos ausentes de uma sequência recursiva.

A Figura 75 mostra uma atividade para representar elementos de uma sequência recursiva ilustrada. Os 4º e 5º retângulos apresentam a resposta do livro do professor.

ts2.1 — Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva aditiva, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas.

τs2.1.1 — Modificar o elemento anterior de acordo com a lei de formação da sequência para formar o próximo elemento, acrescentando sempre a mesma quantidade de elementos. Neste caso, acrescentar à fileira da direita duas flores acima das demais em relação ao elemento anterior.

Figura 75: Exemplo de representação de elementos dando continuidade à sequência recursiva ilustrada.



Fonte: 3A19, p.189.

As figuras 76, 77 e 78 tratam de atividades em que o aluno representa elementos de uma sequência recursiva numérica aditiva, dando continuidade a ela. A atividade da Figura 77 apresenta um caso particular em que uma técnica diferente pode ser usada; e a atividade da Figura 78 é apresentada por meio de um quadro em que os números estão dispostos em 10 colunas.

ts2.2 — Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica aditiva.

τs2.2.1 — Fazer uma contagem “pulando” certa quantidade de números, a partir de um determinado número (neste caso, “pulando” um número a partir de 35).

τs2.2.2 — Adicionar certa quantidade de unidades (neste caso, 2 unidades) ao termo anterior para obter o termo seguinte.

τs2.2.3 — Escrever a sequência de números ímpares a partir de certo número (35).

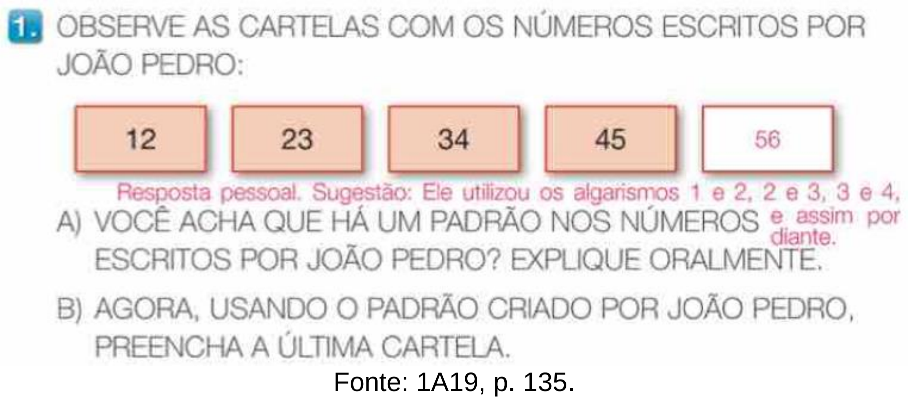
Figura 76: Exemplo de representação de elementos dando continuidade à sequência recursiva aditiva.

Fonte: 1A19, p. 90.

Consideramos interessante acrescentar que, em alguns casos, uma sequência recursiva numérica aditiva pode apresentar um padrão posicional na formação de seus numerais, permitindo uma quarta técnica. É o caso da sequência a seguir, em que é adicionado 11 ao elemento anterior, formando uma sequência em que o algarismo das unidades do elemento anterior ocupa a posição da dezena do elemento seguinte e o algarismo da unidade é seu sucessor.

τs2.2.4 — Repetir o algarismo do termo anterior, da ordem das unidades, na ordem das dezenas e escrever o algarismo seguinte a ele na ordem das unidades.

Figura 77: Exemplo de representação de elementos dando continuidade à sequência recursiva aditiva que aceita outra técnica.



Fonte: 1A19, p. 135.

Achamos interessante também a apresentação a seguir de uma sequência aditiva, em que ela é apresentada dando destaque aos números posicionados em um quadro de 10 linhas e 10 colunas com os números de 1 a 100. Não é uma tarefa diferente, apenas outra forma de apresentação.

Figura 78: Exemplo de representação de elementos dando continuidade à sequência recursiva aditiva em um quadro.

A PROFESSORA ARLETE PEDIU AOS ALUNOS QUE PREENCHESSEM UM QUADRO COM NÚMEROS DE 1 A 100.

EM SEGUIDA, ELES DEVERIAM CIRCULAR OS NÚMEROS DE 4 EM 4, COMEÇANDO PELO NÚMERO 3.

JÚLIO COMEÇOU A REALIZAR A TAREFA. OBSERVE:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. AGORA É COM VOCÊ. CIRCULE OS CINCO PRÓXIMOS NÚMEROS. QUAIS SÃO ELES? 31, 35, 39, 43 e 47.

Fonte: 2A19, p. 131.

A Figura 79 apresenta uma atividade em que os estudantes devem completar uma sequência recursiva subtrativa. Em vermelho, estão as respostas que os estudantes devem fornecer.

ts2.3 — Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica subtrativa.

τs2.3.1 — Fazer uma contagem decrescente, partindo de um certo número (23).

τs2.3.2 — Subtrair uma unidade do termo anterior para obter o termo seguinte.

Figura 79: Exemplo de representação de elementos dando continuidade à sequência recursiva subtrativa.

2. AGORA, OS ALUNOS DEVERIAM COMPLETAR AS SEQUÊNCIAS, DE UM EM UM, DO NÚMERO MAIOR PARA O MENOR. FAÇA VOCÊ TAMBÉM.

A)	25	24	23	22	21	20

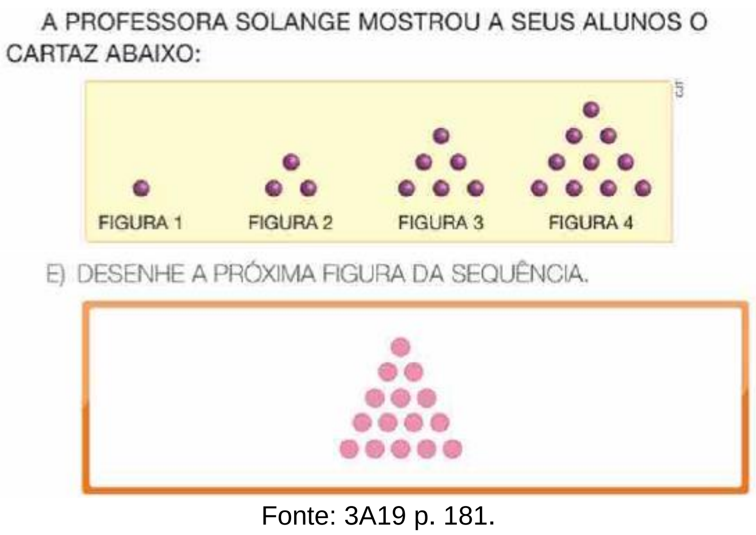
Fonte: 1A19, p. 114.

A Figura 80 traz uma sequência que, além de ser recursiva, o acréscimo não é constante, trata-se da sequência de números triangulares em que o incremento é sempre uma unidade maior do que o anterior. Do 1º para o 2º elemento foram acrescentados dois objetos; do 2º para o 3º, três; do 3º para o 4º, quatro objetos, e assim por diante. A atividade propõe que outros elementos sejam representados, dando continuidade à sequência. A resposta esperada dos alunos está na cor rosa, dentro do retângulo.

ts2.4 — Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva aditiva, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, em que o acréscimo não é constante.

τs2.4.1 — Modificar o elemento anterior de acordo com a lei de formação da sequência para formar o próximo elemento acrescentando diferentes quantidades de objetos. Neste caso, acrescentar à base do triângulo uma fileira de círculos contendo um círculo a mais que a última fileira.

Figura 80: Exemplo de representação de elementos dando continuidade à sequência recursiva aditiva em que o acréscimo não é constante.



Fonte: 3A19 p. 181.

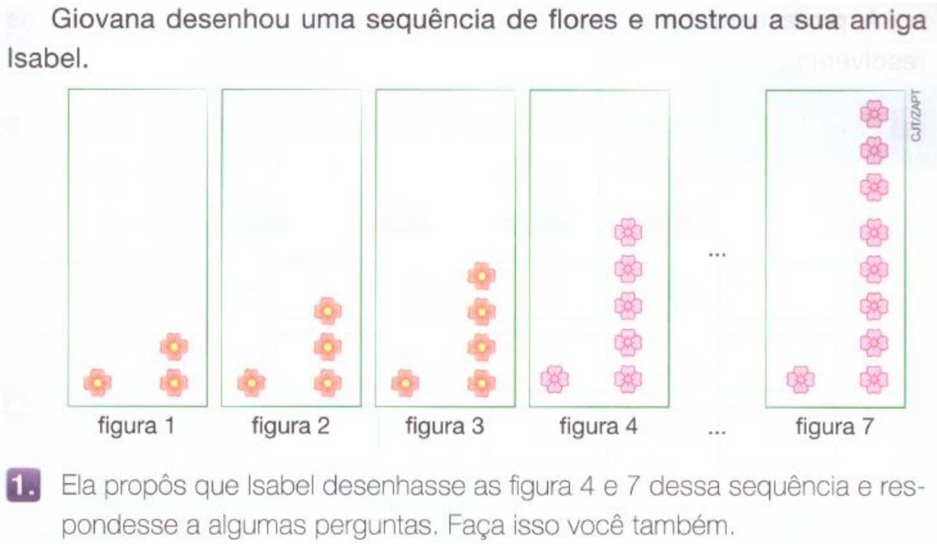
Na Figura 81 temos uma atividade muito semelhante à apresentada na Figura 75. Porém, na edição de 2016, apresentada na Figura 81, há um salto na representação que deve ser feita; dessa forma, é solicitada a representação de acordo com a posição. As ilustrações na cor rosa são as respostas esperadas dos estudantes.

ts2.5 — Representar elementos ausentes de uma sequência recursiva aditiva de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de sua posição.

τs2.5.1 — Contar quantos objetos haverá na posição em questão e representar os elementos.

τs2.5.2 — Criar uma generalização a partir da posição do elemento. Neste caso, há sempre duas flores a mais do que a posição do elemento na sequência.

Figura 81: Exemplo de representação de elementos de acordo com sua posição em uma sequência recursiva ilustrada.


Giovana desenhou uma sequência de flores e mostrou a sua amiga Isabel.

1. Ela propôs que Isabel desenhasse as figura 4 e 7 dessa sequência e respondesse a algumas perguntas. Faça isso você também.

Fonte: 3A16, p. 219.

O Quadro 30 resume a distribuição, ao longo dos seis livros dos três primeiros anos do Ensino Fundamental, dos tipos de tarefa de TS1 e TS2, a respeito da representação de elementos ausentes nas sequências.

Quadro 31: Distribuição das tarefas de representação de elementos ausentes em sequências.

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de tarefa (TS)</th><th colspan="2">Tarefa (ts)</th><th>1A16</th><th>1A19</th><th>2A16</th><th>2A19</th><th>3A16</th><th>3A19</th></tr>
<tr><td rowspan="2">TS1</td><td rowspan="2">Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva.</td><td>ts1.1</td><td>Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>ts1.2</td><td>Representar elementos ausentes no meio de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr>
</table>

		ts1.3	Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas), a partir de sua posição.	0	0	0	0	1	1
TS2	Representar elementos ausentes de uma sequência recursiva.	ts2.1	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva aditiva, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas.	0	0	0	0	0	1
		ts2.2	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica aditiva.	5	6	8	10	7	9
		ts2.3	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica subtrativa.	7	7	3	3	0	2
		ts2.4	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva aditiva, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, em que o acréscimo não é constante.	0	0	2	2	0	0
		ts2.5	Representar elementos ausentes de uma sequência recursiva aditiva de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de sua posição.	0	0	0	0	2	0

Fonte: elaboração da autora.

Os tipos de tarefa relacionados à representação de elementos ausentes foram ampliados, as tarefas ts1.1 e ts2.3 ficaram distribuídas ao longo dos três anos, e antes apareciam em apenas dois dos três anos. As tarefas ts1.2 e ts2.1 foram acrescentadas na edição atual. A tarefa ts2.2 teve um aumento em sua quantidade. A única redução foi a descontinuidade da tarefa ts2.5, referente à posição de elementos ausentes.

As atividades apresentadas nas figuras 82, 83 e 84 solicitam aos estudantes descrever elementos de uma sequência repetitiva. Na Figura 82, os elementos dão continuidade à sequência; na Figura 83, os elementos estão no meio da sequência; e na Figura 84 o elemento é solicitado de acordo com sua posição. As respostas estão apresentadas na cor vermelha.

TS3 — Descrever elementos ausentes de uma sequência repetitiva.

ts3.1 — Descrever elementos ausentes dando continuidade a uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

τs3.1.1 — Descrever a característica dos elementos seguintes da sequência dando continuidade ao trecho apresentado, de acordo com o motivo inicial.

Figura 82: Exemplo de descrição de elementos dando continuidade à sequência repetitiva.

Fonte: 1A19, p. 47.

ts3.2 — Descrever elementos ausentes no meio de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

τs3.2.1 — Descrever a característica dos elementos faltantes no meio da sequência, de acordo com o motivo inicial.

Figura 83: Exemplo de descrição de elementos no meio da sequência repetitiva.

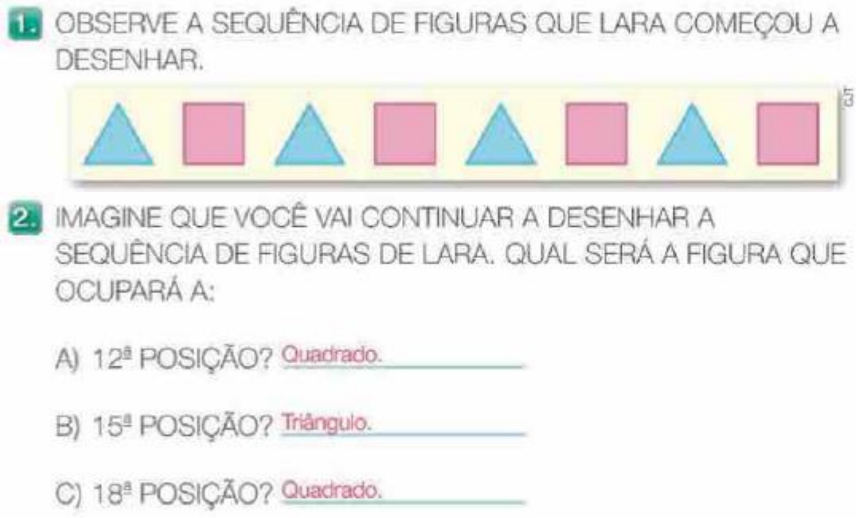
Fonte: 3A19, p. 84.

ts3.3 — Descrever elementos ausentes de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas), a partir de sua posição.

*τ*s3.3.1 — Dar continuidade à sequência, de acordo com o motivo inicial, até chegar à posição indicada.

*τ*s3.3.2 — Observar a regularidade da sequência de acordo com o motivo inicial. Neste caso, o triângulo ocupa as posições ímpares, e o quadrado, as posições pares.

Figura 84: Exemplo de descrição de elementos de acordo com sua posição na sequência repetitiva.



Fonte: 2A19, p. 31.

Consideramos que os dias da semana também são uma sequência repetitiva. E que, conforme atividade da Figura 85, descobrir o dia da semana é um exemplo contextualizado da mesma tarefa.

Figura 85: Exemplo de dias da semana como sequência repetitiva.

Fonte: 1A19, p. 136.

TS4 — Descrever elementos ausentes de uma sequência recursiva.

As figuras 86 e 87 trazem atividades em que o aluno deve descrever elementos de uma sequência recursiva aditiva, respectivamente, dando continuidade a ela, e completando elementos no meio da sequência.

ts4.1 — Descrever elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica aditiva.

τs4.1.1 — Fazer uma contagem “pulando” certa quantidade de números, a partir de um determinado número (neste caso, “pulando” dois números a partir de 8).

τs4.1.2 — Adicionar certa quantidade de unidades (neste caso, 2 unidades) ao termo anterior para obter o termo seguinte.

τs4.1.3 — Escrever a sequência de números pares a partir de certo número (8).

Figura 86: Exemplo de descrição de elementos dando continuidade à sequência recursiva aditiva.

Fonte: 3A19, p. 44.

ts4.2 — Descrever elementos ausentes no meio de uma sequência recursiva numérica aditiva.

τs4.2.1 — Fazer uma contagem "pulando" certa quantidade de números, a partir de um determinado número (neste caso, "pulando" dois números a partir de 101).

τs4.2.2 — Adicionar certa quantidade de unidades (neste caso, 2 unidades) ao termo anterior para obter o termo seguinte.

τs4.2.3 — Escrever a sequência de números ímpares a partir de certo número (101).

Figura 87: Exemplo de descrição de elementos no meio da sequência recursiva aditiva.

Fonte: 3A19, p. 36.

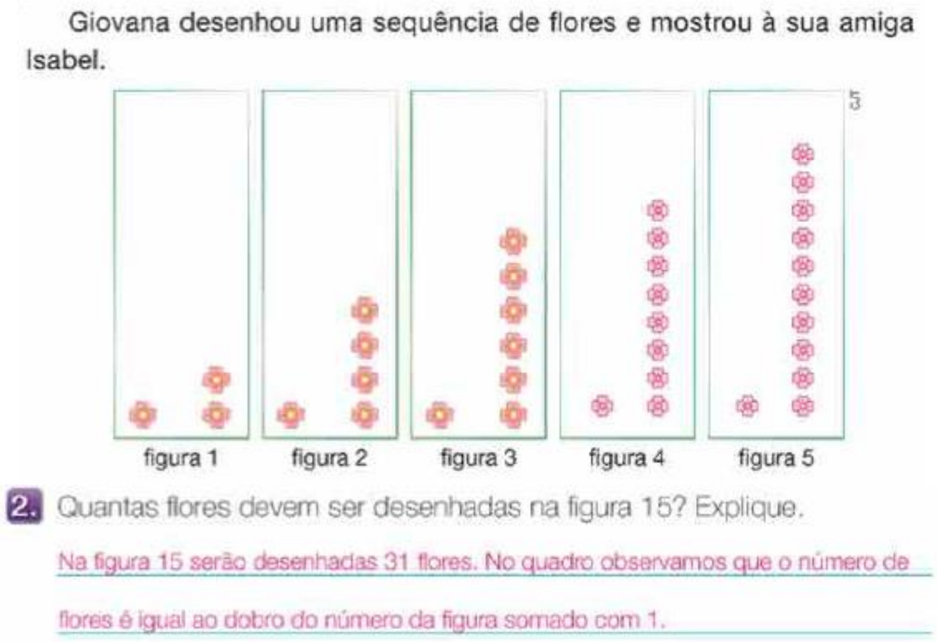
Na atividade da Figura 88 os alunos devem descrever o elemento da sequência de acordo com a posição. A resposta que os alunos deveriam fornecer está em vermelho.

ts4.3 — Descrever elementos ausentes de uma sequência recursiva aditiva de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de sua posição.

τs4.3.1 — Contar quantos objetos haverá em cada elemento até chegar na posição em questão e descrever os elementos.

τs4.3.2 — Criar uma generalização a partir da posição do elemento. Neste caso, há sempre uma flor na fileira da esquerda, e a quantidade de flores na fileira da direita corresponde a duas vezes a posição do elemento.

Figura 88: Exemplo de descrição de elementos de acordo com sua posição na sequência recursiva aditiva ilustrada.



Fonte: 3A19, p. 189.

ts4.4 — Descrever elementos ausentes de uma sequência recursiva numérica aditiva, a partir de sua posição.

τs4.4.1 — Fazer uma contagem “pulando” certa quantidade de números, a partir de um determinado número (neste caso, “pulando” quatro números a partir de 2016).

τs4.4.2 — Adicionar certa quantidade de unidades (neste caso, 4 anos) ao termo anterior para obter o termo seguinte.

τs4.4.3 — Escrever a sequência de números múltiplos de 4 a partir de 2016.

Aqui, consideramos que a atividade contextualizada nas edições dos jogos olímpicos, na Figura 89, também configura uma sequência.

Figura 89: Exemplo de descrição de elementos de acordo com sua posição na sequência recursiva aditiva.

Roberto realizou uma pesquisa e ficou sabendo que os Jogos Olímpicos de Verão em sua 31ª edição aconteceram na cidade do Rio de Janeiro no ano de 2016. A cerimônia de abertura foi realizada no dia 5 de agosto e o encerramento ocorreu em 21 de agosto. As duas cerimônias aconteceram no Estádio do Maracanã, que tem capacidade para receber 82 000 espectadores.

O evento teve a participação de aproximadamente 10 700 atletas de 205 nações e 2 delegações especiais (Atletas Olímpicos Independentes e Atletas Olímpicos Refugiados).

1. Os Jogos Olímpicos de Verão acontecem de 4 em 4 anos. Em que ano deve ocorrer a 32ª edição dos Jogos? E a 33ª edição? 2020; 2024.

Fonte: 3A19, p. 106.

A Figura 90 traz uma atividade em que a característica do elemento de uma sequência recursiva aditiva ilustrada é descrita, e o aluno deve descobrir qual é sua posição. Em vermelho, está descrita a resposta.

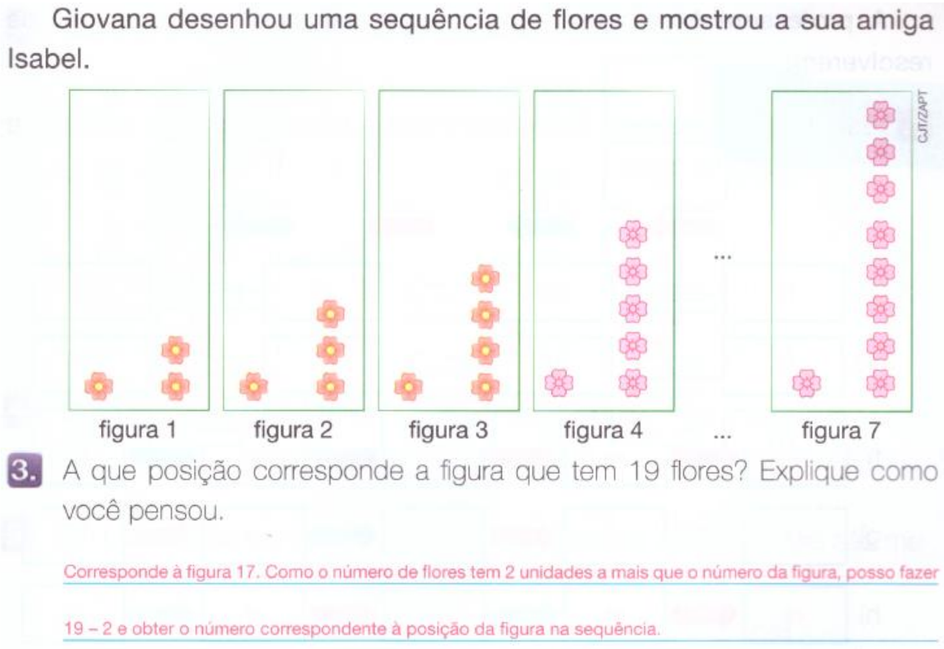
TS5 — Descrever a posição de um elemento de uma sequência.

ts5.1 — Descrever a posição de um elemento de uma sequência recursiva aditiva, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de uma característica.

$\boldsymbol{\tau}$s5.1.1 — Contar quantos objetos haverá nas posições seguintes até encontrar a quantidade em questão.

$\boldsymbol{\tau}$s5.1.2 — Criar uma generalização a partir da posição do elemento; neste caso, há sempre duas flores a mais do que a posição do elemento. E aplicar a operação inversa, subtraindo dois da quantidade de flores e encontrando a posição do elemento.

Figura 90: Exemplo de descrição da posição de um elemento em uma sequência.



Fonte: 3A16, p. 219.

O Quadro 31 resume a distribuição dos tipos de tarefa de TS3 a TS5, a respeito da descrição de elementos nas sequências.

Quadro 32: Distribuição das tarefas de descrição de elementos em sequências.

Tipo de tarefa (TS)		**Tarefa (ts)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TS3	Descrever elementos ausentes de uma sequência repetitiva.	ts3.1	Descrever elementos ausentes dando continuidade a uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).	2	4	0	0	0	0
		ts3.2	Descrever elementos ausentes no meio de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).	0	0	0	0	0	2
		ts3.3	Descrever elementos ausentes de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas), a partir de sua posição.	2	2	0	5	11	12

TS4	Descrever elementos ausentes de uma sequência recursiva.	ts4.1	Descrever elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica aditiva.	0	0	1	3	3	4
		ts4.2	Descrever elementos ausentes no meio de uma sequência recursiva numérica aditiva.	0	0	0	0	1	1
		ts4.3	Descrever elementos ausentes de uma sequência recursiva aditiva de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de sua posição.	0	0	0	0	1	1
		ts4.4	Descrever elementos ausentes de uma sequência recursiva numérica aditiva, a partir de sua posição.	0	0	0	0	0	2
TS5	Descrever a posição de um elemento de uma sequência.	ts5.1	Descrever a posição de um elemento de uma sequência recursiva aditiva, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de uma característica.	0	0	0	0	1	0

Fonte: elaboração da autora.

Os tipos de tarefa relacionados à descrição de elementos ausentes também foram ampliados com a distribuição ao longo dos três anos da tarefa ts3.3; as tarefas ts3.2 e ts4.4 foram acrescentadas na edição atual; e as tarefas ts3.1 e ts4.1 tiveram aumentos em suas quantidades. A tarefa ts5.1, referente à posição de elementos ausentes, foi descontinuada.

As tarefas TS6 e TS7 tratam da descrição da lei de formação das sequências. Nestes casos, o suporte "tecnológico-teórico" está junto da própria técnica.

As figuras 91, 92, 93 e 94 apresentam atividades em que os alunos devem explicitar a regra de formação das sequências propostas, respectivamente, sequência repetitiva; sequência recursiva aditiva; sequência recursiva subtrativa; e sequência recursiva multiplicativa.

TS6 — Descrever a regra de formação de uma sequência repetitiva.

ts6.1 — Descrever o motivo inicial de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

*τ*s6.1.1 — Descrever as características dos elementos que compõem o motivo inicial.

Figura 91: Exemplo de descrição da regra de formação de uma sequência repetitiva.

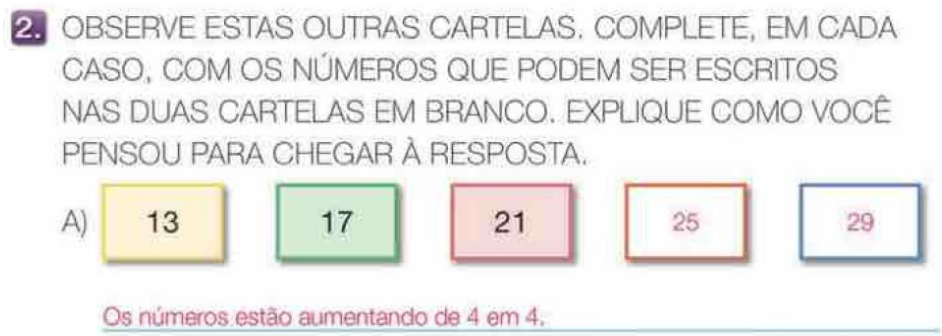
Fonte: 1A19, p. 134.

TS7 — Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva.

ts7.1 — Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva numérica aditiva.

*τ*s7.1.1 — Descrever que certa quantidade é acrescentada ao elemento anterior para encontrar o elemento seguinte.

Figura 92: Exemplo de descrição da regra de formação de uma sequência recursiva aditiva.

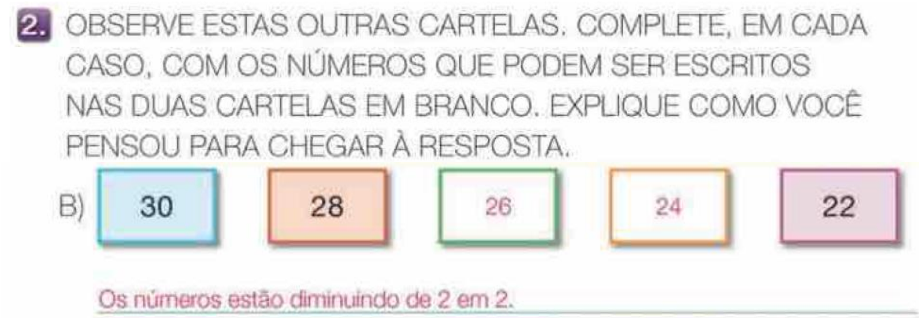


Fonte: 2A19, p. 202.

ts7.2 — Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva numérica subtrativa.

*τ*s7.2.1 — Descrever que certa quantidade é subtraída do elemento anterior para encontrar o elemento seguinte.

Figura 93: Exemplo de descrição da regra de formação de uma sequência recursiva subtrativa.


2. OBSERVE ESTAS OUTRAS CARTELAS. COMPLETE, EM CADA CASO, COM OS NÚMEROS QUE PODEM SER ESCRITOS NAS DUAS CARTELAS EM BRANCO. EXPLIQUE COMO VOCÊ PENSOU PARA CHEGAR À RESPOSTA.

B) 30 28 26 24 22

Os números estão diminuindo de 2 em 2.

Fonte: 2A19, p. 202.

ts7.3 — Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva numérica multiplicativa.

τs7.3.1 — Descrever que cada elemento é o número de sua posição multiplicado por certo número (neste caso, 4).

Aqui, novamente se trata de uma questão contextualizada, mas que consideramos análoga às questões de sequência.

Figura 94: Exemplo de descrição da regra de formação de uma sequência recursiva multiplicativa.


JORGE TRABALHA EM UMA FÁBRICA EM QUE SÃO FEITOS TESTES PARA ESTICAR UM TIPO DE CORDÃO.

VEJA OS RESULTADOS DOS TESTES NA TABELA ABAIXO:

RESULTADOS DOS TESTES

COMPRIMENTO DO CORDÃO (SEM ESTICAR)	COMPRIMENTO DO CORDÃO (ESTICADO AO MÁXIMO)
1 METRO	4 METROS
2 METROS	8 METROS
3 METROS	12 METROS
4 METROS	16 METROS
5 METROS	20 METROS

FONTE: JORGE.

▶ ANALISE A TABELA E RESPONDA:

A) O QUE VOCÊ CONCLUI A RESPEITO DOS TESTES QUE FORAM REALIZADOS?

O comprimento do cordão esticado ao máximo é 4 vezes o comprimento do cordão sem esticar.

Fonte: 2A19, p. 199.

O Quadro 32 sintetiza a distribuição do tipo de tarefa TS5 e TS6 sobre descrição da lei de formação de uma sequência, nos livros analisados.

Quadro 33: Distribuição das tarefas de descrição da lei de formação de sequências.

Tipo de tarefa (TS)		**Tarefa (ts)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TS6	Descrever a regra de formação de uma sequência repetitiva.	ts6.1	Descrever o motivo inicial de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).	2	2	0	3	0	1
TS7	Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva.	ts7.1	Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva numérica aditiva.	0	2	6	7	3	6
		ts7.2	Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva numérica subtrativa.	0	0	2	2	0	2
		ts7.3	Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva numérica multiplicativa.	0	0	1	1	0	0

Fonte: elaboração da autora.

Quanto à descrição da regra de formação de sequências, também há melhor distribuição; as tarefas ts6.1 e ts7.1 passam a ser abordadas ao longo dos três anos, e a habilidade ts7.2 é continuada para o 3º ano.

As tarefas TS8 e TS9 propõem a criação de sequências. No caso da tarefa TS9, os enunciados são amplos, por isso os apresentamos com o contexto da página, que foi o que direcionou a descrição do tipo de tarefa.

Na atividade da Figura 95 os estudantes devem criar uma sequência de cores para pintar cada ilustração. Neste caso, a resposta é pessoal.

TS8 — Criar uma sequência repetitiva.

ts8.1 — Criar uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

τs8.1.1 — Criar um motivo inicial variando as características dos elementos e repeti-lo algumas vezes.

Figura 95: Exemplo de criação de sequência repetitiva.

Fonte: 1A19, p. 89.

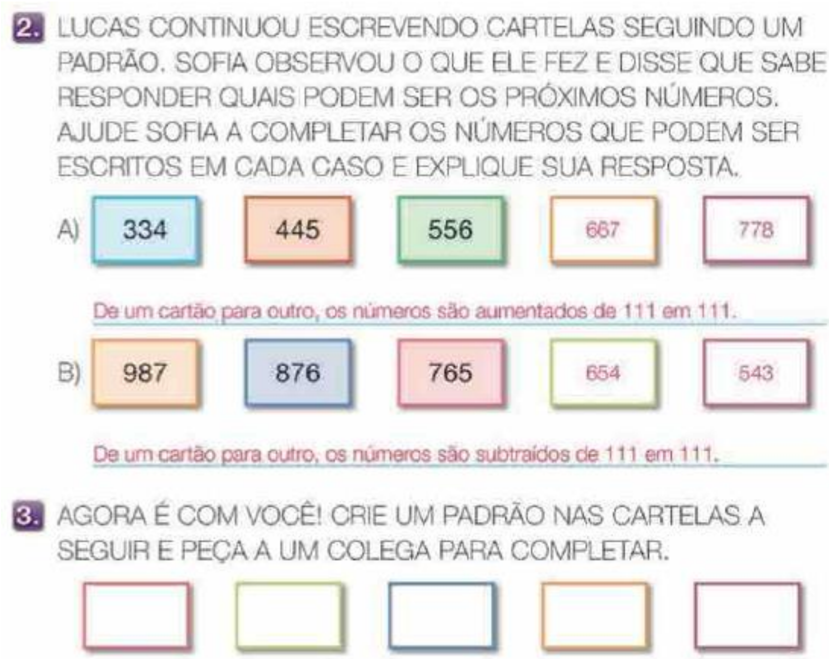
Nas figuras 96 e 97 são propostas nas atividades 3 de cada uma que os alunos criem uma sequência recursiva. Em geral, o tipo de sequência recursiva não é explicitado, mas é induzido pelo contexto. Na Figura 97, a atividade permite o uso de uma técnica a mais do que na Figura 96.

TS9 — Criar uma sequência recursiva.

ts9.1 — Criar uma sequência recursiva numérica aditiva ou subtrativa.

*τ*s9.1.1 — Criar uma lei de formação que consiste em acrescentar ou subtrair uma quantidade do elemento anterior, escolher um número para iniciar a sequência, e aplicar a regra criada para obter os termos seguintes.

Figura 96: Exemplo de criação de sequência recursiva.



2. LUCAS CONTINUOU ESCREVENDO CARTELAS SEGUINDO UM PADRÃO. SOFIA OBSERVOU O QUE ELE FEZ E DISSE QUE SABE RESPONDER QUAIS PODEM SER OS PRÓXIMOS NÚMEROS. AJUDE SOFIA A COMPLETAR OS NÚMEROS QUE PODEM SER ESCRITOS EM CADA CASO E EXPLIQUE SUA RESPOSTA.

A) 334 445 556 667 778

De um cartão para outro, os números são aumentados de 111 em 111.

B) 987 876 765 654 543

De um cartão para outro, os números são subtraídos de 111 em 111.

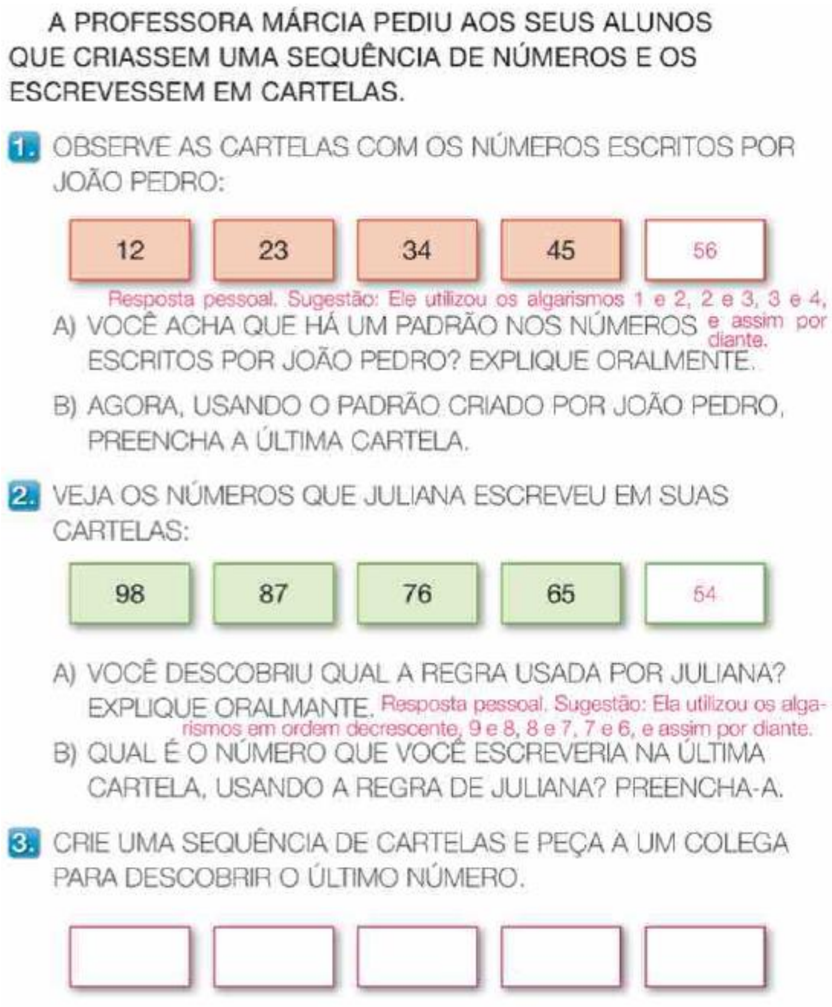
3. AGORA É COM VOCÊ! CRIE UM PADRÃO NAS CARTELAS A SEGUIR E PEÇA A UM COLEGA PARA COMPLETAR.

Fonte: 2A19, p. 203.

τs9.1.2 — Criar uma lei de formação a partir da ordem e da posição dos algarismos, escolher um número para iniciar a sequência, e aplicar a regra criada para obter os termos seguintes.

Conforme destacamos, na representação de elementos ausentes, na criação de sequências também é possível utilizar outra técnica, explorando um padrão posicional na formação de seus numerais.

Figura 97: Exemplo de criação de sequência recursiva que permite outra técnica.


A PROFESSORA MÁRCIA PEDIU AOS SEUS ALUNOS QUE CRIASSEM UMA SEQUÊNCIA DE NÚMEROS E OS ESCREVESSEM EM CARTELAS.

1. OBSERVE AS CARTELAS COM OS NÚMEROS ESCRITOS POR JOÃO PEDRO:

12	23	34	45	56

Resposta pessoal. Sugestão: Ele utilizou os algarismos 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, e assim por diante.

A) VOCÊ ACHA QUE HÁ UM PADRÃO NOS NÚMEROS ESCRITOS POR JOÃO PEDRO? EXPLIQUE ORALMENTE.

B) AGORA, USANDO O PADRÃO CRIADO POR JOÃO PEDRO, PREENCHA A ÚLTIMA CARTELA.

2. VEJA OS NÚMEROS QUE JULIANA ESCREVEU EM SUAS CARTELAS:

98	87	76	65	54

A) VOCÊ DESCOBRIU QUAL A REGRA USADA POR JULIANA? EXPLIQUE ORALMANTE. Resposta pessoal. Sugestão: Ela utilizou os algarismos em ordem decrescente, 9 e 8, 8 e 7, 7 e 6, e assim por diante.

B) QUAL É O NÚMERO QUE VOCÊ ESCREVERIA NA ÚLTIMA CARTELA, USANDO A REGRA DE JULIANA? PREENCHA-A.

3. CRIE UMA SEQUÊNCIA DE CARTELAS E PEÇA A UM COLEGA PARA DESCOBRIR O ÚLTIMO NÚMERO.

Fonte: 1A19, p. 135.

O Quadro 33 apresenta a distribuição dos tipos de tarefa TS8 e TS9 que envolvem a criação de sequências.

Quadro 34: Distribuição das tarefas de criação de sequências.

Tipo de tarefa (TS)		Tarefa (ts)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TS8	Criar uma sequência repetitiva.	ts8.1	Criar uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).	4	5	0	2	1	2
TS9	Criar uma sequência recursiva.	ts9.1	Criar uma sequência recursiva numérica aditiva ou subtrativa.	0	1	0	3	0	1

Fonte: elaboração da autora.

A criação de sequências é a grande novidade do *assunto* Sequências, com a entrada da criação de sequências recursivas (TS9), pois, na edição anterior, só havia a criação de sequências repetitivas no 1º e no 3º ano, que passou a ser distribuída ao longo dos três anos.

Os tipos de tarefas TS10 e TS11 tratam da verificação e da justificativa de elementos das sequências. A Figura 98 exemplifica, no item 2, uma atividade em que se deve verificar se o número 53 será circulado, ou seja, se ele pertence à sequência, e justificar a resposta. Em vermelho, estão apresentadas as respostas que devem ser fornecidas.

TS10 — Verificar se um elemento pertence a uma sequência recursiva.

ts10.1 — Verificar se um elemento pertence a uma sequência recursiva numérica aditiva.

$\boldsymbol{\tau}$s10.1. 1 — Dar continuidade à sequência, de acordo com a lei de formação, até chegar ao elemento; neste caso, ele pertenceria à sequência; ou até “passar” o elemento indicado; neste caso, ele não pertenceria à sequência.

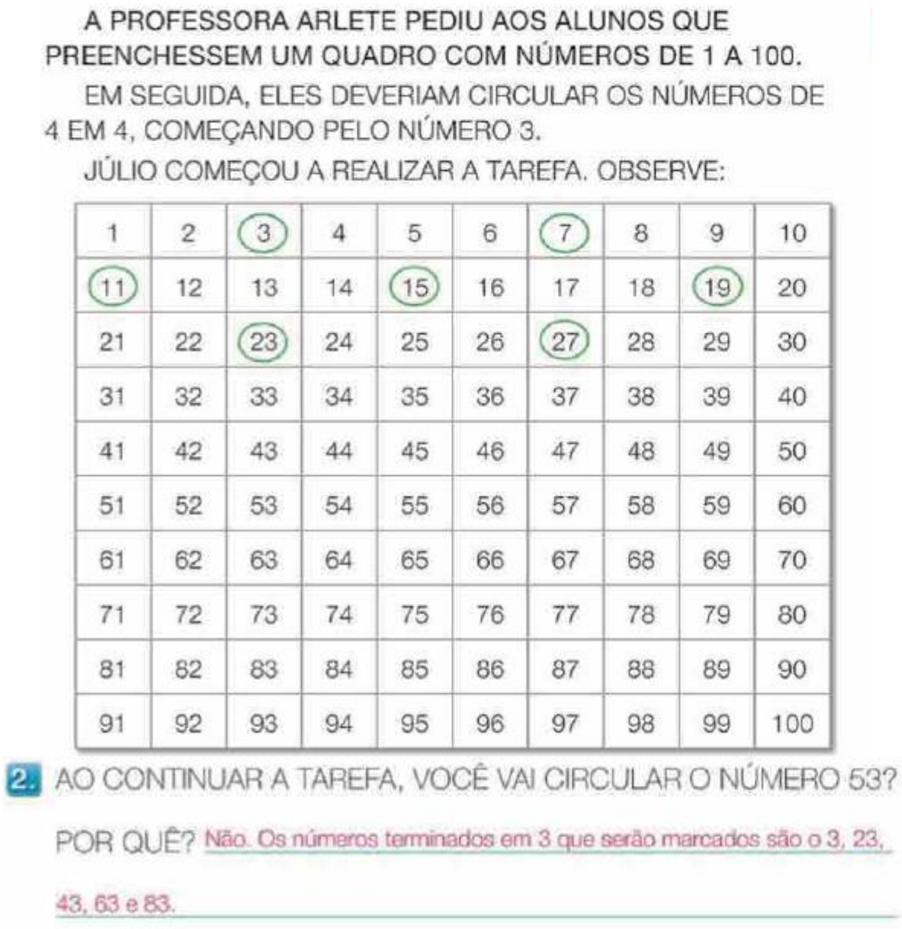
$\boldsymbol{\tau}$s10.1.2 — Observar a regularidade da sequência de acordo com a lei de formação e verificar se o elemento obedece à regularidade ou não. Neste caso, circula-se os números terminados em 3 e 7 nas linhas ímpares, e os números terminados em 1, 5 e 9 nas linhas pares.

TS11 — Justificar o pertencimento de um elemento a uma sequência recursiva.

ts11.1 — Justificar o pertencimento de um elemento a uma sequência recursiva numérica aditiva.

$\boldsymbol{\tau}$s11.1. 1 — Observar a regularidade da sequência de acordo com a lei de formação e justificar se o elemento obedece à regularidade ou não.

Figura 98: Exemplo de verificação e de justificativa de elementos pertencentes a uma sequência.



A PROFESSORA ARLETE PEDIU AOS ALUNOS QUE PREENCHESSEM UM QUADRO COM NÚMEROS DE 1 A 100.

EM SEGUIDA, ELES DEVERIAM CIRCULAR OS NÚMEROS DE 4 EM 4, COMEÇANDO PELO NÚMERO 3.

JÚLIO COMEÇOU A REALIZAR A TAREFA. OBSERVE:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. AO CONTINUAR A TAREFA, VOCÊ VAI CIRCULAR O NÚMERO 53?

POR QUÊ? Não. Os números terminados em 3 que serão marcados são o 3, 23, 43, 63 e 83.

Fonte: 2A19, p. 131.

O Quadro 34 resume a distribuição, nos seis livros, dos tipos de tarefa TS10 e TS11, sobre verificação e justificativa de elementos pertencentes a sequências.

Quadro 35: Distribuição das tarefas de verificação e de justificativa de elementos pertencentes a sequências.

Tipo de tarefa (TS)		**Tarefa (ts)**		**1A16**	**1A19**	**2A16**	**2A19**	**3A16**	**3A19**
TS10	Verificar se um elemento pertence a uma sequência recursiva.	ts10.1	Verificar se um elemento pertence a uma sequência recursiva numérica aditiva.	0	0	2	2	0	0
TS11	Justificar o pertencimento de um elemento a uma sequência recursiva.	ts11.1	Justificar o pertencimento de um elemento a uma sequência recursiva numérica aditiva.	0	0	2	2	0	1

Fonte: elaboração da autora.

Quanto à verificação e à justificativa do pertencimento de elementos a sequências, o que percebemos é a extensão da tarefa de justificativa para o 3º ano.

Os tipos de tarefa TS12 e TS13 tratam da descrição de regularidades observadas em sequências.

TS12 — Descrever regularidades em uma sequência repetitiva.

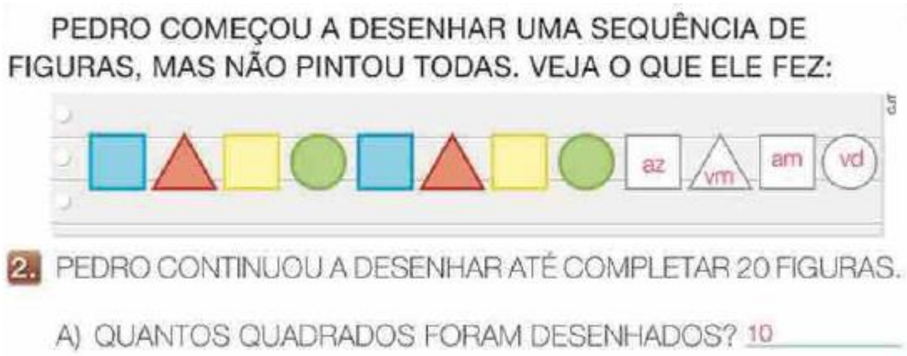
A Figura 99 apresenta uma atividade em que os alunos devem descobrir quantas vezes um dos elementos se repete dentre os primeiros 20 elementos da sequência. A resposta está em vermelho.

ts12.1 — Descrever quantas vezes um determinado elemento se repete em parte de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

τs12.1.1 — Contar a quantidade de vezes em que um elemento aparece em certa parte da sequência.

τs12.1.2 — Observar a regularidade do elemento; neste caso, o motivo inicial tem quatro elementos, sendo que dois deles são quadrados, portanto, ele aparece em metade dos elementos quando a quantidade é par.

Figura 99: Exemplo de descrição da ocorrência de certo elemento da sequência.



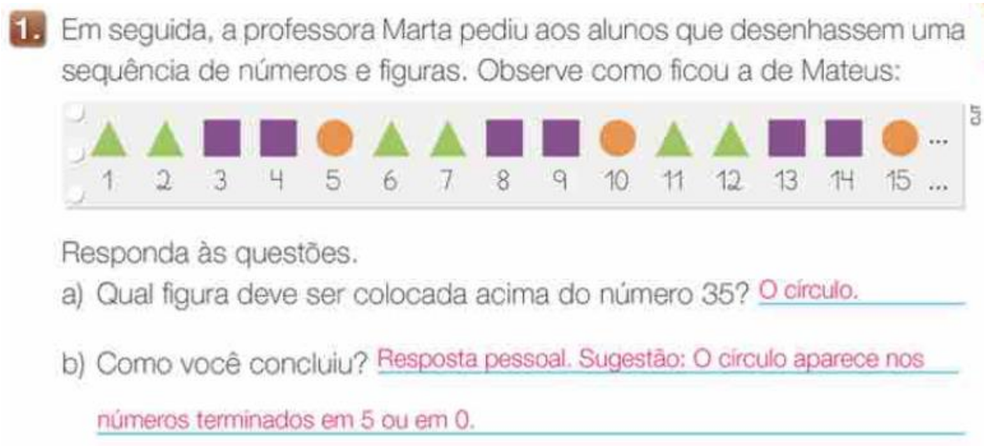
Fonte: 2A19, p. 154.

A atividade da Figura 100, além de questionar qual elemento ocuparia uma determinada posição, solicita que o aluno a justifique. Dessa forma, o aluno precisa descrever a regularidade que relaciona o elemento e a posição em que aparece.

ts12.2 — Descrever a regularidade com que um elemento se repete em uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

τs12.2.1 — Observar a regularidade com que determinado elemento aparece. No caso, o motivo inicial apresenta 5 elementos, o círculo aparece apenas uma vez no motivo inicial na 5ª posição, portanto, o círculo aparece em toda posição múltipla de 5, ou, ainda, nas posições terminadas em 0 ou 5.

Figura 100: Exemplo de descrição de regularidade em uma sequência repetitiva.



1. Em seguida, a professora Marta pediu aos alunos que desenhassem uma sequência de números e figuras. Observe como ficou a de Mateus:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...

Responda às questões.

a) Qual figura deve ser colocada acima do número 35? O círculo.

b) Como você concluiu? Resposta pessoal. Sugestão: O círculo aparece nos números terminados em 5 ou em 0.

Fonte: 3A19, p. 134.

TS13 — Descrever regularidades em uma sequência recursiva.

Na Figura 101, há uma atividade a respeito de características que todos os elementos da sequência têm em comum; neste caso, são múltiplos de cinco, por isso são terminados em 0 ou 5, conforme resposta em vermelho no item 2.

ts13.1 — Descrever características comuns a todos os elementos de uma sequência recursiva (numérica, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas).

τs13.1.1 — Observar e descrever que os elementos são o número de carrinhos multiplicados por cinco.

τs13.1.2 — Observar e descrever que os elementos são múltiplos de cinco, ou, ainda, terminados em 0 ou 5.

Figura 101: Exemplo de descrição de características comuns aos elementos de uma sequência.

OUTRO BRINQUEDO QUE AS CRIANÇAS ADORARAM FOI A MONTANHA-RUSSA. EM CADA CARRINHO CABEM 5 PESSOAS.

1. OBSERVE A CENA E COMPLETE O QUADRO:

NÚMERO DE CARRINHOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NÚMERO DE PESSOAS	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

2. VOCÊ PERCEBEU ALGO INTERESSANTE EM RELAÇÃO AO NÚMERO DE PESSOAS ANOTADO NESSE QUADRO? QUAL É?

Os números terminam em 0 ou em 5; os números aumentam de 5 em 5.

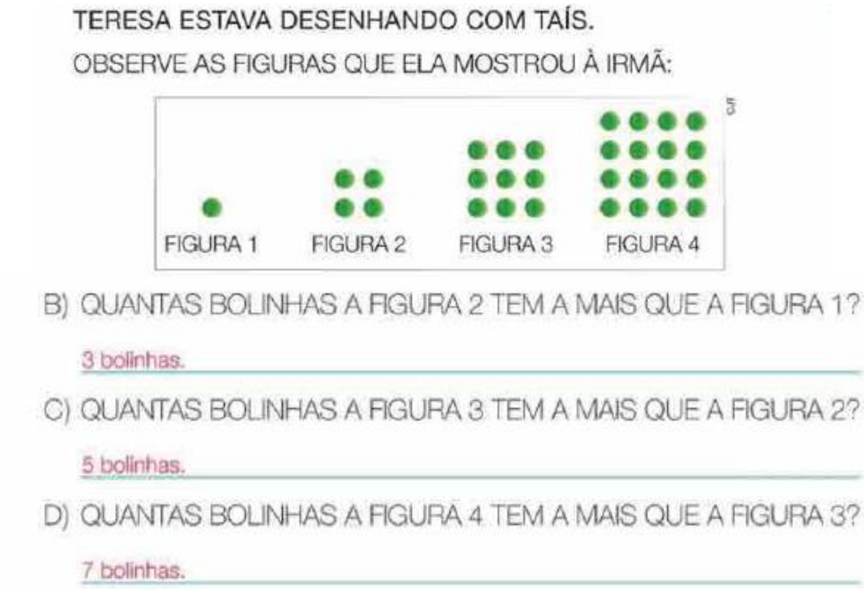
Fonte: 2A19, p. 120.

A Figura 102 apresenta uma atividade em que uma sequência de perguntas é feita a respeito da transformação do 1º elemento para o 2º; do 2º para o 3º; e do 3º para o 4º, induzindo à percepção da regra de formação da sequência. As respostas estão apresentadas na cor vermelha.

ts13.2 — Descrever a transformação entre elementos subsequentes em uma sequência recursiva aditiva de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, em que o acréscimo não é constante.

τs13.2.1 — Descrever a alteração feita no elemento anterior para gerar o elemento seguinte. Neste caso, a quantidade de bolinhas que foram acrescentadas.

Figura 102: Exemplo de descrição da transformação entre elementos de uma sequência recursiva.



Fonte: 2A19, p. 204.

Na atividade da Figura 103 os alunos devem completar a tabela, descrevendo a quantidade de objetos que cada elemento apresenta, de acordo com sua posição. Em vermelho, estão as repostas que os alunos devem fornecer.

ts13.3 — Descrever a quantidade de objetos de cada elemento de uma sequência recursiva aditiva, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de sua posição.

τs13.3.1 — Contar os objetos de cada elemento representado e representar os demais para contar os objetos.

τs13.3.2 — Contar os objetos de cada elemento representado e dar continuidade à contagem de objetos seguindo a regra de formação da sequência.

τs13.3.3 — Criar uma generalização a partir da posição do elemento. Neste caso, há sempre uma flor na fileira da esquerda, e a quantidade de flores na fileira da direita corresponde a duas vezes a posição do elemento.

Figura 103: Exemplo de descrição da quantidade de objetos de acordo com sua posição.

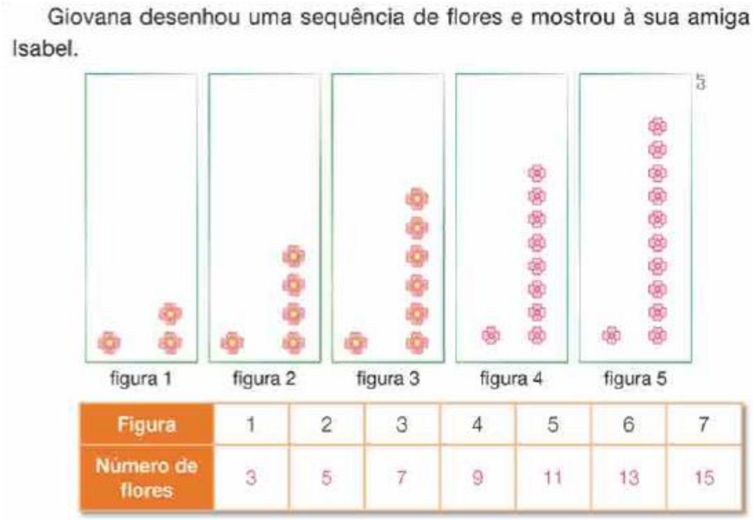


Figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de flores	3	5	7	9	11	13	15

Fonte: 3A19, p. 189.

Na Figura 104, podemos considerar que as quantidades calculadas compõem uma sequência, e as questões c) e d) indagam sobre regularidades nas quantidades pares e ímpares. Em vermelho, estão as respostas esperadas.

ts13.4 — Descrever características comuns a elementos de uma sequência recursiva de acordo com uma regularidade em sua posição (exemplo: posição par ou ímpar).

τs13.4.1 — Observar características em comum aos elementos pertencentes à sequência a partir de sua repetição e descrevê-las. Neste caso, observar as posições pares e ímpares dos elementos e descrever que as posições ímpares são terminadas em 5, e as posições pares, em 0.

Novamente, um exercício contextualizado, em que vemos como análogo ao trabalho com sequências.

Figura 104: Exemplo de descrição de características comuns com base em regularidades nas posições dos elementos.

A mãe de Renato, dona Márcia, trabalha em uma fábrica de brinquedos. Ela coloca 5 miniaturas de bonecas em caixas. Veja na ilustração ao lado.

▶ Complete o quadro abaixo e depois responda às questões:

Quantidade de caixas	Bonecas	Cálculo
1	5	1 × 5 = 5
2	10	2 × 5 = 10
3	15	3 × 5 = 15
4	20	4 × 5 = 20
5	25	5 × 5 = 25
6	30	6 × 5 = 30
7	35	7 × 5 = 35
8	40	8 × 5 = 40
9	45	9 × 5 = 45
10	50	10 × 5 = 50

c) O que acontece com o número de bonecas quando a quantidade de caixas é par? O número de bonecas é par e termina em zero.

d) O que acontece com o número de bonecas quando a quantidade de caixas é ímpar? O número de bonecas é ímpar e termina em cinco.

Fonte: 3A19, p. 55.

O Quadro 35 apresenta a distribuição, nos livros analisados, dos tipos de tarefa TS12 e TS13, que tratam da descrição de regularidades em sequências.

Quadro 36: Distribuição das tarefas de descrição de regularidades em sequências.

Tipo de tarefa (TS)		Tarefa (ts)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TS12	Descrever regularidades em uma sequência repetitiva.	ts12.1	Descrever quantas vezes um determinado elemento se repete em parte de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos ou formas geométricas).	0	0	0	3	0	2
		ts12.2	Descrever a regularidade com que um elemento se repete em uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, gestos	0	0	0	0	3	3

			ou formas geométricas).						
TS13	Descrever regularidades em uma sequência recursiva.	ts13.1	Descrever características comuns a todos os elementos de uma sequência recursiva (numérica, de objetos, cores, gestos ou formas geométricas).	0	0	3	3	0	0
		ts13.2	Descrever a transformação entre elementos subsequentes em uma sequência recursiva aditiva de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, em que o acréscimo não é constante.	0	0	2	2	0	0
		ts13.3	Descrever a quantidade de objetos de cada elemento de uma sequência recursiva aditiva de objetos, cores, gestos ou formas geométricas, a partir de sua posição.	0	0	2	2	1	1
		ts13.4	Descrever características comuns a elementos de uma sequência recursiva de acordo com uma regularidade em sua posição (exemplo: posição par ou ímpar).	0	0	0	0	1	1

Fonte: elaboração da autora.

Quanto à descrição de regularidades, há a entrada de uma nova tarefa (ts12.1), que trata da descrição de quantas vezes um determinado elemento se repete em uma parte de uma sequência repetitiva.

De maneira geral, as sequências já eram tratadas antes da BNCC, mas aparecem com maior quantidade e variedade de tarefas. Elementos ausentes ganham novas tarefas, como a representação de elementos ausentes no meio da sequência (ts1.2 e ts3.2). Das tarefas que tratam da posição de elementos, algumas foram retiradas (ts2.5 e ts5.1), e outra acrescentada (ts4.4), pequenas alterações que indicam que o *assunto* era tratado e se manteve na edição atual.

Em relação à lei de formação de sequências repetitivas, a descrição era feita no 1º ano e descontinuada. Na edição atual, a tarefa (TS6) é abordada ao longo dos três anos. Quanto às sequências recursivas, percebemos que não havia a tarefa de descrição da regra de formação (TS7) no 1º ano, e no 3º ano se reduzia à sequência aditiva, antes da BNCC. Na edição atual, a tarefa se apresenta mais bem distribuída ao longo dos três anos, iniciando com a sequência aditiva no 1º ano (ts7.1) e abrangendo as demais (ts7.2 e ts7.3) nos anos seguintes.

A criação de sequência é o aspecto de maior destaque entre as edições. Na edição anterior à BNCC, a criação de sequências repetitivas (TS8) está presente no 1º ano e praticamente some nos demais. Já na edição atual, apesar de aparecer mais vezes no 1º ano, se mantém no 2º e no 3º ano também. Já a criação de sequências recursivas (TS9) é uma tarefa que não existia e passa a existir após a BNCC.

A verificação e a justificativa e a descrição de regularidades não apresentaram muitas mudanças, com exceção da extensão da tarefa ts11.1 para o 3º ano e a criação de um novo tipo de tarefa (ts12.1) relacionada à repetição de um elemento em um trecho de uma sequência repetitiva.

5.3.8 Organização de objetos

O *assunto* Organização de objetos se relaciona com a categoria J — identificar e descrever padrões numéricos e geométricos —, não se trata de uma relação direta, mas entendemos que tal organização pode levar à construção de sequências. Por se tratar de contextos mais concretos, entendemos que, novamente, o suporte “tecnológico-teórico” está associado à própria técnica.

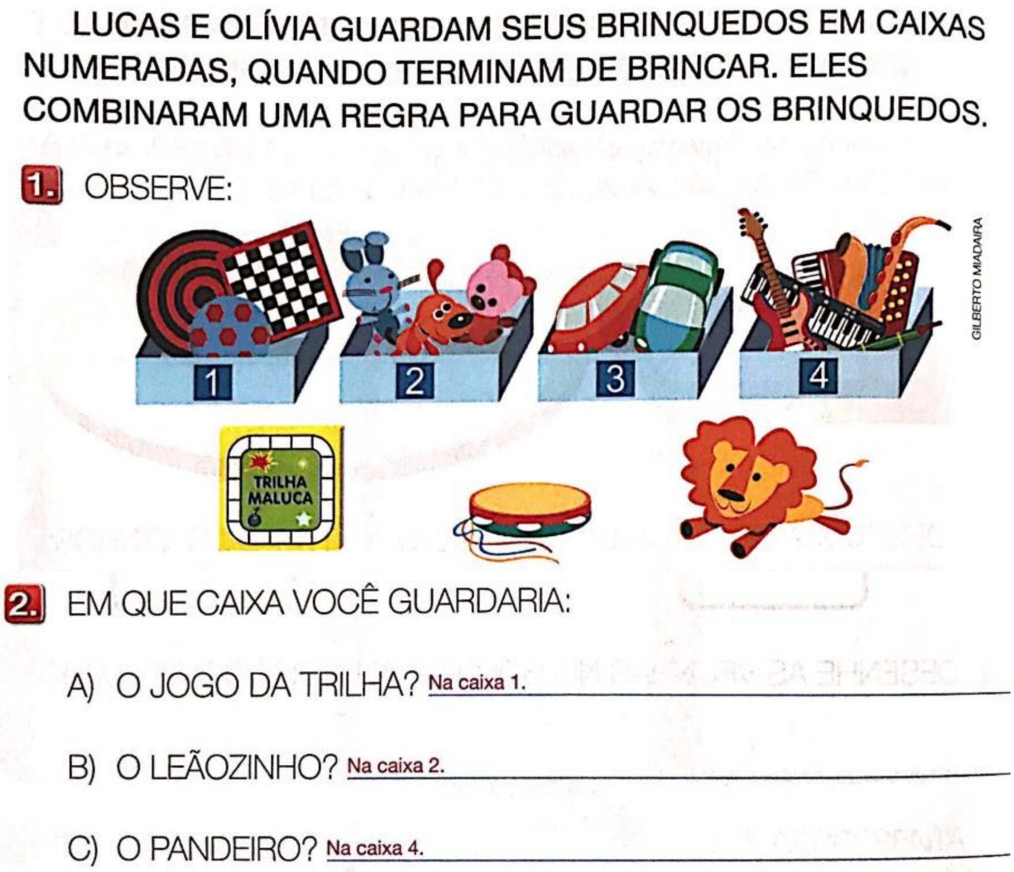
Nas figuras 105 e 106 são apresentadas atividades em que objetos devem ser organizados, respectivamente, por características qualitativas, tipo de brinquedo; ou quantitativas, fila de colegas formada pela ordem crescente de altura. As figuras apresentam as respostas escritas na cor vermelha.

TM1 — Organizar um conjunto de objetos.

tm1.1 — Organizar objetos em grupos já formados por meio de atributos qualitativos.

𝝉m1.1.1 — Observar os grupos de objetos e verificar qual é a característica que todos os objetos de cada grupo têm em comum, mas não compartilham com nenhum objeto dos demais grupos. Verificar qual característica o objeto a ser adicionado tem em comum com um dos grupos organizados.

Figura 105: Exemplo de organização de objetos por atributo qualitativo.



Fonte: 2A16, p. 46.

tm1.2 — Ordenar objetos por meio de atributos quantitativos.

𝝉m1.2.1 — Escolher o objeto aparentemente menor e posicioná-lo no início (ou final) da sequência. Repetir o procedimento conferindo com o objeto mais próximo e posicionando-o ao seu lado.

𝝉m1.2.2 — Escolher o objeto aparentemente menor e posicioná-lo no início (ou final) da sequência. Repetir o procedimento conferindo com cada objeto já posicionado e colocá-lo ao lado do maior já posicionado.

A primeira técnica para essa tarefa é respaldada pela propriedade recíproca de uma série, que diz que, se o segundo objeto é maior do que o primeiro, e o terceiro é maior do que o segundo, então o terceiro objeto é maior do que o primeiro. Assim, não há necessidade de verificar se o último objeto posicionado é maior do que cada um, basta verificar se é maior do que o último.

Figura 106: Exemplo de organização de objetos por atributo quantitativo.

3. FORME UMA FILA POR ORDEM DE ALTURA COM ALGUNS DE SEUS COLEGAS DE CLASSE. DIGA COM UM NÚMERO A POSIÇÃO QUE CADA UM OCUPA NESSA FILA. Resposta pessoal.

Fonte: 2A16, p. 17.

A atividade da Figura 107 solicita que o aluno verifique se a organização da fila das crianças em ordem crescente de altura está correta.

TM2 — Verificar se a organização de um conjunto de objetos está correta.

tm2.1 — Verificar a ordenação de objetos por critério quantitativo.

τm2.1.1 — Verificar visualmente que a fila é crescente em termos de altura, o segundo é maior do que o primeiro, o terceiro é maior do que o segundo e o primeiro, e assim por diante.

τm2.1.2 — Medir cada objeto e verificar que o segundo é maior do que o primeiro, o terceiro é maior do que o primeiro e o segundo, e assim por diante.

A primeira técnica só é possível porque os objetos estão alinhados por baixo, permitindo visualizar a diferença de altura na parte superior dos objetos.

Figura 107: Exemplo de verificação da organização de objetos.

Fonte: 3A16, p. 44.

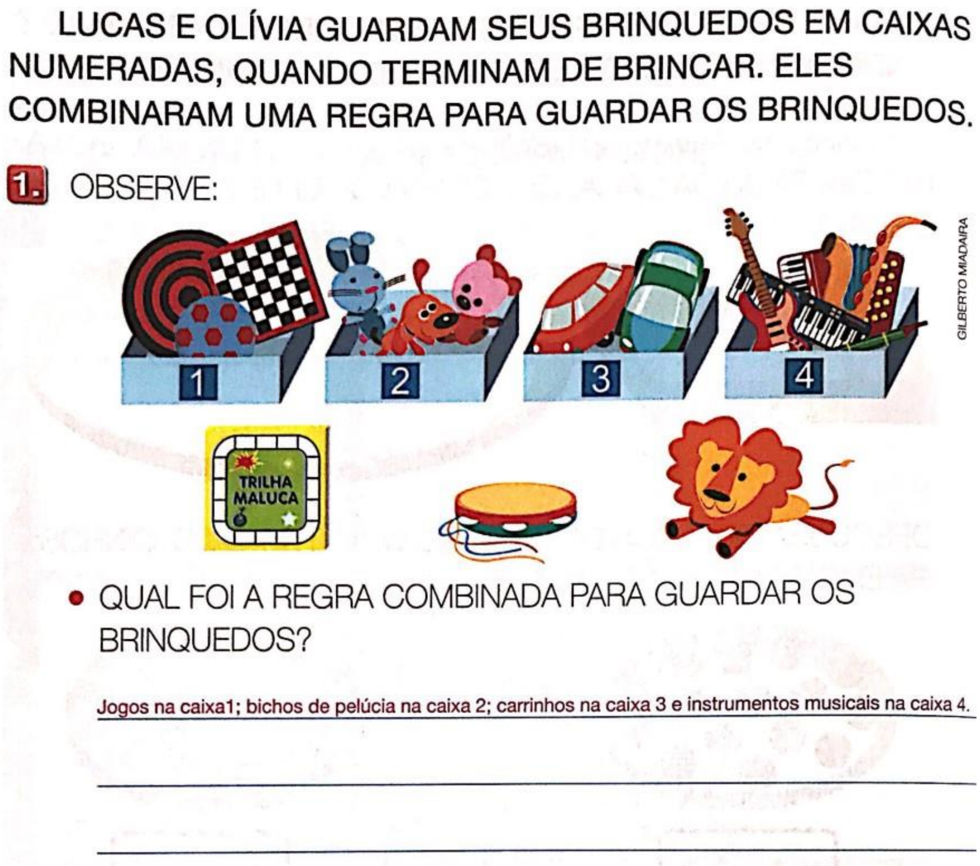
Na Figura 108, é necessário identificar o critério utilizado para a organização dos brinquedos. Em vermelho está a resposta que os estudantes devem fornecer.

TM3 — Identificar o critério de organização de um conjunto de objetos.

tm3.1 — Identificar o atributo qualitativo que organiza o conjunto de objetos.

τm3.1.1 — Observar os grupos de objetos e verificar qual é a característica que todos os objetos de cada grupo têm em comum, mas não compartilham com nenhum objeto dos demais grupos.

Figura 108: Exemplo de identificação de critério de organização de objetos.



Fonte: 2A16, p. 46.

A Figura 109 traz uma atividade em que as crianças precisam relacionar um número com a posição de cada criança na fila. Em vermelho, estão apontadas as respostas.

TM4 — Identificar a posição de um objeto em um conjunto de objetos organizados.

to4.1 — Identificar qual objeto ocupa uma certa posição, em um conjunto de objetos organizados por meio de um atributo quantitativo.

τo4.1.1 — Contar os objetos a partir do 1º, até encontrar a posição solicitada.

Figura 109: Exemplo de identificação da posição de um objeto em uma dada organização.

Fonte: 2A16, p. 17.

Veja, a seguir, no Quadro 36, todas as tarefas a respeito da organização de objetos e a frequência com que aparecem em cada livro.

Quadro 37: Distribuição das tarefas de organização de objetos.

Tipo de tarefa (TM)		Tarefa (tm)		1A16	1A19	2A16	2A19	3A16	3A19
TM1	Organizar um conjunto de objetos.	tm1.1	Organizar objetos por meio de atributos qualitativos.	0	0	1	0	0	0
		tm1.2	Ordenar objetos por meio de atributos quantitativos.	0	0	1	0	0	0
TM2	Verificar se a organização de um conjunto de objetos está correta.	tm2.1	Verificar a ordenação de objetos por critério quantitativo.	0	0	0	0	1	0

TM3	Identificar o critério de organização de um conjunto de objetos.	tm3.1	Identificar o atributo qualitativo que organiza o conjunto de objetos.	0	0	1	0	2	2
TM4	Identificar a posição de um objeto em um conjunto de objetos organizados.	tm4.1	Identificar a posição de objetos organizados por meio de um atributo quantitativo.	0	0	2	0	0	0

Fonte: elaboração da autora.

As tarefas desse grupo são poucas ao longo dos livros, sendo um *assunto* mais presente na edição anterior à BNCC do que na edição atual, em que apenas a tarefa tm3.1 permanece.

5.4 Considerações gerais da análise comparativa dos livros

De maneira geral, a análise praxeológica comparativa entre os três primeiros anos do Ensino Fundamental mostrou que os assuntos e as tarefas relacionadas ao pensamento algébrico já eram, de alguma forma, abordados antes da homologação do documento, mas que sofreram, sim, alterações e uma reorganização na edição atual.

Os assuntos **Sistema de numeração decimal**, **Operações**, **Valores desconhecidos**, **Relações funcionais** e **Organização de objetos** dentre reduções e acréscimos resultaram em redução. O assunto **Números** teve algumas oscilações, mas o balanço geral é de estabilidade com pequena redução. Os assuntos **Igualdade** e **Sequências** são os que guardam maiores aumentos em quantidade e variedade de tarefas.

Abaixo, apresentamos o *ranking* comparativo entre a edição da coleção de livros aprovada pelo PNLD 2016 e da coleção de livros aprovada pelo PNLD 2019. A organização foi feita por *assunto*, de acordo com a quantidade de vezes que cada tarefa de cada *assunto* foi abordada nos três anos.

Quadro 38: *Ranking* comparativo por ordem de assuntos mais recorrentes em 2016 e em 2019.

Assunto	2016	Assunto	2019
Sistema de numeração decimal	136	Sequências	149
Sequências	99	Sistema de numeração decimal	117
Valores desconhecidos	89	Igualdade	112
Relações funcionais	83	Números	62
Igualdade	80	Operações	54
Operações	66	Valores desconhecidos	42
Números	65	Relações funcionais	20
Organização de objetos	8	Organização de objetos	2

Fonte: elaboração da autora.

A organização do *ranking* evidencia que o **Sistema de numeração decimal** era um *assunto* bastante explorado, e mesmo com a diminuição (de 136 para 117), ele permanece como um dos *assuntos* mais recorrentes. As **Sequências**, que ocupavam o 2º lugar em 2019, têm um grande crescimento (de 99 para 149) e passa a ocupar o 1º lugar. O *assunto* **Igualdade** também teve um grande aumento (de 80 para 112) e passou a configurar um dos três *assuntos* mais explorados. As **Relações funcionais** têm uma redução significativa (de 83 para 20), principalmente com a saída da tarefa sobre transformações desconhecidas, passando para os últimos lugares do *ranking*. Os **Valores desconhecidos** também sofreram grande redução (de 89 para 42), caindo três posições no *ranking* (de 3º para 6º). A **Organização de objetos** é bastante reduzida (de 8 para 2), porém já configurava o *assunto* menos explorado na edição anterior à BNCC, e assim permanece. Os demais *assunto*s, **Números** e **Operações**, sofreram reduções menos significativas.

De uma forma mais geral, o que percebemos foi uma reorganização que resultou na melhor distribuição das tarefas desde o 1º ano, a diminuição da maioria dos *assunto*s para dar lugar a um aumento de: **Sequências**, com destaque para melhor distribuição e maior variedade de tarefas, incluindo a descrição de regra de formação e a criação de sequências recursivas, demonstrando maior intencionalidade; e **Igualdade**, também em maior quantidade e melhor distribuída, incluindo tarefas com a explicitação do sinal de igualdade com significado de equivalência e tarefas de verificação e de justificativa, demonstrando um caráter argumentativo. Sem dúvida há um maior alinhamento com as propostas da BNCC, no entanto, há também reduções, como é o caso de **Relações funcionais** e **Valores desconhecidos**. Em decorrência dos ganhos e das perdas não é tarefa fácil mensurar se a nova coleção propicia um melhor desenvolvimento do pensamento algébrico de maneira geral, mas nos parece que sim, principalmente pela melhor distribuição, proporcionando continuidade ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início. A abordagem, no geral, se mostra mais estruturada, no entanto, é necessário observar que cada *assunto* tem resultados diferentes e precisam ser analisados e complementadas em sala de aula.

CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo das inquietações pessoais surgidas desde o curso de licenciatura e durante o trabalho com livros didáticos; no contexto da homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), trazendo a *unidade temática* Álgebra para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental; diante da necessidade de investigações que buscassem compreender a relação entre materiais curriculares e outras variáveis, como orientações curriculares oficiais; e levando em consideração também um recorte possível de ser realizado dentro de uma pesquisa de mestrado, levantamos a seguinte questão de pesquisa: **Quais são as mudanças ocorridas em uma coleção de livros didáticos de Matemática para o ciclo de alfabetização relacionadas ao pensamento algébrico, com a publicação da BNCC?**

Para respondê-la, em primeiro lugar, fizemos um levantamento das pesquisas brasileiras que tratavam do assunto. Em seguida, pesquisamos a respeito de Álgebra, o ensino de Álgebra e a Álgebra nos Anos Iniciais, incluindo a corrente de pesquisa *Early Algebra* e o pensamento algébrico. Buscamos em Chevallard (1999) a organização praxeológica para orientar nossa análise dos livros didáticos dos três primeiros anos do Ensino Fundamental, correspondentes ao ciclo da alfabetização; e em Blanton e Kaput (2005) uma categorização do pensamento algébrico para embasar não só a análise dos livros didáticos, mas também do documento curricular objeto desta pesquisa, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Agora, com base no arcabouço teórico construído, faremos nossas considerações, relacionando as duas análises realizadas, com o objetivo de destacar as mudanças relativas ao pensamento algébrico sofridas na coleção de livros e as influências da BNCC.

A categoria A — explorar propriedades e relações de números inteiros — apresentou a maior quantidade de habilidades na BNCC, bem distribuídas ao longo de todos os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Há maior concentração na *unidade temática* Números, o que era esperado, uma vez que a categoria trata de propriedades e de relações entre números. Outro ponto percebido na análise do documento foi o grande foco no sistema de numeração decimal, no valor posicional dos algarismos e na composição e na decomposição também apoiada no sistema de numeração decimal; e menor destaque das relações e das propriedades de números inteiros.

Na análise dos livros didáticos dos três primeiros anos do Ensino Fundamental, ciclo da alfabetização, a categoria A foi dividida em dois assuntos, sendo o primeiro o Sistema de numeração decimal, que abrange todas as tarefas diretamente relacionadas ao sistema de numeração decimal, e tem os tipos de tarefa representados por TD; e o segundo Números, que agrupa as tarefas de propriedades e de relações entre números, que não estão diretamente relacionadas ao sistema de numeração decimal, cujos tipos de tarefa estão representados por TN. O Sistema de numeração decimal era o assunto mais recorrente na edição anterior e sofreu uma pequena redução, mas continua entre os mais abordados. O *assunto* Números permaneceu estável. De todas as tarefas encontradas nos livros dedicadas à categoria A, aproximadamente dois terços são do Sistema de numeração decimal e um terço, de Números.

A seguir, no Quadro 38, apresentamos a relação dos tipos de tarefa dos *assuntos* Sistema de numeração decimal (TD) e Números (TN) com as habilidades da BNCC. Ao final das considerações de cada categoria, apresentaremos um quadro semelhante que relaciona, a cada uma delas, os tipos de tarefas (T) encontrados no livro e as habilidades da Base que se relacionam com essas tarefas. Importante ressaltar que não estão, necessariamente, todas as habilidades da BNCC selecionadas na análise do documento, apenas aquelas que se relacionam com os tipos de tarefas encontrados nos livros; algumas habilidades se repetem por se relacionarem a mais de uma habilidade; e nem toda tarefa encontrada tem uma habilidade da BNCC relacionada. Quando não existe alguma relação, foi deixado em branco no quadro. Vale observar que não é uma relação precisa, mas aproximada.

Quadro 39: Relação entre os tipos de tarefa e as habilidades da BNCC da categoria A.

Categoria	**Tipos de tarefa**		**Habilidades da BNCC**
A – Explorar propriedades e relações de números inteiros.	TD1	Descrever regularidades do sistema numérico decimal.	(EF02MA01) Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero). (EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens.

	TD2	Compor números organizados de acordo com as ordens do sistema numérico decimal.	(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo. (EF02MA04) Compor e decompor números naturais de até três ordens, com suporte de material manipulável, por meio de diferentes adições. (EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens.
	TD3	Decompor números, organizando-os de acordo com as ordens do sistema numérico decimal.	
	TD4	Formar números com base em algarismos dados.	(EF02MA01) Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero).
	TN1	Descrever o processo de cálculo por meio de decomposição.	(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.
	TN2	Descrever relações de números naturais.	
	TN3	Identificar características comuns a números pares ou ímpares.	
	TN4	Descrever regularidades de números pares ou ímpares.	
	TN5	Identificar números pares e ímpares.	
	TN6	Justificar se um número é par ou ímpar.	

Fonte: elaboração da autora.

A predominância das características do Sistema de numeração decimal prevaleceu tanto na BNCC quanto no livro didático. No entanto, essa predominância já estava presente na edição anterior, portanto, não é um reflexo da Base. Contudo, permanece a necessidade de explorar mais propriedades e relações entre os números, que não estejam diretamente relacionados ao Sistema de numeração decimal.

A categoria B — explorar propriedades das operações com os números inteiros — não apareceu nos três primeiros anos da BNCC, apenas no 4º ano. E apareceu nas *unidades temáticas* Números e Álgebra. Mesmo contando com poucas habilidades, abordava os assuntos da categoria, com exceção de números negativos, que não configuram os objetos do conhecimento proposto para os Anos Iniciais.

Na análise praxeológica, a categoria B foi organizada em um *assunto*, Operações, em que os tipos de tarefa são representados por TO. Esse assunto sofreu uma reorganização, estando mais bem distribuído desde o 1º ano e, também, houve uma pequena redução. A seguir, no Quadro 39, apresentamos a relação dos tipos de tarefa dos *assuntos* Operações com as habilidades da BNCC.

Quadro 40: Relação entre os tipos de tarefa e as habilidades da BNCC da categoria B.

Categoria	Tipos de tarefa		Habilidades da BNCC
B – Explorar propriedades das operações com os números inteiros.	TO1	Estabelecer cálculos relacionados por meio da operação inversa.	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo. (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo. (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	TO2	Descrever a utilização de operações inversas para encontrar valores desconhecidos.	
	TO3	Realizar cálculos utilizando estratégias.	
	TO4	Investigar propriedades das operações.	

Fonte: elaboração da autora.

Apesar de a categoria só aparecer no 4º ano na BNCC, ela passou a ser trabalhada desde o 1º ano nos livros. Consideramos que a melhor distribuição do *assunto* nos livros foi influenciada pela BNCC, não na organização proposta pela Base, mas por abordar e dar importância ao *assunto* desde os Anos Iniciais.

As categorias A e B estão vinculadas ao campo da Aritmética, evidenciando o caráter transversal do pensamento algébrico no currículo, perpassando outros campos da Matemática, com destaque para a Aritmética.

A categoria C — explorar a igualdade como relação entre quantidades — se mostrou bastante explorada na BNCC por meio da análise do documento, abrangendo as *unidades temáticas* Grandezas e Medidas, Álgebra e Números; e bem distribuída a partir do 2º ano (com a ideia de equivalência entre notas e moedas do sistema monetário brasileiro da *unidade temática* Grandezas e Medidas). O trabalho dentro da *unidade temática* Álgebra acontece do 3º ao 5º ano com o uso do sinal de igualdade.

Na análise das duas edições da coleção, a categoria C foi agrupada em um *assunto*, Igualdade, que abrange não só as tarefas com explicitação do sinal de igualdade com significado de equivalência, mas também tarefas em que o sinal não é explicitado, porém apresentava a ideia de equivalência próxima da igualdade. O *assunto* teve um crescimento expressivo em relação à edição anterior à Base e melhor distribuição desde o 1º ano. Com destaque para atividades mais intencionais, com a explicitação do sinal de igualdade e de verificação e justificativa da igualdade, ou seja, relacionadas à estrutura e à argumentação. No Quadro 40, a seguir, apresentamos a relação dos tipos de tarefa dos *assuntos* Igualdade (TI) com as habilidades da BNCC.

Quadro 41: Relação entre os tipos de tarefa e as habilidades da BNCC da categoria C.

<table>
<tr><th>Categoria</th><th colspan="2">Tipos de tarefa</th><th>Habilidades da BNCC</th></tr>
<tr><td rowspan="10">C – Explorar a igualdade como relação entre quantidades.</td><td>TI2</td><td>Reconhecer valores monetários equivalentes.</td><td>(EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas.
(EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.</td></tr>
<tr><td>TI1</td><td>Identificar diferentes cálculos com resultados iguais.</td><td rowspan="3">(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.</td></tr>
<tr><td>TI3</td><td>Propor diferentes cálculos com o mesmo resultado.</td></tr>
<tr><td>TI4</td><td>Completar o valor desconhecido mantendo a equivalência</td></tr>
<tr><td>TI5</td><td>Verificar a validade de uma igualdade.</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>TI6</td><td>Justificar uma igualdade.</td></tr>
<tr><td>TI7</td><td>Identificar correspondência.</td></tr>
<tr><td>TI8</td><td>Estabelecer comparação com balança de pratos.</td></tr>
<tr><td>TI9</td><td>Estabelecer equivalência com balança de pratos.</td></tr>
<tr><td>TI10</td><td>Justificar equivalência.</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração da autora.

Na categoria C, percebemos aumento na quantidade das tarefas, melhor distribuição e maior intencionalidade ao abordar tarefas de justificativa, o que aponta uma característica do pensamento algébrico, o desenvolvimento da linguagem para comunicação e argumentação. Apesar de a Base trazer o assunto com o sinal explícito a partir do 3º ano, na *unidade temática* Álgebra, a edição atual dos livros já o traz desde o 1º ano. As tarefas de verificação e de justificativa, que são as mais intencionais, não se relacionam a habilidades do documento. No entanto, entendemos que a importância dada ao assunto na BNCC foi responsável pela ampliação da categoria C.

A categoria D — tratar o número algebricamente — não foi encontrada na análise da Base Nacional Comum Curricular. No entanto, pudemos notar, em algumas habilidades da categoria A, dentro do *assunto* Números, que existe um pequeno trabalho que trata o número algebricamente, sem, no entanto, simbolizá-los. Isso ocorre quando os números são trabalhados como pares e ímpares, e as características observadas podem ser generalizadas para todo um conjunto de números que guarda uma determinada característica em comum. O Quadro 41 aponta os tipos de tarefa do *assunto* Números (TN) com este tipo de trabalho.

Quadro 42: Tipos de tarefa que se relacionam à categoria D.

Categoria	Tipos de tarefa		Habilidades da BNCC
D – Tratar o número algebricamente.	TN3	Identificar características comuns a números pares ou ímpares.	
	TN5	Identificar números pares e ímpares.	

Fonte: elaboração da autora.

Ainda é um trabalho pequeno. Vale lembrar que, para Blanton e Kaput (2005), a categoria D também foi pouco recorrente. Não podemos considerar aqui uma relação direta com a BNCC, uma vez que o documento não trouxe nenhuma habilidade relacionada e que os dois tipos de tarefa se mantiveram praticamente estáveis entre as duas edições. Em relação à categoria D, é interessante que o trabalho seja ampliado nos anos seguintes, sobre os quais não podemos fazer outras considerações, pois não foram objeto de análise da presente pesquisa.

A categoria E — encontrar valores desconhecidos — aparece apenas em uma habilidade da BNCC localizada no 4º ano, na *unidade temática* Álgebra, de maneira muito limitada. Na análise praxeológica, a categoria foi organizada no *assunto* Valores desconhecidos, e os tipos de tarefa (TV) a respeito desse *assunto* sofreram consideráveis reduções. No Quadro 42, apresentamos a relação dos tipos de tarefa do *assunto* Valores desconhecidos com as habilidades da BNCC.

Quadro 43: Relação entre os tipos de tarefa e as habilidades da BNCC da categoria E.

<table>
<tr><th>Categoria</th><th colspan="2">Tipos de tarefa</th><th>Habilidades da BNCC</th></tr>
<tr><td rowspan="2">E – Encontrar valores desconhecidos.</td><td>TV1</td><td>Encontrar o valor desconhecido.</td><td rowspan="2">(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.</td></tr>
<tr><td>TV2</td><td>Determinar uma combinação de parcelas que cumpra as restrições propostas.</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração da autora.

A redução sofrida reflete a falta de importância dada ao assunto pela Base Nacional Comum Curricular. É preciso ampliar o trabalho com valores desconhecidos.

A categoria F — simbolizar quantidades e operar com expressões simbolizadas — apareceu na BNCC apenas no 5º ano e não foi detectada na análise praxeológica que explorou os três primeiros anos das coleções. Importante ressaltar que esta categoria pode estar relacionada ao percurso que o estudante escolhe para resolver uma atividade, e no livro não há atividades que garantam a simbolização, mas os estudantes podem utilizá-la em um contexto que fomente seu desenvolvimento. O documento declara que não haveria a exigência do simbolismo algébrico, no entanto, não devemos esquecer que o simbolismo é uma questão bastante importante para a Álgebra, e que deve ser considerado como um meio de representar ideias que se formaliza de maneira processual.

Da categoria G — representar dados graficamente — foi identificada apenas uma habilidade relacionada no 5º ano, na *unidade temática* Geometria, e não foi encontrada nenhuma tarefa relacionada na análise das coleções. Importante ressaltar que a representação gráfica não é inerentemente algébrica, estando presente em outros campos matemáticos e em outras áreas do conhecimento, portanto, só nos interessava os registros gráficos cujo objetivo fosse o de analisar relações funcionais. Vale lembrar que em Blanton e Kaput (2005) a categoria G apareceu muito pouco; e também que os livros do 4º e do 5º ano não foram objeto de análise deste estudo, portanto, não sabemos se a categoria é tratada nos livros dos anos seguintes.

A categoria H — encontrar relações funcionais — é uma categoria que se mostrou bastante explorada na análise da BNCC, presente no 1º, 3º, 4º e 5º anos, nas *unidades temáticas* Grandezas e Medidas, Números e Álgebra. Vale observar que nos primeiros anos ela se dá por meio da relação entre unidades de medidas de uma grandeza; no 4º ano, na *unidade temática* Números; e só no 5º ano que ela está na *unidade temática* Álgebra, porém limitada a contextos de proporcionalidade.

As tarefas da categoria H foram organizadas dentro do *assunto* Relações funcionais. Os principais assuntos são alguns casos particulares da multiplicação com ideia de proporção e de formação de sequências, a relação entre unidades de medida de mesma grandeza e transformações desconhecidas. Houve grande redução, principalmente com uma tarefa que foi retirada e aparecia diversas vezes na edição anterior à BNCC, que questionava a transformação aplicada em um valor inicial para transformá-lo no valor final (tf5.1). Apresentamos a seguir, no Quadro 43, a relação dos tipos de tarefa do *assunto* Relações funcionais (TF) com as habilidades da BNCC.

Quadro 44: Relação entre os tipos de tarefa e as habilidades da BNCC da categoria H.

Categoria	Tipos de tarefa		Habilidades da BNCC
H – Encontrar relações funcionais.	TF1	Calcular quantidades proporcionais por meio da multiplicação.	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
	TF2	Estabelecer equivalências entre unidades de medida.	(EF01MA17) Reconhecer e relacionar períodos do dia, dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, quando necessário. (EF03MA23) Ler horas em relógios digitais e em relógios analógicos e reconhecer a relação entre hora e minutos e entre minuto e segundos.
	TF3	Encontrar a transformação desconhecida.	

Fonte: elaboração da autora.

A partir do Quadro 43 fica claro que a saída do tipo de tarefa TF3 foi motivada pela falta de abordagem na BNCC, contribuindo para a grande diminuição da categoria, com a falta do trabalho intencional antes do 5º ano no documento. É necessário, ainda, ampliar os contextos para além da proporcionalidade proposta pela Base.

Desde o referencial teórico, na análise da BNCC e na análise praxeológica, as categorias I e J se mostraram entrelaçadas, portanto, faremos a seguir as considerações a respeito das duas categorias.

A categoria I — prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos — é uma categoria exclusiva da *unidade temática* Álgebra e está presente em quatro habilidades da BNCC distribuídas do 1º ao 3º ano. Na Base, a categoria se mostra vinculada exclusivamente a sequências, e não explora outros contextos interessantes que são propostos na categoria I por Blanton e Kaput (2005).

Na análise dos livros, as tarefas relacionadas a esta categoria foram incorporadas pelo *assunto* Sequências, e seus tipos de tarefas representados por TS. No Quadro 44, a seguir, apresentamos a relação entre tipos de tarefa do *assunto* Sequência (TS) com as habilidades da BNCC da categoria I.

Quadro 45: Relação entre os tipos de tarefa e as habilidades da BNCC da categoria I.

Categoria	**Tipos de tarefa**		**Habilidades da BNCC**
I – Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.	TS1	Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva.	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	TS2	Representar elementos ausentes de uma sequência recursiva.	
	TS3	Descrever elementos ausentes de uma sequência repetitiva.	
	TS4	Descrever elementos ausentes de uma sequência recursiva.	
	TS8	Criar uma sequência repetitiva.	
	TS9	Criar uma sequência recursiva.	

Fonte: elaboração da autora.

A categoria J — identificar e descrever padrões numéricos e geométricos — concentra uma das maiores quantidades de habilidades na BNCC, bem distribuída ao longo dos quatro primeiros anos, porém descontinuada no 5º ano. A maior parte de suas habilidades se encontra na *unidade temática* Álgebra, e traz, até o 3º ano, dois contextos, sequências, além de organização de objetos.

Na análise da coleção de livros, a categoria I foi organizada dentro do *assunto* Sequências, com parte da categoria J. Essa organização foi necessária tamanha a força desse *assunto* nos livros analisados. Sequências sofreu uma ampliação da coleção anterior à Base para a coleção atual, passando a ser o *assunto* mais recorrente. Passou a contar com novas tarefas, explorando maior variedade de sequências e ficando mais bem distribuída ao longo dos três anos. Destaque para maior exploração da descrição da regra de formação e para a criação de sequências, conferindo maior intencionalidade ao trabalho, na medida em que o aluno explicita a lei de formação de uma sequência e as cria.

O restante da categoria J foi organizada no *assunto* Organização de objetos. Esse *assunto* teve uma forte redução em relação à edição dos livros anterior à Base, no entanto, já era o *assunto* menos explorado ao longo dos três primeiros anos. Apresentamos, no Quadro 45, a relação entre tipos de tarefa do *assunto* Sequência (TS) e Organização de objetos (TM) com as habilidades da BNCC da categoria J.

Quadro 46: Relação entre os tipos de tarefa e as habilidades da BNCC da categoria J.

Categoria	Tipos de tarefa		Habilidades da BNCC
J – Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.	TS5	Descrever a posição de um elemento de uma sequência.	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	TS6	Descrever a regra de formação de uma sequência repetitiva.	
	TS7	Descrever a regra de formação de uma sequência recursiva.	
	TS10	Verificar se um elemento pertence a uma sequência recursiva.	
	TS11	Justificar o pertencimento de um elemento a uma sequência recursiva.	

	TS12	Descrever regularidades em uma sequência repetitiva.	
	TS13	Descrever regularidades em uma sequência recursiva.	
	TM1	Organizar um conjunto de objetos.	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida. (EF01MA15) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.
	TM2	Verificar se a organização de um conjunto de objetos está correta.	
	TM3	Identificar o critério de organização de um conjunto de objetos.	
	TM4	Identificar a posição de um objeto em um conjunto de objetos organizados.	

Fonte: elaboração da autora.

É verdade que as sequências são bastantes recorrentes quando se fala de pensamento algébrico e em *Early Algebra*, no entanto, como nos mostram as categorias I e J de Blanton e Kaput (2005), o trabalho com padrões e previsões pode e deve ser feito em outros contextos.

Nos preocupa que o predomínio desse *assunto* acabe por sufocar outros contextos para desenvolver e explorar as categorias I e J, e que também possa sufocar a abordagem de outras categorias. Esse excesso de trabalho com sequências e a ausência de outros contextos já havia sido notado na análise do documento e se reflete nos livros didáticos.

Quanto ao *assunto* Organização de objetos, apesar de ser abordado pela BNCC, ele está presente apenas no 1º ano, e isso pode ter levado à sua redução.

Dessa maneira, encerramos as considerações provenientes de nossa questão de pesquisa a respeito das mudanças percebidas nas atividades do livro didático, após a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), articulada com nosso arcabouço teórico.

Em relação à organização praxeológica utilizada para a análise das duas edições da coleção de livros didáticos, concluímos que ela foi fundamental para a organização dos dados, propiciando todas as análises e as considerações propostas até aqui. Outra inferência com base na organização praxeológica é a de que o bloco “tecnológico-teórico” das técnicas propostas para as tarefas se relacionam não só com o campo algébrico, mas também com os outros campos matemáticos. São elementos recorrentes de estruturas, como a organização do Sistema de numeração decimal; a Aritmética, principalmente a estrutura dos números e das operações; as relações entre os sistemas de unidades de medidas; os padrões propostos nas sequências, muitas vezes imbricados à própria técnica; e até mesmo o funcionamento de objetos concretos como a balança de pratos; além das técnicas que envolvem a equivalência e a demonstração direta. Esse resultado já era esperado, considerando que a proposta do pensamento algébrico não é trabalhar propriamente com a Álgebra, mas desenvolver aspectos do pensamento que são fundamentais para a aprendizagem da Álgebra perpassando os diferentes campos matemáticos.

O desenvolvimento do pensamento algébrico é um assunto que ganha cada vez mais corpo na comunidade de Educação Matemática, no entanto, ainda guarda divergências e tem muito a ser explorado. Ele traz uma proposta contra um mecanicismo excessivo e contra uma linguagem simbólica esvaziada, que tem predominado o ensino da Aritmética, nos Anos Iniciais, e o ensino da Álgebra, nos anos seguintes.

Identificamos, no cenário brasileiro, maior atenção ao pensamento algébrico em documentos e na coleção de livros didáticos. No entanto, há um desequilíbrio na abordagem das categorias e dos *assuntos* que salientam suas limitações. Evidencia-se, portanto, a importância do estudo contínuo do professor a respeito de documentos e materiais curriculares, para identificar seus potenciais e suas limitações. Esperamos, com nossa pesquisa, ter contribuído com o professor que ensina Matemática nos Anos Iniciais, em seu percurso de planejamento e de tomada de decisões curriculares em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como sugestão para pesquisas futuras ressaltamos a importância da análise de livros didáticos, principalmente dando continuidade ao 4º e 5º ano da coleção analisada; e também analisando outras coleções para comparar os resultados entre elas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2014.

BECK, Vinicius Carvalho. **Os problemas aditivos e o pensamento algébrico no ciclo da alfabetização**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2015.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Massachusetts, v. 36 n.5, p. 412-446, nov. 2005.

BLANTON, Maria L. *et al*. Early Algebra. *In*: ALGEBRA: Gateway to a Technological Future, 2006, Columbia. **Algebra**: Gateway to a Technological Future. Columbia: The Mathematical Association of America, 2007. p. 7-14.

BITENCOURT, Daiane Venancio. **Early Algebra na perspectiva do livro didático**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual De Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

BONI, Keila Tatiana. **Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em tarefas não rotineiras**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática: Ensino de primeira à quarta série. Brasília: 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **A Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de implementação da Base Nacional Comum Curricular**: orientações para o processo de implementação da BNCC. Brasília: 2018.

CIVINSKI, Daiana Dallagnoli. **Introdução ao estudo de Aritmética e da Álgebra no ensino fundamental**. 2015. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de ciências naturais e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2015.

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college. Preimiere partie: L' évolution de la transposition didactique. **Petit x**, Grenoble, n. 5, p. 51-94. 1984.

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'ensegnement des mathematiques au college. Deuxeieme partie, perspectives curriculares: la notion de modelisation. **Petit x**, Grenoble, n. 19, p. 43-72. 1989.

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college. Troisième partie. Voies d'attaque et problemas didactiques. **Petit x**, Grenoble, n. 23, p. 5-38. 1990.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Tradução Ricardo Barroso Campos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266. 1999.

FERNANDES, Renata Karoline. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do Ensino Fundamental I**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

FERREIRA, Miriam Criez Nobrega. **Álgebra nos Anos Iniciais do ensino fundamental**: uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico. 2017. Dissertação (Mestrado em ensino e história das ciências e da Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores associados, 2012.

FREIRE, Raquel Santiago. **Objetos de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

FREIRE, Raquel Santiago. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

GASCÓN, Josep. La naturaleza prealgebraica de la Matemática escolar. **Educación Matemática**, Barcelona, v. 11, n. 1, p. 77-88, abr. 1999.

JANUARIO, Gilberto. **Marco conceitual para estudar a relação entre materiais curriculares e professores de Matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

JANUARIO, Gilberto; MANRIQUE, Ana Lucia. Teachers? Interactions with Curriculum Materials in Mathematics Education. **Revista Acta Scientiae**, v. 21, p. 2-23, 2019.

KAPUT, James. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

KATZ, Victor J. The development of algebra and algebra education. *In*: THE ÁLGEBRA INITIATIVE COLLOQUIUM, 1993, Washington. The algebra initiative colloquium. Washington US Department of Education, 1995. v. 1, p. 15-32.

KATZ, Victor J. Executive Summary. *In*: ALGEBRA: Gateway to a Technological Future, 2006, Columbia. **Algebra**: Gateway to a Technological Future. Columbia: The Mathematical Association of America, 2007. p. 1-6.

LIMA, José Roberto de Campos. **Pensamento algébrico no currículo do ciclo de alfabetização**: estudo comparativo de duas propostas. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

LIMA, Katia. **Relação professor-materiais curriculares em Educação Matemática**: uma análise a partir de elementos dos recursos do currículo e dos recursos dos professores. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. São Paulo. Editora Pedagógica Universitária, 2018.

OLIVEIRA, Caio Fabio dos Santos de. **Formação continuada de professores e a Early Algebra**: Uma intervenção híbrida. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual De Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

PINTO, Geórgia Albuquerque de Toledo. **A atribuição de significado em atividades pré-algébricas por crianças do 2º ano do 1º ciclo do Ensino Fundamental**. 2001. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2001.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 1º ano. 2. ed. São Paulo: Zapt, 2014.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 2º ano. 2. ed. São Paulo: Zapt, 2014.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 3º ano. 2. ed. São Paulo: Zapt, 2014.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 4º ano. 2. ed. São Paulo: Zapt, 2014.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 5º ano. 2. ed. São Paulo: Zapt, 2014.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 1º ano. 3. ed. São Paulo: Zapt, 2017.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 2º ano. 3. ed. São Paulo: Zapt, 2017.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 3º ano. 3. ed. São Paulo: Zapt, 2017.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 4º ano. 3. ed. São Paulo: Zapt, 2017.

PIRES, Célia Maria Carolino; CRUZ, Ivan. **Nosso Livro de Matemática**: Ensino Fundamental – Anos Iniciais 5º ano. 3. ed. São Paulo: Zapt, 2017.

PONTE, J. P; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: ME – DGIDC, 2009.

PORTO, Rozimeire Soares de Oliveira. **Early Algebra**: prelúdio da Álgebra por estudantes do 3° e 5º anos do ensino fundamental. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual De Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

ROCHA, Amanda Moura da. **Contribuições dos jogos para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: perspectivas histórica e atual**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas – Área de Concentração em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Pará, 2017.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de história da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RUIZ, N.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. *In*: CONGRÈS INTERNATIONAL SUR LA TAD, 2., 2007, Montpellier. **Diffuser les mathématiques (et les autres saviors) comme outils de connaissance et diction**. Montpellier: IUFM de l'academie de Montepellier, 2007. p. 655-676.

RUIZ, N., BOSCH, M., GASCÓN, J. El problema Didáctico del Álgebra Elemental: Un Análisis Macro-Ecológico desde la Teoría Antropológica de lo didáctico. **REDIMAT**, Rioja, vol. 4, n. 2, p. 106-131, jun. 2015.

SACRISTÁN, J. Gimeno. **O currículo**: uma reflexão sobre a prática. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SANTOS, João Ricardo Viola dos. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em Matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

SANTOS, Carla Cristiane Silva. **O pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: a percepção de regularidades e o pensamento relacional. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2017.

SILVA, Daniele Peres da. **Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: avanço ou retrocesso? 2001. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SOARES, Flávia dos Santos; DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. Ensino de matemática no século XX: da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **HORIZONTES**, Bragança Paulista, vol. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004.

TEIXEIRA, Antonio César Nascimento. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do Ensino Fundamental**: uma proposta de intervenção. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2016.