

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

PATRICIA DA COSTA LIMA

Uma metanálise dos artigos sobre o ensino e a aprendizagem de
função na Educação Básica publicados, por pesquisadores
brasileiros, nos últimos dez anos, na revista Educação Matemática
Pesquisa

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2017

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

PATRICIA DA COSTA LIMA

Uma metanálise dos artigos sobre o ensino e a aprendizagem de
função na Educação Básica publicados, por pesquisadores
brasileiros, nos últimos dez anos, na revista Educação Matemática
Pesquisa

Dissertação apresentada à
Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica
de São Paulo, como exigência
parcial para obtenção do título
de **MESTRE EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**, sob a
orientação do **Profº Dr. Gabriel
Loureiro de Lima**.

São Paulo

2017

Banca examinadora

Aluna na condição de bolsista da Capes.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

Primeiramente a Deus por me dar forças, saúde e sabedoria para concluir mais uma etapa de minha vida.

A meus pais, amigos e colegas de trabalho que me apoiaram e incentivaram nessa jornada.

Em especial, aos meus professores da Educação Básica Paulo Curriel e Silvio Santos, pois sem eles eu não teria adquirido o gosto pela Matemática, tampouco escolhido esta profissão.

Aos meus colegas de curso Rubervan Leite, Franco Deyvis, Larissa Coêlho, Mariana Marques, Jéssica Barbosa, Marcelo Gomes e Luiz Modi pelo companheirismo e amizade.

Às professoras Barbara Bianchini e Eloiza Gomes, pelas contribuições dadas na qualificação e também aos meus orientadores Silvia Machado e Gabriel Loureiro por toda a dedicação neste projeto.

E, por fim, à Capes pela bolsa de estudos concedida.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é investigar o que tem sido discutido nas pesquisas brasileiras da área de Educação Matemática realizadas nos últimos dez anos e publicadas na revista “Educação Matemática Pesquisa” (EMP), editada pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), a respeito do ensino e da aprendizagem na Educação Básica do objeto matemático função. *A priori*, foi feito um levantamento dos artigos publicados no período considerado que tratavam do tema em foco nesta investigação e cinco deles, por atenderem aos critérios adotados (autoria de pesquisadores brasileiros e relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem de função na Educação Básica), foram selecionados para análise. Em seguida, estes foram lidos na íntegra e, de tal leitura, emergiram as categorias, por meio das quais pudemos realizar uma metanálise dos textos, articulando-os; além de estabelecer comparações gerais entre as pesquisas selecionadas, evidenciar dificuldades tanto docentes quanto discentes em relação ao conceito de função ou noções aderentes a ele e também entraves relativos às abordagens presentes nos livros didáticos ou às estratégias de ensino adotadas em sala de aula. A análise dos artigos mostrou que algumas das dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao trabalharem com o conceito de função são também entraves apresentados pelos próprios professores, que manifestam fragilidades em relação ao conhecimento de conteúdo matemático. Questões relacionadas às diferentes representações semióticas de funções não são totalmente compreendidas nem mesmo pelos docentes, como indicam os artigos analisados. Os livros didáticos, por sua vez, conforme evidenciam elementos trazidos pelas pesquisas, em muitos casos carecem de informações realmente necessárias para a compreensão por parte dos alunos do conceito de função, o que, conseqüentemente, acarreta dificuldades no ensino de tal conteúdo, uma vez que, com frequência, esses materiais são adotados como únicas referências pelos professores. Outra informação trazida pelas análises dos artigos selecionados é que as estratégias diferenciadas de ensino enfrentam resistência tanto dos docentes quanto dos próprios estudantes, habituados às chamadas ‘aulas tradicionais’.

Palavras-chave: Conceito de função, Educação Básica, Metanálise, Revista Educação Matemática Pesquisa.

ABSTRACT

The objective of this work is to investigate what has been discussed in the Brazilian researches in the area of Mathematics Education carried out in the last ten years and published in the journal "Mathematical Education Research" (EMP), edited by the Program of Postgraduate Studies in Mathematical Education of the Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC / SP), regarding teaching and learning in Basic Education of the mathematical object function. A priori, a survey of the articles published during the considered period that dealt with the subject in focus in this investigation was made, and five of them, because they met the criteria adopted (authorship of Brazilian researchers and related to the processes of teaching and learning of function in Basic Education), were selected for analysis. Then, these were read in their entirety, and from this reading the categories emerged, through which we were able to perform a meta-analysis of the texts, articulating them; in addition to establishing general comparisons between the selected researches, evidences difficulties both teachers and students in relation to the concept of function or notions adherent to it and also obstacles related to the approaches present in the textbooks or to the strategies of teaching adopted in the classroom. The analysis of the articles showed that some of the difficulties faced by students in working with the concept of function are also obstacles presented by teachers themselves, who manifest weaknesses in relation to the knowledge of mathematical content. Issues related to different semiotic representations of functions are not fully understood even by teachers, as the articles analyzed indicate. The textbooks, in turn, as evidenced by the elements brought by the researches, often lack information that is really necessary for students to understand the concept of function, which consequently entails difficulties in teaching such content, once that these materials are often adopted as the only references by teachers. Another information brought by the analysis of the selected articles is that the differentiated strategies of teaching face resistance from both teachers and students themselves, accustomed to the so-called 'traditional lessons'.

Keywords: Function concept, Basic Education, Meta-analysis, Mathematics Education Journal Search.

Lista de Quadros

Quadro 1: Desenvolvimento do conceito de função	27
Quadro 2: Os 15 artigos selecionados no primeiro levantamento	31
Quadro 3: Os 5 artigos analisados, obtidos por meio de um refinamento do primeiro levantamento	32
Quadro 4: Título e autores dos artigos analisados e instituições às quais esses autores são filiados.....	45
Quadro 5: Níveis de ensino e sujeitos de pesquisa contemplados pelos artigos analisados	46
Quadro 6: Metodologia/procedimentos metodológicos e referencial teórico presentes nos artigos selecionados	47

Sumário

APRESENTAÇÃO	Erro! Indicador não definido.
Capítulo 1 – Problemática.....	Erro! Indicador não definido.
1.1– Tema de pesquisa e objetivos	Erro! Indicador não definido.
1. 2 – Revisão bibliográfica	Erro! Indicador não definido.
1. 3 – Desenvolvimento histórico do conceito de função	Erro! Indicador não definido.
Capítulo 2 – Metodologia e Procedimentos Metodológicos.....	Erro! Indicador não definido.
2.1 - Metodologia	Erro! Indicador não definido.
2. 2 – Procedimentos Metodológicos.....	Erro! Indicador não definido.
2. 2. 1 – Seleção do <i>Corpus</i> de Estudo.....	Erro! Indicador não definido.
2. 2. 2 – Apresentação dos artigos selecionados	Erro! Indicador não definido.
2. 3 – Categorias de análise	Erro! Indicador não definido.
Capítulo 3 – Metanálise dos artigos selecionados	Erro! Indicador não definido.
a. Comparações gerais	Erro! Indicador não definido.
b. Dificuldades docentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele	Erro! Indicador não definido.
c. Dificuldades discentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele	Erro! Indicador não definido.
d. Dificuldades ou entraves relacionados às abordagens presentes nos livros didáticos.....	Erro! Indicador não definido.
e. Questões relacionadas à metodologia de ensino. ...	Erro! Indicador não definido.
Capítulo 4 – Considerações Finais	Erro! Indicador não definido.
Referências	Erro! Indicador não definido.

APRESENTAÇÃO

Neste trabalho buscamos investigar o que é apresentado em artigos de autoria de pesquisadores brasileiros a respeito do ensino e aprendizagem do conceito de função na Educação Básica, os quais foram publicados na Revista “Educação Matemática Pesquisa” entre os anos de 2006 a 2016.

Segundo Caraça (1984), tal conceito é um dos fundamentais da Matemática e, nesse sentido, analisar como aspectos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem do mesmo e, especialmente, as dificuldades que neles podem ser enfrentadas é importante no âmbito da Educação Matemática.

A priori, fizemos um levantamento de todos os artigos que versam sobre o ensino e aprendizagem do conceito de função publicados na revista supracitada durante o período especificado. Em seguida, selecionamos aqueles cinco que atendiam aos critérios estabelecidos para nosso recorte: ser de autoria de pesquisadores brasileiros e referentes à Educação Básica. Realizamos, então, a leitura na íntegra do material selecionado.

A posteriori, após levantamento e leitura dos artigos, buscamos fazer uma metanálise dos mesmos, identificando alguns aspectos relacionados ao ensino do conceito de função e reflexões acerca de suas possíveis consequências no aprendizado dos estudantes. Procuramos não só dar ênfase às principais dificuldades, do ponto de vista matemático, enfrentadas por professores e estudantes da Educação Básica ao trabalharem com o conceito de função e que são apontadas pelos pesquisadores nos artigos analisados, mas também destacar possíveis tendências em relação aos referenciais teóricos adotados nas pesquisas, às metodologias empregadas e aos sujeitos contemplados.

Da leitura inicial dos artigos emergiram categorias de análise que utilizamos para articular os textos. Tais categorias são: a) Comparações Gerais; b) Dificuldades dos docentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele; c) Dificuldades dos discentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele; d) Dificuldades ou entraves relacionados às abordagens presentes em livros didáticos; e) Questões relacionadas à metodologia de ensino.

Em cada categoria, buscamos apresentar uma discussão do tema indicado em sua denominação por meio da articulação de trechos dos artigos analisados.

Para a apresentação da investigação realizada, organizamos este relatório em quatro capítulos, conforme descrito a seguir:

No Capítulo 1 – Problemática - são apresentados o tema e os objetivos de pesquisa, a revisão bibliográfica realizada e alguns elementos referentes ao desenvolvimento histórico do conceito de função.

O Capítulo 2 – Metodologia e Procedimentos Metodológicos - traz considerações a respeito da metodologia utilizada na pesquisa (metanálise qualitativa), dos procedimentos metodológicos para a busca e seleção dos artigos analisados, uma breve apresentação dos mesmos e as categorias de análise que emergiram da leitura dos artigos.

No Capítulo 3 – Metanálise dos Artigos Selecionados – propomo-nos a apresentar, como evidencia o próprio título, a metanálise dos artigos de acordo com as categorias anteriormente apresentadas.

Encerrando este relatório de pesquisa, o Capítulo 4 traz as considerações finais referentes à investigação realizada.

Capítulo 1 – Problemática

Este capítulo trata da problemática da pesquisa. Nele são apresentados o delineamento da escolha do tema, o objetivo da investigação, a revisão bibliográfica realizada e, finalmente, um panorama do desenvolvimento histórico do conceito de função, objeto matemático em foco neste trabalho.

1.1 – Tema de pesquisa e objetivos

Desde a Escola Básica manifestei interesse pela disciplina Matemática muito provavelmente em razão dos ótimos professores que, com maestria, ministravam suas aulas de forma diferenciada e utilizando métodos não convencionais, como jogos e brincadeiras, aliados ao domínio pleno que tinham do conteúdo. Tal vontade de se fazer entender da melhor forma e a dedicação ao ensinar certamente contribuíram para minha decisão de seguir o mesmo caminho profissional.

Ao iniciar a formação superior, porém, talvez por imaturidade, dei razão ao preconceito de amigos e família contra aqueles que decidiam pela Licenciatura e, por isso, num primeiro momento, não escolhi o curso de Matemática; optei pela Faculdade de Ciência da Computação, haja vista minha patente inclinação para a área de exatas.

Três semestres depois, percebi que não tinha feito a escolha adequada. Recorri, então, a antigos colegas, professores, psicólogos, pais, irmã, todos que pudessem orientar o meu caminho. Dentre essas inúmeras pessoas com quem conversei, uma em especial despertou meu olhar para o curso de Matemática novamente, mostrando que eu não ficaria restrita à docência ao optar por ele, mas poderia trabalhar em empresas, bancos e quaisquer outras instituições para as quais os conhecimentos em Matemática fossem um diferencial.

No início de 2010, ingressei novamente na Universidade, mas agora no curso de Licenciatura em Matemática, e, de todos os conteúdos aprendidos e teorias estudadas, vieram-me ao pensamento as divertidas aulas e os dedicados professores da Escola Básica. Foi nesse momento que percebi ter feito, finalmente, a escolha correta.

Durante o segundo semestre de 2010, ainda cursando os estágios obrigatórios, a coordenadora do meu curso indicou-me para uma vaga de professora auxiliar para

ministrar aulas de reforço. Vaga esta que assumi após uma criteriosa entrevista com os coordenadores daquela instituição.

Lembrando-me de meus dedicados professores, busquei desempenhar meu trabalho comprometida com o aprendizado e buscando sempre estar próxima aos alunos para entender suas necessidades.

Por serem aulas de reforço, as turmas eram relativamente pequenas. Assim, foi possível ter a aproximação desejada e, além disso, o atendimento personalizado permitiu uma considerável evolução no desempenho dos alunos, conforme relatos dos professores titulares da matéria.

De acordo com o currículo de tal escola, o conceito de função era introduzido no primeiro ano do Ensino Médio, mas os estudantes de todos os anos buscavam minhas aulas com muitas dúvidas e dificuldade em compreendê-lo. Como este, tantos outros conceitos eram encarados pelos alunos como algo impossível de se entender, o que implicava no “decorar” e não no “aprender”. Essa constatação perseguiu-me por todos os anos de Faculdade. Eu sentia a necessidade de encontrar uma forma de desmistificar o ensino destes e de outros conteúdos da Matemática que tanto assombravam os alunos. Foi então que decidi cursar o Mestrado em Educação Matemática.

A área de pesquisa escolhida foi a Álgebra e no Grupo de Pesquisas em Educação Algébrica (GPEA) fui apresentada a uma nova visão do todo, um olhar mais criterioso voltado para as teorias e pesquisas sobre o tema. Conhecer a Matemática enquanto pesquisadora acadêmica era o diferencial que me faltava para que eu pudesse enfim buscar entender melhor e aprender formas de desvendar aqueles conceitos que tanto sabia serem de difícil compreensão para os alunos.

Ao longo das aulas e reuniões de grupo decidi manter meu foco no estudo do conceito de “função”, escolhendo como objeto de pesquisa a exploração do mesmo, investigando-o sob o ponto de vista histórico-epistemológico e analisando como o ensino e a aprendizagem de tal conceito na Educação Básica têm sido abordado por pesquisadores nacionais em suas investigações.

O conceito de função deveria ser abordado em todos os níveis de ensino. As orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) são de abordar estas ideias desde os anos iniciais e inserir algumas sistematizações no nono ano do Ensino Fundamental. Para o Ensino Médio, é indicado que o professor apresente ao

aluno diferentes modelos de funções aplicadas em diferentes áreas do conhecimento (Brasil, 2006, p. 72).

Ardenghi (2008) afirma que o conceito de função é de extrema importância para a construção do conhecimento matemático. O estudioso relata também a importância de o aluno desempenhar um papel ativo na aprendizagem desse conteúdo.

Tal importância também é justificada por Ponte (1990), ao afirmar que diversos ramos da Matemática lidam de alguma forma, direta ou indiretamente, com funções. O autor cita exemplos, como o uso de funções de n variáveis na área de Análise Infinitesimal, onde se estudam as suas propriedades bem como as de suas derivadas; funções como soluções de equações nas teorias de equações diferenciais e integrais; funções como objetos de espaços trabalhados na Análise Funcional, o processo de controle dos erros na avaliação de funções de diversos tipos realizado pela Análise Numérica; dentre outros. E há outros ramos da Matemática que lidam, diretamente com conceitos que constituem generalizações da noção de função. Por exemplo, na Álgebra se consideram operações e relações e na Lógica se estudam as funções recursivas.

Ponte (1990, p. 8) destaca que, especialmente o conceito de função, permite relacionar, de maneira natural, três aspectos fundamentais da Matemática, que são:

(a) as representações analíticas, uma vez que entre as funções mais interessantes pelas propriedades se contam as que são dadas por uma expressão analítica simples (ou por uma expressão composta de várias expressões analíticas simples); (b) as representações gráficas, por via da Geometria Analítica; (c) a ligação com a realidade, uma vez que tudo o que pode ser contado ou medido pode ser representado por uma função.

Caraça (1951) já justificava a importância do conceito de função, destacando que tal noção surgiu como um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais. Estes estudos se originaram com as pesquisas de Galileu (1564 – 1642) e Kepler (1571 – 1630), sendo seus desenvolvimentos apoiados na notação algébrica de Viète (1540 – 1603) e na Geometria Analítica de Descartes (1596 – 1650) e Fermat (1601 – 1665).

Em seus estudos, Galileu afirmava que a Matemática é a linguagem apropriada para se estudar a natureza. Mais pontualmente, conclui que as funções de proporcionalidade direta e inversa, bem como as funções polinomiais e as trigonométricas são ideais para o estudo do movimento da queda dos graves (estudo

do movimento da queda dos corpos), do movimento dos planetas, e, de maneira geral, dos movimentos curvilíneos (PONTE, 1990, p.5).

A apropriação deste conceito por parte do estudante é de suma importância para a assimilação efetiva de uma série de noções matemáticas direta ou indiretamente relacionadas a ele.

A partir deste cenário, optamos, nesta investigação, por analisar a abordagem do tema função em pesquisas brasileiras da Educação Matemática. Para tanto, um espectro de amostras e uma fonte de pesquisa precisavam ser delimitados.

A escolha da revista “Educação Matemática Pesquisa” foi pensada em razão da representatividade e do reconhecimento dessa publicação no contexto brasileiro da Educação Matemática. Adotamos como espectro temporal de amostras o período entre os anos de 2006 a 2016, haja vista que onze anos foi o prazo entendido como adequado para se observar significativas mudanças no enfrentamento do objeto de estudo.

A proposta da pesquisa é, então, *a priori*, investigar o que é apresentado a respeito do conceito de “função” nos artigos de autoria de pesquisadores brasileiros publicados na revista Educação Matemática Pesquisa entre os anos de 2006 a 2016, e, *a posteriori*, a partir desse levantamento, fazer uma metanálise desses artigos buscando identificar alguns aspectos do objeto estudado no que se refere ao ensino e reflexões a respeito das possíveis consequências das dificuldades no aprendizado, de acordo com o resultado das pesquisas, dando ênfase, especialmente, às principais dificuldades, do ponto de vista matemático, enfrentadas por professores e estudantes da Educação Básica ao trabalharem com o conceito de função, apontadas pelos pesquisadores nos artigos analisados, mas destacando também tendências em relação aos referenciais teóricos adotados, às metodologias empregadas nas investigações, dentre outros.

Em outras palavras, as questões que norteiam essa problemática e que motivaram este estudo são: Quais os principais aspectos relativos ao conceito de função que têm sido enfatizados/discutidos nos artigos publicados na revista Educação Matemática Pesquisa nos últimos dez anos? Que teorias têm sido utilizadas para fundamentar essas investigações relativas ao tema função? Quais são as sugestões apresentadas por estes artigos? Há dificuldades, por parte do próprio professor da Educação Básica, com aspectos conceituais relativos à função? Se sim,

quais são elas? E os alunos, que dificuldades matemáticas enfrentam ao trabalhar com esse tema?

Para nos auxiliar nas análises, buscamos mais elementos a respeito do que tem sido discutido atualmente na área de Educação Matemática em algumas das pesquisas realizadas sobre o tema ensino e aprendizagem do conceito de função na Educação Básica. Tais pesquisas são apresentadas a seguir.

1. 2 – Revisão bibliográfica

A fim de auxiliar na construção dessa pesquisa, procuramos fazer um levantamento de alguns trabalhos realizados nos últimos cinco anos (2012 a 2017) sobre o conceito de função. Este levantamento foi necessário para compreender melhor a temática da pesquisa.

Nossa busca foi realizada no banco de dados da Capes, na Plataforma Sucupira e nas plataformas próprias de algumas instituições, tendo como objetivo apresentar pesquisas de diferentes regiões, proporcionando uma amplitude maior para nosso levantamento.

Esta busca foi feita inicialmente por palavras-chave, como: função; conceito de função; ensino e aprendizagem de função. Porém, foram encontrados mais de 6 mil trabalhos; sendo assim, foi feito o delineamento para selecionar apenas os trabalhos em Educação Matemática. Desta forma, reduzimos o número para, aproximadamente, 300 trabalhos. Ainda aprimorando a busca, procuramos por trabalhos em escola básica e que fossem atuais; chegamos ao número inferior a 50.

Na busca do aprimoramento deste trabalho, há três obras que não pertencem ao período considerado para a busca, mas que foram indiscutivelmente necessárias para a construção do mesmo e que acreditamos ser importante salientar. São elas: o artigo de Ponte (1990), a dissertação de mestrado de Schwarz (1995) e o livro de Caraça (1951).

Os trabalhos de Ponte (1990) e Schwarz (1995) nos auxiliaram por apresentarem o desenvolvimento histórico do conceito de função. Ambos relatam importantes transições e evoluções que puderam nos ajudar a conceber as possíveis justificativas para algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos e pelos

professores no ensino e na aprendizagem deste conceito, fato que será melhor discutido posteriormente em nossas análises.

Estes autores por sua vez, embasaram suas pesquisas em Youshevitch (1981) e em Caraça (1951), que relatam não só a evolução do conceito, como todo o processo de construção do mesmo.

Caraça (1951, p. 125), em seu livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, explica o surgimento do conceito de função como um instrumento para o entendimento da realidade, justificando assim a importância e a necessidade de seu estudo.

Em nossas buscas foi possível perceber que, em grande maioria, as pesquisas enfatizam estratégias distintas para auxiliar o ensino de funções, como a utilização de tecnologias e jogos e de elementos da história da Matemática, a análise de material didático, a resolução de problemas, as contribuições trazidas pela teoria de registros de representação semiótica, a análise do conhecimento dos professores sobre o assunto em questão, o estudo colaborativo e a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

Alguns trabalhos também trabalham com o conceito de função mas de forma diferenciada, como podemos observar em Carvalho et al. (2016). O objetivo da pesquisa destes autores não era refletir especificamente sobre o conceito de função, sobre a relação dele com outros objetos matemáticos; no caso, o ensino das estruturas multiplicativas como suporte das tecnologias digitais. Foram investigadas de que formas o conceito de função linear pôde contribuir para a compreensão do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Para isso, analisaram os conhecimentos matemáticos dos professores utilizando a pesquisa colaborativa para conduzir seus processos metodológicos.

Este tipo de pesquisa colaborativa também foi utilizado por Del Rio (2014) em seu trabalho no qual, o autor buscar proporcionar ao docente, ferramentas que possibilitem o uso do estudo colaborativo como também, explicar e estruturar o uso desta prática no ensino de Matemática no Programa de Educação para Jovens e Adultos (EJA).

O autor justifica a escolha desta prática com estes sujeitos de pesquisa, relatando que:

O fato de ter desenvolvido esse estudo do EC (Estudo Colaborativo) no Ensino de Jovens e Adultos se deu pelo fato de ser uma modalidade de ensino cujo público, historicamente, apresenta algumas dificuldades no processo de aprendizagem e também por se

tratar de uma modalidade de ensino na qual a diversidade de experiências se torna um diferencial para o desenvolvimento da prática colaborativa (DEL RIO, 2014, p. 8).

As suas atividades visavam à criação de um ambiente propício para a interação do professor com os alunos aliados com o ensino de funções, sendo cada aluno capaz de confrontar ideias, dividir conhecimentos e adquirir habilidades. Ao aplicar estas atividades, o autor pôde constatar que foi possível tanto a introdução do conceito básico de função como também suas diferentes formas de representação e a importância deste conceito, já que estabelecem ligações com diversas áreas do conhecimento. (DEL RIO, 2014, p. 8)

Estes elementos também estão presentes no trabalho de Galvão, Souza e Miashiro (2016), que têm como objetivo investigar a contribuição de um ensino apoiado em construções em ambientes de Geometria Dinâmica e em materiais concretos.

Estes autores apropriaram-se da Teoria da Aprendizagem Significativa para escolherem os conceitos relacionados à função seno e aplicarem-nos com base no *Design Based Research*, uma atividade em quatro sessões com nove alunos de uma turma de Licenciatura em Matemática. Cabe ressaltar que para a elaboração destas atividades foram consideradas as recomendações do Parâmetros Curriculares Nacionais e o desenvolvimento histórico de conceitos da Trigonometria.

Ao final das atividades e das análises das mesmas, os autores relatam:

Ao final da intervenção, verificamos que esta não foi suficiente para uma aprendizagem significativa desses conceitos. Contudo, observamos que todos os participantes conseguiram construir uma tabela e um gráfico de uma função periódica e, para dois deles, esse gráfico é o da função seno (GALVÃO; SOUZA; MIASHIRO, 2016, p. 1127).

Explorando essas ideias de representação gráfica podemos destacar dois trabalhos: a dissertação de Araújo (2015), que faz uso do GeoGebra, e a dissertação de Silva (2014), que utiliza calculadora gráfica.

No trabalho de Araújo (2015) o objetivo é apresentar uma complementação ao material disponibilizado pela Secretária de Educação do Estado para o ensino de funções afins e funções quadráticas.

O material disponibilizado pelo Estado, de acordo com o autor, tem cunho didático e é utilizado como referencial para organizar o aprendizado e, assim, objetivar

um ensino contextualizado e interdisciplinar de forma a potencializar as habilidades dos alunos (ARAÚJO, p. 5).

A complementação apresentada pelo autor busca proporcionar uma visão macro em torno do processo de construção do conceito de função desde o início do Ensino Fundamental até a sua formalização no Ensino Médio (ARAÚJO, p. 5).

O uso da tecnologia pelo autor, no caso o GeoGebra, se faz presente como ferramenta importante para o ensino de funções afins e quadráticas.

As tecnologias como recursos didáticos são também objeto de estudo de Silva (2014), que volta sua atenção especificamente para a calculadora gráfica.

O trabalho de Silva (2014, p. 15) tem como objetivo:

[...] mostrar como os recursos da calculadora gráfica podem melhorar a prática didático-pedagógica dos conteúdos funções afins e quadráticas do ensino médio e como este instrumento pode auxiliar, ou mesmo facilitar, o processo ensino-aprendizagem, complementando a abordagem “tradicional”, ou seja, aquela já adotada pelos professores na maioria das instituições de ensino. Apresentamos ainda, funções, recursos e aplicativos da calculadora para aprofundar conceitos que são, geralmente, vistos de forma insuficiente e superficial.

Em síntese, pudemos perceber que o intuito de aperfeiçoar a prática didático-pedagógica bem como a aprendizagem discente é um dos assuntos mais frequentes nas pesquisas sobre funções.

Em nossa busca encontramos trabalhos como os de Martinez (2015) e Breseghello (2016), que apresentam uma proposta de ensino fazendo uso da resolução de problemas; o de Maciel e Cardoso (2014), que buscam promover uma aprendizagem significativa de funções utilizando a história da Matemática como estratégia; os de Strapason e Bisognin (2013), Pereira (2012), Guimarães (2013), Dazzi e Dullius (2013) e Silva et al. (2015), que visam a facilitar o ensino e possivelmente maximizar a aprendizagem de funções com o uso de jogos e recursos computacionais.

Podemos perceber que há inúmeros trabalhos que utilizam de diversas maneiras estratégias diferenciadas nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de função. Estas diferentes abordagens podem ser, em algumas ocasiões, agentes auxiliares ou mesmo causadores de dificuldades neste processo, conforme discutiremos posteriormente.

Por hora, tendo apresentado, sinteticamente, alguns trabalhos desenvolvidos em diferentes níveis de ensino nos últimos dez anos a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função, elaboramos, na sequência, um breve panorama a respeito do desenvolvimento histórico do conceito de função, por meio do qual podemos justificar alguns dos entraves observados durante tais processos.

1.3 – Desenvolvimento histórico do conceito de função

Para Ponte (1990, p. 8), a noção de função em sua origem está associada à noção de lei natural, tendo, durante muito tempo, como elemento constitutivo mais determinante, a ideia de “regularidade”. Ainda segundo o autor, pode-se considerar na formação do conceito primitivo de função, três elementos essenciais:

- (a) a notação algébrica, portadora de importantes fatores como a simplicidade e o rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas condensando uma grande quantidade de informação;
- (b) a representação geométrica, proporcionando uma base intuitiva fundamental (de que é exemplo a associação das noções de tangente a uma curva e de derivada de uma função);
- (c) a ligação com os problemas concretos do mundo físico, associada à ideia de regularidade, que forneceu a motivação e o impulso fundamental do estudo.

A concepção da ideia de função vem sendo fundamentada durante anos. Pode-se dizer, segundo Rossini (2006, p. 32), que a história sobre sua formação, sua generalização e compreensão gradativa e a significação concreta que adquiriu com o processo do pensamento científico e filosófico é tumultuada e longa.

De acordo com Caraça (1951), a percepção de que a natureza é guiada por dois princípios fundamentais - a interdependência (tudo está relacionado entre si) e a fluência (tudo se modifica constantemente) - e a busca por regularidades em fenômenos naturais é que exigiu a construção de um instrumento matemático (função) que permitisse estudar variações, ou, mais precisamente, analisar como a variação em determinado elemento provocava a variação em outro relacionado a ele. Tal instrumento diz respeito exatamente à noção de relação funcional.

Segundo Youschkevitch (1981, p. 9), as principais etapas do desenvolvimento do conceito de função, até o século XIX, são a Antiguidade, a Idade Média e a Modernidade.

A Antiguidade foi a época, chamada por Schwarz (1995, p. 8), de o *primeiro estágio* da concepção de função. Foi nesse período que apareceram as primeiras ideias de funcionalidade com os babilônicos que, em 2000 anos a. C., já produziam tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas¹. A ideia de função entre os pitagóricos aparece no estudo da interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas.

Por sua vez, durante o período de Alexandria, também de acordo com Schwarz (1995), astrônomos desenvolveram uma trigonometria de cordas correspondentes a circunferência fixa, obtendo tabelas equivalentes às tabelas seno. E Ptolomeu, no século II d. C., em uma de suas obras, utiliza métodos numéricos e de interpolação de funções de duas variáveis na construção de tabelas, métodos que para ele eram implícitos e não considerados matemáticos.

Apesar dessas ideias de função já apresentadas terem sido encontradas no cotidiano desses povos, o período da Antiguidade, não criou nenhuma noção geral de funções e nem de quantidades variáveis, mesmo desenvolvendo um estudo de casos de dependência.

Youschkevitch (1981, p. 14) comprova essa afirmação sendo enfático ao dizer que não havia nenhuma ideia geral de funcionalidade: faltam palavras ligadas ao termo de função e a ideia mais abstrata e geral que unifica a dependência entre quantidades ou números sob descrição verbal, gráfico e tabela.

No período da Idade Média, mais precisamente no século XII, é que a noção de função aparece de forma mais genérica pela primeira vez. Esta ideia de função foi encontrada em trabalhos de alguns estudiosos como Roger Bacon e Robert Grosseteste, que estudavam fenômenos relacionados com calor, luz, cor, densidade, etc (SCHWARZ, 1995, p. 9).

Por volta do século XIV, Nicole Oresme desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes das formas, que segundo Schwarz (1995, p. 9), pode ser considerada precursora da representação gráfica de função.

Nessa teoria das latitudes das formas, um estudo das funções temporais é um elemento de suma importância, de acordo com Youschkevitch (1981, p. 21). Essa teoria alcançou um renome na França, Itália e Espanha nos séculos XV e XVI. E há

¹Tabelas associando um número escrito conforme o sistema de numeração de base 6 desenvolvido por eles ao seu quadrado ou a sua raiz quadrada.

quem diga que suas ideias provavelmente influenciaram Descartes de forma direta ou indireta.

Na ciência europeia do século XVI, qualquer dependência entre duas quantidades era representada verbalmente ou por um gráfico, mais que por uma fórmula.

Considerando o período Modernista, segundo Ponte (1990, p. 3), a noção de função surgia de forma “um tanto confusa” nos “fluentes” e “fluxões” de Newton (1642 – 1727), que utilizava também os termos *relata quantitas* para as variáveis dependentes e *genita* para as independentes obtidas a partir de outras por meio das quatro operações fundamentais da aritmética. Foi também no século XVII que se apresentou uma nova interpretação de funcionalidade, com a criação da álgebra simbólica e literal por François Viète (1540 – 1603). Essa criação introduziu a noção de função como relação entre dois conjuntos numéricos. Iniciou-se, assim, um novo método analítico que introduzia funções por meio de fórmulas e de equações.

Para Youschkevitch (1981, p. 9), esse método analítico fez uma revolução na Matemática por sua eficácia, assegurando ao conceito de função um lugar de destaque em todas as ciências exatas. E afirma que o aspecto foi decisivo para o desenvolvimento da teoria das funções, além da criação da álgebra simbólica, foi o crescimento dos cálculos matemáticos com os progressos alcançados na trigonometria, a descoberta dos logaritmos e a extensão do conceito de número. (p. 23)

Estas novas possibilidades expressivas que a álgebra simbólica de Viète proporcionou levaram ao aprofundamento do desenvolvimento dos estudos quantitativos dos fenômenos naturais realizados, especialmente, por Galileu e Kepler, bem como da Geometria Analítica, com Descartes e Fermat (PONTE, 1990, p. 3).

Fermat e Descartes apresentam esse método analítico aplicando-o à geometria. Schwarz (1995, p. 9) traz uma citação em que Fermat afirma: “Sempre que duas quantidades desconhecidas aparecem em uma igualdade, há um lugar e o ponto terminal de uma das duas quantidades descreve uma reta ou curva.” Já Descartes desenvolve de uma forma mais detalhada a noção de função em sua geometria, na qual consta:

Tomando sucessivamente infinitas grandezas diferentes para a reta y , encontraremos também infinitas para a reta x , e assim teremos uma infinidade de diferentes pontos daquele que se marcou C , por meio

dos quais descrevemos a curva perdida (DESCARTES *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 25).

Essa aplicação feita da álgebra à geometria suscitou a introdução de função na forma de equação, o que revolucionou o desenvolvimento de toda a Matemática e fez esse método de representação de função se estender para o cálculo infinitesimal.

Porém, a primeira vez que a palavra função apareceu em um manuscrito foi em 1673, no trabalho de Leibniz, mas não para designar a relação formal que liga a ordenada de um ponto de uma curva a sua abscissa, mas, de acordo com Ponte (1990, p. 3), apenas para indicar, em termos muito gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais.

Mahnke *apud* Youschkevitch (1981, p. 30) faz uma análise sobre o uso da palavra função por Leibniz, na qual afirma:

Leibniz ainda não utiliza a palavra função para designar a relação formal que liga a ordenada de um ponto de uma curva à sua abscissa, mas, como atesta o início do manuscrito, ele já tem no espírito o conceito geral de função que denomina utilizando a palavra *relatio*. No momento em que ele trata do problema de inversão da tangente, não se pode dizer que utiliza da palavra função no sentido que é dado pelos matemáticos contemporâneos, mas, preferencialmente, no sentido corrente de função de um organismo, de uma máquina. A expressão *in figura functionem facere* significa, por exemplo: ter um ponto de contato com a curva, ser perpendicular a, considerar a sua subtangente, a sua subnormal, etc, onde se deve evidentemente compreender que se trata de alguma coisa que é definida a partir de uma curva “funcionando” de tal e tal maneira, por exemplo, o segmento da tangente compreendido entre o ponto de contato e sua interseção com o eixo das abscissas.

Ponte (1990, p. 3) afirma que o avanço no desenvolvimento do estudo das curvas por meios algébricos fez com que surgisse a necessidade de um termo específico para representar “quantidades dependentes de alguma variável por meio duma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra ‘função’ foi adotada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Jean Bernoulli”.

Mas a definição explícita de uma função como expressão analítica aparece, de fato, com Jean Bernoulli (1667 – 1748): “chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que modo que seja dessa grandeza variável e de constantes”. (BERNOULLI *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 35)

Entretanto, foi Leonhard Euler (1707 – 1783), discípulo de Jean Bernoulli, no século XVIII, que começou a definir noções iniciais, discriminar as quantidades variáveis das constantes; fazer a distinção entre as funções contínuas e descontínuas;

criar o símbolo f e o usar parênteses para designar função. Em seu artigo publicado em 1797, em Paris, apresenta algumas definições preliminares para, em seguida, apresentar suas definições para *função de quantidade variável* e para *função de variável* e então fazer algumas considerações a respeito das funções:

1. Uma quantidade constante é uma quantidade determinada que tem sempre o mesmo valor. Tais são os números de toda espécie. Utilizam-se as primeiras letras do alfabeto a, b, c etc, para representar essas quantidades, utilizando caracteres.

2. Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou uma quantidade universal, que compreende todos os valores determinados. Uma quantidade variável compreende todos os números, não importa a sua natureza. Utilizam-se as últimas letras do alfabeto z, y, x etc para representar quantidades variáveis.

3. Uma quantidade variável torna-se determinada, assim que se atribui um valor determinado qualquer. Uma quantidade variável compreende todos os números, tanto positivos quanto negativos, os números inteiros e fracionários, aqueles que são racionais, transcendentos, irracionais. Não se deve excluir o zero nem números imaginários.

4. Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma maneira que seja, desta quantidade e de números ou de quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: $a + 3za + 3z$; $az - 4zzaz$; $az + b\sqrt{aa - zz}$ etc são funções de z.

5. Uma função de variável é também uma quantidade variável. Com efeito, como se pode colocar no lugar da variável todos os valores determinados, a função receberá uma infinidade de valores, e se for impossível conceber algum, do qual ela não seja suscetível, pois a variável compreende também os valores imaginários. Por exemplo, seja a função $\sqrt{9 - zz}$ onde não se pode dar um número maior que 3, enquanto se colocam números reais no lugar de z; entretanto, introduzindo z como número imaginário, não é possível assinalar um valor determinado, que possa ser deduzido da fórmula $\sqrt{9 - zz}$. Não é raro encontrar expressões que são funções aparentes; visto que qualquer que seja o valor dado da variável, elas conservam sempre o mesmo valor, como $z^0, \frac{aa-at}{a-t}$. Estas expressões, sob a forma aparente de funções de variáveis, são realmente constantes.

6. A principal diferença entre as funções reside na combinação da variável e das quantidades constantes. Ela depende das operações pelas quais as quantidades podem ser compostas e combinadas entre elas. As operações são: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e extração de raízes; acrescenta-se a resolução de equações. Além destas operações, que se chamam algébricas, existem muitas outras, denominadas transcendentos, como as exponenciais, logarítmicas ou outras conhecidas no Cálculo Integral.

7. As funções se dividem em algébricas e transcendentais [...] (EULER *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 37).

Youschkevitch (1981, p. 40-41) enfatiza que Josep-Louis Lagrange (1736 – 1813), assim como Euler e outros matemáticos do século XVIII, acreditava que toda função da análise Matemática podia ser representada por termos proporcionais às potências da variável independente. Lagrange define função da seguinte forma:

Chama-se de função de uma ou mais variáveis toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não de outras quantidades que podem ser vistas como tendo valores dados e invariáveis, ao passo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções, só se consideram as quantidades que se supõem variáveis; sem nenhuma atenção às constantes que podem ser misturadas.

Inspirado nos trabalhos de Euler, Condorcet (1778) avança nos estudos, distinguindo três tipos de função: (1) funções cuja forma é conhecida; (2) funções introduzidas por equações não resolvidas entre F e x, y, z ; (3) funções dadas somente por certas condições.

Um dos momentos dessa evolução considerado por Ponte (1990, p. 4) como sendo um dos mais marcantes foi quando Fourier (1768 – 1830), enquanto se ocupava dos problemas da condução de calor considerando a temperatura de um corpo uma função de duas variáveis, o tempo e o espaço, conseguiu conjecturar que “para qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica, num intervalo apropriado”.

Dirichlet (1805 – 1859) retomou este problema iniciado por Fourier e evidenciou as condições suficientes para que fosse possível representar uma função por meio de uma série de Fourier. Além disso, separou o conceito de função da sua representação analítica, concluindo que: “função seria simplesmente uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo o valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente.” (PONTE, 1990, p. 4)

Por volta do século XIX, Lobatchevsky *apud* Youschkevitch (1981, p. 59) define:

A concepção geral exige que uma função de x seja chamada em número que dado por cada x e que muda gradualmente ao mesmo tempo que x . O valor da função pode ser dado por uma expressão analítica, seja por uma condição que dá meio de testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente a dependência pode existir mas permanecer desconhecida.

A história do desenvolvimento do conceito de função é, conforme buscamos evidenciar nesta seção, bastante extensa, mas, de acordo com Monna (1972), o período compreendido entre o final do século XIX e o início do século XX merece uma atenção especial.

A definição que era utilizada nos cursos de Análise Matemática no fim do século XIX e no começo do século XX era a de Hankel, baseada em Dirichlet:

Diz-se que y é função de x se a cada valor de um intervalo corresponde um valor bem definido de y sem que isto exija, entretanto que y seja definido sobre todo intervalo pela mesma lei em função de x , nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explícita de x . (HANKEL *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 61)

Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos iniciada por Cantor (1845 – 1918), esta noção de função foi estendida ao longo século XX de forma que incluía as correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não (PONTE, 1990, p. 4).

Em 1935, surgiu a Associação Bourbaki, constituída por um grupo de jovens matemáticos franceses que, em 1939, publicaram o livro onde apresentaram a seguinte definição de função:

Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y , ou relação funcional de E em F , se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F , e somente um, que esteja na relação considerada com x . Dá-se o nome de função a operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x , e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (BOURBAKI, 1939, p.6 *apud* MONNA, 1972, p.82)

Sintetizando as ideias relatadas ao longo de toda a história e tendo como base os quadros apresentados por Schwarz (1995) e Rossini (2006), compilamos essas concepções de funções em um único quadro, o Quadro 1.

Quadro 1: Desenvolvimento do conceito de função

Época (Ano)	Autor	Concepção
2000 a. C.	Babilônios	Matemáticos babilônios usavam tabelas sexagésimas, de quadrados e de raízes quadráticas, de cubos e raízes cúbicas, e outras tabelas para cálculos. Revelando assim "um instinto de funcionalidade".
Por volta de 400 a. C.	Pitagóricos	Encontram-se formas de aparecimento do conceito de função determinando leis quantitativas de diversas quantidades físicas.
Escola de Alexandria	Ptolomeu	Construção de tabelas correspondentes às tabelas de seno. Tabelas construídas por métodos numéricos e de interpolação.
Século XIV	Oresme	Teoria das latitudes e longitudes das formas, precursora da representação gráfica. Teoria prestigiada nos séculos XV e XVI.
Século XVII	Fermat e Descartes	Concepção de função como relação entre dois conjuntos de números. Introduce função por meio de fórmulas e equações, pelo método analítico.
1637	Descartes	Equação em x e y que mostra dependência.
Final do Século XVII	Newton e Leibniz	Primeira vez que a palavra função aparece em um manuscrito.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto de curva.
1718	Jean Bernoulli	Chamamos de função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e de constantes. Relação entre grandezas e variáveis.
1748	Euler	Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes. Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultados de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes e variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; sequência de valores; ordenadas não sujeitas a uma lei comum.
1834	Lobatchevky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichlet e Lobatchevsky	Se uma variável y é assim relacionada a uma variável x , que sempre um valor numérico é marcado com x , há uma regra de acordo com a qual o único valor de y é determinado, então y é considerado uma função de variável independente x .
1837	Dirichlet	Correspondência: para cada valor de x (abscissas), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Diz-se que y é função de x se a cada valor de x de um certo intervalo corresponde um valor bem definido de y sem que isto exija entretanto que y seja definido sobre todo intervalo pela mesma lei em função de, nem mesmo que y seja definido por uma expressão Matemática explícita de x .
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo uma determinada lei.
Início do séc. XX	Cantor	Subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.

1939	Matemática, Editora Hachette	Consideramos a igualdade: $y = 2x - 3$. O número variável x pode ter vários valores e, qualquer que seja o valor dado a x , sabemos calcular o valor correspondente em y . Diremos ainda que y é uma função da variável x .
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo duas condições.
1961	Curso de Álgebra Elementar FEC, Mtl.	Uma quantidade é chamada de função variável independente enquanto seu valor depende da qual que se atribui a esta variável.
1969	Larousse: <i>Dictionnaire des Mathematiques Modernes</i>	Seja E e F dois conjuntos e G uma parte do produto cartesiano $E \times F$ tal que para todo elemento x de E existe um único elemento y de F tal que o par (x,y) pertence a G .
1983	Robert G. Bartle	Uma função f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra de correspondência que a cada x de certo subconjunto D de A associa um único e bem determinado elemento $f(x)$ de B .

Fonte: elaborado pela autora a partir de dados de Rossini (2007) e Schwarz (1995).

Finalizado este primeiro capítulo, no seguinte apresentamos a metodologia empregada na investigação, os procedimentos metodológicos e uma visão geral dos artigos da revista “Educação Matemática Pesquisa” selecionados para análise.

Capítulo 2 – Metodologia e Procedimentos Metodológicos

Neste capítulo apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa destacando os procedimentos empregados e trazemos ainda em forma de fichamentos uma breve apresentação dos artigos selecionados para nossas análises.

2.1 - Metodologia

O objetivo desse trabalho é a investigação do que tem sido discutido nas pesquisas brasileiras da Educação Matemática realizadas nos últimos dez anos e publicadas na “Educação Matemática Pesquisa” (EMP) a respeito do ensino e da aprendizagem do objeto matemático função, fazendo a correlação de alguns desses artigos por meio da metanálise a fim de encontrar elementos que possam auxiliar os pesquisadores e os professores na reflexão a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função.

Podemos dizer, então, que esse trabalho está dividido em duas partes: i) levantamento das informações; ii) correlação entre as informações colhidas e a problemática.

De acordo com Maranhão e Manrique (2014, p 428-429), ao contrário do estado da arte ou estado do conhecimento, que requer a coleta e análise de muitos estudos referentes à determinada temática, a metanálise qualitativa, “[...] em lugar de partir de amplitude, parte de poucos estudos para buscar ampliação, generalização”.

Conforme destaca Fiorentini (2013, p. 78), também citado por Maranhão e Manrique (2014),

[A] metanálise qualitativa surge como modalidade de revisão sistemática de estudos de natureza qualitativa, podendo ser um estudo profundo, envolvendo um número reduzido de trabalhos investigativos. Os resultados desses estudos podem ser integrativos, cruzados ou contrastados. Podem ter o intuito de produzir resultados mais amplos ou gerais.

Esta é, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 103), uma metodologia que busca fazer uma “[...] revisão sistemática de outras pesquisas, visando a realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou [...] produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos”.

2. 2 – Procedimentos Metodológicos

Para a construção deste trabalho foram seguidos os seguintes passos, explicados por Palanch e Freitas (2015, p 2-3):

[...] (i) definição dos descritores para direcionar a busca das informações; (ii) localização dos bancos de pesquisas (artigos, teses, acervos etc.); (iii) estabelecimento de critérios para a seleção do material que comporá o *corpus* do estudo; (iv) coleta do material de pesquisa; (v) leitura das produções, com elaboração de sínteses preliminares; (vi) organização de relatórios envolvendo as sínteses e destacando tendências do tema abordado; (vii) análise e elaboração das conclusões preliminares.

A seguir trataremos exatamente da composição do *corpus* do estudo.

2. 2. 1 – Seleção do *Corpus* de Estudo

Para a constituição do *corpus* de nosso estudo, o qual concebemos como “o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 2011, p. 126), foi feita uma seleção dos artigos da revista “Educação Matemática Pesquisa” buscando-se pelos descritores “função” e “conceito de função” – entendendo, é claro, função como objeto matemático – nos elementos pré-textuais e no corpo do texto. Desta fase resultou a amostra de 15 artigos revelada no Quadro 2, no qual são explicitados o ano de publicação, o volume e número da revista, seguidos do título do artigo e último sobrenome dos respectivos autores.

Do primeiro levantamento foram excluídos os artigos cujo foco era o Ensino Superior e também aqueles que não eram de autoria de pesquisadores brasileiros, visto que os primeiros não se enquadravam no nível de ensino que pretendíamos estudar e os segundos, por se tratarem de contextos internacionais, possivelmente não refletiam a realidade educacional brasileira. Assim, um novo quadro foi criado, o Quadro 3, com os 5 artigos analisados, e no qual indicamos também o nível de ensino em que a noção de função foi trabalhada na pesquisa relatada em cada artigo: Ensino Fundamental (EF), Ensino Médio (EM) ou Formação Continuada de Professores (FCP).

Quadro 2: Os 15 artigos selecionados no primeiro levantamento.

Ano	v.	n.	Título	Autor
2005	7	1	<u><i>Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycee.</i></u>	Bloch
2007	9	2	Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores.	Rossini
		1	Modelagem matemática e aplicações: uma abordagem para o ensino de funções.	Beltrão; Iglioni
2010	12	2	Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.	Traldi Jr.; Rosenbaum
		3	<u><i>Developing competencies to teach functions with GeoGebra from a holistic approach: a case study with prospective teachers.</i></u>	Chacón; Prieto
			<i>Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales.</i>	Villa-Ochoa; Vahos
2011	13	3	Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I.	Abreu; Reis
			<i>Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones.</i>	Rodríguez; Pochulu; Ceccarini
2012	14	1	<i>Learners' conceptualisation of the sine function during in introductory activity using sketchpad at grade 10 level.</i>	de Villiers; Jugmohan
2013	15	2	Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática.	Barbosa; Lins
2014	16	1	O conhecimento esperado sobre limites e continuidade a partir de análise das provas unificadas de Cálculo I na UFRJ.	Cunha; Fusaro
		2	<u>O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica.</u>	Lourenço; Oliveira
2015	17	1	Associando Pesquisa e Intervenção em uma disciplina de Introdução ao Cálculo: um Estudo de Caso na UFRJ.	Luz; Santos
			O uso de jogos da plataforma Mangahigh no estudo de funções polinomiais do 1º grau.	Tenório; Penna; Tenório
2016	18	2	O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural.	Neves; Resende

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 3: Os 5 artigos analisados, obtidos por meio de um refinamento do primeiro levantamento.

Ano	v.	n.	Título	Autor	Nível
2007	9	2	Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores.	Rossini	EF FCP
2010	12	2	Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.	Traldi; Rosenbaum	EM
2014	16	2	<u>O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica.</u>	Lourenço; Oliveira	EF EM
2015	17	1	O uso de jogos da plataforma Mangahigh no estudo de funções polinomiais do 1º grau.	Tenório; Penna; Tenório	EM
2016	18	2	O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural.	Neves; Resende	EF

Fonte: elaborado pela autora.

Na próxima subseção, com o objetivo de dar ao leitor deste trabalho uma visão geral a respeito dos artigos analisados antes de efetivamente explorar seus aspectos centrais por meio da metanálise, apresentamos os fichamentos dos mesmos, nos quais destacamos o título do artigo, seus autores, número de páginas, volume, número e data de publicação da edição da EMP na qual o artigo se encontra publicado, *link* de acesso ao artigo, transcrição do resumo e das palavras-chave, teorias e autores que embasam o texto, descrição dos objetivos, questões e hipóteses, descrição da metodologia, transcrição das principais conclusões e algumas referências bibliográficas.

2. 2. 2 – Apresentação dos artigos selecionados

O primeiro artigo que analisamos tem 43 páginas, foi escrito por Renata Rossini, publicado na revista em 2007 no volume 9 - número 2, com o título *Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores*. Pode ser acessado pelo *link* <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/903/596> (15/03/2016).

Este artigo apresenta o seguinte resumo:

O objetivo deste artigo é apresentar a análise da produção de professores da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, participantes de um projeto de formação continuada. Eles construíram e aplicaram uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de função em uma classe de oitava série do Ensino Fundamental da mesma rede. Os procedimentos metodológicos foram os da pesquisa-ação, que permitiu uma interação entre pesquisador e professores,

debates sobre conteúdos matemáticos, juntamente com reflexões de cunho pedagógico. O trabalho dos docentes foi examinado à luz da teoria antropológica do didático, que permite modelar o conceito de função em termos de organizações matemáticas e didáticas. A análise mostrou um progresso desde as primeiras cópias de materiais instrucionais, um enriquecimento do discurso do professor, o enfrentamento de dúvidas, uma preocupação com a redação de atividades. Alguns construtos foram retomados mais de uma vez, fortalecendo a organização matemática e a correspondente organização didática. No final, os professores institucionalizaram o conceito de função de uma maneira inovadora (ROSSINI, 2007, p. 205).

Nele, a autora utilizou a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999) como base para auxiliar a criação das atividades pelos professores a serem aplicadas aos alunos. Utilizou também a estruturação da teoria com as organizações matemáticas e didáticas para embasar as atividades e para analisar as produções dos professores.

O objetivo deste artigo é apresentar a análise da produção dos professores que participaram de uma formação continuada e construíram juntos uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de função, além de relatar as dificuldades deste grupo de professores no que se refere ao conceito de função e a superação das mesmas ao longo do processo de formação.

As questões que nortearam a pesquisa foram: O que significou, para um grupo de professores de ensino fundamental e médio da rede pública do estado de São Paulo, elaborar coletivamente uma sequência didática sobre função e aplicá-la em classe? Quais organizações matemáticas são mobilizadas por professores durante a construção de uma sequência de ensino sobre funções para a oitava série do ensino fundamental? Como os professores (re)constróem seus saberes docentes sobre o conceito de função?

Para responder a estas questões a estudiosa optou por uma pesquisa nos moldes de uma pesquisa-ação segundo Barbier (2004, p.41), que teve como característica a participação voluntária dos professores, consenso e disposição do grupo em preparar e aplicar a sequência de atividades em uma sala da oitava série do ensino fundamental e a participação da autora na discussão das atividades selecionadas.

Além disso, a pesquisadora buscou valorizar os saberes docentes à medida que estes emergiam estabelecendo um clima de confiança e de respeito, observando e acompanhando os professores na aplicação das atividades, e reformulando,

ampliando e questionando quando necessário os saberes tanto matemáticos quanto pedagógicos dos mesmos.

A pesquisa de campo teve início em maio de 2004 e terminou em outubro do mesmo ano. No decorrer deste tempo foram realizados 18 encontros na dependência da universidade e ainda uma experiência-piloto e seis sessões nas dependências de uma escola estadual na região metropolitana da Grande São Paulo.

Esta formação continuada foi dividida em 4 fases: a primeira com a presença de 12 participantes ao longo de 8 reuniões, nas quais se iniciou o debate sobre a viabilidade de introduzir o conceito de função em uma turma de oitava série. Os participantes responderam a um questionário e espontaneamente formaram-se três grupos de trabalho; na segunda fase ocorreu a aplicação do experimento-piloto com 2 horas de duração e a presença de 10 alunos de uma das oitavas series da escola pública estadual. Os professores utilizaram duas reuniões para discutir os fatos ocorridos durante a aplicação; na terceira fase, restaram sete participantes, dentre eles duas estudantes e cinco professores, que trabalharam na (re)construção da sequência didática durante seis reuniões; e, por fim, a quarta fase foi quando ocorreu a aplicação da sequência ao longo de seis aulas duplas na escola estadual, neste período também ocorreram, durante duas reuniões, os debates necessários para discutir os fatos vivenciados em sala de aula.

Em suas conclusões finais, a autora enfatizou:

A análise da produção docente, à luz a teoria antropológica do didático, estruturada em organizações matemáticas, organizações didáticas em torno das diferentes concepções de função, teve o mérito de expor os pontos nevrálgicos das dificuldades docentes, as superações em termos de tarefas, técnicas e discursos de cunho tecnológico (ROSSINI, 2007, p. 245).

Rossini também explicita que o artigo apresentado por ela tem como objetivo evidenciar que não há possibilidade de se construir uma organização didática sem haver uma discussão sobre conteúdos matemáticos e que a evolução desta organização didática fica atrelada ao fortalecimento e a ampliação da organização matemática ao longo de um trabalho colaborativo. (ROSSINI, 2007, p. 245)

Dentre seus apontamentos finais, destacamos também o seguinte trecho:

O árduo trabalho dos professores com o escrever e reescrever enunciados e tarefas, a superação de angústias e dúvidas, leva-nos a uma reflexão, como formadores de professores, sobre o ensino/aprendizagem de função na formação inicial. É necessário explorar as concepções de função, construir essa articulação entre as

organizações matemáticas que giram em torno de cada concepção – enfim, mostrar uma outra maneira de ensinar função. (ROSSINI, 2007, p. 245-246)

Este trecho teve o devido destaque porque apresenta ideias que vão ao encontro do que procuramos trabalhar nesta pesquisa de mestrado.

Os pontos nevrálgicos citados pela autora nos deram a ideia inicial para a metanálise que faremos neste trabalho.

O segundo artigo que analisamos foi escrito em conjunto por Armando Traldi Jr. e Luciane Santos Rosenbaum, publicado na revista em 2010 no número 2 do volume 12 contendo 25 páginas e intitulado *Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista*. Pode ser acessado pelo *link* <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4192/3311>. (15/03/2016)

Para este artigo, os autores escreveram o seguinte resumo:

Neste artigo é discutido como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Trigonométricas; como as pesquisas na área de Educação Matemática podem contribuir para a organização do ensino e como a atuação do professor se revela no que se refere às atividades de planejamento do ensino de forma compatível com uma perspectiva construtivista. O artigo tem como fundamentação teórica os estudos de Simon (1995) sobre o uso de THA no ensino de Matemática. Os resultados indicaram que o uso de pesquisas contribui para a organização do ensino; que a THA elaborada não foi suficiente para que a aprendizagem ocorresse, pois a atuação do professor teve papel decisivo na mediação da construção do conhecimento dos seus alunos. (TRALDI JR e ROSEMBAUM, 2010, p. 369)

A pesquisa apresentada tem como fundamentação teórica os estudos de Simon (1995) e de Gómez e Lupiáñez (2007) sobre a construção e o uso de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) no ensino de Matemática. Além disso, os autores consideram alguns elementos teóricos de Coll e Solé (2009), relativos ao construtivismo, e de Onrubia (2009), a respeito do papel reflexivo do professor.

O objetivo deste artigo é construir, analisar e avaliar a construção de THA sobre Funções Trigonométricas a partir de situações de ensino e de aprendizagem em relação a expectativas sobre a aprendizagem no Ensino Médio e ainda contribuir com o desenvolvimento profissional dos sujeitos da pesquisa e refletir a respeito da necessidade de mudanças, por parte dos mesmos, em suas práticas pedagógicas.

A pesquisa apresenta questões como: Por que é melhor utilizar o círculo trigonométrico com o raio unitário? Por que o número de voltas no círculo pode ser

infinito? No que implica a alteração da posição dos parâmetros na representação da função f , como por exemplo, $f(x) = 2 + \text{sen}(x)$, $f(x) = 2 \text{sen}(x)$, $f(x) = 2 \text{sen}(2x)$ e $f(x) = \text{sen}(2x)$? Como as pesquisas na área de Educação Matemática podem contribuir para a organização do ensino? Como a atuação do professor se revela no que se refere às atividades de planejamento do ensino de forma compatível com uma perspectiva construtivista?

A fim de responder a essas questões, os autores fizeram uso de uma metodologia de natureza qualitativa no qual elaboraram uma THA. O estudo foi desenvolvido com a participação de 2 professores e 70 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo e contou com a coleta de dados na observação das aulas, entrevistas com estes sujeitos de pesquisa e com os protocolos produzidos pelos estudantes.

Toda esta investigação foi desenvolvida em duas partes. A primeira consistiu-se na revisão bibliográfica junto com a análise de documentos e currículos do Ensino Médio que tratavam sobre o ensino e aprendizagem de Funções Trigonométricas. Já a segunda fase foi composta pelas entrevistas com os professores participantes do projeto e a elaboração das atividades que constituem a THA.

Com a análise destes dados, os autores (p.388) verificaram que a identificação dos objetos de aprendizagem ajudou os professores que participaram do estudo a compreenderem os objetivos que se pretendiam alcançar com a aplicação da atividade focada em funções trigonométricas. Puderam notar também uma maior autonomia dos alunos, fato que não era percebido pelos professores ao utilizar uma abordagem que não fosse construtivista, e relatam:

Concordamos com Simon (1995), que apenas com o conhecimento matemático é possível interpretar a linguagem, as dúvidas, as conjecturas e as ações dos alunos. O professor deve conhecer os objetivos de aprendizagem que espera alcançar, para que possa modificar a THA quando perceber que os alunos se distanciaram de suas metas ou quando uma determinada atividade não for adequada aos seus alunos (TRALDI JR e ROSEMBAUM, 2010, p. 389).

De acordo com os autores, a participação de todos os envolvidos no projeto gerou uma reflexão sobre a prática desses professores, ampliando de forma enriquecedora seus conhecimentos e promovendo a conscientização da importância dos processos de aprendizagens. E acrescentam que:

Os resultados obtidos nos levaram a concluir que o uso de pesquisas em Educação Matemática contribui para a organização do ensino de

funções trigonométricas, no entanto carece de criar meios de levar tais pesquisas para os professores (ZEICHNER, 1998; PASSOS, 2007). Verificou-se que embora as THA's sejam potencialmente ricas, é complexa a tarefa de elaboração de atividades para que se efetive uma aprendizagem numa perspectiva construtivista (GÓMEZ, P. & LUPIÁÑEZ, 2007). Constatamos que a participação em tarefas que envolvem o uso de tecnologia e manipulação de materiais potencializa o aprendizado de funções trigonométricas. Porém, a THA elaborada não foi suficiente para que a aprendizagem ocorra, pois, a atuação do professor teve papel decisivo na mediação da construção do conhecimento dos alunos. Da mesma forma vivenciamos que a interação e a participação entre alunos e professor foram essenciais para uma aprendizagem significativa (TRALDI JR e ROSEMBAUM, 2010, p. 390).

O terceiro artigo que analisamos é *O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica*, escrito por Edrei Henrique Lourenço e Paulo César Oliveira, publicado na revista em 2014, no volume 16 – número 2, contendo 15 páginas. Pode ser acessado pelo [link](http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17380/pdf)<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17380/pdf> (15/03/2016).

Para ele, é apresentado o seguinte resumo:

Neste estudo procuramos verificar o quanto os resultados alcançados pelas dissertações e teses defendidas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, que abordaram o conceito de função à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica agregam de benefícios para a aprendizagem do mesmo no âmbito da educação básica. Para tanto, sistematizamos a produção de informações em duas fases: levantamento de todos os possíveis trabalhos e análise dos trabalhos que tangenciam o Ensino Fundamental e Médio. Na análise focamos na relação entre os registros de representação semiótica e suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem de função. A relevância deste estudo consiste na possibilidade de conhecer e compreender o estado do conhecimento produzido sobre o tema, em determinado período, por meio da organização do conjunto de informações e resultados obtidos (LOURENÇO e OLIVEIRA, 2014, p. 369).

Relata-se uma pesquisa na qual o objetivo é sintetizar, por meio de um estudo do tipo Estado da Arte realizado a partir dos trabalhos recorrendo à teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) defendidos no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, no período de 2002 a 2011, as contribuições trazidas por essa teoria aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função na Educação Básica (LOURENÇO e OLIVEIRA, 2014, p. 372).

De acordo com os autores, a sistematização da análise da produção de informações coletadas por meio das pesquisas selecionadas guiou-se pela seguinte

questão de investigação: Quais as contribuições os registros de representação semiótica para o processo de ensino e aprendizagem de funções no Ensino Fundamental II e Ensino Médio?

O artigo trata de uma pesquisa qualitativa bibliográfica. Para a coleta dos dados, foi realizado um Estado da Arte, sendo que os autores organizaram esse mapeamento em duas fases: na primeira dividiram os trabalhos em categorias de análise e na segunda fizeram um quadro adaptando a ideia de Fiorentini (2002).

Na primeira fase utilizaram como categorias de análise a modalidade de trabalho (dissertação ou tese), ano de publicação, título, autor e orientador. Mas, em alguns casos, só a leitura do título e resumo não foram satisfatórias para compreender efetivamente o trabalho realizado; foi necessário, então, em alguns casos, recorrer às referências bibliográficas. Esta fase foi determinante para a escolha dos trabalhos cuja leitura foi feita na íntegra.

Na segunda fase, foram eleitas as informações gerais (ano, título de trabalho autor e orientador) para organizar as pesquisas em quadros seguindo uma ordem cronológica, de acordo com o nível de ensino abordado.

Após a leitura destas pesquisas, os autores puderam observar que o problema que motivava as mesmas estava relacionado à vivência dos pesquisadores no ensino do conceito de função, especialmente no que diz respeito aos tipos de representações e, sobretudo, à conversão de representações e a utilização da linguagem natural, considerando que estes são agentes provocadores das dificuldades por parte dos alunos. (LOURENÇO e OLIVEIRA, 2014, p. 380)

Essas observações referentes às representações semióticas do objeto matemático função serão retomadas ao analisarmos, com base nos artigos, as dificuldades tanto discentes quanto docentes em relação a esse conceito da Matemática.

O quarto artigo analisado tem 24 páginas e foi publicado no número 2 do volume 17 em 2015. Este artigo traz como título *O uso de jogos da plataforma Mangahigh no estudo de funções polinômias do 1º grau* e foi escrito por André Tenório, Patricia Penna e Thaís Tenório e pode ser acessado pelo [link http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21966/pdf](http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21966/pdf) (15/03/2016).

Este artigo apresenta como resumo:

A importância de empregar jogos de computador educativos da plataforma Mangahigh no estudo de Matemática foi pesquisada. O

jogo *Save our dumb planet* e um desafio do Prodigy foram usados para discutir função polinomial do 1º grau. Alunos de uma turma de 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro participaram da pesquisa. Antes de manipular os jogos, muitos tinham dificuldades em entender o conceito de função, calcular pontos a serem marcados no plano cartesiano e construir gráficos. Durante as aulas, ao empregar os recursos, foi perceptível a facilidade em manipular jogos e a rapidez de adaptação à plataforma Mangahigh. Para a maioria, o Mangahigh ajudou a compreender melhor o conteúdo. Entretanto, estatisticamente, não houve correlação entre as notas em um teste e os escores obtidos no jogo ou no desafio. (TENÓRIO;PENNA;TENÓRIO, 2015, p. 257)

Não há um referencial teórico específico fundamentando o estudo descrito, mas os autores relatam que o mesmo foi embasado em considerações a respeito da utilização de tecnologias e jogos como recursos auxiliares nos processos de ensino e de aprendizagem. Autores que desenvolvem trabalhos nessa linha de investigação são citados ao longo do texto, dentre eles: Alves (2001), Bauerlein (2012), Borba (1999) e Graven (2011).

O artigo apresenta a análise do emprego de jogos do Mangahigh como recurso pedagógico para o estudo da função polinomial do 1º grau por alunos da 1ª série do Ensino Médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro com o objetivo de identificar a existência de correlação entre os escores obtidos pelos alunos nos jogos e as notas obtidas em testes tradicionais e analisar as percepções dos alunos sobre os jogos do Mangahigh.

Os autores justificam a importância do emprego deste tipo de atividade, relatando que:

A importância de utilizar novas tecnologias em sala de aula é cada vez maior, especialmente, no ensino-aprendizagem de matemática (BORBA, 1999). O ensino da matemática alicerçado nas novas tecnologias visa a participação dinâmica e interativa. Empregar jogos computacionais como um recurso didático lúdico pode incentivar o interesse pelos conteúdos e favorecer a aprendizagem (OLIVEIRA, 2007), mesmo porque a tecnologia não é mais algo distante da realidade dos alunos. (TENÓRIO; PENNA;TENÓRIO, 2015, p. 277)

Foi feita uma análise quantitativa e qualitativa; quantitativa ao comparar as notas dos alunos e qualitativa considerando as observações feitas pelo professor em seus registros pessoais. As funções polinomiais do 1º grau foram discutidas com o apoio do jogo *Save our dumb planet* e de desafios Prodigy. Ao todo, 48 alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual do Rio de Janeiro participaram da pesquisa que foi aplicada no primeiro semestre de 2014.

De início o conteúdo foi ministrado por aulas teóricas (duração de 300 minutos), nas quais as dificuldades puderam ser relatadas; depois, os alunos puderam manipular os jogos no laboratório de informática da própria escola (duração 300 minutos) e então aplicou-se uma avaliação tradicional (duração de 100 minutos) e um questionário sobre as percepções dos alunos a respeito do uso dos jogos (duração de 30 minutos).

Durante estas aulas, os autores puderam observar e relatar que a forma como os alunos absorviam o conteúdo proposto era mecânica, não desenvolviam o raciocínio lógico e cognitivo, apenas decoravam tudo inclusive os métodos de resoluções. Assim, após tomarem nota, muitos alunos conseguiram acertar algumas das questões da lista para casa, mas somente aquelas que eram parecidas com as desenvolvidas em aulas ou que demandavam menos interpretações (TENÓRIO; PENNA; TENÓRIO, 2015, p. 277).

De forma estatística, os autores apontem que:

Conforme as percepções dos alunos, o jogo e o desafio auxiliaram a interpretar gráficos de funções do 1º grau (45%), a compreender o conceito de função (28%), a resolver problemas (19%) e a construir gráficos e marcar coordenadas no plano cartesiano (7%). Entretanto, estatisticamente, não foi observada correlação entre as notas dos alunos no teste e os escores conseguidos no jogo e no desafio. (TENÓRIO; PENNA; TENÓRIO, 2015, p. 278)

E assim concluem:

[...] o docente não deve adotar os jogos como a única estratégia metodológica no estudo da matemática e sim usá-lo como suporte para auxiliar a construção do conhecimento, de modo a alcançar um ambiente escolar que busque a aprendizagem significativa. (TENÓRIO; PENNA; TENÓRIO, 2015, p. 279)

Os autores puderam diagnosticar também algumas dificuldades em cálculos com números negativos, na compreensão do próprio conceito de função, em analisar e construir gráficos, em resolver sistemas com duas variáveis, em realizar cálculos com números fracionários, em desenvolver um raciocínio autônomo havendo a necessidade de auxílio contínuo do professor. Mas, segundo os professores participantes da pesquisa, a dificuldade maior foi a turma ter demonstrado certa resistência para fugir dos recursos tradicionais.

Estas dificuldades apresentadas pelos autores neste artigo também nos deram subsídios para, a partir dos dados, evidenciarmos nossas categorias de análise.

O quinto e último artigo analisado foi escrito por José Divino Neves e Marilene Ribeiro Resende, com 27 páginas e o título *O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural*. Este artigo foi publicado em 2016, no volume 18 – número 2 e pode ser acessado pelo *link* <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/23866/pdf> (15/03/2016).

Como resumo, temos:

Este artigo apresenta parte dos resultados de pesquisa realizada com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, cujo objetivo foi analisar o processo ensino-aprendizagem do conceito de função nos anos finais do Ensino Fundamental a partir de uma sequência didática elaborada, desenvolvida e analisada na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Desenvolveu-se por meio de um experimento didático, organizado em quatro etapas: levantamento bibliográfico e documental; diagnóstico da realidade e elaboração do experimento; desenvolvimento das atividades e análise dos dados. Há indícios de que os alunos se apropriaram dos elementos que constituem a essência do conceito de função; na execução do experimento didático, o trabalho coletivo favoreceu a apropriação de significados e de sentidos para função (NEVES e RESENDE, 2016, p. 599).

Conforme apontam os autores do artigo, a pesquisa teve como fundamentação teórica as contribuições da Teoria Histórico-Cultural, a partir de Vigotski (2002, 2009, 2010) e de outros colaboradores, como Davidov (1988, 1998, 1999) e Leontiev (1983). Os principais aspectos dessa teoria que serviram de suporte para o estudo se relacionam ao desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores, a formação do pensamento teórico, a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e a formação de conceitos. As questões de álgebra e suas concepções e o estudo de funções nos documentos oficiais também completaram os assuntos pesquisados. As seguintes obras foram utilizadas como referenciais complementares: Aquino (2013), Caraça (1984), Freitas (2010), Libâneo (2009), Lins (2001), Moura (2010).

A pesquisa apresentada teve como objetivo geral analisar os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função nos anos finais do Ensino Fundamental, a partir de uma sequência didática de atividades de ensino elaboradas, desenvolvidas e analisadas na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. O objeto de investigação foi a formação do conceito de função, tendo como questão norteadora: Como organizar um sistema de atividades de estudo para a formação do conceito de função junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental, com foco na essência desse conceito?

Foram definidos, também, os seguintes objetivos específicos: 1) fundamentar teoricamente a formação de conceitos, na perspectiva histórico-cultural; 2) levantar os conteúdos de álgebra propostos nos currículos e no livro didático, especialmente os ligados ao conceito de função; 3) elaborar e aplicar as atividades para a formação do conceito de função no 9º ano do ensino fundamental; 4) analisar os episódios visando à formação do conceito de função.

A metodologia adotada foi a de pesquisa qualitativa com a realização de um experimento didático, conforme discutido por Freitas (2010) e Davidov (1998). Os procedimentos metodológicos foram organizados em quatro etapas: 1) levantamento bibliográfico e documental visando à fundamentação teórica – estudo de documentos tais como Parâmetros Curriculares Nacionais, Diretrizes Curriculares do Município de Uberaba, e análise desse tema no livro didático de Matemática adotado pela escola; 2) observação de aulas de Matemática para melhor conhecer os alunos em suas características e os modos como se envolvem nas atividades de ensino de Matemática, e elaboração das atividades de ensino de forma colaborativa com os professores de Matemática envolvidos no projeto de pesquisa; 3) desenvolvimento das atividades com os alunos do 9º ano de uma escola pública de Uberaba, registradas com fotos e gravadas em áudio e vídeo; 4) análise dos dados coletados a partir dos pressupostos da teoria adotada.

Para ser coerente com a perspectiva teórica, buscou-se inspiração para definição do que é essencial no conceito de função nas ideias de Caraça (1984). Salienta-se também que, ao propor as atividades e analisá-las, o esforço foi o de colocar o foco nos nexos internos do conceito, ainda que trabalhando também com os nexos externos.

Os autores, de acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014), consideram nexos internos os elementos que têm o lógico-histórico dos conceitos e nexos externos os elementos que se relacionam às formas de representação do mesmo.

Os autores deste artigo destacaram como importante, a partir das análises obtidas, a atuação do professor em organizar, planejar, incentivar, acompanhar e orientar os seus alunos, como se fez presente em todas as etapas do processo aplicado. Este incentivo no trabalho coletivo possibilitou os questionamentos entre os alunos, a partir dos quais todo erro cometido era discutido, evidenciando a

autorregulação e autoavaliação, formas consideradas pelos autores efetivas neste tipo de trabalho. Ademais:

Os resultados permitem considerar que há indícios de que os alunos se apropriaram dos elementos constitutivos do conceito de função; percebe-se, a partir das respostas emitidas pelos alunos, ao longo da pesquisa, que a essência do conceito de função, ou seja, os seus nexos internos foram apropriados pela maioria dos alunos, nesse primeiro momento de aproximação dele. (NEVES e RESENDE, 2016, p. 623)

Por fim, os autores puderam concluir que apesar da existência de um grande número de pesquisas e de grupos de estudo sobre a temática do ensino de álgebra, tratar deste assunto ainda pode ser considerado como um desafio principalmente quando se discute a relação entre o pensamento e a linguagem algébrica. Fato com o qual concordamos e levamos em consideração para a construção deste trabalho.

Após as leituras e os levantamentos dos elementos principais de cada artigo selecionado, elementos presentes nos textos nos levaram a algumas categorias para organizar nossa análise de forma a atingir o objetivo da pesquisa por nós levada a efeito e que está sendo relatada por meio desta dissertação. Desta forma, apresentaremos a seguir, na próxima seção, o delineamento destas categorias.

2. 3 – Categorias de análise

Como dito anteriormente, nesta seção buscamos explicitar as categorias de análise que emergiram dos dados coletados durante as leituras e discussões sobre os artigos que *a priori* selecionamos e que foram apresentados na seção anterior.

Deste modo, inicialmente estabelecemos a categoria:

a. Comparações gerais

Por meio de tal categoria, visamos a estabelecer, como indica seu próprio nome, diferentes tipos de comparações entre os trabalhos: referenciais teóricos adotados, metodologia/procedimentos metodológicos empregados, sujeitos de pesquisa, níveis de ensino e instituições aos quais os autores são filiados.

Além desta, com o intuito de expor os pontos nevrálgicos das dificuldades relativas a conteúdos matemáticos enfrentadas por docentes e discentes ao trabalharem com o conceito de função e que são, implícita ou explicitamente, discutidas e/ou salientadas em cada um desses artigos analisados, organizamos as categorias:

- b. Dificuldades dos docentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele;
- c. Dificuldades dos discentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele;
- d. Dificuldades ou entraves relacionados às abordagens presentes em livros didáticos;
- e. Questões relacionadas à metodologia de ensino.

No próximo capítulo apresentaremos por meio da metanálise a relação entre os artigos analisados utilizando as categorias como base para a articulação de ideias.

Capítulo 3 – Metanálise dos artigos selecionados

Neste capítulo, apresentaremos as articulações dos artigos que constituíram o *corpus* desta investigação. Isso será feito por meio de uma metanálise, considerando, para tal, as categorias organizadas a partir das leituras de tais artigos, conforme apresentamos na seção anterior. Recorreremos também, em alguns momentos, à visão de outros pesquisadores para que, por meio de suas considerações, possamos aprimorar a nossa argumentação.

a. Comparações gerais

Nesta categoria temos o intuito de estabelecer uma comparação geral de diferentes aspectos dos artigos analisados: metodologia/procedimentos metodológicos utilizados, referencial teórico escolhido, sujeitos de pesquisa, níveis de ensino e instituições aos quais os autores das pesquisas são filiados (ou ao menos eram na época da publicação do artigo).

Neste primeiro quadro buscamos mostrar os títulos dos artigos, juntamente com seus autores e as instituições às quais são filiados.

Quadro 4: Título e autores dos artigos analisados e instituições a que esses autores são filiados.

Ano	v.	n.	Título	Autor	Instituições Filiadas
2007	9	2	Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores.	Renata Rossini	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2010	12	2	Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.	Armando Traldi Jr. e Luciane S. Rosembaum	Instituto Federal de São Paulo Pontifícia Universidade Católica de São Paulo Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
2014	16	2	<u>O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica</u>	Édrei H. Lourenço e Paulo C. Oliveira André	Universidade Federal de São Carlos
2015	17	1	O uso de jogos da plataforma Mangahigh no estudo de funções polinomiais do 1º grau	Tenório; Patricia Penna e Thaís Tenório	Instituto Federal do Rio de Janeiro Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro
2016	18	2	O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural	José D. Neves e Marilene R. Resende	Universidade de Uberaba

Fonte: elaborada pela autora.

Quadro 5: Níveis de ensino e sujeitos de pesquisa contemplados pelos artigos analisados.

Ano	Título	Autor	Nível de ensino	Sujeitos de pesquisa
2007	Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores.	Rossini	Ensino Fundamental	Professores
2010	Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.	Traldi e Rosenbaum	Ensino Médio	Professores e alunos
2014	<u>O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica</u>	Lourenço, e Oliveira	Ensino Fundamental e Médio	Não há sujeitos
2015	O uso de jogos da plataforma Mangahigh no estudo de funções polinomiais do 1º grau	Tenório, Penna e Tenório	Ensino Médio	Alunos
2016	O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural	Neves e Resende	Ensino Fundamental	Alunos

Fonte: elaborada pela autora.

Percebe-se, por meio do Quadro 5, que há um equilíbrio na quantidade de artigos que voltam suas atenções para o Ensino Fundamental e aqueles relativos ao Ensino Médio. O mesmo acontece em relação aos sujeitos de pesquisa: há equidade entre o número de pesquisas cujos sujeitos são alunos e aquelas cujos sujeitos são professores. Apenas uma das investigações analisadas, por se tratar de um estudo bibliográfico do tipo Estado da Arte, não possui sujeitos de pesquisa.

Ao considerarmos as metodologias/procedimentos metodológicos e os referenciais teóricos adotados nos artigos analisados, podemos apresentar o seguinte quadro:

Quadro 6: Metodologia/procedimentos metodológicos e referencial teórico presentes nos artigos selecionados.

Ano	Autor	Metodologia / Procedimentos Metodológicos	Referencial teórico
2007	Rossini	Moldes de uma pesquisa-ação segundo Barbier (2004), caracterizada pela participação voluntária dos professores e disposição do grupo para preparar e aplicar uma sequência didática de atividades em uma sala de aula com a participação da autora nas discussões.	Utilizou a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard (1999))
2010	Traldi e Rosenbaum	Primeira etapa: análise de documentos curriculares e revisão bibliográfica referentes ao ensino e aprendizagem de Funções Trigonométricas. Elaboração das atividades que constituíram a THA. Realização de entrevistas com os professores parceiros, para a caracterização dos mesmos, apresentação do projeto e discussão de propostas de mudanças da THA. Segunda etapa: desenvolvimento da THA em sala de aula pelos professores parceiros, seguida de discussões entre eles e a professora pesquisadora sobre o andamento das atividades. Entrevistas com os alunos e com os professores parceiros para discussão dos resultados alcançados e sugestões de alterações. A partir da análise dos dados coletados elaboração da terceira versão da THA e síntese das considerações observadas. Uma pesquisa qualitativa bibliográfica, onde a coleta de dados foi realizada por estado da arte, dividida em dois momentos: no primeiro momento os trabalhos analisados foram divididos em categorias de análise e no segundo momento elaborou-se um quadro adaptando as ideias de Fiorentini (2002) para disponibilizar informações gerais sobre as pesquisas. Esse segundo momento contemplou ainda a utilização de informações específicas sobre as investigações para analisar a relação entre os registros de representação semiótica e suas contribuições no processo de ensino e de aprendizagem do conceito de função.	O uso de Trajetória Hipotéticas de Aprendizagem no ensino de Matemática (THA) (Simon (1995) e Lupiáñez (2007))
2014	Lourenço e Oliveira	Pesquisa qualitativa, com a aplicação de um jogo apoiado ao conceito de função do 1º grau, para alunos de Ensino Médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro, no qual foram considerados as observações do professor em registros pessoais, as atividades desenvolvidas pelos alunos e os questionários. Realizaram também uma pesquisa quantitativa, ao compararem as notas que os alunos obtiveram nas avaliações e nos escores do jogo manipulado por eles.	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval (2003))
2015	Tenório, Penna e Tenório	Pesquisa qualitativa, com a realização de um experimento didático, organizado em 4 etapas: 1) levantamento bibliográfico e documental; 2) observação de aulas de Matemática; 3) desenvolvimento das atividades e 4) análise dos dados coletados.	Embasa-se em considerações a respeito da utilização de tecnologias e jogos como recursos auxiliares nos processos de ensino e aprendizagem de acordo com autores como Alves (2001), Bauerlein (2012), entre outros.
2016	Neves e Resende	Pesquisa qualitativa, com a realização de um experimento didático, organizado em 4 etapas: 1) levantamento bibliográfico e documental; 2) observação de aulas de Matemática; 3) desenvolvimento das atividades e 4) análise dos dados coletados.	As contribuições da Teoria Histórico-Cultural (Vygotsky (2002, 2009, 2010) e outros como Davidov (1988, 1998, 1999) e Leontiev (1983))

Fonte: elaborada pela autora

Por meio do Quadro 6, fica evidente que, dos cinco artigos analisados, quatro referem-se a pesquisas empíricas e um à pesquisa bibliográfica do tipo Estado da Arte e que não há predominância de um referencial teórico em detrimento de outros nos textos analisados; pelo contrário, cada uma das cinco pesquisas fundamentam-se a partir de constructos teóricos diferentes.

Após estes breves apontamentos em relação às características gerais dos artigos, apresentaremos a articulação dos textos analisados enfatizando as diferentes dificuldades relatadas por cada autor em relação ao trabalho com o conceito de função.

b. Dificuldades dos docentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele

Nesta categoria evidenciaremos algumas dificuldades apresentadas pelos professores em relação ao próprio objeto matemático função e que foram relatadas pelos autores dos artigos analisados. Antes efetivamente de darmos início a essa discussão, buscamos explicitar a importância de uma formação de qualidade para o futuro professor.

De acordo com Tardif (2000, p. 7):

Em sua prática, os profissionais devem-se apoiar em conhecimentos especializados e formalizados[...]. Esses conhecimentos especializados devem ser adquiridos por meio de uma longa formação de alto nível, a maioria das vezes de natureza universitária ou equivalente. Essa formação é sancionada por um diploma que possibilita o acesso a um título profissional, título esse que protege um determinado território profissional contra a invasão dos não-diplomados e dos outros profissionais.

No que diz respeito à formação do professor de Matemática, Traldi Jr e Rosembaum (2010, p. 370) relatam que alguns estudos como o de Brito e Morey (2004) deixam evidente que, em geral, não há uma exploração e nem o desenvolvimento do conceito de função nesta ocasião e, quando isso é feito, o mesmo é tratado, geralmente, de maneira superficial, podendo deixar de fora itens importantes para a sua compreensão. Certamente há reflexos dessa prática na atuação futura do professor em sala de aula. Ao observar e analisar a postura dos professores em sua pesquisa, Traldi Jr e Rosembaum (2010, p. 379) relatam:

Pudemos observar que a professora tinha dúvidas em relação ao conteúdo e quando sentia mais segurança quanto ao conteúdo melhor

o apresentava, mais autonomia tinha para desenvolvê-lo e mais autonomia possibilitava aos alunos. Em contrapartida, quando sentia maior fragilidade em relação ao seu conhecimento, resgatava a postura de transmiti-lo, talvez para evitar muitas intervenções dos alunos.

Esta observação está de acordo com as ideias de Shulman (1986) a respeito da necessidade de o professor conhecer o conteúdo que leciona. Apenas o conhecimento de conteúdo, no caso o matemático, não é suficiente para o docente, mas este é, sem dúvida nenhuma, primordial.

Observando a postura de outro professor, os autores afirmam:

[...] percebemos que o professor sentia dificuldade relativamente ao conteúdo matemático e também que não lia as atividades previamente, como consequência não desenvolvia as aulas como o previsto e muitas vezes apenas discutia os temas superficialmente (TRALDI JR e ROSEMBAUM, 2010, p. 379).

Evidencia-se, portanto, um conhecimento superficial do conhecimento de conteúdo por parte do docente, quando, segundo Shulman (1986, p.9 – tradução nossa):

Os professores não só devem ser capazes de enunciar para estudantes a veracidade de afirmações em um domínio. Eles também devem ser capazes de explicar porque uma proposição particular é considerada justificada, por que vale a pena conhecê-la, e como ela se relaciona com outras proposições no interior de determinada disciplina.²

Rossini (2007, p. 216) também traz evidências que nos fazem pensar na importância de o docente ter o domínio do conteúdo matemático que leciona, no caso, o conceito de função. Um dos professores, sujeito de sua pesquisa, questiona: “Eu não entendo o conceito. Como vou entender o que o aluno entende?”.

Mais uma vez, Shulman (1986, p. 9) apresenta considerações que nos auxiliam a refletir a respeito da importância do domínio do conteúdo matemático por parte do professor que ministra essa disciplina em qualquer nível educacional:

O professor não precisa só entender que algo é assim; o professor deve compreender ainda porque é assim, e em que circunstâncias nossa crença em sua justificativa pode ser enfraquecida e até mesmo negada. Além disso, esperamos que o professor entenda porque um determinado tópico é particularmente central para uma disciplina

²Teachers must not only be capable of defining for students the accepted truths in a domain. They must also be able to explain why a particular proposition is deemed warranted, why it is worth knowing, and how it relates to other propositions, both within the discipline and without, both in theory and in practice.

enquanto outro pode ser um pouco periférico. (SHULMAN, 1986, p. 9 - tradução nossa)³

Dificuldades diretamente relacionadas ao próprio entendimento do que é função também foram relatadas por Rossini (2007, p. 216). A autora, em um determinado momento de sua análise, salienta que:

Percebe-se que o discurso (dos professores) sobre funções limita-se ao uso da palavra função fora do contexto matemático. Além disso, não conseguem explicar o que é a dependência ou o que é função, e acreditam que os gráficos de funções são linhas contínuas pois “se não ligar os pontos não é função” (Professora Hortência, 4/6/2004).

Outra dificuldade que se evidenciou entre os professores com os quais Rossini (2007, p. 216) trabalhou, foi a de construir gráficos. A autora apresenta a discussão entre um grupo de docentes no qual uma das professoras dizia ser importante acrescentar à atividade a construção de gráficos, sendo que um dos professores desabafou dizendo ser difícil relatar o que ele próprio sabe exatamente por não compreender bem o conceito:

Juliano: “Você fala tanta coisa boa. Você precisa formalizar.”
Flávio: “Eu sei, mas é isso que não consigo: formalizar. Eu não entendo o conceito. Como vou entender o que o aluno entende?”

Nessa mesma discussão, outra dificuldade dos professores em relação ao conteúdo matemático se destacou: os professores manifestaram dúvidas ao construir o gráfico de uma função em relação à representação das variáveis nos eixos horizontal e vertical de um sistema de eixos cartesianos. Qual das variáveis, a dependente ou a independente, deveria ser representada no eixo horizontal? Sobre esta discussão, Rossini (2007, p. 234), em certo momento de seu texto, destaca que um dos professores participantes da pesquisa se deparou com este problema:

No final do debate, a identificação das variáveis dependente e independente é excluída da atividade Dobrando Papel. Mas essa exclusão gerou um outro problema: os professores se perguntaram como iriam explicar para o aluno que a variável independente é representada no eixo horizontal e a dependente, no eixo vertical.

Rossini (2007, p. 221) também afirma, após o descarte de uma atividade escolhida por um dos professores, que a sua não utilização talvez tenha ocorrido

³ The teacher need not only understand that something is so; the teacher must further understand why it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied. Moreover, we expect the teacher to understand why a given topic is particularly central to a discipline whereas another may be somewhat peripheral. This will be important in subsequent pedagogical judgments regarding relative curricular emphasis.

porque os docentes apresentam dificuldades em relacionar proporção e função linear. Ao colocar em discussão que a representação gráfica de uma função linear é uma reta, a fala de um dos professores nos comprova essa possível dificuldade ao dizer: “Trabalhei a proporcionalidade, mas quando entrou na função não falou mais nada e nem eu fiz a ligação. [...] Fica a lacuna lá no meio e você não liga nem a pau. (Professor César, 17/9/2004)”.

Em seu texto, é possível perceber outra dificuldade dos professores em relação ao conceito de função, quando eles expõem que a lei de formação de uma função está atrelada única e exclusivamente a uma expressão algébrica. Manifesta-se que a concepção de toda função é definida por uma expressão algébrica e, mais ainda, por uma única expressão algébrica (ROSSINI, 2007, p. 221).

Questões relacionadas aos símbolos normalmente empregados no trabalho com função também foram evidenciadas por Rossini (2007). Um dos sujeitos de sua pesquisa, uma professora de Física, no caso, revelou, ainda que implicitamente, dificuldades relativas à compreensão da noção de variável ao dizer se tratar de uma “frescurinha” o uso do $f(x)$, justificando que, para ela, o uso de $f(t)$ (t é a variável tempo) tinha mais sentido, mesmo considerando $t = x$.

Já no trabalho de Traldi Jr e Rosembaum (2010, p. 379), durante o processo da aplicação da atividade na pesquisa, puderam ser observados fatos que levaram os autores a concluir e apontar algumas dificuldades dos professores em questão, como o uso da tecnologia, que segundo os autores já era algo previsto por eles, e também dificuldades em relação ao próprio conteúdo matemático, manifestadas especialmente por um dos professores, sendo preciso intervenções dos pesquisadores.

Os autores ressaltam em seu texto, que estas dificuldades apresentadas pelos professores foram percebidas pelos alunos. Eles destacam alguns depoimentos dos estudantes que comprovam este fato: “no projeto ele estava aluado, tadinho. A gente perguntava, ele falava e ia para o outro lado. E ele nem sabia o que a gente estava perguntando”. Outra aluna, de acordo com os autores, relatou que: “ia bastante para a lousa porque o professor não sabia usar os instrumentos. Ele não tinha noção básica. Não tinha noção básica de trigonometria. E não sabia se aprofundar muito. Notei desde o primeiro momento” (TRALDI JR e ROSEMBAUM, 2010, p. 384-385).

A maioria das dificuldades apresentadas, como os autores apontam, podem, em alguma medida, estar relacionadas a uma formação inadequada destes professores. A falta de compreensão docente do conceito de função acarreta outras dificuldades específicas no trabalho com o mesmo em sala de aula e, conseqüentemente, pode prejudicar o aprendizado dos estudantes, gerando, por exemplo, dificuldades como as que serão tratadas na seção seguinte.

c. Dificuldades dos discentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes a ele

Com a leitura dos artigos analisados, buscamos trazer a esta seção alguns trechos que remetem às dificuldades relativas ao conceito de função ou a noções aderentes a ele, que, conforme apontam os artigos, são enfrentadas pelos alunos ao trabalhar com esse objeto matemático.

Para iniciarmos a discussão recorreremos a uma afirmação de Almouloud (2007, p. 140), que destaca o fato de o conceito de função ter demorado 2000 anos para se consolidar, o que contribui para a criação de obstáculos no ensino da mesma.

Sobre esse ponto de vista, Sierpiska *apud* Perrin-Glorian (1994, p. 93) relata um dos obstáculos didáticos que podem ser criados ligados diretamente à noção de função, quando, no trabalho com a mesma, enfatiza-se a sua representação algébrica. Neste caso, corre-se o risco de os alunos conceberem a ideia de função apenas como uma atribuição de valor numérico à variável independente.

Outras dificuldades referem-se, como destacam Neves e Resende (2016), às notações $f(x)$ e y e ao significado da expressão $y = f(x)$. Os autores relatam que os alunos que participaram da pesquisa por eles desenvolvidas, quando lhes foi solicitado escrever a expressão analítica da função, apresentaram dificuldades em manejar e interpretar tais notações.

Tenório, Penna e Tenório (2015, p. 262) acrescentam ainda que os sujeitos de seu estudo apresentaram certas restrições no entendimento da dependência das variáveis em uma relação funcional e na construção da representação gráfica da função. Lourenço e Oliveira (2014, p. 375) também mencionam essa “dificuldade em relação à (compreensão da) dependência entre as variáveis”.

As dificuldades apontadas estão diretamente ligadas aos diferentes tipos de representação semiótica de uma função. Este aspecto é salientado por Lourenço e

Oliveira (2014, p. 375), que afirmam que “as dificuldades centram-se no reconhecimento e articulação entre distintos registros de representação”.

Essas dificuldades relativas aos diferentes registros de representação evidenciadas pelos artigos não são novidades nas investigações referentes aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. De acordo com Damm *apud* Machado (2012, p. 168):

O que se constatou em diversas pesquisas em Educação Matemática é a dificuldade que o aluno encontra em passar de uma representação a outra. Ele consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém, é incapaz de fazer conversões necessárias para a apreensão desse objeto.

Especialmente em relação aos problemas enfrentados pelos estudantes ao trabalharem com funções trigonométricas, Traldi Jr e Rosebaum (2010, p. 376-377) explicitam a partir de estudos realizados por autores como Lindegger (2000), Nascimento (2005), Costa (1997), Briguenti (1994, 1998), Klein (2009), Brito e Morey (2004), Martins (2003), Barbosa (2009) e Borges (2009), dificuldades “[...] na simplificação de notação, no uso de instrumentos, na formulação de hipóteses, no conhecimento de funções e a dificuldade na construção dos gráficos das funções trigonométricas”, algumas das quais estão diretamente relacionadas àquelas relativas às representações discutidas anteriormente.

Conforme discute Damm *apud* Machado (2012, p. 170), em Matemática, a questão das diferentes representações é realmente significativa, uma vez que elas permitem “a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento”. Assim, faz-se necessário explorar em sala de aula, de forma clara e precisa, as diferentes possibilidades de representações semióticas do objeto matemático função.

d. Dificuldades ou entraves relacionados às abordagens presentes nos livros didáticos

No âmbito desta categoria, discutimos, por meio da articulação de alguns trechos dos artigos analisados, dificuldades e entraves vivenciados por docentes e estudantes ao trabalharem com o conceito de função que estão diretamente relacionadas à maneira como tal conteúdo é apresentado nos livros didáticos utilizados pelo professor que se apropria dos mesmos como auxiliares no método de ensino e pelo aluno que os utiliza no processo da aprendizagem do conceito de função.

De acordo com Lajolo (1996, p. 4):

[...] o livro didático é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares.

Questões relacionadas à abordagem dada pelos livros didáticos ao conceito de função são reveladas pelos autores de dois dos artigos por nós analisados. Como evidenciado por Rossini (2007, p. 214), algumas dificuldades relacionadas às escolhas feitas por autores de livros podem surgir já no início da organização didática do professor. A autora destaca que, durante as intervenções realizadas com professores (alguns dos sujeitos de sua pesquisa), estes, ao buscarem construir atividades didáticas inspiradas, em um primeiro momento, naquilo que era apresentado pelos livros, mostraram-se insatisfeitos em relação a tais materiais; relataram a ausência de uma atividade que pudesse dar origem a uma sequência didática que fosse coerente e estivesse em consonância com o que tais professores acreditavam ser o correto.

Neves e Rezende (2016, p. 604), por sua vez, observam nos livros didáticos a falta de informações realmente necessárias para o processo de compreensão do assunto que está sendo abordado. Os autores afirmam que uma análise desse tipo de material mostrou que o mesmo, por exemplo:

[...] não traz orientações claras ao professor sobre os conteúdos algébricos a serem explorados no 9º ano nem faz relações do conceito de função, um conceito fundamental, com o movimento lógico-histórico do ensino da matemática, ou seja, com aquilo que esse conceito tem de essencial revelado no caminhar da humanidade rumo a abstrações e generalizações mais complexas, em busca de compreender e transformar o mundo em que vive. ”

Para Lajolo (1996, p. 5), “todos os componentes do livro didático devem estar em função da aprendizagem que ele patrocina” e, além disso, para a autora, a aprendizagem do aluno não se dá apenas pela leitura das informações fornecida pelo livro, mas também pela realização das atividades sugeridas por ele.

Em relação especificamente a essa questão das atividades propostas pelos livros, Neves e Resende (2016, p. 604), ao analisarem os exercícios propostos por determinado livro didático, observaram que os mesmos “envolvem funções, partindo de situações particulares para generalizações e conclusões gerais. Esse movimento é contrário àquele proposto por Davidov (1999) para a formação dos conceitos”.

Em outro momento, os autores também a respeito de determinado livro destacam:

Fica evidente a priorização das regularidades, espera-se que os alunos façam generalizações, o que, em geral, não ocorre. A representação analítica da função aparece logo depois da definição, sem nenhuma relação que possa esclarecer o significado de cada termo utilizado (NEVES e RESENDE, 2016, p. 604).

Há, é claro, pontos positivos também percebidos pelos pesquisadores ao analisarem livros didáticos. Rossini (2007) destaca, por exemplo, que alguns de seus sujeitos de pesquisa observaram em um determinado livro didático uma tentativa de fazer conexões entre mapas, escala e função linear, tipo de conexão que segundo a autora não é usualmente encontrada nos livros didáticos de Matemática.

Ao relatar uma tarefa trabalhada com seus sujeitos de pesquisa que tinha orientação diferente em relação àquelas que normalmente aparecem nos livros didáticos, Neves e Resende (2016, p. 615), mais uma vez, dão pistas de algumas características das atividades presentes em tais materiais que podem não ser adequadas aos processos de ensino e de aprendizagem de função. Destacam que:

Essa tarefa, diferentemente de muitas que estão nos livros didáticos, não apresenta os valores para que o aluno, a partir da observação, faça generalização, que segundo Davidov e Márkova (1987), é empírica. Na realização dela, os alunos tiveram de pensar em valores para as variáveis, e focar sobre a interdependência e a fluência.”.

Deste modo é perceptível que algumas das dificuldades normalmente enfrentadas pelos discentes quando estão estudando função podem ser agravadas se não houver a devida adaptação em relação ao que apresenta o livro didático, adaptação esta que deve ser feita pelo professor ao utilizar o livro para o desenvolvimento de atividades visando à construção desse conhecimento matemático. A realização desta adaptação é um ato que faz parte da metodologia de ensino adotada por este professor, foco da próxima categoria de análise a ser apresentada.

e. Questões relacionadas à metodologia de ensino

A discussão que compõe essa seção está relacionada às dificuldades no trabalho tanto do professor quanto do estudante com o conceito de função, as quais, conforme evidenciam os artigos analisados, podem estar ligadas às abordagens de ensino adotadas pelo docente ao abordar tal conteúdo.

Essas escolhas podem causar obstáculos na aprendizagem, chamados por Brousseau de *obstáculos didáticos*, que, de acordo com Amouloud (2007, p. 142):

Nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimento cujo domínio de validade é questionável ou incompletos que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. Os obstáculos desse tipo são, em sua maior parte, inevitáveis e inerentes à necessidade da transposição didática, embora seu reconhecimento permita ao professor rever a introdução escolhida para um determinado conceito para explicar a dificuldade vivida pelo aluno.

Considerando que é papel do professor buscar e adaptar as metodologias de ensino de forma a maximizar a aprendizagem do aluno, Tardif (2000, p. 7) afirma:

[...] os conhecimentos profissionais exigem sempre uma parcela de improvisação e de adaptação a situações novas e únicas que exigem do profissional reflexão e discernimento para que possa não só compreender o problema como também organizar e esclarecer os objetivos almejados e os meios a serem usados para atingi-los.

Nos artigos por nós analisados, questões relativas a estes aspectos podem ser detectadas, por exemplo, em Rossini (2007, p. 219), que em suas análises relata que, no trabalho com o grupo de professores sujeitos da sua pesquisa, dentre outras discussões, surge o questionamento: Como redigir uma tarefa?. A partir desta questão, os sujeitos puderam refletir a respeito do fato de que, para a redação de uma tarefa efetivamente apropriada para possibilitar aos estudantes a construção de conhecimentos, é necessário o domínio por parte do professor, conforme discutimos na categoria (b), do conteúdo que está sendo trabalhado.

Chevallard (1999, p. 241), cujas ideias fundamentam teoricamente o texto de Rossini (2007), propõe as organizações didáticas como respostas às questões como esta vivenciada pelos professores sujeitos da pesquisa de Rossini (2007, p. 210).

Na sala de aula, o problema do professor é ensinar, ou seja, fazer funcionar, em uma classe, uma determinada organização matemática. Para isso, ele precisa (re) construir uma organização didática que solucione a tarefa que ele vai propor aos alunos.

Outra dificuldade apresentada pela autora no que se refere ao planejamento de situações de ensino por parte dos docentes foi o fato de os professores discutirem boa parte dos elementos principais da organização didática - como a redação de um texto, redação das tarefas, o informe sobre o uso de tais instrumentos, a inclusão de algumas explicações pertinentes, a comparação de dados - mas não refletirem, por

exemplo, a respeito do tempo que os alunos levariam para realizar tal tipo de tarefa (ROSSINI, 2007, p. 223).

Questões relacionadas às dificuldades docentes em relação a diferentes metodologias de ensino também foram observadas pelos autores Traldi Jr. e Rosembaum (2010, p. 381) quando um determinado professor, sujeito de sua pesquisa, apresentou dificuldades em se adaptar ao método de ensino proposto pelos pesquisadores, que pode ser justificada, segundo os autores, pelo fato de este professor não estar acostumado a administrar a aprendizagem dos seus alunos. Ainda esses autores puderam observar que este não fazia questionamentos e obstruía as discussões ao desconsiderar as intervenções e conjecturas apresentadas pelos alunos.

O método proposto por esses autores foi o uso de Trajetórias Hipotéticas da Aprendizagem (THA) e os mesmos relatam que: “as pesquisas que integram o projeto trouxeram à tona a dificuldade dos professores em trabalhar com a perspectiva construtivista em consequência da concepção dos docentes como ‘transmissores de conhecimentos’ ” (TRALDI JR e ROSEMBAUM, 2010, p. 376).

Este fato vai ao encontro das ideias de Lima (2009, p. 187), quando este afirma que “a dificuldade e o despreparo dos professores em trabalhar com essa perspectiva, por mais que se esforçassem. Demonstração de que a perspectiva construtivista é pouco ou nada utilizada no ambiente escolar”.

Ainda a esse respeito, Traldi Jr. e Rosembaum (2010, p. 376) puderam concluir que a THA não foi o instrumento principal para a aprendizagem, mas sim o desempenho e as concepções dos professores sobre como ensinar Matemática.

Este tipo de relato nos faz voltar ao ponto de vista que apresentamos no início desta categoria ao citar Tardif (2000) no que diz respeito à importância das competências profissionais do professor, que também se articulam com a teoria das praxeologias criada por Chevallard (1999).

Capítulo 4 – Considerações Finais

Como vimos no início deste trabalho, o conceito de função é tratado em todos os níveis de ensino. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), as orientações são de abordar estas ideias desde os anos iniciais e inserir algumas sistematizações no nono ano do Ensino Fundamental. Para o Ensino Médio, as orientações determinam que o professor apresente ao aluno diferentes modelos de funções aplicadas em diferentes áreas do conhecimento. (Brasil, 2006, p. 72)

O estudo deste conceito, como salienta Caraça (1951), é de suma importância, pois tal noção surgiu como um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais.

Tal importância também é justificada por Ponte (1990), ao afirmar que diversos ramos da Matemática lidam de alguma forma, direta ou indiretamente, com funções. Como exemplos, o autor cita, dentre outros, o uso de funções de n variáveis na área de Análise Infinitesimal, onde se estudam as suas propriedades bem como as de suas derivadas; funções como soluções de equações nas teorias de equações diferenciais e integrais; funções como objetos de espaços trabalhados na Análise Funcional e o processo de controle dos erros na avaliação de funções de diversos tipos realizado pela Análise Numérica. E há outros ramos da Matemática que lidam diretamente com conceitos que constituem generalizações da noção de função, por exemplo: na Álgebra se consideram operações e relações e na Lógica se estudam as funções recursivas.

Evidencia-se, portanto, que a apropriação deste conceito, por parte do estudante, é extremamente importante para a assimilação efetiva de uma série de noções matemáticas direta ou indiretamente relacionados a ele.

A partir deste cenário, optamos, nesta investigação, por analisar a abordagem do tema função em pesquisas brasileiras da Educação Matemática. Mais especificamente, nos ativemos ao objetivo de investigar o que tem sido discutido nas pesquisas brasileiras da Educação Matemática realizadas nos últimos dez anos e publicadas na revista “Educação Matemática Pesquisa” (EMP), editada pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP a respeito do ensino e da aprendizagem do objeto matemático função.

De início foi feita uma busca de forma geral nos artigos da EMP do período considerado a partir da palavra função. Neste primeiro momento, foram encontrados 15 artigos e, deste levantamento inicial, foram excluídos aqueles cujo foco era o Ensino Superior e também os que não eram de autoria de pesquisadores brasileiros, haja vista que tais publicações não se enquadravam no nível de ensino que pretendíamos estudar e por se tratarem de contextos internacionais, possivelmente não refletiam a realidade educacional brasileira. Assim, restauramos cinco artigos a serem analisados nesta dissertação.

Após a seleção dos artigos, os mesmos foram lidos na íntegra e, nestas leituras, atentamo-nos para as dificuldades, tanto discentes como docentes, enfrentadas durante o trabalho com o conceito de função, direta ou indiretamente salientadas pelos autores. Foi a partir disto que emergiram as nossas cinco categorias de análise: a) comparações gerais: categoria na qual apresentamos as informações gerais dos artigos, como nível de ensino, instituições às quais os autores são filiados, a metodologia e o referencial teórico adotado, os procedimentos metodológicos, entre outros; b) dificuldades dos docentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes à ele; c) dificuldades dos discentes em relação ao conceito de função ou a noções aderentes à ele; d) dificuldades ou entraves relacionados às abordagens presentes nos livros didáticos; e, finalmente, e) questões relacionadas à metodologia de ensino.

Com a definição das categorias de análise, buscamos realizar a correlação dos cinco artigos por meio da metanálise, a fim de encontrarmos elementos que possam auxiliar os pesquisadores e os professores na reflexão a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função e especialmente responder às questões que nortearam essa pesquisa de mestrado.

Em relação aos principais aspectos referentes ao conceito de função enfatizados/discutidos nos artigos analisados, podemos destacar:

- O acompanhamento de docentes na elaboração, em momentos de formação continuada, de sequências didáticas para o ensino e a aprendizagem de função e, neste processo, a análise a respeito das dificuldades enfrentadas pelos mesmos e suas possíveis superações;
- Reflexões a respeito de como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de função e em relação a como

as pesquisas da área de Educação Matemática podem contribuir para a organização do ensino;

- Reflexões referentes às contribuições trazidas pela teoria dos Registros de Representação Semiótica aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função na Educação Básica;
- Possíveis contribuições trazidas pela utilização de jogos como recursos didático-pedagógicos no ensino de função.

A respeito das teorias empregadas, conforme já salientamos, não há uma predominância nos artigos analisados; cada um deles recorre a uma fundamentação teórica diferente.

Os autores dos artigos analisados não explicitam sugestões, mas questões fundamentais que devem ser levadas em consideração por professores e também por pesquisadores da área da Educação Matemática. São elas:

- A necessidade de se explorar, na formação inicial, as diferentes concepções de função, construindo uma articulação entre tais concepções e as organizações matemáticas que podem ser atreladas a cada uma delas;
- A necessidade urgente das pesquisas e de seus resultados chegarem aos professores;
- A importância da tomada de consciência, por parte dos professores, de que jogos ou outros recursos tecnológicos não devem ser utilizados como únicas estratégias metodológicas, mas como suportes para auxiliar a construção do conhecimento;
- A importância de se continuar fazendo pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, principalmente discutindo a relação entre o pensamento e a linguagem algébrica.

Finalmente, vimos que, embora os artigos analisados tenham abordagens diferentes, todos eles mostram que as dificuldades em relação ao conceito de função, tanto por parte de professores quanto de estudantes, estão relacionadas à não-compreensão efetiva do mesmo.

Rossini (2007) e Traldi Jr. e Rosembaum (2010) trazem elementos que evidenciam a importância de o docente ter o domínio do conteúdo matemático que leciona, no caso específico deste trabalho o conceito de função. Rossini (2007)

destaca também uma concepção comum entre professores em relação ao conceito de função: a de que a lei de formação de uma função está atrelada única e exclusivamente a uma expressão algébrica. Manifesta-se aí a concepção de que toda função é definida por uma expressão algébrica e, mais ainda, por uma única expressão algébrica.

Conforme pudemos perceber por meio das informações apresentadas na seção 1.3, essa ideia também esteve fortemente presente durante o processo de desenvolvimento histórico do conceito de função, perdurando por pelo menos dois séculos:

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduziria a diversas incoerências e limitações (de facto, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes!) (PONTE, 1990, p. 4).

Questões relacionadas aos símbolos normalmente empregados no trabalho com função também foram evidenciadas, em especial por Neves e Resende (2016), que relatam as dificuldades dos alunos que participaram da pesquisa em manejar e interpretar notações usualmente utilizadas em questões relacionadas ao conceito de função.

As dificuldades em relação às diferentes representações e notações relacionadas ao conceito de função, enfrentadas tanto por estudantes quanto pelos próprios professores, foram amplamente evidenciadas na maioria dos artigos por nós analisados.

Essa questão das representações também permeou o processo histórico de desenvolvimento do objeto matemático função. Ponte (1990, p. 8) considera em seu texto três elementos essenciais na formação do conceito de função de forma primitiva. Dentre estes elementos temos a notação algébrica, que permitia a manipulação de expressões analíticas ao tratar com informações em quantidades; a representação geométrica, que permitia associações com uma base intuitiva; e a associação com problemas concretos, o que forneceu segundo o autor, motivação e impulso fundamentais para o estudo.

Questões relacionadas às abordagens dadas pelos livros didáticos ao conceito de função também são reveladas pelos autores dos artigos analisados. Como aponta Rossini (2007), algumas dificuldades relacionadas às escolhas feitas por autores de

livros podem surgir já no início da organização didática do professor. Além disso, Neves e Rezende (2016), identificaram nos livros didáticos a falta de informações realmente necessárias para o processo de compreensão do assunto que está sendo abordado.

Deste modo, é perceptível que algumas das dificuldades normalmente enfrentadas pelos discentes podem ser agravadas sem a devida adaptação em relação ao que apresenta o livro didático; adaptação esta que deve ser feita pelo professor ao utilizar o livro para o desenvolvimento de atividades visando à construção desse conhecimento matemático. A realização desta adaptação é um ato que faz parte da metodologia de ensino adotada por este professor e é seu papel realizá-la de forma a ter o discernimento de identificar o problema, buscar resolvê-lo e também organizar e deixar claros os objetivos que almeja (TARDIF, 2000, p. 7).

Estas dificuldades relacionadas tanto às abordagens propostas pelos livros didáticos quanto ao domínio, em alguns casos, incipiente do conteúdo matemático por parte dos professores, refletem-se diretamente no ensino e conseqüentemente podem gerar dificuldades na aprendizagem dos alunos. Se o professor não tem segurança e domínio do conteúdo, pode, conseqüentemente, realizar escolhas inadequadas em relação às metodologias de ensino e aos livros didáticos, optando em alguns casos, pela utilização de materiais que possuem definições incompletas ou até mesmo equivocadas.

Percebemos também que em dois dos artigos não há sugestões para pesquisas futuras. As outras pesquisas, por sua vez, trazem sugestões como continuar investigando esse conceito e, principalmente, investigar e analisar os efeitos destes tipos de pesquisa no âmbito escolar.

No entanto, neste trabalho, buscamos apresentar uma discussão sobre estes assuntos de forma a alertar a todos, mas principalmente os atuantes na Educação Básica, professores e alunos da Licenciatura, para a necessidade e a importância de se atentar a estudos sobre o conceito de função, objeto fundamental no decorrer dos anos escolares. Alertamos ainda aos pesquisadores e divulgadores das pesquisas a extrema necessidade que este tipo de discussão esteja presente também no cotidiano das escolas.

Em pesquisas futuras, a análise que nesta investigação foi direcionada apenas à revista “Educação Matemática Pesquisa” pode ser ampliada a outras revistas

brasileiras. Também pode ser investigado o que está sendo publicado a respeito do ensino e da aprendizagem de função, na Educação Básica, nessas mesmas revistas brasileiras, mas por pesquisadores estrangeiros.

Outra possibilidade seria analisar que reflexões que estão sendo realizadas a respeito do objeto matemático função nas licenciaturas em Matemática e nos cursos de formação continuada de professores desta ciência.

Finalmente, salientamos a possibilidade de, a partir das dificuldades docentes e discentes relacionadas ao conceito de função destacadas pelos autores dos artigos analisados, planejar formações de professores visando a discuti-las e, possivelmente, minimizá-las.

Referências

- ABREU, O. H.; REIS, F. S. *Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I*. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC- SP, v. 13, n. 3, 2011.
- ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- ALVES, E. M. S. *A ludicidade e o ensino da matemática: uma prática possível*. Campinas: Papirus, 2001.
- AQUINO, O. F. *O experimento didático-formativo: contribuições de L. S. Vigotsky, L. V. Zankov e V. V. Davidov*. I Seminário GEPID/OBEDUC, 2013.
- ARAÚJO, J. F. M. *Uma complementação para o ensino do conceito de função, funções afins e funções quadráticas para o currículo da rede pública estadual de São Paulo*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, SP, 2015.
- ARDENGI, M. J. *Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), PUC-SP, 2008.
- BARBIER, R. A. *Pesquisa-ação*. Trad. de Lucie Didio. Brasília, Liber Livro (Série Pesquisa em Educação, v. 3), 2004.
- BARBOSA, A. A. *Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem relacionadas às razões e as Funções Trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Ensino da Matemática, PUC-SP, 2009.
- BARBOSA, E. J. T.; LINS, A. F. *Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática*. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC SP, v. 15, 2013.
- BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.
- BAUERLEIN, M. *Hyper hype, will digital learning be killed by kindness?* In: Education, Next, p. 74-75, 2012.
- BORBA, M. C. *Tecnologias da informática na educação matemática e reorganização do pensamento*. In: BICUDO, M. A. V. (org.) Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 285-295, 1999.
- BORGES, C. F. *Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para o ensino*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Ensino da Matemática, PUC-SP, 2009.
- BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. *La sensibilité de l'activité Mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique*. In: Recherches en Didactiques des Mathématiques, v. 19, n. 1, p. 77 – 124, 1999.
- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, MEC/ SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, MEC/ SEB, 2006.

BRESEGHELLO, A. P. B. *Resolução de problemas com aplicações de funções*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2016.

BRIGUENTI, M. J. L. *Ensino e aprendizagem da trigonometria : novas perspectivas da educação matemática*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, 1994.

_____. Alterando o ensino da trigonometria em escolas públicas de nível médio, a representação de algumas professoras. Trabalho de conclusão de curso (Tese), Doutorado em Educação, UNESP, Marília, 1998.

BRITO, A. J. ; MOREY, B. B. *Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental*. Horizontes: Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 65-70, 2004.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática* (1ª edição conjunta das partes I, II e III). Lisboa: Sá da Costa, 1951.

_____. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. *O uso da Coleção Didático de Matemática*, Brasília, v. 17, p. 137 – 169, 2010.

CARVALHO, R. L. et al. *Contribuições do campo conceitual multiplicativo para a formação inicial de professores com suporte da tecnologias digitais*. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC-SP, n. 1, v. 18, 2016.

CHEVALLARD, Y. *L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique*. In: *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, 1999.

COLL, C.; SOLÉ, I. *Os professores e a concepção construtivista in O construtivismo na sala de aula*. Trad. Claudia Schilling, São Paulo: Ática, 2009.

COSTA, N. M. L. *Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 1997.

DAMM, R, F. *Registros de Representação* In: MACHADO, S. D. A. *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. 3ª edição. São Paulo: EDUC, 2012.

DAVIDOV, V.; MARKOVA, A. *La Concepción de la actividad de estudio en los escolares*. In: *La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS (Antología)*. Biblioteca de Psicología Soviética. Moscú: Editorial Progreso, p. 316-337. 1987.

DAVIDOV, V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Moscú: Editorial Progreso. 1988.

_____. *Problemas de ensino desenvolvimental* – a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução: LIBÂNEO, J. C. e FREITAS, R. A. M. Revista Soviet Education, August, nº 8, 1998.

_____. *O que é a atividade de estudo*. Revista Escola Inicial, n.7, ano 1999. Tradução russo (para uso em sala de aula) de Ermelinda Prestes. 1999.

DAZZI, C. J.; DULLIUS, M. M. *Ensino de funções polinomiais de grau maior que dois através de análise de seus gráficos com auxílio do Software Graphmatica*. Revista Bolema, v. 27, n. 46. Rio Claro, SP. 2013.

DEL RIO, V. L. C. *Práticas colaborativas de funções: uma explicação no programa de educação de jovens e adultos*. Dissertação. Universidade do Rio de Janeiro, RJ, 2014.

DUVAL, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003.

FIORENTINI, D. *Mapeamento e balanço dos trabalhos do GT-19 (Educação Matemática) no período de 1998 a 2001*. In: Reunião anual da ANPED, 25ª, Caxambu, 2002.

_____. *A Investigação em Educação Matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, v. 8, n. 11, p. 61-82, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREITAS, R. A. M. M. *Pesquisa em didática: o experimento didático formativo*. In: X Encontro de pesquisa em educação da ANPE Centro-Oeste: Desafios da produção e divulgação do conhecimento. Anais, v. I. Uberlândia, 2010.

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G.; MIASHIRO, P. M. *A transição das razões para as funções trigonométricas*. Revista Bolema, Rio Claro, SP, v. 30, n. 56, p. 1127-1144, 2016.

GRAVEN, M. *Mathematical learning opportunities for young learners with touch screen technology*. In: Learning and Teaching Mathematics, v. 9, 43-45, 2011.

GÓMEZ, P. y LUPIÁÑEZ, J. L. *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje em la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. PNA, 1(2), 79-98, 2007.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V.; CAVALCANTI, M. e MARQUES, M. *Análise das atividades sobre representações gráficas nos livros didáticos de Matemática*. Anais do 2º Simpósio Internacional de Educação Matemática – SIPEMAT. UFRPE, 2008.

GUIMARÃES, M. E. L. *O computador em sala de aula: ensino e aprendizagem de função através da resolução de problemas*. Trabalho de conclusão de curso(TCC), Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, PB, 2013.

KLEIN, M. É. Z. *O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, PUC-RS, 2009.

LAJOLO, M. *Livro didático: um (quase) manual de usuário*. Revista Em Aberto, ano 16, n. 69. Brasília, 1996.

LEONTIEV, A. N. *Actividad Conciencia y Personalidad*. La Habana: Pueblo y Educación, 1983.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. *A elaboração de planos de ensino (ou de unidades didáticas) conforme a teoria do ensino desenvolvimental*. PUC-GO, 2009.

LIMA, L. *A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de Matemática*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2008.

LIMA, P. O. *Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Ensino da Matemática, PUC-SP, 2009.

LINDEGGER, L. R. M. *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo, uma proposta a partir da manipulação de modelos*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2000.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. 4ª edição. Campinas, SP: Papirus, 2001.

LOURENÇO, E. H.; OLIVEIRA, P. C. *O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica*. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC-SP, v. 16, 2014.

MACHADO, S. D. A. (org.) *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. 3 ed. Revisada, 2 reimpr. – São Paulo: EDUC, 2012.

MACIEL, P. R. C. CARDOSO, T. F. L. A. *História do conceito de função em vídeo: uma proposta para a aprendizagem*. Revista Bolema, Rio Claro, SP, v. 28, n. 50, 2014.

MARANHÃO, M. C. S. A; MANRIQUE, A. L. *Pesquisas que articulam a Teoria das Situações Didáticas em Matemática com outras Teorias: concepções sobre aprendizagem do professor*. In: Perspectivas da Educação Matemática, v.7, n. 14. p. 424-443, 2014.

MARTINEZ, D. A. *Função exponencial e seu ensino através da resolução de problemas*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, SP, 2015.

MARTINS, V. L. O. F. *Atribuindo significado ao Seno e Cosseno utilizando o software Cabri Gèomètre*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2003.

MENDES, M. H. M. *O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo grau para o terceiro grau*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Matemática, PUC-RJ, 1994.

MONNA, A. F. *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel e Lebesgue*. Arch. For Hist. of Exact Sciences, v.9, p.57-84, 1972.

MONZON, L. W.; GRAVINA, M. A. *Uma introdução as funções de variável complexa no Ensino Médio: uma possibilidade através do uso de animações interativas*. Revista Bolema. Rio Claro, SP. 2012.

MOURA, M. O. (org.) *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber livro. 2010.

NASCIMENTO, A. Z. *Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2005.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R. *O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural*. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC – São Paulo, v. 18. 2016.

OLIVEIRA, S. A. *O lúdico como motivação nas aulas de Matemática*. In Jornal Mundo Jovem. n. 377, p. 5. 2007.

ONRUBIA, J. *Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nela intervir in O construtivismo na sala de aula*. Trad. Claudia Schilling, São Paulo: Ática, 2009.

PALANCH, W. B. L.; FREITAS, A. V. *Estado da Arte como método de trabalho científico na área de Educação Matemática: possibilidades e limitações*. Perspectivas da Educação Matemática, Mato Grosso do Sul, v. 8, número temático, p. 784 – 802, 2015.

PASSOS, L. F. *A relação professor-pesquisador: conquistas, repercussões e embates da pesquisa colaborativa*. Horizontes, v. 25, n. 1, p. 55-62, jan/jun. 2007.

PEREIRA, V. S. *Ensino de função: uma abordagem contextualizada do tratamento da informação no ensino médio*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

PERRIN-GLORIAN, M. J. *Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives*. In: ARTIGUE, M, et al. (org.). Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, 1994.

PONTE, J. P. *O conceito de função no currículo de Matemática*. Revista Educação e Matemática, Lisboa, n. 15, 1990.

ROSSINI, R. *Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias*. Trabalho de conclusão de curso (Tese), Doutorado em Educação Matemática, PUC-SP, 2006.

ROSSINI, R. *Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores*. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC – SP, v. 9, 2007.

SCHWARZ, O. *Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 1995.

SHULMAN, L. S. *Those who understand: Knowledge Growth in teaching*. Educational Researcher, 15 (2), 4-14. 1986.

SILVA, E. F. *Utilizando calculadora gráfica no ensino de funções afim e quadráticas*. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação), Mestrado em Educação Matemática, Universidade de Brasília, 2014.

SILVA, J. J. S.; SOUZA, J. A. C.; SILVA, R. B.; ASSIS, L. R. S. *O uso de jogos matemáticos como metodologia de aprendizagem no ensino de função*. V ENID – Encontro de iniciação à docência da UEPB. 2015.

SIMON, M. A. *Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective*. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145, 1995.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. *Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos*. 1ª edição, Campinas, SP: Mercado das letras, 2014.

STRAPASON, L. P. R. e BISOGNIN, E. *Jogos pedagógicos para o ensino de funções no primeiro ano do ensino médio*. Revista Bolema, Rio Claro, SP, v. 27, n. 46, 2013.

TARDIF, M. *Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério*. Revista Brasileira de Educação, nº13, p. 7. 2000.

TENÓRIO, A.; PENNA, P.; TENÓRIO, T. O uso de jogos da plataforma Mangahigh no estudo de funções polinomiais do 1º grau. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC – São Paulo, v. 17. 2015.

TRALDI, A.; ROSEMBAUM, L. S. Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista. Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC – São Paulo, v. 12. 2010.

VIGOSTKY, L. S. *Pensamento e linguagem*. Versão para e-book. 2002.

_____. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução Paulo Bezerra. 2ª edição. São Paulo: Editora W.M.F, Martins Fontes, 2009.

_____. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 7ª edição, Martins Fontes. 2010.

YOUSCHKEVITCH, A. P. *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle*. In: Fragments d'histoire des Mathématiques, Brochure A. P. M. E. P. n. 41, p. 7 – 67, 1981.

ZEICHNER, K. M. *Para além da divisão entre professor-pesquisador acadêmico*. In. GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D. & PEREIRA, E. M. A. Cartografia do trabalho docente: professor (a) pesquisador (a). Campinas: Mercado de Letras. p. 207-236, 1998.