PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

RUBERVAN DA SILVA LEITE

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS: UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE TALES

MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2017

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

RUBERVAN DA SILVA LEITE

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS: UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE TALES

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Professor Doutor Gerson Pastre de Oliveira****.*

SÃO PAULO

2017

Ficha Catalográfica

Leite, Rubervan da silva
FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS: UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE TALES. / Rubervan da Silva Leite; orientador Gerson Pastre de Oliveira. – São Paulo, 2017.
156 p.
Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP, 2017.
1.Educação matemática. 2. Geometria. 3. Formação de professores. 4. Conhecimentos dos professores.

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:____**Data:**____________________

Dedicatória

Dedico esse trabalho a meus pais que em todos os momentos mostravam-se dispostos a me ajudar com minha formação, sempre me mostrando que o caminho da educação é o melhor a ser trilhado.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por propiciar a minha vida e momentos que ficarão marcados pelo decorrer de minha existência.

A meus pais**, Rubervaldo Leite**, **Francineide Leite** e irmãos **Rosivan Leite** e **Raniere Leite** que forram meus maiores motivadores pela busca de minha qualificação, sem o apoio deles não teria obtido forças para enfrentar todos os problemas que surgiram, principalmente os problemas de cunho acadêmico. A presença de vocês é indispensável para a minha vida.

Agradeço imensamente a minha namorada **Eliza Moura** por ser paciente com minhas viagens e por ser a pessoa a quem posso sempre compartilhar meus momentos de alegria e por ser minha base de sustentação quando estive em momentos difíceis na vida, sem o apoio dela tal trabalho não seria possível.

Ao meu grande amigo **Franco Deyvis** por ter sido um verdadeiro irmão para mim, desde os tempos de graduação e atualmente quando decidimos por trilhar a aventura de qualificação acadêmica bem longe de nossas casas.

A **PUC-SP**, por admitir minha entrada e fomentar meu desenvolvimento pessoal e profissional por meio de seus professores e a **CAPES**, por subsidiar via bolsa de mestrado minha permanência no curso, auxiliando minha estadia em São Paulo e por consequência promovendo minha ascensão acadêmica.

Meus amigos e companheiros da PUC-SP, **Jéssica Barbosa**, **Marcelo Gomes, Patrícia Costa, Mariana Marques, Larissa Côelho** que estiveram comigo e me acompanharam ao longo dessa trajetória, com quem além dos afazeres acadêmicos pude compartilhar muitos momentos de gargalhadas.

Ao Professor Doutor **Gerson Pastre de Oliveira**, orientador deste trabalho, que me apresentou um grande campo de conhecimentos acadêmicos que posso trilhar daqui em diante e um exemplo de profissional. Agradeço pelas aulas no âmbito do mestrado aos Professores Doutores **Saddo Ag Almouloud**, **Maria José Ferreira da Silva** e **Cileda Coutinho**.

Resumo

Esta pesquisa tem por objetivo identificar a integração dos conhecimentos didáticos, específicos e tecnológicos que um grupo de alunos de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará possuem, relacionados ao teorema de Tales. Essa é uma pesquisa de natureza qualitativa, em que a metodologia se baseou na aplicação de atividades de modo que os alunos tiveram que utilizar o software Geogebra na resolução das mesmas. As atividades foram baseadas em uma sequência de complexidade progressiva, em que os alunos foram solicitados a demonstrar que suas conjecturas eram válidas matematicamente. Além disso, seus conhecimentos tecnológicos deviam passar por um processo de refinamento, de modo que os mesmos desenvolvessem fluência em relação às interfaces utilizadas. Integrado a estes dois campos cognitivos, esperava-se que surgissem os conhecimentos didáticos necessários para o trabalho com o teorema de Tales em situações de ensino. As análises ocorreram no sentido de observar as resoluções apresentadas por cada sujeito e identificar em que medida as respostas fornecidas evidenciavam integração entre os conhecimentos, nos moldes propostos pelo TPACK. Observou-se que os licenciandos apresentaram equívocos relacionados com os conhecimentos específicos, na mesma medida em que indicaram ter dúvidas em relação aos conhecimentos didáticos e tecnológicos necessários para a consecução da sequência a que foram submetidos, o que ensejou que o estudo fizesse recomendações no sentido de que se concebam abordagens diferenciadas para a formação dos professores de Matemática, de modo que os três aspectos do conhecimento aqui mencionados possam ser contemplados em regime de integração.

Palavras chave: Conhecimentos dos professores. Teorema de Tales. Formação de Professores de Matemática. Tecnologias na Educação Matemática. TPACK.

Abstract

This research aims to identify the integration of didactic, specific and technological knowledge that a group of undergraduate students in Mathematics of the State University of Pará possess, related to the theorem of Tales. This is a qualitative research, in which the methodology was based on the application of activities so that the students had to use Geogebra software in the resolution of them. The activities were based on a sequence of progressive complexity, in which students were asked to demonstrate that their conjectures were mathematically valid. In addition, their technological know-how should be refined, so that they develop fluency in relation to the interfaces used. Integrated into these two cognitive fields, it was expected that the didactic knowledge needed to work with the theorem of Tales in teaching situations would emerge. The analyzes were carried out in order to observe the resolutions presented by each subject and to identify the extent to which the answers provided evidenced integration between three types of knowledge, in the molds proposed by TPACK. It was observed that the students presented misunderstandings related to the specific knowledge, in the same extent they indicated that they had doubts regarding the didactic and technological knowledge necessary to achieve the sequence to which they were submitted, which led to the study making recommendations in the sense that differentiated approaches for the mathematics teachers education processes of Mathematics are conceived so that the three aspects of knowledge mentioned here can be contemplated in an integrated way.

Key-words: Knowledge of teachers. Theorem of Tales. Mathematics Teacher Education. Technologies in Mathematics Education. TPACK.

QUADRO DE FIGURAS

Sumário

Introdução

A perspectiva de trabalhar, em atividades de pesquisa, com tópicos de geometria euclidiana plana, e com o teorema de Tales, em particular, permeia meu trajeto acadêmico, mais especificamente aquele que se refere à graduação, feita na Universidade do Estado do Pará, campus X de Igarapé-açu (interior do estado). Neste período de formação, constatei dificuldades acerca dos conteúdos que envolvem este tema, tanto por parte de discentes do ensino básico, quanto de alguns professores que estão inseridos nos quadros funcionais das escolas municipais. Em função disto, no decorrer do processo de construção de meu TCC, formalizei uma pesquisa que visou contribuir para edificação do saber matemático com alguns alunos da rede do referido município. Nessa pesquisa detectei, também, um déficit de alguns professores em relação a suas formações docentes (inicial e continuada), nas quais não se discutiram as tecnologias digitais como potenciais compo tnentes de estratégias didáticas no desenvolvimento de suas aulas.

Ainda nessa pesquisa, constatou-se que nas aulas da maioria dos professores, o teorema de Tales fora raramente abordado, devido a diversos fatores; contudo, o que mais me chamou atenção durante algumas conversas com determinados professores participantes, foi o fato de relatarem não possuir afinidade com o objeto matemático em questão e que se, porventura, tivessem que usar recursos tecnológicos para trabalhar com tal conteúdo, não saberiam por onde começar e nem como manter a aula de forma dinâmica. Ressalte-se, ainda, que esses professores apresentaram, em suas contribuições, que não possuíam afinidades com ferramentas tecnológicas de caráter digital.

Diante desse fato, destaca-se o pensamento de Pavanello (2004), ao discorrer que é perceptível certo abandono quanto ao ensino de geometria, impossibilitando, desta forma, a contribuição que este ramo da Matemática tem para a formação dos estudantes. Como consequência desse abandono, verifica-se a pouca capacidade de percepção espacial, que é solicitada em variadas atividades de cunho escolar ou profissional. Esse problema estendeu-se para além do ensino básico, pois

> Mesmo nos cursos superiores de matemática constata-se que os alunos apresentam muita dificuldade em compreender os processos de demonstração ou são incapazes de usá-los ou mesmo de utilizar qualquer tipo de representação geométrica para a visualização de conceitos matemáticos. (PAVANELLO, 2004, p.03)

Da mesma maneira em relação ao que Panavello (2004) expõe, Almouloud (2004, p.01) afirma que

> grande parte dos professores que hoje estão em atividade tiveram uma formação de base muito precária em Geometria. Além disso, os cursos de formação inicial de professores - tanto os cursos de magistério como os de licenciatura - continuam não dando conta de discutir suficientemente com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria.

Desse modo, Almouloud (2004) destaca que elementos como estes são as possíveis causas da omissão em relação à geometria nas escolas; esse cenário, possivelmente, influencia nos casos em que há percalços na aprendizagem e baixo desempenho dos alunos ao longo do tempo.

Com a exploração limitada do ensino de geometria, deixa-se de trabalhar um campo proveitoso para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar e transcender situações relevantes em relação ao cotidiano das pessoas, o que poderia propiciar a evolução da capacidade de aprendizado. Nesse sentido, o ensino de geometria tende a fazer com que,

> de um nível inferior, no qual reconhece as figuras geométricas, embora percebendo-as como todos indivisíveis, o aluno passa, no nível posterior, a distinguir as propriedades dessas figuras; estabelece, num terceiro momento, relações entre as figuras e suas propriedades, para organizar, no nível seguinte, sequências parciais de afirmações, deduzindo cada afirmação de uma outra, até que, finalmente, atinge um nível de abstração tal que lhe permite desconsiderar a natureza concreta dos objetos e do significado concreto das relações existentes entre eles. Delineia-se, desta forma, um caminho que, partindo de um pensamento sobre objetos, leva a um pensamento sobre relações, as quais se tornam, progressivamente, mais e mais abstratas. (PAVANELLO, 2004, p.04)

Tendo em vista o quadro supramencionado, desde alguns anos iniciou-se um movimento do ensino da geometria com o apoio de interfaces digitais. Assim, diversas pesquisas indicaram a possibilidade de obtenção de uma série de benefícios para o ensino, tanto de geometria, quanto de outras áreas da matemática. Vai neste sentido a visão de Oliveira (2013), que menciona que as tecnologias digitais permeiam de maneira intensiva a maior parte das atividades humanas contemporâneas. Assim, já se torna difícil pensar em quaisquer tarefas intelectuais ou produtivas, seja na economia, na política, na indústria, na comunicação, por exemplo, sem que estes elementos estejam presentes: “estas tecnologias invadiram completamente o nosso quotidiano. Elas têm igualmente traduzido uma autêntica revolução em numerosas profissões e atividades” (PONTE; CANAVARRO, 1997, p. 19).

Pode-se destacar que, no âmbito escolar, as tecnologias digitais podem ser inseridas como um recurso importante no desenvolvimento do processo de ensino e/ou de aprendizagem. Nessa perspectiva, cabe ao professor, em um primeiro momento, mostrar-se preparado para exercer de forma propositiva o papel de orientador em relação ao seu grupo de alunos, o que pode ocorrer por meio de diversas alternativas didáticas que incluam interfaces tecnológicas. Desta forma, as tecnologias digitais podem criar um campo propício à investigação de alternativas para resolução de problemas matemáticos, por meio de possibilidades como a experimentação de caráter dinâmico e a visualização, não excluindo outras abordagens nem mesmo outras tecnologias, inclusive vistas como “tradicionais” e “não dinâmicas”, materializadas em suportes típicos, como lápis e papel, por exemplo.

Em Oliveira (2015), a ideia da convergência entre recursos tecnológicos de toda a ordem passa pela compreensão de que as tecnologias, digitais ou não, inseridas em um processo ou atividade humana, tendem a causar a reorganização do pensamento dos indivíduos envolvidos, em um sentido apontado originalmente por Tikhomirov (1981) e desenvolvido mais amplamente por Borba e Villarreal (2005), alterando substancialmente a forma como as pessoas pensam, atuam e resolvem problemas – matemáticos, no caso. Um dos aspectos envolvidos na reorganização mencionada inclui a compreensão de que o emprego eficiente de tecnologias digitais por pessoas que aprendem e ensinam matemática passa por constantes aprimoramentos, desde a aquisição de fluência nas interfaces até a possibilidade de elaboração de estratégias para uso destes instrumentos da melhor forma possível. Para Oliveira (2015), a formação de pessoas para o uso de tecnologias na educação matemática tem por base, justamente, o desenvolvimento de fluência em relação aos elementos envolvidos:

> Desenvolver fluência equivale a saber usar com desenvoltura, de modo que este aspecto seja aliado de uma outra fluência, de caráter mental, que permite, por sua vez, ao sujeito, avançar na reorganização dos conhecimentos no âmbito do próprio processo que o leva a tomar o problema proposto como seu e investigar, em dialéticas e movimentos cada vez mais refinados, até formar uma proposição sua, que tenha o status de solução, resposta. Se a tecnologia usada é entrave, se dificulta ou intimida, se permanece oculta em seus recursos, então é provável que muito mais tolha o desenvolvimento das conjecturas necessárias à investigação de um problema matemático do que as facilite (Oliveira, 2015, p.15)

Desta forma entendida como fundamental, a fluência em relação aos dispositivos tecnológicos tende a encaminhar outras formas de pensar, tendo as mídias como parte de uma configuração que se apresenta indissociável em relação às pessoas. Trata-se de um coletivo, chamado originalmente por Borba e Villarreal (2005) de “seres-humanos-com-mídias”, coletivo este que se apresenta como unidade básica de construção do conhecimento e de produção de ideia matemáticas. A partir daí, deste *pensar com tecnologias* (Oliveira, 2013), as pessoas tendem a conjecturar acerca dos problemas que têm diante de si e a explorar intensivamente as interfaces disponíveis, de modo a gerar respostas que serão apresentadas e discutidas com seus pares. Por conseguinte, tende-se a ampliar a exploração dos conteúdos, por meio de experimentações. Nesse momento, os sujeitos são capazes se posicionar sobre várias proposições e refletir sobre elas, de forma a analisar qual é a melhor opção. Nesse sentido, por exemplo,

> Ao manipular uma construção geométrica a partir de um ponto ou de distintos valores numéricos, professores e estudantes podem alicerçar argumentações sobre condições de existência, generalizações, demonstrações e provas, por exemplo. Evidentemente, será este pensar integrado aqui referido, sob sua responsabilidade, que promoverá este processo, que, por sua vez, culminará em uma demonstração, por exemplo. O que se quer dizer é que pessoas demonstram, usam o conhecimento matemático, expressam seu pensamento com as tecnologias disponíveis. Desta maneira, pode ser possível desenvolver, em relação à Matemática, outras formas de pensar e conjecturar (OLIVEIRA, 2015, p.16).

Segundo argumentam Oliveira e Marcelino (2015), as tecnologias permanecem inseridas em processos educativos desde recuadas épocas. Sobre isto, mencionam os mesmos autores que “a transmutação das temporalidades na história humana trouxe consigo a emergência de instrumentos distintos, com a prevalência de um ou outro de acordo com o caráter evolutivo da sociedade em dada época” (p. 817). De acordo com a proposição de Lévy (1993), semelhantes recursos podem ser vistos como tecnologias da inteligência; nesta categoria, constam possibilidades relacionadas à oralidade, à escrita e à informática.

Especificamente em relação ao polo informático, mencionado por Lévy (1993), no âmbito da Educação Matemática podem ser encontradas relevantes discussões acerca das potencialidades das tecnologias digitais relacionadas aos processos de ensino ou aprendizagem. Neste contexto, é possível mencionar a importância de características como visualização, experimentação e dinamismo. Em suas pesquisas, Zulatto (2002) e Oliveira (2013) indicam que o dinamismo das interfaces digitais propicia avanços quanto as investigações e resoluções de problemas propostos. Tais avanços podem estar relacionados a ações relativamente simples, como, por exemplo, arrastar um componente geométrico, modificar um parâmetro da programação usada, etc. Além disto, Oliveira (2013), baseado nas ideias de Lévy (1993), indica ainda que a reação da interface de variados softwares quanto a modificações em comandos de entrada ou configurações é praticamente instantânea, o que constituiria uma vantagem, no sentido de correlacionar o pensamento do sujeito e sua velocidade às reações da interface. Mesmo assim, as potencialidades se evidenciam melhor quando o professor possui traçado um plano consistente, levando em consideração a estratégia didática que mais se adequa ao cenário em questão, ao mesmo tempo em que desenvolve conhecimentos fluentes acerca da tecnologia que pretende empregar em seu trabalho.

De toda forma, nos ambientes dinâmicos, privilegia-se o movimento das construções, permitindo, por meio deste recurso, a concretização sobre a ideia de objetos variáveis. Esses deslocamentos e modificações são diferenciados em relação às construções estáticas, tendo como consequência o ajuste automático da figura, assim preservando as relações de dependência e as condições da construção inicial. A multiplicidade dos recursos e a possibilidade de gerar inúmeras variações em relação às construções favorecem o aspecto experimental. Para Lévy (1993), esta é uma ideia bastante instigadora:

> Uma das mais estranhas modificações ligadas ao uso das simulações digitais é a que hoje afeta as matemáticas. Tradicionalmente consideradas como reino da dedução, elas também estão adquirindo um caráter experimental. Simulações de objetos matemáticos podem infirmar, confirmar, ou gerar conjecturas (LÉVY, 1993, p. 104).

Entre as vantagens presentes na experimentação proporcionada por ambientes tecnológicos, constam, segundo Borba e Villarreal (2005), a possibilidade de investir na criação de conjecturas acerca de problemas específicos (e de testá-las, por meio de vários exemplos); a oportunidade de descobrir resultados de natureza matemática desconhecidos antes do procedimento experimental; a chance de testar formas alternativas de colher resultados, entre outras possibilidades. Deste ponto de vista, julga-se que as características destacadas (experimentação, visualização e dinamismo) podem ser disponibilizadas por meio do Geogebra, a partir de estratégias formativas.

De outro modo, é possível perceber que certa etimologia de saberes se encontra presente na trajetória de formação de professores de Matemática. A argumentação até aqui desenvolvida permite identificar a tecnologia como aglutinadora de habilidades cognitivas relacionadas à didática e ao conteúdo da área, especificamente – no caso, a Matemática. Deste ponto de vista, é fundamental fazer referência à proposta de Shulman (1987), ao indicar que o professor de matemática deveria ter, como patrimônio pessoal de conhecimento, um acervo cognitivo que inclui, entre outros elementos, o que chama de *conhecimento do conteúdo*, referente aos elementos epistemológicos daquilo que ensina, em conjunto com o *conhecimento pedagógico do conteúdo*, ligado à gestão didática de seu grupo de alunos, envolvendo técnicas e habilidades relativas ao como ensinar.

A articulação teórica das ideias de Shulman (1987) em relação à relevância das tecnologias pode ser encontrada na proposta de Mishra e Koehler (2006), conhecida como *Technological Pedagogical Content Knowledge*, cuja principal argumentação tem por base a visão integrada e inseparável das dimensões dos saberes necessários ao trabalho do professor, com destaque para as conexões, interações, possibilidades e condicionamentos que acontecem no âmbito do complexo formado pelo conteúdo, a didática e as tecnologias.

Assim, no âmbito deste trabalho, pretende-se levantar as concepções de um grupo de futuros professores do interior do estado do Pará acerca dos aspectos epistemológico e didático de elementos da geometria plana. Esta proposta será implementada por meio da resolução, por parte dos sujeitos, de problemas relativos aos objetos matemáticos mencionados. A correlação entre os conhecimentos necessários, relativos ao conteúdo e sua abordagem didática, envolvendo pessoas e tecnologias terá, como elemento articulador, a resolução de problemas envolvendo demonstrações relativas às conjecturas levantadas pelos sujeitos, da maneira entendida por Balacheff (1987).

Mediante as situações apresentadas até esse momento, levando em consideração o caso particular da formação de professores no campus de Igarapé-açu da Universidade do Estado do Pará, além de fundamentação sobre pesquisas que delineiam os saberes necessários para a formação docente e estruturas de trabalho com o teorema de Tales, como Santos (1997), Haruna (2000) e Santos (2012), chega-se, no âmbito desta investigação, à seguinte indagação: **de que maneira podem ser evidenciados, de forma integrada, os conhecimentos tecnológico, específico e didático do conteúdo relativo a tópicos de geometria euclidiana plana – e do teorema de Tales, em particular – entre alunos de licenciatura em Matemática a partir de uma abordagem envolvendo atividades com construções em um ambiente de tecnologias digitais?**

A pesquisa que aqui se propõe envolve acadêmicos de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), campus de Igarapé-açu (PA), e envolve situações problematizadas, que têm o teorema de Tales como tema predominante – mas não único, uma vez que outros postulados da geometria euclidiana plana são apresentados e discutidos – e que são passadas aos sujeitos por meio de sessões organizadas para coletar os dados que servirão à análise, à luz das teorias eleitas – além da estrutura teórica já mencionada, envolvendo autores como Lévy (1993), Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2013), considera-se relevante empregar as asserções de Shulmman (1987) e Mishra e Koehler (2006), relativas ao conhecimento do professor, em diversas dimensões. O objetivo principal consiste em identificar de que forma os potenciais futuros professores se apropriam dos objetos matemáticos em jogo, bem como de temas correlatos, dos pontos de vista epistemológico e didático, considerando o uso de tecnologias digitais na organização das respostas aos problemas e das respectivas estratégias presentes nas conjecturas levantadas pelos mesmos, apoiadas, de alguma forma, naquilo que os sujeitos entendem como provas matemáticas, que serão analisadas do ponto de vista de Balacheff (1987).

1 – Estudo Histórico e Matemático do Objeto

1.1 Sobre postulados atribuídos a Tales de Mileto

Neste capítulo, pretende-se apresentar um estudo dos aspectos históricos ligados aos temas em foco, em conjunto com a apresentação de argumentações de caráter formal que visam dar sustentação aos argumentos levantados nas atividades componentes das sessões de pesquisa, mais adiante apresentadas.

Conforme aborda Boyer (1996), em 776 a. C., ocorrem os primeiros jogos olímpicos, sendo que, nesse período, a matemática Grega tinha bastante repercussão, principalmente por meio dos escritos de Homero e Hesíodo, visto que eram os literários com maior popularidade na época. Nos dois séculos subsequentes, aparecem referências a Tales e Pitágoras, os quais surgiam de forma imprecisa em termos históricos. Para alguns autores, o processo de descrição e de compreensão do trabalho destas figuras não pode receber, de forma plena, a chancela da certeza. Segundo Roque (2012,) as histórias foram descritas, na maioria das vezes, com certa característica, de modo a dar a impressão de que são os europeus os legítimos herdeiros de uma tradição julgada própria de seu continente desde séculos passados. Assim, como implicação, estabelece-se o mito da herança grega, com a pretensão de servir como alicerce para fixar nos europeus suas demandas identitárias.

Ao aprofundar os estudos sobre a vida e obra de Tales de Mileto, percebe-se certa escassez de relatos acerca do matemático. Pelos escritos de Boyer (1996), Tales nasceu por volta de 626 a.C. na cidade grega de Mileto, e veio a falecer em meados de 548-545 a.C., com aproximadamente 78 anos. A data de sua morte foi baseada no eclipse total do Sol ocorrido em 28 de maio de 585 a.C., pois, provavelmente, nesse evento, Tales deveria ter em torno de 40 anos. Pelos escritos de Boyer (1996), Eves (2004), Guedj (2006), Roque (2012) e Strathern (1998), Tales é considerado um dos primeiros dentre os sete sábios da antiguidade por ser um precursor da noção de geometria demonstrativa. A história tradicional relata, ainda, que ele foi influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios, sendo repetidas vezes cortejado como o primeiro matemático verdadeiro em ordem cronológica, originador da organização dedutiva da geometria. Tales é celebrado dessa forma devido ao fato de que, na Grécia antiga, era considerado sábio aquele que pudesse oferecer determinado esclarecimento teórico sobre o Universo, além de ter uma atitude elevada diante da vida (CYRINO, 2006).

No entanto, nos dias contemporâneos não se encontram escritos oriundos do matemático Tales, em função de suas obras haverem sido totalmente inutilizadas pelo tempo, o que inibe determinar com mais precisão e realmente confirmar as concepções e descobertas atribuídas a ele.

O Samário Eudemiano de Proclus Diadocus (410-485) é apontado como o principal meio de se obter informação no que diz respeito aos feitos matemáticos de Tales (EVES, 2004). Seu texto elucida que:

> [..] Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra (EVES; 2004, p. 95).

Segundo a literatura histórica, Tales era oriundo de família nobre, e deve ter praticado outras atividades além da matemática, sendo algumas dessas relacionadas a astronomia, engenharia e comércio. Devido as diversas atividades por ele exercidas, seu tempo era gasto em diversas viagens. Seus trabalhos matemáticos são considerados entre os primeiros relatados em termos históricos: isto se deve, provavelmente, devido a suas especificidades, por se crer que Tales deu início a estrutura lógica para a geometria e por ter inserido nesse estudo a ideia de prova.

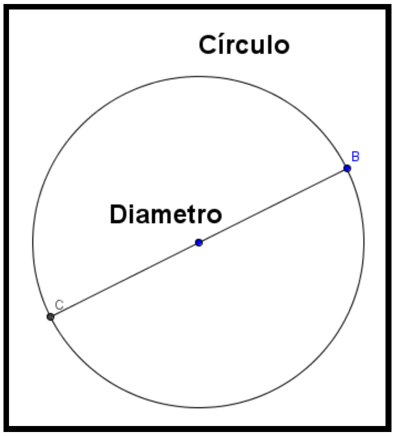
No final do século VII a.C. podem ser elencados vários feitos e inovações para as técnicas da época. É provável que estas descobertas tenham auxiliado no desenvolvimento da matemática. Deste ponto de vista, cabe citar que o nome de Tales estava envolvido em relatos sobre esses aportes técnicos, como explicita Roque (2012):

> Há escritos técnicos do século VI a.C. abordando problemas relacionados à astronomia e ao calendário. Neles, intervinham alguns conceitos geométricos, como círculos e ângulos. Ao menos um desses livros ainda estava em circulação na época de Eudemo, e os enunciados geométricos aí contidos podem ter sido atribuídos a Tales (p.87).

Ao ler as obras de Boyer (1996) e Eves (2004), pode-se encontrar seis teoremas da geometria que são atribuídos a Tales, quais sejam:

a) Um círculo é bissectado por seu diâmetro (figura 1)*;*

Figura 1 – Círculo bissectado por seu diâmetro

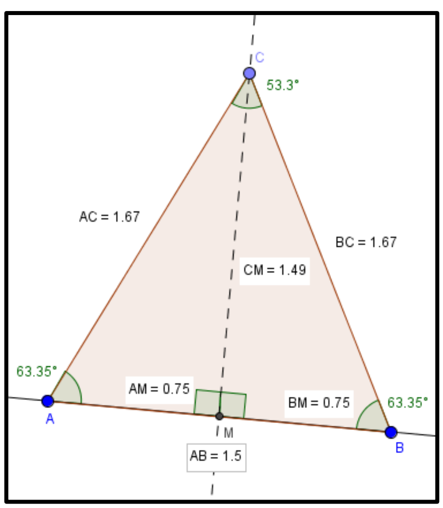


Fonte: o autor

b) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais (figura 2)*;*

De fato, tome-se um triângulo isósceles qualquer *ABC*, como exposto na figura 2. Sobre *AB*, lado de medida distinta dos lados congruentes *AC* e *BC*, faça-se incidir a mediatriz *g*, uma das alturas do ΔABC, que passa pelo ponto médio *M* de *AB*, o que determina dois triângulos, ΔACM e ΔBCM. Ora, tem-se que $AC \equiv BC$. Assim, a mediatriz de um segmento é, por definição, uma reta que representa o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos adjacentes do segmento, de modo que a referida reta divide o segmento pela metade. Desta forma, tem-se que $AM \equiv BM$, o que resulta, pelo anteriormente exposto, que $\Delta ACM \equiv \Delta BCM$ pelo caso LLL. Logo, $B\hat{A}\mathrm{C} \equiv \mathrm{C}\hat{B}A$.

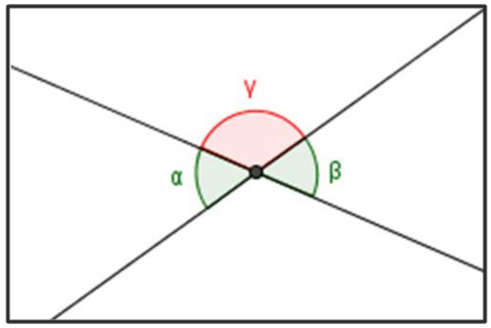
Figura 2 – Triângulos *ACM* e *BCM* e o triângulo isósceles *ABC*



Fonte: dados da pesquisa

c) *Os pares de ângulos opostos formados por duas retas concorrentes são congruentes (figura 3);*

Figura 3 – Ângulos opostos pelo vértice

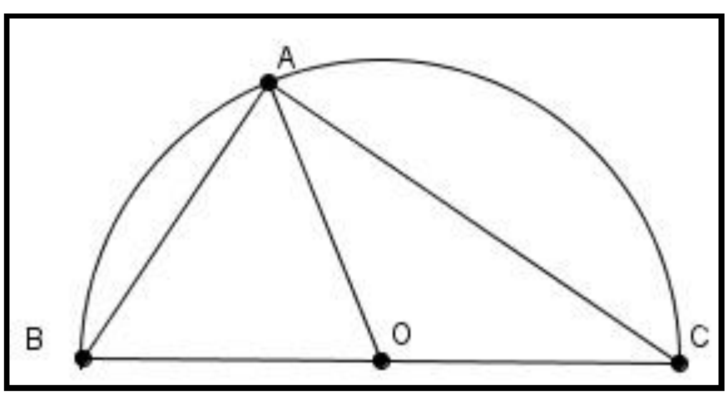


Fonte: O Autor

Ou seja, pode-se escrever, como corolário deste teorema, que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Da figura 3, tem-se que α e β são dois ângulos quaisquer opostos pelo vértice, ou seja, ângulos opostos em relação ao vértice *E*, ponto comum entre as retas concorrentes. Ora, por definição, tem-se que γ é um ângulo suplementar e adjacente tanto em relação a α quanto a β. Assim, em relação às medidas dos ângulos, $\alpha + \gamma = 180^o$, tanto quanto $\beta + \gamma = 180^o$. Assim, a medida dos ângulos representada por $\alpha + \gamma$ é igual àquela representada por $\beta + \gamma$. Desta forma, então, as medidas dos ângulos de α e β são iguais, o que permite escrever que $\alpha \equiv \beta$.

d) *Um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto (figura 4);*

Figura 4 – Ângulo reto inscrito em um semicírculo

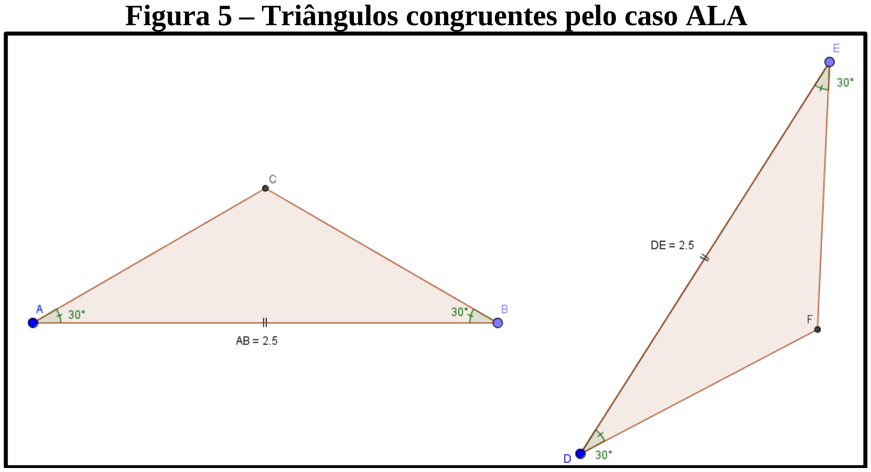


Fonte: o autor

Com relação a este teorema, Tales elucidou, como corolário, que todo triângulo inscrito em um semicírculo é reto. Assim, considere-se *BC* como o diâmetro do semicírculo, tendo *O* como ponto médio de *BC* e *OA* como um segmento traçado entre o referido ponto médio e um ponto *A* qualquer sobre o semicírculo. Desta forma, *OA* ≡ *OC* ≡ *OB*, todos representando o raio do semicírculo. Desse modo, os triângulos *ABO* e *AOC* são isósceles; logo a medida de $A\hat{B}O =$ medida de $B\hat{A}O = \alpha$ e a medida de $O\hat{C}A$ = medida de $O\hat{A}C = \beta$. No triângulo ABC, então, tem-se que a medida de $B\hat{A}C =$ medida de $B\hat{A}O +$ medida de $O\hat{A}C = \alpha + \beta$; medida de $C\hat{B}A = \alpha$ e de $A\hat{C}B = \beta$. Como a soma das medidas $B\hat{A}C + C\hat{B}A + A\hat{C}B =$ 180º, então $(\alpha + \beta) + \alpha + \beta =$ 180º; $2.(\alpha + \beta) =$ 180º; $\alpha + \beta$ =90º. Como $\alpha + \beta =$ medida de $B\hat{A}C$, logo a medida de $B\hat{A}C$ =90º.

e) *Se um triângulo possui dois ângulos e o lado que os faz adjacentes congruentes a dois ângulos e o lado que os faz adjacentes de outro triângulo, então os triângulos são congruentes (figura 5).*

Figura 5 – Triângulos congruentes pelo caso ALA

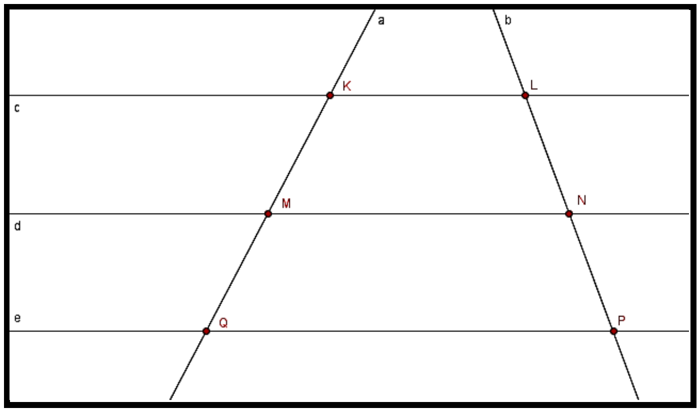


Fonte: o autor

Trata-se do caso de congruência conhecido como ALA (ângulo – lado – ângulo). Considere-se $B\hat{A}C \equiv D\hat{E}F$ e $C\hat{B}A \equiv F\hat{D}E$, bem como AB ≡ DE. Ora, para o triângulo ABC, tem-se que 180º = medida de $B\hat{A}C$ + medida de $C\hat{B}A$ + medida de $A\hat{C}B$, e que, da mesma forma, a medida de $A\hat{C}B =$ 180° - medida de $B\hat{A}C$ - medida de $C\hat{B}A$. Assim também, para o triângulo DEF, 180º = medida de $F\hat{D}E +$ medida de $D\hat{E}F +$ medida de $E\hat{F}D$, o que permite escrever que a $E\hat{F}D =$ 180° - medida de $F\hat{D}E$ - medida de $D\hat{E}F$. Uma vez que $B\hat{A}C \equiv D\hat{E}F$ e $C\hat{B}A \equiv F\hat{D}E$, pode-se considerar que $A\hat{C}B \equiv D\hat{F}E$. Assim, por extensão, ΔABC ≡ ΔDEF. Além da importância deste resultado por si mesmo, é muito provável que, ao apresentar essa noção, Tales tenha dado impulso ao conceito de triângulos semelhantes e a teorizações relacionadas à ideia de proporcionalidade.

f) *Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos proporcionais;*

Figura 6 – Feixe de retas paralelas cortados por transversais



Fonte: o autor

Diante desses constructos geométricos atribuídos a Tales de Mileto, o último foi o que ganhou mais notoriedade e se tornou um dos teoremas fundamentais da geometria elementar.

Vale ressaltar que, de acordo com Roque (2012), é comum ouvir falar que a geometria teve sua gênese às margens do rio Nilo, devido à necessidade de ajustar os limites dos terrenos após a ocorrência das inundações anuais das áreas cultiváveis. A referência a essa conjectura pode ser encontrada nos escritos de Heródoto, datados do século V a.C. Nas notas de Heródoto, todas as vezes em que haviam inundações, o rei Sesóstris enviava pessoas para as devidas inspeções nos terrenos, a fim de medir as reduções nas áreas e consequentemente atribuir descontos proporcionais aos impostos pagos, sendo essa a origem da geometria que futuramente poderia ter migrado para a Grécia, assim crendo Heródoto.

O teorema de Tales tornou-se um objeto central no estudo da geometria por fazer relação entre o geométrico e o numérico por meio de medidas. Não se tem evidencias concretas sobre a época em que surgiu o teorema, pelo fato de não existirem documentos datados que sustentem a gênese de sua autoria. Muitas fontes passaram por demasiadas alterações devido as múltiplas versões gestadas a partir de sua interpretação, inibindo, assim, separar o verdadeiro fato histórico da noção de um fato à luz do fantástico.

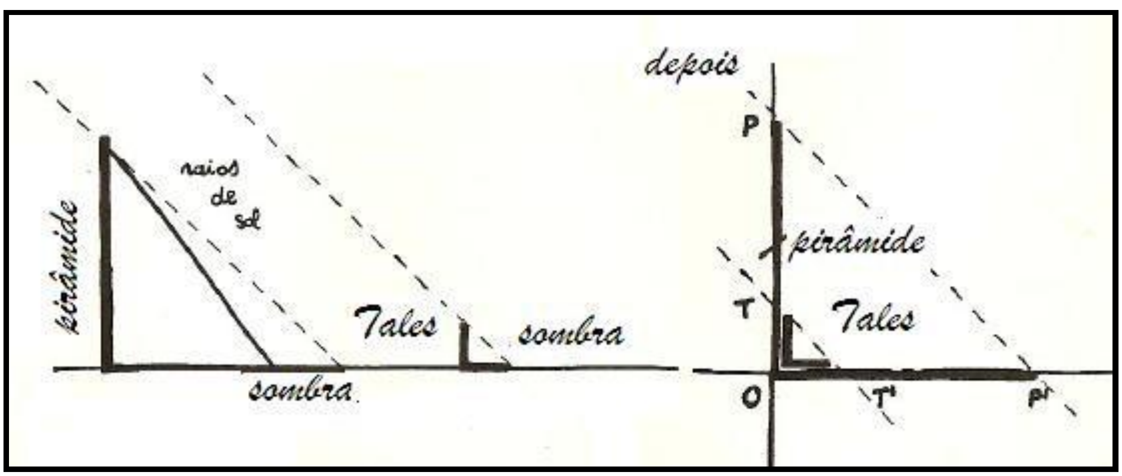
Eves (2004) crê que os constructos de Tales tiveram sua gênese por intermédio das resoluções de problemas de cunho prático, no que tange efetivamente a arquitetura e agrimensura grega, uma vez que tais tarefas envolviam proporcionalidade e paralelismo. Acredita-se que a procedência ou motivação para o teorema de Tales surgiu por meio do cálculo mobilizado para a medição da altura da pirâmide de Quéops. Conforme Eves (2004):

> Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez o uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide – isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide (p. 115).

Eves (2004) indica que os dois métodos que relatam a cena em que Tales definiu a altura da pirâmide têm variáveis que podem determinar falhas, entre as quais a falta de relatos sobre o horário do dia ou mesmo o período do ano, visto que esses fatores poderiam ocasionar mudanças nos valores medidos.

Uma hipótese para exemplificar como Tales poderia ter calculado a altura da pirâmide é apresentada na Figura 7, a seguir:

Figura 7 - Representação do cálculo da altura da pirâmide.



Fonte: Guedj (2006. P.56)

Segundo Santos (2010), Tales utilizou a medida de sua própria altura como unidade de medida (ou seja, "1 tales", por exemplo). Ao terminar o cálculo da altura da pirâmide, o antigo matemático chegou a medida equivalente a 85 tales. Nesse sentido, ainda nas palavras de Santos (2010), Tales possuía uma altura em torno de 3,25 côvados egípcios, resultando que a pirâmide de Quéops possuiria, então, 276,25 côvados, chegando muito próximo a medida real que se sabe hoje representar 280 côvados, ou seja, 147 metros.

Esses pontos são geradores de uma análise que está inserida no livro de Roque (2012), em que Heródoto não traz relatos a partir dos quais seria possível afirmar que o matemático alavancou a geometria na Grécia antiga; entretanto, a falta de referências neste sentido deu espaço, posteriormente, à ideia de que teria sido Tales o matemático responsável por este feito. Sobre isto, Eudemo e Proclus constroem relatos que envolvem o nome de Tales na determinação indireta de medidas inacessíveis, quando mencionam a evolução da geometria prática de origem egípcia.

É manifesto que Tales tinha conhecimento acerca das congruências entre triângulos, e que, possivelmente, possa ter se apropriado dessa ideia para calcular distancias entre barcos no mar; entretanto, fica complicado situar se esta e outras afirmações atribuídas a Tales são verídicas. Para Roque (2012), não se pode confiar muito em tais afirmações, justamente por Tales de Mileto ser sujeito de controvérsias históricas, nas quais seu nome é empregado como propositor de resultados geométricos. Igualmente, cabe mencionar que Aristóteles também faz referência a Tales como fundador da filosofia. Assim, possivelmente a extensão dessa reputação aliada com certa circulação de sua fama como geômetra podem ter dado credibilidade a Tales como o desbravador de importantes descobertas na área da geometria.

1.2 Algumas demonstrações do teorema de Tales

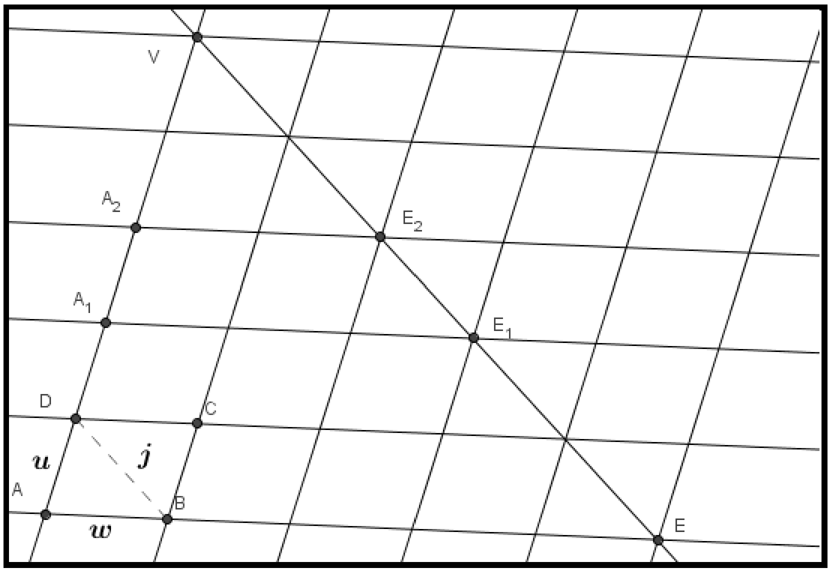
O referido teorema durante anos tem servido de grande suporte matemático quando se necessita identificar distâncias entre dois pontos, quando estas não podem ser determinadas a partir de medição direta, ou envolvem proporcionalidade e/ou congruência. Nesse sentido, ao longo dos tempos, apareceram várias formas de apresenta-lo.

1.3 Demonstrações do período pré-eudoxiano

Lintz (1999 apud PEREIRA, 2015) traz uma forma de tratar o teorema de Tales cuja demonstração leva em consideração a forma como o conceito de número era entendido no período de vivência do filósofo. Nessa época, “número é uma coleção de unidades e, por sua vez, unidade é um ponto sem posição” (LINTZ, 1999 apud PEREIRA, 2015, p. 33).

Assim, a referida demonstração parte da seguinte proposição: “Se duas retas a e b são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em *a* e *b* são proporcionais, isto é $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots$ (LINTZ, 1999 apud PEREIRA, 2015, p. 33).

Figura 8 – Proposta para demonstração do teorema de Tales para números comensuráveis



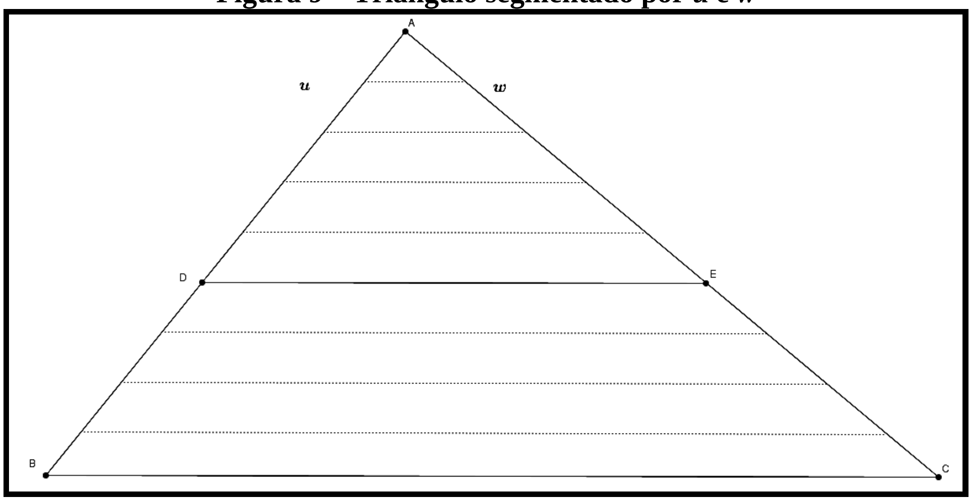
Fonte: PEREIRA, 2015, p. 34 (adaptado)

Tome-se *u* como unidade e considere-se os feixes de paralelas dando origem ao quadrilátero ABCD, de medidas *u*, *w* e diagonal *j*. Considere-se, também, os dois segmentos VA e VE e as paralelas A_2E_2 e A_1E_1. Desse modo, tem-se: $VA_2 = 2u$ e $VA_1 = 3u$, destacando-se que $\frac{VA_2}{VA_1} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}$. Do mesmo modo, entende-se que $VE_2 = 2j$ e $VE_1 = 3j$, o que permite escrever $\frac{VE_2}{VE_1} = \frac{2J}{3J} = \frac{2}{3}$. Logo, fica evidente a igualdade $\frac{VA_2}{VA_1} = \frac{2}{3} = \frac{VE_2}{VE_1}$.

De acordo com Lintz (1999 apud PEREIRA, 2005, p.38), os resultados se generalizam, desde que os segmentos determinados nas retas *a* e *b* sejam múltiplos, respectivamente das unidades *u* e *w* pré-estabelecidas: “esta hipótese da existência de unidade comum para medir segmentos está ligada à questão da comensurabilidade de segmentos de grande profundidade e importância para a geometria e que vai culminar com a crise da escola pitagórica”.

Bongiovanni (2007) elucida que há outra forma de tratar o teorema, a partir de uma prova incompleta datada do período pitagórico, em que dois segmentos *AB* e *AD* são comensuráveis se existem um segmento *u* e dois inteiros *m* e *n* tais que $AB = m.u$ e $AD = n.u$. Desse modo, é notável que AB fica dividido em *m* segmentos e *AD* em *n* segmentos. Com a mesma ideia, pode-se referir que *AE* e *AC* são comensuráveis se houver um segmento *w* e os mesmos inteiros *m* e *n*, tais que *AC* = *m.w* e *AE* = *n.w*. Apresentados *AB*, *AD*, *AC* e *AE*, considere-se $\frac{AB}{AD} = \frac{m.u}{n.u} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} = \frac{m.w}{n.w} = \frac{AC}{AE}$ e $\frac{AB}{AC} = \frac{m.u}{m.w} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{w}} = \frac{n.u}{n.w} = \frac{AD}{AE}$.

Figura 9 – Triângulo segmentado por *u* e *w*



Fonte: o autor

1.4 Demonstrações pelo método de áreas em Euclides

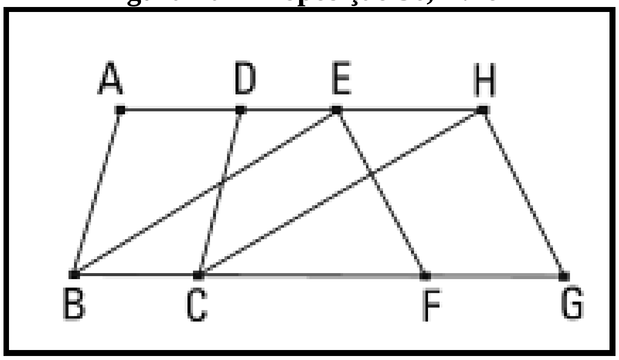
As formas mais difundidas de apresentar o teorema de Tales estão expostas em "Os Elementos", de Euclides, no qual o próprio se utiliza de métodos de áreas (livro I), bem como do método baseado em proporções, que é encontrado no livro V (EUCLIDES, 2009).

Na proposição 36 do livro I pode-se encontrar o seguinte enunciado, correspondente à figura 10:

> Sejam os paralelogramos ABCD, EFGH, que estão sobre as bases iguais BC, FG e nas mesmas paralelas AH, BG; digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EFGH. Fiquem, pois, ligadas as BE, CH. E, como a BC é igual à FG, mas a FG é igual à EH, portanto, também a BC é igual EH. Mas também são paralelas. E as EB, HC ligam-nas; mas as que ligam as tanto iguais quanto paralelas, no mesmo lado, são tanto iguais quanto paralelas; [portanto, também as EB, HC são tanto iguais quanto paralelas]. Portanto, o EBCH é um paralelogramo. E é igual ao ABCD; pois, tanto tem a mesma base BC que ele quanto está nas mesmas paralelas BC, AH com ele. Pelas mesmas coisas, então, também o EFGH é igual ao mesmo EBCH; desse modo, também o paralelogramo ABCD é igual ao EFGH.

> Portanto, os paralelogramos, que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas, são iguais entre si; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009. p. 125)

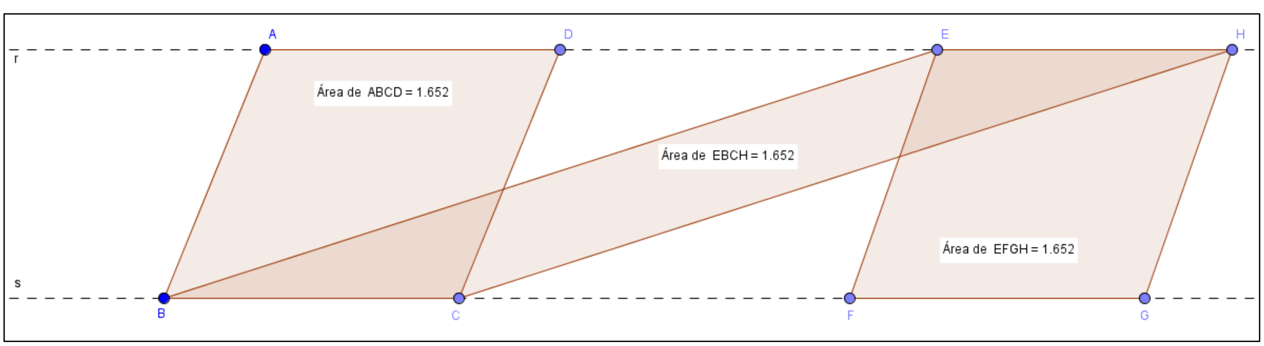
Figura 10 – Proposição 36, livro I



Fonte: EUCLIDES, 2009, p.125

Nesse caso, pode-se perceber que a aplicação de noções do teorema de Tales: têm-se três paralelogramos, postos em bases de mesma medida e que estão sobre as mesmas retas *r* e *s*, cuja distância de uma para a outra é dada como a altura. Nesse caso, tome-se as bases BC ≡ FG ≡ EH ≡ AD e a altura h. Como a área de ABCD é dada pelo produto entre base e altura, tem-se que a área $ABCD = BC\ x\ h$; como BC ≡ FG, logo área de $ABCD = FG\ x\ h$. Assim, a área ABCD é igual a área de EFGH. Da mesma forma, pode-se observar o paralelogramo EBCH, BC ≡ EH e mesma altura h, a distância entre as retas paralelas *r* e *s*. Dessa forma, destaca-se que a área de EBCH é igual as áreas de ABCD e EFGH, como se pode observar na figura 11. Esta construção será utilizada na sequência didática proposta aos sujeitos desta pesquisa (segundo instrumento).

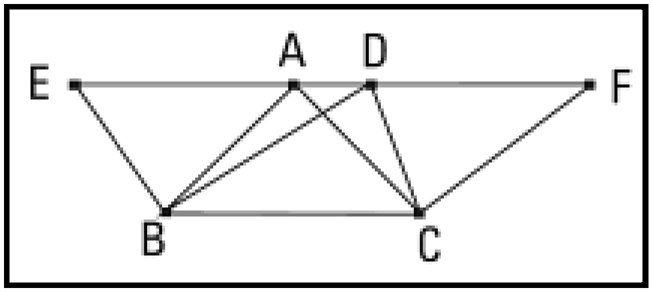
Figura 11 – Construção da proposição 36 do livro I de "Os Elementos"



Fonte: dados da pesquisa

No livro I de “Os Elementos” pode-se destacar, ainda, a proposição 37, exposta na figura 12 e cujo enunciado é “os triângulos que estão sobre a mesma base e a mesma paralela são iguais entre si” (EUCLIDES, 2009, p.125).

Figura 12 – Proposição 37 do livro I de “Os Elementos”



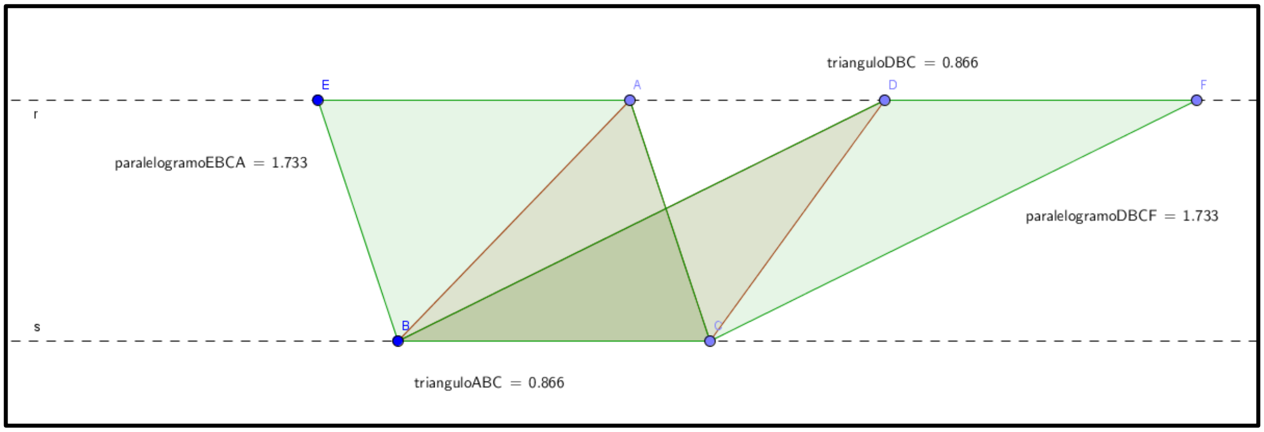
Fonte: EUCLIDES, 2009, p.125

A prova proposta originalmente pelo autor seria a que se encontra a partir da página 125 da mesma referência até aqui empregada:

> Sejam os triângulos ABC, DBC sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AD, BC; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC. Fique prolongada a AD em cada um dos lados até os E, F e, por um lado, pelo B, fique traçada a BE paralela à CA, e, por outro lado, pelo C, fique traçada a CF paralela à BD. Portanto, cada um dos EBCA, DBCF é um paralelogramo; e são iguais; pois, estão tanto sobre a mesma base BC quanto nas mesmas paralelas BC, EF; e por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo EBCA; pois a diagonal AB corta-o em dois; e, por outro lado, o triângulo DBC é metade do paralelogramo DBCF; pois, a diagonal DC corta-o em dois [e as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC. Portanto, os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 125-126).

Deste modo, a construção indicada pela proposição 37 seria aquela trazida na figura 13. Da mesma forma, esta construção será utilizada como parte das atividades propostas aos licenciandos em Matemática, sujeitos desta pesquisa, no segundo instrumento.

Figura 13 – Construção da proposição 37 do livro I de "Os Elementos"

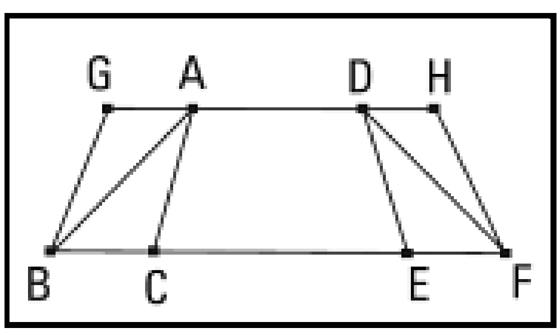


Fonte: dados da pesquisa

A proposição 38 do livro I, menciona que "os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si" (EUCLIDES, 2009, p.126), e que se vê na figura 14, tem a seguinte prova, de acordo com o autor:

> Sejam os triângulos ABC, DEF sobre as bases iguais BC, EF e nas mesmas paralelas BF, AD; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF. Fique, pois, prolondada a AD, em cada um dos lados, até os G, H e, por um lado, pelo B, fique traçada a BG paralela à CA, e, por outro lado, pelo F, fique traçada a FH paralela à DE. Portanto, cada um dos GBCA, DEFH é um paralelogramo; e o GBCA é igual ao DEFH; pois, estão tanto sobre as bases iguais BC, EF quanto nas mesmas paralelas, BF, GH; e, por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo GBCA. Pois, a diagonal AB corta-o em dois, e, por outro lado, o triângulo FED é metade do paralelogramo DEFH; pois, a diagonal DF corta-o em dois; [mas as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF.
>
> Portanto, os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 126).

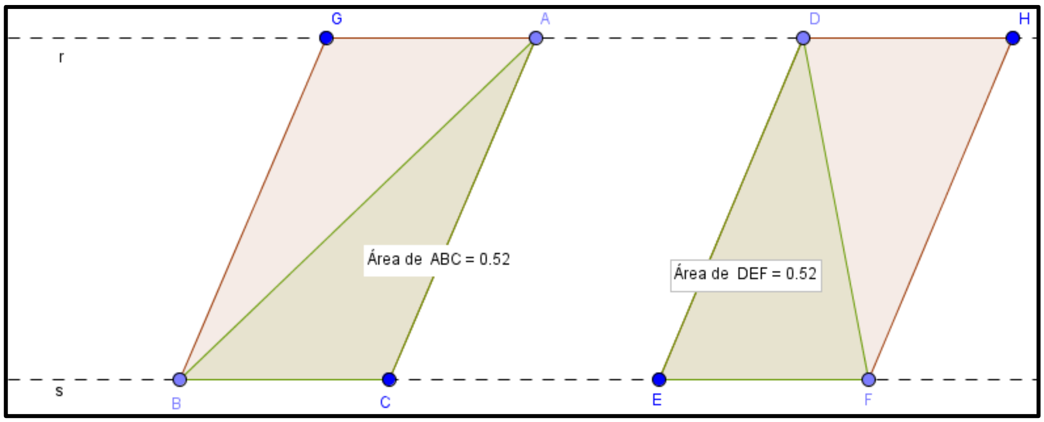
Figura 14 - Proposição 38 do livro I de "Os Elementos"



Fonte: EUCLIDES, 2009, p. 126

Assim, a construção indicada pela proposição 38 seria aquela exposta na figura 15. Como nos dois casos anteriores, esta construção compõe as atividades do segundo instrumento da pesquisa.

Figura 15 – Construção da proposição 38 do livro I de “Os Elementos”



Fonte: dados da pesquisa

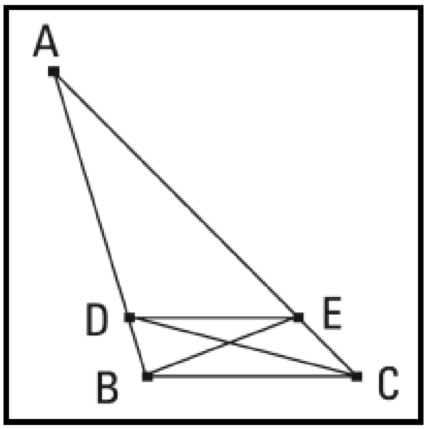
As proposições apresentadas até aqui servem de base para a Proposição 2 do Livro VI de “Os Elementos”, cuja proposta tem evidente relação com o teorema de Tales, de forma a usar valores comensuráveis e incomensuráveis.

A proposição 2 do livro VI expõe que “caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo” (EUCLIDES, 2009 p. 233). Em seguida, uma proposta de prova deste enunciado é feita, tomando como base a figura 16:

> Fique, pois, traçada a DE paralela a um dos lados, o BC, do triângulo ABC; digo que, como a BD está para a DA, assim a CE para a EA. Fiquem, pois, ligadas as EB, CD.
> Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; pois estão sobre a mesma base DE e nas mesmas paralelas DE, BC; mas o triângulo ADE é algum outro. E as iguais têm para a mesma a mesma razão; portanto, como o triângulo BDE está para o [triângulo] ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Mas, por um lado, como o triângulo BDE para o ADE, assim BD para DA; pois, estando sob a mesma altura, a perpendicular traçada do E até o AB, estão entre si como as bases. Pelas mesmas coisas, então, como o triângulo CDE para ADE, assim a CE para EA; portanto, também como a BD para a DA, assim a CE para a EA.

> Mas, então, fiquem cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como a BD para a DA, assim a CE para a EA, e fique ligada a DE; digo que a DE é paralela à BC.
> Tendo, pois, sido construídas as mesmas coisas, como a BD está para a DA, assim a CE para a EA, mas, por um lado, como a BD para a DA, assim o triângulo BDE para o triângulo ADE, e, por outro lado, como a CE para a EA, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE, portanto, também como o triângulo BDE para o triângulo ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Portanto, cada um dos triângulos BDE, CDE tem para o ADE a mesma razão. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; e estão sobre a mesma base DE. Mas os triângulos iguais e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas. Portanto, a DE é paralela à BC. (EUCLIDES, 2009, p. 233).

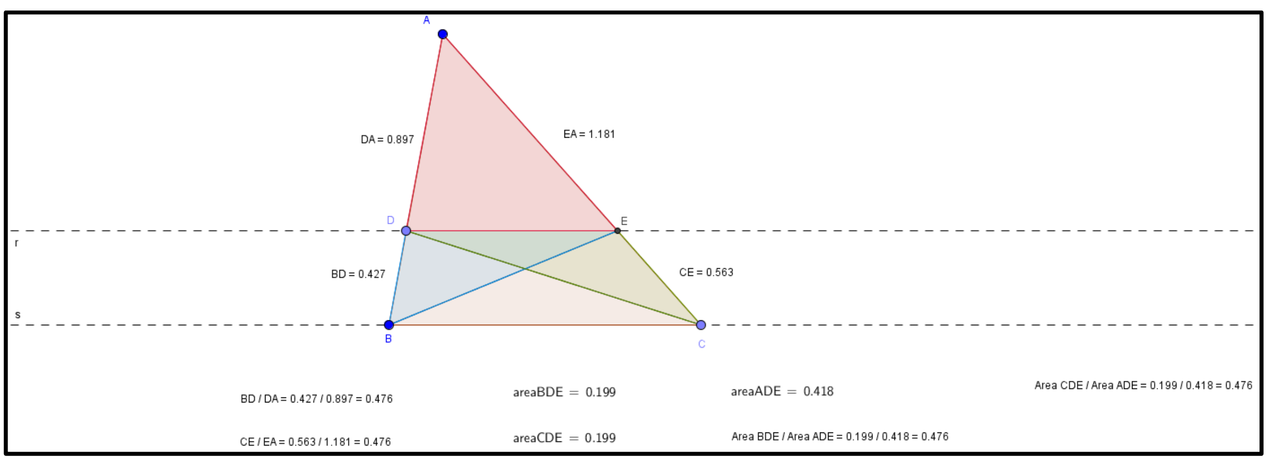
Figura 16 – Proposição 2 do livro VI de "Os Elementos"



Fonte: EUCLIDES, 2009, p. 233

Da forma como se encontra na proposição 2, livro VI, uma construção poderia ser a que se exibe na figura 17.

Figura 17 – Construção da proposição 2 do livro VI de "Os Elementos"



Fonte: dados da pesquisa

Nesse capitulo, foram expostos, até aqui, elementos relativos ao teorema de Tales e postulados geométricos correlatos, os quais, igualmente, são atribuídos por estudos históricos a Tales de Mileto, tal como algumas das formas de provar os resultados mencionados, a partir, principalmente, da obra “Os Elementos”, de Euclides (2009). Nesse sentido, vale ressaltar que o teorema de Tales, com o passar dos séculos, tornou-se peça chave na determinação de medidas de objetos que não poderiam ser medidos de forma direta. Assim, começam a ganhar espaço alguns objetos tecnológicos que, em épocas diversas, valeram-se especificamente da ideia das proporções encontradas no teorema em foco. Esses itens tecnológicos que visavam as medidas de objetos, a aparição das novas tecnologias digitais e sua relação com o ensino do teorema em questão, bem como os saberes inerentes aos professores para o ensino serão abordados em seguida.

De todo modo, a argumentação em tornos dos temas tratados neste ponto deste texto se justifica, uma vez que se entende que o futuro professor de Matemática precisa evidenciar, entre outros saberes fundamentais, um conhecimento acerca do conteúdo específico com o qual trabalha em sala de aula (Shulman, 1987). Neste caso, a abordagem de certa maneira formal dos elementos relativos ao teorema de Tales, bem como elementos correlatos, provenientes de outros postulados atribuídos ao mesmo autor, parece essencial como parte da formação destas pessoas.

1.5 Tecnologias relacionadas diretamente ao teorema de Tales

Ao contrário do que se pode pensar, as tecnologias não são novidades, no sentido de terem surgido apenas a partir do final do século XX, com a popularização dos computadores, inicialmente, das redes interconectadas (e a da Internet, em particular) e da quase pervasividade das tecnologias móveis. As tecnologias, de certa forma, sempre estiveram presentes nos cenários da evolução humana, materializadas desde os instrumentos mais rústicos até os de caráter mais complexo e sofisticado. Mais que isso: na visão de autores como Castells (2002), Lévy (1993) e Oliveira (2007), a tecnologia é inseparável do contexto social: sua adoção modifica hábitos de forma praticamente irreversível, cria perspectivas que passam a ser referência de pensamento/ação e dá um caráter objetivo à técnica. Assim,

> A tecnologia pressupõe conhecimento do porquê da técnica e de como seus objetivos são alcançados, e exige da sociedade onde se instala uma reformulação de suas estruturas compatível com os benefícios que traz, ou ainda, pode gerar rejeição pelos eventuais malefícios que provoca. Então, tecnologia é algo que se estuda e se aprende uma vez que é parte da cultura. Tecnologias não são apenas

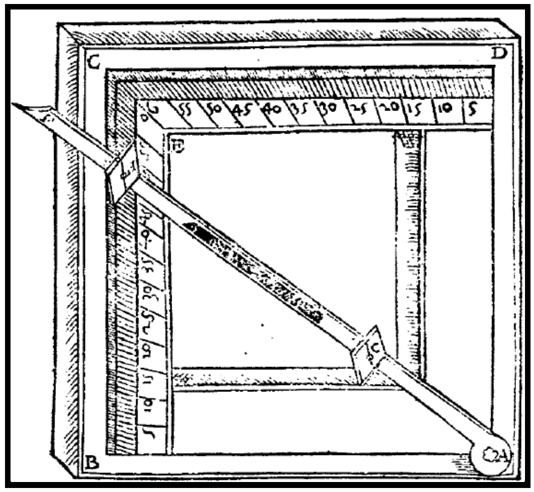
> aparelhos, equipamentos, não são puro saber-fazer, são cultura que têm implicações éticas, políticas, econômicas, educacionais (TOSCHI, 2002 APUD OLIVEIRA, 2007, p. 74).

É neste sentido que se entende, neste ponto, ter lugar a recuperação de alguns elementos históricos que dão conta da inserção de tecnologias relacionadas ao objeto principal desta pesquisa, o teorema de Tales, por meio de instrumentos que possuíam justamente a finalidade de dar materialidade à técnica, por sua vez gestada a partir de construções teóricas formais no âmbito da Matemática e, mais objetivamente, da geometria plana. Esta ideia se estende posteriormente neste trabalho, remetendo ao cenário que a pesquisa aqui apresentada encontrou, com o deslocamento das interações do tipo saber-técnica-tecnologia (OLIVEIRA, 2007) para o campo dos constructos digitais em um contexto de formação de professores de Matemática.

No âmbito do século XVI foram empregados alguns instrumentos que, guardadas as devidas proporções em relação ao uso e à precisão, foram importantes interfaces relacionadas, principalmente, à obtenção de medidas e ao cálculo de distâncias. A apresentação de alguns deles, a seguir, tem por finalidade dar consistência à argumentação em torna da presença de elementos tecnológicos cujas interfaces de alguma forma influenciaram o uso do conhecimento matemático ao longo dos tempos.

O *quadrante geométrico* (figura 18) podia ser utilizado para tomar medidas em linha reta, geralmente em campo aberto, a partir de relações envolvendo semelhança de triângulos. Com este instrumento em mãos, o observador se posicionava em um ponto elevado (monte ou torre, por exemplo), de modo que o lado AB ficasse perpendicular ao piso. Com auxílio de um fio de prumo, era medida a distância do ponto onde se encontrava o vértice superior do instrumento até o chão. Além disso, alinhava-se o quadrante por meio de um apontador, direcionando-o ao ponto desejado, localizado na extremidade oposta da linha reta que se desejava medir. Em seguida, utilizava-se a proporção existente entre os lados do triângulo formado no quadrante com os lados do triângulo formado pela torre e a distância desta para o ponto indicado (figura 19).

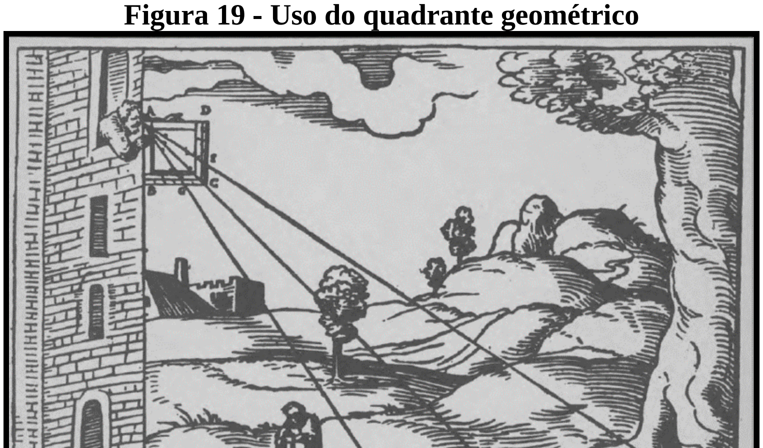
Figura 18 - Quadrante geométrico



Fonte: Saito e Dias, 2011, p. 16, Apud BARTOLI, 1546, p. 3r

Em relação à sua constituição, o instrumento possuía o formato de um quadrado, sendo que cada lado media duas braças (cerca de 1,1 metros). Os lados desse objeto na antiguidade eram segmentados em 60 partes equivalentes e possuíam um pêndulo em um de seus vértices, cujo cumprimento era maior do que a diagonal.

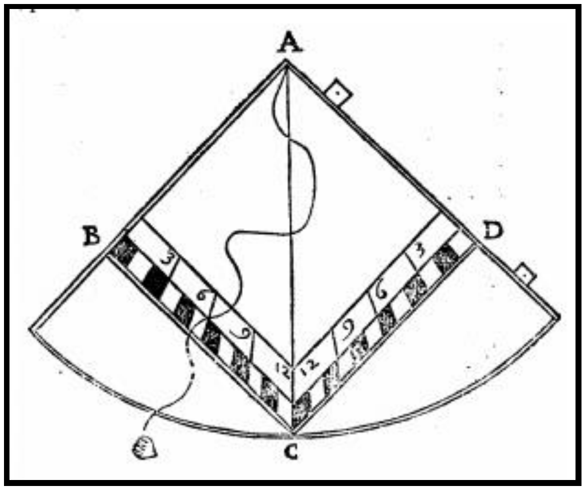
Figura 19 - Uso do quadrante geométrico



Fonte: DOCCI; MAESTRI, 1993 (capa).

Outro instrumento que cabe mencionar aqui é o *quadrante em um quarto de círculo* (figura 20).

Figura 20 - Quadrante num quarto de círculo

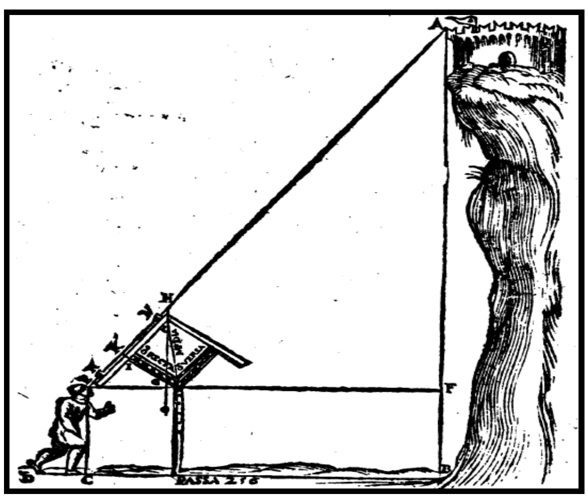


Fonte: Saito e Dias, 2011, p. 19, Apud BARTOLI, 1546, p. 8r

O quadrante em um quarto de círculo foi uma tecnologia muito utilizada no século XVI para a medição de alturas sem que fosse necessário o uso das sombras dos objetos (SAITO E DIAS, 2011 APUD BARTOLI, 1546).

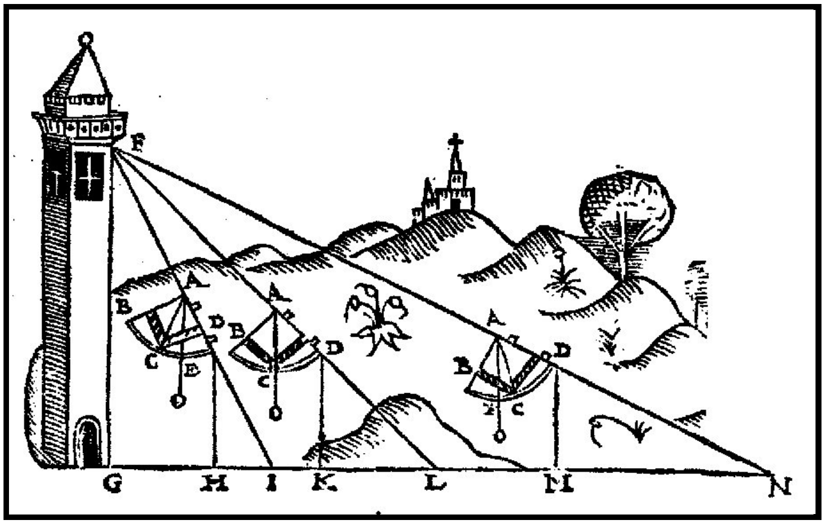
A composição do instrumento, como é exposto no próprio nome, refere-se a um quadrante contido em um quarto de círculo, cujos lados BC e CD possuíam demarcações que os segmentavam em quatro partes iguais e, no vértice A, continha um pedaço de fio com um peso na outra extremidade (figura 21).

Figura 21 - Uso do quadrante num quarto de círculo



Fonte: Tartaglia, 1558, p. 26.

Figura 22 - Ilustração de como usar o quadrante num quarto de círculo



Fonte: Saito e Dias, 2011, p. 21, Apud BARTOLI, 1546, p. 20r

O instrumento funciona fazendo a mirada entre as pínulas próximas aos pontos A e D, como exposto na figura 22, de modo que a mirada entre elas aponte para o mesmo ponto da altura que se desejava que fosse determinada. Em seguida, com auxílio de uma corda, era medida a altura do ponto D, onde está a mirada do observador, até o piso. Também é medida, com auxílio de uma corda, a distância entre a base do objeto cuja altura seria determinada e o ponto de referência do indivíduo que estava manuseando o instrumento.

Após os procedimentos supracitados, dever-se-ia determinar a altura do objeto. Aqui, tem-se a construção de triângulos semelhantes, em relação aos quais os conhecimentos do teorema de Tales eram usados, justamente para identificar a medida desejada. Observe-se que, feita a mirada, o pedaço de corda tenderia a um dos lados segmentados do quadrante ou ao vértice C, como ilustrado na figura 21. Caso o fio estivesse sobre o vértice C, seria adicionado à distância entre o indivíduo e a base da altura a ser descoberta um segmento congruente à distância do ponto D ao solo; dessa forma, a altura do objeto seria dada pela distância do indivíduo até a base de onde estaria sendo determinada a altura, mais a altura relativa do ponto D ao solo. Caso o fio de prumo caísse no lado CD, este criaria o triângulo ADE que seria semelhante aos triângulos DHI e FGI. O mesmo poderia ser dito caso o fio de prumo tendesse para o lado BC, em que os triângulos semelhantes seriam ABE, FGN e DMN. Assim sendo, pelo fato dos triângulos serem semelhantes, poder-se-ia utilizar as proporções existentes entre os lados destes e, consequentemente, o teorema de Tales.

Os instrumentos mencionados foram de grande valia para as antigas populações, pois eram utilizados nos campos, nas construções, na agrimensura e viagens náuticas, por exemplo.

De toda forma, pode-se afirmar que os instrumentos aqui descritos materializavam, como tecnologias, as técnicas advindas do conhecimento matemático disponível e mobilizado a partir do século XVI. Seu uso cotidiano e emprego nas atividades da época em que vigiam só era possível a partir de certos saberes, como aquele relativo ao teorema de Tales, por exemplo. Neste sentido, esta recuperação histórica ilustra a necessidade de relacionar o saber específico de certo conteúdo com aquele relativo ao uso da tecnologia agregada à pessoa que a emprega. Para o professor, o saber relativo a didática da disciplina específica é relevante e complementa esta lista de conhecimentos imprescindíveis a sua prática profissional. Estas reflexões, percebidas a partir do estudo até aqui realizado, são melhor explicitadas no próximo capítulo.

2 – Sobre o professor de matemática em formação: contextos e saberes

2.1 O contexto da formação inicial de professores

A preocupação com a formação docente tem se mostrado um tópico de relevo para além das fronteiras nacionais. Por exemplo, a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) tem se manifestado neste sentido, dirigindo uma série de indicações para os países que compõem a organização. O Brasil, ainda que ele não componha fixamente o conjunto de países membros desta organização, geralmente é convidado a participar de alguns dos programas.

Em 2004 a OCDE já apontava que

> A qualidade do corpo docente é um fator de primeiro plano, quando um país, qualquer que seja, aspira a excelência de seu sistema educacional. Os professores constituem o centro do sistema escolar, e as pesquisas mais diversas confirmaram quanto a qualidade dos professores conta na aquisição dos alunos. É por isso que os poderes públicos levam tão a sério a melhoria da qualidade dos professores, para assegurar que todos os alunos se beneficiem de um bom ensino (OCDE. 2004. p. 1)

Segundo Maués (2009), a OCDE ressalta que os planos para a formação de professores devem ser um dos maiores cuidados dos países que compõem a organização. Essa recomendação deriva dos resultados do *Programme for International Student Assessment* (*PISA*), que, no ano de 2000, constatou que metade dos países que participaram do programa apresentaram resultados aquém dos desejáveis em Matemática. Dentre as razões levantadas, apurou-se que jovens de até 15 anos demonstravam ter suas aprendizagens prejudicadas pela falta de professores ou pelo fato de seus professores não possuírem formação adequada para a tarefa a que se propunham.

Na visão de Maués (2009), em 2004, a OCDE

> [...] evidencia a preocupação em relação à penúria de professores, o que leva a Organização a estudar mais a fundo as causas e identificar algumas condições básicas que podem tornar a profissão mais atraente: a remuneração, o plano de carreira; as condições de trabalho (o tamanho da classe, a direção da escola, a presença de pessoal auxiliar, a qualidade das instalações e dos materiais pedagógicos, a segurança, a responsabilidade pelo ensino); a profissionalização do ensino (as normas de certificação, a autonomia profissional, as possibilidades de colaboração e de participação nas decisões, as possibilidades de

> aperfeiçoamento profissional); a flexibilidade do emprego (plano de aposentadoria, possibilidade de trabalhar em tempo parcial); a segurança do emprego; a estrutura da formação inicial e a necessidade de obter um diploma para exercer a profissão; a satisfação de trabalhar com os alunos e de vê-los desenvolverem-se. (p.21)

Ainda de acordo com Maués (2009), a qualificação inicial dos novos educadores deve ser planejada com bastante cuidado, visto que é preciso que haja solida intersecção entre formação teórica e prática no ambiente universitário e escolar, abrindo espaço para os estudos didáticos voltados para as especificidades dos campos de conhecimento que os professores atuarão. A OCDE indica que os aspectos teóricos, práticos e didáticos devem possuir elementos que tenham faces voltadas para os eventos de mundo que cercam os alunos, ou seja, as características culturais, valores sociais e evolução tecnológica, muito difundidas e debatidas em diversos ambientes extraescolares.

Em seu relatório de 2005, a OCDE apresenta recomendações, além de alertas em relação a posturas que se deveria evitar. Dentre os pontos enumerados pela organização nesta ocasião, pode-se destacar:

- A preocupação de que o ensino seja uma carreira atraente como profissão;
- A preocupação relativa aos conhecimentos e competências dos professores;
- A preocupação relativa ao recrutamento, à seleção e ao emprego dos professores;
- A preocupação relativa à permanência dos professores de qualidade nas escolas.

Estudos como estes também ocorrem, ainda que por outros olhares, no âmbito da educação brasileira. De fato, Gatti e Barreto (2009), por meio de um estudo tendo como base o cadastro socioeconômico dos acadêmicos que realizaram o ENADE 2005, caracterizou os discentes de licenciatura, e obteve um dado surpreendente: 20,8% dos entrevistados optaram por cursar uma licenciatura como se fosse um “ ‘seguro desemprego’, ou seja, como uma alternativa no caso de não haver possibilidade de exercício de outra atividade” (p.160).

Outros fatores relevantes a serem tomados se referem à escolaridade anterior dos futuros professores. Aqui, de acordo com Gatti e Barreto (2009), os “estudantes provêm, em sua maioria, da escola pública. São 68,4% os que cursaram todo o ensino médio no setor público e 14,2% os que o fizeram parcialmente” (p.167). Quanto a situação sócio econômica, foi constatado que 50,4% dos estudantes de licenciatura estão na faixa de famílias que possuem renda mensal de 3 a 10 salários mínimos, seguidos dos 39,2% de alunos que provêm de famílias cujas rendas mensais variam entre 1 e 3 salários mínimos.

Estes números são bastante semelhantes àqueles contidos no estudo de Moreira et al (2012), que produziram um amplo levantamento acerca do perfil dos ingressantes em cursos de licenciatura em Matemática no Brasil, contando com 664 estudantes de 19 instituições de ensino superior localizadas em 10 estados. Entre as características marcantes destes potenciais futuros professores, destacam os autores:

- São jovens e solteiros;
- Estudaram predominantemente em escolas públicas;
- A opção pela licenciatura se deu mais por uma preferência relacionada à matemática do que à docência;
- Possuem ao menos um computador em casa;
- Têm renda familiar inferior a cinco salários mínimos e não contribuem, via de regra, para ela;
- Ascendem a um nível de escolaridade superior ao de seus pais.

O estudo procura focar, também, o aspecto socioeconômico da profissão docente, ao destacar, por meio da comparação com outros países e em relação a outras profissões do cenário nacional, que o professor no Brasil é mal remunerado, o que torna esta profissão pouco atrativa para os jovens egressos do ensino médio. Este seria, então, um dos fatos que mais contribuiriam para o interesse cada vez menor, no contexto deste público, em ingressar na carreira docente. Outros fatores que dificultam esta opção e que afastam eventuais candidatos incluiriam cenários de precária infraestrutura e a ocorrência de agressões físicas e morais contra professores (amplamente noticiadas), o que levaria os trabalhadores desta área a quadros de degradação física e psicológica. Em contrapartida, de maneira diametralmente inversa, as exigências de preparo, atualização, solidez do saber disciplinar e da erudição cultural são grandes, até incompatíveis com os retornos oferecidos. Isto impactaria na possibilidade de o professor prosseguir em constante desenvolvimento e atualização, uma demanda da sociedade em relação à profissão que apresenta intensiva dificuldade em ser cumprida. Esta impressão faz com que os jovens, segundo os autores, ainda que reconheçam a relevância da profissão, tendam a evita-la, por considerarem extremamente díspar a relação entre exigência e retorno – destaca o estudo que “os alunos acham o trabalho muito difícil, ao mesmo tempo em que veem a docência como desvalorizada, social e financeiramente" (MOREIRA ET AL, p. 14 APUD BRASIL, 2010, p. 3).

Em seu trabalho, os autores traçam 27 questões, dividas em 4 grupos (dados pessoais, formação escolar, preferência do curso de matemática no vestibular e condições socioeconômicas). Entre os resultados apurados, chama a atenção a correlação estabelecida pelos pesquisadores entre a precariedade da escola pública e a formação inadequada dos professores que lá exercem a profissão. Indicam que cerca de 70% dos ingressantes cumpriram o ensino médio integralmente em escolas públicas e que menos de 20% o fizeram em instituições particulares. Neste sentido, indicam os autores que "é fato notório no Brasil de hoje que o sistema público oferece uma educação escolar precária" (MOREIRA ET AL, 2012, p. 19) e que, ainda que o acesso ao ensino médio tenha aumentado, a qualidade continua muito aquém da desejável, sobretudo, justamente, na escola pública. Para ilustrar tais asserções, os Moreira et al (2012) expõem um quadro relacionado ao desempenho de estudantes do Ensino Médio em Língua Portuguesa, mostrando que os níveis "muito crítico" e "crítico" se concentram predominantemente nas instituições públicas brasileiras, em uma proporção de 44,3% contra 10,7% da rede privada. Em suma, os autores são levados a concluir pela existência de um ciclo perverso de continuidade baseada na baixa qualidade:

> [...] somos levados a imaginar um círculo vicioso também nos processos de formação e de recrutamento de professores de matemática para a rede pública de Educação Básica: como vimos, os ingressantes na licenciatura provêm basicamente da rede pública e provavelmente para lá retornarão depois de formados, inclusive, entre outras razões, porque "a maioria dos professores da Educação Básica encontra-se na rede pública, totalizando 85% das funções docentes" (Brasil, 2003, p.47). Como na rede privada há melhores condições de trabalho docente e melhor índice de desempenho discente (Brasil, 2003), os professores mais qualificados buscam as escolas particulares, reproduzindo-se, assim, em termos da qualificação dos professores e do desempenho dos alunos, as desigualdades originais entre as redes de educação pública e privada (MOREIRA ET AL, 2012, p. 20).

Em relação ao acesso à licenciatura por meio de concurso vestibular, os dados alinhados por Moreira et al (2012) apontam que mais da metade dos ingressantes já havia participado de certames relativos a outros cursos, bem como mais de 60% não frequentou cursinhos preparatórios (consideram o acesso fácil). Além disso, cerca de 55% dos alunos pairam entre a incerteza e a negação acerca do fato de fazerem da docência sua obrigação principal. Ou seja, menos da metade afirma que pretende, com certeza, seguir a carreira docente. Considerando que boa parte dos estudantes optou pela licenciatura apenas após não ter sido aprovada em outro curso e que mais de 40% alega que não tem certeza se fariam de novo o vestibular para esta opção, o estudo sugere que, para boa parte das pessoas, a licenciatura em matemática aparece como uma segunda opção, algo que se faz por falta de acesso à escolha prioritária. Entretanto, ainda que pareça algo que se faz por que é o que estava disponível, os autores ressaltam que, para boa parte dos ingressantes, a renda a ser auferida com a profissão, apesar de baixa em termos comparativos com outras profissões, geralmente é maior do que a renda familiar atual do ingressante – isto indica, segundo os autores, que a profissão docente está sendo escolhida por um "estrato mais pobre da população, para o qual a profissão ainda significaria uma forma de ascensão social e econômica" (MOREIRA ET AL, 2012, p. 24).

Os trabalhos consultados para a construção desta seção evidenciam indicativos de desvalorização da profissão docente, especificamente relacionados à formação do professor de matemática, e indica questões que vão da baixa qualidade da formação anterior dos licenciandos, baixas expectativas profissionais, escolha da profissão por impossibilidade de acesso a outras consideradas mais atraentes, entre outros problemas. Entre as consequências que impactam diretamente na pesquisa aqui descrita, destaca-se a formação precária, em regime de retroalimentação, que teria sua continuidade a partir de professores formados em condições inicias precárias na licenciatura. Nestes termos, a efetividade da formação inicial é algo que se pode questionar, de maneira crítica, considerando uma proposição que contemple os tipos de conhecimentos necessários para que o professor venha a superar esta condição. Como se verá mais adiante no estudo ora descrito, alguns equívocos ocorridos nas atividades podem ter suas origens em circunstâncias que extravasam o espaço e o tempo da licenciatura; entretanto, é neste lugar e neste tempo que semelhantes impasses podem ser superados. A proposta desta pesquisa passa pelo entendimento dos conhecimentos necessários ao professor, o papel das tecnologias neste cenário e a análise da questão direcionadora do estudo à luz destes referenciais, que incluem o constructo teórico exposto a seguir.

2.2 Saberes docentes para o ensino

Em que pese o cenário de certa maneira aflitivo exposto na seção anterior, deve-se cogitar seriamente no papel da formação inicial como elemento decisivo na superação de semelhantes dificuldades. Assim, quais saberes deveriam ser considerados para o professor de matemática? Como os conhecimentos relativos a eles se relacionam? Estes questionamentos parecem indicar, no âmbito desta pesquisa, a necessidade de uma escolha acerca de um constructo teórico, um quadro que permita analisar as perguntas mais diretamente relacionadas ao tema e ao direcionamento desta pesquisa. Do ponto de vista da formação dos professores, Shulman (1986, 1987) propõe certa etimologia para os saberes docentes, ao mesmo tempo em que indica qual a natureza dos conhecimentos que formariam a base necessária à prática profissional dos mesmos.

Segundo o autor mencionado, é possível elencar uma série de conhecimentos – uma base, de forma mais precisa – atinentes ao ensino e necessários como uma coleção de saberes da qual o profissional docente deve se apropriar. Esta coleção, por assim dizer, pode ser vista a partir de categorias de conhecimentos, organizados e articulados como uma compreensão imprescindível ao trabalho docente, em especial no que se refere à atuação do professor no processo de aprendizagem de seus grupos de estudantes. Desta maneira, os saberes que devem compor a trajetória do professor possuem natureza variada e devem surgir imbricados, de modo a patrocinarem a prática, do ponto de vista didático, no sentido de efetivamente permitirem a criação de estratégias que favoreçam a aprendizagem. Esta categorização, exposta por Shulman (1987), pode ser descrita da seguinte forma:

- *Conhecimento do Conteúdo (Content Knowledge*): fundamental para o êxito do trabalho docente, está intrinsicamente ligado à área de ensino (matéria ou disciplina, no jargão escolar) e aos conhecimentos que se propõe que os estudantes construam, bem como à organização da disciplina em si, em relação aos seus conteúdos estruturantes e ao caráter epistemológico. Esse conhecimento, do ponto de vista do licenciando em matemática, recai sobre os saberes inerentes aos objetos matemáticos e como manipula-los coerentemente de acordo com o rigor do saber formal, inclusive em relação à integração intradisciplinar dos mesmos e as eventuais ligações com quadros de referência;

- *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge):* Está relacionado, como o próprio título indica, à constituição de saberes relativos à gestão de um grupo de estudantes (sala de aula, turma) e ao conhecimento sobe o trabalho ligado ao processo de ensino e/ou aprendizagem, o que inclui a constituição adequada de estratégias e técnicas de caráter didático e o domínio de teorias de aprendizagem;

- *Conhecimentos Curriculares (Curricular Knowledge):* o conhecimento do currículo, segundo Shulman (1986), se dá pelo saber dos programas concebidos para o ensino de assuntos específicos para um determinado nível escolar, além dos materiais didáticos disponíveis para esses programas e o conjunto de características que servem como indicações e contraindicações para certas circunstâncias. Seriam, desta forma, segundo o autor, "ferramentas de trabalho" para o professor (p. 8);

Estas seriam as principais categorias elencadas pelo autor. De forma subsidiária, Shulman (1986, p.8) indica, ainda:

- *Conhecimento dos alunos e suas características;*

- *Conhecimento do contexto educacional*, que vai desde o funcionamento do grupo ou sala de aula, passando pela governança e pelo financiamento da escola e de sua estrutura suportiva, até a apreensão das caraterísticas da comunidade e da cultura local;

- *Conhecimento dos fins educacionais*, propósitos e valores, e das suas bases filosóficas e históricas.

Neste contexto, para Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo é de suma importância para a carreira dos professores. Entretanto, apenas conhecimentos específicos não são suficientes para que haja realmente um ensino de qualidade, pois entre o professor e os alunos, os conhecimentos científicos não podem ser apresentados de forma simplesmente "pura", ou seja, como foram pensados originalmente em seus campos de estudo. Pensando nesse aspecto, Shulman (1986) apresenta, então, um domínio especial de conhecimentos, inerentes aos professores, que caracteriza como *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge - PCK),* distinto do conhecimento do conteúdo, pois está ligado a forma como os conhecimentos são tratados no âmbito das disciplinas escolares. Para o autor, esta categoria relaciona diferentes corpos de conhecimentos relacionados ao ensino, representando uma combinação do conteúdo em si e do que definiu como “pedagogia”, no sentido de proporcionar a compreensão de como temas, problemas ou tópicos específicos são organizados e adaptados em relação aos interesses e habilidades dos estudantes. Trata-se, na verdade, de uma categoria de conhecimentos a partir da qual é possível distinguir o conhecimento do especialista no conteúdo (do matemático, no caso tratado nesta pesquisa) daquele que é típico de quem ensina a disciplina em si (o professor de matemática, aqui).

A proposta do PCK, na visão do autor, visa, entre outras finalidades, suprir uma lacuna significativa na formação de professores: a ênfase dos programas ora apenas em aspectos ligados ao conteúdo, ora somente em elementos relativos à didática, esta vista de forma geral e desconectada do contexto disciplinar e de suas características típicas. Ao não admitir a visão disjunta dos aspectos relacionados ao conteúdo e à pedagogia, o autor reconhece a importância de cada um destes conhecimentos, mas indica a necessidade de que os processos de formação de professores em cada área tenham a preocupação de prover uma visão integrada entre eles, de modo a evitar posturas distantes dos cenários profissionais específicos e fragmentadas. Assim, de acordo com o autor

> [...] o conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial interesse porque identifica os corpos distintivos de conhecimento para o ensino. Representa a mistura de conteúdos e didática na compreensão de como determinados tópicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos, e apresentados para instrução (SHULMAN, 1986, p. 8).

O autor ainda indica que existem pelo menos quatro fontes mais comuns relativas ao que chama de “base de conhecimento para o ensino” (1986, p. 8):

- *O saber acerca da disciplina referente ao conteúdo*: para Shulman (1986), esta fonte está ligada ao amplo conhecimento acerca do conteúdo a ser estudado em sala de aula, envolvendo aspectos históricos, filosóficos e, é claro, epistemológicos acerca do tema. Os estudos que o professor realiza acerca do conteúdo que deve ensinar devem lhe permitir compreender os princípios da organização conceitual envolvidos, bem como as ideias e habilidades mais importantes relacionadas ao conhecimento da matéria, além do domínio de aspectos formais e válidos do conhecimento em questão. O professor, no caso, também precisa compreender quais novas propostas, boas ou ruins, estão em discussão por aqueles que produzem conhecimentos na área. O que o autor propõe, então, é uma compreensão que não seja apenas suficiente para um domínio profundo de aspectos particulares do conteúdo, mas um entendimento mais amplo, que sirva de base para os conhecimentos que eventualmente o professor já possua e como facilitador para o domínio de novos conhecimentos;

- *Materiais educacionais e estruturas*: entre os materiais/estruturas ligados à esta fonte, o autor destaca os currículos, provas e materiais correlatos, as instituições, as associações profissionais docentes e os órgãos governamentais, ligados à educação e ao financiamento de atividades. Neste contexto, há uma relação de uso mútua, ou seja, o professor utiliza esta estrutura e é, ao mesmo tempo, utilizado por ela. Além disso, esta fonte é sustentada, por assim dizer, pela abundância de literatura específica geralmente disponível (livros didáticos, por exemplo), embora materiais de pesquisa também existam na maioria das áreas de conhecimento (não é diferente no caso da Educação Matemática, por exemplo). Estas ferramentas, como são chamadas pelo autor, das quais o professor deve ter domínio no campo do conhecimento, são aqueles elementos de negociação que, ao mesmo tempo, impulsionam e inibem seu trabalho.
- *Saber formal sobre educação*: Uma terceira fonte, mencionada pelo autor, seria o que chama de “importante e crescente de literatura acadêmica dedicada à compreensão dos processos de estudo, ensino e aprendizagem” (SHULMAN, 1986, p. 10). Neste sentido, ainda que reconheça que os resultados de pesquisas empíricas são importantes e representam uma relevante fonte de conhecimentos no campo docente, o autor indica que seria necessário que os gestores educacionais também considerassem, como literatura componente da base de conhecimentos dos professores, aquela em que os próprios indicassem “suas visões do que constitui uma boa educação, ou como jovens bem formados deveriam parecer se lhes proporcionassem oportunidades e estímulos adequados. Os trabalhos de Platão, Dewey, Neill e Skinner indicam suas concepções sobre como um bom sistema educacional deveria ser” (SHULMAN, 1986, p. 10). De todo modo, o autor sugere que as pesquisas que se desenvolvem a partir daquelas que chama de empíricas – e que tratam sobre a efetividade no ensino – tenham lugar nesta

fonte de conhecimentos, à medida que indiquem quais comportamentos e estratégias docentes são mais eficazes em conduzir os estudantes a fazer progressos escolares. Ainda assim, alerta que a padronização excessiva destes elementos poderia promover avaliações fracas e parciais, quando viessem a generalizar demasiadamente as complexas atividades relativas ao ensino;

- *A sabedoria advinda da prática*: para o autor, a última das fontes, relativa ao conhecimento experiencial, é a menos codificada de todas. Desta forma, seria importante que a comunidade de pesquisadores educacionais trabalhasse no sentido de prover representações acessíveis (codificadas, segundo o autor) de práticas pedagógicas de excelência ("sábias") que pudessem fomentar a formação de professores.

Do ponto de vista desta pesquisa, as ideias de Shulman (1986) são utilizadas no sentido de evidenciar os conhecimentos específicos envolvidos nas atividades às quais os sujeitos serão submetidos (tópicos de geometria euclidiana plana, com o teorema de Tales como um dos componentes principais) e sua relevância em integração com os aspectos didáticos, ou seja, como elementos que o futuro professor de matemática deveria dominar, inclusive em relação ao sentido deste conhecimento – isto seria a base, segundo se entende nesta pesquisa, para a efetivação dos pressupostos do PCK. Como se verá mais adiante, o conhecimento relativo ao conteúdo será analisado em relação não apenas à resolução típica dos problemas propostos, mas a partir da articulação do processo pelo qual a solução é encontrada/evidenciada e o alcance das provas/demonstrações ligadas às mesmas. Assim, caberá posicionar estas asserções do ponto de vista proposto por Balacheff (1987), inclusive a partir de alguma comparação com outros pontos de vista teóricos, o que se faz brevemente na próxima seção. Por sua vez, a articulação com os conhecimentos didáticos levará em conta, além do elenco de fontes indicados por Shulman (1986) – com exceção da última, uma vez que os sujeitos ainda não possuem experiências objetivas em relação à docência – a sobreposição destes saberes com o uso de tecnologias no ensino de Matemática. Neste sentido, mais adiante, procura-se alinhar os elementos teóricos que servirão à análise dos dados, a partir, principalmente, do trabalho de Mishra e Koehler (2006).

2.3 Demonstrações no ensino básico

Uma questão correlata que se apresenta como forma de avaliar de forma mais objetiva o alcance do conteúdo no modelo proposto por Shulman (1986) é, justamente, como fazê-lo. Um critério que parece atender a este requisito é o domínio formal dos objetos cognoscíveis. Recorrendo a Sirotic e Zazkis (2007), na revisita que fizeram ao trabalho de Tirosh et al, encontra-se a proposta de que o conhecimento matemático (por extensão, já que os autores se referem originalmente aos números racionais, de forma específica) é constituído a partir de um conjunto de conexões entre as dimensões intuitiva, algorítmica e formal do conhecimento. As autoras mencionam a importância dos três aspectos e de suas sobreposições, mas não se furtam em definir cada um deles de forma bastante específica:

> A dimensão algorítmica é procedural por natureza e consiste no conhecimento de regras e prescrições relativas a determinado domínio matemático, envolvendo a capacidade do aprendiz em explicar os sucessivos passos presentes em diversas operações típicas. A dimensão formal é representada por definições e estruturas relevantes em relação ao domínio de um conteúdo específico, assim como por teoremas e suas provas: consiste na capacidade do estudante em recorrer e implementar definições e teoremas em uma situação de resolução de problemas. A dimensão intuitiva é composta pelas intuições do aprendiz, bem como por ideias e crenças sobre os objetos matemáticos, incluindo modelos mentais empregados para representar conceitos e operações. Esta dimensão é caracterizada como o tipo de conhecimento que se tende a aceitar de forma direta e confiante, sendo auto-evidente e psicologicamente resistente (SIROTIC; ZAZKIS, 2009, p. 51).

Enquanto as dimensões algorítmica e intuitiva recorrem, respectivamente, a roteiros e à criatividade, percebe-se que o aspecto por assim dizer estável do conhecimento repousa na dimensão formal, capaz, segundo as autoras, de instrumentalizar os aprendizes para a resolução de problemas a partir de teoremas e de suas provas. Neste mesmo sentido, mas recorrendo a outra etimologia, Chevallard (1991) indica o que chama de *saber sábio* (no sentido de ‘formal ou acadêmico”, ou “de rigor”) como referência e fonte iluminadora de outras dimensões, como, por exemplo, do *saber a* ensinar, aquele que, a partir de transposições de caráter didático desde o saber formal, pode adequar os objetos e temas matemáticos ao ensino nos diversos níveis escolares. Em todo o sentido, então, entende-se aqui que a dimensão forma do conhecimento matemático deve ser a referência para o professor e critério de avaliação do domínio de determinado tema. Como corolário deste saber, os autores mencionados nesta seção posicionam os processos de demonstração. De alguma forma, este estudo se vale deste critério em algumas de suas atividades e, consequentemente, nas análises.

Neste sentido, parece importante recorrer a alguns critérios como aqueles indicados por Balacheff (1982) e por De Villiers (2002) acerca das demonstrações no âmbito do ensino de matemática. Um dos pontos mais importantes, desdobrado por Balacheff em diversos e complexos elementos teóricos em seus trabalhos, é a distinção entre explicações, provas e demonstrações:

> A *explicação* situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social e constitui uma prova para essa comunidade, sendo a proposição "verdadeira" ou não. As *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff denomina, somente nesse caso, demonstração. As *demonstrações* são provas particulares com as seguintes características: são as únicas aceitas pelos matemáticos; respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros, anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução escolhidas com base em um conjunto de princípios básicos da lógica; trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência (ALMOULOUD et al. 2008, p. 224).

Assim, Balacheff (1987) indica que existiriam quatro distintos níveis de prova, se consideradas aquelas de caráter pragmático (os dois primeiros) e as de caráter conceitual (o último – o terceiro nível transita entre os dois tipos):

- Empirismo ingênuo (ou natural): consiste em afirmar que determinada conjectura é verdadeira a partir do exame de alguns casos; trata-se, conceitualmente, do movimento inicial do processo de generalização;
- Experimento crucial: teria lugar a partir da afirmação da verdade acerca de determinada conjectura tendo por base um caso típico e/ou especial, via de regra não familiar;
- Exemplo genérico: ocorreria quando a afirmação da verdade acerca de certa conjectura dependesse da manipulação de exemplos que permitissem aos mesmos a aquisição de dada característica de uma classe de objetos;
- Experimento de pensamento (ou mental): a proposição ou conjectura em validação pode ser considerada como verdadeira de forma genérica, ainda que com base no exame de casos específicos.

Sob outro ponto de vista, para De Villiers (2002):

> Tradicionalmente, a função da demonstração tem sido encarada quase exclusivamente em termos de verificação (convicção ou justificação) da correção

> das proposições matemáticas. A ideia é que a demonstração é usada principalmente para eliminar as dúvidas, sejam elas pessoais e/ou de outros céticos; esta ideia tem dominado unilateralmente a prática do ensino e a maior parte das discussões e da investigação sobre o ensino da demonstração (DE VILLIERS 2002, p. 3).

Assim, De Villiers (2002), ao discorrer sobre o papel das demonstrações, indica que o papel destes dispositivos pode exceder a mera visão do convencimento. De fato, para o autor, outras funções incluiriam:

> Explicação (proporcionar compreensão sobre porque é que é verdade [determinada conjectura])
>
> Descoberta (a descoberta ou a invenção de novos resultados)
>
> Comunicação (a negociação do significado)
>
> Desafio intelectual (a realização/satisfação pessoal por se ter construído uma demonstração)
> Sistematização (a organização de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas) (DE VILLIERS 2002, p.04).

É importante destacar que não é objetivo deste trabalho classificar as exposições feitas pelos sujeitos da pesquisa de acordo com determinados conceitos acerca das demonstrações matemáticas, mas ter alguma referência que permita indicar se os mesmos compreendem como construí-las de forma a justificar seus raciocínios e embasar suas conjecturas, mesmo que em um nível por assim dizer básico. Ou seja, de outro ponto de vista, como estas asserções interferem na formação do professor de Matemática. Desse modo, julgou-se pertinente empregar o trabalho de Ordem (2015), no qual o autor fez profunda análise das literaturas específicas sobre a abordagem de prova e demonstração no ensino básico, o que resultou em uma etimologia que descreve a visão que os professores de matemática têm sobre o assunto, bem como a forma pela qual este tema é tratado em sala. Segundo Ordem (2015):

> (i) Tanto os professores do ensino fundamental e médio, como os alunos dos diferentes níveis de escolaridade – desde o nível básico à universidade – têm recorrido a verificações empíricas para validar propriedades matemáticas, embora se saiba que em matemática evidências empíricas não constituem demonstração.
>
> (ii) Entre professores do ensino básico (fundamental e médio) prevalece a ideia de que há três tipos de demonstrações quanto ao nível de formalidade: (1) demonstrações formais – não adequadas para os alunos; (2) demonstrações menos formais – apenas para alunos excepcionais – e (3) demonstrações informais – as mais indicadas para o ensino - e se baseiam em verificações empíricas para validar conceitos matemáticos.

> (iii) Os professores tendem a ver as demonstrações de forma pedagogicamente limitada, ou seja, veem-nas como um tópico de estudo e não como uma ferramenta de estudo e de comunicação em matemática. A revisão mostrou ainda que prevalece entre professores do ensino básico a ideia de que a "casa" das demonstrações na matemática escolar é a geometria plana.
>
> (iv) Alunos sem ideias de como iniciar uma demonstração são mais propensos a verificações empíricas para validar conjecturas. Mostrou ainda que tanto alunos como professores facilmente conseguem identificar demonstrações com erro, porém, têm tido dificuldade em identificar o próprio erro.
>
> (v) A revisão também mostrou que é mais fácil para os alunos reconhecerem demonstrações com raciocínio circular, do que reconhecer a invalidez de verificações empíricas nas demonstrações.
>
> (vi) A revisão evidencia que mesmo reconhecendo que as demonstrações devem se basear em argumentos dedutivos, os professores do ensino básico continuam aceitando evidências empíricas como provas e a recorrer a exemplos para convencer a seus alunos. (ORDEM, 2015, p.81.)

O diagnóstico provido por Ordem (2015), em conjunto com os trabalhos clássicos dos autores anteriormente mencionados nesta seção puderam fornecer um instrumental aditivo para as análises, de modo a auxiliar nas descrições em torno da compreensão sobre a forma que os autores empregam algum raciocínio que consideram equivalente à uma demonstração matemática nos processos de validação de suas conjecturas. Conforme já se mencionou, esta seria uma maneira de verificar a inserção do componente "conteúdo" do PCK em questões relacionadas às atividades resolvidas pelos sujeitos ao longo da pesquisa, diretamente, e em sua formação inicial, por consequência.

2.3 Relações entre conteúdo, pedagogia e tecnologia

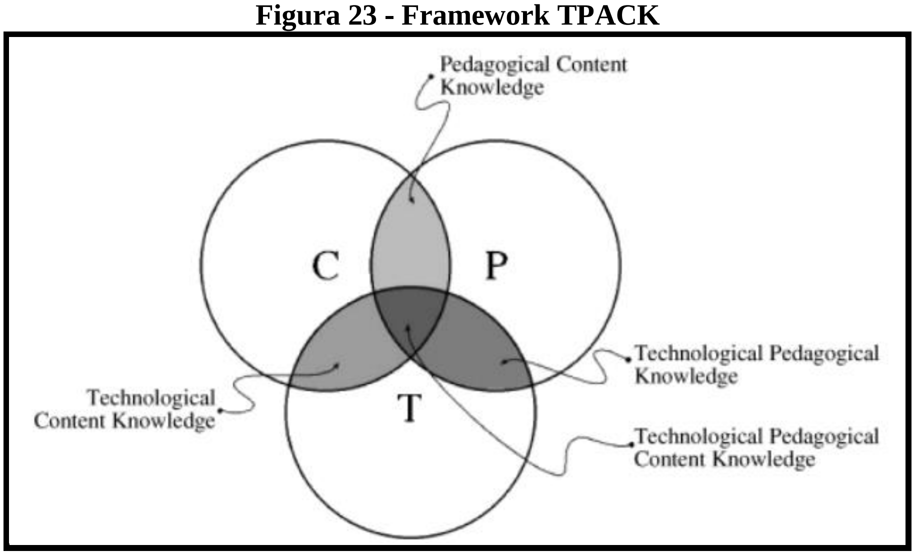
Tendo por base os referenciais supracitados, relativos aos trabalhos de Shulman (1986; 1987), Mishra e Koehler (2006) indicam que as tecnologias, desde as mais 'tradicionais', como giz e lousa, às mais 'inovadoras', como computadores e Internet, possuem potencial para alterar a natureza da sala de aula, uma vez que cumprem um papel crítico, na visão destes autores, em relação às possibilidades de tornar, didaticamente, um conteúdo específico mais compreensível. A questão, neste caso, não se resume ao uso dos instrumentos, mas ao conhecimento relativo às técnicas e habilidades para o uso de tais elementos, considerando sua constante evolução, o que configura um saber específico. De forma distinta de outros tempos, não existe mais uma estabilidade em relação ao emprego didático das tecnologias, ou seja, não há a perspectiva de que estas permaneçam inalteradas ao longo da atuação profissional dos docentes. Aprender a usar as tecnologias adequadas, então, do ponto de vista operacional e didático, tornou-se um importante aspecto a ser considerado no caráter geral dos saberes docentes.

Além disso, Mishra e Koehler (2006) apontam que o conhecimento acerca do uso didático das tecnologias não deve ser visto de forma separada em relação aos conhecimentos docentes ligados ao conteúdo e à didática. Para estes autores

> As relações entre o conteúdo (o assunto específico a ser ensinado e aprendido), a pedagogia (o processo e a prática ou métodos de ensino e aprendizagem) e a tecnologia (tanto as tradicionais, como lousas, como as avançadas, como os computadores digitais) são complexas e cheias de nuances. As tecnologias frequentemente trazem seus próprios imperativos, os quais condicionam o conteúdo a ser coberto e a natureza das possíveis representações. Estas decisões têm um efeito cascata, definindo, ou, de outro modo, condicionando a dinâmica didática e outras decisões pedagógicas. Assim, não é adequado ver o conhecimento relativo à tecnologia de forma isolado em relação aos conhecimentos do conteúdo e da didática (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1025, tradução nossa).

Desta forma, os autores propõem um *framework*, em que se relaciona os conhecimentos relativos ao Conteúdo (C), Pedagogia (P) e Tecnologias (T).

Figura 23 - Framework TPACK



Fonte: Mishra e Koehler, 2006, p. 1025

O constructo mencionado é conhecido como *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK – figura 23), cuja principal proposta reside na visão integrada e indissociável das dimensões do conhecimento necessárias à atuação docente, com ênfase nas conexões, interações, possibilidades e condicionamentos que ocorrem no contexto formado pelo conteúdo, a didática e as tecnologias. Um dos princípios fundadores desta proposta reside na ideia de que um ensino de qualidade requer uma compreensão detalhada das complexas relações entre as três dimensões mencionadas, de forma a tornar possível desenvolver estratégias e representações adequadas a determinada realidade – ou seja, ações específicas em relação a determinado conteúdo em dado contexto, compreendendo que não há um uso 'padrão' destes componentes, o que impõe sua compreensão de forma conjunta e inter-relacionada.

De forma semelhante ao constatado por Shulman (1986), Mishra e Koehler (2006) argumentam que seria um equívoco perceber as tecnologias como parte separada e meramente funcional no contexto do ensino e da formação de professores. A ideia subjacente, então, seria a de evitar a visão de que as tecnologias, neste contexto, seriam elementos de apropriação simples, que poderia ser facilitada por treinamentos voltados para soluções específicas, como certos programas computacionais, por exemplo. Por trás disto, persistiria a visão de que treinar professores para usar softwares seria suficiente para que os mesmos soubessem como empregar a tecnologia em suas aulas – ou seja, é como se a tecnologia fosse autossuficiente e o acesso ao seu potencial dependesse exclusivamente de algumas habilidades básicas e isoladas. O simples treinamento em aplicações, segundo os autores, não seria suficiente, uma vez que as mudanças tecnológicas são rápidas e constantes (e o programa utilizado no treinamento pode ficar rapidamente defasado e até sem suporte); além disso, boa parte das aplicações, pelo fato de não terem sido criadas especificamente com propósitos educacionais, trazem um design inapropriado. Outro fator importante nestes casos é que os treinamentos isolados trazem uma ênfase em "o que fazer" e não em "como fazer": a formação para uso adequado de tecnologias por professores deve lidar com valores, objetivos e métodos – o que não permite esquecer a didática e o conteúdo.

Desta forma, o conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo (TPACK) pode ser visto como uma

> [...] emergente forma de conhecimento, que vai além de seus três componentes (conteúdo, pedagogia e tecnologia). Este conhecimento é diferente do conhecimento de um especialista na disciplina ou em tecnologia e também do conhecimento pedagógico compartilhado pelos professores por meio das disciplinas. O TPACK é a base do bom ensino com tecnologias e requer uma compreensão da representação de conceitos por meio das tecnologias; técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneiras construtivas para ensinar o conteúdo; conhecimento do que faz conceitos difíceis ou fáceis de aprender e

> como a tecnologia pode ajudar a corrigir alguns dos problemas que os alunos enfrentam; ciência acerca dos conhecimentos prévios dos alunos e teorias epistemológicas; e conhecimento de como tecnologias podem ser usadas para construir sobre o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1028-1029, tradução nossa)

Na visão dos autores, o TPACK permitiria intervir do ponto de vista que representa a falha de muitas propostas curriculares: a fragmentação em elementos isolados, via de regra divididos entre o conteúdo, as propostas pedagógicas e eventuais abordagens tecnológicas. De forma mais explícita, argumentam os autores:

> Nossa conceituação de conhecimento docente como uma complexa teia de relações entre conteúdo, pedagogia e tecnologia tem implicações significativas para a aprendizagem dos professores e seu desenvolvimento profissional. Nitidamente, a formação que se concentra em apenas um desses itens de cada vez seria relativamente ineficaz em apoiar o desenvolvimento dos professores acerca de uma compreensão de como estas bases de conhecimento se relacionam. Por exemplo, oficinas de tecnologia que se concentram no desenvolvimento de habilidades relativas ao software e ao hardware não ajudam os professores a compreender como as tecnologias interagem com determinadas pedagogias ou conteúdos específicos. Defendemos que o desenvolvimento do TPACK requer o *design* de um sistema curricular coerente (BROWN; CAMPIONE, 1996), e não uma coleção de módulos isolados que se concentram em apenas uma das três bases de conhecimento em um determinado momento. Desenvolver o TPACK requer um sistema curricular que deveria honrar estas relações complexas e multidimensionais por meio do tratamento integrado dos três componentes, em termos epistemológicos e conceituais. (...) A aprendizagem relativa às tecnologias por meio desta abordagem de *design* tem caráter construtivista e enxerga o conhecimento como situado na ação e codeterminado por interações entre as pessoas e o ambiente (MISHRA; KOEHLER, 2005, p.134, tradução nossa).

Assim, o *framework* poderia promover uma forma mais integrada e coerente de *design* curricular, a partir da criação de ambientes educacionais mais consistentes. Deste ponto de vista, então, prover um *design* desta natureza, contendo tecnologias digitais (e o *design* relativo à abordagem das próprias tecnologias) seria importante, pois "(...) as atividades baseadas no design fornecem um contexto rico para a aprendizagem e prestam-se à crítica e revisão", o que permite aventar que as mesmas, neste casos, estariam "bem adaptadas para ajudar os professores a desenvolver a compreensão profunda necessária para aplicar os conhecimentos nos domínios complexos da prática do mundo real" (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1034). Justamente, neste sentido, ao construir as atividades, seria necessário considerar que "todo o ato do *design* é um processo de entremear os componentes relativos à tecnologia, conteúdo específico e pedagogia" (MISHRA; KOEHLER, 2005, p. 135).

Do ponto de vista da pesquisa aqui apresentada, a questão do *design* integrado permeou a construção das sequências de atividades, considerando a aproximação entre os objetos matemáticos envolvidos e a importância dos mesmos na formação dos professores (conteúdo específico – neste caso, tópicos de geometria euclidiana plana e o teorema de Tales, em particular), os componentes tecnológicos (o uso de computadores com o *software* Geogebra, o desenvolvimento de fluência no uso da interface como elemento de consolidação de um coletivo constituído por pessoas-com-tecnologias-digitais) e as propostas didáticas pensadas pelos licenciandos em Matemática, sujeitos da pesquisa, a partir da experiência com os instrumentos e conteúdos trabalhados.

É neste sentido que se pode reafirmar, a partir do emprego do constructo teórico supramencionado, que as tecnologias por elas mesmas, não provocam transformações qualitativas no processo de ensino de Matemática. De outro modo, a forma como os professores empregam a tecnologia tem o potencial de mudar a educação. Esta forma, então, surge de um posicionamento, ao mesmo tempo crítico e consciente acerca do uso de tecnologias nos processos educativos, que não se pode deixar de considerar no âmbito desta investigação, e que se apresenta nas próximas páginas.

2.4 Uma visão sobre o uso de tecnologias nos processos de ensino de Matemática

Ainda que as tecnologias digitais não devam ser tomadas como panaceias para a resolução de quaisquer problemas cotidianos, sobretudo em termos educativos, não se pode negar que a manifestação de análogos recursos convergiu para ampliar algumas possibilidades, especialmente nas áreas correlatas a informação e comunicação.

> Estamos vivendo um novo momento tecnológico. A ampliação das possibilidades de comunicação e de informação, por meio de equipamentos como o telefone, a televisão e o computador, altera a nossa forma de viver e de aprender na atualidade. Na verdade, desde o início da civilização, o predomínio de um determinado tipo de tecnologia transforma o comportamento pessoal e social de todo o grupo. Não é por acaso que todas as eras foram, cada uma à sua maneira, "eras tecnológicas". Assim tivemos a Idade da Pedra, do Bronze....até chegarmos ao momento tecnológico atual, da Sociedade da Informação ou Sociedade Digital. (KENKSI, 2007, p. 2)

Ainda assim, o surgimento e progresso da informática não aniquilou as tecnologias anteriores, as quais, de todo modo, tiveram suas funções redefinidas e/ou passaram a operar em regime de convergência com as tecnologias emergentes. Desta forma, é praticamente impossível deixar de associar o uso de alguma tecnologia conectada aos processos de ensino ou de aprendizagem, o que permite dizer que a construção do conhecimento ocorre a partir do acesso a dispositivos mais ou menos materiais de caráter tecnológico (OLIVEIRA, 2013).

Em relação à Educação Matemática, discutem-se diversas possibilidade de emprego de interfaces digitais em processos de ensino e ou aprendizagem, de modo a explorar aspectos como visualização, experimentação e dinamismo, por exemplo. Aqui, Oliveira (2013) aponta que o dinamismo possível quando do uso de interfaces digitais pode servir de cenário para a ampliação de instâncias em relação a determinado problema em exame, por parte de alunos e professores, o que pode ocorrer a partir de ações relativamente simples, como a de arrastar um componente, trocar um parâmetro, variar medidas, etc. O autor indica que a reação da interface – referindo-se à interatividade reativa de Lévy (1993) – em grande parte dos casos, é praticamente instantânea, no momento em que se alteram configurações e/ou estruturas. Ainda assim, para o autor, as vantagens surgem de forma mais efetiva quando o professor

> [...] tem consciência do que pretende ensinar (planejamento da aula e conhecimento efetivo do que se pretende ensinar, do ponto de vista matemático e didático), possui uma estratégia didática coerente (em relação ao objeto matemático em foco), tem fluência em relação às tecnologias empregadas e emprega uma abordagem problematizadora (OLIVEIRA; GONÇALVES; MARQUETTI, 2015, p. 475).

Desta maneira, espera-se, por parte do professor, que o mesmo possa ter autonomia no sentido de elaborar e empregar estratégias didáticas mediadas por tecnologias digitais. Esta discussão permeia a proposta desta pesquisa, pois, para o ensino de matemática, mais especificamente para a proposta de trabalho com o teorema de Tales em um cenário de formação inicial de professores, pode-se utilizar as tecnologias digitais como potencializadoras do caráter experimental da resolução de problemas. A possibilidade considerada neste estudo envolve os chamados “softwares de geometria dinâmica”, que assim podem ser entendidos:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem

> correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 6).

O uso do Geogebra, por exemplo, software livre e gratuito que permite trabalhar com construções geométricas de forma dinâmica, abre perspectivas distintas dos meios tecnológicos vistos como tradicionais:

> A criação e a manipulação de figuras pelos computadores revela-se extremamente interessante para o estudo da geometria. O computador abre novas perspectivas, ampliando em muito o trabalho que se pode fazer com figuras construídas a giz no quadro de parede e com modelos de cartolina ou plásticos (PONTE; CANAVARRO, 1997, p. 161)

A expectativa é que a utilização dos softwares desta natureza no âmbito de uma estratégia didática apoie o processo de aprendizagem das construções geométricas, ao mesmo tempo que colabore para a formação dos licenciandos em relação ao uso de tecnologias em aulas de Matemática, visto que, em tese, um programa assim constituído

> [...] favorece claramente uma abordagem exploratória e investigativa da geometria, pois permite de uma maneira bastante simples a realização de experiências diversificadas, em que os alunos podem dar largas ao seu espírito criador e perseguir as suas hipóteses de trabalho, chegando eventualmente a conclusões inéditas (PONTE; CANAVARRO, 1997, p. 161).

Justamente, a possibilidade de constituir construções geométricas válidas e arrastá-las, mantendo suas propriedades, constituem recursos trazidos pelo dinamismo dessas aplicações. Assim, diante de problemas planejados de forma pertinente para promover o engajamento em trajetórias de investigação matemática, o aluno pode realizar verificação e validação das conjecturas que venha a formular (ZULATTO, 2002; RICHIT, 2005; OLIVEIRA, 2013).

Ligada ao dinamismo, a visualização é uma característica importante no que se refere ao uso de tecnologias digitais. De fato, a "visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático", já que "a compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles" (BORBA, 2011, p.3). Do mesmo modo:

> A visualização de construções geométricas e/ou gráficas e de suas propriedades específicas, a qual pode ser favorecida pelo uso de softwares de geometria dinâmica, serve para ilustrar o caráter mais complexo e elaborado deste tipo de

> construção e contribui para a formalização de conceitos, etapa esta de grande relevância no processo de construção do conhecimento matemático (RICHIT, 2005, p. 45).

Em relação às tecnologias digitais, do ponto de vista adotado nesta investigação, parece fundamental que os sujeitos desenvolvam um nível adequado de fluência, ou seja, que saibam usar com desenvoltura, de modo que esta fluência, de acordo com Oliveira (2013), possa apoiar e ocorrer conjuntamente com o desenvolvimento de outras fluências, justamente aquelas relativas ao conhecimento matemático e didático.

Isto porque tecnologias digitais compreendem distintas complexidades. Neste sentido, seria justo questionar quais seriam as capacidades a desenvolver por parte daqueles que almejam empregar tecnologias em seu trabalho docente.

Em resposta a este questionamento, Oliveira (2013) indica um elenco de itens a desenvolver por meio de uma progressão contínua, interativa e não linear, com a finalidade de subsidiar o usuário de modo que o mesmo domine interfaces tecnológicas. Argumenta o autor:

> Dominar ferramentas inerentes à interface é condição para usá-la com fluência, de modo que, a partir daí a tecnologia associada possa se transformar em extensão da memória, do pensamento, de procedimentos de construção e conjectura - ou seja, aprender a usar, de maneira fluente, o dispositivo, o software, o artefato. (Oliveira, 2013, p. 5)

Assim, a fluência, como reivindicada aqui, organiza-se em etapas, que poderiam ser vistas como correspondentes à *exploração dos elementos da interface* e à *apropriação da lógica da interface em uso* (Oliveira, 2013; Oliveira, Gonçalves e Marquetti, 2015; Oliveira, 2015). Por exploração, entende-se descobrir e apropriar-se da forma pela qual as ferramentas/dispositivos/funcionalidades podem ser operadas de modo a produzir os efeitos anunciados. Por exemplo, em relação ao Geogebra, medir um ângulo, construir uma reta ou um polígono, exibir os eixos cartesianos e as malhas quadriculadas, estabelecer a designação de pontos e segmentos, utilizar o campo de entrada para digitar uma equação de uma forma reconhecida pelo programa, entre outras ações, são intervenções que encaminham esta primeira etapa em direção da fluência em relação à interface. Aqui, a compreensão envolvida diz respeito, também, à localização da ferramenta apropriada e ao seu emprego de acordo com o efeito que se quer produzir. Para Oliveira (2015), estes atos envolvem habilidades mecânicas/motoras, no sentido de usar os dispositivos de *hardware*, como mouse e teclado, imprimindo aos movimentos que geram os elementos gráficos na tela, por exemplo, a distância adequada, a conexão imprescindível para a consolidação de um objeto, etc.

A apropriação da lógica da interface, segunda etapa relativa ao encaminhamento da fluência, depende do conhecimento típico envolvido na intervenção do usuário no ambiente informatizado. Assim, para o usuário do Geogebra, consiste em aliar o conhecimento acerca das propriedades e características do objeto matemático à mecânica de sua produção, de maneira que a construção apresente consistência em relação ao rigor e à formalidade exigidos. É o mesmo que dizer que a produção dos elementos que surgem na tela depende do conhecimento do conteúdo específico com o qual se trabalha, que implica, por consequência, em deter este conhecimento independentemente da interface e/ou de ter possibilidade de ampliá-lo a partir das intervenções em curso. Desta forma, no relato de Oliveira (2013), consiste em integrar o *como* usar certa ferramenta com o *porquê* fazê-lo exatamente naquela circunstância e seguindo aquela sequência de passos. Como se vê, as duas etapas não são lineares, mas se sobrepõem e se interpenetram de maneira indissociável justamente quando a intencionalidade relativa à produção de uma construção matematicamente válida orienta o processo. Aqui, é preciso saber, por exemplo, que a construção de um triângulo equilátero pode ser encaminhada a partir da projeção de um segmento de reta, cujos pontos constituintes representam o centro de circunferências que passam pelo outro ponto e cuja as intersecções representam, eventualmente, o terceiro ponto em relação ao qual, desde os pontos iniciais, se pode projetar dois outros segmentos de igual medida – e que, para isto, se deve mobilizar as ferramentas adequadas, com os procedimentos corretos, inclusive com relação a clicar nos locais adequados para que a construção possa, por exemplo, ser submetida ao “teste de arrastar” sem que suas propriedades se mostrem inconsistentes.

Além disso, Oliveira (2013) argumenta, como já foi indicado, que a construção do conhecimento matemático tem fortes vínculos com a tecnologia associada a este processo, seja de natureza mais “tradicional” (lápis, papel, régua, compasso) ou de caráter digital. Assim, para o professor em formação ou para o estudante, dificuldades no domínio da tecnologia empregada para apoiar argumentações, discursos e/ou produções podem concorrer para tornar árdua a trajetória de desenvolvimento de propostas que busquem soluções para problemas matemáticos. O autor indica que, quando o processo de fluência não se desenvolve, a tecnologia em questão pode ser, inclusive, um elemento de dificuldades adicionais e de dispersão do interesse. Obviamente, isto não significa que são as tecnologias as responsáveis diretas pela produção do conhecimento, mesmo porque o autor reconhece, como apontam Borba e Villarreal (2005), que a produção do conhecimento matemático neste contexto se dá a partir de um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias, e não por um ou outro isoladamente. Para Oliveira (2013, p.6), "facilitar a construção de conhecimento é muito mais uma questão do percurso intelectual do sujeito e da estratégia didática" e que "a fluência tecnológica (por si só) não garante o aprendizado". Assim mesmo, dificuldades na aprendizagem podem estar ligadas com a falta de fluência. É, de outra maneira, o corolário do TPACK, advogado por Mishra e Koehler (2006) e explorado na seção anterior deste texto.

Do ponto de vista desta pesquisa, o quadro teórico que até aqui se apresentou parece fundamental para a proposta de alguns direcionamentos em relação à questão direcionadora deste estudo. De fato, nas atividades analisadas mais adiante, o recurso aos constructos aqui explicitados ocorre no sentido de prover uma compreensão sobre as propostas, conjecturas, acertos e erros dos sujeitos quando se propõe problemas a serem resolvidos em um contexto de integração entre os conhecimentos específico do conteúdo (tópicos de geometria euclidiana plana – e o teorema de Tales, em particular), o foco na abordagem didática e a necessidade de compreensão de um uso adequado de tecnologias digitais em contextos nos quais as pessoas ensinam e/ou aprendem. Na seção relativa à metodologia desta pesquisa, são elencadas categorias de análise às quais as asserções aqui mencionadas se subordinam.

Desta forma definido o posicionamento nesta pesquisa, acerca das tecnologias e sua integração em relação aos conhecimentos ligados aos objetos matemáticos específicos e à didática relativa ao processo de ensino dos mesmos, entende-se, também, que é relevante prosseguir indicando algumas observações acerca de pesquisas correlatas.

2.5 Algumas pesquisas que tratam do objeto matemático em foco

A pequena revisão aqui apresentada parece importante no contexto desta dissertação, pois apresenta diferentes perspectivas de abordagem do conteúdo, tanto com alunos do ensino básico quanto com professores de Matemática.

O primeiro trabalho deste rol é o de Silva (1997), que teve como interesse central o teorema de Tales. Em sua pesquisa, a autora começou por analisar os resultados do SAEB - Sistema

Nacional de Avaliação Básica de 1993, no qual foi constatado que os alunos obtiveram baixo rendimento nos testes de matemática. As asserções da autora convergiram para os trabalhos de Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) sobre a necessidade iminente de engendrar metodologias que visem o ensino e proporcionem a aprendizagem da geometria.

A autora comenta que o fato decisivo na escolha do teorema de Tales se deu ao perceber que o objeto matemático em questão proporciona muitas aplicabilidades. No entanto, mesmo apresentando um grande potencial quanto a mudança de quadros, segundo Silva (1997), a abordagem dessas potencialidades do referido teorema nos livros didáticos é praticamente inexistente, visto que a própria geometria não recebe tratamento adequado neles. Outra questão levantada é que os livros didáticos tendem a apresentar a geometria como um assunto separado dos outros campos da matemática, revelando um problema bastante conhecido, que é, justamente, a falta de diálogo entre os conteúdos matemáticos, criando a ideia de que, em geometria, não há conexões em relação às abordagens com algébrica e aritmética.

Deste modo, em termos de abordagem fenomenológica, Silva (1997) trabalhou com treze professores de matemática, empregando, para a recolha de dados, uma sequência didática cujos problemas, relativos ao teorema de Tales, tinham, como ideia, dar significado ao conteúdo em questão, bem como proporcionar discussões sobre as principais dificuldades encontradas pelos professores participantes entre seus alunos. Silva (1997) alega que o uso do software Cabri-Geometre foi um fator importante para a exploração da sequência didática trabalhada com os professores, pois o software possibilitou que os mesmos explorassem as construções geométricas, bem como pudessem constatar, em tempo hábil, a validação ou não de conjecturas. Tal fator foi relacionado pela autora com a característica dinâmica da interface.

Na dissertação de Haruna (2000), a motivação que a levou a trabalhar com o teorema de Tales foi o baixo rendimento em geometria dos alunos em exames como o SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), além de, de acordo com os levantamentos que efetuou, a falta de interesse dos professores do ensino básico em trabalhar com conteúdos relativos à geometria. Para a autora, o objeto em questão representa um importante foco para pesquisas na área, pois possui vasta aplicabilidade, perpassando boa parte do processo formal de ensino, do básico ao universitário. Um fator de acréscimo em relação ao interesse foi a possibilidade de emprego de uma ferramenta digital como o Cabri-Geometre, usada na investigação.

O objetivo do trabalho, como explicita Haruna (2000):

> [...] foi analisar como se processa a apreensão do conceito do teorema de Thales por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, levantar os obstáculos didáticos e epistemológicos, as variáveis de situação, observando os aspectos da percepção, das significações e do contexto, verificando até que ponto o uso do computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros.

Almejando esse objetivo, o referencial da pesquisa compreendeu a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e os Registros de Representação Semiótica. A autora aventou, como hipótese, que a proposta de situações problemas, tendo o software Cabri como ferramenta, evitaria a formação de imagens prototípicas, bem como fomentaria a capacidade de trabalho com as variabilidades perceptivas. Neste contexto, o trabalho, por intermédio de uma rede semântica, pôde emparelhar os três pontos de vista mencionados por Brousseau (1995), de modo a possibilitar a ressignificação do conteúdo por parte dos sujeitos, afim de criar um ambiente favorável para que os mesmos pudessem construir o saber em questão por meio de situações correlatas.

Haruna (2000) relata que, na resolução das atividades com o grupo de alunos, ocorreram demasiados erros na montagem das proporções, oriundos, segundo acredita, da tentativa dos sujeitos em usar a conservação da abscissa. Por conseguinte, diante deste fato, a autora conjecturou que o conhecimento relativo à conservação da abscissa tenha se tornado de certa forma um obstáculo quando se quer determinar a medida do segmento formado na paralela. De forma conclusiva, Haruna (2000) ressalta que a sequência didática explorada obteve saldo positivo, visto que os alunos não se prenderam a configurações prototípicas do teorema, utilizaram de modo aceitável os três pontos de vista sobre o conteúdo e, igualmente, em relação ao uso do software, o mesmo foi trabalhado de forma a evidenciar a exploração em termos matemáticos pelos alunos, assim fazendo com que pudessem elaborar hipóteses e, por meio da experimentação, validá-las ou não.

Santos (2012) também trabalhou com o teorema de Tales com suporte de recursos digitais; entretanto, o software escolhido foi o Geogebra. A autora traçou, como objetivo de pesquisa, verificar quais eram as dificuldades e possibilidades de professores de Matemática ao empregarem o software Geogebra em atividades que envolveram o teorema de Tales. Foi investigado, igualmente, qual seria o papel das tecnologias no eventual trabalho didático dos professores em relação ao teorema de Tales.

A motivação da pesquisa se deu mediante a análise do material da primeira série do ensino médio do programa de recuperação intensiva em Português e Matemática da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo em 2008. Este material tinha, no teorema de Tales, um dos conteúdos mais requisitados em várias atividades, como um dos passos resolutivos.

> Diante desta proposta, inicialmente se pensou no desafio de tornar o estudo do Teorema de Tales significativo, adotando uma estratégia pedagógica que considere o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs). Por isso, esse assunto, ou melhor, a conjunção dos assuntos que envolvem TICs, estratégias pedagógicas e o Teorema de Tales, foi tomada como o tema central da pesquisa aqui relatada, desenvolvida no âmbito de uma oficina didática para professores de matemática de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. A escolha pelos professores destas séries deve-se ao fato de que os primeiros contatos que o aluno tem com o Teorema de Tales são dados nesse momento de estudo. (SANTOS, 2012, p.18)

Segundo seu relato, Santos (2012) constituiu um cenário propicio para a argumentação dos professores em torno dos resultados obtidos em suas práticas didáticas mediante o uso das tecnologias, além do incentivo posto sobre o debate e a troca de conjecturas concernentes ao modo de organizar situações matemáticas, de forma a tratar as dificuldades apresentadas por alunos sobre o teorema de Tales.

Em relação aos procedimentos da pesquisa, a pesquisadora pensou em um momento de aproximação da interface do Geogebra (familiarização), o que foi feito por meio do estudo de um material que a mesma disponibilizou para os participantes (quatro professores da rede pública de ensino do estado de São Paulo). Também foram divulgados entre os sujeitos os conteúdos concernentes ao teorema de Tales abordados no Caderno do Professor da sétima série (8º ano) e oitava série (9º ano).

A metodologia de coleta de dados de Santos (2012) foi pensada de forma a se observar a utilização dos níveis de apreensão proposto por Duval (1995), o domínio de validade epistemológica inserida na ideia de transposição informática abordada por Balacheff (1994), as ideias de níveis para o uso de tecnologias digitais apresentadas por Frota e Borges (2004) e as ideias de Chevallard (1991) sobre a capacidade se usar o saber de referência (saber sábio), de forma que ele sirva para a composição de atividades por meio de transformações adaptativas, gerando elementos didáticos que se caracterizem como saber a ensinar.

Como resultados Santos (2012) esclarece que

> As participantes da pesquisa demonstraram, ao longo das atividades, distintos níveis de compreensão, tanto do que tange ao *software*, visto como interface mediadora, como no que diz respeito ao conteúdo matemático em si. O uso do Geogebra permitiu evidenciar algumas dificuldades, bem como possibilidades de planejamento e composição de estratégias pedagógicas por parte dos professores. (p.133)

Quanto as conclusões referentes ao teorema de Tales por meio do software, Santos (2012) esclarece que quanto maior o conhecimento matemático dos professores sobre o teorema de Tales, mais eles tendiam a explorar o software, o que permitiu à autora afirmar que as interações entre o conhecimento do conteúdo e das tecnologias digitais associadas permitia lançar mão de caraterísticas como dinamismo, experimentação e visualização; de outro modo, problemas atinentes aos conteúdos de referência tenderiam a fragilizar as estratégias de ensino, podendo transformá-las em apêndices de práticas tradicionais, as quais não proporcionam relações significativas com os saberes já constituídos pelos alunos.

Esta revisão permitiu, entre outros aspectos, criticar as atividades criadas para o trabalho dos sujeitos, bem como, inclusive, adaptar algo que já tenha sido feito e que se julgou adequado usar aqui, como é o caso da Atividade 6, descrita mais adiante, adaptada a partir do trabalho de Silva (1997). Outras questões importantes aparecem nas análises e nas considerações finais, como ocorre com as comparações feitas com os resultados obtidos por Santos (2012) e as observações de Haruna (2000).

3 – Aportes Metodológicos

Neste capítulo, apresenta-se a perspectiva metodológica adotada para esta investigação, bem como as referências que subsidiam as atividades propostas e os suportes que serviram para a criação das categorias de análise dos dados coletados. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, o que se justifica pela necessidade de proceder descrições relativas ao trabalho dos licenciandos em Matemática ao longo dos problemas arrolados nas atividades constantes do instrumento mais adiante explicitado. Serão, portanto, as propostas, conjecturas e demonstrações eventualmente produzidas ou esboçadas pelos sujeitos, bem como as interações identificadas no ambiente de pesquisa, os elementos que, mediante análise, permitirão encaminhar eventuais respostas para a questão norteadora desta pesquisa: **de que maneira podem ser evidenciados, de forma integrada, os conhecimentos tecnológico, específico e didático do conteúdo relativo a tópicos de geometria euclidiana plana – e do teorema de Tales, em particular – entre alunos de licenciatura a partir de uma abordagem envolvendo atividades com construções em um ambiente de tecnologias digitais?**

Em relação à pesquisa qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) indicam a relevância do pesquisador e do que chamam de “ambiente natural”, localidade na qual surgem os dados que deverão ser utilizados para subsidiar as reflexões e eventuais conclusões do investigador. O trabalho desta figura, mesmo no caso de coleta e registro de dados por áudio e vídeo, é extremamente relevante, pois lhe cabem os movimentos de revisão, análise e síntese. São igualmente importantes, a partir desta visão, as interações dos indivíduos com o contexto no qual se movimentam, nas mais diferentes perspectivas. Para os autores, ainda que palavras e imagens sejam as formas mais adequadas de prover as descrições necessárias, dados de outra natureza – numéricos, por exemplo – podem ser empregados para embasar de forma mais completa a apresentação necessária.

Assim, por estas características, a pesquisa qualitativa tem caráter processual, sendo focada mais nas interações que se vão produzindo desta forma do que em produtos ou resultados, por exemplo. No caso desta pesquisa, esta característica processual se revelou desde cedo, uma vez que o próprio processo de eleição da questão, dos subsídios teóricos e dos procedimentos obedeceu a uma construção gradual e integrada, o que não permitiu alinhar hipóteses de forma apriorística.

Justamente, neste sentido, indicam os autores que “não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão”, e sim de “construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes” (BOGDAN; BIKLEN,1994, p. 50).

No que tange à investigação aqui relatada, a modalidade qualitativa justifica-se pelo modo como foi construída a problematização, que culminou na questão supramencionada, ou seja, em caráter processual. De fato, a questão surgiu inicialmente, mas foi refinada no contato com os sujeitos e à medida que a teoria permitia compreender o que emergia a partir dos dados. Por isso, foi importante compreender de maneira bastante ampla o perfil dos sujeitos, suas motivações, saberes, dificuldades, atuações docentes, enfim, tudo quanto pudesse servir à compreensão das pessoas envolvidas e suas motivações.

3.1 - Descrição dos sujeitos, do ambiente e das atividades propostas na pesquisa

A sequência de atividades por meio das quais se pretendeu oportunizar as conjecturas e interações analisadas foi respondida por um grupo de professores em formação inicial e que frequentavam o campus Igarapé-Açu da Universidade do Estado do Pará, nos laboratórios da própria universidade e de uma escola pública das imediações. Todos os sujeitos envolvidos cursavam, no momento da participação nesta pesquisa, o último semestre da licenciatura em Matemática da referida instituição.

Em relação às atividades, as mesmas foram aplicadas em cinco sessões, sendo que a primeira delas foi empregada para um trabalho mais relacionado à aproximação dos usuários em relação à interface do Geogebra, uma vez que se desconhecia qual o nível de fluência dos mesmos em relação ao programa computacional. Assim, tais atividades, que podem ser vistas no Apêndice I, relacionavam-se à exploração de algumas ferramentas que seriam importantes nas atividades seguintes, com base em construções simples, mas sobre as quais o conhecimento matemático subjacente era requisitado.

As atividades das quatro sessões seguintes diziam respeito à pesquisa propriamente dita, no sentido de servirem, posteriormente, à análise que buscou alinhar respostas para a questão que norteia esta investigação, de acordo com as seguintes categorias:

- A integração do conhecimento do conteúdo, didático do conteúdo e tecnológico acerca do conteúdo no processo de construção de conjecturas e de respostas para as atividades;

- A relação entre o uso de tecnologias no processo de criação das propostas de solução das atividades e o conhecimento matemático, no sentido de perceber como um influencia o outro;
- A forma pela qual, ao longo do processo, os licenciandos compreendem e utilizam provas e demonstrações como maneira de assegurar a consistência acerca do conhecimento do conteúdo;

3.2 - Sequência didática – Primeira sessão

As atividades aqui descritas compõem uma sequência didática que foi elaborada a partir de problemas cuja resolução considerava o uso do software Geogebra, de forma a levantar as concepções dos sujeitos sobre o ensino do teorema de Tales e de temas correlatos com a utilização de tecnologias digitais. Isto é, as articulações relativas ao conhecimento matemático previam, além da mobilização do conhecimento relativo ao teorema de Tales, um movimento semelhante relacionado à semelhança de triângulos, homotetia, razão e proporção, entre outros. Finalmente, a proposta também teve por objetivo identificar os níveis de fluência e de incorporação tecnológica dos sujeitos, na concepção teórica de Oliveira (2013), para o trabalho didático com os objetos mencionados.

Assim, em relação à sequência proposta, são apresentadas, a seguir, as atividades específicas, os objetivos de cada construção e as respectivas indagações que as acompanham, de forma a serem comparadas posteriormente com os constructos geométricos e as respostas dos sujeitos. Para isso, em termos metodológicos, adotou-se como instrumentos de coleta gravações de áudio, vídeo, os arquivos salvos por meio do software e o registro manual dos participantes.

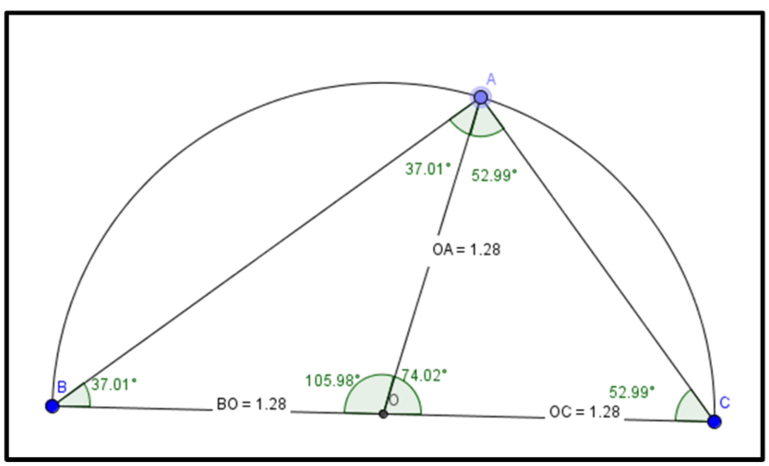
3.2.1 - Primeira atividade proposta

A primeira atividade incide sobre os saberes de ampliação e redução de figuras planas, especificamente em relação a triângulos, relações entre ângulos internos de triângulos e semicírculo. Esta atividade inclui o enfoque relacionado à fluência na visão de Oliveira (2013) e que prevê, em movimento conjunto, a apropriação, por parte dos sujeitos, das lógicas instrumental e funcional da interface, o que equivale a saber usar os instrumentos (para que servem no âmbito das funções do programa computacional) e de que forma os mesmos se relacionam com o conhecimento matemático necessário à resolução do problema específico.

A interface do Geogebra não foi apresentada aos licenciandos como um elemento à parte, mas como elemento do contexto no qual se movimentam para o trabalho com suas conjecturas e propostas de resolução, entendendo esta possibilidade inscrita no constructo seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), ou seja, a partir de uma concepção teórica que aceita as tecnologias como reorganizadoras do pensamento e que não as concebe como elementos substitutos ou suplementares, mas como componentes de um coletivo que inclui recursos digitais e pessoas (TIKHOMIROV, 1981).

Especificamente, a primeira atividade envolve os conhecimentos geométricos necessários à compreensão das propriedades de um triângulo inscrito em um semicírculo. No caso, disponibilizou-se aos acadêmicos um arquivo que continha a construção de um triângulo inscrito em um semicírculo, solicitando-se, em seguida, que os mesmos a manipulassem e escrevessem as conjecturas que viessem a elaborar acerca do que observavam. Aqui, esperava-se, inicialmente, que os sujeitos indicassem que o ponto A não se locomoveria fora do perímetro do semicírculo, que a construção poderia ser ampliada ou reduzida ao se mover os pontos B e C e que o ponto O é o ponto médio do segmento BC (figura 24).

Figura 24 - Triângulo inscrito em um semicírculo



Fonte: resultado de pesquisa

Em seguida, pediu-se aos sujeitos que determinassem as medidas dos segmentos AO, BO, CO e as medidas dos ângulos $A\hat{B}C, A\hat{C}B$, $B\hat{A}O$ e $O\hat{A}C$. Além disso, perguntou-se novamente sobre o que observavam ao movimentar os pontos livres e se queriam acrescentar algo às conjecturas anteriores. Assim, esperava-se que os acadêmicos observassem que a medida do ângulo $B\hat{A}C$

representa a soma das medidas dos ângulos $B\hat{A}O$ e $O\hat{A}C$, e que essa soma sempre terá como resultado 90º.

Uma vez que se verificasse que o ângulo $B\hat{A}C$ é reto, solicitava-se que os sujeitos expusessem alguma comprovação matemática que se adequasse ao caso. Nesse sentido, considerando BC como o diâmetro do semicírculo, tendo O como ponto médio de BC e OA como um segmento traçado entre o referido ponto médio e um ponto A qualquer sobre o semicírculo, deve-se considerar que $OA \equiv OC \equiv OB$, todos representando o raio do semicírculo. Desse modo, os ΔABO e ΔAOC são isósceles; logo medida $A\hat{B}O =$ medida do $B\hat{A}O = \alpha$ e medida de $O\hat{C}A =$ medida de $O\hat{A}C = \beta$. No triângulo ABC, então, tem-se que: medida do $B\hat{A}C =$ medida do $B\hat{A}O +$ medida do $O\hat{A}C = \alpha + \beta$; medida do $C\hat{B}A = \alpha$; medida do $A\hat{C}B = \beta$. Como medida do $B\hat{A}C +$ medida do $C\hat{B}A +$ medida do $A\hat{C}B =$ 180º, então $(\alpha + \beta) + \alpha + \beta =$ 180º ; $2.(\alpha + \beta) =$ 180º; $\alpha + \beta =$ 90º. Como $\alpha + \beta =$ medida do $B\hat{A}C$, logo medida do $B\hat{A}C =$ 90º. A atividade tinha seu enunciado elaborado da seguinte maneira:

Atividade 1

As instruções a seguir compõem os passos para a construção contida no arquivo referente à atividade 1.

- *Construa um segmento BC;*
- *Utilizando a ferramenta Semicírculo definido por dois pontos, crie o semicírculo de diâmetro BC;*
- *Utilizando a ferramenta **Ponto**, crie, no semicírculo, o ponto A;*
- *Com a ferramenta **Ponto médio ou centro**, crie o ponto médio O do segmento BC;;*
- *Trace o segmento AO.*

a) Movimente o ponto A e enuncie uma conjectura com base no que você visualizou;

b) Movimente o ponto A após determinar, com uso do Geogebra, as medidas dos ângulos $B\hat{A}O, A\hat{O}B, O\hat{B}A, O\hat{A}C, A\hat{C}O, C\hat{O}A$ e dos segmentos BO, OC, BC e AO. Você deseja adicionar alguma observação à sua resposta anterior, com base em suas novas observações?

c) Procure escrever uma sustentação matematicamente válida envolvendo sua descoberta (explicação)[1].

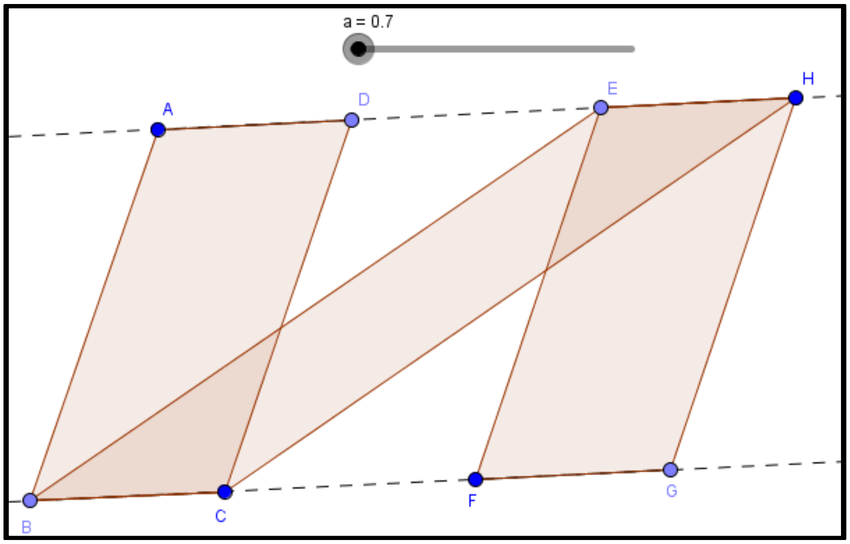
[1] A demanda por algum tipo de justificativa matemática pretendeu aparecer nesta pesquisa de forma gradual, a medida que as atividades eram trabalhadas pelos sujeitos. Assim, o termo *explicação* aqui pode surgir tanto no sentido comum como naquele empregado por Balacheff (1987) e abordado na seção 2.3 deste trabalho.

3.2.2 - Segunda atividade proposta

A segunda atividade proposta aborda conhecimentos acerca das Proposições 36 e 37 do livro I de Euclides. No caso, os conhecimentos mencionados indicam que paralelogramos ou triângulos postos sobre o mesmo segmento de base e entre as mesmas paralelas possuem áreas congruentes. Esta atividade, assim como a anterior, da mesma forma que explora o conhecimento acerca do conteúdo matemático envolvido, promove um processo a partir do qual, segundo Oliveira (2013), pode encaminhar a obtenção de algum nível de fluência em relação à interface proposta. Cabe a ressalva de que essas atividades possuem roteiros disponíveis, os quais indicam quais ferramentas do software seriam necessárias para a construção, de modo que os participantes possam explorar de maneira mais direta e operacional os elementos da interface. Ainda segundo Oliveira (2013), esta seria uma etapa inicial do desenvolvimento da fluência sobre o software empregado e que permite encaminhar a apropriação da lógica da interface. Do ponto de vista indicado por Mirsha e Koehler (2006), procura-se favorecer a integração dos conteúdos específicos com um uso coerente da tecnologia envolvida, na interseção chamada pelos autores de *TCK*.

Para essa atividade, foi solicitado que os participantes abrissem, em seus computadores, o arquivo nomeado *"Atividade 2"* que é uma representação da construção relativa à proposição 36 do livro I de Euclides. Em seguida, foi solicitado que explorassem os pontos existentes na construção, bem como o ***controle deslizante "a"***. Aqui, também se pediu que os sujeitos elaborassem uma conjectura matemática ligada às observações feitas após a exploração do objeto. Esperava-se que percebessem que apenas os pontos A e D poderiam ser movimentados livremente, que o controle deslizante tinha a função de ampliar ou reduzir a construção e que as áreas dos paralelogramos eram congruentes (figura 25).

Figura 25 – Modelo digital relativo à proposição 36 do livro "Os Elementos"



Fonte: dados da pesquisa

Em seguida, foi pedido para que os participantes abrissem o arquivo "*Atividade 2 – 2*", disponível em seus computadores, cuja construção foi criada para explorar a Proposição 37 do Livro I de Euclides. Foi requerido que os acadêmicos explorassem os pontos e o controle deslizante como feito com o objeto anterior. Solicitou-se, em seguida, que os sujeitos escrevessem uma conjectura sobre o que observavam. Esperava-se que indicassem que apenas os pontos E e A poderiam ser movimentados livremente, que o controle deslizante tinha a função de ampliar ou reduzir a construção e que as áreas triângulos eram congruentes.

Depois, requereu-se que os alunos determinassem, usando o Geogebra, as áreas dos paralelogramos e dos triângulos e que movimentassem os pontos livres. Após estas operações, perguntou-se aos sujeitos se gostariam de acrescentar algo às conjecturas iniciais. Posteriormente, acerca de eventuais observações que fizessem sobre a congruência entre as áreas dos paralelogramos e dos triângulos, solicitou-se que expusessem alguma demonstração matemática que julgassem válida e que contemplasse o que observavam. As instruções específicas são as que seguem:

Atividade 2

As instruções a seguir compõem os passos para a construção contida no arquivo referente à atividade 2.

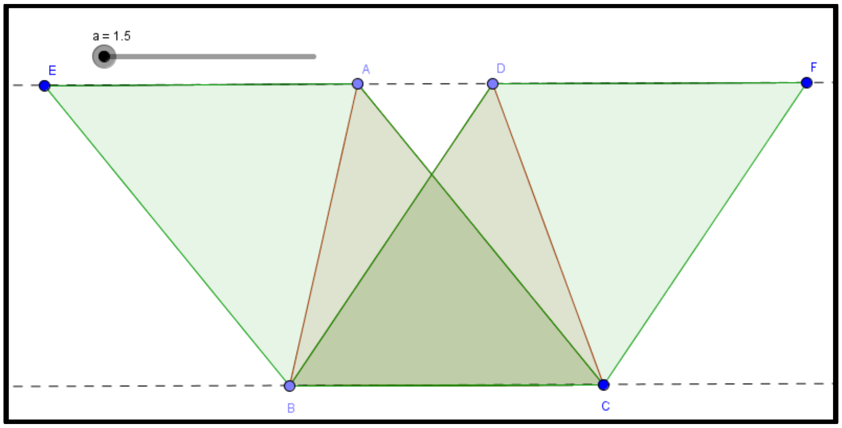
- *Crie um* ***controle deslizante*** *de nome "a", com intervalo de 0,5 a 10 e incremento 0,1;*
- *Crie o ponto A; em seguida, no campo de entrada, digite o comando* ***D = Ponto[Círculo[A, a]]****;*
- *Trace a reta r, definida pelos pontos A e D; crie um ponto* B_1*, de forma que o mesmo não pertença ao segmento AD;*
- *Com a ferramenta* ***Reflexão em relação a um ponto****, clique no Ponto D e, em seguida, no Ponto* B_1*, para criar o ponto E; em seguida, faça o mesmo com o Ponto A para criar o Ponto H;*
- *Crie o ponto* C_1*, não pertencente a reta r;*
- *Trace uma reta h, paralela à r e passando pelo ponto* C_1*; em seguida, na reta h, crie o ponto* F_1*;*
- *Crie o ponto B como* ***reflexão do ponto D em relação a*** C_1 *e o ponto C como* ***reflexão do ponto A em relação a*** C_1*;*
- *Crie o ponto F como* ***reflexão do ponto H em relação a*** F_1 *e o ponto G como* ***reflexão do ponto E em relação a*** F_1*;*
- *Trace a reta s definida pelos pontos B e C;*
- *Com a ferramenta* ***Polígono****, trace os paralelogramos ABCD, EFGH e BCEH;*
- *Para melhorar a visualização, você pode esconder os pontos B1, C1 e F1 e a reta h.*

Atividade 2 – 2

As instruções a seguir compõem os passos para a construção contida no arquivo referente à atividade 2 - 2.

- *Crie um controle deslizante de nome "a", com intervalo de 0,5 a 10 e incremento 0,1;*
- *Crie o Ponto E; em seguida, no campo de entrada, digite o comando* ***A = Ponto[Círculo[E, a]]****;*
- *Trace a reta r, definida pelos pontos E e A;*
- *Crie o ponto* C_1*, de forma que o mesmo não pertença ao segmento EA;*
- *Com a ferramenta* ***Reflexão em relação a um ponto****, clique no Ponto A e, em seguida, no Ponto* C_1*, para criar o ponto D; em seguida, faça o mesmo com o ponto E para criar o ponto F;*
- *Crie o Ponto G, não pertencente a reta r;*
- *Crie o ponto B como* ***reflexão do ponto A em relação a D*** *e o ponto C como* ***reflexão do ponto E em relação a D****;*
- *Trace a reta g, paralela à reta r e passando pelo ponto B;*
- *Com a ferramenta* ***Polígono****, trace os triângulos ABE, ABC, DBC e DCF;*
- *Para melhorar a visualização, você pode esconder os pontos G e* C_1*.*

Figura 26 - Proposição 37 do livro "Os Elementos"



Fonte: dados da pesquisa

a) *Abra o arquivo "Atividade 2", no local indicado pelo pesquisador em seu computador. Em seguida, movimente e explore a construção, usando, para isto, o controle deslizante **a** e/ou os pontos **A** e **D**. Elabore, por escrito, uma conjectura que poderia ser sustentada matematicamente a partir do que você visualizou;*

b) *Abra o arquivo "Atividade 2-2", no local indicado pelo pesquisador em seu computador. Em seguida, movimente e explore a construção, usando, para isto, o controle deslizante **a** e/ou os pontos **A** e **E**. Elabore, por escrito, uma conjectura que poderia ser sustentada matematicamente a partir do que você visualizou;*

c) *Observando as duas construções, determine as áreas dos polígonos da "Atividade 2" e da "Atividade 2-2". Feito isso, movimente os pontos novamente. Após determinar as áreas, há algo que você queira acrescentar em suas conjecturas iniciais?*

d) *Apresente, por escrito, uma sustentação matematicamente válida para o que você observa (explicação).*

3.2.3 - Terceira atividade proposta

A terceira atividade pretendia explorar as possibilidades abertas pelo uso de tecnologias a partir de um processo de aquisição de fluência nas interfaces, como exposto por Oliveira (2013), bem como verificar, por meio do processo de análise qualitativa adotado neste estudo, se existiriam indícios de que os licenciandos estariam empregando o software Geogebra como um elemento que permitiria "pensar-com-softwares", como advoga o mesmo autor. Neste sentido, solicitou-se que os participantes abrissem um novo arquivo do Geogebra e que construíssem um triângulo isósceles, o qual, independentemente da movimentação de um de seus pontos, mantivesse as características originais – ou seja, manter-se-ia isósceles. Assim, esperava-se que os sujeitos construíssem um segmento *AB* qualquer e obtivessem o ponto médio *M* do mesmo, a partir do qual traçariam uma reta perpendicular g ao segmento *AB*; em seguida, na reta g, criariam o ponto C e, por fim, determinariam os segmentos AC e BC. Esta sequência garantiria a obtenção de um triângulo isósceles, com exceção, que se esperava prevista e/ou percebida pelos sujeitos, quando todos os segmentos possuíssem a mesma medida.

Feito isso, solicitou-se que os licenciandos expressassem uma forma de comprovar matematicamente que os triângulos isósceles possuem dois ângulos internos de medidas iguais. aqui, esperava-se que os participantes expressassem, por exemplo, que sobre AB, lado de medida distinta em relação a AC e BC, congruentes, incidisse a mediatriz g, uma das alturas do triângulo *ABC*, que passaria pelo ponto médio M de AB; ora, dada a perpendicularidade de g em relação ao segmento mencionado, ficariam determinados dois triângulos, *ACM* e *BCM*. Uma vez que $AC \equiv BC$, tem-se que $A\hat{C}M \equiv M\hat{C}B$, $C\widehat{M}A \equiv B\widehat{M}C$, medida de $M\hat{A}C +$ medida de $A\hat{C}M +$ medida de $C\widehat{M}A = 180º$ e medida de $C\hat{B}M +$ medida de $B\widehat{M}C +$ medida de $M\hat{C}B = 180º$. Desse modo, considerando que as somas mencionados possuem resultados iguais, e como $A\hat{C}M \equiv M\hat{C}B$ e $C\widehat{M}A \equiv B\widehat{M}C$, ao substituir-se, obtém-se que a medida do $M\hat{A}C +$ medida do $A\hat{C}M +$ medida do $C\widehat{M}A =$ medida do $C\hat{B}M +$ medida do $C\widehat{M}A +$ medida do $A\hat{C}M$. Subtraindo medida do $A\hat{C}M$ e medida $C\widehat{M}A$ dos dois lados da igualdade resulta que medida do $M\hat{A}C =$ medida do $C\hat{B}M$; logo, $C\hat{B}A \equiv B\hat{A}C$.

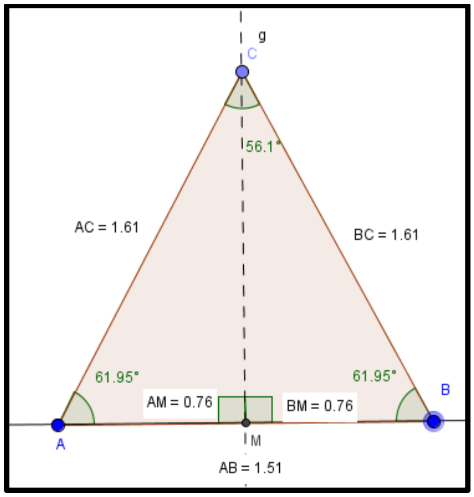
Outra possibilidade seria a de que os sujeitos indicassem que, sobre AB, lado de medida distinta dos lados congruentes AC e BC, incidisse a mediatriz g, uma das alturas de *ABC*, que passaria pelo ponto médio M de AB, perpendicular a esse segmento, determinando, portanto, dois triângulos, *ACM* e *BCM*. Uma vez que que $AC \equiv BC$ e que a mediatriz de um segmento é, por definição, uma reta que representa o lugar geométrico dos pontos equidistantes de seus pontos adjacentes, tem-se que $AM \equiv BM$, o que resulta em $\Delta ACM \equiv \Delta BCM$ pelo caso LLL de triângulos semelhantes. Logo, $B\hat{A}C \equiv C\hat{B}A$. As instruções, não disponíveis para os estudantes, que permitiriam efetivar a construção mencionada, poderiam ser as que seguem:

Atividade 3

As instruções abaixo são os passos para a construção do triângulo isósceles.

- *Crie um segmento AB qualquer. Em AB, determine o ponto médio M e sobre ele trace uma reta g, perpendicular a AB; Sobre a reta g, crie o ponto C e determine os segmentos AC e BC.*
- *Determine as medidas dos ângulos internos e as medidas dos segmentos do triângulo ABC.*

Figura 27 - Triângulo isósceles



Fonte: dados da pesquisa

Para a realização da terceira atividade da sequência, estavam disponíveis para os sujeitos as seguintes instruções:

> a) *Em um arquivo novo do Geogebra, construa um triângulo isósceles, cujas medidas dos segmentos AC e BC sejam iguais, para qualquer ponto movimentado. Considerando apenas sua construção, e manipulando a mesma à vontade, o que pode garantir que o polígono construído representa sempre um triângulo isósceles?*
>
> b) *Prove matematicamente (demonstre) que dois ângulos internos dos triângulos isósceles são congruentes.*

3.2.4 - Quarta atividade proposta

A quarta atividade trazia questões relacionadas às proporções existentes em um triângulo ABC, considerando um segmento DE, paralelo a BC, como exposto nas figuras 28 e 29. De alguma maneira, esperava-se que os alunos determinassem algumas das seguintes proporções ou suas variantes:

I - $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$;

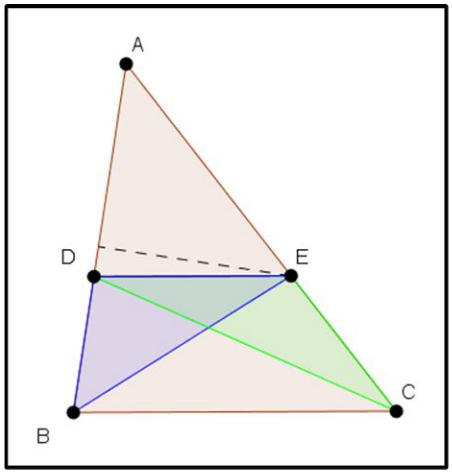
II - $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}$;

III - $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$;

IV - $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$;

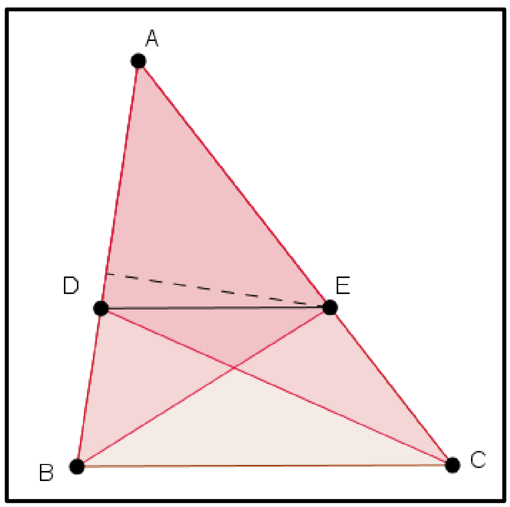
V - $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$

Figura 28 – Exemplo de construção do triângulo da atividade 3 para proporção I



Fonte: dados da pesquisa

Figura 29 - Exemplo de construção do triângulo da atividade 3 para proporção II e III



Fonte: dados da pesquisa

Em seguida foi proposta uma situação em que os alunos foram instigados a demonstrar que as razões por eles indicadas são proporções validas. Vale indicar, também, que a ideia de demonstração é abordada por De Villiers (2002) como um processo inerente ao saber matemático e linguístico do professor; desta forma, considera-se que semelhante proposição pode ser relacionada com os pressupostos de Shulman (1986), quando este autor indica a importância do saber acerca do conteúdo manifestado pelo professor, o que permitiria, então, esperar que o docente saiba utilizar seu arcabouço matemático para validar determinada lógica utilizada. Neste sentido, era de se esperar algo em torno do que segue:

a) Para a proporção I - $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$:

- Seja $DE//BC$;
- Os triângulos ADE e DEB possuem suas bases sobre o segmento AB e compartilham da mesma altura, que é a distância do ponto E até o segmento AB; Assim: $\frac{Área\ ADE}{Área\ DEB}$ = $\frac{\frac{AD\ .h}{2}}{\frac{DB\ .h}{2}} = \frac{AD\ .h}{2} \cdot \frac{2}{DB.h} = \frac{AD}{DB}$, onde altura = d (E, AB). De forma análoga, pode-se estabelecer a razão entre $\frac{Área\ ADE}{Área\ DEC}$ para obter-se $\frac{AE}{EC}$.
- Pela proposição 37 do Livro I de Euclides, as medidas das áreas dos triângulos DEB e DEC são congruentes; logo, estabelece-se a proporção $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

b) Para a proporção II - $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}$:

- Seja $DE//BC$;
- Os triângulos, AEB e EBD possuem suas bases sobre o segmento AB e compartilham da mesma altura que é a distância do ponto E até o segmento AB; Assim: $\frac{Área\ AEB}{Área\ EBD}$ = $\frac{\frac{AB\ .h}{2}}{\frac{DB\ .h}{2}} = \frac{AB\ .h}{2} \cdot \frac{2}{DB.h} = \frac{AB}{DB}$, onde altura = d (E, AB). De forma análoga podemos estabelecer a razão entre, $\frac{Área\ ACD}{Área\ ECD}$, para obtermos, $\frac{AC}{EC}$.
- Pela proposição 37 do Livro I de Euclides, as medidas das áreas dos triângulos DEB e DEC são congruentes; logo, os triângulos AEB e ACD também possuem medidas de área congruentes, uma vez que suas medidas são estabelecidas pelos triângulos DEB ou DEC, acrescidas da medida de área do triângulo ADE, o que estabelece a proporção $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}$.

c) Para a proporção III - $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$:

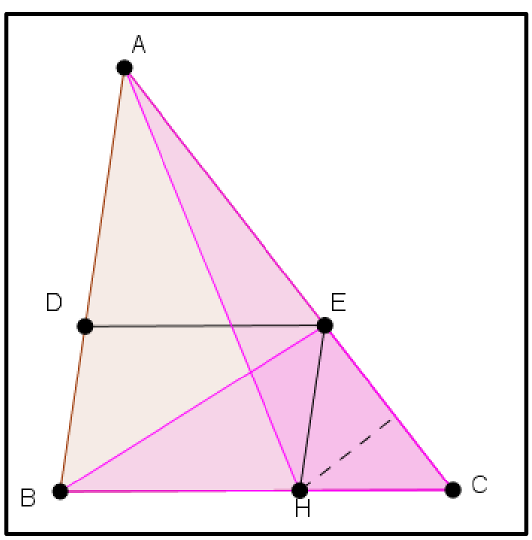
- Seja $DE//BC$;

- Os triângulos AEB e AED possuem suas bases sobre o segmento AB e compartilham da mesma altura, que é a distância do ponto E até o segmento AB; assim: $\frac{Área\ AEB}{Área\ AED} = \frac{\frac{AB\ .h}{2}}{\frac{AD\ .h}{2}} = \frac{AB\ .h}{2} \cdot \frac{2}{AD.h} = \frac{AB}{AD}$, onde altura = d (E, AB). De forma análoga, pode-se estabelecer a razão entre $\frac{Área\ ACD}{Área\ AED}$ para obter-se $\frac{AC}{AE}$.
- Como AEB e ACD possuem medidas de áreas congruentes, é possível estabelecer a proposição $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$.

d) Para proporção IV - $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ e V - $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$

- Seja $DE//BC$;
- Traçando $EH \parallel AB$, obtém-se ECH e DEHB, com $BH \equiv$ DE e $DB \equiv$ EH;
- Usando os mesmos passos usados para a proporção II, agora em $EH \parallel AB$, obtém-se $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BH}$; como $BH \equiv DE$, logo $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$;
- De modo análogo, se traçado $DG \parallel AC$, tem-se $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$, como pode ser visto na figura 30.

Figura 30 - Exemplo de construção do triângulo da atividade 3 para proporção II e III



Fonte: dados da pesquisa

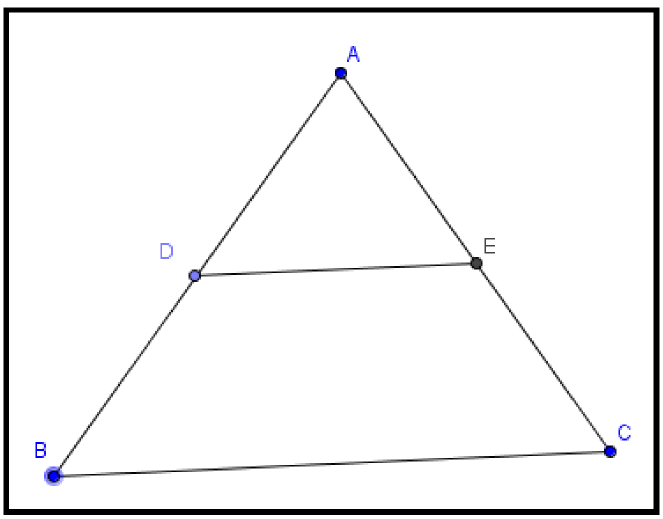
Estabelecendo então que as proporções apresentadas são válidas, em seguida solicita-se que os sujeitos testem suas demonstrações para verificar se também são válidas para quando se estabelece, entre DB e EC, um segmento FG que seja paralelo à BC – o que, aliás, é valido, seguindo as ideias das proporções acima mencionadas (figura 31).

Atividade 4

Siga as instruções abaixo para dar início a atividade.

- *Construa um triângulo ABC*
- *No segmento AB, crie um ponto D;*
- *Trace uma reta paralela ao segmento BC, de forma que a reta passe por D;*
- *Na intersecção da reta com o segmento AC, crie o ponto E;*
- *Trace o segmento DE;*
- *Esconda a reta "d"*

Figura 31 – Exemplo de triângulo para a atividade 4



Fonte - o autor

a. *Através da construção, identifique e discorra sobre as proporções existentes envolvendo os segmentos identificáveis no triângulo;*
b. *Explicite um meio de comprovar que as proporções citadas são válidas;*
c. *Se entre os segmentos DB e EC for criado um segmento FG, paralelo à BC, sua demonstração será válida para as razões DF e FB?*

3.3 - Sequência didática – Segunda sessão

Esta sessão visou aprofundar a identificação de elementos referentes aos conhecimentos específicos do conteúdo possuídos pelo professor, como relatado por Shulman (1986). Dessa forma, as atividades seguintes foram elaboradas pensando na possibilidade dos licenciandos em matemática mobilizarem os conhecimentos utilizados na sessão anterior em conjunto com outros saberes, como divisão de segmentos em partes congruentes e a proporcionalidade existente ao se dividir qualquer lado de um triângulo a partir de uma reta formada pela bissetriz de um ângulo, como se mostra na figura 32.

De outro ponto de vista, e assim como na sessão anterior, outro aspecto em jogo é o uso das tecnologias digitais, e do Geogebra em particular, e a consequente análise dos aspectos envolvidos na integração deste uso em um ambiente de formação de professores, de acordo com os pressupostos de Borba e Villarreal (2005), Lévy (1993) e Oliveira (2013).

3.3.1 - Quinta atividade proposta

Essa atividade foi constituída tendo com a perspectiva de que os acadêmicos pudessem usar conhecimentos das experiências anteriores (neste estudo). Aqui, o que se propõe é a construção de um triângulo ABC e, em seguida, traçar uma bissetriz em algum de seus ângulos internos. Desta forma, tem-se que a reta bissetriz seccionará o segmento oposto ao ângulo em duas partes proporcionais. Nesse sentido, por meio do uso de conhecimentos acerca do teorema de Tales, propôs-se que os sujeitos determinassem a medida do segmento solicitado e apresentassem uma forma de validar a resposta obtida empregando argumentos matematicamente válidos.

Subsidiariamente, a proposta previa observar a forma pela qual o Geogebra permitiria intervenções que, por sua vez, auxiliariam a consolidação e/ou ressignificação do conhecimento matemático em jogo.

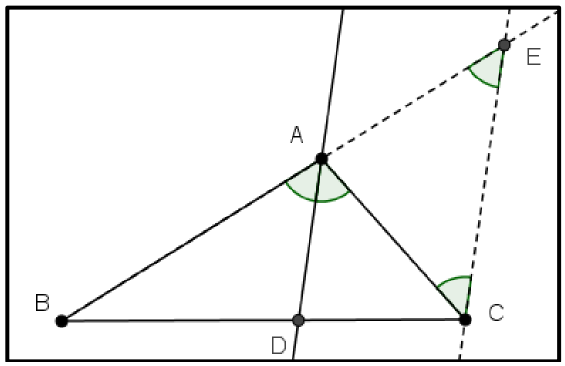
Assim, propôs-se aos alunos a seguinte atividade:

Atividade 5

Construa um triângulo ABC qualquer; em seguida, trace a bissetriz em BÂC, determinando, assim, o ponto D sobre o segmento BC. Utilize a ferramenta "distância" para identificar os comprimentos de AB, AC e CD.

a. *É possível determinar a medida de BD, tendo as medidas de AC e AB e usando o teorema de Tales?*
b. *Se a bissetriz fosse traçada nos outros ângulos internos, o teorema de Tales poderia ser usado para determinar um dos segmentos cuja medida não se conhece?*
c. *Apresente argumentos que possam validar matematicamente suas respostas.*

Figura 32 - Bissetriz do angulo BÂC



Fonte: o autor

Nessa atividade, esperava-se que os discentes pudessem identificar que, em qualquer triângulo que tenha determinada a bissetriz de um de seus ângulos, a mesma divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Desse modo, tem-se que a reta *AD* é a bissetriz do ∠BAC. Ao se traçar por C uma reta paralela à *AD* até interceptar a semirreta *BA* no ponto E, serão obtidos os triângulos semelhantes ABD e EBC, acarretando que $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$ (conservação da abscissa) ou $\frac{BD}{EA} = \frac{CE}{AE}$ (conservação da relação de projeção). Tem-se que os $B\hat{A}D \equiv D\hat{A}C$, por serem ângulos definidos pela bissetriz; $A\hat{E}C \equiv B\hat{A}D$, por serem ângulos correspondentes; $D\hat{A}C \equiv E\hat{C}A$, por serem ângulos alternos internos, e, por transitividade, $A\hat{E}C \equiv E\hat{C}A$. Como $A\hat{E}C\ e\ E\hat{C}A$ estão sobre o mesmo segmento, esses formam o triângulo isósceles ACE, cujo o lado AC ≡ AE. Desse modo, podemos substituir AE por AC nas proporções e assim obter $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ou $\frac{BD}{BA} = \frac{CE}{AC}$.

3.3.2 - Sexta atividade proposta

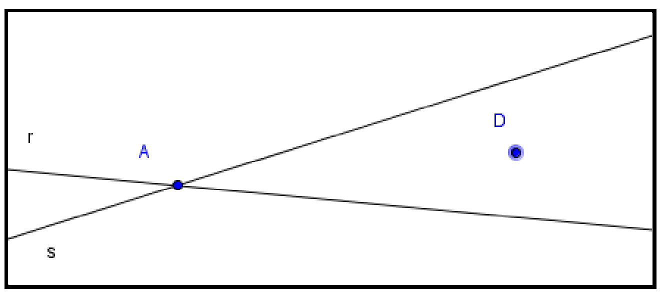
Assim como na atividade 5, essa atividade teve como objetivo trabalhar os conhecimentos específicos dos discentes e a fluência em relação ao software em um contexto de formação, de forma que o mesmo pudesse ser empregado de forma apropriada para obter a resposta da atividade que tratou de empregar o teorema de Tales no desenho geométrico. Essa atividade foi proposta por Silva (1997) e adaptada para se trabalhar com os professores em formação.

Atividade 6

Trace as retas r e s, sendo essas concorrentes no ponto A. Entre as retas, crie um ponto D. Determine um segmento da reta s ao ponto D e outro da reta r ao ponto D, de forma que esses dois segmentos tenham a mesma medida. Justifique sua resposta.

Para esta atividade, como se expõe na figura 33, os discentes foram instruídos a determinar os segmentos iguais, sem que lhes fosse solicitado usar o teorema de Tales; entretanto, este seria o recurso matemático mais adequado para a solução do problema. Aqui, seria factível pensar em conjecturas de custo operacional bastante alto por parte dos alunos, com base em tentativa-e-erro; neste caso, entretanto, os sujeitos careceriam de justificativa matemática que permitisse justificar a solução proposta.

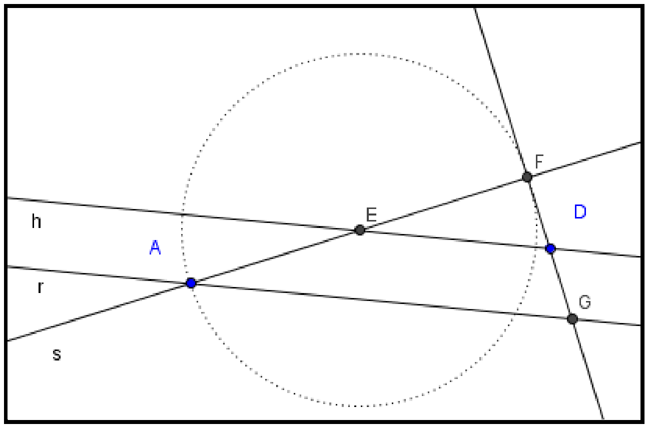
Figura 33 - Construção da Atividade 6



Fonte: o autor

A solução esperada para essa atividade, conforme se vê na figura 34, consiste primeiro em traçar uma reta *h*, paralela a *r* passando pelo ponto D e criando o ponto E na intersecção com a reta *s*; em seguida, constrói-se uma circunferência de centro E e raio EA; desse modo, a circunferência intercepta a reta *s* em outro ponto, chamado de F; traçando *i*, uma reta que passa F e D, será criado o ponto G na intersecção das retas *i* e *r;* por Tales, medida de $FD =$ medida deFG, pois $\frac{FE}{EA} = \frac{FD}{FG} = 1$.

Figura 34 - Solução da Atividade 6



Fonte: o autor

3.4 - Sequência didática – Terceira Sessão

A terceira sessão foi composta de questionamentos abertos aos acadêmicos, com a proposta de que os mesmos discorressem sobre a forma pela qual eventualmente trabalhariam com o teorema de Tales e com conceitos correlatos em situações de ensino. Esperava-se com os questionamentos aqui trazidos compreender de que forma aparecem, para os sujeitos, as relações entre os elementos do TPACK, quais sejam os componentes pedagógico (didático, na verdade), do conteúdo matemático e tecnológico, bem como as formas pelas quais a compreensão da integração destes elementos pode ter sido despertada em potenciais professores de matemática em um momento de formação inicial.

3.4.1 - Sétima Atividade proposta

a) *Considerando um cenário de sala de aula, elabore um problema que pode ser resolvido com o teorema de Tales;*
b) *Discorra sobre quais são os conhecimentos prévios envolvidos na solução do seu problema;*

A ideia específica desta questão envolve concepções relativas a um dos principais conteúdos matemáticos trabalhado ao longo das atividades anteriores e inclui uma antecipação acerca do potencial cenário profissional no qual o mesmo seria empregado, considerando se tratar de um tema curricular para a escola básica. Objetivamente, pretendeu-se adquirir elementos para uma análise acerca das concepções dos professores sobre a visão integrada do conteúdo e dos aspectos didáticos envolvidos, incluindo os conhecimentos considerados fundamentais que antecedem a construção relativa ao conhecimento específico sobre o teorema mencionado, incluídos em tópicos de geometria euclidiana plana, como pontos, retas, segmentos, razões, proporções, homotetia, e comensurabilidade de segmentos, entre outros.

c) A sua atividade é válida apenas para trabalho com a interfaces digitais, ou poderia ser implantada em um ambiente no qual prevaleçam tecnologias mais tradicionais, como régua, compasso, lápis e papel? Justifique sua resposta.

Essa proposta objetivou que os discentes refletissem se o dinamismo proporcionado pelo software Geogebra influenciaria ou seria preferível em relação a uma possível atividade sem essa potencialidade. De forma mais direta, pretendia-se que os licenciandos evidenciassem a forma pela qual as tecnologias digitais seriam preponderantes em eventuais atividades envolvendo os temas matemáticos em destaque neste trabalho e a compreensão que eventualmente evidenciariam acerca de um uso das interfaces digitais que concorresse para a elaboração de melhores abordagens de ensino.

d) Na sua visão, quais elementos seriam possíveis dificuldades para você como docente ao abordar o teorema de Tales? Sua resposta pode incluir elementos matemáticos ou relacionados ao suporte (tecnologias, por exemplo);

e) Quais conhecimentos novos você adquiriu durante o curso?

Aqui, esperava-se que os alunos indicassem suas dificuldades de caráter conceitual e/ou ligadas ao suporte tecnológico empregado, de forma que fosse possível compreender se os sujeitos reconheceriam os percalços que enfrentaram, eventualmente, ou se percebem obstáculos relacionados a algum dos componentes do TPACK. Além disso, esperava-se recolher subsídios para analisar se qualquer dos elementos trabalhados nas atividades representou um aporte cognitivo novo para os licenciandos.

f) Em que outros conhecimentos matemáticos da escola básica o teorema de Tales está inserido/ligado? Cite um exemplo de atividade em que o mesmo pode ser empregado.

Objetivou-se aqui averiguar até que ponto os acadêmicos seriam capazes de relacionar o teorema de Tales com outros conteúdos matemáticos ligados à geometria ou a elementos correlatos.

3.5 - Analise das resoluções dos alunos

As sessões foram realizadas de forma um tanto diversa daquela pensada no planejamento inicial, ou seja, foram estabelecidas, em um primeiro momento, três sessões, mas as intercorrências do processo, que serão explicadas ao longo desta análise, provocaram a necessidade de reconfigurações, no sentido de ampliar o número de encontros para cinco. Esta medida não desvirtua a proposta metodológica antes explicada, no sentido de que, em se tratando de pesquisa qualitativa, a organização, bem como a própria problemática, pode apresentar caráter provisório, e delinear-se de forma mais consistente e definitiva à medida que o estudo avança (Bogdan e Biklen, 1994).

3.5.1 - Análise da atividade 1

Em relação às atividades, a primeira delas foi respondida por dez participantes da pesquisa. Nos protocolos produzidos, ficaram evidenciados elementos que permitem, ao longo desta análise, indicar as correlações com o quadro teórico empregado, no que tange às questões relativas ao uso de tecnologias no processo de formação inicial de professores - incluindo episódios relativos à fluência tecnológica (Oliveira, 2013) e ao conhecimento do conteúdo (Shulman, 1986; Mishra e Koehler, 2005). Uma descrição geral sintética pode ser vista na tabela 1.

Tabela 1 - Análise da Atividade 1

	Identificar que a medida do ângulo BAC é sempre igual a 90º	Identificar o triângulo como retângulo, como corolário do teorema	Condições de existência do triângulo inscrito	Identificação errônea dos objetos matemáticos ou uso equivocado de termos matemáticos
Aluno 1	√	X	X	√
Aluno 2	X	X	X	√
Aluno 3	√	X	X	√
Aluno 4	√	X	X	√
Aluno 5	X	X	X	√
Aluno 6	X	X	X	√

Aluno 7	X	X	X	√
Aluno 8	X	X	X	√
Aluno 9	√	X	X	√
Aluno 10	X	X	X	√

Fonte: dados da pesquisa

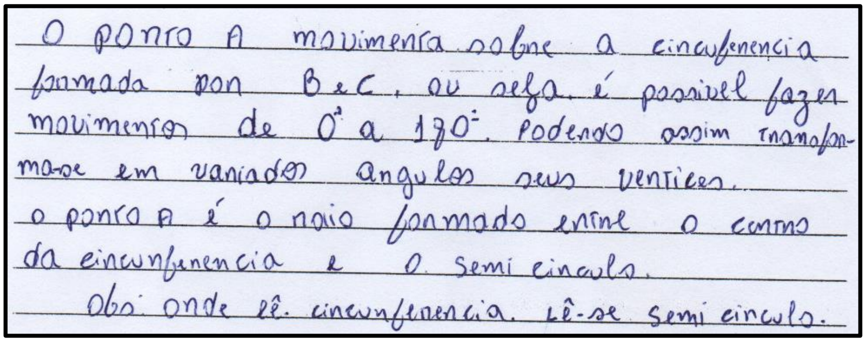
Para a atividade 1, as colunas da tabela são subcategorias da categoria de análise "*A integração do conhecimento do conteúdo, didático do conteúdo e tecnológico acerca do conteúdo no processo de construção de conjecturas e de respostas para as atividades*":

- *Identificar que a medida do ângulo BAC é sempre igual a 90º*, não importando a posição relativa do ponto A na semicircunferência – com exceção às posições nas quais A coincide com B ou C;
- *Identificar*, como corolário da conclusão anterior, *que o triângulo*, dadas as condições de existência, *é sempre retângulo*;
- Perceber as *condições de existência do triângulo inscrito* na semicircunferência;
- Em algum momento das argumentações, realizar a *identificação errônea dos objetos matemáticos ou* fazer *uso equivocado de termos matemáticos* (exemplo: "o ponto A é o raio", "o ângulo do triângulo tem zero graus").

Nota-se pela tabela que os participantes apresentaram dificuldades quanto as subcategorias mencionadas. Na subcategoria "Identificar que a medida do ângulo BÂC é sempre igual a 90º", não importando a posição relativa do ponto A na semicircunferência – com exceção às posições nas quais A coincide com B ou C" verificou-se que quatro dos dez participantes conseguiram identificar que o triângulo ABC possui o ângulo BÂC medindo 90º.

Em relação a esta atividade, no item a, por exemplo, Aluno 9 produziu o protocolo que se exibe na figura 35:

Figura 35 - Protocolo do Aluno 9 – Atividade 1 – item *a*


O ponto A movimenta sobre a circunferencia formada por B e C, ou seja é possivel fazer movimentos de 0° a 180°. Podendo assim transfor-mar em variados angulos seus vertices.
o ponto A é o raio formado entre o centro da circunferencia e o semi circulo.
Obs: onde lê circunferencia. Lê-se semi circulo.

Fonte: dados da pesquisa

Diante da solicitação de que se produzisse, acerca da construção geométrica disponibilizada no Geogebra, uma conjectura matematicamente válida a partir da movimentação do ponto *A*, observa-se que o estudante indica a possibilidade de que o ponto percorra toda a extensão do arco representado pela semicircunferência, indicando, todavia, que seria possível fazer "movimentos de 0° a 180°", o que denota uma confusão terminológica e, talvez, conceitual, entre as ideias de posição relativa do ponto em um objeto e o ângulo formado em *A*, considerando os vértices do triângulo inscrito.

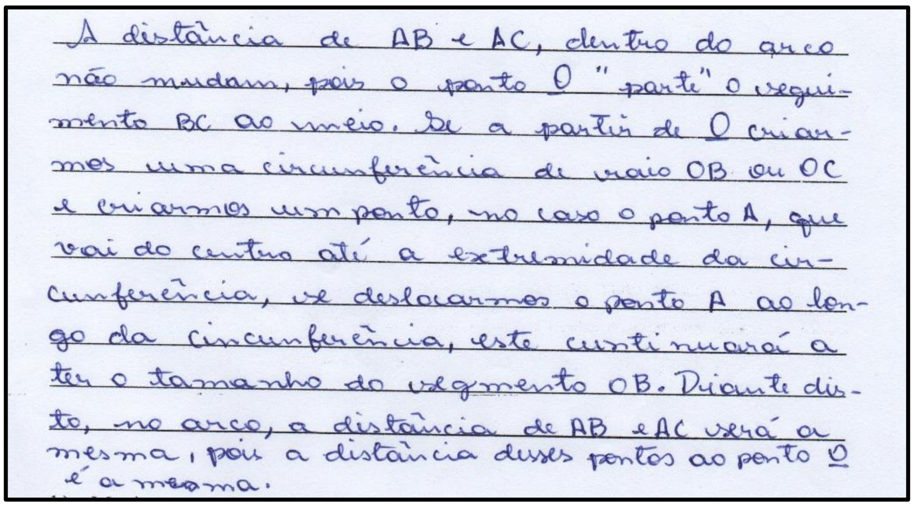
Em seguida, o sujeito indica que seria possível "transformar em variados ângulos seus vértices", em uma provável tentativa de indicar que o movimento de *A* ao longo da semicircunferência faria representar diferentes configurações do triângulo ABC, o que permitiria aventar que diferentes medidas de ângulos surgiriam para os ângulos nos vértices *B* e *C*.

Outro equívoco conceitual encontrado se refere à ideia evidenciada pelo aluno, que indica que "o ponto *A* é o raio formado entre o centro do semicírculo e o semicírculo". Ora, o ponto *A* não é o raio, que, no caso, é dado pelo segmento OA, mas um de seus extremos componentes. Além disto, é possível entender que há uma tensão entre os conceitos de semicircunferência e semicírculo, optando o estudante pela segunda terminologia, a qual, neste caso, resulta errônea. Neste ponto, a ideia principal da construção, qual seja a de provocar conjecturas acerca do ângulo inscrito na semicircunferência, não surgiu nas argumentações do estudante.

Deste ponto de vista, a análise supramencionada evidencia uma tensão entre o saber evidenciado pelo sujeito, que aparece por meio de termos inadequados e de forma fragmentada, já que o mesmo não elabora uma conjectura, mas analisa aspectos da construção, e o saber formal, este um dos elementos elencados por Shulman (1986), ao referir ao que chama de "base de conhecimento para o ensino" (p. 8). Neste caso específico, tratam-se de aspectos epistemológicos indissociáveis do conhecimento em questão. Parecem faltar, neste caso, elementos essenciais ao conhecimento do conteúdo, e que podem ser evidenciados a partir da falta de rigor e até de acerto em relação aos conceitos em tela.

Outro participante que demonstrou conhecimentos parecidos ao do aluno 9, foi o aluno 1, em que o mesmo apresentou determinado equivoco quanto as nomenclaturas e diferenças entre um ponto e um segmento, ao mesmo tempo que apresenta confusão quanto a percepção de medidas congruentes. Tal fato pode ser observado a seguir:

Figura 36 - Protocolo do Aluno 1 – Atividade 1 – item *a*


A distância de AB e AC, dentro do arco
não mudam, pois o ponto O "parte" o segui-
mento BC ao meio. Se a partir de O criar-
mos uma circunferência de raio OB ou OC
e criarmos um ponto, no caso o ponto A, que
vai do centro até a extremidade da cir-
cunferência, se deslocarmos o ponto A ao lon-
go da circunferência, este continuará a
ter o tamanho do segmento OB. Diante dis-
to, no arco, a distância de AB e AC será a
mesma, pois a distância desses pontos ao ponto O
é a mesma.

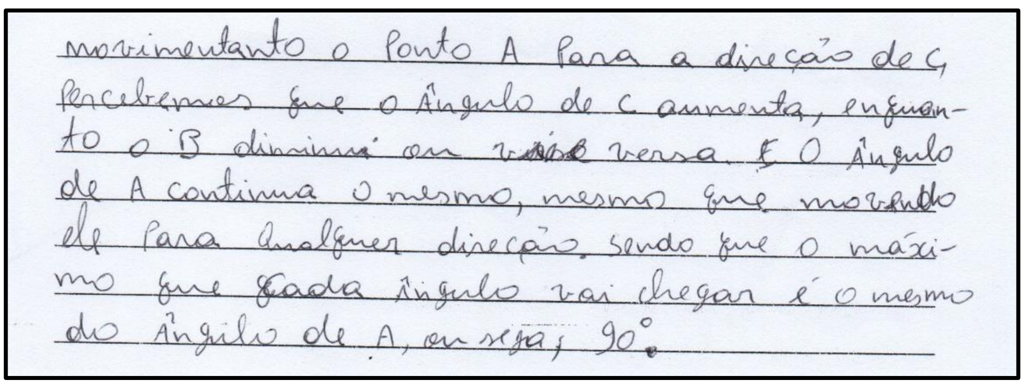
Fonte: dados da pesquisa

O protocolo produzido por Aluno 1, exposto na figura 36, indica também alguns equívocos já evidenciados nas argumentações de Aluno 9, como, por exemplo, quando o sujeito confunde a ideia de segmento de reta com a de ponto, quando indica que um ponto iria "do centro até a extremidade da circunferência". Há uma dificuldade evidente na expressão de seu raciocínio, pois indica que as distâncias entre os pontos A e B, e entre os pontos A e C, não mudariam, o que não é verdade, pois as mesmas são alteradas, ou seja, alteram-se as medidas dos segmentos AB e AC a partir da manipulação dinâmica dos elementos da construção. Possivelmente, ao mencionar a criação de uma circunferência, o sujeito tenha desejado afirmar que o segmento OB seria o seu raio, o que é verdade; entretanto, a inferência feita a partir desta conjectura, qual seja a da igualdade entre os segmentos AB e AC, é falsa, no sentido de que não é verdade para todo e qualquer triângulo nas condições propostas pela atividade.

Ainda aqui, surge a tensão entre uma ideia de caráter intuitivo e o conhecimento matemático formal. Percebe-se, outrossim, que o uso da tecnologia subsidia as conjecturas que o sujeito levanta, mas a fragilidade do arcabouço de conhecimentos do conteúdo dificulta maiores avanços na ressignificação deste saber.

A sequência prevista no item *b* desta atividade, que orientava os sujeitos a obterem as medidas dos ângulos e dos segmentos do triângulo inscrito, permitiu que alguns dos tivessem sucesso ao identificar que a medida ângulo BÂC seria invariavelmente igual a 90º.

Figura 37 - Protocolo do Aluno 3 – Atividade 1 – item *b*



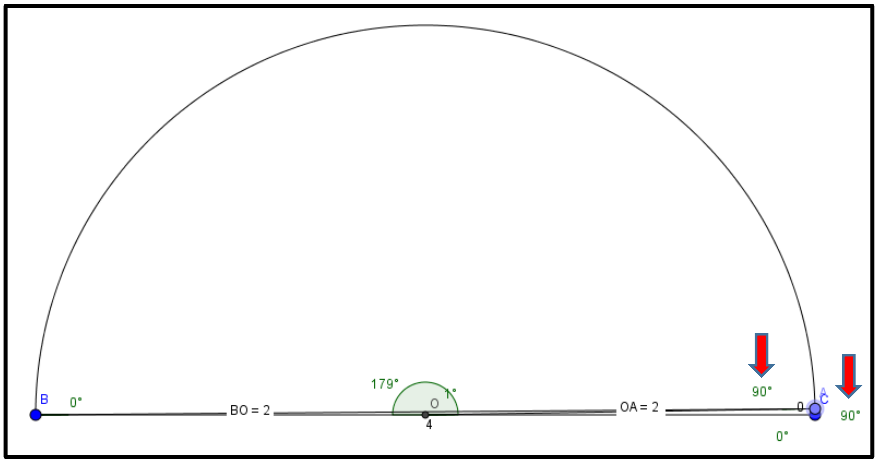
movimentanto o Ponto A Para a direção de C,
Percebemos que o Ângulo de C aumenta, enquan-
to o B diminui ou vice versa. E O Ângulo
de A continua o mesmo, mesmo que movendo
ele Para qualquer direção, sendo que o máxi-
mo que cada ângulo vai chegar é o mesmo
do Ângulo de A, ou seja, 90°.

Fonte: dados da pesquisa

Ainda que Aluno 3 tenha indicado que o ângulo em A sempre mede 90º, parece claro que suas observações carecem de maior rigor quando afirma que a medida dos ângulos em $A\hat{B}C$ ou em B$\hat{C}A$ pode, também, ser de 90º, o que contraria o teorema da medida dos ângulos internos de um triângulo. Esta observação pode ter sido sugerida, por assim dizer, pela observância de situações nas quais algum dos outros ângulos mencionados atinge valores muito próximos a 90º, o que pode dificultar a visualização do valor expresso na medida do ângulo em questão ou até trazê-la exibindo um valor incoerente, como se exemplifica na figura 38. Em todo o caso, evidentemente, esse tipo de observação não pode substituir a coerência provida pelo saber matemático formal[2].

[2] Não se pode descartar a possibilidade de que o Geogebra estivesse configurado para arredondamento sem qualquer casa decimal, ou seja, na unidade inteira, o que poderia levar o software a exibir, por exemplo, um ângulo de 89,95º como 90º, gerando a falsa impressão de que o triângulo poderia ter dois ângulos internos com esta medida. Neste caso, espera-se uma postura crítica do usuário em relação à interface, que precisa sempre ser submetida ao crivo

Figura 38 – Exemplo de exibição com valores incoerentes no Geogebra (arredondamento)



Fonte: dados da pesquisa

De um outro ponto de vista, aquele que considera as demonstrações e os respectivos níveis envolvidos, pareceu claro que os sujeitos consideraram sua argumentação nas respostas providas como uma justificação equivalente a algum tipo de prova. Neste sentido, não se preocuparam em construir algo à parte das respostas, ou seja, alguma argumentação equipada de qualquer rigor ou mesmo informal, baseada em empirismos de caráter inicial. Não obstante, as tentativas de generalização promovidas resultaram, via de regra, em afirmações errôneas, como no caso de Aluno 3.

3.5.2 - Análise da Atividade 2

Na atividade 2, em termos matemáticos, pretendeu-se que os alunos identificassem os conceitos envolvidos nas proposições 36 e 37 do livro I de Euclides. A análise aqui realizada leva em conta, também, outros indícios, como a apropriação da interface tecnológica e sua integração com um potencial cenário de prática profissional.

Dessa atividade, que foi disponibilizada no segundo dia de oficinas, participaram oito alunos. Os alunos 8 e 10 decidiram não participar mais, alegando que não possuíam conhecimentos necessários para o prosseguimento.

---

do rigor matemático. Neste sentido, recomenda-se o estudo da noção de *transposição informática*, bem como, mais especificamente, questões relativas ao *domínio da validade epistemológica* (Balacheff, 1994a).

Considerando os dispositivos diversificados envolvidos na atividade aqui analisada, tanto do ponto de vista teórico quanto metodológico, optou-se por estruturar a tabela 2, de modo a prover um panorama acerca das intervenções realizadas.

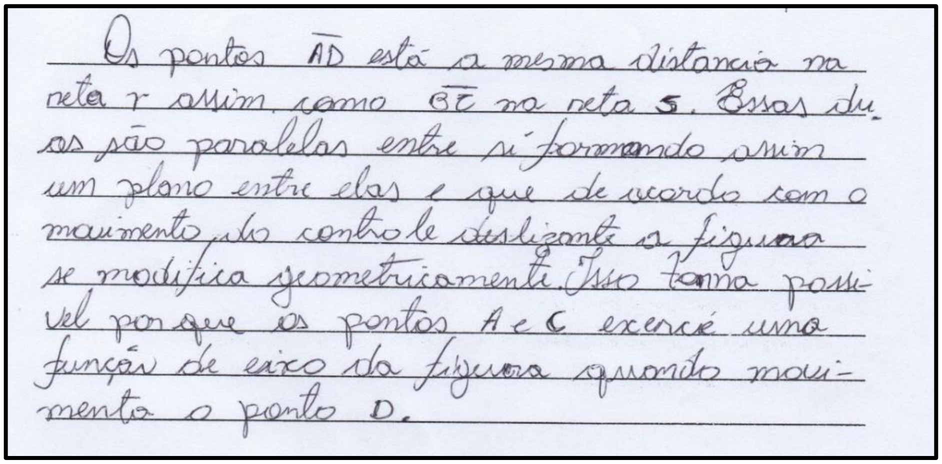
Tabela 2 – Análise da Atividade 2

	Identificar que o controle deslizante serve para aumentar ou diminuir as medidas dos polígonos.	Identificar as propriedades matemáticas das proposições 36 e 37 de "Os Elementos"	Usar de rigor matemático nas exposições, empregando terminologia adequada	Coerência matemática quanto a explicação sobre as observações dos polígonos
Aluno 1	**X**	√	**X**	√
Aluno 2	**X**	√	**X**	√
Aluno 3	**X**	**X**	**X**	**X**
Aluno 4	**X**	√	**X**	√
Aluno 5	**X**	√	**X**	**X**
Aluno 6	**X**	**X**	**X**	**X**
Aluno 7	**X**	√	**X**	√
Aluno 9	**X**	**X**	**X**	**X**

Fonte: dados da pesquisa

Nos itens *a* e *b* da atividade, em que os alunos deveriam expor o que observavam ao manusearem as construções das proposições 36 e 37, esperava-se que observassem que as retas *r* e *s* eram paralelas, e que o controle deslizante concorria para alterar as medidas dos quadriláteros. No entanto, houve observações diversificadas, como pode ser observado a partir dos protocolos selecionados para a análise.

Figura 39 – Protocolo de Aluno 5 - Atividade 2 - item *a*



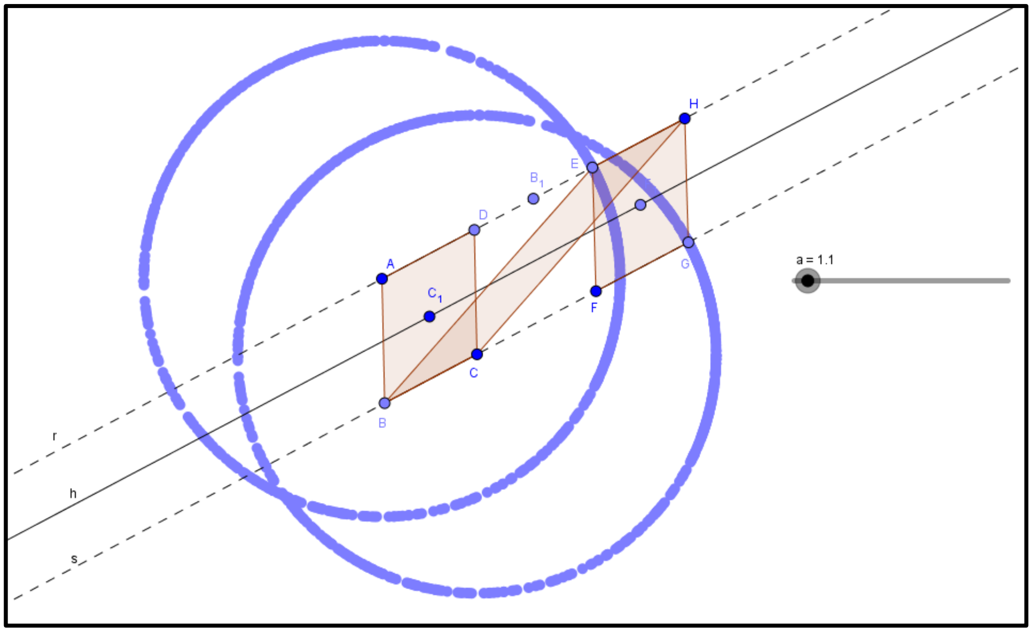
Os pontos AD está a mesma distancia na
reta r assim como BC na reta s. Essas du-
as são paralelas entre si formando assim
um plono entre elas e que de acordo com o
movimento do controle deslizante a figura
se modifica geometricamente. Isso torna possi-
vel porque os pontos A e C exercé uma
função de eixo da figura quando movi-
mento o ponto D.

Fonte: dados da pesquisa

Ainda aqui, Aluno 5 identifica erroneamente o segmento AD, chamando-o de ponto. O mesmo ocorre com o segmento BC. Pode ser, entretanto, apesar da inconveniência da notação, que o aluno tenha querido se referir aos pontos A, B, C e D, componentes dos referidos segmentos, indicando que suas distâncias, ou seja, as medidas dos segmentos, são iguais. Não obstante, o aluno em questão constata o paralelismo entres as retas *r* e *s*, indicando, também, que o controle deslizante modifica as construções, não mencionando, entretanto, que esta modificação se refere às medidas que constituem os polígonos.

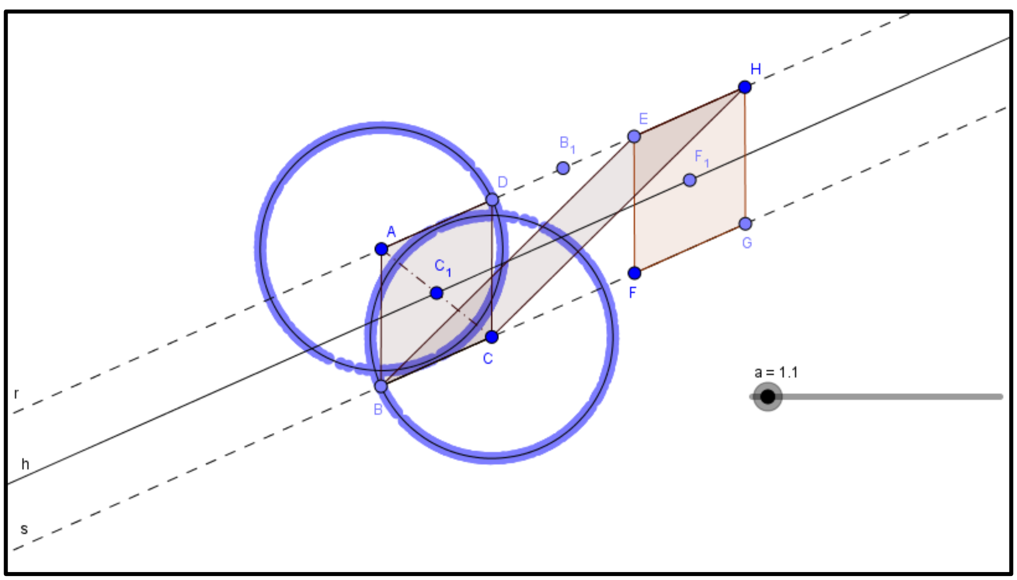
Um detalhe que provocou bastante perplexidade foi a afirmação, mais ou menos recorrente entre os sujeitos, de que haveria um ou mais “eixos” na construção. Evidentemente, esta alegação em nada se relaciona à função do controle deslizante, já descrita anteriormente. Foi necessário, em conjunto com o orientador deste trabalho, estudar esta alegação a partir do uso de fluência no em relação ao Geogebra, além de estender, de alguma forma, as capacidades da equipe de pesquisa, de modo a reorganizar as concepções existentes e, de alguma forma, pensar com o software (Oliveira, 2013). Esta movimentação permitiu compreender que, provavelmente, quanto ao movimento do ponto D da referida construção, os sujeitos chamaram (indevidamente) de “eixo” os pontos A e C porque tais pontos representam, na realidade, o centro de duas circunferências que se formam representando, respectivamente, as trajetórias dos pontos E e G quando se movimenta o ponto D. Em outras palavras, as referidas circunferências são os lugares geométricos dos pontos E e G quando se movimenta o ponto D a partir de todas as posições possíveis na construção. A evidência desta descoberta pode ser feita com o uso da ferramenta “rastro” do Geogebra (figura 40). De igual modo, tem-se duas circunferências formadas a partir dos lugares geométricos dos pontos B e D quando se movimenta este último nos limites da construção (figura 41).

Figura 40 – Investigação sobre o lugar geométrico dos pontos E e G com a ferramenta “rastro”



Fonte: dados da pesquisa

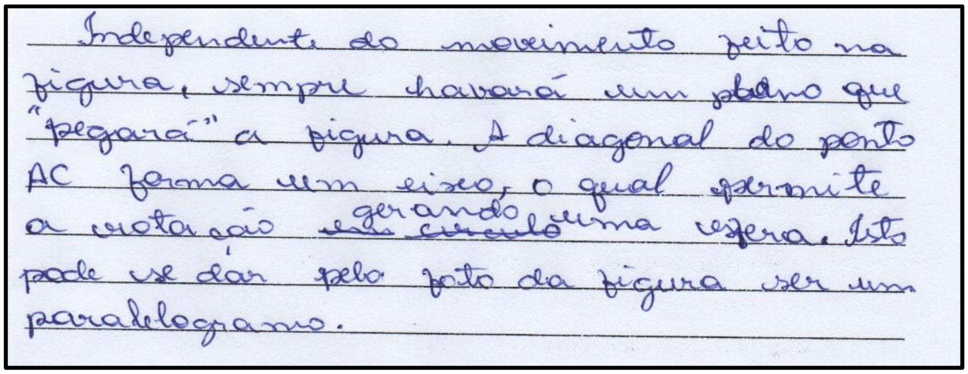
Figura 41 – Investigação sobre o lugar geométrico dos pontos B e D com a ferramenta “rastro”



Fonte: dados da pesquisa

O protocolo produzido por Aluno 1 (figura 42) parece corroborar as mesmas asserções. Destacam-se, também nele, o emprego de terminologia inadequada, como o uso do termo “ponto” para designar um segmento e “esfera” para se referir à circunferência. O termo “plano”, mencionado pelos estudantes pode significar uma tentativa, também questionável, de alegar que o espaço no plano entre as retas paralelas *r* e *s* representa um plano em si, coincidente em relação ao plano considerado para as construções.

Figura 42 – Protocolo do aluno 1 – Atividade 2 – item *a*



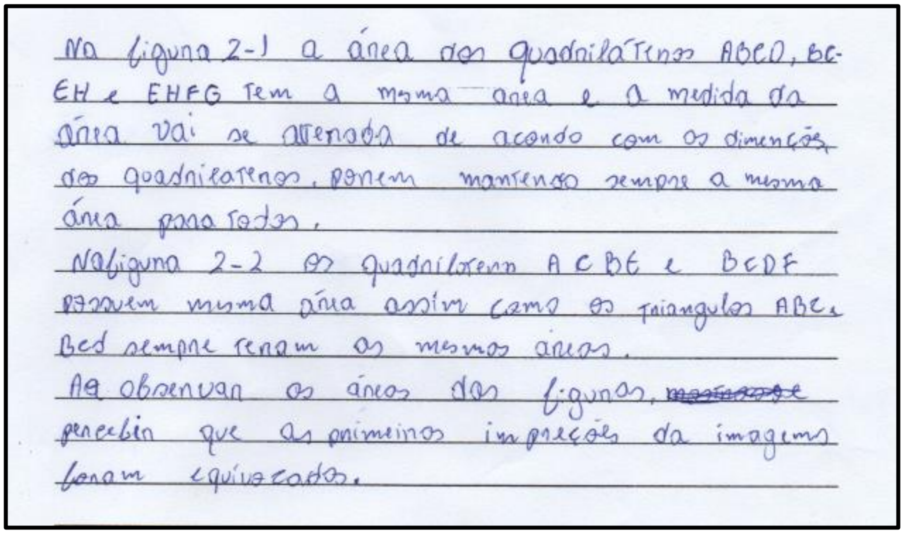
Independente do movimento feito na figura, sempre haverá um plano que "pegará" a figura. A diagonal do ponto AC forma um eixo, o qual permite a rotação ~~em~~ ~~circulo~~ gerando uma esfera. Isto pode se dar pelo fato da figura ser um paralelogramo.

Fonte: dados da pesquisa

Quanto ao item *c*, em que os alunos são questionados acerca das áreas, pretendia-se identificar se os mesmos apresentariam conjecturas acerca da congruência das áreas dos polígonos existentes nas atividades mencionadas. Neste sentido, o protocolo produzido por Aluno 9 traz elementos que permitem perceber que o sujeito compreendeu a manutenção das propriedades da construção a partir da manipulação dinâmica proporcionada pelos modelos digitais, inclusive no que diz respeito à congruência entre as áreas. Além disso, o licenciando evidenciou ter reestruturado suas convicções a partir do emprego da interface, ao indicar que havia equívoco de sua parte quanto ao que imaginava antes de usar o Geogebra para determinar a medida das áreas das figuras (figura 43). Percebe-se que este aluno utilizou a interface em integração com o conhecimento matemático, como forma de reorganizar seu pensamento sobre o tema, da forma como recomendam Mirsha e Kohler (2006), quando se referem ao TCK, e em consenso com a opinião de Borba e Villareal (2005), quando mencionam Tikhomirov (1981), acerca da possibilidade de reorganizar o pensamento a partir do emprego de recursos midiáticos.

.

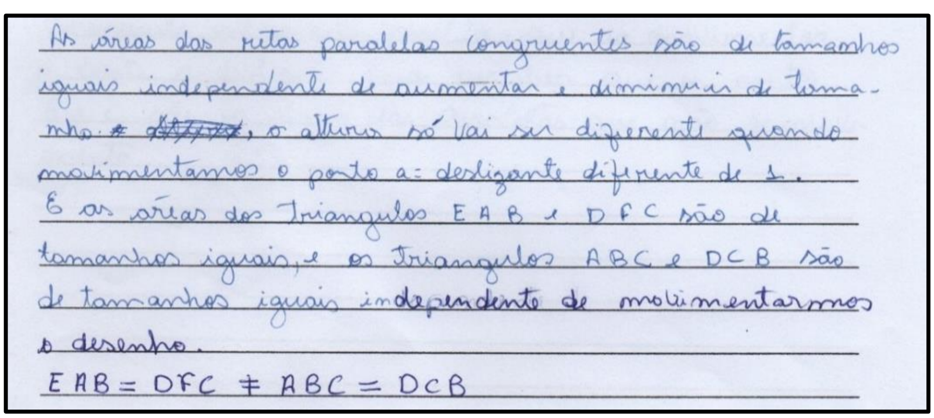
Figura 43 – Protocolo de Aluno 9 – Atividade 2 – item *c*


Na figura 2-1 a área dos quadriláteros ABCD, BC-EH e EHFG tem a mesma area e a medida da área vai se alterada de acordo com os dimenções dos quadriláteros, porem mantendo sempre a mesma área para todos.
Nafigura 2-2 os quadriláteros ACBE e BCDF possuem mesma área assim como os triangulos ABC e Bcd sempre teram as mesmas áreas.
Ao observar as áreas das figuras, percebi que as primeiras impreções da imagens foram equivocados.

Fonte: dados da pesquisa

No protocolo exibido na figura 44, percebe-se que Aluno 6 traz alegações semelhantes às de Aluno 9, referentes à Atividade 2-2. Apesar disto, algumas confusões podem ser percebidas no âmbito da fluência sobre a interface: por exemplo, a altura não se modifica quando da manipulação do controle deslizante *a*, mas sim quando se movimenta o ponto A. Em termos matemáticos, é evidente a confusão entre o uso dos termos "congruência" e "igualdade"; além disso, é difícil compreender o que o sujeito quer dizer quando menciona "as áreas das retas paralelas congruentes" – é provável que tenha havido a intenção de fazer referência aos polígonos construídos e que teriam as referidas retas como suportes. Por fim, as conjecturas corretas acerca da igualdade das medidas das áreas não foram suficientes para sustentar inferências totalmente coerentes: um equívoco é cometido na conclusão de que a área de DFC seria diferente da área de ABC.

Figura 44 – Protocolo de Aluno 6 – Atividade 2 – item *c*

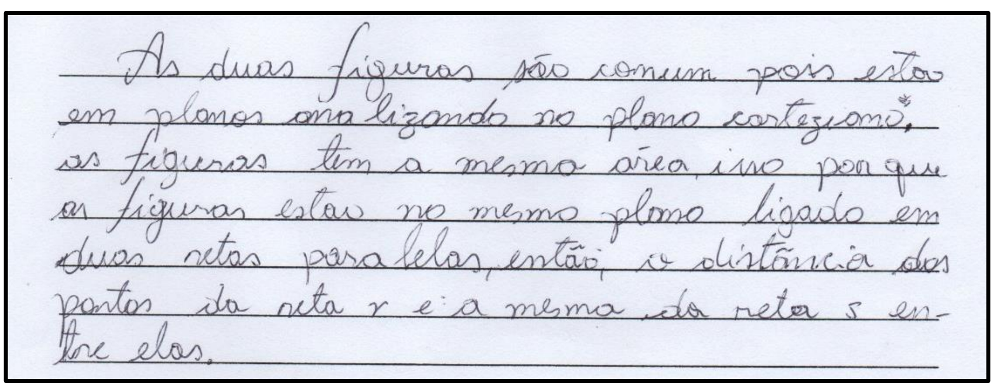

As áreas das retas paralelas congruentes são de tamanhos iguais independente de aumentar e diminuir de tamanho, a altura só vai ser diferente quando movimentamos o ponto a: deslizante diferente de 1.
E as áreas dos Triangulos EAB e DFC são de tamanhos iguais, e os Triangulos ABC e DCB são de tamanhos iguais independente de movimentarmos o desenho.
EAB = DFC ≠ ABC = DCB

Fonte: dados da pesquisa

Com respeito a este último equívoco de Aluno 6, deve-se levar em conta que o uso da interface para o trabalho com questões matemáticas de forma cada vez mais fluente é apenas a primeira das etapas propostas por Oliveira (2013), e um dos pressupostos mencionados por Mirsha e Kohler (2006), ainda que os mesmos o considerem sobremaneira insuficiente. Oliveira (2013) indica que a fluência, quando ligada a estratégias e ideias sobre o saber matemático, pode encaminhar um segundo movimento, destinado a subsidiar o usuário a pensar com tecnologias. O que se percebe, no caso dos sujeitos desta pesquisa, é que, até este ponto, esta transição não tinha acontecido, o que pode ser atestado pelo fato de, por exemplo, Aluno 6 não recorrer à ferramenta de mostrar medidas do Geogebra para subsidiar suas conjecturas.

No item *d*, os alunos foram solicitados a exporem uma sustentação matemática para o que observassem. Nesse item, percebe-se que as respostas se aproximavam mais de uma explicação, como indicam De Villiers (2002) e Balacheff (1982). Estas explicações estavam mais focadas no campo empírico, como explicita Ordem (2015), e tinham por base, prioritariamente, ideias levantadas a partir de um caso específico ou as convicções formadas pelos estudantes a partir de explicações que eles próprios receberam em sua trajetória formativa. Percebem-se, igualmente, algumas dificuldades na expressão de um pensamento matemático formal e algumas confusões conceituais, como se vê no protocolo de Aluno 5.

Figura 45 – Protocolo do Aluno 5 – Atividade 2 – item *d*

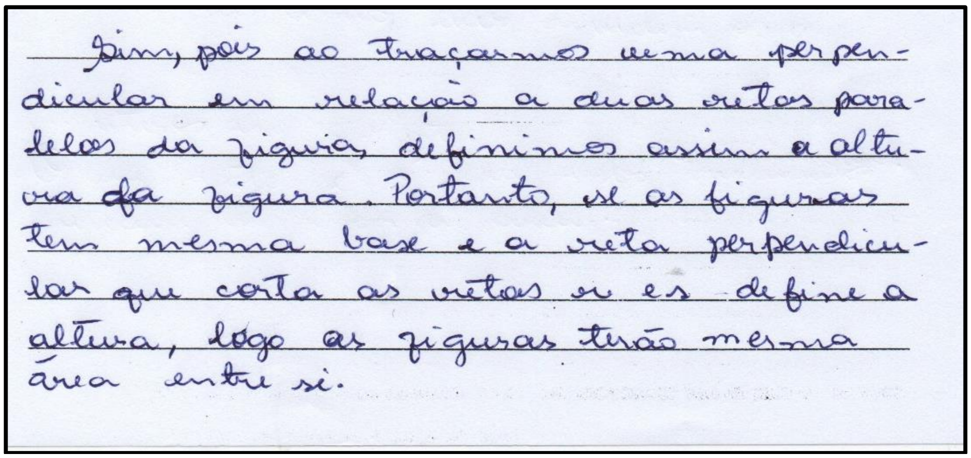

As duas figuras são comum pois estão em planos analizando no plano cartezianó, as figuras tem a mesma área, isso porque as figuras estão no mesmo plano ligado em duas retas paralelas, então, a distância dos pontos da reta r e a mesma da reta s entre elas.

Fonte: dados da pesquisa

Quando Aluno 5 escreve que “as figuras estão no mesmo plano ligado em duas retas”, entende-se que ele se refere a região compreendida entre as retas *r* e *s*, e, mais especificamente, aos quadriláteros formados no âmbito do que assevera Euclides na proposição 36 do Livro I; adotando as retas como referencial, entendeu que a distância entre as mesmas pode ser entendida como a altura das figuras, ainda que não tenha mencionado estes termos especificamente.

Os alunos 1, 2, 4 e 7, apresentaram, também, respostas que se encaixam em uma explicação, de acordo com os autores supramencionados. Neste ponto, apresentaram redações mais claras e alinharam entendimentos que permitiram, por exemplo, inferir que o emprego de conhecimentos relativos ao teorema de Tales estava presente. Deste modo, pode-se afirmar que o uso da interface provida pelo Geogebra concorreu para que os sujeitos em questão ressignificassem suas compreensões sobre os temas em tela, especialmente no que se refere às propriedades que caracterizam as proposições 36 e 37. Como exemplo destas asserções, traz-se o protocolo proveniente de Aluno 1 (figura 46).

Figura 46 – Protocolo do Aluno 1 – Atividade 2 – item *d*


Sim, pois ao traçarmos uma perpen-
dicular em relação a duas retas para-
lelas da figura, definimos assim a altu-
ra da figura. Portanto, se as figuras
tem mesma base e a reta perpendicu-
lar que corta as retas r e s define a
altura, logo as figuras terão mesma
área entre si.

Fonte: dados da pesquisa

De modo geral, essa atividade permitiu confrontações importantes entre os dados recolhidos e os suportes teóricos da investigação, pois foi possível averiguar que os alunos apresentavam familiaridade crescente com a interface do software Geogebra, gerando, desta forma, indícios de que estavam desenvolvendo fluência com o programa, como elucida Oliveira (2015); entretanto, por vezes, quando necessário que os alunos utilizassem o software como elementos integrantes do processo de ressignificação do conhecimento em que se envolviam, via de regra para esclarecer dúvidas ou evidenciar partes de seus raciocínios, como determinar as medidas das áreas das figuras e identificar congruências, os mesmos não se valeram dos recursos disponíveis, o que permite inferir que os alunos ainda não pensam de forma a integrar com os conhecimentos tecnológicos e específicos do conteúdo como elucidam Mirshra e Koehler (2006). Quanto ao quesito demonstrações matemáticas, tomando por base De Villiers (2002), Balacheff (1982) e Ordem (2015), os alunos apresentaram explicações, com o intuito de comunicar o que observavam, munindo-se principalmente da linguagem argumentativa, e em poucos casos tentando usar uma linguagem baseada no rigor e no formalismo. Suas verificações, até este ponto, se limitaram a expor o que observavam de forma empírica, atribuindo como verdade o que observavam, mas sem apresentar uma sustentação matemática de nível mais elevado que embasasse suas conjecturas.

3.5.3 - Análise da atividade 3

A terceira atividade tinha por objetivo observar, de maneira mais específica, o conhecimento matemático dos alunos, bem como a integração do mesmo com o conhecimento relativo às tecnologias digitais. Neste sentido, pensou-se em verificar se os estudantes haviam ampliado a fluência em relação à interface do Geogebra, além de averiguar se estavam iniciando a habilidade de pensar com a interface, como explicita Oliveira (2013). Um panorama dos dados e resultados apurados pode ser visto na Tabela 3.

Tabela 3 - Análise da Atividade 3

	Ampliação da fluência em relação software para a atividade	Construir corretamente o triângulo isósceles, de modo a manter suas propriedades ao movimentar quaisquer pontos	Prover explicações sobre o porquê de dois ângulos internos do triângulo isósceles serem congruentes	Prover demonstrações acerca da congruência de dois ângulos internos de um triângulo isósceles
Aluno 1	√	√	√	**X**
Aluno 2	√	√	√	**X**
Aluno 3	√	√	**X**	**X**
Aluno 4	√	√	√	**X**
Aluno 5	√	√	**X**	**X**
Aluno 6	√	√	√	**X**
Aluno 7	√	√	√	**X**
Aluno 9	√	√	√	**X**

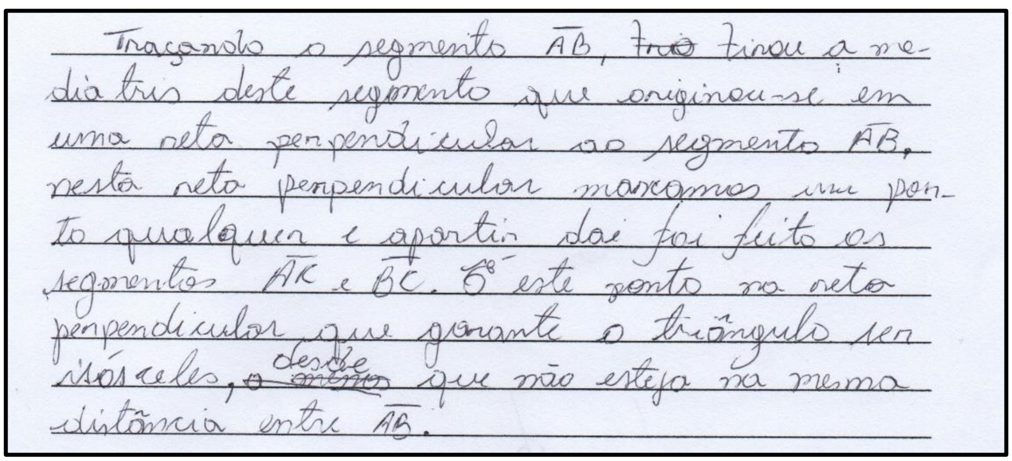
Fonte: dados da pesquisa

Pela tabela, é possível observar que em geral os alunos foram bem-sucedidos nessa atividade, demonstrando maior fluência no uso do software Geogebra. Outra observação mais imediata permite conjecturar que os sujeitos se detêm de forma insistente às explicações, no sentido exposto por Balacheff (1982), e à ideia de comunicação do que se observa, tendo por referência os conhecimentos que já tomam como verdadeiros, como explana De Villiers (2002). Ainda que o aspecto formal reste prejudicado, o fato de explanarem de forma informativa pode ser visto como indicio de que os alunos possuem certo grau de domínio do conteúdo geométrico trabalhado.

É preciso lembrar que o item *a* da atividade 3 pedia que os alunos construíssem um triângulo isósceles cujas medidas dos segmentos AC *e* BC permanecessem congruentes, mantendo esta propriedade da construção para qualquer ponto movimentado. Além disso, os alunos deveriam justificar por quais motivos a construção executada representaria um triângulo isósceles.

Pode afirmar que a resolução deste item trazia respostas que giravam em torno de um mesmo padrão de escrita e que se encontra dentro do que se esperava que os alunos respondessem. Um exemplo significativo pode ser conferido a partir do protocolo produzido por Aluno 5 (figura 47).

Figura 47 – Protocolo do aluno 5 – Atividade 3 – Item *a*



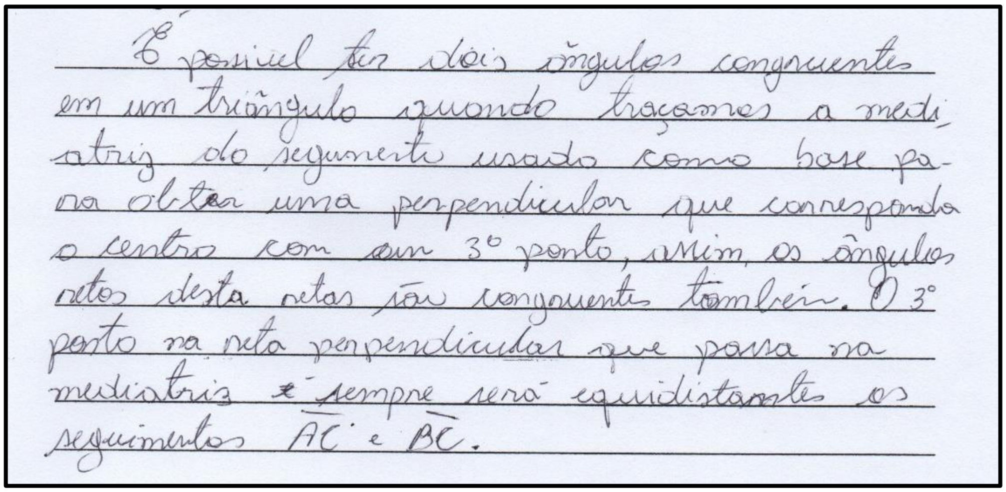
Traçando o segmento $\overline{AB}$, ~~tra~~ tirou a mediatris deste segmento que originou-se em uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, nesta reta perpendicular marcamos um ponto qualquer e apartir daí foi feito os segmentos $\overline{AK}$ e $\overline{BC}$. É este ponto na reta perpendicular que garante o triângulo ser isósceles, ~~o mesmo~~ desde que não esteja na mesma distância entre $\overline{AB}$.

Fonte: dados da pesquisa

O protocolo de Aluno 5 indica que a atividade, no que diz respeito ao item *a*, foi realizada corretamente, com a demonstração de certo domínio sobre o conhecimento necessário para a construção de um triângulo isósceles. Há apenas uma pequena ressalva na argumentação de Aluno 5, quando o mesmo escreve “desde que não esteja na mesma distância entre AB”. Parece lógico que o aluno pretendia indicar que os três pontos envolvidos na construção não poderiam ser colineares – ou, então, que a distância não deveria ser tal que permitisse classificar o triângulo como equilátero. No mais, os outros sujeitos construíram suas argumentações de forma semelhante àquela adotada por Aluno 5.

No item *b*, os alunos deveriam demonstrar que dois ângulos internos de um triângulo isósceles são congruentes. Aqui alguns mal-entendidos ocorreram, como pode ser constatado no protocolo construído por Aluno 5 (figura 48).

Figura 48 – Protocolo de Aluno 5 – Atividade 3 – Item *b*



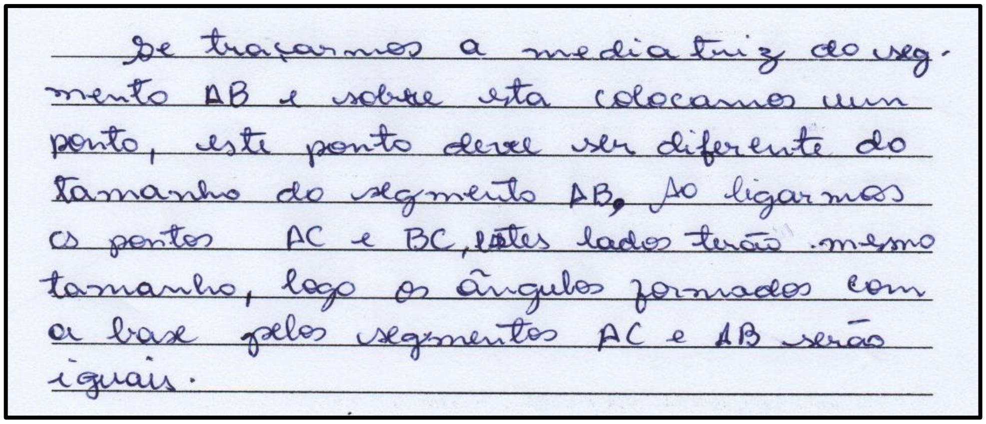
É possível ter dois ângulos congruentes
em um triângulo quando traçamos a medi-
atriz do segmento usado como base pa-
ra obter uma perpendicular que corresponda
o centro com um 3º ponto, assim os ângulos
retos desta retas são congruentes também. O 3º
ponto na reta perpendicular que passa na
mediatriz ~~é~~ sempre será equidistantes os
seguimentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Fonte: dados da pesquisa

Aluno 5 aparentou não compreender o que o comando do item solicitava. Neste sentido, o sujeito em questão compreendeu que a possível congruência estaria relacionada à mediatriz do segmento AB, um elemento auxiliar da construção e que não compõe o triângulo em si. Na verdade, a partir deste tipo de argumentação, pode-se inferir que o aluno emprega dois triângulos retângulos em suas conjecturas, visto que a mediatriz de AB compõe estes dois triângulos, cada um possuidor de seus respectivos ângulos internos. Neste ponto, é possível aventar que Aluno 5 ignorou o fato de que os ângulos internos de um triângulo são constituídos a partir dos vértices do mesmo. Uma possível estratégia, que o sujeito parece não ter empregado, poderia envolver obter a medida dos ângulos internos do triângulo em questão, de modo a subsidiar, ao menos, a compreensão daquilo que o questionamento solicitava. Ainda aqui, o avanço da fluência em relação à interface para o pensar com seus elementos parece não ter ocorrido.

No entanto, neste item, com exceção dos alunos 3 e 5, os sujeitos de certa forma responderam o enunciado de maneira coerente, visto terem recorrido, de forma geral, a explicação de que, se dois segmentos do triângulo isósceles são congruentes, logo os vértices criados por esses dois segmentos em concorrência com o terceiro segmento gerarão dois ângulos de medidas iguais, como é possível observar no protocolo de resolução de Aluno 1 (figura 49).

Figura 49 – Protocolo do aluno 1 – atividade 3 – Item *b*


Se traçarmos a mediatriz do seg-
mento AB e sobre esta colocarmos um
ponto, este ponto deve ser diferente do
tamanho do segmento AB. Ao ligarmos
os pontos AC e BC, estes lados terão mesmo
tamanho, logo os ângulos formados com
a base pelos segmentos AC e AB serão
iguais.

Fonte: dados da pesquisa

Pela leitura do protocolo do Aluno 1 e dos demais alunos que seguiram a mesma linha de raciocínio, é possível perceber a predominância da ideia de explicação e do intento de justificar, como apontam De Villiers (2002) e Balacheff (1982). Neste sentido, os alunos se valem de conhecimentos já instaurados e repassados em algum momento de suas trajetórias aprendentes, sem que considerem necessária uma prova matemática do que se explana. Mesmo assim, é perceptível que, neste momento, os sujeitos exibem certa integração entre os conhecimentos tecnológicos e matemáticos, uma vez que as asserções que fazem emergem a partir de uma estratégia que emprega as interfaces digitais construídas como componentes. Claro que esses conhecimentos possuem limitações em determinados momentos, visto que os alunos ainda não possuíam vasta fluência no manuseio do software Geogebra, e, quanto a matemática, tenham predominado aspectos algorítmicos e intuitivos sobre os formais na maior parte de suas argumentações.

De todo o modo, principalmente na resolução do item *a*, surgiram alguns indícios que permitem indicar que os sujeitos percebiam a possibilidade de pensar com o Geogebra, a partir do momento que exploravam diversas experimentações com os triângulos construídos a partir do uso de um segmento e de uma reta mediatriz deste mesmo segmento, com amplo uso do dinamismo e da visualização como elementos de apoio ao raciocínio.

3.5.4 – Análise da Atividade 4

Nesta atividade, pretendia-se que os alunos empregassem os conhecimentos trabalhados nas atividades anteriores, com maior foco na atividade 2, que continham as proposições 36 e 37 do livro I de “Os Elementos” de Euclides, além de resgatarem seus conhecimentos acerca de razões e proporções. Pretendia-se, de outra forma, verificar a evolução na fluência e em pensar com o software Geogebra, uma vez que os procedimentos incluíam identificar as ferramentas necessárias para intervir nas construções.

A tabela 4 exibe uma ideia geral dos elementos trabalhados nas análises, o que permite ter um panorama das intervenções.

Tabela 4 - Tabela de Análise da Atividade 4

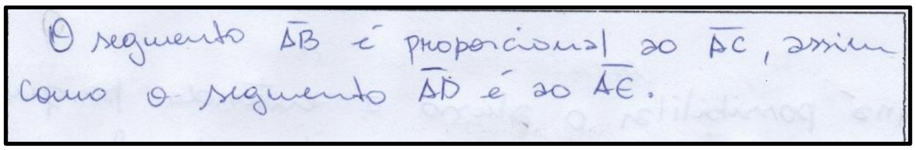
	Identificar proporções corretamente	Comprovar matematicamente a validade das proporções	Usar divisão entre medidas para comprovar as proporções de um único triângulo	Usar adequadamente a linguagem matemática
Aluno 1	X	X	X	X
Aluno 2	√	X	√	√
Aluno 3	X	X	X	X
Aluno 4	√	X	√	√
Aluno 5	X	X	√	√
Aluno 6	√	X	√	X
Aluno 7	X	X	√	X
Aluno 9	X	X	√	√

Fonte: dados da pesquisa

Como é possível observar pela tabela, nenhum dos alunos tentou fazer uma demonstração matemática acerca dos elementos empregados o que pode indicar que os alunos não possuem suficiente domínio sobre alguns dos princípios necessários para a argumentação. Outra possibilidade aventada aqui é a de haver certo desconhecimento sobre o que de fato poderia representar uma demonstração, em seus diversos níveis, de acordo com algum referencial teórico, por exemplo. Isto implica, provavelmente, em saber como iniciar um argumento matemático que possa sustentar as conjecturas elaboradas. Isto passa pela também provável necessidade de ampliar a base de conhecimentos correlatos, o que permite, por exemplo, observar formas pelas quais as demonstrações são feitas de modo a perceber a pertinência deste instrumento como uma potencial ferramenta de validação do pensamento matemático.

Neste sentido, os alunos 1, 3, 5, 7 e 9, apresentaram respostas nas quais haviam razões não proporcionais entre si, objetivo principal no item *a*, como pode ser visto na figura 50.

Figura 50 – Protocolo de Aluno 7 – Atividade 4 – item *a*

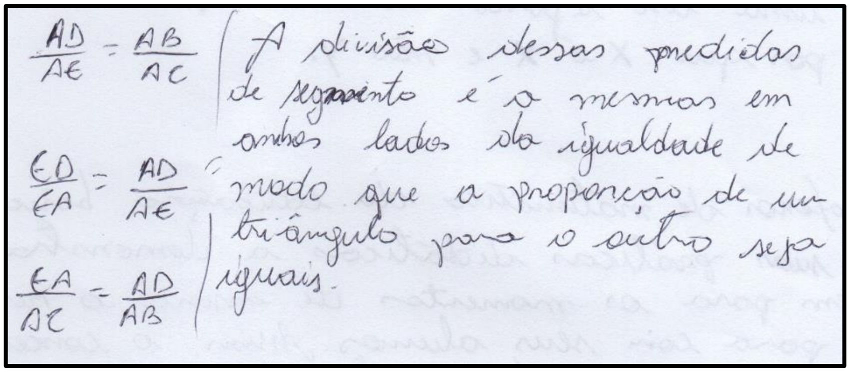

O segmento $\overline{AB}$ é proporcional ao $\overline{AC}$, assim como o segmento $\overline{AD}$ é ao $\overline{AE}$.

Fonte: dados da pesquisa

No protocolo apresentado por Aluno 7, percebe-se um exemplo de equívoco deste tipo: os segmentos mencionados pelo sujeito não são proporcionais. Pode ser um erro de escrita, mas o mais provável é que o participante não tenha percebido a relação destacada. Medir os segmentos com ferramentas da interface e observar a estabilidade (ou não) das propriedades a partir do chamado “teste de arrastar” (movimentar pontos da construção, verificando a manutenção de resultados apurados) poderia auxiliar na percepção de eventuais enganos ou subsidiar a ressignificação deste saber. Por outro lado, recuperar a proposição original que embasou o teorema levaria o sujeito a rejeitar sua conjectura, uma vez que sua argumentação precisaria recorrer à razão entre segmentos correspondentes nas retas transversais que cortam um feixe de paralelas. Outra possibilidade é uma dificuldade ou tensão entre a escrita corrente e a notação matemática: o sujeito pode ter tentado assinalar que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$, o que é verdade.

O protocolo produzido por Aluno 5 mostra, na figura 51, que o sujeito conseguiu identificar corretamente duas proporções, a primeira e a terceira. A segunda igualdade pretensamente verificada não ocorre. Isto porque, ainda aqui, neste segundo caso, o sujeito não empregou razões entre segmentos correspondentes proporcionais, notadamente. Também aqui as ferramentas de medida do software poderiam subsidiar conclusões acerca da falsidade desta proposição, com base na experimentação (testar casos por meio da movimentação da construção). De toda forma, em ambos os casos, observa-se limitações em relação ao uso integrado dos conhecimentos matemáticos com os conhecimentos relativos às tecnologias, no âmbito do que Mirsha e Kohler (2006) chamam TCK, bem como no que diz respeito à relação entre a fluência nas interfaces, o conhecimento matemático e seu uso como subsídio para um movimento de pensar com tecnologias (Oliveira, 2013).

Figura 51 – Protocolo do Aluno 5 – Atividade 4 – item *a*


$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{ED}{EA} = \frac{AD}{AE}$

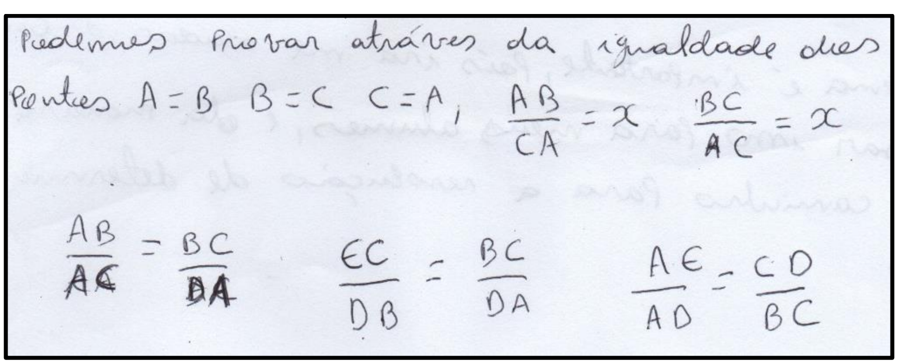
$\frac{EA}{AC} = \frac{AD}{AB}$

A divisão dessas medidas de segmento é o mesmas em ambos lados da igualdade de modo que a proporção de um triângulo para o outro seja iguais.

Fonte: dados da pesquisa

Na sequência da Atividade 4, chega-se ao item *b*, na qual se solicitou que os sujeitos construíssem argumentações que viessem a comprovar que as razões mencionadas por eles seriam válidas. Nesse item, considerando o trabalho dos estudantes e os conhecimentos mobilizados a partir proposições 36 e 37 do Livro I de Euclides, esperava-se que surgissem, nos melhores casos, demonstrações matematicamente válidas para as razões que os licenciandos expusessem. Entretanto, como é observável pela segunda coluna da tabela 4, nenhum dos alunos chegou a materializar uma construção deste tipo; de outra forma, alguns dos futuros professores preferiram usar, de forma pontual, algumas razões com valores hipotéticos, na tentativa de inferir que suas lógicas teriam validade matemática. Há de se destacar, também, algumas tensões em relação ao aspecto formal do conhecimento matemático, como resta constatado a partir da incoerência quanto ao entendimento acerca de objetos como pontos e segmentos, como pode ser visto no protocolo de Aluno 3 (figura 52).

Figura 52 – Protocolo de Aluno 3 – Atividade 4 – item *b*


Podemos Provar atráves da igualdade dos Pontos A = B B = C C = A, $\frac{AB}{CA} = x$ $\frac{BC}{AC} = x$

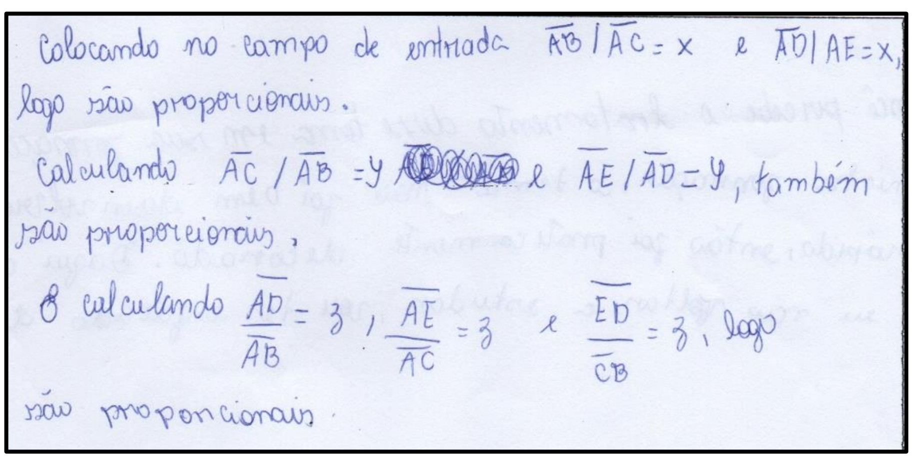
$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{DA}$ $\frac{EC}{DB} = \frac{BC}{DA}$ $\frac{AE}{AD} = \frac{CD}{BC}$

Fonte: dados da pesquisa

Nota-se que Aluno 3 confunde, no âmbito de sua argumentação, as ideias de *igualdade* e de *correspondência* entre os pontos – neste sentido, evidentemente, se os pontos fosse iguais, não se teria um triângulo; além disso, quando o aluno expressa duas razões que resultam em uma incógnita *x*, se os pontos fossem iguais, os "segmentos" indicados não possuiriam medidas (ou teriam medida igual a zero), o que representa um contrassenso. De maneira mais objetiva, ao que tudo indica, o licenciando procurou construir um raciocínio em torno de uma possível generalização, o que não se verifica em função da ausência de elementos necessários para produzir uma prova em algum dos níveis indicados por Balacheff (1987).

Outros sujeitos, entretanto, valeram-se de forma mais intensiva da fluência desenvolvida em relação à interface, considerando a integração do uso desta com o conhecimento matemático. É o caso de Aluno 2, cujo protocolo se encontra na figura 51. Claro que a suposto prova apresentada não ultrapassa o que Balacheff (1982) chama de *explicação*. Entretanto, a correção da argumentação exibida poderia ser um indício de integração entre os aspectos do conteúdo e da tecnologia, como explicitam Mirsha e Kohler (2006) quando se referem ao TCK. Em outras palavras, Aluno 2 usou as ferramentas tecnológicas disponíveis para indicar que sua conjectura era válida. Especificamente, o aluno usou o campo de entrada para testar as razões que seriam proporcionais, e movimentou os pontos livres do triângulo para testar a estabilidade das razões mencionadas.

Figura 53 – Protocolo de Aluno 2 – Atividade 4 – item *b*



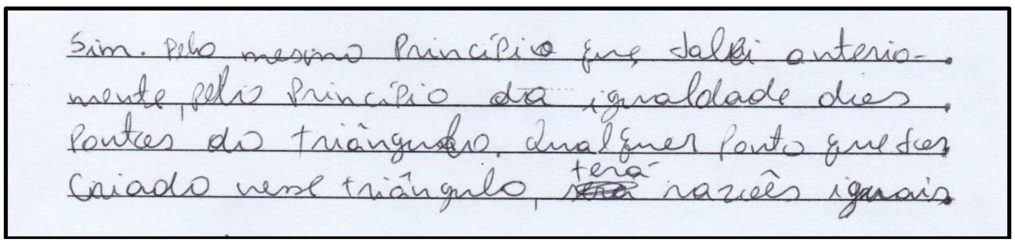
Colocando no campo de entrada $\overline{AB}/\overline{AC}=x$ e $\overline{AD}/\overline{AE}=x$,
logo são proporcionais.
Calculando $\overline{AC}/\overline{AB}=y$ e $\overline{AE}/\overline{AD}=y$, também
são proporcionais,
e calculando $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=3$, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=3$ e $\frac{\overline{ED}}{\overline{CB}}=3$, logo
são proporcionais.

Fonte: dados da pesquisa

De alguma forma, percebe-se que Aluno 2 não tentou simplesmente igualar as medidas dos segmentos como fez Aluno 5, como se lidasse com verdades autoevidentes; diferente disso, apresentou estar "*pensando com a interface*" (Oliveira, 2013), e, ao movimentar os pontos, observou que os resultados das razões variavam de acordo com o movimento dos pontos, mas essa variação mantinha a proporcionalidade entre as mesmas, o que justificou o uso das variáveis x, y e z.

Em relação ao item *c* desta atividade, no qual se solicitava que os alunos explanassem se as justificativas matemáticas apresentadas teriam sustentação caso fosse criado mais um segmento paralelo a BC que estivesse entre os segmentos BC e DE. Nesse item, os Alunos 1 e 3 foram os únicos que não demonstraram algum tipo de justificativa em termos matemáticos que indicasse alguma formalidade ou que expressasse alguma solidez em relação aos seus conhecimentos acerca de geometria euclidiana plana. É o que se vê no protocolo exibido na figura 54.

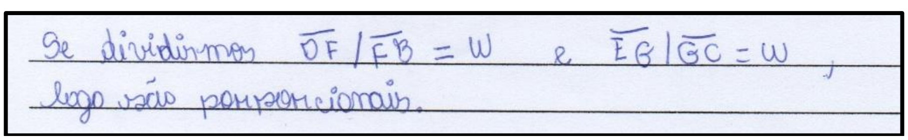
Figura 54 – Protocolo de Aluno 3 – Atividade 4 - item *c*


Sim. Pelo mesmo Princípio que falei anterio- mente pelo Princípio da igualdade dos Pontos do triângulo, Qualquer Ponto que for Criado nesse triângulo, terá razões iguais

Fonte: dados da pesquisa

Entre os demais alunos que apresentaram uma sustentação voltada apenas a exposição das razões proporcionais, destaca-se novamente a afirmação feita por Aluno 2, como exposto na figura 55.

Figura 55 – Protocolo de Aluno 2 – Atividade 4 – item *c*


Se dividirmos $\overline{DF}/\overline{FB} = w$ e $\overline{EG}/\overline{GC} = w$, logo são porporcionais.

Fonte: dados da pesquisa

Munindo-se das ferramentas do Geogebra, o sujeito destacou as razões proporcionais e atribuiu uma incógnita *w* para representar numericamente a razão entre as medidas dos segmentos. Essa forma de justificar as proporções não foi exclusiva de Aluno 2: por exemplo, Aluno 6 também seguiu esta ideia de apenas indicar razões proporcionais. Os demais alunos optaram por afirmar discursivamente que as razões se manteriam proporcionais, pois estaria sendo criado um triângulo semelhante aos demais.

Nessa atividade, era esperado que os alunos tratassem das tarefas solicitadas com mais desenvoltura, uma vez que os tópicos envolvidos incluíam temas bastante familiares, como semelhança de triângulos, além do próprio teorema de Tales. Assim, minimamente, esperavam-se tentativas de reconstruir eventuais demonstrações que os sujeitos já haviam visto, ou, então, a construção de generalizações mais efetivas. Entretanto, os alunos continuaram restritos às justificativas sem apoio em conhecimento matemático formal, como aponta De Viliers (2002); além disso, os alunos demonstraram insegurança quanto ao uso da escrita matemática. Em acréscimo, também não se observou, considerando alunos de último semestre de suas formações iniciais em Matemática, qualquer tentativa de empreender demonstrações matemáticas em níveis mais sofisticados como sustentação para as observações realizadas. Este fato fez com que se discutisse, com aval do orientador desta pesquisa, e se introduzisse três novos itens ao final da atividade 4, com a finalidade de lançar os seguintes questionamentos:

d. *Coloque com suas palavras o que entende por demonstração em matemática.*
e. *Em sua opinião, qual a importância da demonstração para o professor de matemática da escola básica?*
f. *Como você percebe o tratamento sobre esse tema em sua formação atual?*

De forma geral, apurou-se que aquilo que os licenciandos pensam acerca do processo de construção de demonstrações muito pouco se assemelha aos pressupostos defendidos por teóricos como Balacheff (1982) ou De Villiers (2002). De forma geral, identificaram-se vários descompassos nesta direção, de forma muito próxima às descobertas de Ordem (2015). Por exemplo, foi averiguado que os alunos tendem a possuir um pensamento em comum quanto ao que é demonstração, como se a mesma fosse um método dividido em passos para se chegar até uma "fórmula". Outro ponto em comum nos pensamentos dos alunos é que há confusão entre demonstração e resolução de um exercício, como fica evidenciado na figura 56.

Figura 56 – Protocolo de Aluno 6 – Item *d*

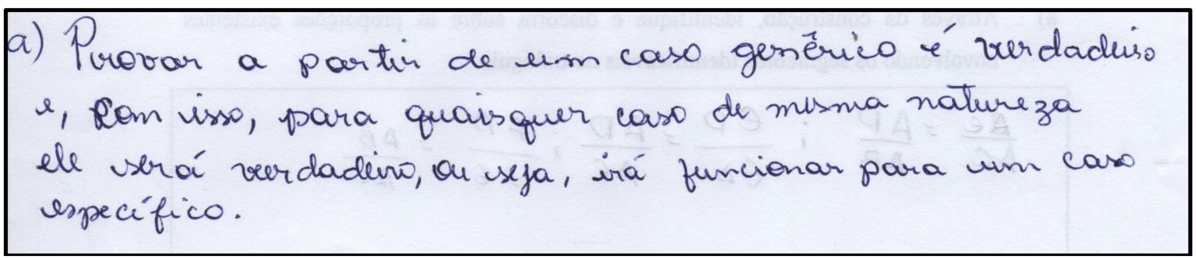
Demonstração é provar o exercício proposto, passo a passo desde o início, até chegar ao resultado final, fazendo com que os alunos não só faça o exercício mais entender o assunto passado.

Fonte: dados da pesquisa

Como se vê pela reposta de Aluno 6, está de certa forma instaurada a ideia de que demonstrar é resolver um exercício de modo que toda sua resolução possa ser observada com facilidade. Esta argumentação se enquadra no que Ordem (2015) relata em seu trabalho, ou seja, que muitos professores têm uma visão simplista e empírica das razões pelas quais se constrói uma demonstração, afastada de pressupostos que indicam que a mesma, além de servir como meio de comunicação entre os pares, possui uma estrutura lógica estabelecida por meio de elementos como teoremas e axiomas.

Deve-se destacar, também, que existem respostas dos licenciandos que de alguma forma se aproximam do que está sendo entendido por demonstração nesse trabalho, como é o caso da argumentação desenvolvida por Aluno 1, que pode ser conferida na figura 57.

Figura 57 – Protocolo de Aluno 1 – Item *d*


a) Provar a partir de um caso genérico é verdadeiro e, com isso, para quaisquer caso de mesma natureza ele será verdadeiro, ou seja, irá funcionar para um caso específico.

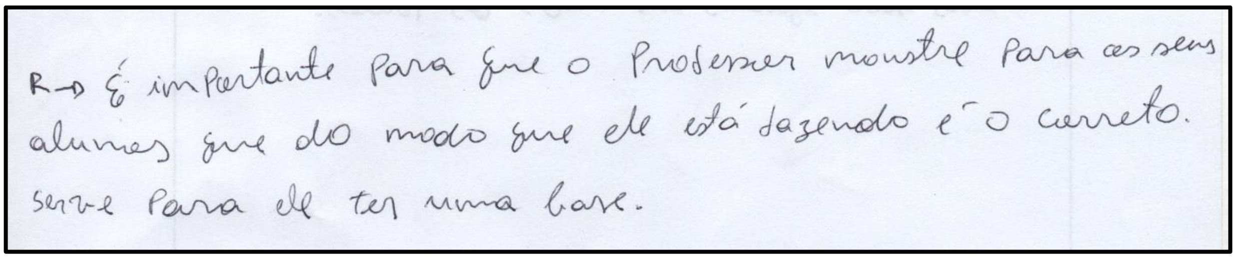
Fonte: dados da pesquisa

Da mesma forma como assinalado por Aluno 1, Aluno 4 seguiu essa ideia, acrescentando que a demonstração se vale de uma hipótese a ser testada. Estas anotações indicam, por parte destes alunos, maior clareza quanto a algumas das finalidades do processo de demonstração, do ponto de vista epistemológico, do que aquela exibida por seus colegas. Isso se relaciona com o *conhecimento de conteúdo* abordado por Shulman (1986; 1987); Mishra e Koehler (2006), além de ter proximidades com as ideias de De Villiers (2002) e Balacheff (1982) acerca do que se entende por demonstração.

No segundo questionamento (*e*), esperava-se que os alunos alegassem, de forma próxima ao que se encontra nos PCNs (BRASIL, 1998), que o professor deve promover situações que instiguem o aluno a solucionar problemas e, além disso, que ele seja capaz de usar a linguagem matemática de forma a expressar a plenitude do seu raciocínio, bem como apresentar uma estrutura que compactue com a averiguação de suas conjecturas. O conhecimento acerca das alegações contidas neste documento poderiam emergir, em função de os licenciandos, sujeitos da pesquisa, encontrarem-se em vias de concluir o processo de formação inicial, em um ponto no qual disciplinas que alinham didática e metodologias ocorrem em conjunto com aquelas que tratam mais especificamente de conteúdos matemáticos.

No entanto, como já se apontou, a maioria dos sujeitos indicou entender que a demonstração seria uma técnica resolutiva de um exercício proposto. No caso, os depoimentos colhidos confirmam a noção apontada por Ordem (2015), de acordo com a qual existiria uma visão mais empirista das demonstrações, o que leva alguns professores entenderem que, na escola básica, esta ferramenta conceitual deve ser vista de forma mais superficial, pois não traria muita efetividade para as aulas, ficando a cargo das técnicas de resolução o papel de explorar esse vazio. Essa visão dos alunos, de modo geral, é compatível com o que mencionou Aluno 3 (figura 58).

Figura 58 – Protocolo de Aluno 3 – Item *b*



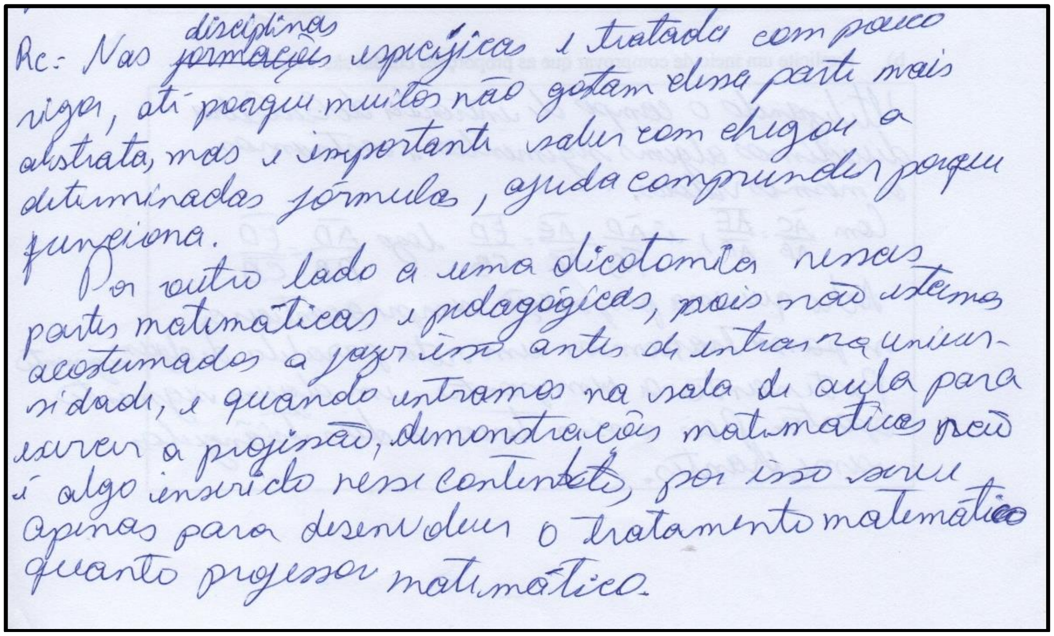
R→ É importante para que o Professor mostre para os seus alunos que do modo que ele está fazendo é o correto. serve para ele ter uma base.

Fonte: dados da pesquisa

Os demais alunos escreveram suas respostas de maneira muito semelhante à de Aluno 3, o que permite aventar que os sujeitos da pesquisa detêm noções pouco aprofundadas da importância da demonstração para o ensino básico; indica, também, e demonstra também que os mesmos não se desprenderam do pensamento de que, na escola básica, a demonstração deve ser reduzida em suas possibilidades validadoras para ser encarada de forma simplista, com a alegação de que, assim, haveria a possibilidade dos alunos compreenderem o que se deseja comunicar, em termos de constructos matemáticos formais.

No item *f*, há outra concordância entre os alunos, visto que eles escreveram pontos bem semelhantes, o que pode ser observado no trabalho de Ordem (2015), que é justamente a visão de que, no ensino básico, muitos professores não recorrem às provas e demonstrações em suas aulas e preferem tratá-las de forma superficial, dando mais ênfase aos métodos de resolução de determinados exercícios. Para ilustrar de forma geral o que os alunos pensam a respeito do terceiro questionamento, segue a figura 59, contendo as asserções de Aluno 4.

Figura 59 – Protocolo de Aluno 4 – Item *f*


Rc: Nas ~~formações~~ disciplina especificas é tratada com pouco rigor, até porque muitos não gostam dessa parte mais abstrata, mas é importante saber como chegou a determinadas fórmulas, ajuda compreender porque funciona.
Por outro lado a uma dicotomia nessas partes matemáticas e pedagógicas, pois não estamos acostumados a fazer isso antes de entrar na universidade, e quando entramos na sala de aula para exercer a profissão, demonstrações matemáticas não é algo inserido nesse contexto, por isso serve apenas para desenvolver o tratamento matemático quanto professor matemático.

Fonte: dados da pesquisa

As falas dos demais alunos são bem semelhantes com às de Aluno 4; em suma, foi possível averiguar que, de acordo com o discurso predominante entre os sujeitos, antes de iniciarem a licenciatura, o tema “provas e demonstrações” não recebeu um tratamento julgado adequado, o que parece equivaler à afirmação de que, na trajetória escolar dos sujeitos, estes recursos foram ao menos subutilizados – e isto inclui a própria licenciatura. Deve-se observar, também, na fala de Aluno 4, a expressão “parte mais abstrata” da matemática: nesta visão, há uma classificação subjacente, de acordo com a qual resoluções e exemplos desenvolvidos algoritmicamente seriam, talvez, pertencentes à parte “concreta”, enquanto as demonstrações não, o que justificaria certo abandono deste recurso. Neste sentido, seria como se as demonstrações tivessem menos utilidade ou que seriam afeitas apenas a usos que não dizem respeito ao contexto escolar. De toda forma, este tema ainda se constitui como uma barreira para os futuros professores, pois, segundo retratado, nas disciplinas “especificas”, em que era esperado haver mais rigor quanto ao uso das demonstrações, parece que isto não ocorreu: pelo contrário, os sujeitos relatam abordagens superficiais. Isso fica mais claro quando o aluno afirma que, para ele, tratar de demonstrações em sala seria o mesmo que tratar de um conteúdo matemático a partir de casos e exemplos específicos.

Pela análise da Atividade 4, conclui-se que alguns dos sujeitos apresentam limitações ligadas aos elementos relativos ao teorema de Tales e conteúdos correlatos (razões proporcionais, semelhança de triângulos, por exemplo), visto que não apresentam mais do que três razões proporcionais. Mais objetivamente, as razões apresentadas pelos alunos se referem aos que se assinalou neste trabalho como “proporção III” e suas variantes entre os segmentos, com exceção de Aluno 2 que acrescentou as razões existentes nas proporções III, IV e V. De toda forma, as razões entre os demais segmentos, abordadas nas proporções I e II, não foram indicadas. Estas abordagens por assim dizer limitadas podem indicar, justamente, que a ausência de um tratamento mais aprofundado sobre estes temas causa algumas lacunas formativas na trajetória dos futuros professores.

Essa percepção de falta de conhecimento especifico dos alunos ganha mais força com a análise dos demais itens da atividade e com os questionamentos feitos a eles sobre o que pensam sobre demonstrações, uma vez que fica claro que este tema pode não fazer parte ainda do arcabouço de conhecimentos matemáticos dos alunos. De modo contrário, autores como Balacheff (1982) e De Villiers (2002) indicam que são as demonstrações importantes formas de comunicar e de constituir mesmo o conhecimento matemático. Evidentemente, em âmbito escolar, algumas instâncias de transposição didática podem ser consideradas na construção de demonstrações, como indica Chevallard (1991). De forma mais específica, este autor menciona a textualização do saber, que seria, na interpretação de Oliveira (2009), a “versão para uma forma pertinente ao trabalho educacional de certos conteúdos de saber, assim vistos como as noções matemáticas que se pretende construir em âmbito escolar, o que é feito mediante certas regras que visam estruturar o contorno didático da proposta” (p. 213). Deste ponto de vista, uma estratégia formativa que considere o uso de demonstração no processo de construção do conhecimento matemático seria essencial no âmbito da formação inicial de professores.

Quando, de outro modo, se pensa nos conceitos do TPACK, como mencionados por Mirsha e Kohler (2006), seria difícil conceber que a consolidação de aspectos relativos ao conteúdo – matemático, no caso – possam prescindir do saber relativo às formas típicas de comprovação dos resultados e do trabalho mesmo com os temas e objetos matemáticos. No âmbito do mesmo *framework*, no que se refere ao conhecimento tecnológico, neste ponto, os alunos demonstraram ter adquirido maior autonomia e fluência em relação ao software Geogebra, superando a necessidade de intervenções pontuais do pesquisador em suas tarefas e construindo uma lógica que relaciona o trabalho em termos matemáticos com as ferramentas mais adequadas, ainda que persistam algumas falhas em certos pontos, como quando deixam de usar os aspectos dinâmicos da interface em conjunto, por exemplo, com ferramentas de medida de segmentos para refutar conjecturas inválidas. Este reparo, no entanto, não se aplica a Aluno 2, que, nessa atividade, empregou os instrumentos fornecidos pelo Geogebra a fim de testar as razões que levantou e constatar que eram proporcionais, o que pode constituir, como elucida Oliveira (2013), a gênese do que o autor chama de *apropriação da lógica da interface* para avançar até *pensar com tecnologias*.

3.5.5 – Análise da Atividade 5

Analisando as resoluções dos alunos na Atividade 5, esperava-se que os mesmos pudessem se valer dos conhecimentos que mobilizaram sobre o teorema de Tales para identificar a medida de um segmento $\overline{BD}$, gerado pela intersecção da semirreta bissetriz de BÂC, além de apresentarem uma prova matemática que embasasse as soluções que eventualmente proporiam, tendo, como possibilidade de uso, as ferramentas do software Geogebra. Portanto, com essa atividade, esperava-se propor que os conhecimentos típicos para o processo de ensino de temas de geometria plana surgissem, bem como eventuais interações com a fluência e a integração das tecnologias com o pensar e o fazer dos futuros professores, como propugnam Oliveira (2013) e Mirsha e Kohler (2006).

Como suporte para análise da atividade, segue a tabela 5

Tabela 5 - Tabela de Análise da Atividade 5

	Tentou resolver o item *a*	Apresentou algum tipo de justificativa no item *b*	Apresentou algum tipo de justificativa no item *c*
Aluno 1	**X**	√	√
Aluno 2	**X**	**X**	**X**
Aluno 3	√	**X**	**X**
Aluno 4	**X**	√	**X**
Aluno 5	**X**	√	**X**
Aluno 6	**X**	**X**	**X**
Aluno 7	**X**	**X**	**X**

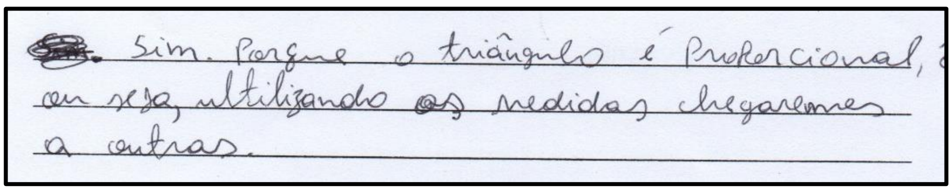
Aluno 9	X	√	X

Fonte: dados da pesquisa

Pela tabela, parece claro que os futuros professores vivenciaram percalços na resolução desta atividade. Isso pode estar ligado com as ocorrências observadas nas atividades anteriores, que apontavam alguma precariedade nos conhecimentos matemáticos necessários.

No item *a*, apenas o aluno 3 tentou resolver o que era solicitado, de acordo com o que assinalou e que pode ser lido na figura 60.

Figura 60 – Protocolo do aluno 3 – Atividade 5 – item *a*

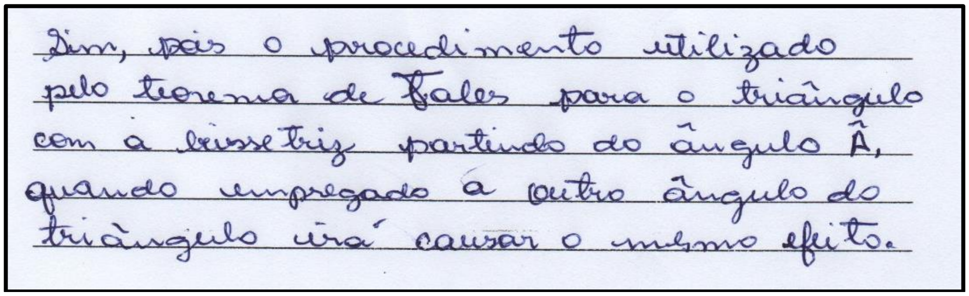

Sim. Porque o triângulo é Proporcional, ou seja, ultilizando as medidas chegaremos a outras.

Fonte: dados da pesquisa

Lendo a resposta do aluno 3, fica evidente que o sujeito em questão decidiu expressar que os triângulos seriam proporcionais (querendo dizer, muito provavelmente, que seriam semelhantes) devido ao fato de o enunciado solicitar a resolução por intermédio do teorema de Tales. Entretanto, o exame dos triângulos envolvidos neste item da atividade, quais sejam ABC, ADB e ACD, os dois últimos formados considerando a bissetriz do ângulo BÂC, não se verifica a alegada semelhança, a não ser quando ABC é equilátero. Esta conjectura poderia ser descartada por meio da experimentação e do dinamismo proporcionados pela interface do Geogebra, a partir do uso da ferramenta de medidas dos ângulos internos dos triângulos mencionados.

No item *b*, apenas os alunos 1, 4, 5 e 9 se propuseram a tentar responder, utilizando, entre os mesmos, argumentação bastante semelhante. Apesar de não terem realizado qualquer tentativa de resolver o item *a*, valeram-se também do enunciado da atividade para discorrer sobre uma possível resolução do item *b*. Neste sentido, os sujeitos mencionados chegaram à conclusão de que, ao traçar a bissetriz dos demais ângulos, era de se esperar que ocorressem casos equivalentes ao que ocorre com a bissetriz de BÂC.

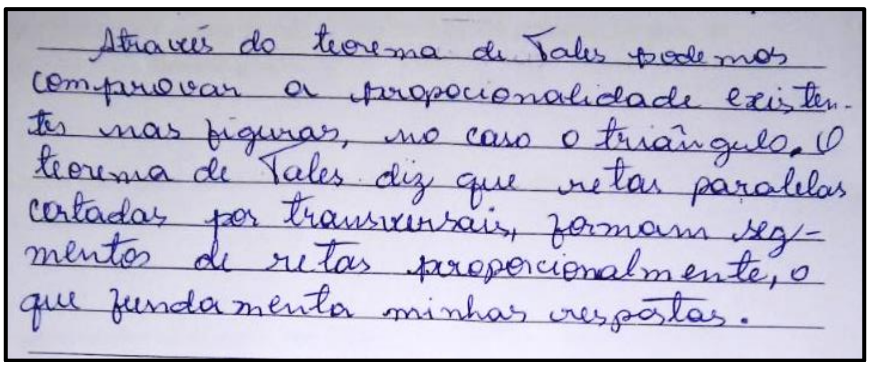
Figura 61 – Protocolo de Aluno 1 – Atividade 5 – item *b*


Sim, pois o procedimento utilizado
pelo teorema de Tales para o triângulo
com a bissetriz partindo do ângulo Â,
quando empregado a outro ângulo do
triângulo irá causar o mesmo efeito.

Fonte: dados da pesquisa

A resposta de Aluno 1 para o item *b* da Atividade 5 se limitou a praticamente reproduzir, de maneira afirmativa, o próprio enunciado (figura 61). O mesmo ocorreu em relação ao item c, o que pode ser conferido na figura 62.

Figura 62 – Protocolo de Aluno 1 – Atividade 5 – item *c*


Através do teorema de Tales podemos
comprovar a proporcionalidade existen-
tes nas figuras, no caso o triângulo. O
teorema de Tales diz que retas paralelas
cortadas por transversais, formam seg-
mentos de retas proporcionalmente, o
que fundamenta minhas respostas.

Fonte: dados da pesquisa

De fato, Aluno 1, no item *c*, fundamenta sua resposta no teorema de Tales, mas não apresenta como chegou a esta conclusão a partir do referido teorema, nem apresentou uma construção no Geogebra que pudesse, de alguma forma, evidenciar a estratégia empregada. A ausência de argumentações por assim dizer mais sólidas do ponto de vista do conhecimento matemático pode indicar que haveria a necessidade de revisitar os conceitos correlatos, de modo a compreendê-los em seus aspectos formais. Da mesma forma, ainda que tenham manipulado as construções por meio do Geogebra, não empregaram as ferramentas mais adequadas no sentido de prover *feedbacks* que permitissem reformular conjecturas e estratégias para a resolução. Resta indicar que mesmo nos casos em foram evidenciadas as medidas dos ângulos internos dos triângulos existentes nos itens da atividade, os sujeitos não relacionaram os elementos observados na interface com o conhecimento necessário nestes itens, o que evidencia tanto a relevância do conhecimento matemático no âmbito do TCK quanto a necessidade de integração deste às interfaces disponíveis.

3.5.6 – Análise da Atividade 6

De mesmo modo que a atividade 5, essa atividade teve como objetivo levantar os conhecimentos específicos dos discentes e as formas pelas quais os mesmos interagiam com o software, com a finalidade de obter respostas ou conjecturas para os itens elencados, os quais pressupunham conhecimentos relativos ao teorema de Tales. Essa atividade foi proposta primeiramente por Silva (1997) e adaptada para esta pesquisa. Há de se destacar que a Atividade 6, e, posteriormente, a Atividade 7, foram distribuídas aos alunos para que eles pudessem resolver em suas casas usando seus equipamentos ou no laboratório do campus universitário da UEPA, uma vez que o tempo concedido pela instituição para a finalização do processo de pesquisa já havia se esgotado. Uma visão geral das resoluções dos alunos pode ser conferida na tabela 6.

Tabela 6 - Tabela de Análise da Atividade 6

	Criou dois segmentos não colineares e de mesma medida	Criou dois segmentos colineares e de mesma medida	Indicou ter usado o Geogebra para resolver a atividade[3]
Aluno 1	√	X	X
Aluno 2	√	X	X
Aluno 3	X	X	X
Aluno 4	X	X	X
Aluno 5	√	X	X
Aluno 6	X	√	X
Aluno 7	√	X	X
Aluno 9	X	X	X

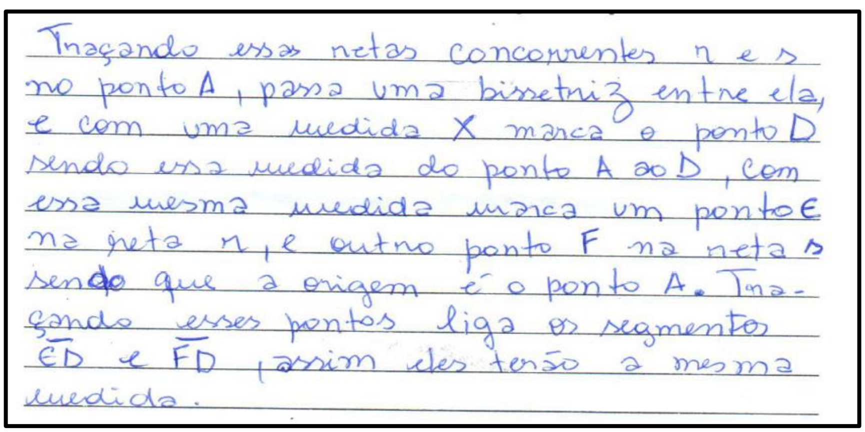
Fonte: dados da pesquisa

[3] Esta coluna indica se existiu, explicitamente, uma referência ao uso do software na resolução da atividade. Entretanto, dado o afastamento entre pesquisador e sujeitos neste ponto do trabalho, não é possível afirmar com precisão se o uso do Geogebra se deu de outra forma, como, por exemplo, para subsidiar construções em lápis e papel.

Com a possibilidade de os alunos terem mais liberdade e mais tempo livre para a conclusão dos itens desta atividade, esperava-se que eles pudessem desenvolver um trabalho mais cuidadoso, no sentido de administrarem melhor as variáveis que eventualmente impedissem um desenvolvimento mais adequado, ou seja, teriam tempo para realizarem pesquisas, consultarem outras fontes, etc. Entretanto, ainda que seja provável que o Geogebra tenha sido usado como forma de validar ou de acompanhar as construções, nenhuma pista sobre isto foi provida pelos sujeitos e as entregas foram realizadas a partir de elementos que tinham por base construções em lápis e papel.

Quanto ao método empregado, os Alunos 1, 2, 5 e 7 optaram por criar duas retas concorrentes no ponto A, determinaram a bissetriz de um dos ângulos formados pelo encontro das retas e, na semirreta da bissetriz traçada, demarcaram o ponto D. Em seguida, com a ajuda de uma régua ou compasso, transferiram a medida do segmento DA para as retas r e s, assim demarcando, nos limites das medidas transportas, os pontos E e F. Com os pontos E e F demarcados, traçaram os segmentos ED e DF, como pode ser visto na descrição contida na figura 63.

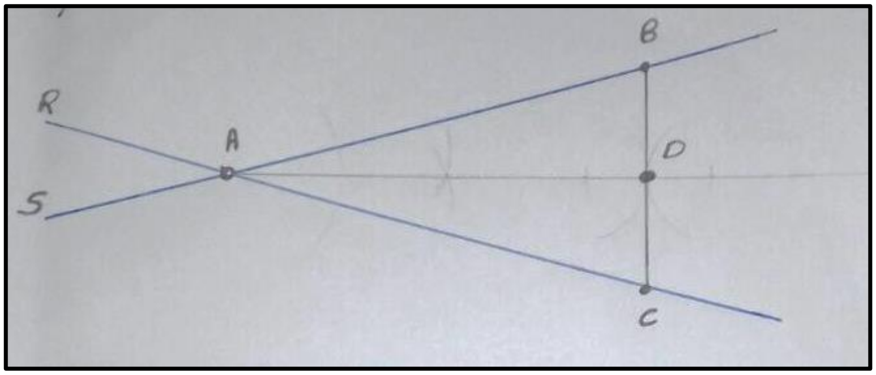
Figura 63 – Protocolo de Aluno 7 – Atividade 6


Traçando essas retas concorrentes r e s no ponto A, passa uma bissetriz entre ela, e com uma medida X marca o ponto D sendo essa medida do ponto A ao D, com essa mesma medida marca um ponto E na reta r, e outro ponto F na reta s sendo que a origem é o ponto A. Traçando esses pontos liga os segmentos $\overline{ED}$ e $\overline{FD}$, assim eles terão a mesma medida.

Fonte: dados da pesquisa

Basicamente, o que os alunos fizeram foi determinar as medidas de duas cordas de arcos que possuem ângulos de formação de mesma medida, sendo que esses ângulos de mesmas medidas foram obtidos pela bissetriz de um dos ângulos da intersecção entre as retas r e s. Contudo, o custo operacional desta solução se mostra bastante elevado, uma vez que não era necessário recorrer a todo esse processo para determinar os segmentos de mesma medida: bastava que os sujeitos determinassem uma reta perpendicular à semirreta da bissetriz determinada. Esta outra abordagem foi explorada por Aluno 6, como visto na figura 64.

Figura 64 – Protocolo do aluno 6 – Atividade 6



Fonte: dados da pesquisa

Aluno 6, após determinar com régua e compasso a bissetriz do ângulo desejado, demarcou um ponto D sobre a bissetriz e, usando o compasso, determinou um segmento perpendicular à semirreta bissetriz, demarcando os pontos B e C, construindo, desta forma, um triângulo isósceles. Assim, o ponto D equivale ao ponto médio do segmento BC.

Nessa atividade, os alunos apresentaram domínio do conteúdo geométrico necessário para criar suas respostas e expuseram seus meios na tentativa de solucionar o problema proposto. Entretanto, a atividade solicitava que eles apenas criassem um ponto D qualquer, sem mencionar que antes deveriam determinar a bissetriz de um ângulo gerado pela intersecção das retas r e s. Suas respostas envolveram estratégias no sentido de criar dois segmentos de mesma medida, mas a condição para que as respostas fossem verdadeiras está ligada a bissetriz: caso o ponto D fosse criado em qualquer outra posição que não na semirreta bissetriz, suas propostas não teriam validade. Talvez isso deva ter ocorrido pela forma com que o enunciado da atividade foi escrito, que deixa de certa forma livre a interpretação da criação do ponto D.

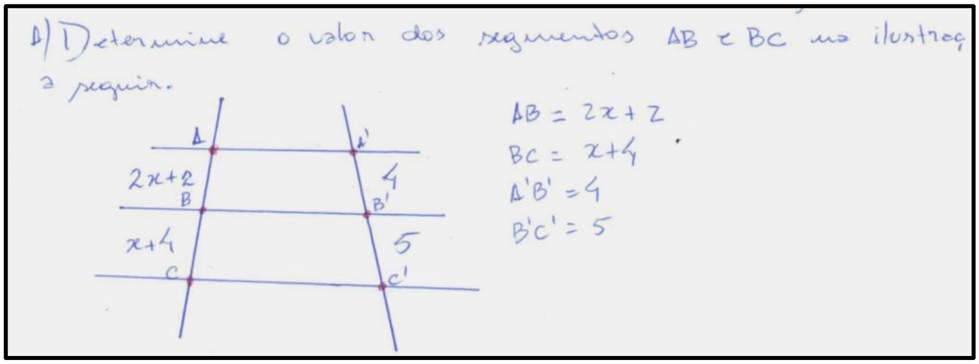
Em relação à falta de evidência de uso do software nesta atividade, algumas alternativas de interpretação estão postas, baseadas, principalmente, no quadro teórico considerado nesta pesquisa. De Santos (2012), por exemplo, surge um resultado, consolidado nas observações realizadas, de que os sujeitos ampliavam o uso crítico de tecnologias digitais à medida que ampliavam a ressignificação do conhecimento acerca do conteúdo explorado – o teorema de Tales, assim como se faz aqui. Esta busca autônoma que os sujeitos daquela pesquisa, professores em atividade, realizaram por ampliar seus saberes impactou de forma decisiva no progresso das intervenções e das estratégias consolidadas a partir da interface computacional. Aqui, esta busca parece ter ocorrido apenas a partir desta atividade, o que não permitiu averiguar as possibilidades (ou mesmo propor) a partir de intervenções com o Geogebra. Esta questão já foi tratada por Oliveira (2013), que menciona a necessidade de manter atenção sobre a relação entre o conhecimento matemático e o uso de interfaces tecnológicas. Igualmente, Mirsha e Kohler (2006) advogam que a construção da visão integrada entre estes aspectos e o didático assume um caráter processual e que se assenta sobre o objetivo de prover uma formação que, por sua vez, implique em melhores práticas docentes com uso de tecnologias. É algo que restará aqui para ser explorado em outras iniciativas investigativas.

3.5.7 – Análise da Atividade 7

Essa atividade que foi composta por questionamentos abertos, cuja proposta previa descrições, por parte dos licenciandos, da forma pela qual trabalhariam com o teorema de Tales em situações de ensino deste tema, considerando os conteúdos matemáticos que serviriam de conhecimentos prévios e os conteúdos em que o referido teorema seria usado como um dos saberes básicos para tratar outros objetos matemáticos que surgiriam futuramente na trajetória escolar de seus potenciais alunos.

Nesse sentido, inicia-se a análise pelo item *a*, que solicitava que os futuros professores elaborassem uma atividade cujas conjecturas destinadas à resolução levassem em conta o teorema de Tales. Aqui, apenas os alunos 6, 7 e 9 apresentaram propostas cuja resolução era possível com o referido teorema. Cogitava-se, aqui, que os sujeitos considerassem cenários de uso com ambientes dinâmicos de geometria, ou seja, que criassem uma atividade que permitisse aos seus alunos explorarem ferramentas e representações de objetos matemáticos, a fim de evidenciar estratégias dinâmicas de resolução. Entretanto, os três indivíduos decidiram por criar atividades muito semelhantes, nas quais se apresentam duas retas transversais seccionadas por um feixe de retas paralelas e dois segmentos gerados que possuíam uma expressão com incógnita x e outros dois segmentos com números naturais.

Figura 65 – Protocolo de Aluno 7 – Atividade 7 – item *a*

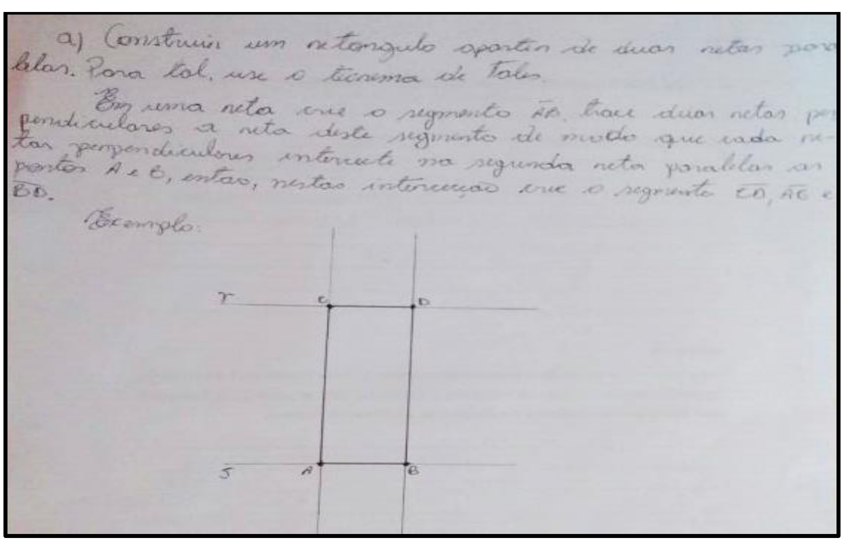


Fonte: dados da pesquisa

A forma como esta resposta foi pensada corresponde ao modelo de atividade indicado por Haruna (2002) e que consiste em apresentar o teorema de Tales por meio de uma imagem prototípica, relacionada a como o teorema é trabalhado tradicionalmente em livros didáticos e nas tarefas comuns e explicações dadas pelos professores dos alunos em processo de formação inicial para a docência em Matemática.

De forma diversa daquela proposta pelos Alunos 6, 7 e 9, os demais sujeitos não obtiveram sucesso em apresentar uma atividade que envolvesse o conteúdo matemático em questão. O que mais chama a atenção para as configurações das construções dos demais sujeitos, é a descaracterização do teorema de Tales: nas propostas encaminhadas, as retas paralelas, por exemplo, segmentam ou seccionam outras retas paralelas; além disso, os alunos apresentaram casos envolvendo retas paralelas e perpendiculares, acreditando ser esta uma característica do teorema.

Figura 66 – Protocolo de Aluno 5 – Atividade 7 – item *a*

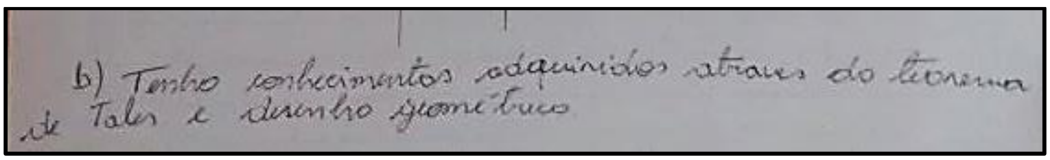


Fonte: dados da pesquisa

Na figura 66, Aluno 5 apresentou uma atividade que previa a existência de duas retas paralelas e cujo objetivo era criar um retângulo usando o teorema de Tales. Observe-se que o sujeito em questão não compreendeu que a premissa do teorema trabalhado é a de que haja ao menos duas retas concorrentes em relação às paralelas, o que, notoriamente, não se tem no exemplo explorado pelo aluno. Isso leva a que se avente a possibilidade de que o aluno tenha passado pelo ensino básico, pelas disciplinas da licenciatura e pelas oficinas dessa pesquisa sem compreender ou saber identificar ao menos os modelos figurais mais usuais sobre o teorema.

No item *b* que questionava os alunos sobre quais são os conhecimentos prévios necessários para a resolução dos problemas apresentados pelos alunos, a resposta de Aluno 5, na figura 67, também merece atenção.

Figura 67 – Protocolo de Aluno 5 – Atividade 7 – item *b*



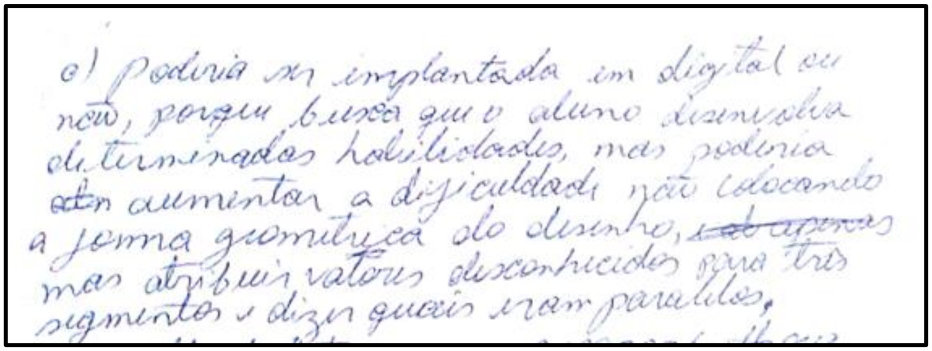
b) Tenho conhecimentos adquiridos através do teorema de Tales e desenho geométrico

Fonte: dados da pesquisa

A afirmação de Aluno 5 serve de subsídio à conjectura de que o referido sujeito sustenta concepções errôneas acerca das propriedades inerentes ao teorema de Tales. O licenciando indica que os conhecimentos necessários para a resolução da sua atividade provem do teorema de Tales e de desenho geométrico; contudo, apenas ter ciência das condições de existência de um quadrilátero retangular já é suficiente para a sua atividade, o que pode envolver alguns conhecimentos relativos ao paralelismo, à perpendicularidade e à identificação de ângulos retos – nada indica, portanto, qualquer conhecimento relacionado ao teorema de Tales. Os demais sujeitos indicaram respostas bastantes similares, abordando que o conhecimento envolvido nas resoluções era basicamente o relativo ao teorema aqui mencionado, deixando de mencionar os conhecimentos que o sustentam; a exceção nas respostas ficou por conta de Aluno 6, que acrescentou que também era necessário conhecer conceitos relativos às razões e proporções.

No item *c*, os alunos foram questionados se suas atividades poderiam ser abordadas por intermédio de tecnologias digitais ou por outras vistas como mais tradicionais, como lápis, compasso, régua e papel. Neste sentido, nas atividades elaboradas e apresentadas como respostas a este item, parece clara a predominância de uma lógica ligada aos chamados meios estáticos, como lápis e papel. Entretanto, os alunos indicam que suas propostas poderiam ser implementadas por meio de softwares e que poderiam ser transpostas para os ambientes estáticos com facilidade.

Figura 68 – Protocolo do aluno 4 – Atividade 7 – item *c*

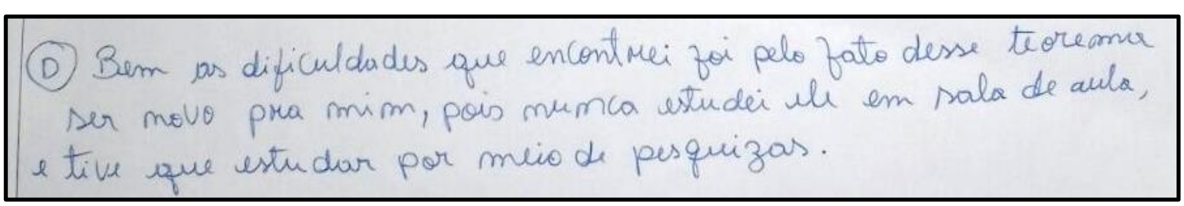

c) poderia ser implantada em digital ou não, porque busca que o aluno desenvolva determinadas habilidades, mas poderia ~~aten~~ aumentar a dificuldade não colocando a forma geométrica do desenho, ~~não apenas~~ mas atribuir valores desconhecidos para três segmentos e dizer quais eram paralelos,

Fonte: dados da pesquisa

Aluno 4 toca em um ponto importante na figura 68, pois menciona que a atividade poderia ter sua dificuldade elevada, fazendo com que, das quatro medidas de segmentos que apresentadas, três trouxessem valores desconhecidos. Em sua pesquisa, Haruna (2002) salienta que deve haver mais modelos de apresentar o teorema de Tales para os alunos, fugindo das figuras prototípicas, a fim de aumentar o leque de visualizações e abrir espaço para que os aprendizes se sintam seguros em solucionar outras atividades que envolvam mais de uma forma de tratar o conteúdo em questão. O que o Aluno 4 apresenta em seu argumento, além de não estar de acordo com esta visão, constitui uma impossibilidade, devido ao número de incógnitas proposto e a falta de dados que permita alcançar alguma resolução.

No item *d*, em que os alunos foram questionados em relação às dificuldades que poderiam encontrar ao tratarem o teorema de Tales em suas futuras aulas, poderiam surgir indicações envolvendo os aspectos matemático, didático ou tecnológico. Uma das respostas que pareceram mais significativas vem de Aluno 6, como pode ser visto na figura 69.

Figura 69 – Protocolo do aluno 6 – Atividade 7 – item *d*


D) Bem as dificuldades que encontrei foi pelo fato desse teorema ser novo pra mim, pois nunca estudei ele em sala de aula, e tive que estudar por meio de pesquizas.

Fonte: dados da pesquisa

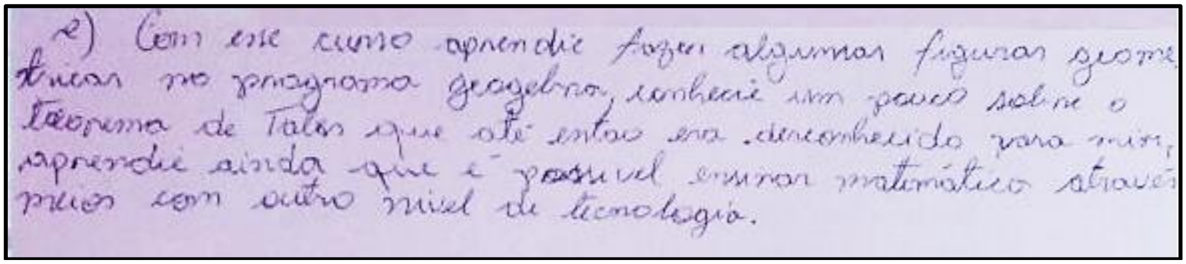
No excerto retirado das observações de Aluno 6, o mesmo declara, surpreendentemente, jamais ter estudado o teorema de Tales em sua trajetória como estudante, indicando ter recorrido a trabalho pessoal de pesquisa para amealhar o conhecimento necessário para a participação nas atividades da pesquisa. Estudar e progredir, em termos de saber, autonomamente não é algo negativo, muito pelo contrário: é importante e necessário.

Ocorre, todavia, que os currículos da escola básica e mesmo o da licenciatura em Matemática indicam o estudo e o desenvolvimento de atividades envolvendo este tema, direta ou indiretamente. O conteúdo em questão deveria ser trabalhado desde o último ciclo do ensino fundamental, com inserções pontuais no ensino médio no âmbito de estudos relativo à trigonometria, geometria plana, geometria espacial, entre outros temas; deveria, da mesma forma, na graduação pela qual passavam os sujeitos, ser trabalhado em disciplinas como Desenho Geométrico, Geometria I e Fundamentos da Matemática. É algo a se observar e um alerta, uma vez que a declaração de Aluno 6 ilustrou as declarações que foram seguidas pelos demais sujeitos.

Não se deve deixar de destacar, porém, que Aluno 6, ciente da sua condição de desconhecedor do conteúdo, tratou de pesquisar sobre o mesmo, com a finalidade de estruturar o arcabouço de conhecimentos específicos necessários para a empreitada. De acordo com Shulman (1987), é essencial que o professor desenvolva hábitos de estudo, de modo que, quando lançar mão de estratégias baseadas em seus conhecimentos didáticos, poderá encontrar bases sólidas que permitirão desenvolver um bom trabalho.

No item *e*, pediu-se que os alunos mencionassem quais conhecimentos teriam adquirido por meio da participação que tiveram nas atividades da pesquisa. Aqui, um discurso bastante dominante ocorreu em torna da possibilidade de aprender sobre o software, o que foi visto como um aprendizado poderia servir futuramente para suas carreiras. Outro ponto citado pelos alunos foi o conhecimento ligado ao teorema de Tales, uma vez que, como já mencionado, esse conteúdo era desconhecido, como pode ser expressado pela fala do aluno 5.

Figura 70 – Protocolo de Aluno 5 – Atividade 7 – item *e*

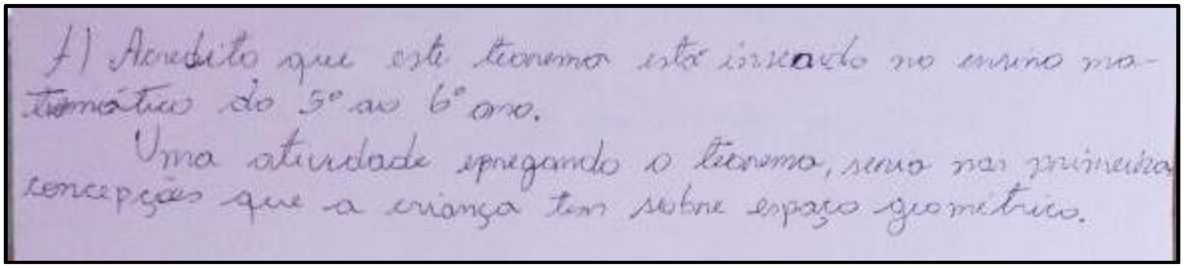

e) Com este curso aprendi fazer algumas figuras geometricas no programa geogebra, conheci um pouco sobre o teorema de Tales que até então era desconhecido para mim, aprendi ainda que é possivel ensinar matemática através meios com outro nivel de tecnologia.

Fonte: dados da pesquisa

Importante aliar esta resposta, indicada na figura 70, com algumas expectativas e trajetórias desta pesquisa. Esperava-se encontrar um elenco de sujeitos familiarizados com um conteúdo que, apesar de relevante e inserido em uma série de outros temas matemáticos, pode ser considerado elementar, em termos de conhecimento matemático, principalmente entre aqueles que se preparam para a docência. Não foi, entretanto, o que se viu. A intensiva dificuldade encontrada no que se refere ao conteúdo específico surge desvelada a partir da declaração dos próprios sujeitos. É muito improvável que os mesmos não tenham se deparado com o ensino deste tema nas respectivas trajetórias escolares, mas é pode ser que tenham recebido, neste sentido, abordagens predominantemente algorítmicas, como mencionam Sirotic e Zazkis (2007), o que dificultou sobremaneira a construção de significados e mesmo a manutenção a médio e longo prazo de registros cognitivos sobre o tema. Assim, a par de um desenvolvimento até promissor de fluência sobre aspectos operacionais do Geogebra, foram raros os momentos em que se pode observar o avanço para uma fluência integrada com os conhecimentos matemáticos e mais ainda em relação ao movimento chamado por Oliveira (2013) de "pensar com a interface". O próprio autor pode auxiliar neste ponto, quando indica que uma construção cognitiva mais avançada, partindo da fluência até a elaboração de estratégias com o uso de tecnologias está fortemente vinculada com outra fluência, de caráter teórico-epistemológico, e que se apoia sobre o conhecimento dos objetos matemáticos em foco. Não se encontrou coisa diferente no cenário ora analisado: com limitações evidentes em relação ao saber de referência, os sujeitos avançaram também de forma limitada em uma proposta na qual as tecnologias surgiam como integradoras, justamente, em relação aos conhecimentos que deveriam existir.

Sobre o item *f*, no qual os sujeitos deveriam responder a que outros conhecimentos matemáticos o teorema de Tales poderia ser relacionado, a principal menção foi "semelhança de triângulos", talvez porque este tenha sido o tema cujas correlações ocorreram ao longo das atividades de forma mais intensiva. De outro ponto de vista, a resposta de Aluno 5 merece alguma atenção, como uma forma de ilustrar alguns equívocos nas concepções acerca do posicionamento curricular do teorema de Tales, algo que, igualmente, foi tratado por Shulman (1986; 1987) em seus trabalhos (figura 71).

Figura 71 – Protocolo de Aluno 5 – Atividade 7 - item *f*


f) Acredito que este teorema está inserido no ensino matemático do 5º ao 6º ano.
Uma atividade empregando o teorema, seria nas primeiras concepções que a criança tem sobre espaço geométrico.

Fonte: dados da pesquisa

Aluno 5 menciona que o teorema deveria estar inserido no 5º ou 6º ano do ensino fundamental; entretanto, semelhante conteúdo é apresentado nos PCNs (BRASIL, 1998) como aconselhável para o 8º e 9º ano do fundamental – nos anos mencionados pelo aluno, os documentos citados aconselham que sejam iniciados os conceitos geométricos com linguajar mais apropriado, apresentando aos alunos os significados e conceitos à perpendicularidade e paralelismo; também indicam a possibilidade de trabalhar com os discentes a classificação de triângulos. Este desconhecimento acerca de elementos essenciais dos currículos de matemática indicam que a defasagem acerca de saberes que envolvem o uso do teorema de Tales em contextos de ensino também podem interferir na integração dos elementos como proposto por Mirsha e Kohler (2006), pois se relaciona ao cabedal de conhecimentos pedagógicos, sem os quais ficam prejudicadas as estratégias de construção propostas para a aprendizagem dos alunos, inclusive quando se valem de tecnologias digitais.

Considerações Finais

A pesquisa acadêmica não é feita por caminhos prontos. É composta, pelo contrário, de realidades que, se podem ser previstas e planejadas, quanto aos desenhos metodológicos e às trajetórias, não podem ser engessadas pela garantia de que algo ocorrerá da forma como alguém gostaria. E o que se gostaria de ver aqui? Exatamente o que se viu: um relato baseado nas construções, ressignificações, percalços, equívocos, descrições e realizações, individuais e coletivas, de um grupo de potenciais professores em formação inicial, em um momento de suas jornadas no qual realizavam as últimas etapas da licenciatura em Matemática em uma universidade estadual do Pará.

A questão de pesquisa, já evidenciada em alguns pontos deste trabalho, versava sobre as possibilidades de percepção acerca da integração entre os conhecimentos tecnológico, específico do conteúdo e pedagógico (ou didático, como parece mais apropriado) de um grupo de estudantes de licenciatura em Matemática que se envolveram em sessões nas quais haviam atividades a realizar com o uso de tecnologias digitais – o software Geogebra, mais especificamente.

Desde o primeiro momento, quando do planejamento – flexível, de fato – dos encontros e interações que surgiriam ao longo das atividades que aqui foram descritas, já se levava em conta a importância do conhecimento matemático, representado principalmente pelos elementos relativos ao teorema de Tales, sobre os quais se esperava considerável grau de domínio por parte dos sujeitos. A integração dos três tipos de conhecimento destacados por Mirsha e Kohler (2006) tinham por baliza as asserções de Oliveira (2013), que destacava que a apropriação do saber matemático seria essencial para que pudessem os estudantes avançar a partir de um domínio meramente operacional das interfaces para construções integradas e integradoras, no sentido de pensar em conjunto com as tecnologias, para depois evidenciar a possibilidade de estruturação de temas e estratégias didáticas que incentivassem potenciais usuários a aprender por meio da busca, da investigação e da resolução de problemas. O que se observaria, de acordo com o que se pensou inicialmente, estaria relacionado, intensivamente, à reorganização do pensamento com uso de mídias, como reivindicado por Tikhomirov (1981) e desenvolvido de forma esclarecedora por Borba e Villarreal (2005). O fato é que, de certa forma, tudo isto aconteceu, mas em um grau, por assim dizer, bastante menos intensivo do que se poderia supor. Em grande parte, quer-se crer, em função de inseguranças e pouca intimidade dos sujeitos em relação ao conteúdo matemático destacado na pesquisa. De outro modo, talvez fosse possível obter outra categoria de resultados caso se resolvesse dizer, expressamente, aos sujeitos o que se esperava deles, como deveriam usar o software, de que forma deveriam encarar o aspecto didático das atividades, enfim, direcioná-los completamente, mas esta não foi a forma como a investigação foi concebida. Ainda que correndo o risco das limitações que, quer-se crer, são típicas de qualquer estudo, a ideia foi preservar a autonomia, que possibilitaria observar um quadro mais realista do processo de formação inicial vivenciado pelos sujeitos.

Isto porque o conhecimento de referência, como já advogava Oliveira (2013), é essencial para a *interpretação* do que acontece quando do uso de recursos de visualização, dinamismo e experimentação providos pela interface computacional. Diante da falta de maiores alicerces em relação ao teorema de Tales e temas correlatos, a aquisição de fluência acerca dos instrumentos utilizados restou prejudicada, no sentido de não avançar para o aspecto de integração – ou fazê-lo muito timidamente. Deve-se dizer, todavia, que a manipulação das construções efetivadas durante as atividades provocou reflexões importantes, o que levou alguns dos sujeitos (como Aluno 6, por exemplo) a reformular conjecturas e obter acertos relevantes em suas argumentações. Aqui, parece haver subsídios para reforçar a afirmação de que a fluência na interface digital pode apoiar o desenvolvimento de outra fluência, de natureza matemática, ou seja, levar o sujeito a pensar acerca das propriedades que estão em jogo quando os elementos da construção são movimentados, o que pode subsidiar de forma consistente suas conjecturas e o avanço em relação às respostas esperadas. É certo, também, que este processo não se mostra imediato ou automático: uma vivência mais intensiva em relação ao uso dos instrumentos e, consequentemente, uma atitude de busca por ampliar os conhecimentos matemáticos se fazem necessárias.

Neste sentido, os sujeitos, ao afirmarem jamais terem sido apresentados àquele conteúdo, indicaram o esforço em torno de pesquisas para, assim, conhece-lo de algum modo que permitisse a construção de propostas para as atividades. Aqui, a ressignificação acerca do tema que poderia ser esperada transforma-se em construção de conhecimento! Uma perspectiva diferente, inusitada e que leva as interações a outro patamar. Como já se afirmou nas análises, é provável que os estudantes tenham, sim, passado por processos de aprendizagem que envolviam o teorema de Tales em vários momentos de suas trajetórias como aprendizes. O que os levou, então, a afirmar que este conhecimento era inédito? Algumas pistas são fornecidas por Sirotic e Zazkis (2007), quando mencionam a forma como entendem alguns pressupostos acerca da natureza do conhecimento matemático, classificável, segundo as autoras, a partir das dimensões formal, algorítmica e intuitiva. A dimensão algorítmica se filia às formas de fazer e de evidenciar certos métodos de resolução de aplicações e exercícios sobre algum tema em estudo. Como indica o próprio nome, diz respeito ao desenvolvimento de algoritmos, os quais, por definição, representam uma sequência lógica e programada de passos destinados à resolução de uma questão ou problema. Como se refere a fórmulas e jeitos de resolver exercícios, esta dimensão privilegia um fazer que, adotado isoladamente, cria obstáculos à obtenção de um saber consolidado sobre o tema, pois é concentrado em formas típicas – Haruna (2000), por exemplo, chama de "prototípicas" as representações de certas aplicações escolares do teorema de Tales, muito pouco propensas à promoção de avanços e compreensões mais aprofundadas. A investigação aqui envidada parece mostrar que os sujeitos da pesquisa estiveram de certa forma restritos a esta dimensão, pelo menos no que se refere ao conteúdo em análise. Quando em contato com apresentações distintas das prototípicas, a recuperação dos conhecimentos e sua ressignificação constituiu um desafio de difícil consecução, limitando, por consequência, a integração com as outras dimensões do conhecimento. Um exemplo disto pode ser visto quando um dos sujeitos, Aluno 5, indicou que este conteúdo deveria ser usado para a introdução dos estudos em geometria plana para alunos de quintos e sextos anos do ensino fundamental, o que é totalmente inadequado.

Desta forma, o recurso à dimensão intuitiva, importante, aliás como a algorítmica também o é, em integração com os demais aspectos, surge como recurso para a exploração de territórios desconhecidos ou inóspitos do conhecimento. A intuição, tão relevante como um dos componentes na pesquisa e investigação para a formação de conjecturas, corre o risco de resvalar para o terreno da crença, que se mostra muitas vezes, além de descabida, resistente à mudança. Convidado a compor uma atividade sobre o tema em estudo, um dos licenciandos julgou ser possível construir um retângulo a partir do teorema de Tales, o que é bastante ilógico, mas muito significativo, ao mostrar quão reais são as inadequações das formas pelas quais os conhecimentos foram obtidos e como são, eventualmente, recuperados em um contexto que simula uma situação de ensino.

Outro ponto a se destacar surge quando se observa o papel das demonstrações ao longo das atividades, pensadas como forma de, justamente, explorar o aspecto formal do conhecimento. Aqui, claramente, percebem-se as limitações que surgiram e que circunscreveram os aportes dos sujeitos aos níveis iniciais de prova elencados por Balacheff (1987) e por De Villiers (2002), indicando, também, na maioria das vezes, que foi possível perceber apenas a dimensão explicativa nas observações providas pelos sujeitos. É importante ressaltar, também, que nos questionamentos criados para atividade 4, ligados às demonstrações na vida escolar e acadêmica dos graduandos, os mesmos relataram que este tema não foi tratado quando de suas trajetórias, tanto na escola básica quanto no curso de licenciatura, o que, de certa forma, demanda preocupações, visto que o trabalho com provas e demonstrações é essencial para o professor de matemática, uma vez que este conhecimento permite a exploração das estruturas matemáticas conjecturadas para a comunicação ou resolução de um problema, valendo-se de linguagem matemática apropriada.

De qualquer forma, percebe-se, a partir dos resultados desta investigação, que se torna possível elencar algumas recomendações, que poderiam ser aplicáveis nos processos de formação inicial e continuada de professores de matemática:

- Promoção de processos de aprendizagem que destaquem o papel construtivo do saber formal sobre os conteúdos matemáticos, o que equivaleria a explorar de forma mais consistente o trabalho com demonstrações, de modo a superar a lógica de emprego deste recurso ligado ao rigor da disciplina para além dos aspectos indicados por Ordem (2015);
- Integração das disciplinas típicas do conteúdo como aquelas relacionadas à prática de ensino e/ou à didática, de modo que possam os estudantes percebam e compreendam a conexão entre temas e conteúdos matemáticos, bem como as estratégias didáticas que permitam explorá-los de forma consistente e adequada;
- Incentivo ao uso de tecnologias digitais nos processos de formação de forma integrada com o desenvolvimento e construção de conhecimentos relativos aos conteúdos matemáticos e à didática, de modo que as tecnologias representem papeis no sentido de reorganizar o pensamento dos futuros professores e envolve-los em processos de investigação e descoberta por meio de atividades significativas, que possam superar as propostas formatadas e repetitivas.

Em outra abordagem destas considerações, não se pode deixar de indicar alguns elementos apurados em relação à trajetória de dos sujeitos, de modo a reforçar a percepção de um panorama sobre o que viram, fizeram e ganharam com a experiência, em que pese, evidentemente todos os percalços já destacados ao longo das análises. Não se trata, evidentemente, de um inventário individualizado, mas do levantamento de algumas evidências, levando em conta que o relato detalhado já foi provido nas análises.

Aluno 1 apresentou muitos progressos em relação ao uso do Geogebra, excedendo de alguma forma a mera exploração operacional do software, o que parece ter ficado mais claro na atividade 3, na qual o sujeito descreve como usou a interface disponível para a apresentação de suas propostas

Em relação à Aluno 2, ainda que o mesmo não tenha, por exemplo, identificado que o triângulo inscrito na semicircunferência possuía um ângulo reto e de apresentar severas restrições em relação ao próprio conhecimento matemático, principalmente em seu aspecto formal, foi o aluno que demonstrou proporcionalmente maior evolução, pois, como expressado anteriormente, no início das atividades, apresentava conhecimentos matemáticos que ele mesmo classificava como insuficientes para resolução das atividades; entretanto, ao longo da iniciativa, exibiu progresso significativo, o que pode, por exemplo, ser constatado principalmente nas atividade 4, na qual empregou o Geogebra como um dos elementos para testar suas conjecturas acerca das razões proporcionais.

Aluno 4 foi, dentre os sujeitos, o que apresentou maior estabilidade na consecução das atividades, não apresentado grandes equívocos matemáticos; por exemplo, nas atividades da primeira sessão, conseguiu identificar que um triângulo inscrito na semicircunferência possui ângulo reto; na atividade 2 também conseguiu identificar, ainda que sem maiores aprofundamentos, algumas das propriedades relativas às proposições 36 e 37 contidas em “Os Elementos”. De forma geral, empregou a interface de forma consistente para apoiar suas conjecturas e constatar, por exemplo, as razões proporcionais nas atividades correspondentes. Ainda assim, suas tentativas de demonstração não ultrapassaram aquelas feitas pelos colegas que apresentavam maiores fragilidades acerca do conteúdo em estudo. Vale destacar, também, sua contribuição em relação aos três últimos itens da Atividade 4, relativo às suas visões acerca das demonstrações. Seu discurso, neste caso, confirma o levantamento feito por Ordem (2015) em seu trabalho, à medida que indica que as mesmas são vistas de forma difusa por professores e estudantes da escola básica e que serviria apenas como “exercício” para os matemáticos.

Aluno 6 evidenciou algumas conquistas significativas relacionadas aos aspectos mais amplos da *fluência* em relação ao software, o que lhe permitiu demonstrar alguma desenvoltura no uso do Geogebra para apoiar suas conjecturas. Foi um dos que mais se aproximou da proposta, indicada por Oliveira (2013), de *pensar com as tecnologias.* Em relação às suas construções, usou largamente a possibilidade de movimentação, disponibilizada pelo dinamismo, na expectativa de obter algum subsídio para solucionar os questionamentos das atividades.

Nas atividades dos alunos, um ponto em comum pareceu ocorrer em relação aos equívocos conceituais ocorridos, principalmente aqueles ligados ao conhecimento geométrico necessário para o trabalho didático das atividades. Nesse quesito, é importante destacar o posicionamento de Mishra e Koehler (2006), quando os autores explanam que o modelo TPACK possui uma complexidade no que tange a integração; assim, uma compreensão insuficiente de pelo menos um dos conhecimentos componentes pode surtir efeitos negativos na aproximação e correlação esperada entre os mesmos. Diante desse cenário, cabe ressaltar que a formação inicial de professores deveria promover situações que solicitassem a construção deste tipo de integração, no lugar de promover abordagens isoladas e fragmentadas.

Em relação às propostas lançadas por este estudo, o que se espera é que o mesmo tenha indicado a importância da promoção de dinâmicas mais produtivas nos processos de formação inicial de docentes de matemática, envolvendo o valor dos aspectos de integração presentes, por exemplo, na propostas do TPACK, defendida por Mirsha e Kohler (2006), na relação entre o conhecimento matemático e a fluência em interfaces digitais, com a consequente possibilidade de construção de estratégias didáticas, como indicado por Oliveira (2013), e na exploração da demonstração como forma de promover maior solidez em relação aos conhecimentos matemáticos que precisam ser desenvolvidos pelo professor em formação. Sem dúvida, a partir destas asserções, outros estudos podem – e devem – se seguir, completando e dando outros rumos às considerações aqui levantadas.

Referências Bibliográficas:

ALMOULOUD, S. A. A geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje? In: VII Encontro Paulista de Educação matemática, 2004, São Paulo. VII EPEM -Resumos. São Paulo: SBEM-São Paulo, 2004

BALACHEFF, N. Didactjque et Intelligence Artificielle. Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage - Éditions, v. 14, n.1.2., 1994a.

BALACHEFF, N. La transposition informatique. Note sur un nouveau probleme pour la didactique. Vingt ans de didactique des mathématiques en France. RDM, La Pensée Sauvage Editions, 1994b.

BONGIOVANNI, V. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. In: REVEMAT – Revista eletrônica de educação matemática. V 2.5, p. 94-106. UFSC, 2007.

BORBA, M. C. Educação Matemática à distância: balanço e perspectivas. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011. Anais. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/xiiiciaem-edmatonlinebalepersp.pdf>. Acesso em 20 mar. 2016.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. USA: Springer, 2005.

BOYER, C. B. História da Matemática. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BROUSSEAU. Promenade avec THALES, entre la Maternelle et l'Université. Article publié dans in « Autour de Thalès ». pp. 87 -124. Commission Inter-IREM Premier Cycle (Bulletin InterIREM). 1995

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Penseé Sauvage, 1991.

CYRINO, H. F. F. Matemática e gregos. Campinas, SP. Editora Átomo, 2006.

DE VILLIERS, M.. Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica. Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, 2002, Visue, Portugal. Actas (CD-ROM) Visue: Associação de Professores de Matemática, 2002.

DOCCI; MAESTRI. Storia del rilevamento architettonico e urbano, Roma, Bari 1993.

DUVAL, R. Sémiosis et Pensée Humaine: Registros sémiotiques et apprentissages intellectuels. Paris: Peter Lang S. A. 1995.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

FROTA, Maria Clara R.; BORGES, Oto N. Perfis de Entendimento sobre o Uso de Tecnologias na Educação Matemática. In: encontro da associação nacional de pós-graduação e pesquisa em educação, Caxambu, MG, 2004.

GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação. Anais... Belo Horizonte, 1996.

GUEDJ, D. O Teorema do Papagaio – Tradução Eduardo Brandão. – São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

HARUNA, N. C. A. Teorema de Thales: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC. 2000.

KENSKI, V M. *Educação e Tecnologias*: o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência*: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34. 1993.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, ano III, nº 4, p. 3–13, 1º semestre 1995.

MARCELINO, Silvio de Brito. *Adquirir fluência e pensar matemático com tecnologias*: uma abordagem com o superlogo. 2014. 110f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

MAUÉS, O. C.. A Agenda da OCDE para a Educação.. A formação do professor. In: Dirce Maria Falcone Garcia e Sálua Cecilia. (Org.). Formação e Profissão Docente em Tempos Digitais. Campinas: Alínea, 2009, v. 1, p. 1-220.

MISHRA, P; KOEHLER, M. J.. What happens when teachers design educational technology? The development of Technological Pedagogical Content Knowledge. Journal of Educational Computing Research. 32(2), 131-152. 2005.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. Teachers College Record 108 (6), 1017-1054. 2006.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. What is technological pedagogical content knowledge? In: Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9(1), 60-70. 2009

OCDE. La qualité du personnel enseignant. 2004.

OCDE. Le rôle crucial des enseignants. Attirer, former et retenir des enseignants de qualité, 2005.

OLIVEIRA, G. P. *Avaliação em cursos online colaborativos:* uma abordagem multidimensional. Tese de doutorado: Educação. São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. 2007.

OLIVEIRA, G. P. Transposição didática: aportes teóricos e novas propostas. In: Geraldina Porto Witter; Ricardo Fujiwara. (Org.). Ensino de ciências e matemática: análise de problemas: 2009.

OLIVEIRA, G. P.. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com uso do superlogo e do Geogebra. VII Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, Montevidel. 2013.

OLIVEIRA, G. P.; GONÇALVES, M. D; MARQUETTI, C. Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em Educação Matemática. Educação Matemática Pesquisa v. 17, n.3, p. 472-489, 2015.

OLIVEIRA, G. P.; MARCELINO, S. B. Adquirir fluência e pensar com tecnologias em Educação Matemática: uma proposta com o software Superlogo. Educação Matemática Pesquisa v. 17, n. 4, p. 816-842, 2015.

OLIVEIRA, G. P. Fluência no uso de tecnologias digitais: uma investigação com professores de matemática do ensino básico. In: 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, 2015, Faro. Proceedings of 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching. Faro: Universidade do Algarve, 2015. v. 1. p. 683-692.

ORDEM, J. Prova e demonstração em Geometria Plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique. Tese de doutorado apresentado ao PEPG de Educação matemática da Pontifícia Universidade de São Paulo, 341f, São Paulo, 2015.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Zetetiké, Campinas, Ano 1, n. 1, p. 7-17, março. 1993.

PAVANELLO, R. M. Por que Ensinar/aprender Geometria? In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004.

PAVANELLO, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Revista Zetetiké, ano 1, n. 1, p. 7-17. UNICAMP, 1993.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. Teorema de Thales: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de matemática. 2005. 133f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Universidade do Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PONTE, J P. da; CANAVARRO, A. P. Matemática e Novas Tecnologias. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

RICHIT, A. Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – IGCE, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ROQUE, T. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Rio de Janeiro, Zahar. 2012.

SAITO, F.; DIAS, M. da S. Articulação de Entes Matemáticos na Construção e Utilização de Instrumentos de Medida do Século XVI. 1. ed. Aracaju: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011. v. 1. 63p.

SANTOS, R. P. As dificuldades e possibilidades de professores de matemática ao utilizarem o software Geogebra em atividades que envolvem o teorema de Tales. 2010. 141f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 1987, p. 1-22.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 1986. p. 4-14.

SILVA, M. C. L. Teorema de Tales: Uma Engenharia Didática Utilizando o Cabri-Geometre. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. Pontifícia universidade de São Paulo. São Paulo. 1997.

SILVA, M. C. L. Teorema de Tales: Uma Engenharia Didática Utilizando o CABRI-GEOMETRE. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. São Paulo: PUC. 1997.

STRATHERN, P. Pitágoras e seu teorema em 90 minutos. Tradução Marcus Penchel; consultaria Carla Fonseca-Barbatti – Rio de Janeiro: Jorge Zahar E., 1998.

TARTAGLIA, N. La nova scientia de Nicolo Tartaglia: con una gionta al terzo libro. 1558.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computarization, in: The Concept of Activity in Soviet Psychology, J. V. Wertsch, ed., M.E. Sharpe Inc., New York, pp. 256-278, 1981.

ZULATTO, R. B. A. Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas. 2002. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

APÊNDICE I

PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS GRADUADOS EM ED. MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CONHECENDO O SOFTWARE GEOGEBRA

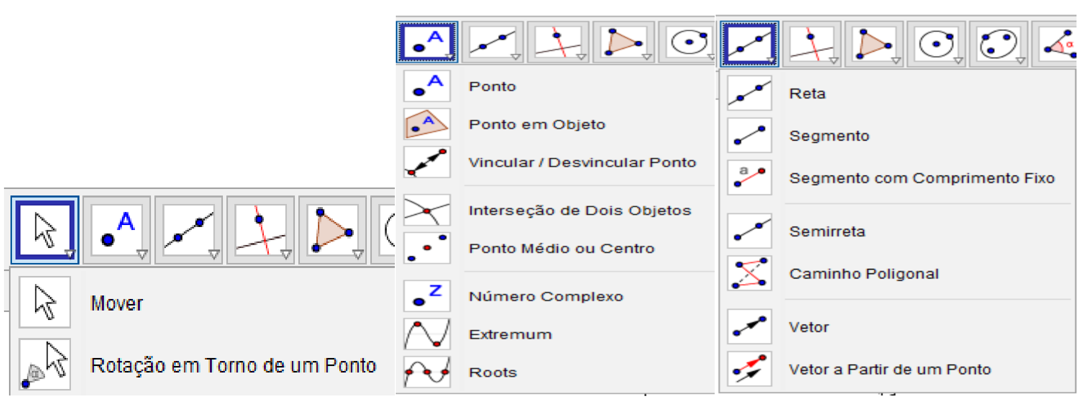
Vamos abrir e conhecer a tela do Geogebra. A versão com a qual trabalharemos é a versão 5.0 para sistema operacional Windows e seu download pode ser feito em www.geogebra.org.

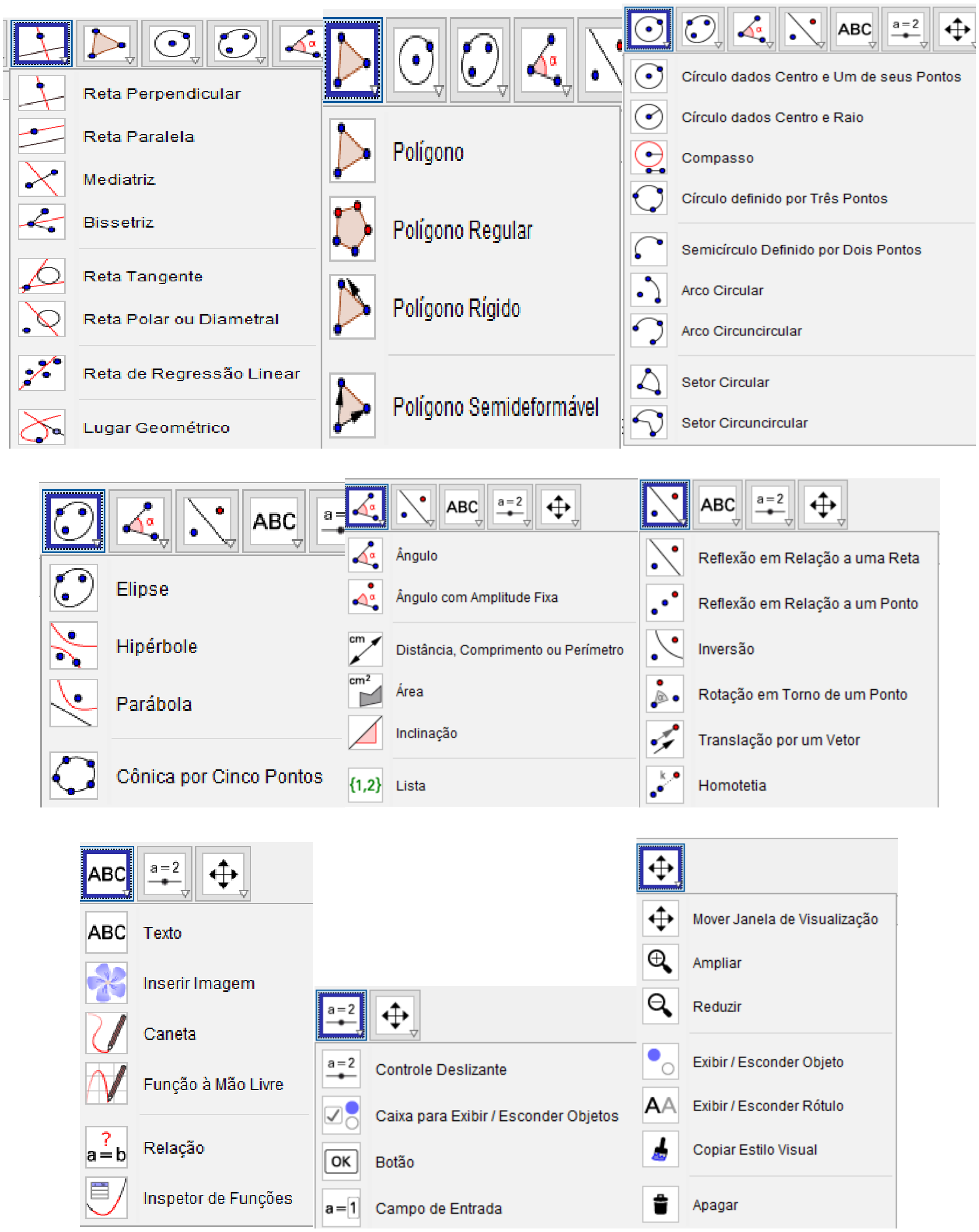
A interface do software é autoexplicativa, contendo uma janela de visualização geométrica, em que podemos interagir com as construções geométricas nela criadas. Nessa mesma janela, está o sistema de eixos cartesianos, que pode ser ocultado, se for o caso. Ao posicionar o cursor do mouse sobre um dos ícones da *"Barra de Ferramentas"* (figura 1), será exibida a função da ferramenta que se está prestes a selecionar.

Figura 1 – Barra de Ferramentas

Cada ícone possui uma pequena seta no canto direito inferior. Clicando neste local, será aberto outro menu com mais ferramentas que também exibem suas funções ao posicionar o cursor sobre elas (figura 2).

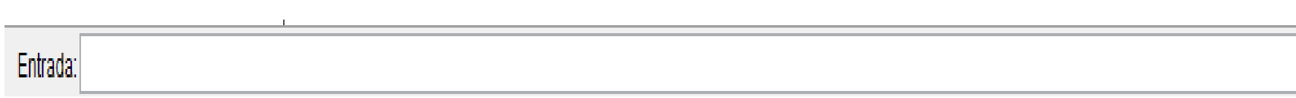
Figura 2 – Menus do Geogebra





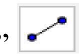
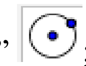
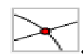
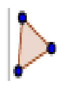
Na parte inferior da janela, é exibido o "Campo de Entrada", onde é possível digitar equações, funções, expressões e comandos específicos do software (figura 3).

Figura 3 – Campo de Entrada



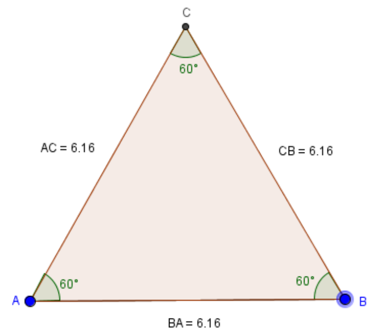
ATIVIDADES DE APROPRIAÇÃO

Criando um Triângulo Equilátero;

- Crie um segmento $\overline{AB}$ utilizando a ferramenta “Segmento” ;
- Selecione a ferramenta “Círculo Dados Centro e um de seus Pontos” ;
- Clique sobre o Ponto A e em seguida sobre o Ponto B;
- Agora utilizando a mesma ferramenta, clique sobre o Ponto B e em seguida sobre o Ponto A;
- Utilizando a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , clique sobre o perímetro dos dois círculos criados, criando dois pontos de intersecção C e D.
- Utilizando a ferramenta “Polígono” , clique nos pontos A, B, C e A novamente (deve-se clicar no primeiro ponto novamente, para definir quantos lados o polígono possuirá);
- Clique com o botão direito do mouse em um dos Círculos criados para ocultá-lo, desmarcando a opção “Exibir Objeto” . Faça o mesmo para o outro Círculo e para o Ponto D;
- Utilizando a ferramenta “Ângulo” , mediremos os ângulos internos do triângulo. Para isso, deve-se clicar nos ponto A, B e C no sentido horário (o segundo ponto selecionado corresponde ao vértice que do ângulo a ser medido);
- Utilize a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perimetro” 

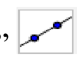
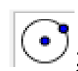
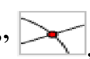
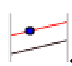
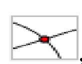
para medir os segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Para isto, clique sobre os pontos das extremidades dos segmentos;
- Ao final dos passos citados, sua construção deve estar semelhante àquela exibida na figura 4.

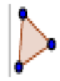
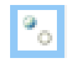
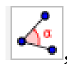
Figura 4 – Campo de Entrada

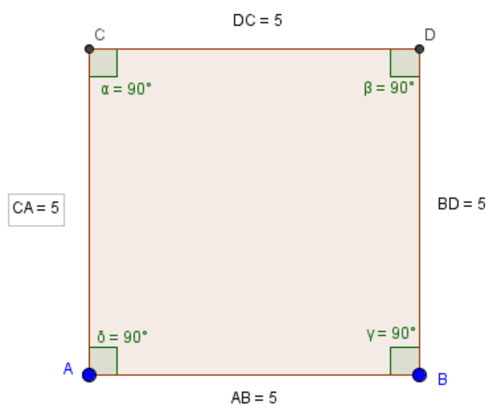


Observe que os pontos A e B são livres; assim, movimentando-os, o triângulo equilátero manterá suas propriedades, mantendo os lados e o ângulos internos a mesma medida.

Criando um quadrado;

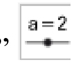
- Crie uma reta “r” utilizando a ferramenta “Reta” , ao mesmo tempo em que são criados os pontos A e B;
- Utilizando a ferramenta “Reta Perpendicular”, crie a reta “s” clicando primeiro sobre a reta “r” e em seguida no Ponto A.
- Selecione a ferramenta “Círculo Dados Centro e um de seus Pontos” ; em seguida, clique sobre o Ponto A e, depois, sobre o Ponto B;
- Utilizando a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , clique sobre o círculo criado e, em seguida, na reta “s”, criando dois pontos de intersecção, C e D.
- Clique com o botão direito do Mouse dobre o ponto D; em seguida, clique em “renomear” e, na caixa que aparecerá, renomeie o ponto para C.
- Utilizando a ferramenta “Reta Paralela” , clique sobre a reta “r” e, em seguida, no Ponto C, assim criando a reta “t”, paralela à reta “r”. Faça o mesmo para a reta “s”, passando pelo Ponto B, para criar a reta “u”, paralela à reta “s”;
- Utilizando a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , clique sobre as Retas “t” e “u” para criar o Ponto D;

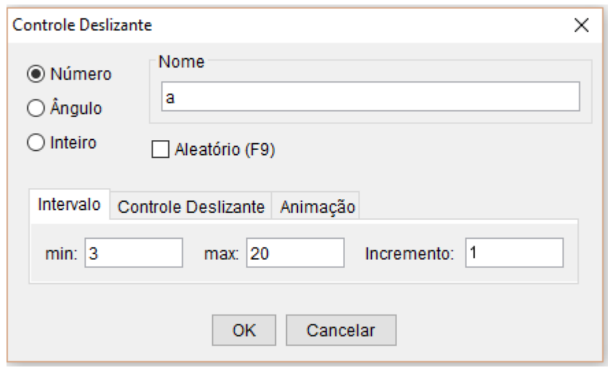
- Utilizando a ferramenta “Polígono” , clique nos pontos A, B, C, D e A novamente (deve-se clicar no primeiro ponto novamente, para definir quantos lados o polígono possuirá);
- Clique com o botão direito do mouse em uma das retas e, em seguida, oculte este objeto, desmarcando a opção “Exibir Objeto” . Faça o mesmo para as outras retas, para o círculo e para o Ponto C_1;
- Utilizando a ferramenta “Ângulo” , mediremos os ângulos internos do quadrilatero. Para isso, deve-se clicar nos ponto A, B e C no sentido horario para medir os ângulos (o segundo ponto selecionado, corresponde ao vertice do ângulo a ser medido). Faça o mesmo para os demais ângulos;
- Utilize a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perimetro”  para medir os segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$. Para isso, clique sobre os pontos das extremidades dos segmentos.
- Ao final dos passos citados, sua construção deve estar semelhante a essa:

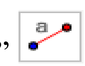


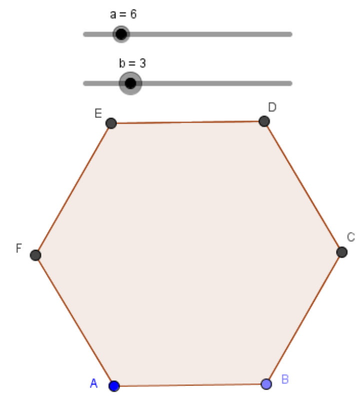
Observe que os pontos A e B são livres; assim, movimentando-os, o quadrado manterá suas propriedades, mantendo os lados e o ângulos internos a mesma medida.

Criação de Polígonos de N lados com controles deslizantes;

- Clique sobre a ferramenta “Controle Deslizante”  ; em seguida, clique em uma área livre da janela geométrica.
- Aparecerá a seguinte janela:



- Em “min:”, digite o número 3; em “max:", digite 20 e em “Incremento:”, digite 1. Observe que o nome do controle será mantido como “a”.
- Crie outro controle deslizante, tendo como nome a letra “b” – min: 1; max: 10; Incremento: 0.1;
- Clique na ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo”  e na área livre da janela geométrica; em seguida, aparecerá uma janela onde será digitado a letra “b” (confirme). Assim, será criado o segmento $\overline{AB}$;
- Selecione a ferramenta “Polígono Regular”  ; em seguida, clique nos pontos A e B, respectivamente. Aparecerá uma janela solicitando o número de vértices, onde será digitado a letra “a” (confirme);
- Movimentando o controle deslizante **b**, será alterada a medida do segmento $\overline{AB}$. Movimentando o controle deslizante **a**, será alterado o polígono de acordo com os número de vértices que estiver sendo aplicado à ele.
- Sua construção deve estar semelhante a essa:

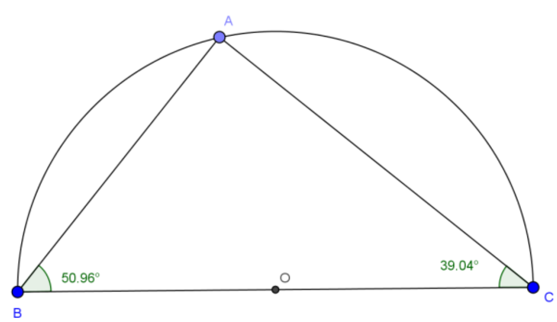

a = 6
b = 3
E
D
F
C
A
B

APENDICE 2

Atividade 1 (conteúdo do arquivo: figura 24)

a) Abra o arquivo “Atividade 1”, no local indicado pelo pesquisador em seu computador. Em seguida, localize e movimente o ponto A. Elabore uma conjectura que poderia ser sustentada matematicamente a partir do que você visualizou. Descreva sua conjectura no espaço abaixo.

Figura 24 – Conteúdo do arquivo – Atividade 1



Fonte: dados da pesquisa

b) Movimente mais uma vez o ponto A após determinar, com uso do Geogebra, as medidas dos ângulos $B\hat{A}O, A\hat{O}B, O\hat{B}A, O\hat{A}C, A\hat{C}O, C\hat{O}A$ e dos segmentos $\overline{BO}, \overline{OC}, \overline{BC}$ e $\overline{AO}$. Você deseja adicionar algo ou modificar de alguma forma a conjectura elaborada no outro item a partir destes novos dados?

Atividade 2 (conteúdo do arquivo: figura 11)

a) Abra o arquivo “Atividade 2-1”, no local indicado pelo pesquisador em seu computador. Em seguida, movimente e explore a construção, usando, para isto, o controle deslizante ***a*** e/ou os pontos ***A*** e ***D***. Elabore uma conjectura que poderia ser sustentada matematicamente a partir do que você visualizou. Descreva sua conjectura no espaço abaixo.

b) Abra o arquivo “Atividade 2-2”, no local indicado pelo pesquisador em seu computador. Em seguida, movimente e explore a construção, usando, para isto, o controle deslizante ***a*** e/ou os pontos ***A*** e ***E***. Elabore uma conjectura que poderia ser sustentada matematicamente a partir do que você visualizou. Descreva sua conjectura no espaço abaixo. ***(conteúdo do arquivo: figura 13, sem as medidas assinaladas)***

c) Observando as duas construções, determine as áreas dos quadriláteros da "Atividade 2-1" e da "Atividade 2-2". Feito isso, movimente os pontos novamente. Há algo que você queira acrescentar no que escreveu até o momento?

d) Você poderia apresentar uma sustentação matematicamente válida para o que você observa? Se sim, registre no espaço seguinte.

Atividade 3

a) Em um arquivo novo do Geogebra, construa um triângulo isósceles, cujas medidas dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ sejam iguais, para qualquer ponto movimentado. Considerando apenas sua construção, e manipulando a mesma à vontade, o que pode garantir que o polígono construído representa sempre um triângulo isósceles?

b) Prove matematicamente que dois ângulos internos do triângulo isósceles são congruentes.

Atividade 4

Siga as instruções abaixo para dar início à atividade:

- *Construa um triângulo ABC;*
- *No segmento AB, crie um ponto D;*
- *Trace uma reta paralela ao segmento BC, de forma que a reta passe por D;*
- *Na intersecção da reta com o segmento AC, crie o ponto E;*
- *Trace o segmento DE;*

a) Através da construção, identifique e discorra sobre as proporções existentes envolvendo os segmentos identificáveis no triângulo.

b) Explicite um meio de comprovar que as proporções citadas são válidas.

c) Se entre os segmentos $\overline{DB}$ e $\overline{EC}$ for criado um segmento $\overline{FG}$, $F \in \overline{DB}, G \in \overline{EC}$, paralelo à $\overline{BC}$, sua demonstração será válida para as razões $\overline{DF}$ e $\overline{FB}$? Justifique.

Atividade 5

Construa um triângulo ABC qualquer. Em seguida, trace a bissetriz de $B\hat{A}C$, determinando, assim, o ponto D sobre o segmento $\overline{BC}$. Utilize a ferramenta “distância” para identificar os comprimentos de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$.

a) É possível determinar a medida de $\overline{BD}$, tendo as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e usando o Teorema de Tales? Explique sua estratégia.

b) Se a bissetriz fosse traçada nos outros ângulos internos, o Teorema de Tales poderia ser usado para determinar um dos segmentos em relação ao qual não se conhece a medida? Explique.

c) Apresente uma argumentação que possa validar matematicamente suas respostas.

Atividade 6

Trace as retas r e s, sendo estas concorrentes no ponto A. Entre as retas, crie um ponto D. Determine um segmento da reta s ao ponto D e outro da reta r ao ponto D, de forma que esses dois segmentos tenham a mesma medida. Justifique sua resposta.

Atividade 7

a) Considerando um cenário de sala de aula, elabore um problema que pode ser resolvido com o Teorema de Tales.

b) Discorra sobre quais são os conhecimentos prévios envolvidos na solução do seu problema.

c) A sua atividade é válida apenas para trabalho com a interfaces digitais, ou poderia ser implantado em um ambiente no qual prevaleçam tecnologias mais tradicionais, como régua, transferidor, lápis e papel? Justifique sua resposta.

d) Na sua visão, quais pontos seriam possíveis dificuldades para você como docente ao abordar o Teorema de Tales? Sua resposta pode incluir elementos matemáticos ou relacionados ao suporte.

e) Quais conhecimentos novos você adquiriu durante o curso?

f) Em que outros conhecimentos matemáticos da escola básica o Teorema de Tales está inserido? Cite um exemplo de atividade em que o mesmo poderia ser empregado.