

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**

**PUC/SP**

**CRISTINA MASETTI**

**Análise de livros didáticos de Matemática:**

**função exponencial**

**Mestrado em Educação Matemática**

**São Paulo**

**2016**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**

**PUC/SP**

**CRISTINA MASETTI**

**Análise de livros didáticos de Matemática:**

**função exponencial**

**Mestrado em Educação Matemática**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Prof<sup>a</sup>. Dra Barbara Lutaif Bianchini.*

**SÃO PAULO**

**2016**

*Banca Examinadora*

---

---

---

*Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadora ou eletrônicos.*

*Assinatura:* \_\_\_\_\_ *São Paulo, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_.*

# DEDICATÓRIA

---

Dedico esta dissertação  
à minha filha Natasha, que  
me inspira e apoia minhas  
escolhas pessoais e profissionais.

## AGRADECIMENTOS

*À Pontifícia Universidade Católica de São Paulo pela oportunidade.*

*À Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini por sua orientação, acolhida, confiança e por partilhar suas experiências e sabedoria, fundamental para o meu crescimento.*

*À Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires por ter me acolhido em boa parte de meu mestrado, compartilhando suas experiências e sabedorias fundamentais para meu crescimento profissional.*

*À Profa. Dra. Ana Lúcia Manrique e Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca pelas ricas contribuições no exame de qualificação.*

*Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, que durante estes dois anos muito contribuíram para minha formação acadêmica.*

*À colega e amiga Sofia Seixas Takinaga que esteve presente durante todo o curso ao meu lado me apoiando, com quem compartilhei anseios, descontentamentos, alegrias, conquistas e muitos risos.*

*Aos colegas do grupo de pesquisa GPEA, “Grupo de pesquisa em Educação Algébrica”, e do grupo “Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores de Matemática”, que pertencem à Linha de Pesquisa: A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores, que me acolheram prontamente contribuindo para o meu crescimento profissional.*

*À minha querida Diretora, chefe e amiga Regina Burkhardt por ter acreditado em mim, me incentivando a ingressar no mestrado e me ajudando a superar todas as dificuldades que surgiram ao conciliar trabalho e pesquisa.*

*À minha colega, amiga e coordenadora da escola, Helena Kaoru Hayama que esteve por mim em todas as horas que não pude estar.*

*Aos meus amigos e familiares que de alguma forma estiveram ao meu lado, compartilhando meus medos, inseguranças e também alegrias e satisfações.*

*A todos que, de alguma forma, fizeram parte da realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos, em especial aos Thiago e André, às insubstituíveis: Luciana, Rose Mary, Luciene, Leonir, Nadir e minha querida Mônica. E como não poderia deixar de lembrar D<sup>a</sup> Neide.*

*Aos meus pais que me inspiram a querer sempre me superar.*

*À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa concedida.*

*E a Deus, acima de tudo, pelos amigos que fiz e pelos que não perdi, pela saúde e perseverança que me permitiram realizar este sonho.*

*A pesquisadora*

## RESUMO

Nosso estudo tem como objetivo investigar como as funções exponenciais são abordadas em livros didáticos de Matemática, oferecidos às escolas brasileiras pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, no Ensino Médio de 2015 e como é proposta a construção, sistematização e consolidação de conhecimentos nesses manuais. Nosso propósito é analisar situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações que o livro didático apresenta, contabilizando diferentes tipos de tarefas que os autores propõem ao estudante para a aprendizagem dos conhecimentos. Para tanto, buscamos a revisão da literatura a respeito de estudos sobre a análise de livro didático de Matemática, fizemos a leitura das orientações curriculares de Matemática para o Ensino Médio, e analisamos os livros do 1º ano do Ensino Médio de três coleções aprovadas pelo PNLD de 2015. Optou-se pela metodologia de natureza qualitativa e pela técnica da análise documental; o instrumento de recolhimento de dados foram tabelas. Nosso trabalho nos permitiu concluir que os três livros didáticos analisados oferecem aos professores situações contextualizadas da vida real, da matemática pura e de outras ciências, permitindo a interdisciplinaridade, assim como introduzem o conceito de função exponencial dentro de um contexto fora da Matemática procurando provocar o interesse dos alunos pelo tema. Todos os três livros analisados propõem a revisão de potência de maneira formal, não demonstrando, porém, justificando com exercícios resolvidos e com lista extensa de tarefas de manipulação para serem feitos. Assim sendo, a respeito do conhecimento emergente de função exponencial podemos dizer que, os autores utilizam linguagem adequada para a faixa etária, oferecendo várias formas de representação na linguagem natural, algébrica gráfica e tabular, e argumentam utilizando a resolução de exercício passo a passo. Predominam nas três coleções nas quais analisamos o tema função exponencial, encontramos exercícios de manipulação, poucas tarefas de resolução de problemas que precisam ser modeladas para se chegar à solução, e nenhuma tarefa de demonstração, pois preferem se justificar resolvendo exercícios que mostrem todas as passagens algébricas. A partir das análises podemos dizer que os livros didáticos investigados trazem, para o ensino de função exponencial, diferentes tarefas, oportunizando ao professor oferecer situações de aprendizagem diferenciadas, porém ainda são em número reduzido, mesmo tendo um dos livros analisados maior quantidade de tarefas para conjecturar/argumentar em comparação aos outros livros, além do que o autor sugere que se façam estas atividades em duplas, o que justifica trazer uma quantidade menor de exercícios resolvidos, oferecendo uma quantidade elevada de problemas para serem resolvidos e poucos exercícios manipulativos, a medida que a comparamos às outras obras. Portanto, quando na escolha do livro didático a ser adotado pela escola, o professor ao analisá-lo, precisará estar atento às características destes livros, no caso do ensino de função exponencial, este pode precisar oferecer maior quantidade de determinadas situações de aprendizagem aos alunos, cabendo fazer complementações, e inclusão no caso do ensino de demonstrações, com outros materiais curriculares, no intento de dar conta das prescrições curriculares no que diz respeito ao ensino de funções exponenciais.

**Palavras-chave:** Materiais curriculares. Livro didático. Educação Algébrica. Função Exponencial.

## **ABSTRACT**

Our study aims to investigate how the exponential functions are covered in textbooks of Mathematics, offered to Brazilian schools by the National Textbook Program - PNLD, in 2015's high schools and how it is proposed the construction, systematization and consolidation of knowledge in these manuals. Our purpose is to analyze mathematical situations, concepts, propositions, procedures, language and arguments the textbook presents, accounting for different types of tasks the authors propose to the students for learning that knowledge. To this end, we sought the review the literature on studies of Mathematics textbook analysis, we read the curriculum guidelines of Mathematics for Secondary Education, and analyzed the books of the three collection of the 1st year of high school approved by PNLD 2015. We opted for the qualitative methodology and the technique of documentary analysis; furthermore, the data collection instruments were tables. Our work allowed us to conclude that the three analyzed textbooks offer teachers contextualized real life situations, of pure mathematics and other sciences, allowing interdisciplinarity, as well as to introduce the concept of exponential function within a context outside of mathematics seeking to promote student interest in the subject. All three books analyzed formally propose the power of review, not demonstrating, but justifying with solved exercises and an extensive list of manipulation tasks to be done. Therefore, regarding the emerging knowledge of exponential function we can say that the authors use language appropriate for the age group, offering various forms of representation in natural language, algebraic graphical and tabular, and argue using exercise resolution step by step. Predominates in three collections we analyze exponential function, handling exercises, few solving tasks of modeling problem that needs to get to the solution, and no statement of task, they prefer to justify themselves solving exercises that show all algebraic passages. Thus, from the analysis we can say that the textbooks investigated bring different tasks, allowing the teacher to provide differentiated learning situations, but are still few in number, one of them brings in a greater quantity of tasks to conjecture/argue compared to other books; in addition the author suggests to do these activities in pairs, which explains the fact that it brings fewer solved exercises, providing a high amount of problems to be solved and few manipulative exercises, the As compared to other works. So when the choice of which textbooks to be adopted by the school, the teacher to analyze it, needs to be aware of the characteristics of these books, in case of teach exponential functions, possible the necessity of having to offer higher amounts of certain learning situations to students, making additions and inclusions in the case of teaching demonstrations, with other curriculum materials, with the intent to report the curriculum requirements with regard to the teaching of exponential functions.

**Keywords:** Curriculum materials. Textbook. Algebraic Education. Exponential function.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 01	– Dados estatísticos sobre o PNLD 2015 .....	27
Figura 02	– A objetivação do currículo no processo do seu desenvolvimento .....	46
Figura 03	– Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto .....	65
Figura 04	– Livro didático A.....	71
Figura 05	– Livro didático B .....	73
Figura 06	– Livro didático C .....	76
Figura 07	– Geólogo analisando rochas e arqueólogo escavando fósseis .....	78
Figura 08	– Tarefa em dupla para introduzir o conceito emergente.....	79
Figura 09	– Contextualização: juros compostos.....	80
Figura 10	– Exercícios manipulação em duplas.....	81
Figura 11	– Exercício de revisão, potência com expoente real e exercícios de radiciação, manipulação.....	81
Figura 12	– Exemplo de notação científica e exercício para escrever na notação científica contextualizada.....	81
Figura 13	– Exercícios de manipulação e exercícios para conjecturar/argumentar.....	82
Figura 14	– Definição de Função Exponencial, propriedades e exemplos.....	82
Figura 15	– Conclusões sobre o gráfico de função exponencial .....	83
Figura 16	– Problema contexto da Matemática, construção de gráfico e para conjecturar/argumentar.....	83
Figura 17	– Construção de gráfico usando o GeoGebra – tutorada.....	84
Figura 18	– Conexões entre função exponencial e progressões – intradisciplinar .....	85
Figura 19	– Exercício para conjecturar/argumentar .....	85
Figura 20	– Exercícios resolvidos de equação exponencial e inequação exponencial..	86
Figura 21	– O número irracional de Euler .....	87
Figura 22	– Exercícios de manipulação e construção de gráfico .....	87
Figura 23	– Procedimento de resolução de um problema .....	88
Figura 24	– Problemas para serem modelados da Química e da Biologia .....	89
Figura 25	– Problemas modelados da Química e da Biologia .....	89

Figura 26	– Contextualização – radioatividade .....	90
Figura 27	– Situação-problema sobre o censo .....	94
Figura 28	– Definição de potência para $x \in \mathbb{N}$ .....	95
Figura 29	– propriedades onde $a$ e $b \in \mathbb{R}$ e $m$ e $n \in \mathbb{N}$ .....	95
Figura 30	– Tarefas de manipulação .....	95
Figura 31	– Uso de calculadoras .....	96
Figura 32	– Tarefas de manipulação .....	96
Figura 33	– problema da realidade, já modelado pela fórmula área da superfície corporal ( ASC) .....	97
Figura 34	– Expoente irracional, como aproximar usando a calculadora .....	97
Figura 35	– Exercícios resolvidos de construção de gráficos .....	98
Figura 36	– Uso de calculadoras para facilitar cálculos .....	98
Figura 37	– Tarefa de construção e interpretação de gráficos .....	98
Figura 38	– Problemas modelados ou para serem modelados .....	99
Figura 39	– Árvore genealógica .....	99
Figura 40	– Exemplos de exercícios resolvidos, tarefa de manipulação e de problema já modelado.....	100
Figura 41	– Contextos meios - vida, radioatividade e medicamentos .....	100
Figura 42	– Tarefas de manipulação, problemas contextualizados modelados .....	101
Figura 43	– Desafio – problema contexto da Matemática pura .....	101
Figura 44	– Crescimento exponencial de uma planta .....	105
Figura 45	– Definição de potência .....	106
Figura 46	– Propriedade de potência .....	107
Figura 47	– Atividades resolvidas .....	107
Figura 48	– Tarefas de manipulação, problemas contextualizados na matemática.....	108
Figura 49	– Uso da calculadora para agilizar os cálculos .....	108
Figura 50	– Tarefa para saber utilizar a notação científica em contexto da realidade, ciência .....	109
Figura 51	– Problema da realidade - Estatística .....	109
Figura 52	– Problemas já modelados dentro do contexto da realidade .....	109
Figura 53	– Problema sobre a quantidade de nicotina presente em fumantes.....	110
Figura 54	– Tarefas que possibilitam aos alunos conjecturar, argumentar a respeito da solução encontrada .....	110

Figura 55	- Tarefas sobre a meia-vida do iodo-131, contexto da medicina – em exames de tireoide.....	111
Figura 56	- Tarefas variadas do Livro C.....	111
Figura 57	- Tarefa de múltiplas resoluções.....	112
Figura 58	- Tarefa de equação exponencial - resolvida.....	112
Figura 59	-Tarefa de manipulação de equação exponencial.....	112
Figura 60	- Situação-problema de equação exponencial.....	113
Figura 61	- Atividades resolvidas de inequação exponencial.....	113
Figura 62	- Tarefas a respeito da atividade de datação de um fóssil.....	114
Figura 63	- Questões para reflexão após estudo de função exponencial.....	114
Figura 64	- Tarefas complementares de função exponencial .....	115
Figura 65	- Exercícios resolvidos na revisão de potência.....	121
Figura 66	- Exercícios resolvidos de equação e inequação exponencial.....	122
Figura 67	- Tarefa resolvida do conhecimento matemático emergente.....	122
Figura 68	- Exercícios resolvidos de gráfico.....	123
Figura 69	- Exemplos de exercícios de manipulação encontrados nos Livros A, B e C..	125
Figura 70	- Caracterização da função exponencial feita pelo autor.....	126
Figura 71	- Tarefas para construção de gráficos .....	127
Figura 72	- Representar graficamente funções, seguindo os passos dados tutorado pelo autor .....	128
Figura 73	- Exercício para conjecturar/argumentar.....	130
Figura 74	- Problema contextualizado já modelado que pede para argumentar, conjecturar .....	131
Figura 75	- Argumentação na linguagem algébrica .....	132
Figura 76	- Situação-problema para se determinar a idade de um fóssil.....	133
Figura 77	- Problema a ser modelado .....	134
Figura 78	- Situação-problema para ser modelada .....	134
Figura 79	- Situação-problema com contexto de outra ciência- modelado .....	136
Figura 80	- Problema modelado .....	136
Figura 81	- Problema resolvido segundo método de Polya .....	137
Figura 82	- Exemplo de problema na linguagem natural e algébrica .....	139
Figura 83	- Tarefa em dupla para introduzir o conceito emergente .....	140
Figura 84	- Definição de Função Exponencial, propriedades e exemplos .....	141

Figura 85	- Definição de potência e explicação da propriedade fundamental.....	142
Figura 86	- Resumo da revisão das propriedades de potência .....	142
Figura 87	- Resolução passo a passo de exercícios de revisão .....	143
Figura 88	- Gráfico de $f(x) = a^x$ , com $a > 1$ e o gráfico da $f(x) = a^x$ , com $0 < a < 1$ .....	144
Figura 89	- Exemplo de exercício resolvido de potenciação.....	144
Figura 90	- Exercício resolvido de potência .....	144
Figura 91	- Argumentando, conclusões sobre o gráfico de função exponencial.....	145
Figura 92	- Argumentando as características da função exponencial decrescente utilizando a linguagem algébrica e gráfica.....	145
Figura 93	- Argumentando a construção do gráfico da função exponencial.....	146

## LISTA DE TABELAS

Tabela 01	Dados referentes à distribuição de livros didáticos pelo programa PNLD 2015.....	24
Tabela 02	Quantidade de livros de Matemática aprovados - Ensino Médio .....	26
Tabela 03	Valores negociados para Livros Impressos e MecDaisy – EF e Médio – PNLD 2015.....	27
Tabela 04	Coleções mais distribuídas por componente curricular – Matemática PNLD 2015.....	28
Tabela 05	A Tabela de coleta de dados .....	58
Tabela 06	Tabela de coleta de dados do Livro A: CONTEXTO & APLICAÇÕES .....	93
Tabela 07	Tabela de coleta de dados do livro B: MATEMÁTICA CIÊNCIAS & APLICAÇÕES	104
Tabela 08	Tabela de coleta de dados do Livro C: NOVO OLHAR .....	118
Tabela 09	Tabela geratriz do gráfico referente aos tipos de tarefas emergentes.....	124
Tabela 10	Porcentual comparativo de tarefas de manipulação entre os Livros A,B e C	125
Tabela 11	Quantidade de problemas por livro .....	135

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 01 – Tipos de tarefas emergentes propostas pelo autor do Livro A .....	91
Gráfico 02 – Tipos de tarefas emergentes propostas pelo autor do Livro .....	102
Gráfico 03 – Tipos de tarefas emergentes propostas pelo autor do Livro C .....	116
Gráfico 04 – Tarefas resolvidas: emergentes e revisão .....	120
Gráfico 05 – Tarefas resolvidas: emergentes e revisão .....	120
Gráfico 06 – Quantidade de tarefas oferecidas dentre os exercícios de revisão e emergentes ....	123
Gráfico 07 – Quantidade de tarefas oferecidas dentre os exercícios de revisão e emergentes ....	123
Gráfico 08 – Tipos de tarefas emergentes.....	124

## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
1.1 Motivação e pertinência da investigação .....	15
1.2 Estrutura da dissertação .....	17
<b>CAPÍTULO I .....</b>	<b>19</b>
1.1. O objeto de estudo .....	19
1.2 Material curricular .....	20
1.3 A história do surgimento do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) .....	24
1.4 Revisão de literatura .....	30
<b>CAPÍTULO II.....</b>	<b>35</b>
2.1 Questões de pesquisa .....	35
2.1.1 Perguntas norteadoras .....	35
2.2 A problemática em que se insere esta pesquisa: .....	35
2.2.1 A escolha do tema Função Exponencial .....	36
2.2.2 Importância do ensino da função exponencial .....	37
<b>CAPÍTULO III .....</b>	<b>45</b>
Referencial Teórico.....	45
3.1 A concepção de Currículo adotada nesta pesquisa .....	45
3.2 As prescrições curriculares para o ensino de funções exponenciais.....	48
3.2.1 Finalidades do ensino da Matemática para o nível médio .....	48
3.2.2 Competências e habilidades da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias .....	50
3.2.3 As prescrições curriculares quanto ao ensino de Função Exponencial.....	51
<b>CAPÍTULO IV.....</b>	<b>53</b>
4.1 Metodologia .....	53
4.2 - Procedimentos metodológicos .....	54
4.3 – As etapas da pesquisa .....	54
4.4 Questões norteadoras da pesquisa introduzidas na Tabela de análise .....	57
4.5- O Instrumento de coleta de dados .....	58
4.6 Apresentação, descrição e justificativa .....	59
4.7 Os três livros didáticos de matemática escolhidos entre os aprovados do PNLD 2015 .....	70
<b>CAPÍTULO V .....</b>	<b>78</b>
5.1 Análise de Dados .....	78
5.1.1 Livro A .....	78
5.1.2 Livro B .....	94
5.1.3 Livro C .....	105
5.2 Análise Comparativa dos Dados.....	119
5.3 Conclusão das Análises .....	147
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>150</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>157</b>





# APRESENTAÇÃO

## INTRODUÇÃO

Iniciamos esta pesquisa relatando parte de minha trajetória profissional que motivou esta investigação, assim como justifica sua pertinência.

### 1.1 Motivação e pertinência da investigação

Nossa pesquisa de Mestrado foi desenvolvida no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, inserida na linha de pesquisa “A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores”.

Minha inserção neste grupo de pesquisa tem a ver com minha trajetória profissional, Bacharel e Licenciada em Matemática e posteriormente Graduada em Pedagogia. Atuei em escolas públicas e particulares desde 1988, ministrando aulas de Matemática no Ensino Fundamental II e Médio desde então. Trabalhei com diferentes materiais curriculares, como apostilas, livros paradidáticos, calculadoras, computador usando *softwares*, malhas quadriculadas, papel milimetrado, régua, transferidor, compasso e o que sempre tive como constante em meu trabalho diário no preparo de minhas aulas: o livro didático, podendo ser este o material curricular adotado pela escola ou algum que escolhia para uso pessoal.

Em meu trabalho diário de planejar minhas aulas, sempre utilizei três ou mais livros didáticos para consulta, acabando por elaborar meu próprio material curricular. Embora tivesse sempre um ou outro livro como meu preferido, houve vezes em que fui obrigada a reproduzir o livro em sua íntegra por ideologia da escola particular na qual estava trabalhando; assim como também, em outras instituições de ensino, tive de adaptar ou criar estratégias de ensino, adequando-as às necessidades dos alunos aos quais estava ensinando.

Embora desenvolvesse metodologias e estratégias das mais diferenciadas no intuito de buscar a compreensão dos conceitos matemáticos, e proporcionar uma aprendizagem significativa aos meus alunos, confesso que sempre utilizei o livro didático como material curricular de apoio ao meu fazer diário e sempre o tive como um eixo orientador de meu trabalho em sala de aula.

No momento encontro-me afastada de salas de aula do ensino público há dez anos por estar atuando em direção de escola, porém mantive-me sempre interessada e envolvida com o ensino da Matemática.

O grupo de professores de Matemática da escola na qual trabalho é composto por sete profissionais efetivos que vêm trabalhando juntos desde 2007 e tal estabilidade os permitem traçar metas, definir estratégias, elaborar avaliações de curso, desenvolver projetos e trabalhar com corresponsabilidade pelos alunos que por eles passam.

Tive a oportunidade de assistir à distância, pois não queria interferir, a escolha do livro didático pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2015, PNLD, que aconteceu em agosto de 2014. Fiquei curiosa com os livros que estavam sendo entregues pelas editoras vencedoras da avaliação do programa para serem estes avaliados e adotados pelos professores, o que me fez decidir por conhecê-los, visto a importância que este material curricular sempre teve em meu trabalho diário como professora. Com uma breve folheada nos seis concorrentes ali empilhados em uma das salas de reunião destinadas aos horários de trabalho pedagógico coletivo (ATPC), fiquei instigada em saber o que está sendo oferecido aos professores pelos autores destas coleções, para ajudá-los em seus planejamentos de aula, pois tal livro por eles escolhido seria adotado por nossa escola para ser entregue aos nossos dois mil alunos no ano de 2015.

Contei a minha orientadora esta minha curiosidade e mais do que depressa ela me sugeriu que lesse a dissertação de Fonseca (2013), que tratava exatamente de analisar manuais escolares das escolas de Portugal sob a perspectiva das funções exponenciais e logarítmicas.

Impressionada com o que li na dissertação, me dispus a analisar alguns dos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015, no intuito de conhecer estes manuais sob a perspectiva das funções exponenciais.

A intenção maior desse trabalho é de colaborar com o grupo de pesquisa que está analisando o uso de materiais curriculares por professores em sala de aula. Este grupo está debruçado em investigar como estes professores os utilizam: se reproduzem, adaptam ou improvisam (BROWN, 2009). Acreditando que esta pesquisa poderá colaborar com seus trabalhos, de maneira a suscitar novas pesquisas que utilizam os livros didáticos. Isto é, conhecendo o que os autores oferecem de apoio ao trabalho do professor para preparo de suas aulas, abre-se o caminho para pesquisar como utilizam esse material, cuja finalidade é colaborar com o professor em seu trabalho de *planificação*<sup>1</sup> da proposta curricular brasileira, ou seja, é, segundo Zabalza (1994), o planejamento feito pelo professor para adoção de estratégias de diferenciação pedagógica e adequação do currículo às características dos alunos.

---

<sup>1</sup> Planificar é converter uma ideia ou um propósito num curso de ação.

Nossa pesquisa não pretende compreender o porquê e como os professores interagem com os materiais curriculares de diferentes formas, mas sim compreender quais são as características deste material, a saber, o livro didático, pois este interage com as crenças e convicções que os professores trazem para essa interação.

Importante relatarmos que poucas pesquisas se dedicaram a analisar o livro didático de Matemática na perspectiva do currículo, por isso foram encontrados poucos trabalhos em nossa revisão de literatura; a dissertação de Fonseca (2013) da qual utilizamos a tabela/grade de análise, é a pesquisa que mais se aproxima do que pretendíamos estudar apesar de utilizar outros aportes teóricos que não o que usamos, e necessitar de alterações para que dessem conta do que estávamos investigando, como iremos falar ao longo deste trabalho. O que torna este estudo uma contribuição muito importante.

## **1.2 Estrutura da dissertação**

Assim sendo, este relatório de pesquisa foi estruturado em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresentamos o objeto de estudo, a saber, o livro didático e as concepções em relação a este material curricular devido ao impacto que estes causam no ensino. Abordaremos a respeito do Programa Nacional do livro Didático e sua abrangência nacional e relataremos sobre as pesquisas que encontramos em nossa revisão de literatura.

No segundo capítulo apresentaremos nossa questão de pesquisa e os caminhos que percorremos em busca de respostas para nossas questões norteadoras, isto é, o objetivo de investigação. Assim como justificamos a escolha do tema função exponencial como objeto matemático analisado nos livros didáticos escolhidos para nossa investigação, sua importância quanto conhecimento matemático e como tem sido feita sua abordagem pelo currículo prescrito, assunto que trataremos no capítulo III.

O terceiro capítulo apresenta nosso aporte teórico definindo a concepção de currículo adotada nesta pesquisa, os prescritores curriculares brasileiros e suas orientações quanto ao ensino de função exponencial na perspectiva de desenvolver habilidades e competências que tratam do ensino na Matemática do Ensino Básico.

No quarto capítulo justificaremos a metodologia adotada nesta pesquisa, explicamos o procedimento metodológico que utilizamos para responder nossa questão de investigação; apresentamos a grade de análise e seus descritores assim como os três livros por nós analisados.

No quinto capítulo apresentamos as análises dos três livros aprovados no PNLD de 2015 quanto à proposta de ensino de função exponencial para o primeiro ano do ensino médio.

A princípio, iniciamos uma análise de cada livro na perspectiva do desenvolvimento curricular proposto no livro didático pelo autor da obra.

Na sequência dos trabalhos, fizemos as análises de cada livro partindo para a recolha e tabulação dos dados segundo seus descritores, os quais fomos descrevendo e analisando segundo as tarefas oferecidas pelos autores de cada livro investigado, e fomos registrando as conclusões do que foi observado; por fim achamos pertinente realizamos uma análise comparativa entre os três livros, o que resultou numa conclusão quanto ao que os livros apresentam de coerente com a proposta curricular, e o que não apresentam, e trouxemos o que cada livro tem de diferencial dentre os livros didáticos analisados.

Todos os trabalhos realizados até então nesta investigação serviram para responder nossa questão de pesquisa e escrevermos nossas considerações finais.

Encerraremos com nossas considerações finais acerca do tema investigado, as contribuições e limitações dos trabalhos e sugestões para novas pesquisas.

# CAPÍTULO I

## O livro didático

*O papel são os discípulos cujas inteligências não de ser impressas com os caracteres das ciências. Os tipos ou caracteres são os livros didáticos e demais instrumentos preparados para este trabalho, graças aos quais se imprime, na inteligência, com facilidade tudo quanto se há de aprender.*

*A tinta é a voz viva do professor que traduz o sentido das coisas e dos livros para os alunos. A prensa é a disciplina escolar que dispõe e sujeita a todos para receber o ensinamento<sup>2</sup>*

*(Comenius, 1954, p.339)*

Neste capítulo apresentamos o objeto de estudo, a saber, o livro didático e as concepções em relação a este material curricular que se dão devido ao impacto que estes causam no ensino, haja visto o empenho do governo por meio do Programa Nacional do livro Didático para que este material curricular chegue aos professores da maior parte do Brasil, acreditando no seu potencial para melhorar a Educação brasileira, à medida que este subsidia o trabalho do professor em sala de aula. A revisão de literatura tem o intuito de fundamentar a importância desta pesquisa pois encontramos poucos estudos sobre os livros didáticos de Matemática de ensino médio no Brasil. Podemos citar nestes últimos cinco anos, entre 2011 e 2015, as pesquisas de Fonseca (2013), Lopes (2011), Martins (2012), Silva (2013) e Carmo (2014) do Ensino Fundamental, as quais iremos nos referir no item 1.4 deste capítulo.

### 1.1. O objeto de estudo

Para se analisar livros didáticos sentimos a necessidade de definir este objeto de nosso estudo. Nesta pesquisa, assumimos para esse material a seguinte definição:

O livro didático será entendido como material impresso, estruturado, destinado ou adequado a ser utilizado num processo de aprendizagem ou formação. (RICHAUDEAUR, 1979, p.5 *apud* OLIVEIRA; GUIMARÃES e BOMÉNY, 1984, p.11).

No final do século XX, com a reforma da educação, surgiram algumas exigências para o ensino da Matemática nas propostas curriculares tendo o livro didático

---

<sup>2</sup> Comenius, criador da Didática Magna e um dos maiores educadores do século XVII, expôs, nesta citação a lógica que deveria nortear o sistema de ensino a partir da metáfora do funcionamento de uma tipografia.

um papel fundamental, traduzidas pelo primeiro Guia do livro didático do PNDL 2008 destinado ao ensino médio.

Um livro didático deve oferecer informações e explicações sobre o conhecimento matemático que interfere e sofre interferências da prática social do mundo contemporâneo e do passado. Também deve conter uma proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno e que ofereça atividades que incentivem a participar ativamente de sua aprendizagem e a interagir com os seus colegas. Além disso, o livro precisa assumir a função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o docente. (BRASIL, 2008, p.9)

Valorizar o papel do livro didático dando a ele a importância de ser um “texto de referência”, não significa, contudo, e neste ponto concordamos com Ponte (2000), que ele seja dominante no processo de ensino e aprendizagem em detrimento da atuação do professor. Isso porque, além das tarefas inerentes à condução das atividades da sala de aula, o professor sempre pode ampliar o seu repertório profissional buscando fontes bibliográficas complementares.

## 1.2 Material curricular

Podemos dizer que hoje o professor pode ter acesso a materiais curriculares diversos como livros, apostilas, livros paradidáticos, *softwares*, jogos, cuja finalidade é de auxiliá-lo no planejamento de suas aulas.

Blanco (1994) sugere que se deva entender por material curricular, desde instrumento de laboratório a produtos de uso corrente, do quadro negro a projetores de vídeo, de um livro de divulgação a um manual escolar. Então, para ele materiais curriculares são:

[...] todos aqueles “artefactos”, impressos ou não, cuja função é a de servir como veículos para ensinar e aprender algo, que são utilizados no desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem e, portanto, de uso nas aulas. (BLANCO, 1994, p. 267).

Pires (2008) ressalta que se deve levar em conta que no Brasil, assim como em outros países, documentos curriculares prescritos<sup>3</sup> parecem ter pouco impacto nas práticas docentes que são mais influenciadas por materiais didáticos como os livros didáticos.

A pertinência de se analisar livros didáticos fundamenta-se no fato de ser este material curricular mais difundido e utilizado no Brasil, segundo Pires (2012):

---

<sup>3</sup> Documentos curriculares prescritos: são aqueles documentos constituídos pela instância administrativa, governamental, pelas equipes de especialistas.

[...] se currículos prescritos parecem ser mais aceitos e difundidos no Brasil, hoje, é preciso se levar em conta que em nosso país, como em outros, documentos curriculares prescritos parecem ter pouco impacto nas práticas docentes que são mais influenciadas por outros materiais curriculares. Ressalta que os materiais curriculares mais difundidos e utilizados são, sem dúvida, os livros didáticos. (p. 2)

Para a autora “certamente há pesquisas sobre eles na área de Educação Matemática, mas provavelmente sem o foco em como os professores os utilizam e se, e como, estes de fato influenciam as práticas nas aulas de Matemática.” (2012, p.2).

Surgiram nesta última década nos Estados Unidos pesquisas sobre o uso que os professores fazem de materiais curriculares de matemática, e o impacto que eles causam no ensino, segundo a publicação *Mathematics Teachers at Work – Connecting Curriculum Materials and Classroom Instruction*, coordenada por Janine T. Remillard, Professora Associada de Educação da Faculdade de Educação da Universidade da Pensilvânia, Beth A. Herbel-Eisenmann, Professora Assistente de Formação de Professores, *Michigan State University* e Gwendolyn M Lloyd, professor do Departamento de Matemática, *Virginia Tech*.

Na apresentação do livro, segundo Pires (2012), estes coordenadores destacam que se trata da primeira coleção para compilar e sintetizar estas pesquisas. Elas tomam como pressuposto a concepção de que os professores são os principais atores no processo de transformação dos ideais curriculares, capturados nas formas de tarefas matemáticas, planos de aula e recomendações pedagógicas, nos eventos reais em sala de aula. Esta é justificativa para a criação de um projeto de pesquisa, a ser compartilhado por um grupo de pesquisadores que realizem suas investigações, focalizando essa problemática.

Se os materiais curriculares causam impacto no ensino segundo apontam as pesquisas, tal fato causou-nos inquietações a respeito desse material curricular, o livro didático. À medida que o Governo Federal por intermédio do Programa Nacional do Livro Didático, PNLD, tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica, isto é em nível nacional, oferecendo aos professores de todo o Brasil, a oportunidade de acesso a livros didáticos para ajudá-los na elaboração de suas aulas, assim como também favorecer sua formação didático-pedagógica, auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno e na aquisição de saberes profissionais pertinentes.

No Brasil, embora existam diretrizes, parâmetros e orientações curriculares para diferentes níveis e modalidades de ensino – Regular, Educação de Jovens e Adultos,

Educação do Campo, Educação Escolar Indígena, Educação Escolar Quilombola –, além de documentos publicados por estados e municípios<sup>4</sup>, o livro didático é o material curricular que tem maior circulação no interior das escolas de boa parte do Brasil.

O ideal, segundo Soares (2002, p.90), é que o professor tomasse o livro didático apenas como uma ferramenta entre outras tantas dos materiais curriculares a sua disposição, com o intuito de ministrar um ensino de qualidade. Porém, o autor aponta as dificuldades vivenciadas pelo professor ao utilizar o livro didático:

Há o papel ideal e o papel real. O papel ideal seria que o livro didático fosse apenas um apoio, mas não o roteiro do trabalho dele. Na verdade, isso dificilmente se concretiza, não por culpa do professor, mas de novo vou insistir, por culpa das condições de trabalho que o professor tem hoje. Um professor hoje nesse país, para ele minimamente sobreviver, ele tem que dar aulas o dia inteiro, de manhã, de tarde e, frequentemente, até a noite. Então, é uma pessoa que não tem tempo de preparar aula, que não tem tempo de se atualizar. A consequência é que ele se apoia muito no livro didático. Idealmente, o livro didático devia ser apenas um suporte, um apoio, mas na verdade ele realmente acaba sendo a diretriz básica do professor no seu ensino. (SOARES, 2002, p.90)

Ponte (2000) afirma que os documentos oficiais e os livros didáticos escolares como o livro didático “devem sistematizar e aproveitar o melhor do pensamento curricular” (p.23), constituindo-se em documentos de trabalho úteis para professores e alunos [...]:

Ao estabelecer uma estratégia adequada, contemplando diversos tipos de tarefas e momentos próprios para exploração, reflexão e discussão, o professor dá o passo importante para criar oportunidades que favoreçam a aprendizagem dos alunos. (p.23)

Segundo pesquisas realizadas por Brown (2009) nos Estados Unidos, a maneira como os professores se relacionam com os materiais curriculares reflete-se na ação de adaptar, adotar ou improvisar segundo a necessidade de seus alunos, o que torna pertinente a necessidade de se conhecer este material curricular, a saber, o livro didático.

A sala de aula se constitui em um cenário no qual se estabelecem inter-relações entre o professor, o aluno, o livro didático e os saberes disciplinares. O livro didático

---

<sup>4</sup>Documento da Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Concepções e Orientações Curriculares para Educação Básica. Foram analisadas propostas das secretarias municipais das capitais, compondo uma amostra de 13 propostas de Ensino Fundamental. A análise incidiu sobre um total de 60 propostas, sendo 34 de Ensino Fundamental (incluindo as 13 citadas e 21 de secretarias estaduais) e 26 propostas de Ensino Médio. Não apresentaram propostas de Ensino Fundamental os estados: Roraima, Maranhão, Paraíba, Rio Grande do Norte, Sergipe e Piauí. De Ensino Médio, apenas o estado de Rondônia não apresentou proposta. Para o Ensino Fundamental as propostas elaboradas pelas secretarias municipais das capitais e incluídas no estudo foram: Fortaleza, Campo Grande, Boa Vista, Macapá, Maceió, João Pessoa, Recife, Goiânia, Cuiabá, Vitória, São Paulo, Curitiba e Florianópolis.



traz para o processo de ensino e aprendizagem um terceiro personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado; os métodos adotados para que o aluno consiga aprendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. (BRASIL, 2015).

Algumas das funções mais importantes do livro didático, segundo Gérard e Roegiers (1998) são: no que diz respeito ao aluno, o livro pode favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes, consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos, propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades contribuindo com o aumento de sua autonomia, além de contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

E no que diz respeito ao professor, o livro didático o auxilia com orientações e seus textos informativos, assim como também com seu planejamento didático-pedagógico anual, na avaliação da aprendizagem de seus alunos e na gestão de suas aulas, favorecendo também sua formação e na aquisição de saberes profissionais pertinentes. (BRASIL, 2015, p.10).

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico. (FNDE, 2015)

Assim sendo, o Governo brasileiro, por meio do Programa Nacional do Livro Didático, PNLD, vem procurando garantir a distribuição de livros didáticos por grande parte do território nacional, cujo papel é o de subsidiar o trabalho do professor no planejamento e escolhas de estratégias metodológicas para a melhora da aprendizagem de nossos alunos.

Esta investigação volta sua atenção para a fase de preparo de aulas pelo professor. Concordamos com Pires (2013) quando “ressalta que os materiais curriculares mais difundidos e utilizados são, sem dúvida, os livros didáticos” (p.2)

A preocupação com a melhora da educação brasileira perpassa os problemas da qualidade dos livros didáticos e a distribuição destes livros por todo o território nacional.

É importante ressaltarmos novamente que, o objetivo desta pesquisa é analisar como as Funções Exponenciais estão apresentadas nos livros didáticos, já que são estes

um dos materiais curriculares que mais influenciam as práticas dos professores, que encontram nestes, os elementos para colocar em prática e materializar o que prescrevem ou orientam os documentos oficiais.

Não cabe aqui contarmos a história do livro didático no Brasil e muito menos nos aprofundarmos a respeito do surgimento do Programa Nacional do Livro Didático, o PNLD, suas conquistas e a problemática de distribuição de livros didáticos pelo país, pois estes dois temas gerariam outras pesquisas.

Porém, achamos pertinente relatar um pouco a respeito do PNLD, no intuito de procurar justificar a relevância de se investigar o livro didático, pois é necessário citar que o programa distribuiu neste ano de 2015, o correspondente a 87.622.022 de livros para o Ensino Médio, conforme apresentamos na Tabela 01.

Tabela 01 – Dados referentes à distribuição de livros didáticos pelo programa PNLD 2015

Ano de Aquisição	Ano do PNLD (letivo)	Alunos Beneficiados	Escolas Beneficiadas	Exemplares	Investimento*	Atendimento
2014	PNLD 2015	11.032.122	47.225	25.454.102	203.899.968,88	Reposição Ensino Fundamental: 1º ao 5º ano
		10.774.529	51.762	27.605.870	227.303.040,19	Reposição Ensino Fundamental: 6º ao 9º ano
		7.112.492	19.363	87.622.022	898.947.328,29	Aquisição Completa Ensino Médio
		28.919.143	-	140.681.994	1.330.150.337,36	Total

Fonte: FNDE Disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>; acesso em 2 nov. De 2015.

Os dados da Tabela 01 fundamentam o fato de ter este programa uma enorme abrangência territorial em nosso país. São estes livros, os aprovados pelo PNLD, que melhor expressaram pelo viés da Matemática a proposta curricular dos estados e municípios deste país.

### 1.3 A história do surgimento do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD)

O Programa Nacional do Livro Didático foi criado pelo Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985, na gestão do presidente José Sarney. Sua criação preocupou-se com a avaliação e distribuição das obras, a todos os estudantes das escolas públicas de 1º grau; os professores dessas séries participaram do processo de escolha por meio de análise e indicação dos livros; as obras deveriam atender as peculiaridades regionais do país; alguns títulos passaram a ser reutilizáveis; o Programa entrou em vigor em 1986.

Foram implantados vários programas de distribuição de livros didáticos desde então, não sendo o foco deste trabalho a detalhada história destes programas, e sim o

programa que vem sendo responsável pela distribuição nos dias de hoje, Programa Nacional do Livro Didático, PNLD.

Em 2004 foi implementado o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), programa este que iniciou a distribuição dos livros didáticos analisados nesta pesquisa, assim como outros que já fizeram parte dele para os alunos do Ensino Médio deste país. Neste primeiro ano, o Programa atendeu apenas alunos do 1º ano das regiões Norte e Nordeste com livros de Língua Portuguesa e Matemática. Em 2006, os alunos dos três anos do Ensino Médio de todo o Brasil, receberam títulos dessas duas áreas do saber. As escolas públicas de Minas Gerais e do Paraná não foram contempladas, pois esses estados desenvolviam, à época, programas próprios.

Em 2008, enfim o programa do PNLD passou a fornecer para o Ensino Médio os livros de Matemática. Tais livros precisariam ter sido aprovados pelo conjunto de critérios de avaliação que faziam parte do Edital de Convocação para o processo de Avaliação de Obras Didáticas para este programa. O que garantiria que estes livros seguiriam os princípios gerais relativos à qualidade de uma obra didática para ser um instrumento auxiliar do trabalho educativo do professor, assim como também deveriam estar de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 9394/96 na qual:

[...] aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. (BRASIL, 1999, p.41)

Isto significa que autores destas obras poderiam sugerir estratégias, metodologias e tarefas que ajudariam o professor no planejamento de suas aulas procurando dar conta da gestão curricular que, segundo Ponte (2005) acontece desde a fase de preparo pelo professor de suas aulas, na seleção de tarefas, assim como na fase de realização da aula em tempo real.

De acordo com a Associação Brasileira de Editores de Livros (ABRELIVROS) a qualidade dos livros e dicionários distribuídos às escolas públicas do país melhorou muito depois da implantação, em 1985, do PNDL, mantido pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), do Ministério da Educação, com recursos do Orçamento Geral da União e do salário-educação.

Não cabe nesta dissertação discutir se estes livros estão realmente chegando a todas as escolas estaduais do Brasil, pois reconhecemos as dificuldades de transporte e acesso a lugares remotos. Mas, partimos do pressuposto de que a logística descrita pelo

site do Programa Nacional do Livro didático esteja atingindo os resultados de excelência.

Buscamos fundamentar estas observações com pesquisas no site da Fundação Nacional de Desenvolvimento da Educação, FNDE, e tabulamos os dados do Programa Nacional do Livro Didático deste ano, PNLD 2015.

Todos estes dados, como pudemos verificar são de domínio público no intuito do governo justificar os gastos com transparência ao povo brasileiro.

O programa permite a cada três anos que os professores participem da escolha do livro didático que será adotado por ele em sala de aula. Podendo estes indicar três entre os aprovados pelo PNLD, para que o Ministério da Educação e Cultura (MEC) prossiga com as negociações de compra e distribuição junto às editoras.

Ao consultar o *site* do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), temos acesso aos números para que possamos ter um panorama mais próximo da quantidade de livros de Matemática distribuídos para professores e alunos de escolas públicas desde o início do programa quando incluiu a etapa do Ensino Médio.

Em relação aos dados da Tabela 02, os números acompanhados de **C** referem-se à quantidade de coleções compostas por três livros didáticos, enquanto aqueles acompanhados de **U** referem-se a volumes únicos.

Passaremos a expor alguns dados:

Tabela. 02: Quantidade de livros de Matemática aprovados – Ensino Médio

PNLDEM	2004	2007	2009	2012	2015
Aprovados		8	5 (C) 3 (U)	7 (C)	6 (C)
Total de livros			18	21	18

Fonte: Adaptado de BRASIL – Guia do Livro Didático do Ensino Médio (2012)

Por meio do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio PNLDEM do ano de 2012, o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) distribuiu 145.354 livros de Matemática do Ensino Médio para professores de diferentes municípios e estados do Brasil. Esses livros referem-se ao Manual do Professor, com as respostas das atividades propostas aos alunos, orientações e sugestões didático-metodológicas para o desenvolvimento curricular.

No PNLDEM 2015, o FNDE, distribuiu 8.592.307 livros de Matemática do Ensino Médio entre as seis coleções aprovadas pelo programa, para diferentes

municípios e estados do Brasil. Foram 3.378.033 estudantes de 1º ano do EM contemplados com um destes exemplares.

O PNLD 2015 é direcionado à aquisição e à distribuição integral de livros aos alunos do Ensino Médio, bem como à reposição e complementação do PNLD 2014 (6º ao 9º ano do Ensino Fundamental) e do PNLD 2013 (1º ao 5º ano do Ensino Fundamental).

Para fundamentar nossa escolha pelos três primeiros livros didáticos da lista, dentre os seis mais votados entre os professores segundo critérios discutidos entre os pares em reunião pedagógica dentro das unidades escolares, mostramos os dados a seguir:

Figura 01: Dados estatísticos sobre o PNLD 2015

Ensino Médio:	
• Investimento:	R\$ 898.947.328,29
• Alunos atendidos:	7.112.492
• Escolas beneficiadas:	19.363
• Livros distribuídos:	87.622.022

Fonte: FNDE Disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>; acesso em 2 mar. 2015, às 21h.

O enorme investimento por parte do Governo para garantir a distribuição destes livros didáticos de Matemática para o ensino médio segundo a escolha dos professores ao participarem do PNLD 2015, resultaram na seguinte tiragem por editora:

Tabela 03: Valores negociados para Livros Impressos e MecDaisy – EF e Médio- PNLD 2015

<b>Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação</b> <b>Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2015</b> <b>Ensino Fundamental e Médio - Valores Negociados para Livros Impressos e MecDaisy</b>						
EDITORA	TIRAGEM 1º ao 5º Ano	TIRAGEM 6º ao 9º Ano	TIRAGEM Ensino Médio	TIRAGEM TOTAL	TÍTULOS ADQUIRIDOS	VALOR TOTAL
ÁTICA	4.517.901	2.648.032	16.736.895	23.902.828	246	182.153.141,88
SCIPIONE	2.539.480	605.683	4.971.196	8.116.359	194	62.963.389,73
MODERNA	4.372.828	4.407.370	11.990.496	20.770.694	292	160.341.696,95
FTD	6.153.519	8.575.807	11.592.370	26.321.696	370	183.697.292,61
SARAIVA	2.378.689	2.829.222	13.007.977	18.215.888	400	153.952.559,71

Fonte: Adaptada de FNDE: PNLD 2015

E a transparência quanto à quantidade de livros distribuídos, resultado da escolha feita pelos professores e negociações junto às editoras está traduzido na Tabela 04 a seguir.

**FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO**  
**Programa Nacional do Livro Didático - PNLD**

**PNLD 2015 - Coleções mais distribuídas por componente curricular**  
**Matemática**

Tabela 04: Coleções mais distribuídas por componente curricular – Matemática. PNLD 2015

	Código	Título	Tipo	Qtde. Página	Cad. Tipoo.	Quantidade	Quantidade por Coleção
1ª	27582C0201	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES - VOLUME 1	L	296	19,5	1.042.491	2.564.520
	27582C0201	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES - VOLUME 1	M	424	27,5	13.613	
	27582C0202	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES - VOLUME 2	L	320	21	808.284	
	27582C0202	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES - VOLUME 2	M	448	29	11.341	
	27582C0203	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES - VOLUME 3	L	216	14,5	678.663	
	27582C0203	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES - VOLUME 3	M	344	22,5	10.128	
2ª	27602C0201	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	L	320	21	603.828	1.481.977
	27602C0201	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	M	496	32	8.091	
	27602C0202	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	L	320	21	464.433	
	27602C0202	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	M	496	32	6.765	
	27602C0203	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	L	320	21	392.769	
	27602C0203	NOVO OLHAR MATEMÁTICA	M	496	32	6.091	
3ª	27585C0201	MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	L	320	21	590.349	1.451.475
	27585C0201	MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	M	464	30	7.864	
	27585C0202	MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	L	320	21	457.368	
	27585C0202	MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	M	464	30	6.517	
	27585C0203	MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	L	256	17	383.520	
	27585C0203	MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	M	384	25	5.857	
4ª	27544C0501	FRONTEIRAS DA GLOBALIZAÇÃO - O MUNDO NATURAL E O ESPAÇO HUMANIZADO - VOLUME 1	L	288	19	418.511	1.036.548
	27544C0501	FRONTEIRAS DA GLOBALIZAÇÃO - O MUNDO NATURAL E O ESPAÇO HUMANIZADO - VOLUME 1	M	360	23,5	5.456	
	27544C0502	FRONTEIRAS DA GLOBALIZAÇÃO - O ESPAÇO GEOGRÁFICO GLOBALIZADO - VOLUME 2	L	288	19	320.642	
	27544C0502	FRONTEIRAS DA GLOBALIZAÇÃO - O ESPAÇO GEOGRÁFICO GLOBALIZADO - VOLUME 2	M	352	23	4.513	
	27544C0503	FRONTEIRAS DA GLOBALIZAÇÃO - O ESPAÇO BRASILEIRO: NATUREZA E TRABALHO - VOLUME 3	L	272	18	283.267	
	27544C0503	FRONTEIRAS DA GLOBALIZAÇÃO - O ESPAÇO BRASILEIRO: NATUREZA E TRABALHO - VOLUME 3	M	344	22,5	4.159	
5ª	27583C0201	MATEMÁTICA - PAIVA	L	304	20	366.829	900.309
	27583C0201	MATEMÁTICA - PAIVA	M	440	28,5	4.922	
	27583C0202	MATEMÁTICA - PAIVA	L	320	21	282.819	
	27583C0202	MATEMÁTICA - PAIVA	M	456	29,5	4.086	
	27583C0203	MATEMÁTICA - PAIVA	L	232	15,5	237.977	
	27583C0203	MATEMÁTICA - PAIVA	M	344	22,5	3.676	
6ª	27519C0201	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	L	296	19,5	311.818	767.161
	27519C0201	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	M	504	32,5	4.161	
	27519C0202	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	L	320	21	239.951	
	27519C0202	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	M	512	33	3.461	
	27519C0203	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	L	224	15	204.638	
	27519C0203	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	M	384	25	3.132	
7ª	27588C0201	MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO	L	304	20	157.844	390.317
	27588C0201	MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO	M	464	30	2.150	
	27588C0202	MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO	L	320	21	122.658	
	27588C0202	MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO	M	464	30	1.828	
	27588C0203	MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO	L	320	21	104.188	
	27588C0203	MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO	M	512	33	1.649	

Fonte: Dados adaptados de FNDE: PNLD 2015.

Por algum motivo desconhecido a 4ª coleção de livros, *Fronteiras da Globalização— o espaço brasileiro: Natureza e trabalho* não constam do Guia do Manual do Livro didático oferecido pelo programa com intuito de subsidiar os professores em suas escolhas.

Se o livro didático é, nos últimos dois séculos, o instrumento responsável pela importante tarefa de comunicar, produzir e transmitir o conhecimento escolar, segundo Mantovani (2009, p.20); nada mais coerente do que explicarmos a preocupação dos governos em garantir acesso a estas obras pela população brasileira. Trata-se de um volume considerável de material curricular disponibilizado ao professor para mediar/promover o ensino e a aprendizagem de Matemática. Os valores gastos com o processo avaliativo, com a compra e a distribuição das obras também são altos. Porém, mesmo com todo esse investimento, não há, por parte do Ministério da Educação, ações de acompanhamento do uso desses materiais pelos professores.

Conhecer então o livro didático por esta e outras pesquisas de temas subjacentes, nos esclarece o que está sendo oferecido aos professores e alunos brasileiros.

Fazer adaptações para adequar o livro às necessidades de aprendizagem de seus alunos é incumbência do professor, porque este pode conter exercícios e exemplos em excesso, ou a linguagem escrita pode não estar adequada aos seus alunos. Segundo Ponte (2000), o professor faz então adaptações, “saltando” por vezes secções inteiras do manual, ou complementando-o com outras tarefas que considera mais adequada para a exploração de certo tópico. (p.18)

É importante que os professores ao selecionarem os livros didáticos levem em conta não apenas a quantidade e a natureza dos exercícios e exemplos, ou mesmo apenas a linguagem, mas assim como também o estilo de percurso delineado, a natureza das tarefas propostas a sua articulação curricular. (PONTE, 2000)

O livro didático, segundo as concepções de Ponte, oferece uma proposta de percurso de aprendizagem (2005):

Numa tentativa de planificação do currículo, cada manual escolar oferece para cada unidade de conteúdo a ser estudado, uma proposta de percurso de aprendizagem. É preciso que as tarefas, propostas pelos autores, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permite aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática. (PONTE, 2005, p.18)

A importância do livro didático para o professor nos instigou a investigar este material curricular para conhecermos o que ele traz em seu bojo, segundo a proposta de seu autor.

Apresentamos a seguir a revisão de literatura feita com o intento de encontrar outras pesquisas de temas subjacentes que nos ajudassem a compreender melhor o livro didático de Matemática.

#### **1.4 Revisão de literatura**

Esta pesquisa tem como objetivo analisar como as funções exponenciais estão apresentadas nos livros didáticos das três coleções mais distribuídas pelo país com base no PNLD de 2015, já que são estes uns dos materiais curriculares que mais influenciam as práticas dos professores, e podemos encontrar nestes elementos para pôr em prática e materializar o que prescrevem ou orientam os documentos oficiais.

Apresentamos a revisão da literatura procurando fazer um levantamento de algumas pesquisas existentes sobre a análise de livros didáticos de Matemática.

Iniciamos, a princípio, uma busca com várias palavras-chave como Análise de livro didático: Funções exponenciais e logarítmicas, Livro didático de Matemática, Análise de livro didático de Matemática, até chegarmos à conclusão que “Análise de livros didáticos de Matemática” era a intersecção dentre os temas procurados. Isto é, escolhemos a palavra-chave que engloba o que foi pesquisado sobre livros didáticos de Matemática no *site* da Capes.

Encontramos quinze pesquisas, entre 2011 a 2015 que analisam livros didáticos de Matemática, porém onze delas voltadas para o ensino fundamental; uma delas para o ensino básico e apenas três delas para o Ensino Médio, o que estaria mais de acordo com nosso trabalho, embora não investiguem sob a perspectiva do conteúdo matemático de função exponencial que é nosso objeto matemático de estudo.

Achamos pertinente incluímos como parte deste trabalho de revisão de literatura, a dissertação que inspirou esta pesquisa, a saber, a de Fonseca (2013), da Universidade de Aveiro em Portugal, para que seja compreendido, o quão provocante está se tornou para nós, o que fez com que traçássemos nosso próprio caminho de investigação.

Fonseca (2013) estudou a forma como as funções exponenciais e logarítmicas são abordadas nos manuais escolares do 12º ano de Matemática em vigor em Portugal no ano letivo de 2012–2013 e como é feita a consolidação dos conhecimentos que advém destes manuais.



A escolha pelo tema se justificou pela importância que têm no Ensino Secundário e no Ensino Superior.

Para realizar a pesquisa, Fonseca utilizou uma grade cujos descritores: situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagens e argumentações recolheriam os dados para análise. Quanto às situações matemáticas, a pesquisadora contabilizou as tarefas sugeridas pelos autores aos alunos no intuito de que aplicassem os conhecimentos de função exponencial, assim como analisou a adequação didática das funções exponenciais e logarítmicas.

O estudo teve como alicerce a revisão de literatura sobre a análise de manuais, o currículo de matemática do Ensino Secundário e nos pressupostos teóricos e metodológicos de enfoque ontossemiótico do conhecimento e do ensino da matemática.

Fonseca se propôs a trabalhar com a metodologia qualitativa e a técnica de análise documental onde o instrumento de categorização dos dados foi uma grade de análise.

A pesquisadora obteve como resultados de sua pesquisa, que os manuais de livros didáticos pesquisados estão adequados quanto à didática, segundo as componentes *epistêmica*<sup>5</sup>, *mediacional*<sup>6</sup> e *ecológica*<sup>7</sup>, porém os autores privilegiam os cálculos algorítmicos em detrimento às tarefas de exploração, conjecturar, argumentar e modelação, sendo este estudo um alerta à necessidade de se produzir manuais escolares com maior número deste tipo de tarefas.

No Brasil as quatro pesquisas encontradas que irei citar datam de 2011 a 2015:

Lopes (2011) pesquisou a noção de infinito em livros didático desde a Educação Infantil ao ensino médio. Utilizou como fundamentação teórica os Campos conceituais de Gerard Vergnaud por lidar com múltiplas situações que envolvam a noção de infinitos nos livros didáticos desde a Educação Infantil ao ensino médio.

A pesquisadora utilizou a metodologia de análise de conteúdos com o objetivo de verificar indícios ou pistas a respeito da noção de infinito e conceitos, que poderiam estar presentes nos livros didáticos analisados.

Como conclusão, Lopes (2011) encontrou evidências e pistas na abordagem da noção de infinito nos livros didáticos da escola básica, traduzidos por atividades propostas pelo autor.

---

<sup>5</sup> Componente *epistêmico*: oferecer situações-problema que requer que os alunos conjecturem, interpretem e justifiquem as soluções obtidas.

<sup>6</sup> Componente *mediacional*: tarefas que requerem o uso de novas tecnologias tais como calculadoras gráficas e outras ferramentas tecnológicas como *softwares* de geometria dinâmica

<sup>7</sup> Componente *ecológica*: atividades contextualizadas e interdisciplinares.

Lopes (2011) acha pertinente que este tópico de noção do infinito seja incluído na grade curricular para que este seja tratado com maior grau de profundidade.

Martins (2012) pesquisou sobre a progressão aritmética e geométrica: praxeologias em livros didáticos de matemática do primeiro ano do ensino médio aprovados pelo PNLD e adotados pelo município do Ceará. Ele optou pela metodologia de pesquisa qualitativa e está se desenvolvendo identificando as praxeologias expostas nos livros didáticos analisados: as tarefas, as técnicas, o discurso tecnológico-teórico e os quadros numéricos, geométrico e algébrico; analisando os aspectos históricos referentes à progressão aritmética e geométrica, seus conceitos, às tarefas resolvidas e as propostas aos alunos.

A análise trouxe a comparação entre as praxeologias propostas pelos autores dos livros didáticos analisados e o que os documentos oficiais recomendavam. Estes destacavam a importância da articulação entre função e as progressões, a necessidade de propor tarefas que incentivem a generalização de padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como conclusão Martins (2012) constatou que nenhum dos livros analisados dão conta de desenvolver o pensamento algébrico nos estudos de progressões pois não oferecem com frequência tarefas que estimulem a generalização de padrões; dois deles não explicitam a estreita relação entre progressões e funções, e os outros dois o fazem apenas na teoria. Predominam tarefas para calcular, determinar podendo conduzir à rotinização da técnica. Poucas são as tarefas que permitem a articulação entre os diferentes quadros: numérico, algébrico e geométrico proposto por Douady (1985), dando prioridade ao algébrico e precisando o professor selecionar o livro mais adequado de acordo com sua opinião para trabalhar com seus alunos.

A pesquisa de Silva (2013) investigou sobre a transposição com expansão do conteúdo do livro didático de matemática para o *tablet* na perspectiva da teoria cognitiva da aprendizagem multimídia. O trabalho procurou mostrar que não se devem desenvolver materiais para o uso do *tablet* em sala de aula de maneira descompromissada sem compreender como ocorrem os processos cognitivos e a aprendizagem dos alunos.

O problema de pesquisa concentrou-se em como adaptar o conteúdo do livro didático para os *tablets* levando em conta seus efeitos na aprendizagem dos alunos à medida que este recurso de mídia tem o potencial de expandir e enriquecer os conteúdos dos livros impressos, acrescentando recursos de interatividade, vídeo, imagem e som.

Silva (2013) realizou uma análise de conteúdo sobre as funções trigonométricas seno e cosseno de seis livros didáticos aprovados na avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dos anos de 2009 e 2012 com intuito de conhecer como os livros impressos tratam este conteúdo.

Contando com a futura distribuição de *tablets* aos alunos de escolas públicas, Silva (2013) se propôs a estudar esta mídia.

Uma vez *tablets* e livros didáticos conhecidos, a pesquisa se aprofunda numa discussão utilizando a Teoria Cognitiva de Aprendizagem Multimídia e definem os doze princípios para o desenvolvimento de uma instrução Multimídia que resulte em uma aprendizagem Multimídia Significativa na transposição do conteúdo.

No trabalho apresentado por Carmo (2014), encontra-se um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do ensino Fundamental. Isto é, analisou se os quatro livros aprovados na avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2011 introduzem a linguagem algébrica por meio de atividades de generalização de padrões e como isso ocorre.

Em sua pesquisa Carmo (2014) utilizou como referencial teórico as ideias de Fiorentini, Miorin, Miguel (1993); Fiorentini; Fernandes; Cristóvão (2005) e Ursini *et al.* (2005).

A metodologia de pesquisa utilizada foi à análise de conteúdo fundamentada por Bardin (2011), e para investigar as atividades de generalização de padrões selecionadas dos livros didáticos estudados, Carmo (2014) usou as categorias para o desenvolvimento do pensamento algébrico adaptadas por Hamazaki (2010).

Como resultado da pesquisa das quatro coleções analisadas, concluiu que três utilizam atividades de generalizações de padrões com a finalidade de introduzir a linguagem algébrica e apenas uma aplica os quatro tipos de atividades que foram categorizadas na pesquisa segundo Hamazaki (2010). Em uma única coleção dos livros predominou a introdução da linguagem algébrica com padrões figurais, o que a caracteriza como pouco usada, apesar de pesquisas já mostrarem a eficiência deste procedimento para iniciar o estudo da álgebra.

A pesquisa de Fonseca (2013) inspirou o nosso instrumento de coleta de dados, a saber, uma grade, cujas categorias de análises foram por nós adaptadas, para ficarem adequadas às prescrições curriculares brasileiras.

As categorias de análises a que nos referimos, compõe o eixo investigativo de nosso trabalho. Portanto, nossas questões norteadoras da pesquisa estão inseridas nesta grade, que sintetiza nossa coleta de dados.

Pesquisamos sobre análise de livros didáticos de matemática no ano de 2015 e não encontramos trabalhos a respeito.

O levantamento feito pela revisão de literatura nos permitiu concluir que há poucas pesquisas sobre análise de livros didáticos de Matemática, o que reforça a sua importância.

Estas cinco pesquisas contribuíram significativamente para esta investigação:

A pesquisa de Fonseca (2013) serviu-me como referência na análise de livros didáticos a medida que adaptei a grade de análise por ela utilizada, assim como reformulei os descritores desta tabela, de acordo com a realidade brasileira e nossa proposta pedagógica.

Lopes (2011) pesquisou o conceito de infinito em livros didáticos desde a Educação Infantil até o ensino médio, me influenciando a procurar o conteúdo de função exponencial em outros capítulos e nos outros livros da coleção, dando um panorama do estudo de função exponencial por toda a coleção do livro analisado; o que fiz para os livros A, B e C das três coleções analisadas.

A pesquisa de Martins (2012) me apresentou uma possibilidade de análise sob a perspectiva curricular de um conteúdo matemático, apesar de ter como objeto matemático as progressões aritmética e geométrica.

O trabalho de Silva (2013) me provocou inquietações quanto à acessibilidade dos *tablets* na sociedade brasileira. Apesar de perceber o quanto os livros didáticos são limitados e aparentemente estáticos, a possibilidade de poder enriquecê-los me fez perceber que o livro didático ainda terá sua importância mesmo com o advento da tecnologia.

Carmo (2014) estudou a linguagem algébrica em livros didáticos, o que ajudou com o descritor que analisou a linguagem utilizada pelo autor para se trabalhar com funções exponenciais.

Não foram encontradas pesquisas sobre análise de livros didáticos no ano de 2015.

## CAPÍTULO II

Neste capítulo apresentamos nossa questão de pesquisa e os caminhos que percorremos em busca de respostas, por meio de questões norteadoras, tendo em vista nosso objetivo de investigação. Assim como justificaremos a escolha do tema função exponencial como objeto matemático analisado nos livros didáticos escolhidos para nossa investigação, sua importância quanto conhecimento matemático e como tem sido feita sua abordagem pelo currículo prescrito.

### 2.1 Questões de pesquisa

Como é proposto o estudo de Funções Exponenciais em livros didáticos de Matemática aprovados na avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2015?

#### 2.1.1 Perguntas norteadoras

Pretendemos obter com esta pesquisa respostas para as seguintes questões:

1. Que tipo de tarefas são propostas neste livro didático para a aprendizagem de funções exponenciais?
2. Que tipo de situações matemáticas são propostas neste livro didático na aprendizagem de funções exponenciais?
3. Quais foram os conceitos, proposições e procedimentos utilizados para o desenvolvimento da função exponencial?
4. O livro didático traz desafios na resolução de problemas contextualizados de funções exponenciais?
5. O livro didático propõe situações para serem modeladas que utilizem funções exponenciais?
6. Que tipo de linguagem o autor utiliza para o ensino de função exponencial?
7. Que tipo de exposições o autor propõe na apresentação do conceito de função exponencial?

### 2.2 A problemática em que se insere esta pesquisa:

Existia um grupo de pesquisa na PUC-SP denominado Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores formados por pesquisadores que participavam do projeto: “As relações entre professores e materiais que apresentam o

currículo de Matemática”, pertenciam à linha de pesquisa Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores. Estes vinham trabalhando para compreender como os professores interagem com os materiais curriculares e entendem que este trabalho também dependeria de se estudar as crenças e concepções desses professores, assim como o material que utilizam no preparo de suas aulas, pois este material é utilizado por estes professores de maneira a reproduzir, adequar ou mesmo criar, tendo este como referencial.

Nossa pesquisa não pretende compreender por que e como os professores interagem com os materiais curriculares de diferentes formas e sim compreender quais são as características deste material, em particular o livro didático, pois este interage com as crenças e concepções que os professores trazem para essa relação.

Acreditamos que a perspectiva desta pesquisa irá acrescentar muito para os trabalhos que continuam sendo feitos pelos integrantes do grupo, mesmo tendo sido este desordenado com a extinção desta linha de pesquisa pela PUC-SP.

Atualmente participo do grupo de pesquisa GPEA. “*Grupo de pesquisa em Educação Algébrica*”. As pesquisas têm como foco a investigação das concepções e conhecimentos do aluno e do professor em formação inicial, contínua e em serviço sobre Álgebra, que também abrangem a análise de documentos oficiais, de avaliações institucionais nacionais e internacionais.

No intuito de garantir uma análise de qualidade, pois analisar livros didáticos por inteiro não seria pertinente a uma dissertação de mestrado, decidimos optar por um dos conteúdos trabalhados no primeiro ano do ensino médio: Função Exponencial, opção esta que esclareceremos no item a seguir.

### **2.2.1 A escolha do tema Função Exponencial**

A escolha pelo tema Função Exponencial justifica-se pela importância que ele tem no currículo do ensino médio, no desenvolvimento de habilidades e competências segundo as prescrições curriculares e seus fins quanto à formação cidadã, além de ser um conhecimento fundamental para os estudantes que ingressam em diversos cursos no Ensino Superior.

[...] as funções exponenciais [...] são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é rápido, sendo aplicado em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações [...] (BRASIL, 2002, p.180).

O documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) complementa:

Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico da Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial, juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa, o logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. [...] (BRASIL, 2006, p.75)

Uma vez justificado a escolha pelo tema função exponencial, a seguir explicamos a importância de seu aprendizado.

### 2.2.2 Importância do ensino da função exponencial

Por meio da história da humanidade podemos afirmar que o conhecimento surge da necessidade de se encontrar a resposta para um problema real. O mesmo é verificado com o conhecimento matemático. Teoremas, fórmulas, axiomas, etc., são legados que surgiram para solucionar ou generalizar problemas a partir de situações concretas que permitem a criação de modelos teóricos para solucioná-los e a tomada de decisões de forma coerente. De acordo com Bassanezi, o objetivo fundamental do “uso” da Matemática é:

De fato, extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a Matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2013; p. 18)

Muitas situações do dia a dia como o crescimento populacional, a meia-vida de uma substância, a medida da pressão atmosférica, o cálculo do montante num sistema de juros compostos e o resfriamento de um corpo, são exemplos de aplicação da função exponencial, além de estabelecer relação com outras disciplinas, constantes no currículo do Ensino Médio. Tais situações também estabelecem relação com outras disciplinas do currículo o que faz com que o ensino da função exponencial tenha sentido, pois oportuniza ao aluno perceber a importância deste conteúdo e sua contextualização para solução de problemas reais.

Frente ao grande número de situações-problema apresentadas em livros didáticos achamos relevante considerar se tais aplicações da função exponencial são realmente modeladas por uma função  $f$ , dada por  $f(x) = ba^x$ , com  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $b \in \mathbb{R}$ . E  $a \neq 1$ .

Apresentamos a seguir a Função Exponencial descrita no livro de Lima (2001, p. 178-185)

Seja  $a$  um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base  $a$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , indicada pela notação  $f(x) = a^x$ , deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ :

- 1)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;
- 2)  $a^1 = a$ ;
- 3)  $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$  e  
 $x < y \Rightarrow a^y < a^x$  quando  $0 < a < 1$ .

Se uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tem a propriedade 1) acima, isto é,  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ , então  $f$  não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Logo, se existir algum  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) = 0$  então, para todo  $x \in \mathbb{R}$  teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo  $f$  será identicamente nula.

Além do que, se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tem a propriedade 1) e não é identicamente nula então  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Logo, diante da propriedade 1), tanto faz dizer que o contradomínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$  como dizer que é  $\mathbb{R}^+$ . A vantagem de tomar  $\mathbb{R}^+$  como contradomínio é que se terá  $f$  sobrejetiva, como veremos.

Se uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tem as propriedades 1) e 2) então, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + \dots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n.$$

Usando a propriedade 1), resulta daí, que para todo número racional  $r = \frac{m}{n}$ , como  $n \in \mathbb{N}$ , deve-se ter  $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$ .

Portanto  $f(r) = a^r$  é a única função  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$  para quaisquer  $r, s \in \mathbb{Q}$  e  $f(1) = a$ .



A propriedade 3) diz que a função exponencial deve ser crescente quando  $a > 1$  e decrescente quando  $0 < a < 1$ .

Daí resultará que existe uma única maneira de definir o valor  $f(x) = a^x$  quando  $x$  é irracional. Para fixar as ideias, suporemos  $a > 1$ . Então  $a^x$  tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s$$

Ou seja,  $a^x$  é número real cujas aproximações por falta são  $a^r$ , com  $r < x, r \in \mathbb{Q}$ , e cujas aproximações por excesso são  $a^s$ , com  $x < s, s \in \mathbb{Q}$ . Não podem existir dois números reais diferentes, digamos  $A < B$ , com a propriedade acima. Se existissem tais  $A$  e  $B$  teríamos

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s$$

e então o intervalo  $[A, B]$  não conteria nenhuma potência de  $a$  com expoente racional, contrariando o Lema que afirma quando fixado o número real positivo  $a \neq 1$ , em todo o intervalo não degenerado de  $\mathbb{R}^+$  existe alguma potência  $a^r$ , com  $r \in \mathbb{Q}$ :

Portanto, quando  $x$  é irracional,  $a^x$  é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências  $a^r$ , com  $r$  racional menor do que  $x$  e cujas aproximações por excesso são as potências  $a^s$ , com  $s$  racional maior do que  $x$ .

Definindo  $a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , não há maiores dificuldades para verificar que, de fato, são válidas as propriedades 1), 2) e 3) acima enunciadas. Além disso, tem-se ainda

4) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = a^x$  é ilimitada superiormente.

Logo, todo intervalo em  $\mathbb{R}^+$  contém valores  $f(r) = a^r$ .

Mais precisamente: se  $a > 1$  então  $a^x$  cresce sem limites quando  $x > 0$  é muito grande. E se  $0 < a < 1$  então  $a^x$  torna-se arbitrariamente grande quando  $x < 0$  tem valor absoluto grande.

5) A função exponencial é contínua.

Isto significa que, dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , é possível tornar a diferença  $|a^x - a^{x_0}|$  tão pequena quanto se deseje desde que  $x$  seja tomado suficientemente próximo de  $x_0$ . Dito de outro modo: o limite de  $a^x$  quando  $x$  tende a  $x_0$  é igual  $a^{x_0}$ . Em símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos  $x = x_0 + h$ , logo  $x - x_0 = h$  e então  $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$ . Sabendo que  $a^h$  pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos  $h$  suficientemente pequeno.

Como  $a^{x_0}$  é constante, podemos fazer o produto  $a^{x_0}|a^h - 1|$  tão pequeno quanto o queiramos, logo  $\lim_{x \rightarrow x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ .

6) A função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a \neq 1$ , é sobrejetiva.

Esta afirmação quer dizer que para todo número real  $b > 0$  existe algum  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $a^x = b$ . Para prová-la, escolhemos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , uma potência  $a^{r_n}$ , com  $r_n \in \mathbb{Q}$ , no intervalo  $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ , de modo que  $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$ . Portanto  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{r_n} = b$ . Para fixar as ideias, supomos  $a > 1$ . Escolhemos as potências  $a^{r_n}$  sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \dots < a^{r_n} < \dots < b.$$

Podemos fixar  $s \in \mathbb{Q}$  tal que  $b < a^s$ . Então a monotonicidade da função  $a^x$  nos assegura que  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < s$ .

Assim,  $(r_n)$  é uma sequência monótona, limitada superiormente por  $s$ . A completeza de  $\mathbb{R}$  garante então que os  $r_n$  são valores aproximados por falta de um número real  $x$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow x_0} r_n = x$ . A função exponencial sendo contínua, temos então  $a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{r_n} = b$ , como queríamos demonstrar.

Vemos, pois, que para todo número real positivos  $a$ , diferente de 1, a função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dada por  $f(x) = a^x$ , é uma correspondência biunívoca entre  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$ , crescente se  $a > 1$ , decrescente se  $0 < a < 1$ , com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é,  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ .

(A injetividade da função  $x \mapsto a^x$  decorre da sua monotonicidade. Se  $a > 1$ , por exemplo, então

$$x > y \Rightarrow a^x > a^y$$

e

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y$$

portanto  $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$ .)

Tem-se ainda

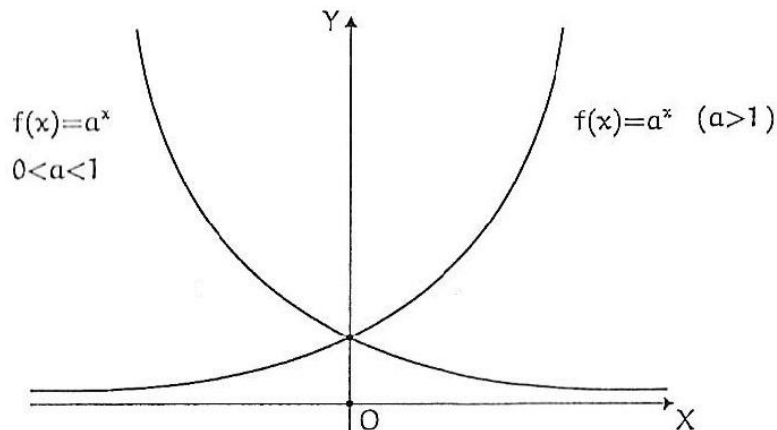
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ se } a > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \text{ se } 0 < a < 1,$$

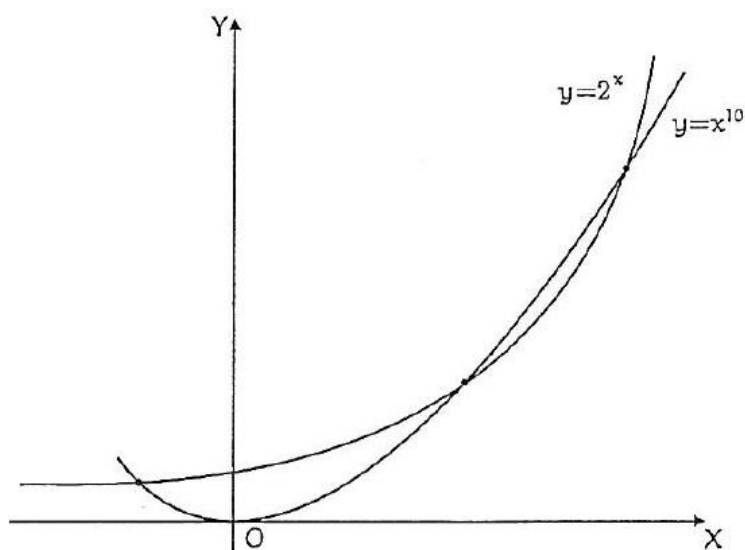
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \text{ se } a > 1 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \text{ se } 0 < a < 1.$$

A figura exibe o gráfico de  $f(x) = a^x$  nos casos  $a > 1$  e  $0 < a < 1$



Quando  $a > 1$ , nota-se que, quando  $x$  varia da esquerda para a direita, a curva exponencial  $y = a^x$  apresenta um crescimento bastante lento enquanto  $x$  é negativo. À medida que  $x$  cresce, o crescimento de  $y$  se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de  $x$ , a tangente é quase vertical. O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Se compararmos o gráfico de  $y = 2^x$  (por exemplo) com o de  $y = x^{10}$ , veremos que, para todo  $0 < x < 1,077$  temos  $x^{10} < 2^x$ . Para  $1,077 < x < 58,77$  tem-se  $x^{10} > 2^x$  e, para todo  $x > 58,77$  tem-se sempre  $2^x > x^{10}$ .



### Caracterização da Função Exponencial

De acordo com Lima (2001), as funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. Ainda de acordo com o autor:

As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oito primeiros anos da escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais. (LIMA, 2001, p. 183).

Conforme afirma Lima (2001), uma vez decidido que o modelo adequado para um determinado problema é uma função afim, quadrática ou exponencial, a partir daí o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades.

Em referência às dúvidas que possam surgir, Lima (2001) afirma que elas geralmente aparecem antes da escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda, logo, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função [...].

Teorema: (Caracterização da função exponencial.) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $f(nx) = f(x)^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $f(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a = f(1)$ ;
- (3)  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Demonstração: Serão provadas as implicações  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ . Para mostrar que  $(1) \Rightarrow (2)$  observa-se inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional  $r = \frac{m}{n}$  (com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ) tem-se  $f(rx) = f(x)^r$ . Com efeito, como  $nr = m$ , podemos escrever:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

Logo:  $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$ .

Assim, se pusermos  $f(1) = a$ , teremos  $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$  para todo  $r \in \mathbb{Q}$ . Para completar a demonstração de que  $(1) \Rightarrow (2)$  suponhamos, a fim de fixar as ideias que  $f$  seja crescente, logo  $1 = f(0) < f(1) = a$ . Admitamos, por absurdo, que

exista um  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) > a^x$ . Digamos, por exemplo, que seja  $f(x) < a^x$ , então, existe um número racional  $r$  tal que  $f(x) < a^r < a^x$ , ou seja,  $f(x) < f(r) < a^x$ . Como  $f$  é crescente, tendo  $f(x) < f(r)$  concluímos que  $x < r$ . Por outro lado, temos também  $a^r < a^x$ , logo  $r < x$ . Esta contradição completa a prova de que  $(1) \Rightarrow (2)$ . As implicações restantes,  $(2) \Rightarrow (3)$  e  $(3) \Rightarrow (1)$  são óbvias.

Observação. O Teorema de caracterização pode ser enunciado de um modo um pouco diferente, substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que  $f$  seja contínua. A demonstração do passo  $(1) \Rightarrow (2)$  muda apenas no caso  $x$  irracional. Então tem-se  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_n, r_n \in \mathbb{Q}$ , logo, pela continuidade de  $f$ , deve ser

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x.$$

Dizemos que uma função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de tipo exponencial quando se tem  $g(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Se  $a > 1$ ,  $g$  é crescente e se  $0 < a < 1$   $g$  é decrescente.

Se a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de tipo exponencial então, para quaisquer  $x, h \in \mathbb{R}$ , os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \text{ e } \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Mostraremos agora que vale a recíproca.

Teorema: (Caracterização das funções de tipo exponencial.) Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para  $x, h \in \mathbb{R}$  quaisquer, o acréscimo relativo  $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$  dependa apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Então, se  $b = g(0)$  e  $a = \frac{g(1)}{g(0)}$ , tem-se  $g(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Demonstração: Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que  $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$  independe de  $x$ . Substituindo, se necessário,  $g(x)$  por  $f(x) = \frac{g(x)}{b}$ , onde  $b = g(0)$ ,  $f$  continua monótona e injetiva, com  $\frac{f(x+h)}{f(x)}$  independente de  $x$  e, agora, com  $f(0)=1$ . Então, pondo  $x=0$  na relação  $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$ , obtemos  $\varphi(h) = f(h)$  para todo  $h \in \mathbb{R}$ .

Vemos assim que a função monótona injetiva  $f$  cumpre  $f(x + h) = f(x) \cdot f(h)$ , ou seja,  $f(x + h) = f(x) \cdot f(h)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Segue-se então do teorema anterior que  $f(x) = a^x$ , logo  $g(x) = bf(x) = ba^x$ , como queríamos demonstrar.

## CAPÍTULO III

### Referencial Teórico

Apresentaremos neste capítulo nosso aporte teórico definindo a concepção de currículo adotada nesta pesquisa, os prescritores curriculares brasileiros e suas orientações quanto ao ensino de função exponencial na perspectiva de desenvolver habilidades e competências que dizem respeito ao ensino na Matemática no Ensino Básico.

#### 3.1 A concepção de Currículo adotada nesta pesquisa

Estudar o currículo prescrito é procurar identificar, segundo Sacristán (2000), de que modo esse documento vislumbra a educação, a escola, os processos de ensino e de aprendizagem e o modelo de formação de uma nação. É um documento de referência para a elaboração de materiais didáticos, de formação de professores e de propostas de situações de aprendizagem.

Estudar o currículo prescrito nos possibilita compreender o modelo de ensino a partir de prescrições oficiais e de que modo esse modelo se faz presente em situações de sala de aula.

A concepção de currículo que embasou nossa pesquisa é a do educador espanhol José Gimeno Sacristán (2000). Este alega que o currículo não é um documento único que pertence a uma determinada hierarquia no processo educacional. O currículo, concebido como um elemento complexo que envolve diferentes atores e extratos sociais se materializa de modo diferente entre aquilo que propõe os órgãos públicos ligados aos setores da Educação e o que se efetiva em situações de aula.

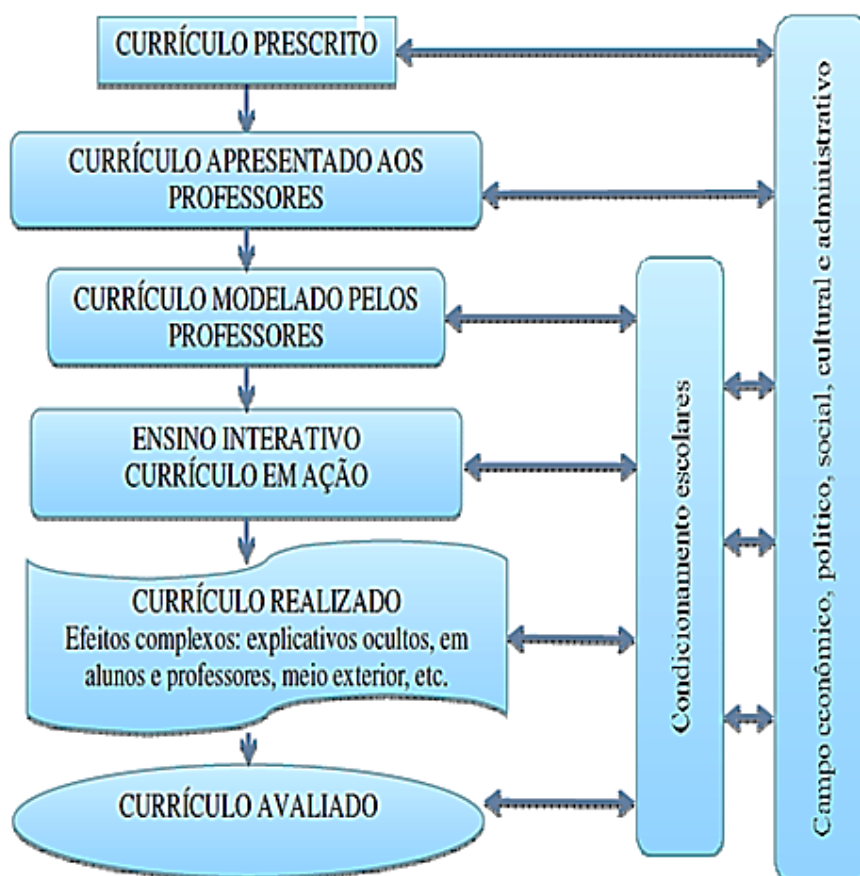
O currículo concebido por Sacristán (2000) é definido como um objeto em constante construção, definido por diferentes instâncias que atuam sobre ele, baseia-se num modelo subdividido em seis diferentes níveis. O *currículo prescrito*, aquele constituído pela instância administrativa, governamental, pelas equipes de especialistas, por proposta do Ministério da Educação, com caráter de currículo oficial; o *currículo apresentado ao professor*, constituído pela instância que traduz as determinações oficiais, assim surgem as principais linhas do currículo prescrito, constitui-se pelos materiais didáticos como livros didáticos, livros e apostilas de apoio à prática letiva; o *currículo moldado* pelo professor, constituído pelo conjunto de materiais elaborados pelos professores como planos de aula, projetos, situações de aprendizagem, com o

intuito de colocar em prática o currículo prescrito; o *currículo em ação*, efetivado pela prática do professor e participação dos alunos no desenvolvimento de situações de aula; o *currículo realizado*, constituído pelo produto de efeitos cognitivo, afetivo, social, moral, cultural, entre outros, revelando – em diários de classe, seminários, exposição oral, cadernos do aluno – que ensino e aprendizagem foram praticados (JANUÁRIO, 2012); e o *currículo avaliado*, constituído por instrumentos que procuram “medir” o currículo desenvolvido e “aprendido”, por meio de avaliações internas e externas, cujo objetivo é impor critérios de relevância para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos.

Visando a representação do currículo como a construção dada no entrelaçamento de influências e campos de atividades diferenciados e inter-relacionados, o autor desenha um modelo constituído de seis níveis ou fases.

A seguir explicito os seis níveis de currículo segundo o autor:

Figura. 02: A objetivação do currículo no processo do seu desenvolvimento.





Segundo Sacristán (2000) o *currículo prescrito* é o nível um, ou fase um, na qual há existência de prescrições ou orientações no que se entende por seu conteúdo, e pode ser caracterizado por um conjunto de decisões e orientações normativas tomadas no interior das secretarias federais, estaduais e municipais de educação. Esse conjunto de normas e decisões se materializam em diretrizes, resoluções, orientações e parâmetros curriculares, constituindo esses documentos de referência na ordenação do sistema curricular, servindo como ponto de partida para autores elaborarem diferentes materiais didáticos como apostilas, livros didáticos e para professores e gestores vislumbrarem suas práticas pedagógicas. (Grifo nosso)

O nível dois, o *currículo apresentado* chega para os professores por meio dos meios e materiais curriculares, em destaque os livros didáticos escolares. Estes materiais colocam à disposição do professor uma interpretação do currículo, mais orientada para a prática letiva o que facilita aos professores a atividade de *planificação* de suas aulas.

Em terceiro lugar, apresento o *currículo moldado*, resultado da interpretação do professor, seja a partir do currículo prescrito, ou dos materiais curriculares. O professor, segundo Fonseca (2013), é agente decisivo na concretização do currículo, é um tradutor que intervém na configuração do significado das propostas curriculares, nomeadamente quando realiza o trabalho de planejamento individual ou coletivamente.

O quarto nível, o *currículo em ação* é o que é praticado no âmbito da escola, e na sala de aula pelo professor junto a seus alunos. É direcionado por ideias teóricas e práticas do docente. Trata-se, segundo Januário (2012), do conjunto de aprendizagens vivenciadas pelos alunos em consequência dos atos de seu professor no decorrer da aula.

O quinto nível, o *currículo realizado* é produto de efeitos cognitivo, afetivo, social, cultural entre outros. É o currículo praticado a partir do que fora proposto, o que foi realmente trabalhado em situações de aula, podendo ser identificado em seminários, diário de classe, caderno de aluno ou relatório do professor.

O sexto nível, o *currículo avaliado* é o modo de verificar, por meio de avaliações, o que das prescrições foi praticado no interior das escolas. Para Sacristán (2000, p. 106) esta fase se dá em meio a pressões externas à sala de aula, o que “acaba impondo critérios para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos”. Esta fase do currículo também pode ser concebida a partir das atividades avaliativas, como provas e exames realizados em sala de aula pelo professor, com o intuito de informar o docente o quanto o aluno aprendeu, assim como também para detectar defasagens existentes em relação ao conteúdo trabalhado.

Nossa investigação concentra-se no nível do currículo apresentado, especificamente analisando as propostas dos autores de livros didáticos aos professores para o ensino de funções exponenciais.

### **3.2 As prescrições curriculares para o ensino de funções exponenciais**

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, nº 9394/96, LDB/96, pretendeu mudar o foco da Educação brasileira, “não é a aprendizagem que deve se ajustar ao ensino, mas sim o ensino que deve potencializar a aprendizagem”, (BRASIL, 1996, p.39). Para tanto estabeleceu os objetivos de melhorar o nível de escolaridade da população, melhorar em todos os níveis a qualidade de ensino, reduzir as desigualdades sociais e regionais em relação ao acesso e à permanência na escola pública, e democratizar a gestão do ensino público prevendo a participação dos profissionais da educação na elaboração do projeto pedagógico da escola, e a participação da comunidade escolar e local em seus colegiados.

Em 1997 foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, PCNEF, (BRASIL, 1997) para o Ensino Fundamental. Mesmo não sendo o foco de nossa pesquisa, nos é importante porque é neste documento que os professores são orientados a utilizar diferentes recursos estratégicos e metodológicos para ajudar seus alunos em seu processo de aprendizagem, portanto seu papel não deveria ser mais o de ensinar expondo o conteúdo a ser estudado, e sim oferecer oportunidades de aprendizagem significativa ao mediar o trabalho do aluno em aprender. Entenda-se como oportunidades significativas como tarefas de resolução de problemas, da história da Matemática, utilização de recursos tecnológicos e jogos, no intuito de que este profissional possa melhorar a qualidade de ensino, e conseqüentemente da aprendizagem dos alunos.

Cabe aos docentes escolher tanto a organização curricular, como a forma de trabalhar com os estudantes. (ANDRADE, 2012, p. 84).

Os PCNEF (1997) orientam que se dê ênfase aos fenômenos do mundo real, propondo o conteúdo a ser estudado em contexto da realidade do aluno, assim como também deve articular os campos da Álgebra, Aritmética e Geometria.

#### **3.2.1 Finalidades do ensino da Matemática para o nível médio**

Em 2000 foram publicadas orientações curriculares para o Ensino Médio, PCNEM. Acharmos pertinente nesta investigação, não perdermos de vista as finalidades do ensino da Matemática para o nível médio, no documento Parte III, pois estas indicam

os objetivos que precisam ser alcançados pela proposta; o que vai nos ajudar em nossas considerações finais.

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p. 42)

Não perdendo o foco de nossa investigação, os PCNEM sugerem aos professores que a introdução da noção de função no Ensino Fundamental, deve acontecer com o estudo da proporcionalidade, pois este se permite articular com diferentes noções: resolução de problemas multiplicativos, porcentagem, semelhança de figuras geométricas, Matemática Financeira, e a análise de tabelas e de gráficos. Mas é importante que os alunos ao iniciarem o estudo de funções nesta etapa escolar, o façam de maneira contextualizada e articulada com a noção de proporcionalidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) determinam um novo perfil para o currículo apoiada em competências e habilidades básicas. também determinam que o saber matemático, científico e tecnológico deva ser desenvolvido de maneira que possibilitem a inserção dos estudantes na vida adulta como cidadãos, não mais como prerrogativas de especialistas.

O documento não faz nenhuma sugestão quanto aos conteúdos a serem estudados, mas orientam os professores a buscarem novas abordagens metodológicas, a fim de garantir a flexibilidade para tratar esse conceito por meio de diferentes situações intramatemática e extramatemáticas, dando conta de descrever e estudar o comportamento de determinados fenômenos tanto das ciências, como do cotidiano. Esclarece ser necessário dar significado ao conhecimento escolar por meio da interdisciplinaridade e da contextualização, articulando as disciplinas de Matemática, Física, Química e Biologia.

Cabe ao professor incentivar seus alunos a raciocinar de maneira que se tornem autônomos e desenvolvam habilidades de representação, comunicação, investigação, compreensão e contextualização sócio cultural.

Os conteúdos intramatemática devem se articular, e para tanto é prescrito associar os estudos de função exponencial com as progressões geométricas, cujo domínio é o conjunto dos números naturais, no campo da Álgebra, e a articulação das propriedades de retas e parábolas com as propriedades dos gráficos das funções correspondentes, no campo da Geometria Analítica. No entanto, somente essas orientações foram insuficientes para auxiliar os educadores na elaboração de seus projetos, o que resultou na elaboração de outro documento pelo Ministério da Educação: Orientações Educacionais Complementares, os PCN+ Ensino Médio em 2002.

Este documento apresenta as Bases Legais no encarte da parte I para fundamentar legalmente a implementação, e os livros com as três áreas do conhecimento:

Parte II - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias.

Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Parte IV - Ciências Humanas e suas Tecnologias

Nestas novas orientações reforçam-se as habilidades e competências em continuidade para as quatro disciplinas: Matemática, Física, Química e Biologia, independente de qual área pertencem já que continuam valendo as prescrições quanto ao trabalho interdisciplinar e contextualizado. E encontramos neste documento a estruturação da Matemática em três blocos: Números e Funções, Geometria e Medidas e também Análise de Dados, como sugestão organizacional dos conteúdos a serem desenvolvidos nesta etapa escolar.

### **3.2.2 Competências e habilidades da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.**

O quadro sintético abaixo explicita as competências e habilidades que garantem a unidade de ensino das diferentes disciplinas da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Estas devem orientar o trabalho dos professores de maneira integrada por essas áreas, e permite que transitem pelas outras duas áreas, não perdendo o foco a todo o momento na melhora da formação deste aluno no término do Ensino Médio.

#### **Representação e comunicação**

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

#### **Investigação e compreensão**

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

#### **Contextualização sociocultural**

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (BRASIL, 2002; p.12–13)

### **3.2.3 As prescrições curriculares quanto ao ensino de Função Exponencial**

Em concordância com os documentos anteriores, estas orientações indicam para o ensino das Funções, a exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações contextualizadas, e oferecem exemplos para auxiliar os professores: extramatemática como idade e altura, intramatemática como a área da circunferência e seu raio; além das situações interdisciplinares como, velocidade e espaço - na Física, pressão e temperatura - na Química, crescimento populacional e o tempo - em Biologia, juros e o tempo de aplicação - na Matemática Financeira, assim como exemplos de modelo de Funções Lineares associada à noção de proporcionalidade, direta quando no modelo de crescimento, e proporcionalidade inversa quando em decréscimo, assim como Funções Quadráticas em problemas que se pretende determinar a área máxima, Funções Polinomiais em particular as que podem ser decompostas em Funções Afins, e para exemplo do nosso foco de investigação, a Função Exponencial podemos citar o crescimento de colônias de bactérias.

Embora os PCN+ de 2002 dessem orientações quanto ao trabalho matemático a ser desenvolvido pelos educadores do Ensino Médio, este documento não foi suficiente para auxiliá-los em suas dificuldades.

O Ministério da Educação em 2006 publicou um novo documento: Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), que mantém toda a proposta dos

documentos anteriores e seus objetivos quanto à formação desses alunos do Ensino Médio, assim como também mantém a proposta inicial deixando a Matemática estruturada em quatro blocos, a saber: Números e Operações, Funções, Geometria, Análise de Dados e Probabilidade; mas, além disso, no campo da Álgebra, as Funções recebem um tratamento especial com a oferta de mais exemplos específicos, para que o professor consiga desenvolver seu trabalho de maneira articulada e flexível, como já fora orientado nas propostas anteriores.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), orientam mais detalhadamente as atividades a serem apresentadas aos alunos, com intuito de ajudar os professores na compreensão deste documento. Podemos citar o exemplo com as Funções Exponenciais, assunto de nossa investigação:

É pertinente discutir o alcance do modelo linear na descrição de fenômenos de crescimento, para então introduzir o modelo de crescimento/decrescimento exponencial ( $f(x) = a^x$ ). É interessante discutirmos as características desses dois modelos, pois enquanto o primeiro garante um crescimento à taxa constante, o segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial [...] nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos (BRASIL, 2006, p.74–75).

Neste momento se faz necessário apontar uma falha neste documento quanto a garantir que  $f(x) = a^x$  seja uma Função Exponencial. Pois sabemos que se  $a = 1$  esta função é uma constante o que a descaracteriza como função exponencial. Fica aqui a observação sobre a necessidade de se informar que, para se trabalhar no conjunto dos números reais, para  $a > 1$  para Função Exponencial crescente e para  $0 < a < 1$ , para garantir a existência da Função Exponencial decrescente.

Embora tenha havido esforços para ajudar os professores na melhora da interpretação das orientações prescritas, esta não parece ter dado resultados na melhora do desempenho de nossos alunos. No próximo capítulo trataremos sobre a metodologia adotada neste trabalho, os procedimentos metodológicos que realizados no intento de responder nossa questão de pesquisa; assim como também apresentaremos no instrumento de coleta de dados, a grade e seus descritores, procurando explicá-los um a um.

## CAPÍTULO IV

A seguir justificamos a metodologia adotada nesta pesquisa, relataremos nossos procedimentos metodológicos para conseguirmos responder nossa questão de investigação.

### 4.1 Metodologia

Os documentos que analisamos nesta pesquisa são os livros didáticos que foram aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático do ano de 2015. Estando estes aptos a fazerem parte da escolha pelos professores brasileiros a serem adotados e distribuídos para a maior parte das escolas do território nacional.

Optamos nesta pesquisa pela abordagem qualitativa, que tem se configurado como um importante modelo de investigação, pois segundo Ghedin e Franco (2008) como área de ensino e pesquisa a Educação faz parte de um processo histórico de uma prática social humana;

[...] é um processo histórico, inconcluso, e que emerge da dialética entre homem, mundo, história e circunstâncias. Sendo um processo histórico, não poderá ser apreendida por meio de estudos metodológicos que congelem alguns momentos dessa prática. Deverá o método dar conta de apreendê-la em sua natureza dialética, captando não apenas as objetivações de uma prática real e concreta, mas também a potencialidade latente de seu processo de transformação. (GHEDIN e FRANCO, 2008, p. 40).

Uma das características da abordagem qualitativa é a flexibilidade quanto aos procedimentos de coleta de dados, o que nos permite identificar as ações mais adequadas à investigação que realizamos. Assim sendo, optamos pela análise documental como procedimento de coletas de dados em nossa pesquisa.

A análise documental segundo Lüdke e André (1986), “pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos”, pois a partir do que os documentos expõem, pode-se desvelar “aspectos novos de um tema ou problema” (p.38).

As autoras esclarecem que para se realizar uma análise é preciso iniciar com a construção de categorias de análises, isto é, os descritores.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) a categorização constitui-se de um processo de seleção ou organização de informações em categorias estabelecidas. Estas categorias são como classes ou conjuntos que contém elementos ou características comuns. A fase mais formal da análise no processo de pesquisa se dá quando a coleta de dados está em sua fase final e no processo de levantamento bibliográfico, nas leituras de pressupostos teóricos da teoria, faz-se uma análise, que se torna mais “formal” com a finalização da coleta dos dados.

## **4.2 - Procedimentos metodológicos**

Concebida como investigação em torno do que se deseja compreender, apresentamos nesta pesquisa uma análise dos elementos que se constituem significativos para o pesquisador. Essa forma de compreender a pesquisa, segundo Bicudo (2004), leva a não neutralidade do pesquisador em relação ao estudo, pois ele atribui significado, seleciona o que pretende investigar, e assim questiona e interage com esse mundo e se dispõe a difundir seus resultados. Nosso trabalho pretende apresentar, segundo Bogdan e Biklen (1994), uma reflexão particular de um conhecimento que está sendo difundido no interior da escola com o uso do livro didático pelo professor no preparo de suas aulas; estas são uma produção de conhecimento visando responder às inquietações de um pesquisador a partir de um referencial qualitativo, com afirmações particulares para uma realidade que não pode ser mensurada, mas analisada e interpretada à luz de significados, motivos, apurações, crenças, valores e atitudes.

Nossa proposta de pesquisa tem como objetivo de estudo analisarmos três livros didáticos aprovados pelo PNL D 2015, quanto ao estudo de funções exponenciais. Utilizamos uma tabela/grade com as categorias de análise, os descritores, como instrumento de coleta de dados, à medida que foram feitas as análises quanto à maneira como o autor da obra propôs a apresentação do conteúdo e contabilizado o número de tarefas sugeridas. E em seguida prosseguimos anotando os resultados das observações com as impressões pertinentes. Observações estas quanto à linguagem utilizada, os procedimentos, as proposições, a maneira como o autor contextualizou os conceitos, e criou situações para exploração, investigação e modelação.

A apresentação da análise dos dados foi agrupada numa tabela/grade, inspirada na dissertação de Fonseca (2013), com seis categorias, composta por descritores, conforme indicaremos no capítulo IV, que surgiram de reflexões amparadas em nosso referencial teórico, na revisão da literatura e num primeiro contato com estas coleções, no intuito de conhecer o material, o que justificou a necessidade de adaptar a tabela de análise aos objetivos desta pesquisa.

## **4.3 – As etapas da pesquisa**

Explicaremos passo a passo como foram realizadas as etapas deste trabalho:

No primeiro momento definimos o problema a ser pesquisado e em seguida fizemos a revisão de literatura para situarmos o quão importante consistiria esta pesquisa no âmbito das pesquisas já realizadas sobre análise de livros didáticos.



Concluído que existem poucas pesquisas sobre o tema e com esta metodologia, prosseguimos com os trabalhos.

Na etapa seguinte, definimos a importância desta pesquisa, o objeto de estudo, a saber, o livro didático, assim como definimos o conhecimento matemático a ser estudado e que faria parte das investigações: Função exponencial.

O próximo passo foi definir o referencial teórico que embasaria nossa questão de pesquisa, e a metodologia que seria adotada.

Definido como seria feita a pesquisa, nos debruçamos na tarefa de adaptar a grade de recolha de dados utilizada por Fonseca (2013) em sua pesquisa, reelaborando os descritores que deveriam estar em consonância com nosso aporte teórico. Alteramos a classificação das tarefas emergentes oferecidas unificando cálculos algorítmicos, a aplicação da definição e a aplicação de uma propriedade para manipulação e incluímos a resolução de problemas. Para nós as proposições devem ser vistas do ponto de vista da revisão de Potenciação. E para evitar problemas com a tradução da língua portuguesa de Portugal e a língua portuguesa do Brasil, esclarecemos os descritores explicando cada um pela perspectiva da proposta curricular PCNEM (2000).

A primeira etapa da compilação dos dados se constituiu em resolver todas as tarefas propostas pelos autores em cada livro didático a ser analisado, com o intuito de classificar segundo o descritor referente às tarefas propostas aos alunos, procurando classificá-las e quantificá-las segundo as que pediriam para apresentar graficamente a função exponencial, assim como as que permitiriam a exploração/ investigação, argumentação/conjectura e também as que ofereceriam a possibilidade de manipular ao resolver o exercício, utilizando propriedades e definições, provar, resolver problemas ou até mesmo modelar por parte dos alunos.

Uma vez terminada esta parte da análise, transcrevemos os resultados quantitativos para a grade respectiva de cada livro, e construímos um gráfico que representa a quantidade de cada “tipo” de tarefas propostas por cada autor em seu livro.

O intuito dos trabalhos foi o de responder nossa questão de pesquisa:

Como é proposto o estudo de Funções Exponenciais em livros didáticos aprovados na avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2015?

E para tanto nos orientamos pelas questões norteadoras elencadas logo a seguir no item 4.4, para responder esta questão. Achamos pertinente mostrá-las, pois suas respostas se encontram transcritas na grade de análise.

Terminados os procedimentos acima citados iniciamos no capítulo V desta pesquisa a análise propriamente dita.

Este capítulo é destinado à análise dos três livros didáticos.

A princípio fizemos uma análise da proposta do desenvolvimento curricular sob a perspectiva de função exponencial proposta por cada autor, separadamente. Para tanto, selecionamos os elementos fornecidos por cada autor, observando à apresentação do conceito, a revisão de potenciação, a metodologia apresentada para a institucionalização dos conceitos trabalhados e as linguagens adotadas pelo autor neste capítulo. Observamos, também como foram feitas as proposições para com os trabalhos de revisão, os procedimentos sugeridos em cada livro e a argumentação feita pelo autor como sugestão de estratégia para os professores trabalharem com seus alunos.

Quanto às tarefas resolvidas e as para serem oferecidas aos alunos, além de classificá-las entre sete tipos diferentes: construir gráficos, manipular, explorar, conjecturar/argumentar, provar, modelar e resolver problemas, nós também as quantificamos, com o intuito de conhecermos a porcentagem/quantidade de cada tipo de tarefa em relação ao todo oferecido, assim como tabulamos a quantidade de exercícios resolvidos nas tarefas de revisão.

No final de cada livro analisado sob esta perspectiva, trouxemos algumas considerações.

Uma vez feita esta parte dos trabalhos, propusemos realizar uma análise comparativa sobre o conteúdo de função exponencial entre os três livros pesquisados, procurando mostrar o que cada autor propôs para cada categoria de análise sob a perspectiva dos PCNEM (BRASIL, 2000) que explicaram cada descritor das categorias elencadas: Situações, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentação. Para tanto procuramos trazer exemplos dos livros citados no intuito de elucidar nossas escolhas.

Com as análises comparativas terminadas trouxemos algumas conclusões do que chamamos de resultados. Fizemos um levantamento sobre o que foram encontrados de comum entre os três livros analisados no que dizem a respeito do conceito de função exponencial, sob o ponto de vista de estar de acordo com os PCNEM (BRASIL, 2000), assim como o de não estar de acordo com estas prescrições. Assim, verificamos o que encontramos de diferente entre os três livros.

Depois disso encerramos os trabalhos com nossas considerações finais.

A seguir apresentaremos nossas questões norteadoras que deram origem aos descritores da Tabela de análise.

#### 4.4 Questões norteadoras da pesquisa introduzidas na Tabela de análise

Apresentamos agora as questões que pretendemos analisar nas três coleções de livros didáticos de Matemática, separados para este fim, segundo critérios que serão explicitados no corpo desta pesquisa:

- 1- Que tipo de situações são propostas pelo autor para que o professor introduza o conteúdo de funções exponenciais aos alunos do 1º ano do Ensino Médio?
- 2- O autor propõe a revisão de conteúdos que serão base para o aprendizado de funções exponenciais?
- 3- Que tipo de tarefas e qual a quantidade delas é proposta pelo autor a serem trabalhadas com os alunos desta série?

Analisar os tipos de tarefas oferecidas pelo autor ao professor para que os alunos tenham a oportunidade de:

- 3.1- Construir gráficos.
- 3.2- Explorar.
- 3.3- Realizar exercícios de manipulação.
- 3.4- Elaborar conjecturas e argumentar.
- 3.5- Provar.
- 3.6- Resolver problemas contextualizados.
- 3.7- Modelar.

- 4- Que tipo de linguagem o autor utiliza para que o aluno consiga compreender o que ele está justificando, explicando ou resolvendo uma tarefa?
- 5- Que tipo de exposições o autor propõe na apresentação do conceito de função exponencial?
- 6- Que tipo de proposta o autor sugere que o professor faça para seus alunos quando na revisão das propriedades de potência: formal ou informal?
- 7- Que tipo de procedimento o autor propõe ao professor utilizar para desenvolver habilidades e competências que os permitam resolver as tarefas propostas, a saber: Utilizar várias abordagens ou uma única, ou mesmo resolver exercícios como exemplo, propor atividades que permitam que seus alunos explorem, investigue, conjecturem estratégias/procedimentos, demonstrem, argumentem seus procedimentos e resultados?

A seguir mostramos como estruturamos a grade de coleta dos dados à luz das questões acima elencadas.

#### 4.5- O Instrumento de coleta de dados

Adaptamos como já foi anteriormente explicado, a grade de coleta de dados da dissertação de Fonseca (2013) da Universidade de Aveiro, por se adequar aos objetivos e à questão desta pesquisa.

As mudanças que foram feitas dizem respeito aos descritores, pois estes precisavam estar de acordo com os prescritores curriculares, PCNEM (BRASIL, 2000), como já foi explicado no item 4.3 deste capítulo. Uma vez estes determinados, pudemos nos concentrar em analisar o capítulo de Funções Exponenciais dos livros em questão.

A seguir apresentaremos nosso instrumento de coleta de dados:

Tabela05: A Tabela de coleta de dados

Categories	Subcategorias	Análise do livro didático		
1. Situações	1.1 Introdução/motivação			
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas): Revisão: Emergentes:			
	1.3 Tarefas (Que os autores propõem ao estudante):	A) Conhecimentos Prévios:		
		B) Conhecimentos Emergentes:	1-Representar graficamente funções	
			2-Explorar	
			3-Manipular	
			4-Conjeturar/argumentar	
5- Provar				
	6- Modelar			
	7- Resoluções de problemas			
2. Linguagem	Formal ou informal?			
3. Conceitos	Explícito ou implícito?			
4. Proposições (Propriedades de potência)	4.1 Como as apresentam/recordam?			
	4.2 Prova, demonstra ou justifica?			
	4.3 Mostram sua utilização em exercícios ou só as expõem?			
5. Procedimentos: métodos de resolução de exercícios	5.1 Utilizam diversas maneiras diferentes de se resolver um exercício?			
	5.2 Justificam ou não a resolução?			
	5.3 Utilizam as novas tecnologias?			
6. Argumentações	6.1 Utilizam uma prática discursiva, verbal ou gráfica para convencer da validade de determinadas propriedades.			
	6.2 Tipo de prova usada.			

Fonte: Adaptada de FONSECA, 2013.

## 4.6 Apresentação, descrição e justificativa

Faremos a apresentação dos descritores de cada uma das seis categorias de análise, bem como das suas subcategorias, no intuito de fundamentarmos os descritores escolhidos para análise dos livros didáticos.

### **Categoria 1 - Situações**

1.1 Introdução/motivação: Análise do tipo de situação de ensino que o autor propõe para introduzir/motivar:

- O autor apresenta uma situação que estimula o interesse do aluno na aprendizagem de funções exponenciais?
- Pode-se dizer que justifica a importância de sua aprendizagem por ter aplicação na vida real, na própria Matemática ou em outras ciências como a Química, Biologia, Geografia, Astronomia e na Nanociência. Analisamos se o autor apresenta uma proposta de resolução da situação-problema ou se apenas expõe o assunto novo sem problematização ou mesmo se o faz, sem resolver o exercício.

Segundo Vasconcellos (2008) contextualizar é apresentar situações em sala de aula que façam sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos por meio da problematização, resgatando as informações que os alunos trazem e os conhecimentos prévios e, criando dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, e possivelmente resultando na melhora da aprendizagem.

Conhecimentos prévios são considerados por muitos professores, como sendo os conteúdos já estudados pelo aluno nas séries anteriores e que ele já domina. Porém, os conhecimentos prévios a que estamos nos referindo também levam em conta a “capacidade” do aluno em ler e interpretar questões e a sua vivência sócio cultural e profissional.

Apresentar situações-problema dentro de um contexto de realidade em sala de aula é uma estratégia de ensino que serve como um importante aliado do professor para motivar a aprendizagem dos alunos, à medida que os estimula a se interessarem por determinado assunto que irão aprender. Estas relações são importantes atrativos para que o aluno tenha predisposição para a aprendizagem de determinado conteúdo, e que possam desenvolver habilidades e competências quando no estudo de temas como Função Exponencial.

No caso de nossa pesquisa, o tema Funções Exponenciais possui um terreno fértil de situações contextualizadas para poderem ser trabalhadas por meio de problemas e modelação.

Os PCN+ (2002), orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), elucidam com maior clareza as intenções dos documentos oficiais anteriores. Os PCN+ foram elaborados na intenção de melhorar as explicações ao se trabalhar com contextualizações, assim como também a compreensão do princípio de interdisciplinaridade, o que indica que a preocupação está voltada para assuntos de desenvolvimento de estratégias inovadoras de ensino e visando uma melhora na qualidade da aprendizagem do aluno.

As diretrizes curriculares citam:

[...] um ensino por competências nos impõe um desafio que é organizar o conhecimento a partir não da lógica que estrutura a ciência, mas de situações de aprendizagem que tenham sentido para o **aluno**, que lhe permitam adquirir um instrumental para agir em diferentes contextos e, principalmente, em situações inéditas de vida. (BRASIL, 2002, p.36)

Uma das grandes competências propostas pelos PCNEM diz respeito à contextualização sociocultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade. (BRASIL, 2002, p. 126).

### 1.2 Exemplos e exercícios resolvidos/explicação

O autor propõe exercícios e os resolve como exemplo para o aluno.

Outra possibilidade é o autor realizar uma demonstração ou mesmo resolver o exercício passo a passo justificando cada passagem, apontando a definição ou a propriedade utilizada que o justifica poder seguir determinada lógica indutiva.

### 1.3 Tarefas que os autores propõem ao estudante para aplicação dos conceitos matemáticos ensinados

As tarefas matemáticas podem ser: problemas, investigações, exercícios, projetos, construções, aplicações, produções orais, relatórios, ensaios escritos, etc. Elas são o ponto de partida para que o estudante desenvolva a sua atividade matemática. As tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições para a aplicação de conhecimentos emergentes (PONTE, et al., 1997).

Entenda-se por tarefas no livro didático tudo aquilo que o autor propõe para o aluno fazer, no intuito de oferecer-lhe oportunidades de aprendizagem.

Toda aula planejada pelo professor pressupõe uma estratégia de ensino na qual este se prepara para saber o que fazer, e para o que ele espera que o aluno faça, respeitando um cronograma, para que o assunto se concretize.

O professor ao planejar sua aula usualmente recorre a diversos tipos de tarefas, pois cada tipo de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares.

As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.

As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança.

As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.

As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (PONTE, 2005, p. 17).

A diversificação das tarefas a se propor aos alunos pode envolver ainda outros aspectos como: o contexto, a complexidade do trabalho a ser realizado e sua duração:

Para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquadradas em *contextos da realidade* (tarefas de aplicação e de modelação).

No entanto, os alunos podem também sentir-se desafiados por tarefas formuladas em *contextos matemáticos* (investigações, problemas, explorações) e a sua realização permite-lhes perceber como se desenvolve a atividade matemática dos matemáticos profissionais.

E, finalmente, pelas suas características muito próprias, as tarefas de *longa duração* (os projetos) têm um papel insubstituível no desenvolvimento de diversos objetivos curriculares e devem ser por isso, contemplados pelo menos na planificação anual do trabalho do professor. (PONTE, 2005, p.10-11).

Uma das preocupações do professor é saber dosar estas características nas tarefas que propõe.

O professor também enfrenta dificuldades de encontrar situações de aprendizagem de natureza exploratória que constituam bons pontos de partida para o estudo de novos assuntos.

As tarefas classificam-se atendendo às seguintes subcategorias:

### **A) Conhecimentos prévios**

Tarefas para revisão dos pré-requisitos como potência, funções, progressões geométricas, os números reais, o que se considere necessário, para promover a continuidade dos estudos.

### **B) Conhecimentos emergentes**

São os conhecimentos novos que ainda são desconhecidos pelos alunos. O dito “matéria nova”.

### **1 - Representação gráfica de funções**

O autor deve oferecer tarefas para que o aluno represente graficamente a função exponencial. Será importante constatar que são oferecidas oportunidades de construção de gráficos manualmente e utilizando *softwares* para esse fim. Sabemos que são habilidades diferentes que se procura desenvolver.

### **2 - Exploração**

Utilizando ou não tecnologias como calculadora e *softwares*, despertando interesse em desenvolver o raciocínio, usando os conhecimentos prévios. Assim o professor desenvolve o raciocínio dedutivo e promove a elaboração de conjecturas.

Achamos oportuno esclarecer a diferença entre os conceitos de exploração e investigação segundo as concepções de Ponte (2005, p.2)

As Tarefas de exploração são consideradas por desafio reduzido que visa à construção de novos conceitos, estruturando-se em três fases: a apresentação da tarefa para a classe e o modo como os alunos a compreendem; o desenvolvimento em dupla, grupo, ou mesmo individual dos trabalhos; a discussão e a síntese final em coletivo, momento que segundo Bishop e Gofre (1986, p.12) é a ocasião apropriada para que o professor em diálogo com o grupo classe, expondo conexões e significados, permitindo que seus alunos aprendam a relacionar ideias sobre vários temas que vão surgindo no “fervor das discussões”, negociando significados matemáticos, oportunizando mostrar como as ideias matemáticas são naturalmente interligadas.

As tarefas de investigação são consideradas de desafio elevado que visam o desenvolvimento de conceitos novos, assim como também o uso de conceitos já conhecidos.

Entre as tarefas de exploração e as de investigação a diferença está, portanto no grau de desafio. Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planejamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor considerar como tarefa de investigação.

### **3 - Manipulação**

Cálculo algorítmico com destreza, rotinização, sistematização e aplicação das regras e fórmulas.

Situações que apresentam uma única resposta como sendo a verdadeira e para resolvê-la os alunos utilizam um conjunto de técnicas simbólicas que conduz à solução certa.

Aplicação de uma definição: Perceber se o aluno compreendeu o conceito de função exponencial à medida que ele sabe aplicar sua definição no exercício proposto.



Aplicação de uma propriedade: Perceber se o aluno compreendeu a propriedade a ser aplicada, na resolução do exercício.

Segundo Lima (2013):

Para analisar corretamente o papel da manipulação, o crítico<sup>8</sup> deve policiar-se atentamente para não incorrer no erro de menosprezá-la. Durante séculos, e ainda hoje, a manipulação quase que monopolizou o ensino da matemática. (p.182)

A manipulação torna mais ágil e preciso os cálculos ao lidar com equações, fórmulas e operações, assim como auxiliam a fixação de conceitos. É recomendado que o professor tenha bom senso na escolha deste tipo de tarefa, para não exagerar em sua quantidade, procurando diversificar com outras opções de tarefas.

#### **4 - Conjecturar/argumentar**

Tarefas destinadas a fazer o aluno prever um determinado resultado e apresentar um discurso lógico que o sustente.

#### **5 - Prova/demonstração**

Desenvolver no aluno a capacidade de argumentação que justifique a validade da proposição ou de um procedimento.

Nesta pesquisa adotaremos a distinção entre explicação, prova e demonstração segundo Balacheff (1982, p.3):

Explicação situa-se no nível de quem a faz com a finalidade de comunicar ao outro o caráter verdadeiro de um enunciado matemático. Se esta explicação for convincente a quem a escuta, é aceita como prova, sendo esta verdadeira ou não. Mas, segundo Amouloud (2012), quando a prova se refere a um enunciado matemático, o autor denomina, neste caso em particular de demonstração, que adquire as seguintes características: São as únicas aceitas pelos matemáticos, respeitam regras, alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas ou postulados), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados, a partir de regras de dedução tomadas em um conjunto de regras lógicas; trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencente ao mundo sensível, embora a ele façam referência.” (p. 24-25)

---

<sup>5</sup> O crítico, sujeito à quem a citação se refere, deve ser entendido como a pessoa que analisa as tarefas que pretende que sejam feitas. No caso de nossa pesquisa, estaríamos nos referindo ao professor que está escolhendo tarefas para oferecer aos seus alunos no intuito de desenvolver lhes habilidades e competências segundo os PCNEM, (BRASIL, 2000).

## **6 - Modelação de situações da vida real contextualizada numa situação vivida pelo leitor**

O estudante tem de descobrir a expressão algébrica que melhor se adapta à situação descrita.

No âmbito da Educação Matemática, Modelagem pode ser definida como “uma metodologia de ensino-aprendizagem [que] parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso do ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema”. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.28).

Biembengut e Hein (2003) destacam as seguintes etapas para a obtenção de um modelo e/ou processo de modelagem de situações reais com ferramental matemático:

1. **Interação** – na qual ocorre o envolvimento com o tema (realidade) a ser estudado/problematizado, através de um estudo indireto (por meio de jornais, livros e/ou revistas) ou direto (por meio de experiências em campo).
2. **Matematização** – em que ocorre a “tradução” da situação-problema para a linguagem matemática. É aqui que se formula um problema e escreve-o segundo um modelo matemático que leve à solução.
3. **Modelo Matemático** – é onde ocorre a “testagem” ou validação do modelo obtido, através da análise das respostas que o modelo oferece quando aplicado à situação que o originou, no sentido de verificar o quanto são adequadas ou não. “Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa [...] mudando-se ou ajustando-se hipóteses, variáveis, etc.”. (p.13-15)

A Modelagem sempre esteve presente na construção do conhecimento matemático.

Barbosa (1999) acrescenta que a modelagem:

[...] é um método da matemática aplicada, usada em grande variedade de problemas econômicos, biológicos, geográficos, de engenharia e de outros [...] [que] foi apreendido e resignificado para o ensino-aprendizagem como uma das formas de utilizar a realidade nas aulas de matemática. (p.4)

Barbosa (2003, p.69), tomando por referência Skovsmose (2000), concebe Modelagem como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”, sendo que, problematizar se refere ao ato de criar perguntas e/ou problemas e investigar, refere-se à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão, na perspectiva de resolver os problemas ou as perguntas.

Para Bassanezi (2002, p.38) a utilização da Modelagem como uma estratégia de aprendizagem, além de tornar um curso de matemática atraente e agradável, pode levar

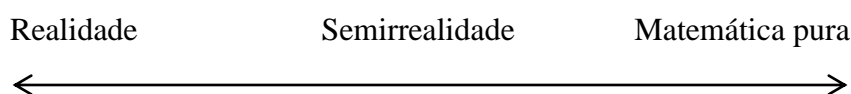
o aluno a: desenvolver um espírito de investigação, utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas, entender e interpretar aplicações de conceitos matemáticos e suas diversas facetas, relacionar sua realidade sociocultural com o conhecimento escolar e, por final preparar os estudantes para a vida real, como cidadãos atuantes na sociedade.

Modelagem Matemática, portanto, será entendida por nós como um processo que envolve a construção de um modelo matemático por parte do aluno, sob a orientação do professor que conduzirá o trabalho de modo que o aluno ao construir/elaborar o modelo, também construa e elabore ‘novos’ conhecimentos matemáticos. E, “ao criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos” estamos obedecendo ao principal objetivo do trabalho com Modelagem. (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.23).

Tarefas que se apresentam num contexto de realidade são chamadas *tarefas de modelação*. Caracterizam-se por fazer parte de contexto de natureza problemática e desafiante. São problemas ou investigações dependendo de como o enunciado for formulado.

*Aplicações* da Matemática são exercícios ou problemas de aplicação de conceitos e ideias matemáticas. E os exercícios, os problemas e as investigações tanto podem surgir em contextos de realidade, como de semirrealidade ou de Matemática pura, segundo Ponte (2005).

Figura 03: Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto.



Fonte: Ponte, 2005, p.11

O contexto constitui uma dimensão importante a ser levada em conta. As tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos encontram-se nos polos opostos da Figura 03 e, segundo Skovsmose (2000), elenca ainda um terceiro tipo de contexto, denominado por ele de “semirrealidade”. Este contexto é extremamente frequente nos problemas e exercícios de Matemática, embora aparentemente tenham a intenção de representar situações reais, para o aluno muitas delas podem não fazer sentido algum, tratando-se de um contexto quase tão abstrato como o contexto da Matemática pura. (PONTE, 2005, p.10)

O contexto desempenha um papel importante na aprendizagem da Matemática dando um lugar de destaque às conexões com aspectos exteriores à Matemática e, por consequência aos contextos em que se situam as tarefas, principalmente na resolução de problemas e modelação.

Entendemos como contexto o universo conceitual associado a cada tarefa, que pode remeter para o campo da vida quotidiana, do qual o aluno pode ter maior ou menor experiência pessoal, ou remeter apenas para o universo matemático. (QUARESMA e PONTE, 2012, p.199).

Na aprendizagem da Matemática, tal como sugere Skovsmose (2001), os alunos precisam trabalhar com diversos contextos: realísticos, de semirrealidade e matemáticos. As questões formuladas em contextos de realidade têm o seu papel, as questões formuladas em contextos de semirrealidade tem outro papel, e as questões formuladas em contextos matemáticos têm também um importante papel a desempenhar. Segundo Quaresma e Ponte (2012, p.225) “cabe ao professor decidir qual a natureza das tarefas a propor aos seus alunos, em função do que verifica ser mais aconselhável em cada momento do seu percurso de aprendizagem”.

O contexto de trabalho é um importante aliado do professor por motivar a aprendizagem dos alunos, à medida que os estimula a se interessarem por determinado assunto, sendo este tipo de tarefa marcada por diversas circunstâncias favoráveis à aprendizagem, permitindo que o professor se coloque mais como orientador das aprendizagens construtivas entre os alunos do que como fonte exclusiva do saber.

Concordamos com a sugestão de Gravemeijer (2005), isto é, que os alunos devem progressivamente ser capazes de ir se libertando da necessidade de contexto da realidade, trabalhando num nível cada vez mais formal, mas estes devem ser capazes de recorrer a ele sempre que necessário.

## 7 - Resolução de Problemas

Os autores oferecem problemas para serem resolvidos que desafiam a capacidade investigativa dos alunos?

Sob a influência de Polya (Universidade de *Stanford*-EUA), iniciaram-se as primeiras pesquisas sobre o ensino de matemática por meio da resolução de problemas. O autor propõe em seu livro **A Arte de Resolver Problemas** (1994, 1ª ed. em 1945), um método em quatro etapas para a resolução de problemas: 1º) compreender o problema, 2º) elaborar um plano, 3º) executar o plano, 4º) fazer o retrospecto ou verificação da solução do problema original. Nele, desenvolve-se um processo heurístico, ou seja, métodos e regras de invenção e descoberta matemática, ao longo da

resolução de problemas. A organização nas quatro fases apresentadas por Polya pode ser também considerada uma heurística; não funciona sempre, mas é uma organização frequentemente bem-sucedida na Resolução de Problemas.

É denominada heurística moderna o estudo que procura compreender o processo solucionador de problemas; em particular as operações mentais, típicas desse processo que foram úteis. (POLYA, 1995)

O professor pode propor problemas aos seus alunos para que possam se sentir desafiados em suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta. Polya (1995) considera esse procedimento uma condição fundamental para que os alunos possam perceber a verdadeira natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto por esta disciplina. Estas ideias influenciam profundamente os currículos da atualidade, de tal modo que hoje em dia a resolução de problemas em Matemática constitui um traço fundamental das orientações curriculares de todos os níveis de ensino, do 1º ciclo do ensino básico ao ensino superior.

**Categoria 2 - Linguagem** - Observar todas as formas de comunicação que o autor fornece ao professor, para que este possa se comunicar com seus alunos e transitar entre as várias formas de representação: Linguagem Natural, algébrica, gráfica ou tabular.

Todo aluno passa por enfrentamento de situações na escola básica, no ensino superior, em seu trabalho ou mesmo no exercício de sua cidadania. Para lidar com estes enfrentamentos, este vai precisar muito mais que só informação, terá de mobilizar conhecimentos e habilidades.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111).

Para analisar o processo que ocorre na resolução de situações-problema existe a necessidade do desenvolvimento de habilidades e competências em Matemática.

Além de leituras e de conhecimentos específicos, nesta etapa da escolaridade, (Ensino Médio), as situações que são propostas envolvem também a nomenclatura da linguagem Matemática, assim como também o domínio dos códigos, além, da compreensão e interpretação de diagramas e gráficos, e a relação destes elementos com a linguagem natural. O aluno precisa saber analisar e compreender a situação por

inteiro, decidir qual a melhor estratégia para resolvê-la, tomar decisões assertivas, argumentar, expressar-se e fazer registros.

A dificuldade dos alunos em assimilar e compreender o que foi "ensinado" pelo professor muitas vezes é falha na comunicação entre professor e aluno. Por isso a linguagem é um ponto fundamental quando se discute ensino e aprendizagem, isto é: O professor apresenta a tarefa, o aluno primeiramente a lê, a decodifica, isto é, passa para a linguagem matemática, a internaliza e associa a outros conhecimentos e então retorna aos resultados. A comunicação apenas poderá ser considerada satisfatória se todas estas etapas fizerem sentido ao aluno.

**Categoria 3 - Conceitos:** Introduzidos mediante uma definição de função exponencial, será feita a análise para constatar se há uma única definição e se esta é formal ou intuitiva.

### **Conceituação**

Segundo Lima (2010) a conceituação compreende vários aspectos, entre os quais destaca: A formulação correta e objetiva das definições matemáticas; O emprego bem dosado do raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre o que se supõe (hipótese) e o que se quer provar (tese); O entendimento e a percepção de que algumas noções e certas propostas podem ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos.

Achamos pertinente explicar o que entendemos como:

**Raciocínio:** palavra para designar a atividade intelectual, não explícita na maioria das vezes, de manipulação de informações para, a partir de dados, produzirem novas informações.

**Raciocínio dedutivo:** é o processo de raciocínio que de uma sequência de afirmações, cuja verdade nos leva de alguma afirmação inicial chamada de hipótese, chegando a uma conclusão verdadeira. Isto é: se todas as premissas forem verdadeiras, então as conclusões são verdadeiras.

**Raciocínio indutivo:** é aquele que nos leva de uma lista de afirmações particulares para uma afirmação universal. Porém se todas as premissas são verdadeiras, então a conclusão é provavelmente, mas não necessariamente, verdadeira.

**Categoria 4 - Proposições:** Análise de como foram apresentadas as propriedades pelos autores dos livros didáticos:

4.1- A exposição foi formal, lógico dedutivo ou informal, lógico indutivo.

4.2- As propriedades foram justificadas ou só as expuseram.

4.3 Quanto à resolução de exercícios, eles as utilizam em exercícios resolvidos ou só as expuseram como recordação de regras.

**Categoria 5 - Procedimentos:** Os autores sugerem maneiras diferentes de se resolver um exercício?

Distinguimos:

5.1-Vários procedimentos para se resolver as situações/tarefas ou apenas um em cada caso.

**Variar as possibilidades de solução de uma tarefa desenvolvendo a criatividade e o senso crítico.**

5.2- Os procedimentos utilizados na resolução de exercícios são justificados ou só os expõem como exercícios resolvidos - um método rotineiro. Se o justifica, mostre exemplo.

Justificativa – argumentação pelo processo dedutivo ou indutivo adotado.

5.3- As novas tecnologias são utilizadas: calculadora científica, computador.

Achamos pertinente colocar a concepção de Ponte e Quaresma (2012) a respeito do uso da calculadora, instrumento de fácil acesso aos alunos, até mesmo como aplicativo em seus celulares.

[...] a calculadora favorece a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema, pois ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos. (p.45).

Uma das ferramentas que insere uma dinâmica diferenciada, motivacional, que acaba propiciando um ambiente favorável à aprendizagem do aluno é o computador. Este desperta no aluno o interesse de investigar, de experimentar, de simular situações, de redescobrir seus conhecimentos.

**Categoria 6 - Argumentação:** mostram utilidade no desenvolvimento.

6.1-Utilizam uma prática discursiva baseada na linguagem verbal, para convencer a validade de determinadas propriedades.

6.2-Tipo de prova: Métodos de demonstração matemática segundo Tonet e Leite (2013, p. 3)

- Prova direta - em que se assume a hipótese e se deduz a tese, o que será demonstrado.
- Prova por contraposição – em que se assume a negação da tese e se deduz a negação da hipótese.

- Prova por absurdo – em que se assume a negação da tese e se deduz um absurdo. O que se conclui que a tese não poderia ter sido negada. Logo, a tese é verdadeira.

Segundo as diretrizes curriculares é importante incentivar o professor a incluir provas e demonstrações ao processo de formação de seus alunos. Tal preocupação está presente também nos PCN, tanto do Ensino Fundamental, quanto do Médio, indicando a demonstração como parte integrante do currículo, como podemos ver no seguinte trecho:

[...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, 1998, p. 7)

Uma vez fundamentada a escolha pelos descritores que fazem parte de nossa grade como eixo investigativo de nossa pesquisa, vamos nos ater ao nosso objeto de estudo: O livro didático.

#### **4.7 Os três livros didáticos de matemática escolhidos entre os aprovados do PNLD 2015**

O critério adotado para escolher estes três livros entre os seis livros concorrentes foi sua quantidade distribuída no território brasileiro pelo Programa Nacional do Livro Didático no ano de 2015.

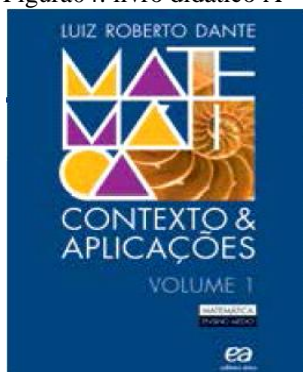
Apresentamos a seguir a descrição, segundo o **Guia do PNLD 2015**, dos três livros didáticos escolares objeto de nossa análise, que mais foram distribuídos nas escolas, o que os caracteriza como sendo os livros didáticos de maior impacto na execução do currículo pelo professor em nosso país. Isto é, os autores destas obras ao desenvolverem estes materiais didáticos, traduziram para o professor os significados e os conteúdos do currículo prescrito, a partir de seus modos de interpretar as diretrizes oficiais, assim como também o PNLD (BRASIL, 2015) avalia as coleções de livros para garantir que estes estejam em consonância com as prescrições curriculares, tais critérios de avaliação constituem as diretrizes para os autores seguirem, e por fim garantirem a aprovação de suas obras, o que resulta num material curricular, colaborando com o professor na execução do currículo prescrito em sala de aula.



## Livro A

# MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES

Figura04: livro didático A



**Luiz Roberto Dante 27582COL02**  
 Coleção Tipo 2  
 Editora Ática

2ª edição 2013  
[www.atica.com.br/pnld2015/](http://www.atica.com.br/pnld2015/)  
**MATEMÁTICA CONTEXTO &  
 APLICAÇÕES**

Fonte: Luiz Roberto Dante

### BREVE DESCRIÇÃO DA OBRA

A coleção é composta por três livros, cada qual destinada aos 1º, 2º e 3º anos respectivos do Ensino Médio. Cada livro desses é dividido em quatro unidades e cada uma delas organizada em capítulos.

O primeiro volume desta obra, destinado ao primeiro ano do ensino médio, se divide em quatro unidades:

- Conjuntos numéricos
- Função afim e função quadrática
- Função exponencial e função logarítmica
- Sequências e trigonometria

Cada uma destas unidades está organizada em capítulos. Em nosso caso, função exponencial encontra-se na Unidade 3, e no 5º capítulo.

Sobre o capítulo de funções exponenciais este se inicia com a introdução apresentando uma situação do contexto da realidade, conhecer a técnica da datação da idade de um material por meio do método do carbono-14, usada em Arqueologia e Antropologia. A intenção, segundo o autor, de se apresentar questões contextualizadas que envolvem as equações exponenciais é de atribuir significado ao conceito a ser trabalhado. O livro propõe articulação com a Biologia, Química, Matemática Financeira, Geometria, sequência aritmética, e situações do cotidiano.

Uma vez introduzido o conceito de função exponencial segue-se com a explanação teórica, exercícios resolvidos e propostos.

Um diferencial deste livro em relação aos outros analisados é que este define sequência como função, inter-relacionando conteúdos da própria Matemática.

O tema de função exponencial é subdividido em:

- Revisão de potenciação: Potência com expoentes natural, inteiro, racional irracional e o expoente real.
- Revisão de radiciação.
- Função exponencial: definição, seu gráfico, construção exploratória usando o GeoGebra, e a conexão entre funções exponenciais e progressões.
- Equações exponenciais e Inequações exponenciais

O autor traz questões de múltipla escolha e problemas contextualizados de vestibulares.

No final do livro destinado aos alunos, o autor faz intervenções com indicações para leituras complementares optativas em outros contextos. No final do livro encontramos também a seção *Caiu no ENEM* com exercícios e respostas.

O manual do professor traz textos para a formação contínua do professor, com conteúdos pertinentes ao seu fazer diário, assim como sugestões complementares de cursos, leituras, recursos digitais e passeios para o professor ampliar seu horizonte metodológico no intuito de melhorar a qualidade do ensino que propicia aos seus alunos; também traz referências bibliográficas e *sites* para o professor aprofundar os seus conhecimentos matemáticos e aprimorar sua formação. Assim como também oferece observações e sugestões para as unidades e capítulos do livro que, no caso de funções exponenciais, também sugere atividades complementares.

O prefácio do manual do professor faz toda a relação do que o livro traz para o professor e que condiz com o que vimos no capítulo de função exponencial.

## Livro B

# MATEMÁTICA – CIÊNCIA E APLICAÇÕES

Figura 05: Livro didático B



Fonte: Gelson Iezzi et al.

**Gelson Iezzi**  
**Oswaldo Dolce**  
**David Mauro Degenszajn**  
**Roberto Périgo**  
**Nilze Silveira de Almeida**  
 27585COL02  
 Coleção Tipo 2  
 Editora Saraiva  
 7ª edição 2013  
[www.editorasaraiva.com.br/pnld2015/](http://www.editorasaraiva.com.br/pnld2015/)  
**MATEMÁTICA ciência e aplicações**

### BREVE DESCRIÇÃO DA OBRA

A coleção é composta por três volumes, um para o 1º ano, outro para o 2º ano e por último, um para o 3º ano, cada qual destinado aos anos respectivos do Ensino Médio.

Cada livro da coleção pode ser resumido em grandes tópicos como Números e Operações, Funções, Geometria, Tratamento da Informação e Estatística: contagem e probabilidade, e Álgebra; que por sua vez é organizado em capítulos sendo estes divididos em itens em que se desenvolvem os conteúdos matemáticos a serem trabalhados.

O conteúdo função exponencial encontra-se no 7º capítulo do primeiro volume, porém o eixo função é desenvolvido nos três anos do ensino médio, permitindo que se retome o conteúdo de funções exponenciais no volume 2 com as funções periódicas como seno, cosseno e tangente, e no volume 3 com função afim e na Matemática Financeira com os juros compostos.

Sobre o capítulo de funções exponenciais, este se inicia com a introdução apresentando uma situação do contexto do cotidiano. A intenção, segundo aos autores, é a de motivar o leitor na construção dos conceitos que serão apresentados no interior do capítulo; e seguem com uma explanação, exemplos resolvidos e exercícios propostos.

O capítulo 7 é subdividido em: Potência de expoente: natural, inteiro negativo, racional, real; função exponencial; equações e inequações. Os autores fornecem exemplos de aplicações em outras áreas do conhecimento intituladas: *Seção Aplicações* que tem a função de detalhar os usos da Matemática em outras áreas do conhecimento;

os autores propõem atividades, fazem observações, e em meio aos capítulos, por meio da *seção Apêndice*, apresentam provas de algumas propriedades matemáticas, do *Box Pense nisto* que contêm chamadas como questões relacionadas ao assunto que está sendo estudado.

No final do capítulo os autores propõem exercícios propostos como desafios, e no final do livro são apresentadas as respostas às questões do texto.

No manual do professor os autores apresentam a coleção aos leitores, explicando os principais tópicos desenvolvidos, os principais eixos:

- Números e Operações – Conjuntos
- Funções
- Geometria
- Tratamento da informação e Estatística; contagem e probabilidade.
- Álgebra

As funções exponenciais, o foco de nossa pesquisa, é apresentada no volume 1, porém no volume 3 são retomadas sendo relacionadas à progressão geométrica.

Sobre a resolução de problemas apresenta as etapas de resolução sugeridas por Polya (1978).

É citada nesta parte do livro a importância do uso da calculadora comum, científica e de softwares, assim como oferece endereços eletrônicos onde encontrar estes programas para serem baixados gratuitamente para auxiliar no ensino e na aprendizagem de funções.

Ele também oferece formação continuada à medida que propõe a leitura do currículo da Matemática, a compreensão do desenvolvimento de habilidades e competências, assim como sobre a avaliação em diferentes aspectos: provas, autoavaliação, comunicação oral e atividade em grupo; ele também oferece bibliografia com vários temas para estudo, reflexão e autoavaliação do professor.

São apresentados os objetivos específicos do ensino de funções, são sugeridas questões para a avaliação, e em exercícios complementares outros exemplos de problemas da vida real e problema modelado.

O manual do professor traz textos para a formação contínua do professor, com conteúdos pertinentes ao seu fazer diário, assim como sugestões complementares de cursos, leituras, recursos digitais e passeios para o professor ampliar seu horizonte metodológico no intuito de melhorar a qualidade do ensino que propicia aos seus alunos, também traz referências bibliográficas e *sites* para o professor aprofundar seus conhecimentos matemáticos e aprimorar sua formação, assim como também oferece

observações e sugestões, para incrementar a aula do professor com sugestões de estratégias de ensino e materiais curriculares diferenciados.

Nesta parte do livro, os autores apresentam a obra ao professor, explicando as intenções no desenvolvimento, como o trabalho com a resolução de problemas, embasado em Polya, a preocupação com a História da Matemática, o que não consta no capítulo 7, funções exponenciais.

Quanto a integração de conteúdos, o manual para o professor sugere que o professor relacione a função exponencial com progressão geométrica apenas quando tiver chegado ao capítulo 10, e ter apresentado o conceito de sequência numérica como uma função com domínio em  $N^*$ , o que fica a cargo do professor fazer, se achar pertinente. Não há no capítulo 7 nenhuma indicação para o professor se direcionar à parte do manual do professor para buscar por essa sugestão metodológica. Porém é sugerido no capítulo seguinte, função logarítmica, trabalhar o conceito de função inversa, uma relação com a função exponencial.

O uso da calculadora é reduzido a um instrumento facilitador de cálculos com intuito de agilizar os procedimentos na resolução de exercícios algorítmicos. O uso de computador, *softwares*, internet, é apenas sugerido nesta parte do livro, porém no capítulo 7, propriamente dito, não existe qualquer menção.

Os autores citam a oferta de situações-problema oferecidas em contextos da realidade, de outras ciências ou mesmo da Matemática, o que vai ao encontro do que é oferecido no capítulo 7 de funções exponenciais por nós estudados.

Indo ao encontro às prescrições curriculares, os autores complementam as atividades, tarefas sugeridas, com sugestões de atividades em grupo, por exemplo, a atividade 3, p. 364-365: Os índices de obesidade, a Matemática, a Biologia e a Educação Física; oferecendo aos professores, a estratégia de desenvolvimento de todo o roteiro dos trabalhos a serem realizados com os alunos.

Complementa a seção aplicações com outras três tarefas de problemas contextualizados cujo procedimento para resolver necessita que estes sejam modelados.

## **Livro C**

# **NOVO OLHAR: MATEMÁTICA**

Figura 06: Livro didático C



Fonte: Joamir Souza

**Joamir Souza** 27602COL02  
 Coleção Tipo 1  
 Editora FTD  
 2ª edição 2013  
[www.ftd.com.br/pnld2015/novoolharmatemática](http://www.ftd.com.br/pnld2015/novoolharmatemática)

NOVO OLHAR MATEMÁTICA

### BREVE DESCRIÇÃO DA OBRA

A coleção é composta por três volumes, cada qual destinado aos 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio, respectivamente. O volume 1 destina-se ao primeiro ano do ensino médio e está organizado em quatro unidades:

- Conjuntos
- Funções
- Progressões
- Trigonometria

O tema de funções exponenciais encontra-se no 5º capítulo da unidade 2.

Sobre o capítulo de função exponencial, este se inicia com a introdução contextualizada de uma situação da realidade, a saber, o crescimento de certa espécie de planta que dobra de tamanho a cada dois meses.

Na abordagem dos conhecimentos matemáticos, o autor adotou a sequência usual: apresentar definição, atividades resolvidas e atividades a serem resolvidas.

Introduz com a revisão de potência de expoente: natural, inteiro negativo, racional e real. Contextualiza o conhecimento matemático, notação científica e em seguida apresenta a Função exponencial, a equação exponencial e a inequação exponencial: definindo, dando exemplos, apresentando exercícios resolvidos e propondo atividades a serem resolvidas.

Na parte “explorando o tema” o autor contextualiza a função exponencial quando na sua importância na modelação da situação-problema de datação de um fóssil.

As atividades complementares trazem problemas contextualizados de situações reais já modeladas ou a serem modeladas pelos alunos.

No final do livro o aluno pode encontrar a resolução das atividades.

No manual do professor encontram-se orientações quanto à estrutura da coleção, quadro de conteúdos da coleção e os recursos de cada volume, orientações didáticas e metodológicas para o ensino médio e orientações sobre o novo ENEM; Conteúdos destas séries no que diz respeito ao trabalho interdisciplinar, da avaliação, do papel do professor e dos recursos didáticos a ele disponibilizados, assim como incentivo ao uso do computador no ensino da Matemática, porém no capítulo 7 estudado, não há menção ao uso de computador e *software*, nem em exercícios resolvidos ou mesmo sugestões de tarefas, embora indique o trabalho com o uso da calculadora conforme sugestão nesta parte do manual.

Para concluir a apresentação do livro C, o autor oferece aos docentes no final do livro, leituras, bibliografia e sugestões de *sites* em que estes poderão encontrar tanto orientações metodológico-didáticas como *softwares* gratuitos a serem baixados para aulas utilizando o computador, incentivando a formação continuada deste professor.

## CAPÍTULO V

Neste capítulo foram feitas análises dos três livros didáticos aprovados no PNLD de 2015, segundo os descritores de nossa tabela de recolha de dados, quanto à proposta de ensino de função exponencial para o primeiro ano do ensino médio.

Este material serviu para responder nossa questão de pesquisa e escrever nossas considerações finais.

### 5.1 Análises de Dados

Em nossas análises consideramos o livro A como sendo *MATEMÁTICA CONTEXTO & APLICAÇÕES*, o Livro B: *MATEMÁTICA - Ciência e aplicações* e o Livro C o exemplar *NOVO OLHAR MATEMÁTICA*.


Nossas análises partiram de uma perspectiva, e não significa ser a única, que tem o intuito de elencar uma das possibilidades no desenvolvimento da tarefa escolhida por nós, como uma atividade que permitiria essa ou outra competência a ser trabalhada pelo professor.

#### 5.1.1 Livro A

Apresentaremos aqui a proposta do autor para a abordagem do ensino de função exponencial em seu livro didático.

O autor introduz o tema função exponencial contando uma situação na qual a Matemática contribui com a ciência.

Figura. 07: Geólogo analisando rochas e arqueólogo escavando fósseis

<p>Entre os fenômenos naturais, um dos mais recentemente estudados pelos cientistas é o da <b>radioatividade</b>, que é uma propriedade que algumas substâncias têm de emitir radiações e se desintegrar, transformando-se em outras. Esse fenômeno tem ajudado os geólogos a determinar a idade das rochas e também os arqueólogos a determinar a idade de objetos encontrados em suas escavações.</p> <p>O tempo que uma substância leva para que metade de seus átomos se desintegre é denominado <b>meia-vida</b>. Esse termo significa que a cada período transcorrido ocorrerá a desintegração de metade da quantidade dos átomos e, como esse processo continua, restará <math>\frac{1}{2}</math>, <math>\frac{1}{4}</math>, <math>\frac{1}{8}</math>, etc. da substância original, conforme transcorra uma vez, duas vezes, três vezes meia-vida, e assim por diante.</p> <p>Observando essa sequência de frações, podemos perceber o padrão das potências de <math>\frac{1}{2}</math>, sendo o expoente de cada termo correspondente à quantidade de meias-vidas transcorridas. Assim, teremos: <math>\frac{1}{2}</math>, <math>\left(\frac{1}{2}\right)^2</math>, <math>\left(\frac{1}{2}\right)^3</math>, ..., o que permite generalizar, escrevendo <math>\left(\frac{1}{2}\right)^x</math> para <math>x</math> meias-vidas transcorridas. A generalização desse padrão dará origem a uma função, uma vez que temos a variável <math>x</math> no expoente, chamada <b>função exponencial</b>, objeto de estudo deste capítulo.</p>	
--	--

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.154




Em seguida o autor propõe uma situação contextualizada a respeito de crescimento de bactérias, e sugere ao professor que os alunos a façam em duplas para que juntos construam, entre colegas, uma tabela anotando o número do crescimento populacional de bactérias nas dez primeiras horas observadas. Este sugere ainda, que o professor acompanhe este preenchimento, fazendo perguntas à classe e tais perguntas, constam no livro didático. Com este procedimento sugerido ao professor, o autor pretende que os alunos percebam intuitivamente, como deve ser o gráfico de função exponencial. Ele também procura orientar de tal forma que os alunos percebam que a curva não inicia no zero, pois é dito que temos que considerar mil bactérias no início da pesquisa. O objetivo final da atividade orientada é que os alunos intuitivamente consigam perceber certos padrões nas anotações obtidas, os quais lhes permitam modelar, chegar a uma fórmula, podendo a Matemática ajudar a Biologia a compreender e analisar seus fenômenos.

O conceito de função exponencial é apresentado de maneira implícita, com esta proposta de apresentação, o autor oferece uma situação de aprendizagem que à medida que vai sendo mediada pelo professor por meio de questionamentos e observações pertinentes, o aluno pode ter a oportunidade de construir seu conhecimento, fazendo parte desta construção, de maneira ativa em seu processo de aprendizagem. Esta atividade pode propiciar o desenvolvimento de competências como investigar e sintetizar com ajuda do professor, permitindo até chegar a modelar o problema e de validar este modelo construído.

Figura 08: tarefa em dupla para introduzir o conceito emergente

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Reúna-se com um colega e façam uma tabela com o número de bactérias nas 10 primeiras horas, considerando que há 1000 bactérias no início da pesquisa.



Cultura de bactéria  
Sabonete em  
placa de Petri.

Veja um exemplo de tabela, com as primeiras linhas preenchidas.

Horas após o início	Número de bactérias	Proporção entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial
0	1000	1
1	2000	2

*Estimule os alunos a preencher a tabela corretamente, explicando-lhes, caso necessário, o que deve ser colocado em cada coluna. Se eles quiserem, podem até usar calculadora (a maioria dos celulares tem uma, por exemplo). Depois, confira com eles oralmente e passe a questioná-los sobre as*

*questões propostas. No item a, a ideia é que essa percepção ajude depois a entender intuitivamente que o gráfico da função exponencial não será uma reta. Nos itens b, c e d, a ideia é chegar intuitivamente para a lei da função exponencial que descreve a situação proposta.*

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p. 147

Na segunda situação, empréstimo bancário, o autor propõe que se trabalhe com juros compostos, deixando à disposição do professor escolher a estratégia de ensino que

achar pertinente. Optou por fornecer a resolução passo a passo chegando a sintetizar a fórmula geral para se calcular o montante ao final do tempo com determinada taxa de juros, o que caracteriza, segundo nossos descritores como uma apresentação do conteúdo explícita. Faz várias considerações em ajuda ao professor à medida que vai resolvendo a situação-problema.

Figura 09: Contextualização: juros compostos.

Acompanhe outra situação em que temos uma função exponencial:

Uma pessoa fez um empréstimo em um banco no valor de R\$ 10 000,00 para pagar depois de 3 meses, à taxa de juros de 3% ao mês no regime de juros compostos.

a) Qual será o montante a pagar no fim do:

- 1º mês?  
 $10\,000 + \frac{0,03 \cdot 10\,000}{3\% \text{ de } 10\,000} = 10\,300$
- 2º mês?  
 $10\,300 + \frac{0,03 \cdot 10\,300}{3\% \text{ de } 10\,300} = 10\,609$
- 3º mês?  
 $10\,609 + \frac{0,03 \cdot 10\,609}{3\% \text{ de } 10\,609} = 10\,927,27$

Seja  $M$  o montante,  $C$  o capital e  $i$  a taxa, temos:

$$M_1 = C + iC = C(1 + i)$$

$$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

$$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$$

b) Qual seria o montante a pagar no fim de  $n$  meses?  
 $M = C(1 + i)^n$  em que  $M$  é o montante,  $C$  o capital,  $n$  o período de tempo e  $i$  a taxa de juros.

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p. 148

Em seguida, para investigar se a expressão  $a^x$  é definida para todo  $x$ , o autor sugere a revisão dos conteúdos de potência e radiciação, estudando as possibilidades de  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{Q}$  e  $x \in \mathbb{R}$  e as propriedades a elas relacionadas:

**1ª Propriedade:**  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

**2ª Propriedade:**  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  (com  $a \neq 0$  e  $m > n$ )

**3ª Propriedade:**  $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

**4ª Propriedade:**  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$  (com  $b \neq 0$ )

**5ª Propriedade:**  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$



Retornando para o tema de função exponencial, o autor o reintroduz de maneira explícita com a definição, apresentando as propriedades e exemplos, exercícios resolvidos e propondo tarefas de manipulação para o aprendizado da definição e das propriedades como exemplificadas nas Figuras 13 e 14.

Figura. 13: Exercícios de manipulação e exercícios para conjecturar/argumentar

. Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$ , determine:		Verifique quais das sentenças dadas correspondem à lei de uma função exponencial.
a) $f(0)$ ; 1	d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ; 2	a) $f(x) = 9^x$
b) $f(3)$ ; 64	e) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ; $\frac{1}{2}$	b) $f(x) = (0,666\dots)^x$
c) $f(-1)$ ; $\frac{1}{4}$	f) $m$ tal que $f(m) = 1$ . 0	c) $y = x^2$
		d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.159

Figura. 14: Definição de Função Exponencial, propriedades e exemplos

Vamos agora estudar a **função exponencial** definida por  $f(x) = a^x$ .

### Definição

Consideremos um número  $a$  real positivo tal que  $a \neq 1$ . A função exponencial de base  $a$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , representada por  $f(x) = a^x$ , é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer  $x$  e  $y$  reais:

- 1ª)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- 2ª)  $f(1) = a^1 = a$
- 3ª)  $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$   
 $x < y \Rightarrow a^x > a^y$  quando  $0 < a < 1$

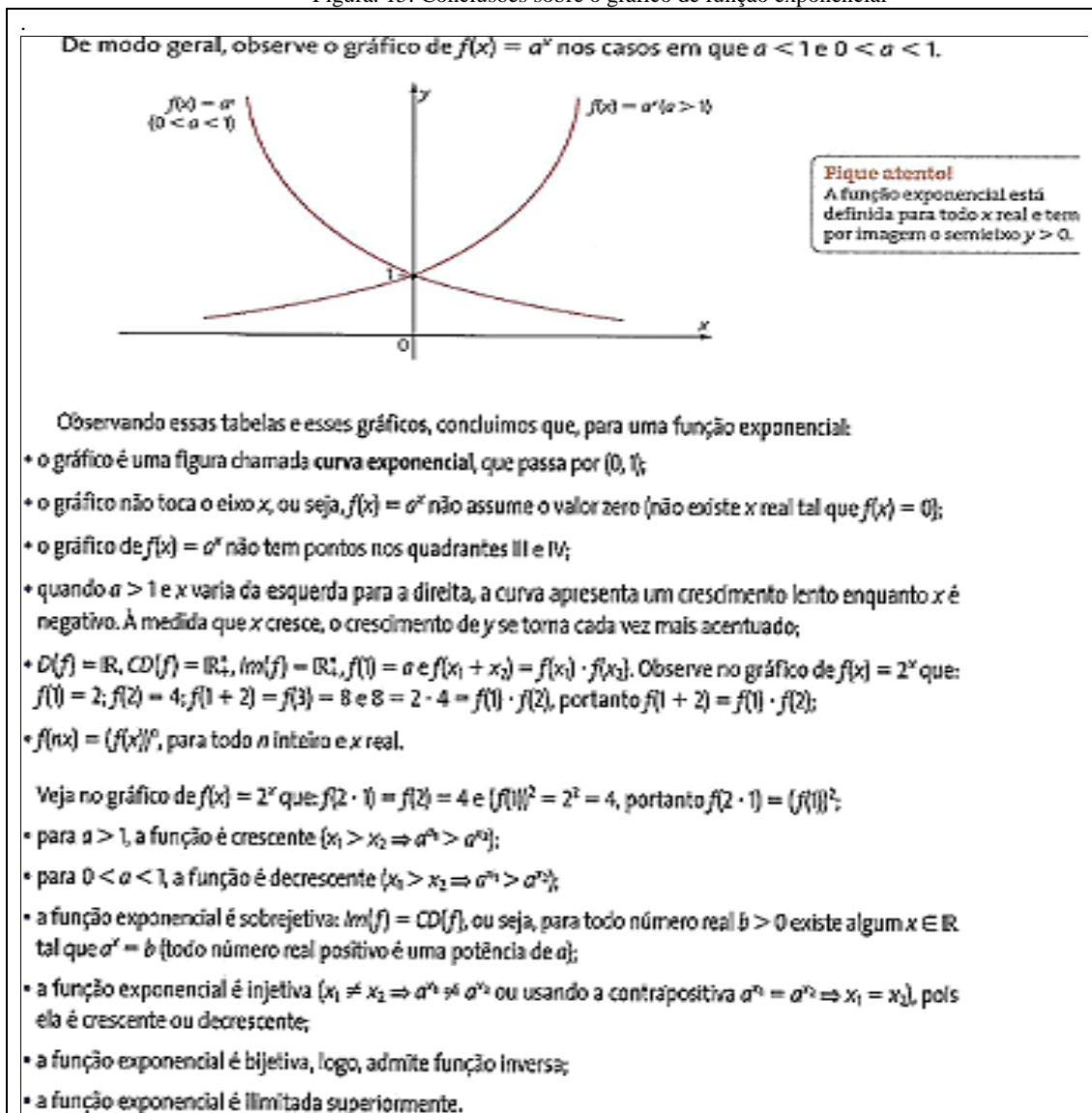
Exemplos:

a) $f(x) = 3^x$	c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	e) $f(x) = (\sqrt{2})^x$
b) $y = 5^x$	d) $f(x) = (0,4)^x$	f) $f(x) = 10^x$

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.159

O autor propõe realizar a análise de gráficos da função exponencial, oferecendo ao professor a síntese dessas análises:

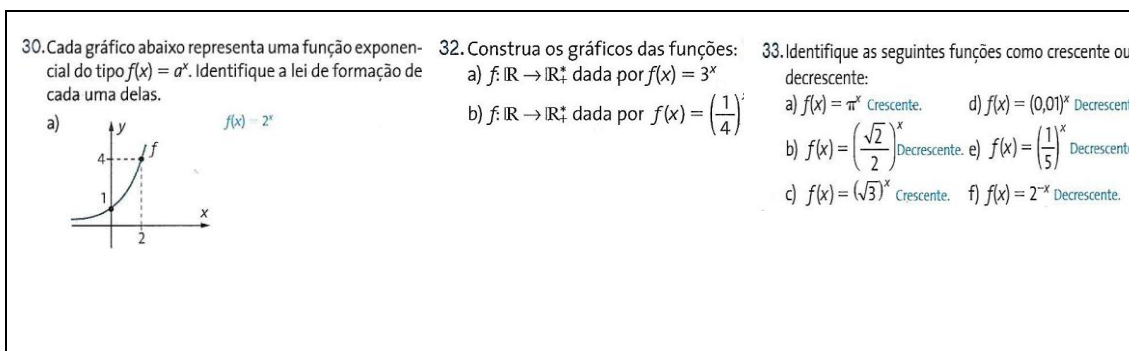
Figura. 15: Conclusões sobre o gráfico de função exponencial



Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.160

O autor oferece tarefas com quatro problemas cujo contexto é o da própria matemática, outros dois para conjecturar, um grupo de exercícios de manipulação e a construção de três gráficos cuja resolução afirma estar no manual do professor:

Figura 16: Problema no contexto da Matemática, construção de gráfico e para conjecturar/argumentar.



Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.161

Na seção Matemática e tecnologia, o autor fornece um tutorial para ser usado na construção de gráficos pelo *software* GeoGebra.

Figura 17: Construção de gráfico usando o GeoGebra - tutorada

Para construir gráficos de funções exponenciais vamos novamente utilizar o *software* Geogebra.

### Construção do gráfico de uma função exponencial

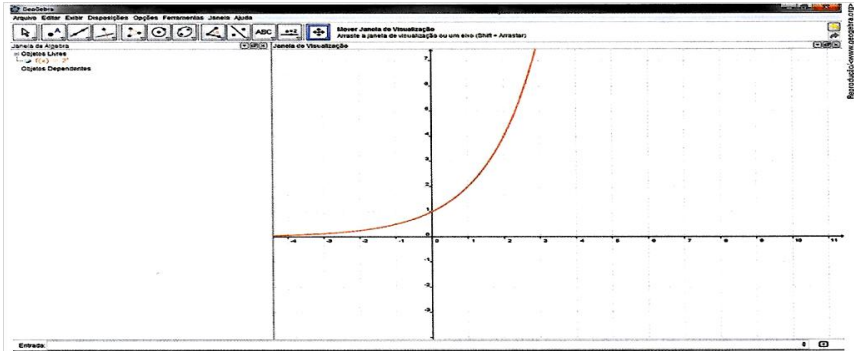
Vamos construir o gráfico da função exponencial  $f(x) = 2^x$  e destacar alguns pontos importantes. Para isso siga os passos a seguir.

**1º passo:** No campo "Entrada" (situado na parte inferior da tela) digite a função:  $f(x) = 2^x$  e tecla "Enter". Observe que "^" significa a operação de potenciação.

**Fique atento!**  
Não se esqueça de salvar suas construções.

**2º passo:** Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do *mouse* sobre o gráfico da função exponencial. Na aba que será apresentada clique em "Propriedades" e, depois que abrir uma janela, clique em "Cor" e escolha uma nova cor para o seu gráfico. Em seguida, clique na aba "Estilo" e coloque a espessura da linha igual a 5. Feche a janela e observe que o gráfico ficou destacado.

**3º passo:** Na barra de ferramentas (parte superior da tela) clique na aba "Exibir" e depois em "Malha". Você deverá ter uma imagem (com exceção da cor escolhida) igual à apresentada abaixo.



**4º passo:** Agora, vamos determinar o ponto em que a curva intersecciona o eixo das ordenadas (eixo  $y$ ). Para isso, digite no campo de entrada: intersecção  $[f, x = 0]$ . Tecla "Enter". Observe que o ponto de intersecção com eixo  $y$  é o ponto  $A = (0, 1)$ .

**5º passo:** No campo "Entrada" (situado na parte inferior da tela) insira os pontos  $B = (1, 2)$ ,  $C = (2, 4)$ ,  $D = (-1, \frac{1}{2})$  e  $E = (-2, \frac{1}{4})$  e verifique que todos pertencem ao gráfico da função (a cada ponto inserido tecla "Enter"). Observe ainda que o gráfico da função não intersecciona o eixo das abscissas, ou seja, a função não tem raiz. O eixo das abscissas será uma **assíntota** do gráfico da função.

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.162

Em seguida, o autor sugere que o aluno repita os passos com outros três exercícios e depois propõe ao professor fazer considerações sobre a influência dos parâmetros  $a$ ,  $b$ , e  $c \in \mathbb{R}$  na função exponencial  $f(x) = a \cdot b^x + c$ , com  $b \neq 1$ . Sugerindo em seguida que o professor ofereça três tarefas de investigação aos alunos.

Na sequência das atividades o autor faz sugestões de o professor mostrar que a função exponencial é uma PG e a PA é uma função afim. Prova a possibilidade e a caracterização da função exponencial, porém o faz de maneira informal, aplicando em um exemplo cujo contexto da realidade se encontra na Matemática Financeira.

Figura. 18: Conexões entre função exponencial e progressões - intradisciplinar

Já estudamos que uma função afim  $f(x) = ax + b$  transforma uma progressão aritmética (PA) em outra progressão aritmética. E que uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  transforma uma PA em uma sequência cujas diferenças dos termos consecutivos formam outra PA.

Também estudamos que uma progressão geométrica (PG) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante diferente de zero, chamada razão da PG. Por exemplo, a sequência 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... é uma PG de razão 3.

Agora, veremos o que ocorre com uma função do tipo exponencial  $f(x) = b \cdot a^x$ .

Consideremos uma função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3 \cdot 2^x$  e a PA 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... de razão 2. Vamos constatar que  $f(1), f(3), f(5), f(7), f(9), f(11), f(13), \dots$  é uma PG. Assim, temos:

$$\begin{array}{lll} f(x) = 3 \cdot 2^x & f(5) = 3 \cdot 2^5 = 96 & f(11) = 3 \cdot 2^{11} = 6144 \\ f(1) = 3 \cdot 2^1 = 6 & f(7) = 3 \cdot 2^7 = 384 & f(13) = 3 \cdot 2^{13} = 24576 \\ f(3) = 3 \cdot 2^3 = 24 & f(9) = 3 \cdot 2^9 = 1536 & \end{array}$$

Observe que 6, 24, 96, 384, 1536, 6144, 24576, ... é uma PG de razão 4, ou seja, de razão  $2^2$ .

É possível provar que isso ocorre com qualquer função do tipo exponencial  $f(x) = b \cdot a^x$  e essa propriedade caracteriza a função do tipo exponencial, ou seja, se  $f$  é uma função exponencial do tipo  $f(x) = b \cdot a^x$ , ela transforma uma PA de razão  $r$  em uma PG de razão  $a^r$ . E, reciprocamente, se uma função transforma uma PA de razão  $r$  em uma PG de razão  $a^r$ , então essa função é do tipo exponencial  $f(x) = b \cdot a^x$ , com  $b = f(0)$  e  $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ .

**Observação:** Podemos observar na PA que, por exemplo, o 3º termo, que vale 5, é dado por:

$$5 = 1 + 2 \cdot 2 \quad (a_n = a_1 + nr)$$

e

$$f(5) = f(1) \cdot 2^{2 \cdot 2} \leftarrow n$$

↓                      ↓                      ↑

$$96 = 6 \cdot 2^4$$

↓                      ↓                      ↓

$a$                        $r$

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.164

A possibilidade oferecida pelo autor de o professor propor o tema de sequências, em especial progressão geométrica, em conexão com o tema de funções exponenciais, permite ao professor trabalhar com o aluno sua flexibilização frente à necessidade de se aprender a lidar com funções em situações diversas, que neste caso significa estar na própria Matemática.

Sugere logo a seguir algumas tarefas de manipulação, e três problemas para que os alunos conjecturem/argumentem seus procedimentos para chegar à solução, cujo contexto é o da própria matemática, já que está trabalhando com a intradisciplinaridade.

Segue um exemplo:

Figura. 19: Exercício para conjecturar/argumentar.

Um pesquisador encontrou em suas investigações a seguinte relação entre os valores de  $x$  e  $y$ :

$x$	1	3	5	7
$y$	4	8	16	32

Uma função exponencial, pois os valores de  $x$  formam uma PA e os de  $y$ , uma PG.

Que tipo de função expressa  $y$  em função de  $x$ ? Justifique.

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.165

Depois retorna ao conteúdo emergente introduzindo as Equações exponenciais e as inequações exponenciais, definindo, exemplificando, mostrando exercícios resolvidos e propondo exercícios de manipulação em grande quantidade e uma atividade em dupla para que os alunos encontrem o ponto de intersecção de dois gráficos; e duas outras tarefas de manipulação em duplas.

Figura 20: Exercícios resolvidos de equação exponencial e inequação exponencial

<p>Resolva as equações:</p> <p>a) <math>3^{3x-1} = 81</math></p> <p><b>Resolução:</b></p> <p>a) Vamos transformar a equação dada em uma igualdade de potências de mesma base:  <math>3^{3x-1} = 81 \Rightarrow 3^{3x-1} = 3^4</math></p> <p>Igualando os expoentes, temos uma equação do 1º grau em <math>x</math>:  <math>x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5</math></p> <p><b>Verificação:</b>  <math>x = 5 \Rightarrow 3^{3x-1} = 3^{5-1} = 3^4 = 81</math>  <math>S = \{5\}</math></p> <p><math>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}</math></p>	<p>9. Determine o domínio <math>D</math> das seguintes funções:</p> <p>a) <math>f(x) = \sqrt{3^x - 9}</math></p> <p>b) <math>g(x) = \frac{10}{\sqrt{16 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}}</math></p> <p><b>Resolução:</b></p> <p>a) Para que exista <math>f(x)</math> devemos ter <math>3^x - 9 \geq 0</math>.  Então: <math>3^x \geq 9 \Rightarrow 3^x \geq 3^2 \Rightarrow x \geq 2</math>  Logo, <math>D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}</math>.</p> <p>b) Para que exista <math>g(x)</math> devemos ter <math>16 - \left(\frac{1}{2}\right)^x &gt; 0</math>.  <math>16 &gt; \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} &gt; \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow -4 &lt; x</math>  Logo, <math>D = \{x \in \mathbb{R} \mid x &gt; -4\}</math>.</p>
--	---

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.161 e 169

O autor sugere que o professor apresente o número irracional  $e$ , e a função exponencial  $f(x) = e^x$ ; e oferece ao professor uma tabela que subsidia aos alunos a resolverem os exercícios que são propostos. O autor orienta ao professor que a correção dos gráficos propostos aos alunos tem sua correção no manual do professor.

Figura 21: O número irracional de Euler

<h2>O número irracional <math>e</math> e a função exponencial <math>e^x</math></h2> <p>Assunto opcional</p>	
<p>Uma função exponencial muito importante em Matemática é aquela cuja base é <math>e</math>:</p>	
$f(x) = e^x$	$e \approx 2,718281\dots \Rightarrow$ $\Rightarrow e^{-1} \Rightarrow f(x) = e^x$ é crescente
<p>Funções que envolvem essa função exponencial <math>e^x</math>, como <math>f(x) = b \cdot e^{ax}</math>, aparecem com muita frequência nas aplicações da Matemática e na descrição de fenômenos naturais. Algumas calculadoras possuem uma tecla com o número irracional <math>e</math>, cujo valor é 2,718...</p>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p><b>Para refletir</b>  A função <math>f(x) = e^x</math> é crescente. Justifique.</p> </div>	

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p. 170



Figura. 22: Exercícios de manipulação e construção de gráfico

53. Considere as funções  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = e^{-x}$ , usando os valores da tabela abaixo, determine:

$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$
0	1,0000	1,00000	3,0	20,086	0,04979
1,0	2,7183	0,36788	4,0	54,598	0,01832
2,0	7,3891	0,13534	5,0	148,41	0,00674

a)  $f(1), f(3), g(2)$  e  $g(4)$ ;  $f(1) = 2,7183; f(3) = 20,086;$   
 $g(2) = 0,13564; g(4) = 0,01832$

b)  $x$  tal que  $f(x) = 7,389$ ; 2

c)  $x$  tal que  $g(x) = 0,368$ . 1

Agora, construa no mesmo sistema de eixos os gráficos de  $f$  e  $g$ . *Veja os gráficos no Manual do Professor.*

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.170

Retornando à preocupação com os PCNEM (BRASIL, 2000), o autor propõe que o professor trabalhe as aplicações da função exponencial e oferece problemas cujo contexto encontra-se em outras ciências, como a Matemática Financeira, Estatística, a Química e a Biologia, procurando trabalhar situações da vida real, e também justificando a importância da Matemática pelo uso em outras ciências.

Oferece algumas situações cuja resolução descreve as etapas e um método para resolução de problemas, de maneira a oferecer um método para que o professor o faça com seus alunos, mostrando passo a passo como o resolver.

Figura. 23: Procedimento de resolução de um problema.

**Resolvido passo a passo**

11. (Uneb-BA) A expressão  $P(t) = K \cdot 2^{0,05t}$  fornece o número  $P$  de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo  $t$ , em anos. Se em 1990 essa cidade tinha 300 000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano 2000?

a) 352 000      c) 423 000      e) 441 000  
b) 401 000      d) 439 000

**1. Lendo e compreendendo**

a) O que é dado no problema?  
É dada uma função exponencial que relaciona o número esperado de habitantes da cidade com o ano:  $P(t) = K \cdot 2^{0,05t}$ . Também é dada a população da cidade em 1990: 300 mil habitantes.

b) O que se pede?  
O número esperado de habitantes na cidade citada no ano 2000.

**2. Planejando a solução**

A função dada relaciona a população esperada da cidade com o ano. Entretanto, a função não é inteiramente conhecida, pois existe uma constante  $K$  que precisaremos determinar para conhecer a função e depois obter a população no ano 2000. Para obter a constante  $K$ , usaremos um dado conhecido: em 1990 a população era de 300 mil habitantes. Então, uma primeira estratégia a ser seguida pode ser: 1º) obter  $K$  usando os dados conhecidos de 1990; 2º) substituir o valor de  $K$  na função para conhecê-la; 3º) usar a função para estimar a população da cidade em 2000.

**3. Executando o que foi planejado**

Se em 1990 a população era de 300 mil habitantes, temos  $P(1990) = 300\,000$ . Então:  
 $300\,000 = K \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \Rightarrow 300\,000 = K \cdot 2^{99,5} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow K = \frac{300\,000}{2^{99,5}}$

Não há necessidade de desenvolver melhor o valor de  $K$ , uma vez que seu valor está sendo determinado apenas para que a função exponencial seja conhecida completamente. Vamos substituí-lo na função:  
 $P(t) = \frac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05t}$

Com a função completamente determinada, podemos agora obter  $P(2000)$ , que é a população esperada no ano 2000.  
 $P(2000) = \frac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05t \cdot 2000} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow P(2000) = \frac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{100}$

Neste momento, observe a ocorrência de uma das propriedades da potenciação – divisão de potências de mesma base:  
 $\frac{2^{100}}{2^{99,5}} = 2^{100-99,5} = 2^{0,5}$

Assim, temos  $P(2000) = 300\,000 \cdot 2^{0,5}$ .

**Atenção:** Lembre-se de que potências com expoentes racionais são raízes:  $2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ . Agora, temos  $P(2000) = 300\,000 \cdot \sqrt{2}$ . Estimando  $\sqrt{2}$  como o decimal 1,41, temos:  
 $P(2000) = 300\,000 \cdot 1,41 = 423\,000$   
 Então, em 2000, espera-se que a população seja, aproximadamente, de 423 000 habitantes.

**4. Verificando**

Vamos resolver essa questão de outra maneira:  
 $P(1990) = K \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \Rightarrow P(1990) = K \cdot 2^{99,5} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow K = \frac{P(1990)}{2^{99,5}}$   
 $P(2000) = K \cdot 2^{0,05 \cdot 2000} \Rightarrow P(2000) = K \cdot 2^{100}$   
 Substituindo  $K$  na expressão anterior, temos:  
 $P(2000) = \frac{P(1990)}{2^{99,5}} \cdot 2^{100} = 300\,000 \cdot \frac{2^{100}}{2^{99,5}} =$   
 $= 300\,000 \cdot 2^{0,5} = 300\,000 \cdot \sqrt{2} = 300\,000 \cdot 1,41 =$   
 $= 423\,000$   
 Isso confirma o resultado obtido.

**5. Emitindo a resposta**

A resposta é a alternativa **c**.

**6. Ampliando o problema**

a) Qual é a população esperada para essa cidade em 2010? E em 2030? 2010: 600 000 habitantes; 2030: 1200 000 habitantes

b) Interprete o que está ocorrendo com a população dessa cidade de 20 em 20 anos, ou seja, de 1990 a 2010, de 2010 a 2030. Isso parece algo razoável em termos reais?

c) *Discussão em equipe*  
 Converse com seus colegas sobre o crescimento populacional e como isso pode afetar a vida dos moradores de uma cidade. O que pode ocorrer se uma cidade tiver um grande aumento populacional em um curto intervalo de tempo? Pensem nos pontos positivos e nos negativos. Que medidas podem ser tomadas pelas autoridades para evitar que a qualidade de vida dos cidadãos seja afetada pelo crescimento populacional?

d) *Pesquisa*  
 Qual é a maior cidade do planeta em termos de população (apenas área urbana, sem contar a região metropolitana)? Onde fica? Quantos habitantes tem? Pequim ou Beijing, na China, com 19,6 milhões de habitantes, dados de 2013.

b) A população dessa cidade dobra de 20 em 20 anos. Isso não parece ser um valor razoável, pois não é condizente com o que se costuma observar na realidade.

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.171

Por fim, o autor propõe os problemas já modelados, dois de Biologia e dois de Química e outros dois problemas também da Biologia e da Química que ainda precisam ser modelados.

Figura. 24: Problemas para serem modelados da Química e da Biologia

<p><i>Biologia</i></p> <p>Os biólogos afirmam que, sob condições ideais, o número de bactérias em uma certa cultura cresce de tal forma que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo de tempo considerado. Suponhamos que 2000 bactérias estejam inicialmente presentes em uma certa cultura e que 4000 estejam presentes 30 minutos depois. Quantas bactérias estarão presentes no fim de 2 horas? <i>32.000 bactérias.</i></p>	<p><i>Química</i></p> <p>Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:</p> <p>a) após 12 horas de sua ingestão? <i>3,125 mg</i></p> <p>b) após <math>t</math> horas de sua ingestão? <math>f(t) = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}</math></p>
--	---

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.172

Figura. 25: Problemas modelados da Química e da Biologia

<p><i>Química</i></p> <p>Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:</p> <p>a) após 12 horas de sua ingestão? <i>3,125 mg</i></p> <p>b) após <math>t</math> horas de sua ingestão? <math>f(t) = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}</math></p>	<p><i>Biologia</i></p> <p>Em uma certa cultura, há 1000 bactérias em determinado instante. Após 10 min, existem 4000. Quantas bactérias existirão em 1 h, sabendo que elas aumentam segundo a fórmula <math>P = P_0 \cdot e^{kt}</math>, em que <math>P</math> é o número de bactérias, <math>t</math> é o tempo em horas e <math>k</math> é uma constante? <i>Aproximadamente 4.447.022 bactérias.</i></p>
---	---

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.172

O autor conclui o capítulo com uma reportagem sobre o acidente radioativo que ocorreu no Brasil em 1987, propondo aos alunos aplicarem o que aprenderam, isto é, calcular o tempo que será necessário para que o Césio 137 desapareça, e a vida volte ao normal nesta região da cidade de Goiânia. Tal problema precisará ser modelado.

Figura. 26: Contextualização - radioatividade

## Leitura

### Césio 137 – o maior acidente radioativo do Brasil



Técnicos orientando o carregamento de lixo radioativo depois do acidente com o césio 137.

Em um acidente radioativo ocorrido no dia 13 de setembro de 1987, em Goiânia, Goiás, foram contaminadas centenas de pessoas acidentalmente por meio das radiações emitidas por uma cápsula que continha césio 137. Foi o maior acidente radioativo do Brasil e o maior do mundo ocorrido fora das usinas nucleares. Tudo teve início com a curiosidade de dois catadores de lixo que vasculhavam as antigas instalações do Instituto Goiano de Radioterapia (também conhecido como Santa Casa de Misericórdia), no centro de Goiânia.

No local eles encontraram um aparelho de radioterapia. Removeram a máquina e levaram-na até a casa de um deles. Estavam interessados nas partes de metal e chumbo que podiam ser vendidas em ferros-velhos da cidade; desconheciam completamente aquela máquina e o que havia em seu interior.

No período da desmontagem da máquina, foram expostos ao ambiente 19,26 g de cloreto de césio 137 (CsCl). Tal substância é um pó branco parecido com o sal de cozinha, mas que no escuro brilha com uma coloração azul. Após cinco dias, a peça foi vendida a um proprietário de ferro-velho, que se encantou com o brilho azul emitido pela substância. Crendo estar diante de algo sobrenatural, o dono do ferro-velho passou quatro dias recebendo amigos e curiosos interessados em conhecer o pó brilhante. Muitos levaram para casa pedrinhas da substância. Parte do equipamento de radioterapia foi para outro ferro-velho, de forma que gerou uma enorme contaminação com o material radioativo.

Os primeiros sintomas da contaminação (vômito, náusea, diarreia e tontura) surgiram algumas

horas após o contato com a substância, o que levou um grande número de pessoas à procura de hospitais e farmácias, sendo medicadas apenas como portadoras de uma doença contagiosa. Mais tarde descobriu-se que se tratava de sintomas de uma síndrome aguda de radiação. Somente no dia 29 de setembro de 1987 é que os sintomas foram qualificados como contaminação radioativa.

Os médicos que receberam o equipamento solicitaram a presença de um físico, pois tinham a suspeita de que se tratava de material radioativo. Então o físico nuclear Valter Mendes, de Goiânia, constatou que havia índices de radiação. Por suspeitar da gravidade do acidente, ele acionou a então Comissão Nacional Nuclear (CNEN).

Uma das primeiras medidas foi separar todas as roupas das pessoas expostas ao material radioativo e lavá-las com água e sabão para a descontaminação externa. Após essa medida, as pessoas tomaram um quelante (substância que elimina os efeitos da radiação). Com ele, as partículas de césio saem do organismo através da urina e das fezes.

Cerca de um mês após o acidente quatro pessoas já haviam morrido. O trabalho de descontaminação dos locais atingidos gerou cerca de 13,4 toneladas de lixo (roupas, utensílios, material de construção, etc.) contaminado.

Após o acidente, cerca de sessenta pessoas morreram vítimas da contaminação, entre elas funcionários que realizaram a limpeza do local. O Ministério Público reconhece apenas 628 vítimas contaminadas diretamente, mas a Associação das Vítimas do Césio 137 calcula um número superior a 6 mil pessoas atingidas pela radiação.

Adaptado de: <[www.brasilescola.com/quimica/acidente-csio137.htm](http://www.brasilescola.com/quimica/acidente-csio137.htm)>. Acesso em: 19 fev. 2013.

#### Para refletir

- Sabendo que o acidente radioativo foi em 1987 e que o local do acidente só poderá ser habitado novamente quando a quantidade de césio 137 se reduzir, por desintegração, a  $\frac{1}{32}$  da quantidade inicialmente presente, então o local poderá ser reabitado a partir de que ano?  $\frac{\quad}{2137}$

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.173

## Considerações

Como podemos notar, o autor oferece uma grande quantidade e variedade de sugestões, desde apresentar o conceito do conteúdo novo a ser estudado de maneira intuitiva oferecendo tarefas desafiadoras que provocam o aluno a investigar, conjecturar, explorar, e resolver situações-problema contextualizadas na matemática, como na vida real e em outras ciências, precisando que a situação seja ou não modelada. Ele também oferece as definições e propriedades podendo ser utilizadas como institucionalização do conceito introduzido, ou mesmo o faz para o professor as reproduzir com seus alunos, juntamente com exemplos, exercícios resolvidos, propondo esta apresentação por meio de estratégias por ele planejadas.

A seguir apresentamos a grade utilizada para categorizar os itens referentes aos descritores por nós determinados, e quantificamos as tarefas que o autor propôs a serem oferecidas aos alunos.

Gráfico 01: tipos de tarefas emergentes propostas pelo autor do Livro A



Fonte: A pesquisadora

Foram propostas 103 tarefas do conteúdo de função exponencial que se distribuíram nas quantidades referentes aos números no topo das barras coloridas.

O percentual, número do interior das barras coloridas, são para se ter noção comparativa do tipo de exercício em relação ao todo oferecido pelo autor em sua obra didática.

A quantidade de tarefas para se manipular, isto é, aplicar a definição e as propriedades, ainda são oferecidas em grande quantidade, correspondendo 56% dos exercícios propostos.

A não oferta de tarefas para se provar uma proposição é algo que nos chamou a atenção, visto que é uma das prescrições nas orientações curriculares.

Assim como ainda é muito pequena a porcentagem de tarefas para se modelar uma situação-problema.

Quanto à quantidade de 11% de problemas contextualizados, sendo estes em sua maioria situações-problema já modeladas, podem ser resolvidos com apenas a substituição da incógnita do modelo, o que não seria interessante que acontecesse porque o propósito de se oferecer problemas contextualizados por meio de temas da vida real e em outras ciências, é o de propor tarefas desafiadoras que provoquem o aluno a investigar, conjecturar, explorar, e encontrar a solução para o problema proposto de maneira satisfatória, e que validem esses modelos propostos neste tipo de tarefa, de maneira que estes modelos sirvam para outras situações semelhantes.

Quanto à porcentagem de exercícios para o aluno desenvolver a competência de explorar, conjecturar/argumentar, e resolver problemas devem ser em torno de 10%.

Estas são tarefas que muito irão depender da maneira como o professor irá conduzir suas aulas, suas decisões metodológicas e suas definições quanto a estratégias de ensino, que deverão estar de acordo com as necessidades de sua turma de alunos; podendo ele, a partir destas, que foram ofertadas a princípio, multiplicar esta quantidade, explorando estas competências em outras atividades, estimulando atividades em duplas e/ou em sala de informática com atividades próprias de construção do conhecimento pelo aluno.

Este livro é rico na oferta de gráficos e tabelas trazidas prontas pelo autor da obra, sendo ele responsável por fazer as considerações pertinentes quanto às propriedades que gozam as funções exponenciais. Ao mesmo tempo oferece a oportunidade de o aluno trabalhar em sala de informática. Apesar de a atividade estar orientada passo a passo, o professor pode tê-la como referência para o que achar pertinente trabalhar com esta ferramenta tecnológica que estimula a aprendizagem.

O autor propõe tarefas de exploração quando lança mão do recurso digital, sugerindo que o professor faça o *download* da internet gratuitamente, o *software* livre GeoGebra, para construir gráficos, oportunizando atividades que abram espaço para reflexão, para a crítica, para o uso da linguagem matemática quando o aluno é provocado a investigar, explorar e ter de justificar suas estratégias de resolução utilizando raciocínio lógico-dedutivo. Porém, muito se espera da metodologia adotada pelo professor para tanto, mesmo que estas atividades sejam recomendadas pela proposta curricular, pelo grande potencial de desenvolvimento de habilidades e competências previstas para o ensino médio.

Tabela 06: Tabela de coleta de dados do livro A: CONTEXTO &amp; APLICAÇÕES

Categorias	Subcategorias	Análise do livro didático		
1.Situações	1.1 Introdução/motivação	Apresenta situações da própria matemática, de outras ciências e da vida real.		
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas): 110 a) revisão: 68 b) função exponencial: 42	Apresenta o conteúdo novo por meio de exemplos e exercícios resolvidos.		
	1.3 Tarefas (que os autores Propõem ao estudante): 221	A) Conhecimentos Prévios: 118	Regras operatórias das potências justificando na linguagem lógico-dedutiva.	
		B) Conhecimentos Emergentes: 103	1-Representar graficamente funções	<b>7</b>
			2- Explorar	<b>11</b>
			3- Manipular	<b>59</b>
			4- Conjeturar, argumentar	<b>12</b>
5- Provar	<b>0</b>			
6- Modelar	<b>3</b>			
7-Resolução de Problemas	<b>11</b>			
2.Linguagem	Formal ou informal?	Linguagem natural, algébrica, numérica, gráfica, tabular. Utiliza a linguagem natural no contexto de enunciados e de propriedades.		
3.Conceitos	Explícito ou implícito?	Explícito, apresentados numa perspectiva lógico-dedutiva. Usa termos algébricos formais.		
4.Proposições (propriedades de potência)	4.1 Como as apresentam/recordam?	Feita a partir das propriedades, de modo formal.		
	4.2 Prova, demonstra ou justifica?	Não prova de maneira formal, justifica. Propõe exercício que resolve passo a passo.		
	4. Mostram sua utilização em exercícios ou só as expões?	Utiliza as propriedades, mostra aplicação por meio de exemplos e exercícios resolvidos.		
5.Procedimentos Métodos de resolução de exercícios)	5.1 Utilizam diversas maneiras diferentes de se resolver um exercício?	Diferentes abordagens para resolver a mesma situação: analítica, geométrica. Porém predomina a analítica.		
	5.2 Justifica ou não a resolução?	Justifica.		
	5.3 Utilizam as novas tecnologias?	Propõe exercícios de exploração com a construção de gráficos de Função Exponencial, usando <i>software GeoGebra</i> e propõe o uso de calculadora científica, também para atividades exploratórias.		
6.ArgUMENTAÇÕES	6.1 Utilizam uma prática discursiva baseada na linguagem verbal, gráfica, para convencer da validade das propriedades?	Para convencer sobre o uso das propriedades, traz exercícios resolvidos como exemplo, justifica. Apresenta um discurso em linguagem verbal e gráfica para convencer o leitor de determinadas propriedades, partindo de contextualizações, exemplos concretos para a generalização formal.		
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos sintético.		

Fonte: Adaptada da dissertação de FONSECA, 2013.





Eles optam por oferecer ao professor a resolução passo a passo da situação-problema apresentada, sintetizando numa função exponencial que será estudada pelos alunos.

Em seguida iniciam a revisão de potência, apresentando a definição, eles então fornecem um exemplo, citam as propriedades com expoentes sendo  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{Q}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

Figura 28: Definição de Potência para  $x \in \mathbb{N}$

**Definição**

Dados um número real  $a$  e um número natural  $n$ , com  $n \geq 2$ , chama-se **potência de base  $a$  e expoente  $n$**  o número  $a^n$  que é o produto de  $n$  fatores iguais a  $a$ .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 135

Figura 29: Propriedades onde  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$  e  $m$  e  $n \in \mathbb{N}$

- 1ª)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- 2ª)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  ( $a \neq 0$  e  $m \geq n$ )
- 3ª)  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- 4ª)  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$  ( $b \neq 0$ )
- 5ª)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Fonte: Gelson Iezzi et. Al., 2013, p. 136

A seguir, fornecem ao professor 50 tarefas de manipulação para que este as proponham aos seus alunos conforme achar pertinente:

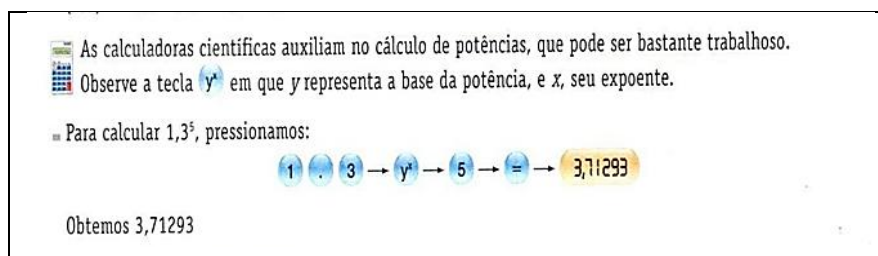
Figura 30: Tarefas de manipulação

Escreva em uma única potência:	Calcule:	Calcule:
a) $\frac{11^3 \cdot (11^4)^2 \cdot 11}{11^6}$	d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$	g) $\left(\frac{3}{2}\right)^1$
c) $\frac{10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}}{(0,01)^{-1}}$	e) $\left(\frac{1}{50}\right)^{-2}$	h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$
b) $\frac{(2^4)^3 \cdot 2^7 \cdot 2^3}{(2^{11})^2}$	f) $\left(-\frac{11}{7}\right)^0$	i) $-(-2)^5$
d) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot (10^2)^{-3}}{(10^{-4})^3}$	j) $10^{-3}$	l) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$
		a) $0,2^2$
		e) $0,05^{-2}$
		i) $0,6^3$
		b) $0,1^{-1}$
		f) $1,25^{-1}$
		j) $0,08^{-1}$
		c) $3,4^1$
		g) $1,2^3$
		k) $(-0,3)^{-1}$
		d) $(-4,17)^0$
		h) $(-3,2)^2$
		l) $(-0,01)^{-2}$

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013. p. 138

Os autores sugerem o uso de calculadora para facilitar os cálculos com potências, tutorando os procedimentos que o aluno deve fazer quando em uso desta tecnologia.

Figura 31: Uso de calculadoras



Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 136

Em meio à revisão de potência os autores trazem uma contextualização que julgaram interessante para justificar a importância de se conhecer sua utilização quando se trata de números muito pequenos e muito grandes que aparecem nos estudos científicos e medições de grandeza, a notação científica, permeando várias áreas do conhecimento como na Física, Química, Astronomia, Biologia, Meio Ambiente, etc. Optam por oferecer exemplos de aplicações e nenhum exercício.


Em seguida prosseguem com os expoentes de números racionais: definem, oferecem exemplos, trazem exercícios resolvidos passo a passo justificando os procedimentos de resolução no uso das propriedades, e por fim, oferecem ao professor 34 tarefas de manipulação e um problema contextualizado já modelado numa problemática de nosso cotidiano e esta possibilita se o professor achar pertinente a interdisciplinaridade com a Educação Física e a Biologia, indicado no manual do professor deste mesmo livro: Como calcular a massa corpórea de uma pessoa.

Figura 32: Tarefas de manipulação

.Calcule o valor de:		.Calcule:	.Calcule o valor de cada expressão:
a) $27^{\frac{1}{3}}$	e) $576^{\frac{1}{2}}$	a) $\sqrt[4]{256} \cdot \sqrt{25} - 16$	a) $A = 64^{-0,6666...} \cdot 0,5^{0,5}$
b) $256^{\frac{1}{2}}$	f) $0,25^{\frac{1}{2}}$	b) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{49}}$	b) $B = \left(128^{\frac{1}{7}} + 81^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$
c) $32^{\frac{1}{5}}$	g) $\left(\frac{27}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$	c) $(\sqrt[3]{1000} - \sqrt[5]{64})^2$	c) $C = 0,001^{-\frac{2}{3}} \cdot 1000^{\frac{5}{6}}$
d) $64^{\frac{1}{3}}$	h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{0,25}$	d) $\frac{\sqrt{9,61} - \sqrt{6,25}}{\sqrt[3]{0,008}}$	d) $D = (4 \cdot 10^{-6})^{-\frac{1}{2}}$

Fonte: Gelson Iezzi, et a., 2013, p. 142

Figura 33: Problema da realidade, já modelado pela fórmula Área da superfície corporal (ASC):

<p>A área da superfície corporal (ASC) de uma pessoa, em metros quadrados, pode ser estimada pela fórmula de Mosteller:</p> $ASC = \left( \frac{h \cdot m}{3600} \right)^{\frac{1}{2}}$ <p>em que <math>h</math> é a altura da pessoa em centímetros; <math>m</math> é a massa da pessoa em quilogramas.</p>	
<p>a) Calcule a área da superfície corporal de um indivíduo de 1,69 m e 75 kg. Use a aproximação <math>\sqrt{3} = 1,7</math>.</p> <p>b) Juvenal tem ASC igual a <math>2 \text{ m}^2</math> e massa 80 kg. Qual é a altura de Juvenal?</p> <p>c) Considere dois amigos, Rui e Eli, ambos "pesando" 81 kg. A altura de Rui é 21% maior do que a altura de Eli. A ASC de Rui é <math>x\%</math> maior do que a ASC de Eli. Qual é o valor de <math>x</math>?</p>	<p>O cálculo de superfície corporal é utilizado na fisiologia e em farmacologia. Por exemplo, a dosagem de um medicamento deve ser ministrada considerando as variações físicas de uma pessoa à outra, a fim de garantir a eficácia do tratamento e evitar os efeitos adversos de uma dosagem errada.</p>

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 142

Os autores retomam a importância da calculadora no auxílio de tarefas que apresentam expoentes com números irracionais. Eles optam por mostrar como a calculadora pode auxiliar nestas situações.

Figura 34: Expoente irracional, como aproximar usando a calculadora.

Seja a potência  $2^x$ .

Como  $\sqrt{2}$  é irracional, vamos considerar aproximações racionais para esse número por falta e por excesso e, com auxílio de uma calculadora científica, obter o valor das potências de expoentes racionais:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356\dots$$

Por falta	Por excesso
$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
$2^{1,4} \approx 2,639$	$2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$
$2^{1,41} \approx 2,657$	$2^{1,42} \approx 2,675$
$2^{1,414} \approx 2,6647$	$2^{1,415} \approx 2,6665$
$2^{1,4142} \approx 2,6651$	$2^{1,4143} \approx 2,6653$
⋮	⋮

Note que, à medida que os expoentes se aproximam de  $\sqrt{2}$  por valores racionais, tanto por falta quanto por excesso, os valores das potências tendem a um mesmo valor, definido por  $2^{\sqrt{2}}$ , que é aproximadamente igual a 2,665.

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p.143

Em continuidade os autores retomam o conteúdo emergente, a função exponencial, apresentando a definição, exemplos, resolução de exercícios e exercícios como tarefas de manipulação além de oferecerem ao professor atividade resolvida de gráficos de função exponencial.

Figura 35: Exercícios resolvidos de construção de gráficos

Vejamos como construir o gráfico da função  $f$ , cuja lei é  $y = 2^x$ .  
Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los por meio de uma curva.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \approx 1,41$
1	2
2	4
3	8

Observe que  $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$  e, deste modo,  $\text{Im} = \mathbb{R}^+$ .

Vamos construir o gráfico da função  $f$ , cuja lei é  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Observe que  $\text{Im} = \mathbb{R}^+$ .

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 144

Assim como também, os autores indicam o uso da calculadora ao apresentar o número de Euler, na página 145, onde  $e = 2,718281828459\dots$ . Porém não oferecem tarefas a serem feitas pelos alunos, mas dão exemplo tutorando a resolução de tarefa, ensinando como usar a calculadora no caso deste precisar fazer cálculos com o  $e$ .

Figura 36: Uso de calculadoras para facilitar cálculos

Você pode usar uma calculadora financeira ou científica para calcular o valor de  $e^x$ .

Veja:

Para calcular:  $e^2$ , pressionamos:

2 → 2ndF → e<sup>x</sup> → 7,389

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p.146

Os autores optam por oferecer tabelas prontas, gráficos construídos e fazem observações quanto à translação de gráficos e sua imagem para depois sugerir tarefas de construção de gráficos, porém não em sala de informática para o professor oferecer aos seus alunos, ou mesmo interpretá-los:

Figura 37: Tarefa de construção e interpretação de gráficos

Construa os gráficos das funções exponenciais definidas pelas leis seguintes, destacando seu conjunto imagem:

a)  $f(x) = 4^x$                       c)  $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$

b)  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$                     d)  $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$

Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $f$  dada por  $f(x) = a \cdot 2^x$ , sendo  $a$  uma constante real. Sabendo que  $f(1) = \frac{3}{4}$ , determine o valor de  $f(3)$ .

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p.148

Assim como também propõem tarefas de resolução de problemas em contextos como da Matemática Financeira, Biologia, Estatística:

Figura 38: Problemas modelados ou para serem modelados:

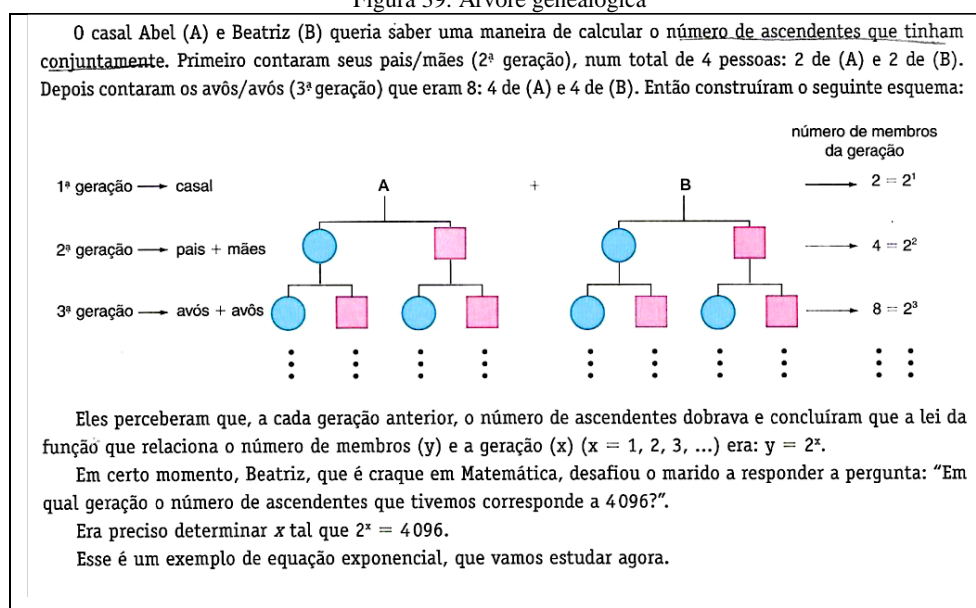
<p><b>22.</b> Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.</p> <p>a) Faça uma tabela para representar a população de bactérias nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 1 hora, 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas.</p> <p>b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (<math>n</math>) em função de tempo (<math>t</math>).</p>	<p><b>26.</b> Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após <math>t</math> semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar <math>p</math> unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona <math>p</math> e <math>t</math> é: <math>p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}</math> (leia o texto da seção <i>Aplicações</i>, página 150).</p> <p>a) Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?</p> <p>b) Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use a aproximação <math>e^{0,2} = 1,2</math>.</p> <p>c) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?</p>
---	--

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 149

Os autores apresentam uma situação-problema já resolvida pertencente ao mundo do trabalho.

Para introduzir de maneira intuitiva o conceito de equação exponencial os autores apresentam uma situação-problema que envolve a árvore genealógica como exemplo de exercício resolvido: calcular o número de antecedentes genealógicos, perceber o padrão da sequência lógica para se modelar, isto é chegar numa fórmula matemática que a sintetize. A solução apresentada sugere descobrir em que geração o número de ascendentes corresponde a 4096;  $2^x = 4096$ .

Figura 39: Árvore genealógica



Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 151

Novamente os autores optam por definir, exemplificar, oferecer exercícios resolvidos e apresentar exercícios para serem resolvidos de manipulação, problemas modelados do contexto da Matemática Financeira, Física, Estatística, Geologia além dos

usuais para manipular, estes de dificuldades crescentes de simples aplicação direta da definição e das propriedades de equação e inequação exponencial.

Figura 40: Exemplos de exercícios resolvidos, tarefa de manipulação e de problema já modelados.

<p>Resolver as seguintes equações em <math>\mathbb{R}</math>:</p> <p>a) <math>\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81</math>                      b) <math>(\sqrt{2})^x = 64</math></p> <p><b>Solução:</b></p> <p>a) <math>\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \Rightarrow (3^{-1})^x = 3^4 \Rightarrow 3^{-x} = 3^4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-4\}</math></p> <p>b) <math>(\sqrt{2})^x = 64 \Rightarrow (2^{\frac{1}{2}})^x = 2^6 \Rightarrow \frac{x}{2} = 6 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow S = \{12\}</math></p>	<p>Resolva, em <math>\mathbb{R}</math>, as seguintes equações exponenciais:</p> <p>a) <math>8^x = 16</math>                      f) <math>4^x = -\frac{1}{2}</math></p> <p>b) <math>27^x = 9</math>                      g) <math>\left(\frac{1}{25}\right)^x = 125</math></p> <p>c) <math>4^x = 32</math>                      h) <math>\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8}</math></p> <p>d) <math>25^x = 625</math>                      i) <math>\left(\frac{1}{1000}\right)^{2x+1} = \sqrt{10}</math></p> <p>e) <math>9^x = \frac{1}{27}</math></p>	<p>O preço <math>p</math>, em unidades monetárias, de uma ação de uma empresa siderúrgica, comercializada em uma bolsa de valores, oscilou de 1990 a 2010 de acordo com a lei:</p> $p(t) = 3,20 \cdot 2^{\frac{t+1}{5}}$ <p>em que <math>t</math> é o tempo, em anos, contado a partir de 1990.</p> <p>a) Qual era o valor da ação em 1994? E em 1999?</p> <p>b) Em que ano a ação passou a valer oito vezes o valor de 1990?</p>
---	--	---

Fonte: Gelson Iezzi, et al., 2013, p. 153

Em seguida o autor propõe situações-problema da realidade para que o professor trabalhe com seus alunos.

Figura 41: Contextos: Meia-vida, radioatividade e medicamentos:

### Os medicamentos e a Matemática

Amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de infecções não complicadas, amplamente receitado por médicos no Brasil.

A cada período de 1,3 hora ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar vamos considerar 1 hora e 20 minutos), a quantidade de amoxicilina no organismo decresce em 50% do valor que tinha no início do período.

Considerando que uma cápsula ingerida por um adulto contém 500 mg de amoxicilina, no gráfico abaixo estão representadas as quantidades desse fármaco no organismo, de acordo com o tempo decorrido após a ingestão.

**Pense nisto:** Qual é a lei da função que representa a quantidade de amoxicilina no organismo de acordo com o número de meias-vidas?

A lei é:  $q(n) = \frac{500}{2^n}$ , sendo  $q(n)$  a quantidade de amoxicilina transcorridas  $n$  meias-vidas:


Tempo	Quantidade (mg)	Número de Meias-vidas
0	500	0
1h 20min	250	1
2h 40min	125	2
4h	62,5	3
5h 20min	31,25	4
6h 40min	15,625	5
8h	7,8125	6

O gráfico da página anterior mostra que, decorridas 8 horas da ingestão de uma cápsula, a concentração de amoxicilina no organismo é de apenas 7,8125 mg. Comparando-se com a quantidade inicialmente ingerida, obtemos  $\frac{7,8125 \text{ mg}}{500 \text{ mg}} = 0,015625$ ; ou seja, depois de 8 horas, a quantidade de amoxicilina é de cerca de 1,5% da quantidade ingerida. A ingestão de uma nova cápsula possibilita a continuidade do tratamento e mostra a necessidade de o paciente seguir, rigorosamente, o intervalo de tempo prescrito.

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 156

E para terminar o capítulo, os autores introduzem o conceito de inequação exponencial de maneira explícita oferecendo ao professor sua definição, apresentando exemplo e gráficos e exercícios resolvidos e, por fim, propõem ao professor tarefas aos seus alunos.

Figura 42: Tarefas de manipulação, problemas contextualizados modelados

<p>A população de peixes em um lago está diminuindo devido à contaminação da água por resíduos industriais.</p> 	<p>A lei <math>n(t) = 5000 - 10 \cdot 2^{t-1}</math> fornece uma estimativa do número de espécies vivas <math>n(t)</math> em função do número de anos <math>(t)</math> transcorridos após a instalação do parque industrial na região.</p> <p>a) Estime a quantidade de peixes que viviam no lago no ano da instalação do parque industrial.</p> <p>b) Algum tempo após as indústrias começarem a operar, constatou-se que havia no lago menos de 4 920 peixes. Para que valores de <math>t</math> vale essa condição?</p> <p>c) Uma ONG divulgou que, se nenhuma providência for tomada, em uma década (a partir do início das operações) não haverá mais peixes no lago. Tal afirmação procede?</p>	<p>Resolva, em <math>\mathbb{R}</math>, as seguintes inequações exponenciais:</p> <p>a) <math>6^{x-2} \geq \frac{1}{36}</math></p> <p>b) <math>\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-2} &gt; 1</math></p> <p>c) <math>(\sqrt{2})^x \leq \frac{1}{16}</math></p> <p>d) <math>(0,01)^x &gt; \sqrt{10}</math></p>
---	---	---

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 159

E para encerrar o capítulo propõem um desafio que envolve raciocínio lógico, que não envolve o conteúdo de função exponencial, é uma oportunidade oferecida pelos autores do aluno vivenciar e aperfeiçoar a resolução de problemas com esta atividade aberta que o permite explorar, investigar, motivando-o a buscar estratégias e procedimentos diversos de resolução, podendo não ser os padronizados e nem os conhecidos por ele. Este tipo de desafio está presente como nas questões das Olimpíadas Brasileira de Matemática (OBM) e na Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas (OBMEP).

Figura 43: Desafio – Problema contexto da Matemática pura

Quatro participantes de uma gincana precisam cruzar uma pinguela sobre um desfiladeiro à noite. Ela suporta no máximo duas pessoas e existe apenas uma lanterna, sem a qual nada se enxerga. O desfiladeiro é largo demais para que alguém se arrisque a jogar a lanterna. Não são permitidas travessias pela metade. Cada membro do grupo atravessa a ponte em uma velocidade. Os tempos de travessia são:

Participante 1: **1 minuto**

Participante 2: **2 minutos**

Participante 3: **5 minutos**

Participante 4: **10 minutos**

Se duas pessoas atravessam juntas, vale a velocidade da mais lenta. Qual é o tempo mínimo para que o grupo realize a travessia?

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p.159

## Considerações

Os autores desta obra introduzem o conceito de função exponencial de maneira implícita por meio da situação-problema e do censo populacional cujo contexto da Estatística se aplica na vida real.

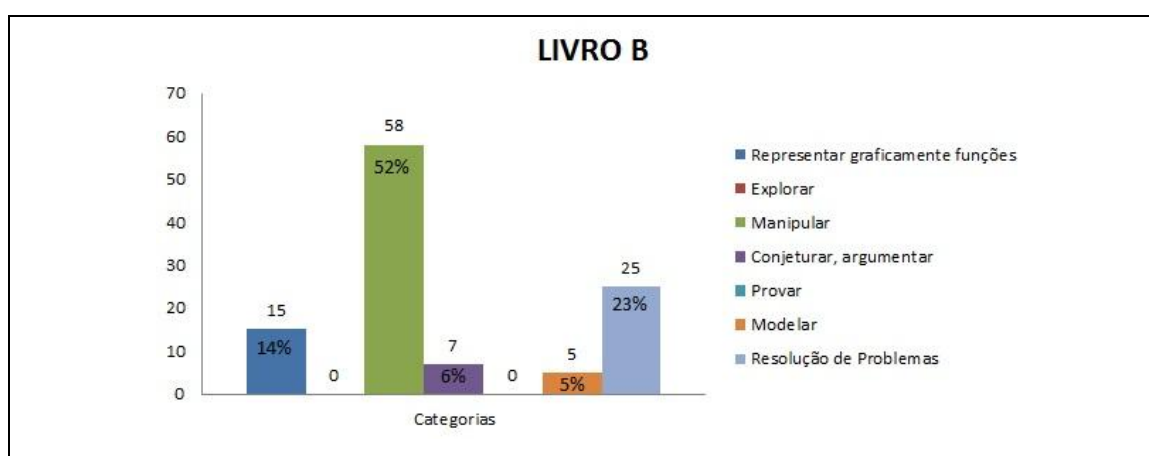
No capítulo de função exponencial é proposta a sequência que oferece definições, exemplos, exercícios resolvidos, gráficos e suas propriedades, equações e inequações exponenciais, além de consolidar por meio da revisão, os conhecimentos adquiridos no ensino fundamental e a notação científica.

A estrutura citada é, a todo o momento, intercalada com aplicações de tarefas, exercícios diversificados cujo contexto pode ser o da Matemática, de outras ciências e da vida real.

Os autores justificam no manual do professor, que o aluno percebe de maneira informal e intuitiva as propriedades que os gráficos representam, mesmo não tendo eles sugerido o uso de *softwares* para a sua construção, e o desenvolvimento das competências pertinentes às estas atividades com o uso das novas tecnologias, conforme sugerem as orientações curriculares.

Achamos pertinente contabilizarmos as tarefas do conceito emergente de função exponencial, oferecidas pelos autores aos professores para que estes as proponham aos seus alunos, conforme acharem pertinentes.

Gráfico 02: Tipos de tarefas emergentes propostas pelo autor do Livro B



Fonte: A pesquisadora

A quantidade de exercícios propostos para manipular, isto é, aplicar as definições e propriedades, é de 52% em relação às outras tarefas. E que não existem tarefas para que os alunos explorem ou mesmo para provar, o que não está de acordo com as prescrições curriculares.

A quantidade de situações-problema contextualizada da vida real ou de outras ciências é pertinente de acordo com os PCNEM (BRASIL, 2000), porém são em sua maioria problemas já modelados, o que pode resultar em resolução imediatista de substituição da incógnita da fórmula e a sequente manipulação. Portanto, para que este



tipo de tarefa desenvolva as habilidades e competências pertinentes à proposta curricular, é necessária a mediação do professor, introduzindo as fases de resolução de problemas.

Os autores propõem várias atividades para construção de gráficos, e muitas delas fazem parte das situações-problema, com intuito de melhorar a compreensão do fenômeno estudado em cada situação, porém lançam mão da linguagem gráfica de construção manual, não sugerindo o uso das novas tecnologias.

As tarefas para serem modeladas, que compreendem 5% do total de atividades oferecidas neste capítulo, se encontram nas situações-problema cujo contexto está relacionado com a Estatística, a Matemática Financeira e a Biologia ficando a haver situações da própria matemática.

Quanto às tarefas que permitam ao aluno conjecturar/argumentar, também estão em número reduzido, porém, tal atividade depende da metodologia do professor ao mediar a construção do conhecimento pelo aluno, provocando questionamentos e proposições para que o aluno argumente suas estratégias de resolução dos exercícios propostos, independentemente.

No final do livro, no Manual do professor, na seção Aplicações os autores oferecem outras três tarefas para modelar situações problemas cujo contexto está na Química: Radioatividade. Estes não fizeram parte de nossa contagem porque não estão no livro didático do aluno, e que os autores os caracterizam como optativos, ficando à critério do professor oferecer ou não.

Tabela 07: Tabela de coleta de dados do Livro B: MATEMÁTICA CIÊNCIAS &amp; APLICAÇÕES.

Categories	Subcategories	Analysis of the didactic book		
1. Situations	1.1 Introduction/motivation	Presents situations of the own mathematics, of other sciences and of real life.		
	1.2 Examples (solved tasks): 78 Revisions: 57 Emergents: 21	Presents the new content through examples and solved exercises		
	1.3 Tasks (That the authors propose to the student): 196	A) Previous Knowledge. 86	Operational rules of powers 83 of manipulation and 3 contextualized problems	
		B) Emergent Knowledge: 110	1-Represent graphically functions	15
			2-Explore	0
			3-Manipulate	58
			4- Conjecture/argue	7
			5- Prove	0
6- Model	5			
7-Resolution of problems	25			
2. Language	Formal or informal?	Natural language, algebraic, numerical, graphical, tabular. Uses natural language in the context of enunciations and properties.		
3. Concepts	Explicit or implicit?	Introduces in a logical deductive, explicit, and then presents the formal definition without justificatory or demonstration.		
4. Propositions (Properties of power)	4.1 How do they present/remember?	Formal. Only applies the property in the resolution of exercises.		
	4.2 Prove, demonstrate or justify?	No		
	4.3 Show their use in exercises or only expose?	Only uses the properties in examples after the enunciation.		
5. Procedures (methods of resolution of exercises)	5.1 Use different ways to solve an exercise?	Different approaches to solve the same situation: analytical, geometric. However, analytical predominates.		
	5.2 Justify or not the resolutions?	Justifies.		
	5.3 Use new technologies?	Does not propose the use of computers, but advises the use of scientific calculator to reduce algorithmic work.		
6. Arguments	6.1 Use a discursive practice, verbal or graphical to convince the validity of determined properties.	Presents a discourse in verbal and graphical language to convince the reader of determined properties, starting from contextualizations, concrete examples for formal generalization.		
	6.2 Type of proof used.	Does not prove, develops exercise in a logical-deductive way. Synthetic method.		

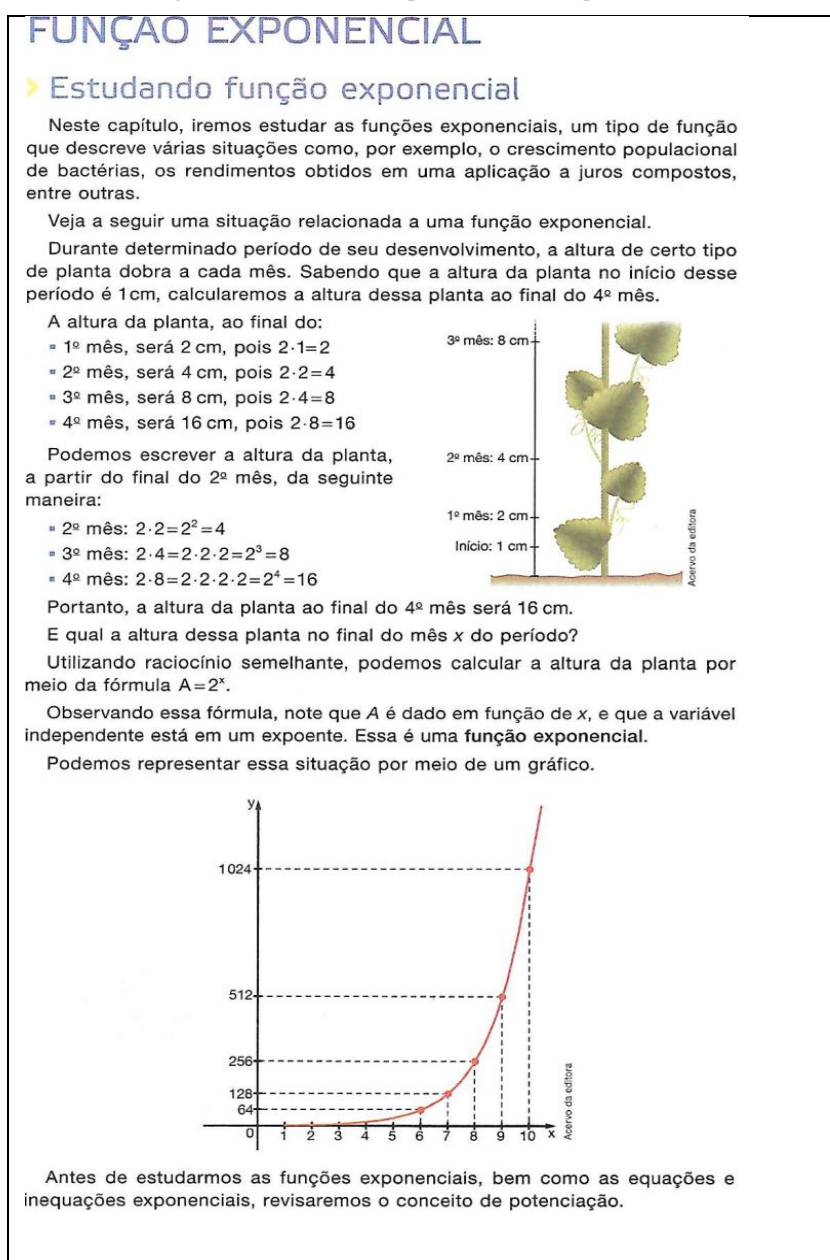
Fonte: Adaptada da dissertação de FONSECA, 2013.

### 5.1.3 Livro C

Apresentaremos aqui a proposta do autor para a abordagem do ensino de função exponencial em seu livro, descrevendo sua proposta metodológica na planificação do currículo.

O autor apresenta o conceito de função exponencial de maneira implícita, mostrando o estudo do crescimento de certo tipo de planta, alegando que o crescimento desta, dobra a cada mês.

Figura 44: Crescimento exponencial de uma planta



Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 149

O autor opta por mostrar as anotações do crescimento da planta, orientando que se observe a existência de algum padrão numérico de maneira intuitiva, para se modelar

o problema com a finalidade de responder a pergunta: qual o tamanho da planta no quarto mês?

Fornecendo os dados em gráfico, o autor representa no plano cartesiano a curva de crescimento de uma planta e as propriedades da função exponencial. Ele também aproveita o contexto para citar o crescimento exponencial de micro-organismos que se desenvolvem na lavoura, estudando o seu crescimento exponencial.

Em seguida o autor opta por oferecer uma revisão de Potência, partindo formalmente para a definição de potência explícita e propõe justificar sua aplicação por meio de exemplos e de resolução de exercícios passo a passo.

Figura 45: Definição de potência

➤ **Revisão potenciação**

No Ensino Fundamental, você provavelmente já estudou a operação de **potenciação**, que corresponde a uma multiplicação de fatores iguais.

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{5 \text{ fatores iguais}} = 4^5 = 1024$$

Na potenciação, podemos destacar os seguintes elementos:

expoente

base

potência

$$4^5 = 1024$$

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 150

O autor sugere que o professor faça a revisão das cinco Propriedades das Potências de maneira explícita e formal, oferecendo exemplos de exercícios resolvidos, de maneira lógico-indutiva, justificando passo a passo.

Figura 46: Propriedade de potência

### Propriedades das potências

Agora, vamos rever algumas propriedades das potências.

- **1ª propriedade:** Uma multiplicação de potências de mesma base pode ser escrita como uma única potência. Exemplo:

$$2^3 \cdot 2^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2^3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2^2} = 2^5 \quad \text{ou} \quad 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

De maneira geral, para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  e  $n \in \mathbb{Z}^*$ , temos:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

- **2ª propriedade:** Uma divisão de potências de mesma base (não nula) pode ser escrita como uma única potência. Exemplo:

$$6^5 : 6^3 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 6^2 \quad \text{ou} \quad 6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$$

De maneira geral, para  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  e  $n \in \mathbb{Z}^*$ , temos:  $a^m : a^n = a^{m-n}$ .

- **3ª propriedade:** Em uma multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um expoente, podemos elevar cada um dos fatores a esse mesmo expoente. Exemplo:

$$(4 \cdot 3)^2 = (4 \cdot 3)(4 \cdot 3) = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 4}{4^2} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3^2} = 4^2 \cdot 3^2$$

De maneira geral, para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{Z}^*$ , temos:  $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ .

- **4ª propriedade:** Em uma divisão elevada a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente. Exemplo:

$$(15 : 7)^3 = \left(\frac{15}{7}\right)^3 = \frac{15 \cdot 15 \cdot 15}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{15^3}{7^3}$$

De maneira geral, para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  e  $m \in \mathbb{Z}^*$ , temos:  $(a : b)^m = a^m : b^m$ .

- **5ª propriedade:** Uma potência elevada a um expoente pode ser escrita como uma única potência. Exemplo:

$$(7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^6 \quad \text{ou} \quad (7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$$

De maneira geral, para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  e  $n \in \mathbb{Z}^*$ , temos:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ .

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 151

Em seguida o autor oferece tarefas de manipulação resolvidas passo a passo utilizando as propriedades.

Figura 47: Atividades resolvidas

Calcule, em  $\mathbb{R}$ , as potências.

a)  $(2^3)^2$

b)  $2^{3^2}$

c)  $\left(9 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^3}\right)^{-1}$

d)  $\left[\frac{(5^2)^3}{(5^3)^2}\right]^{-1}$

Resolução

a)  $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

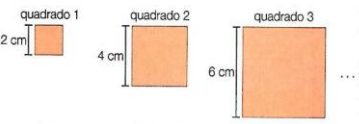
b)  $2^{3^2} = 2^9 = 512$

c)  $\left(9 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^3}\right)^{-1} = \left(\frac{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^{-3}}{3^0}\right)^{-1} = (3^{2+2-3})^{-1} = (3^1)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

d)  $\left[\frac{(5^2)^3}{(5^3)^2}\right]^{-1} = \left(\frac{5^{2 \cdot 3}}{5^{3 \cdot 2}}\right)^{-1} = \left(\frac{5^6}{5^6}\right)^{-1} = (5^0)^{-1} = 1^{-1} = 1$

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 151

Figura 48: Tarefas de manipulação, problemas contextualizados na Matemática.

<p>9. Observe a sequência de quadrados.</p>  <p>a) Qual a medida do lado do quadrado 4? E qual é a área?</p> <p>b) Escreva uma potência que determine a área do quadrado <math>n</math> dessa sequência.</p> <p>c) Qual é a área do quadrado:  <math>= 5?</math>                      <math>= 8?</math>                      <math>= 10?</math></p> <p>d) Um quadrado com <math>81\text{cm}^2</math> de área pertence a</p>	<p>Às margens de um livro em que estudava, Fermat enunciou um teorema – denominado posteriormente de “O Último Teorema de Fermat”– que se tornou um célebre problema na Matemática:</p> <p>A equação <math>x^m + y^m = z^m</math>, na qual <math>m</math> é um número inteiro qualquer maior que 2, não admite solução para <math>x</math>, <math>y</math> e <math>z</math> inteiros e diferentes de zero.</p> <p>De acordo com Fermat, a demonstração desse teorema era fácil, contudo não iria fazê-la por falta de espaço na margem do livro. Ocorre que, desde sua publicação, diversos matemáticos tentaram demonstrá-lo, porém esse feito somente foi realizado há alguns anos, em 1993.</p> <p>Junte-se a um colega e mostrem, por meio de três exemplos, que a igualdade <math>x^m + y^m = z^m</math>, para <math>m=2</math>, é válida para alguns números inteiros <math>x</math>, <math>y</math> e <math>z</math>, diferentes de zero.</p> <p>Possíveis respostas:  <math>3^2 + 4^2 = 5^2</math>, <math>6^2 + 8^2 = 10^2</math> e  <math>12^2 + 5^2 = 13^2</math></p>	<p>Reduza as expressões a uma única potência.</p> <p>a) <math>3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^8</math></p> <p>b) <math>\frac{5^3 \cdot 25^4}{5^2} \cdot 5^9</math></p> <p>c) <math>\frac{4^3 \cdot 2^9 \cdot 2^{9^2}}{8^4 \cdot 2^4} \cdot 2^{-1}</math></p> <p>d) <math>(x^5 \cdot x^2)^3 \cdot x^{2^2}</math></p> <p>e) <math>\frac{y^2}{y^5} \cdot y^{-1}</math></p> <p>f) <math>\frac{z^3 \cdot z^{-4}}{z^{-6} \cdot z^8 \cdot z^2} \cdot z^{-5}</math></p>
--	---	---

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 152

Estas tarefas oferecem ao professor situações para que ele possa rever com seus alunos a definição de potência  $a^x$  podendo o expoente ser:  $x \in \mathbb{N}$  ou  $x \in \mathbb{Z}$  ou  $x \in \mathbb{Q}$ , assim como também  $x \in \mathbb{R}$ , com exemplos e atividades resolvidas, tarefas de manipulação e resolução de problemas. O autor faz uma ressalva para o uso de calculadora no caso de potência com expoente irracional para facilitar os cálculos, apresentando o número de Euler como uma contextualização matemática opcional.

Figura 49: Uso da calculadora para agilizar os cálculos

**Potência com expoente irracional**


Estudaremos potências com expoente irracional por meio de aproximações. Para calcularmos  $2^{\sqrt{6}}$ , por exemplo, inicialmente obtemos valores aproximados do número irracional  $\sqrt{6}$ :

2   2,4   2,44   2,449   2,4494   ...

Em seguida, definimos as potências de base 2 e expoente com essas aproximações:

$2^2$     $2^{2,4}$     $2^{2,44}$     $2^{2,449}$     $2^{2,4494}$    ...

Quando o expoente se aproxima de  $\sqrt{6}$ , a potência se aproxima de  $2^{\sqrt{6}}$ . Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular essas potências.



- $\sqrt{6} = 2 \rightarrow 2^2 = 4$
- $\sqrt{6} = 2,4 \rightarrow 2^{2,4} = 5,278031643$
- $\sqrt{6} = 2,44 \rightarrow 2^{2,44} = 5,42641731$
- $\sqrt{6} = 2,449 \rightarrow 2^{2,449} = 5,460374872$
- $\sqrt{6} = 2,4494 \rightarrow 2^{2,4494} = 5,461889019$
- ...

Assim, obtemos o valor aproximado da potência  $2^{\sqrt{6}}$ , isto é, uma potência  $a^m$ , na qual  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $m \in \mathbb{I}$ . Potências desse tipo sempre correspondem a um número real positivo.

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.153.

Ele também oferece exercícios de manipulação e contextualizados assim como traz o tema da notação científica como aplicação de potência na vida real e em outras Ciências como Biologia, Astronomia, Química e na Geologia. A seguir uma das aplicações propostas pelo autor:

Figura 50: Tarefa para saber utilizar a notação científica em contexto da realidade, da ciência.

Leia as informações e escreva os números apresentados em notação científica.

- a) Galileu foi um dos primeiros a tentar medir a velocidade da luz, que atualmente sabemos ser, no ar, de aproximadamente 299 000 000 m/s.  $2,99 \cdot 10^8$  m/s
- b) A baleia-azul é o maior animal do planeta, chegando a pesar cerca de 120 000 kg.  $1,2 \cdot 10^5$  kg
- c) O espermatozoide, cujo comprimento é de cerca de 0,0065 cm, é uma das menores células do corpo humano.  $6,5 \cdot 10^{-6}$  cm
- d) A estrela mais próxima da Terra, depois do Sol, fica a uma distância de aproximadamente  $399 \cdot 10^{11}$  km.  $3,99 \cdot 10^{13}$  km

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.156

O autor oferece problemas cujo contexto da realidade proporciona tarefas para que os alunos investiguem, elaborem estratégias e etapas de resolução, para chegar à solução.

Figura 51: Problema da realidade - Estatística

Observe as informações e responda.

País	População
Brasil	$1,967 \cdot 10^8$
China	$1,347 \cdot 10^9$
Estados Unidos	$3,131 \cdot 10^8$
Índia	$1,241 \cdot 10^9$
Paquistão	$1,767 \cdot 10^8$

Fonte: ALMANAQUE ABRIL. São Paulo: Abril, 2011.



☛ São Paulo é o estado mais populoso do Brasil.

a) Qual é o país mais populoso do mundo? E qual ocupa a 4ª posição? China; Brasil

b) A população dos Estados Unidos corresponde a que porcentagem da população da Índia? aproximadamente 25%

c) Os países apresentados no texto, juntos, possuem uma população de:  $3,2745 \cdot 10^8$        $3,2745 \cdot 10^8$        $3,2745 \cdot 10^{12}$        $3,2745 \cdot 10^7$        $3,2745 \cdot 10^{17}$

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.156

Na sequência o autor retoma o conceito de função exponencial, porém de forma explícita oferecendo exemplos de função exponencial, explicando as restrições que permitem uma função ser exponencial, porém não oferece exercícios resolvidos, mas propõe tarefas nas quais o aluno manipule, aplique a definição e as propriedades de potência, assim como também resolvam problemas contextualizados na Química, Biologia, na Matemática Financeira, e como os exemplos a seguir, problemas com situações reais e cotidianas.

Figura 52: Problemas já modelados dentro de contextos da realidade

Para analisar o efeito de um remédio no extermínio de determinada bactéria, cientistas fizeram experimentos expondo uma população desse microrganismo ao remédio e verificando o tempo necessário para que fosse exterminada. Ao final, verificou-se que a população da bactéria  $d$  dias após a exposição ao remédio poderia ser estimada por meio da função  $p(d) = 6000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^d$ .

Dois dias após a exposição ao remédio, a população da bactéria reduziu-se a quantos por cento da população inicial?  $6,25\%$

Alguns fornos elétricos contêm um dispositivo que controla a temperatura em seu interior. Assim, o aparelho desliga automaticamente quando chega à temperatura desejada e torna a ligar quando há certa perda na temperatura. Um forno elétrico que possui esse dispositivo tem sua temperatura interna  $T$  calculada em função do tempo  $t$  que o forno está ligado, em minutos, pela função  $T(t) = 300 - 265 \cdot (0,3)^{\frac{t}{10}}$ .

Qual é a temperatura interna desse forno elétrico 5 minutos após ter sido ligado? E após 20 minutos? aproximadamente  $154,85^\circ\text{C}$ ;  $276,15^\circ\text{C}$

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 157

Após fornecer informações sobre os elementos que estão presentes no cigarro e dados da OMS (Organização Mundial da saúde), o autor propõe uma situação-problema a ser modelada para expressar a quantidade de nicotina presente no corpo após horas de consumo, garantindo a presença de tarefas com contexto interdisciplinar, que neste caso pode-se dizer estar entre a Matemática e a Química.

Figura 53: Problema sobre a quantidade de nicotina presente em fumantes

Considerando o consumo de um cigarro:

a) Qual função representa a quantidade  $y$  de nicotina (em mg) presente no corpo de uma pessoa  $t$  horas após o consumo, desconsiderando uma quantidade inicial que porventura se tenha no organismo?

▪  $y = 2^t$                       ▪  $y = 2^{2^t}$                       ▪  $y = 2^{-\frac{t}{2}}$                       ▪  $y = 2^{-t}$                       ▪  $y = 2^{\frac{t}{2}}$

b) Qual é a quantidade de nicotina presente no organismo, proveniente daquele cigarro, após 4h? (0,25)mg

c) O texto cita alguns elementos que compõem o cigarro e cita que há cerca de 50 doenças ocasionadas por ele. Pesquise algumas doenças que são derivadas do tabaco. Resposta pessoal.

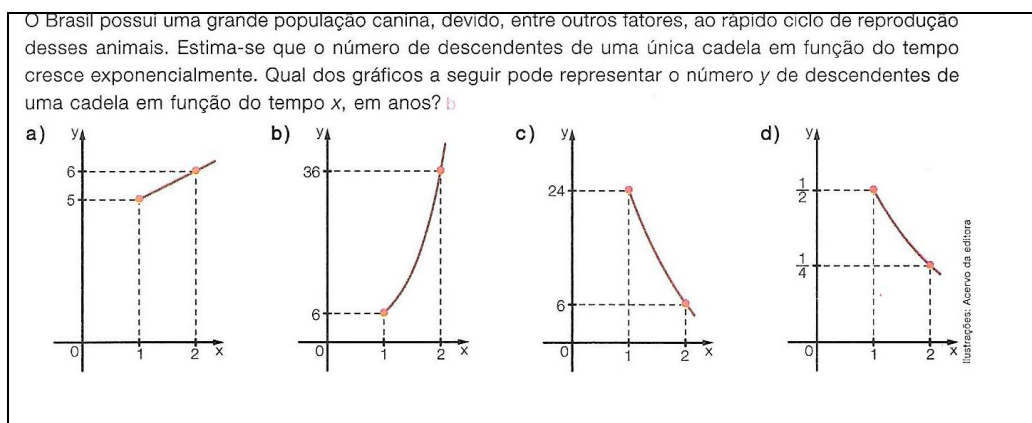
Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 158

Os problemas contextualizados que o autor oferece ao professor na sequência são modelados ou para serem modelados. Os temas do contexto vão de situações de uma empresa, de partidas de futebol até Genética.

Em seguida o autor propõe o estudo da função exponencial por meio da construção dos gráficos. Apresenta tabelas preenchidas com os dados e os cálculos que os geraram e o resultado em pares ordenados, esta representação resulta no registro de gráficos em malha quadriculada, e que irão gerar a construção da curva contínua crescente e decrescente. Após explicações do procedimento para sua construção, o autor faz as considerações que julga importante serem feitas para que o professor possa fazer o mesmo para com seus alunos.

A seguir o autor propõe tarefas para conjecturar sobre as funções que geram gráficos de função exponencial crescente e decrescente.

Figura 54: Tarefas que possibilitam aos alunos conjecturar, argumentar a respeito da solução encontrada.



Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 161



O autor traz à tona a questão polêmica da radioatividade com o emprego do conceito de meia-vida, e uma de suas aplicações como no exame de tireoide com o iodo-131 e a contaminação pela fonte radioativa do césio-137.

Figura 55: Tarefas sobre a meia-vida do iodo-131, contexto da medicina - em exames de tireoide

<p>a) Considerando uma amostra com 3 g de iodo-131, cuja meia-vida é de 8 dias, quantos gramas de iodo-131 ainda haveria nessa amostra após:</p> <p>▪ 8 dias? 1,5 g                      ▪ 16 dias? 0,75 g                      ▪ 24 dias? 0,375 g                      ▪ 32 dias? 0,1875 g</p> <p>b) Qual das funções determina a quantidade <math>f</math> de iodo-131 na amostra após <math>x</math> dias? <math>f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}</math></p> <p>▪ <math>f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^x</math>                      ▪ <math>f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}</math>                      ▪ <math>f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{8x}</math></p> <p>c) Esboce o gráfico da função determinada no item b.</p> <p>d) Junte-se a um colega e pesquisem sobre um elemento radioativo utilizado na medicina ou na indústria, destacando os malefícios e benefícios que podem decorrer dessa utilização. <i>Resposta pessoal.</i></p>
--

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 162

Na sequência proposta pelo autor, temos a equação exponencial. Esta é apresentada por meio de exemplos, em seguida oferece atividades resolvidas como sugestão de estratégias de resolução e depois tarefas a serem resolvidas pelo aluno; outras para conjecturar, assim como problemas contextualizados para investigar estratégias de resolução, precisando ou não ser modelados para se obter a solução. A seguir alguns exemplos destas tarefas.

Figura 56: Tarefas variadas do livro C

<p>(UFAL-AL) A população <math>P(t)</math> de uma metrópole, em milhões de habitantes, é dada por <math>P(t)=5 \cdot 2^{2t}</math>, com <math>t</math> sendo o número de anos, contados a partir de 2000 (ou seja, <math>t=0</math> corresponde ao ano 2000), e <math>c</math> uma constante real. Se a população da metrópole em 2008 é de 10 milhões de habitantes, qual o valor de <math>c</math>? e</p> <p>a) <math>\frac{1}{3}</math>                      c) <math>\frac{1}{6}</math>                      e) <math>\frac{1}{8}</math></p> <p>b) <math>\frac{1}{4}</math>                      d) <math>\frac{1}{7}</math></p>	<p>(UFMG-MG) A população de uma colônia da bactéria <i>E. coli</i> dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de <math>4,096 \cdot 10^6</math> bactérias por mililitro. Assim, o tempo do experimento foi de: d</p> <p>a) 3 horas e 40 minutos</p> <p>b) 3 horas</p> <p>c) 3 horas e 20 minutos</p> <p>d) 4 horas</p>	<p>É correto afirmar que a equação <math>0,5^{x^2-6}=8</math>: d</p> <p>a) não possui solução real.</p> <p>b) possui infinitas soluções reais.</p> <p>c) possui apenas uma solução real.</p> <p>d) possui apenas duas soluções reais.</p>
--	--	---

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 164

Podemos notar esta proposição de tarefa com atividades diversificadas a serem feitas pelos alunos com diferentes perspectivas de desenvolvimento de habilidades e competências: no item **a**, a tarefa é para se conjecturar, no item **b**, para manipular e no item **c** para construir o gráfico de cada uma das duas funções. Para indicar as coordenadas ainda é necessária outra atividade de manipulação ao igualar as funções f e g.

Figura 57: Tarefa de múltiplas resoluções

Considere as funções  $f(x)=2 \cdot (0,5)^x$  e  $g(x)=4^x$ .

a) Classifique essas funções em crescente ou decrescente. crescente:  $g$ ; decrescente:  $f$

b) Para qual valor de  $x$ ,  $f(x)=g(x)$ ?  $x=\frac{1}{3}$

c) Construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , indicando as coordenadas do ponto em que eles se cruzam.

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 164

O autor achou pertinente notificar que nem sempre é possível reduzir os dois membros de uma equação exponencial às potências de mesma base. E que nesses casos é preciso utilizar artifícios. A seguir temos exemplos de situações deste tipo:

Figura 58: Tarefa de equação exponencial - resolvida

<p>Determine a solução das seguintes equações.</p> <p>a) <math>5^{x+1}-7 \cdot 5^x=-2</math>                      b) <math>49^x-6 \cdot 7^x=7</math></p> <p><b>Resolução</b></p> <p>a) Temos que:</p> $5^{x+1}-7 \cdot 5^x=-2 \Rightarrow 5^x \cdot 5-7 \cdot 5^x=-2$ <p>Substituímos <math>y=5^x</math> para resolver a equação.</p> $5y-7y=-2 \Rightarrow -2y=-2 \Rightarrow y=1$ <p>Retornamos o valor de <math>y</math> na igualdade <math>y=5^x</math>.</p> $y=1 \Rightarrow 5^x=1 \Rightarrow 5^x=5^0 \Rightarrow x=0$ <p>Portanto, <math>S=\{0\}</math>.</p>	<p>Temos que:</p> $49^x-6 \cdot 7^x=7 \Rightarrow (7^2)^x-6 \cdot 7^x-7=0 \Rightarrow (7^x)^2-6 \cdot 7^x-7=0$ <p>Note que <math>(7^x)^2=7^{x \cdot 2}=(7^2)^x</math>.</p> <p>Substituímos <math>y=7^x</math> para resolver a equação.</p> $y^2-6y-7=0 \begin{cases} y_1=-1 \\ y_2=7 \end{cases}$ <p>Retornamos os valores de <math>y_1</math> e <math>y_2</math> na igualdade <math>y=7^x</math>.</p> <p><math>\bullet y_1=-1 \Rightarrow 7^x=-1</math> (impossível)                      <math>\bullet y_2=7 \Rightarrow 7^x=7^1 \Rightarrow x_2=1</math></p> <p>Portanto, <math>S=\{1\}</math>.</p>
---	--

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 165

Em seguida o autor fornece ao professor tarefas a serem propostas aos alunos para que desenvolvam competências como conjecturar, manipular, investigar.

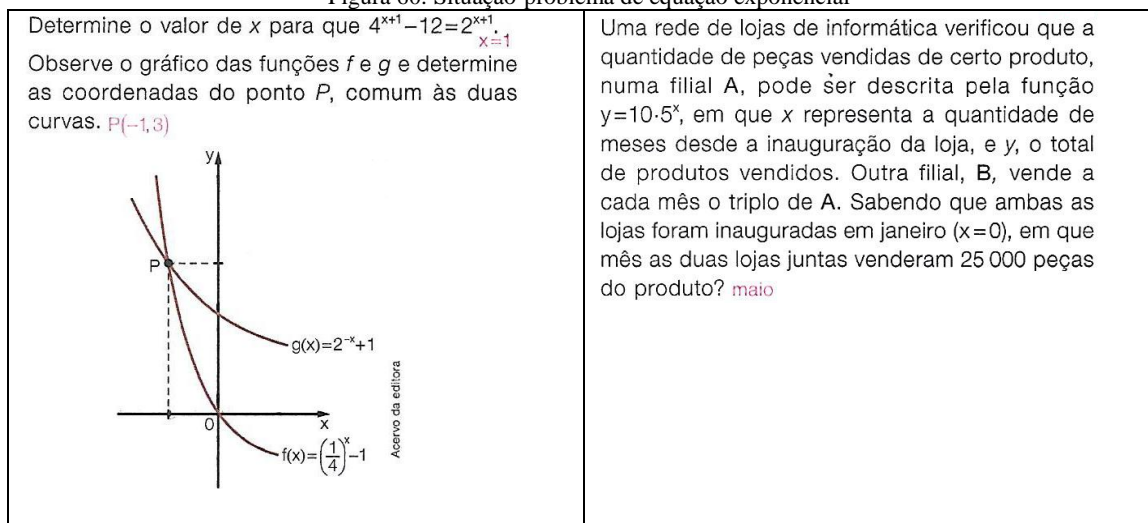
Figura 59: Tarefa de manipulação de equação exponencial

Resolva as equações.	
a) $9^{2x-1}=1$ $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$	d) $2^{x+2}+2^{x-1}=36$ $S=\{3\}$
b) $6 \cdot 7^{x-3}=294$ $S=\{5\}$	e) $\frac{25^x+5}{6}-5^x=0$ $S=\{0,1\}$
c) $3^{1+x}=324-3^x$ $S=\{4\}$	f) $(4^{x+1}-4^x)^2=144$ $S=\{1\}$
Determine o valor de $x$ para que $4^{x+1}-12=2^{x+1}$ . $x=1$	

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 165

E outras tarefas como resolver problemas de contextos da Matemática e da realidade.

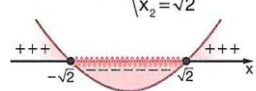
Figura 60: Situação-problema de equação exponencial



Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 165

Em seguida, o autor oferece ao professor explicações para se saber quando uma desigualdade apresenta uma incógnita no expoente esta é denominada inequação exponencial, apresentando exemplos de funções com estas características, para depois na sequência propor atividades resolvidas com crescente grau de complexidade, por exemplo:

Figura 61: Atividades resolvidas de inequação exponencial

<p>Resolva as inequações.</p> <p>a) <math>3^x &lt; 81</math>    b) <math>\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \frac{1}{4}</math>    c) <math>25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2</math></p>	
<p><b>Resolução</b></p> <p>a) Temos que:</p> $3^x < 81 \Rightarrow 3^x < 3^4$ <p>Como <math>a=3 &gt; 1</math>, a desigualdade se mantém.</p> $3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$ <p>Portanto, <math>S = \{x \in \mathbb{R} \mid x &lt; 4\}</math>.</p> <p>b) Temos que:</p> $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ <p>Como <math>a = \frac{1}{2}</math> e <math>0 &lt; a &lt; 1</math>, a desigualdade é invertida.</p> $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow -x+1 \leq 2 \Rightarrow x \geq -1$ <p>Portanto, <math>S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}</math>.</p>	<p>c) Temos que:</p> $25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow (5^2)^{x^2-3} \leq \frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{2x^2-6} \leq 5^{-2}$ <p>Como <math>a=5 &gt; 1</math>, a desigualdade se mantém.</p> $5^{2x^2-6} \leq 5^{-2} \Rightarrow 2x^2 - 6 \leq -2 \Rightarrow 2x^2 - 4 \leq 0$ <p>Fazemos o estudo da função <math>f(x) = 2x^2 - 4</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• a parábola tem concavidade voltada para cima.</li> <li>• <math>f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \end{cases}</math></li> </ul>  <p>Portanto, <math>S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}</math>.</p> <p style="text-align: right; font-size: small;">Acervo da editora</p>

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 166

Apresenta em seguida as atividades resolvidas, 14 tarefas de manipulação e um problema contextualizado de Administração de empresas, sobre curva de aprendizagem como parâmetro de contratação de mão de obra na área de produção.

Na seção *Explorando o Tema* o autor trás o assunto sobre como se determinar a idade de um fóssil utilizando para esse processo o carbono -14 para fazer essa datação.

Neste momento o autor propõe algumas atividades aos professores, oferecerem tarefas para seus alunos desenvolverem a compreensão de texto (a) e (f), a conjecturar/argumentar estratégias e soluções encontradas, investigar (b) para solucionar os problemas (c) e (d) e modelar (e).

Figura 62: Tarefas a respeito da atividade de datação de um fóssil

- a) Qual é a ideia principal do texto?
- b) Utilizando a meia-vida do carbono-14, é possível afirmar que certo organismo viveu há cerca de 100 000 anos? Por quê?
- c) Supondo que  $m$  seja a massa de carbono-14 de um fóssil, qual é a massa de carbono-14 desse fóssil, após 5 730 anos? E após 28 650 anos?
- d) Qual é a datação de um resíduo de organismo que tem 12,5% do carbono-14 original?
- e) Escreva a função do tipo exponencial que expressa a massa  $f$  de carbono-14 de determinado fóssil, em um dado período de tempo  $t$ , em anos, considerando que inicialmente esse organismo possuía massa  $m$  de carbono-14.
- f) Em sua opinião, qual é a importância de se determinar a datação de um fóssil?

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 169

O autor em seguida propõe que o professor oportunize um momento para que seus alunos reflitam sobre o tema função exponencial elencando cinco questões a serem analisadas.

Figura 63: Questões para reflexão após estudo de função exponencial

#### REFLETINDO SOBRE O CAPÍTULO

- I Qual dos conteúdos estudados neste capítulo você considera mais interessante? Por quê?
- II Escreva o que você entende por função exponencial.
- III Cite algumas situações em que os conteúdos abordados neste capítulo estão presentes. Se necessário, realize uma pesquisa e troque ideias com os colegas.
- IV Dos conteúdos abordados neste capítulo, qual você acha que deve ser retomado para uma melhor compreensão?
- V Escreva uma lista de palavras-chave que sintetizem os conteúdos estudados neste capítulo. Em seguida, a partir dessa lista, construa um esquema organizando esses conteúdos.

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 170

Nas atividades complementares o autor propõe para concluir o capítulo sobre função exponencial, mais tarefa que permita ao aluno conjecturar, investigar, ou mesmo exercícios de manipulação para se trabalhar a linguagem algébrica, assim como também resolver problemas já modelados da Matemática pura e da realidade, como o contexto da Música, Matemática Financeira, Biologia.



contexto da História da Matemática, contando um pouco sobre Pierre Fermat (1601-1665) e o desafio “O Último Teorema de Fermat”.

A revisão perpassa trabalhando os expoentes nos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, propondo o uso da calculadora nos casos de expoentes irracionais e trazendo a contextualização através da notação científica para o trabalho com números muito grandes ou muito pequenos.

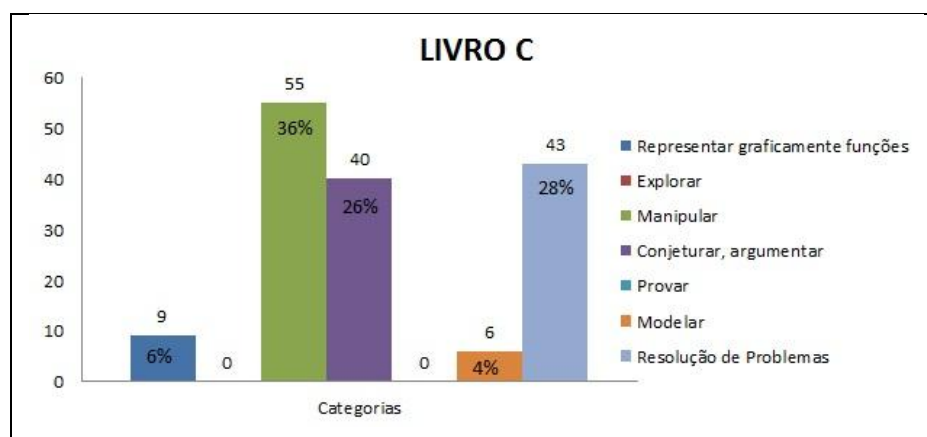
Os exercícios propostos com a finalidade de estudo do conceito de função exponencial e suas propriedades, apesar de serem em grande quantidade, é feita pelo autor de maneira diversificada, permitindo que além de exercícios de manipulação que são os usuais, se ofereça oportunidades para o aluno ter de argumentar/conjecturar o porquê de tal resultado, assim como também oferece situações-problema para serem desenvolvidas estratégias de resolução pelo próprio aluno.

Ao retomar o tema emergente, função exponencial, o faz explicitamente, institucionalizando o conceito, oferecendo exemplos deste tipo de função e oferece tarefas para serem resolvidas com exercícios de manipulação, e situações-problema contextualizados na vida real, na Matemática e em outras ciências como Biologia, Matemática Financeira, Química, Administração de empresas e Estatística.

O autor opta por apresentar as propriedades da função exponencial usando gráficos, fazendo suas considerações e em seguida propondo tarefas para o professor conduzir de maneira que os alunos possam argumentar e conjecturar para chegarem nos resultados por eles encontrados.

Fizemos a contabilização dos tipos de tarefas oferecidas pelo autor aos professores para que estes, à medida que acharem pertinente, as proponham aos seus alunos:

Gráfico 03: Tipos de tarefas emergentes propostas pelo autor do Livro C



Fonte: A pesquisadora

Como podemos notar neste gráfico, o autor também propõe exercícios de manipulação em quantidade maior que as de outros tipos de atividade, porém sua porcentagem não é muito discrepante em relação às tarefas de conjecturar e resolver problemas.

O autor não oferece tarefas para se provar e nem para explorar; assim como pouco propõe sobre a construção de gráficos, não citando o uso do computador para a construção de gráficos com ajuda de *softwares* como o GeoGebra.

A quantidade de situações-problema para serem modeladas também é pouca em relação às outras atividades.

Porém a oferta generosa de problemas contextualizados na Matemática oferece oportunidade de o professor conduzir os trabalhos de maneira a permitir que os alunos investiguem, conjecturem utilizando a linguagem natural, algébrica, gráfica, tabular, proponham estratégias de resolução e verifiquem seus resultados para validarem estas estratégias.

Nas orientações para o professor no final do livro do professor, o autor faz esclarecimentos às seções que subdividem os capítulos da coleção, oferecendo sugestões metodológicas para se trabalhar o conceito emergente, justificando a maneira como decidiu abordar o tema. Ele sugere que o professor trabalhe as *Atividades Complementares* em grupos ou como trabalho extraclasse assim como os desafios, que vão além da aplicação imediata do conteúdo emergente estudado, proposições pertinentes que vão ao encontro aos PCNEM (BRASIL, 2000).

Nesta parte do livro, o autor cita os recursos tecnológicos e sua importância para o aluno criar suas próprias estratégias de resolução das tarefas propostas ao explorar e investigar, podendo verificar seus resultados, conjecturar e argumentar, além de perceber regularidades ou não.

A estratégia do autor nesta seção é a de oportunizar um ensino complementar apresentado pelo livro-texto, oferecendo ao professor, informações sobre *sites* e programas de computador para que este possa trabalhar com seus alunos atividades relacionadas ao conceito trabalhado no livro; já que notamos a ausência deste tipo de tarefas no livro didático analisado.

Ainda nas orientações ao professor, o autor oferece demonstrações e sugestões de condução para a resolução de algumas das atividades, assim como comentários e informações que complementam as atividades do livro do aluno.

Tabela 08: tabela de coleta de dados do Livro C: NOVO OLHAR

Categories	Subcategories	Análise do livro didático		
1.Situações	1.1 Introdução/motivação	Apresenta situações da própria Matemática, de outras ciências e da vida real.		
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas):47 Revisão: 29 Emergentes 18	Apresenta o conteúdo novo por meio de exemplos e exercícios resolvidos		
	1.3 Tarefas (Que os autores propõem ao estudante):239	A) Conhecimentos Prévios: 86	Conceito lógico indutivo, depois formalizou e deu exemplo aplicando. Proposição: apresenta exemplo justificando e depois define a propriedade e oferece exercícios resolvidos passo a passo e depois oferece exercícios a serem feitos.	
		B) Conhecimentos Emergentes: 153	1-Representar graficamente funções	9
			2-Explorar	0
			3-Manipular	55
			4- Conjeturar/argumentar	40
5- Provar			0	
6- Modelar	6			
	7- Resolução de Problemas	43		
2.Linguagem	Formal ou informal?	Linguagem natural, algébrica, numérica, gráfica, tabelar. Utiliza a linguagem natural no contexto de enunciados de propriedades.		
3.Conceitos	Explícito ou implícito?	Introduz de maneira lógica dedutiva, explícita, e depois apresenta a definição.		
4.Proposições (propriedades de potência)	4.1 Como as apresentam/recordam?	Formal. Só aplica a propriedade na resolução de exercícios.		
	4.2 Prova, demonstra ou justifica?	Justifica.		
	4.3 Mostram sua utilização em exercícios ou só as expões?	Aplicação por meio de exemplos após o enunciado.		
5.Procedimentos Métodos de resolução de exercícios	5.1 Utilizam diversas maneiras diferentes de se resolver um exercício?	Diferentes abordagens para resolver a mesma situação: analítica, geométrica. Porém predomina a analítica		
	5.2 Justificam ou não a resolução?	Justifica.		
	5.3 Utilizam as novas tecnologias?	Não propõe o uso de computadores, mas aconselha o uso de calculadora para agilizar os cálculos quando o expoente for um número irracional.		
6.ArgUMENTAÇÕES	6.1 Utilizam uma prática discursiva, verbal ou gráfica para convencer da validade de determinadas propriedades?	Apresenta um discurso em linguagem verbal e gráfica para convencer o leitor de determinadas propriedades, partindo de contextualizações, exemplos concretos para a generalização formal.		
	6.2 Tipo de prova usada.	Justificativa, procurando desenvolver exercícios de maneira lógico-dedutiva.		

Fonte: Adaptada da dissertação de Fonseca, 2013.



Neste capítulo foram feitas análises comparativas entre os descritores dos três livros didáticos aprovados no PNLD de 2015 quanto à proposta de ensino de função exponencial para o primeiro ano do ensino médio.

## 5.2 Análises Comparativa dos Dados

Em nossas análises consideramos o livro A como sendo **Matemática: Contexto e aplicações**, o Livro B: **Matemática - Ciência e aplicações** e o Livro C o exemplar **Novo Olhar: Matemática**.

### Introdução/motivação

Os três livros analisados apresentam situações contextualizadas da própria Matemática, de outras ciências e da vida real como introdução ao conhecimento matemático a ser estudado, instigando a curiosidade dos alunos pelo assunto, o que vai ao encontro das orientações curriculares traduzidas pelos PCNEM (BRASIL, 2000).

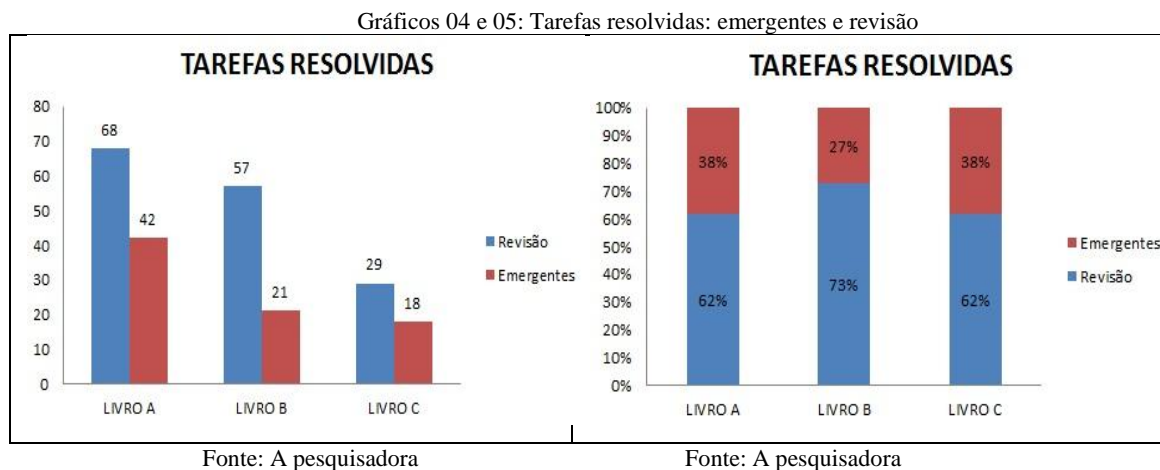
De acordo com as prescrições curriculares, o conceito de função exponencial apresentado por meio dessas contextualizações potencializa a compreensão do aluno no estudo dos casos nos quais se representam situações em que a taxa de variação é considerada grande, por exemplo: em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações, característica que a difere das outras funções já estudadas nos capítulos anteriores do livro.

Os três livros analisados obedecem a um padrão: as noções a serem trabalhadas são apresentadas com exemplos ou atividades resolvidas, tanto na revisão de potenciação quanto no conteúdo chamado pelos autores de emergentes, que em nosso caso diz respeito à função exponencial; depois disso oferecem exercícios para serem resolvidos.

Ao analisarmos este fato, poderíamos dizer que o autor traz a institucionalização do conceito de função exponencial para o professor trabalhar em sala de aula, à medida que este opta por apresentar a definição de função exponencial, oferece exercícios resolvidos assim como também tarefas de manipulação para fixar a aplicação das definições e propriedades; pois os autores, não deixam de, ao longo dos livros analisados, oferecer alternativas para que o professor possa seguir as orientações curriculares, optando por propor tarefas que desafiem os alunos, oportunizando

situações de aprendizagens desafiadoras; ficando a critério do professor como preferir trabalhar.

Porém achamos pertinente comentar a grande quantidade de exercícios resolvidos tanto emergentes, em vermelho, como de revisão, em azul, apontados no gráfico a seguir:



Analisando o gráfico acima podemos notar que:

- ✓ Todos os três livros oferecem uma quantidade maior de exercícios resolvidos na revisão de potência.
- ✓ O livro B tem a maior discrepância quando comparado à quantidade de exercícios propostos para revisão e exercícios do conceito emergente.
- ✓ A relação entre exercícios resolvidos de revisão e emergentes é a mesma nos livros A e C apesar de os números serem muito maiores no livro A.
- ✓ A quantidade de exercícios resolvidos no livro A é maior que nos livros B e C.
- ✓ A quantidade de tarefas resolvidas no Livro C é em menor quantidade que nos livros A e B.

Priorizar exercícios resolvidos em relação a atividades onde o protagonismo investigativo do aluno deveria ser prioridade, uma vez que exercícios resolvidos trazem estratégias pré-definidas de resolução, não está de acordo com os PCNEM (BRASIL, 2000), embora propor modelos, esboço para o aluno experimentar, fazer e validar conjecturas, ainda oportunizam o desenvolvimento de habilidades e competências neste documento elencadas como:

- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes. (BRASIL, 2000, p. 13)

Seguem na Figura 65 alguns exemplos de exercícios resolvidos que estamos nos referindo no livro A:

Figura 65: Exercícios resolvidos na revisão de potência

Exercícios resolvidos	Resolução:
2. Simplifique os radicais a seguir: a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{288}$	a) $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2^1} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2^1} = 2^2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{288} = \sqrt{2^5 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4 \cdot 2^1 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2^1} \cdot \sqrt{3^2} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$


Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.157

Quanto a oferecer exercícios resolvidos do conceito emergente, o Livro C não o faz após institucionalizar o conceito de função exponencial, oferece sim, após sua definição, tarefas para que o professor oportunize o desenvolvimento das habilidades e competências já citadas, assim como nas situações-problema e tantas outras elencadas no documento oficial PCNEM:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos. (BRASIL, 1999, p. 13)

Mesmo o livro C não oferecendo exemplos de estratégias de resolução de exercícios de função exponencial, o autor o faz, assim como os outros autores dos livros A e B, para introduzir as tarefas de equação e inequação exponencial, por trazerem estas dificuldades quanto ao uso de artifícios para sua resolução e nos procedimentos para se chegar à solução do exercício.

Figura 66: Exercícios resolvidos de equação e inequação exponencial

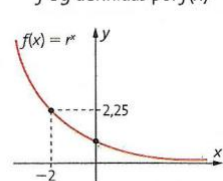
<p>Determine a solução das equações usando artifícios:</p> <p>a) <math>5^{x+1} - 7 \cdot 5^x = -2</math></p> <p>a) Temos que:  <math>5^{x+1} - 7 \cdot 5^x = -2 \Rightarrow 5^x \cdot 5 - 7 \cdot 5^x = -2</math>          Substituímos <math>y=5^x</math> para resolver a equação.  <math>5y - 7y = -2 \Rightarrow -2y = -2 \Rightarrow y=1</math>          Retornamos o valor de <math>y</math> na igualdade <math>y=5^x</math>.  <math>y=1 \Rightarrow 5^x=1 \Rightarrow 5^x=5^0 \Rightarrow x=0</math>          Portanto, <math>S=\{0\}</math>.</p>	<p>b) <math>49^x - 6 \cdot 7^x = 7</math></p> <p>Temos que:  <math>49^x - 6 \cdot 7^x = 7 \Rightarrow (7^2)^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0 \Rightarrow (7^x)^2 - 6 \cdot 7^x - 7 = 0</math>          Note que <math>(7^x)^2 = 7^{2x} = (7^x)^2</math>.</p> <p>Substituímos <math>y=7^x</math> para resolver a equação.  <math>y^2 - 6y - 7 = 0 \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 7 \end{cases}</math></p> <p>Retornamos os valores de <math>y_1</math> e <math>y_2</math> na igualdade <math>y=7^x</math>.  <math>y_1 = -1 \Rightarrow 7^x = -1</math> (impossível)      <math>y_2 = 7 \Rightarrow 7^x = 7 \Rightarrow x_1 = 1</math></p> <p>Portanto, <math>S=\{1\}</math>.</p>	<p>Determine a solução da inequação</p> <p>c) <math>25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2</math></p> <p>Temos que:  <math>25^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow (5^2)^{x^2-3} \leq \frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{2x^2-6} \leq 5^{-2}</math>          Como <math>a=5 &gt; 1</math>, a desigualdade se mantém.  <math>5^{2x^2-6} \leq 5^{-2} \Rightarrow 2x^2 - 6 \leq -2 \Rightarrow 2x^2 - 4 \leq 0</math>          Fazemos o estudo da função <math>f(x) = 2x^2 - 4</math>:          a parábola tem concavidade voltada para cima.  <math>f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \end{cases}</math></p>  <p>Portanto, <math>S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}</math>.</p>
---	---	--

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 165-166

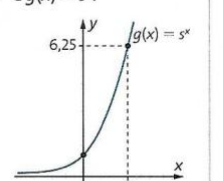
Figura 67: Tarefa resolvida do conhecimento matemático emergente

**Exercício resolvido**

5. A seguir temos os gráficos das funções exponenciais  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = r^x$  e  $g(x) = s^x$ .



$f(x) = r^x$



$g(x) = s^x$

Com base nos gráficos, responda:

- $r > 1$  ou  $0 < r < 1$ ?
- $s > 1$  ou  $0 < s < 1$ ?
- $f$  é crescente ou decrescente? E  $g$  é crescente ou decrescente?
- $f(7)$  é maior, menor ou igual a  $f(3)$ ?
- $g(5)$  é maior, menor ou igual a  $g(4)$ ?

- Traçando os gráficos de  $f$  e  $g$  no mesmo sistema de eixos, em que ponto os gráficos vão se intersectar?
- Entre as sentenças seguintes, identifique as de  $f$  e  $g$ :
 

I. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	III. $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
II. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	IV. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

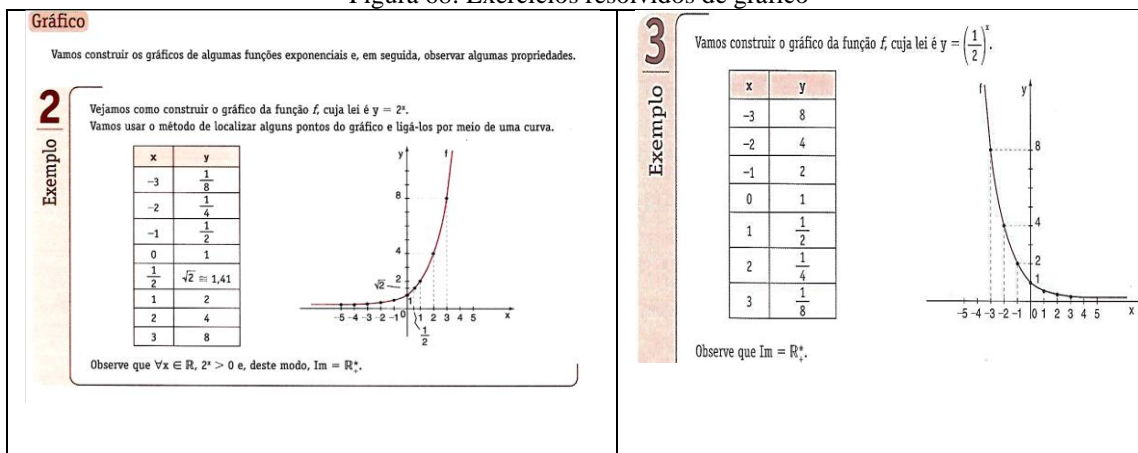
**Resolução:**

- $0 < r < 1$
- $s > 1$
- $f$  é decrescente e  $g$  é crescente.
- $f(7) < f(3)$
- $g(5) > g(4)$
- No ponto  $(0, 1)$ .
- $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ;  $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ .

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p. 161

Os três livros A, B e C, trazem exemplos da construção dos gráficos de função exponencial crescente e decrescente e justificam as propriedades empregando tabelas e gráficos, o que exemplificamos a seguir com um dos livros analisados:

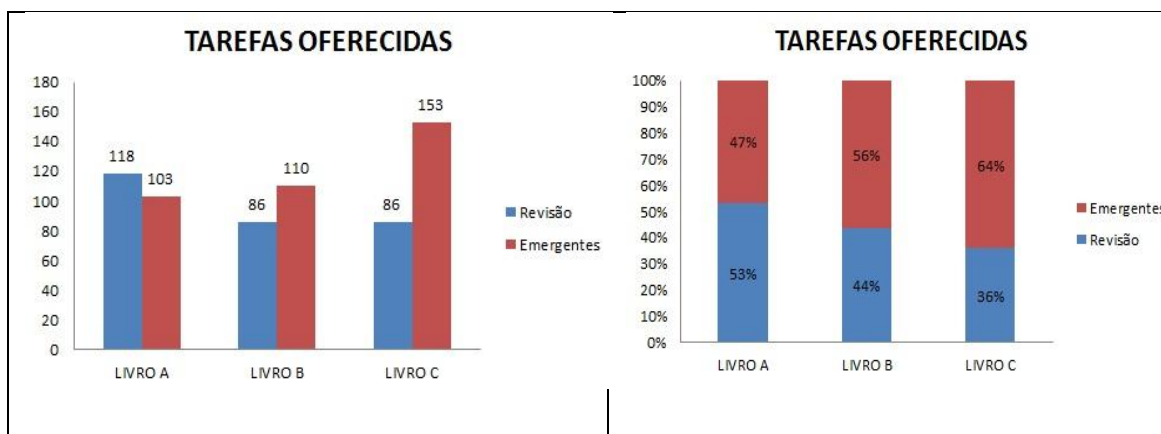
Figura 68: Exercícios resolvidos de gráfico



Fonte: Gelson Iezzi et al, 2013, p. 144

Quanto às tarefas que os autores propõem aos professores para oferecerem aos seus alunos, observamos os resultados organizados na tabela abaixo, alimentada pelos dados coletados e organizado nas tabelas:

Gráfico 06 e 07: Quantidade de tarefas oferecidas dentre os exercícios de revisão e emergentes



Fonte: A pesquisadora

Fonte: A pesquisadora

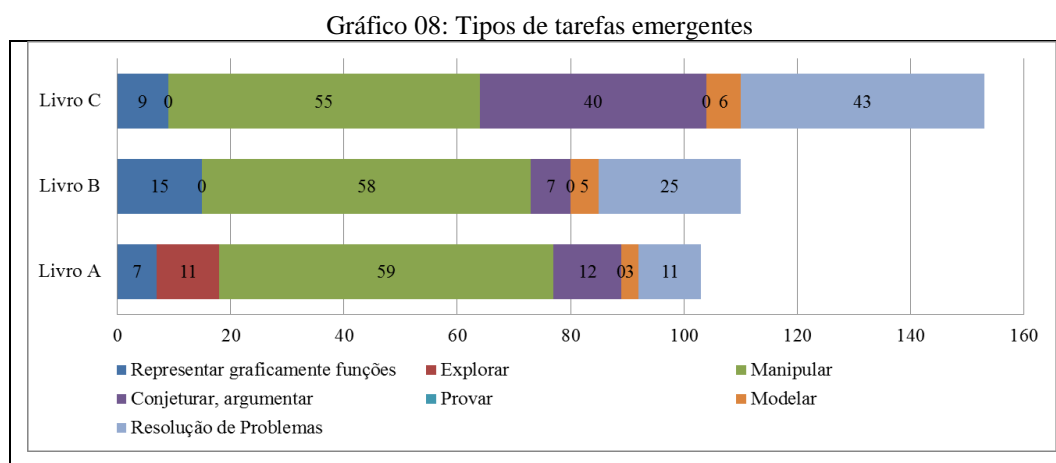
Ao analisarmos o Gráfico 05 podemos dizer:

- ✓ O livro C oferece uma maior quantidade de tarefas do conceito emergente, também conhecidos por exercícios de aprendizagem, do que os livros A e B.
- ✓ A quantidade de exercícios emergentes do livro C é quase o dobro da quantidade de exercícios de revisão de potência.
- ✓ O livro A oferece uma maior quantidade de exercícios de revisão do que tarefas do conceito emergente.
- ✓ A quantidade de tarefas de revisão e do conteúdo emergente é quase igual entre os três livros analisados.

- ✓ O livro C oferece a menor quantidade de exercícios de revisão em relação aos outros dois livros A e B.

Iremos analisar as diferentes tarefas propostas ao professor para que estes possam oferecer aos seus alunos, procurando observar se estas estão coerentes com as propostas curriculares nacionais no que diz respeito ao desenvolvimento de habilidades e competências objetivadas a serem desenvolvidas no Ensino Médio.

No que diz respeito aos exercícios emergentes, fizemos o levantamento a partir de sete categorias de tarefas sugeridas na leitura das propostas curriculares como importantes a serem trabalhadas com os alunos. Constatamos que os três livros didáticos oferecem uma diversidade, como mostram a tabela e o gráfico a seguir.



Fonte: A pesquisadora

Tabela 09: Geratriz do gráfico referente aos tipos de tarefas emergentes

<b>Categorias</b>	<b>Livro A</b>	<b>Livro B</b>	<b>Livro C</b>
Representar graficamente funções	7	15	9
Explorar	11	0	0
Manipular	59	58	55
Conjeturar, argumentar	12	7	40
Provar	0	0	0
Modelar	3	5	6
Resolução de Problemas	11	25	43
<b>Total</b>	<b>103</b>	<b>110</b>	<b>153</b>

Fonte: A pesquisadora

Até este momento das análises comparativas, não tínhamos entrado na questão dos tipos diversificados de tarefas do conceito emergente, que foram oferecidas ao longo dos três livros analisados, o que faremos a seguir.

As tarefas de manipulação são oferecidas nos três livros analisados em maior quantidade. Porém nos livros A e B estas correspondem à metade dos exercícios

propostos e no livro C, correspondem a um terço da quantidade proposta aos professores para oferecer aos seus alunos:

Tabela 10: Percentual comparativo de tarefas de manipulação entre os Livros A, B, e C

Livros	A	B	C
Tarefas de manipulação em %	57%	53%	36%

Fonte: A pesquisadora

Estes exercícios são do tipo:

Figura 69: Exemplos de exercícios de manipulação encontrados nos Livros A, B e C.

<p>9. <small>ATIVIDADE EM DUPLA</small> Reduzam a uma única potência:</p> <p>a) <math>2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^2</math></p> <p>b) <math>\frac{3^{10}}{3^4}</math></p> <p>c) <math>\frac{a^6}{a}</math>, com <math>a \neq 0</math></p> <p>d) <math>(2^6)^x</math></p> <p>e) <math>7^{3^2}</math></p> <p>f) <math>\frac{2^7 \cdot 2^3}{2^{-2}}</math></p>	<p>6. Sendo <math>a \cdot b \neq 0</math>, simplifique as expressões:</p> <p>a) <math>\frac{a^5 \cdot (b^2)^3}{a \cdot b^4}</math></p> <p>b) <math>\frac{(a^2)^5 \cdot (b^3)^3}{a^4 \cdot b^{-3}}</math></p> <p>c) <math>\left(\frac{a}{b}\right)^8 \cdot \frac{b^{10}}{a \cdot a^2 \cdot a^3}</math></p> <p>d) <math>(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab</math></p> <p>e) <math>(a^{-1})^2 + (b^2)^{-1} + 2(ab)^{-1}</math></p>	<p>3. Reduza as expressões a uma única potência.</p> <p>a) <math>3^6 \cdot 3^7</math></p> <p>b) <math>\frac{5^3 \cdot 25^4}{5^2}</math></p> <p>c) <math>\frac{4^3 \cdot 2^0 \cdot 2^{2^2}}{8^4 \cdot 2^4}</math></p> <p>d) <math>(x^5 \cdot x^2)^3</math></p> <p>e) <math>\frac{y^2}{y^5}</math></p> <p>f) <math>\frac{z^3 \cdot z^{-4}}{z^6 \cdot z^8 \cdot z^2}</math></p>
--	---	--

Fonte: Luís R. Dante, 2013, p.153

Fonte: Gelson Iezz, et al., 2013, p.138

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.152

Nenhum dos três livros traz tarefas para se provar, o que contraria as prescrições curriculares.

O que se pede em algumas das tarefas é argumentar, conjecturar, isto é, a tarefa consiste em justificar por meio de argumentos, utilizando a linguagem natural, a lógica dedutiva ou indutiva utilizada para resolvê-las. Resolver um exercício passo a passo utilizando as definições e as propriedades utilizando o método sintético, isto é, estabelecer uma sequência de proposições, obtendo em fim um resultado que sintetiza o exercício; podendo ser este resultado testado para conferir sua veracidade, conforme está citado nos PCN+:

- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta. (BRASIL, 2002, p.12)

Nenhum dos livros propõe que o aluno prove, demonstrando formalmente, porém no livro A o autor faz uma demonstração, como trouxemos logo a seguir:

Figura 70: Caracterização da função exponencial feita pelo autor

**Caracterização da função de tipo exponencial**

É possível provar que se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  é uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  em uma progressão geométrica  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , com  $y_n = f(x_n)$ , e se pusermos  $b = f(0)$  e  $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ , então teremos  $f(x) = b \cdot a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

↳ Por exemplo, vamos considerar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  uma função crescente ou decrescente que transforma a PA 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... na PG 10, 80, 640, 5120, 40960, ..., sendo  $f(0) = 5$  e  $f(1) = 10$ .

Fazendo  $b = f(0) = 5$ , temos  $a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{10}{5} = 2$ , ou seja,  $a = 2$ . Nesse caso, a função exponencial  $f(x) = b \cdot a^x$  é dada por  $f(x) = 5 \cdot 2^x$ . Observe que a razão da PA é  $r = 3$  e, portanto, a razão da PG é  $a^r = 2^3 = 8$ .

Fonte: Luís R. Dante, 2013, p.165

Provar para o matemático é demonstrar. E para tanto lançar mão de todo o rigor lógico-dedutivo e a linguagem algébrica necessária para fundamentar as proposições utilizadas. Podendo ser a demonstração desenvolvida pelo método sintético como o analítico. Embora seja uma das expectativas dos PCNEM (BRASIL, 2000) de que o aluno domine a linguagem formal da Matemática, pois virá a precisar desta habilidade caso queira continuar seus estudos ao concluir o ensino básico, os livros aqui analisados sob a perspectiva de função exponencial não pedem nenhum tipo de tarefa para se provar, pois sua importância vem descrita nas competências e habilidades para o ensino médio a serem atingidas no ensino médio.

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
  - Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
  - Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
  - Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- (BRASIL, 2000, p. 42)

A respeito de tarefas que pedem a construção de gráficos da função exponencial, em azul escuro no Gráfico 06: o livro B propõe sua construção manualmente e em maior quantidade, porém das quinze tarefas deste tipo, três são apenas para esboçar o gráfico, ficando a decisão de como o fazer em aberto para que o professor decida o que é adequado para seus alunos segundo os PCN+.

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa. (BRASIL, 2002, p. 12-13)

O Livro A apesar de o autor oferecer a menor quantidade de tarefas para se construir gráficos, este pede para que sejam feitos quatro gráficos manualmente e três gráficos com o auxílio do computador com o *software* GeoGebra.



O livro C assim como o livro B não propõe a construção de gráficos com o uso das novas tecnologias, o que reduziu o número de atividades de exploração.

Figura 71: Tarefa de construção de gráficos

<p>Um estudo realizado por um restaurante mostrou que o número de refeições servidas por mês, em certo ano, pode ser descrito aproximadamente pela função <math>f(x) = 4\,000 \cdot (1,1)^{x-1}</math>, em que <math>x</math> representa o mês do ano (para janeiro, por exemplo, <math>x=1</math>).</p> <p>a) Quantas refeições, aproximadamente, foram servidas por esse restaurante em março? E em julho?</p> <p>b) Construa o gráfico de <math>f</math>.</p>	<p>36. Construa o gráfico da função <math>f</math> de <math>\mathbb{R}</math> em <math>\mathbb{R}</math> definida por <math>f(x) = 2^{x-1}</math> e determine <math>\text{Im}(f)</math>, <math>\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+</math>.</p>
--	--

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.161

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.161

O diferencial está no Livro A, que propõe tarefas de exploração quando lança mão do recurso digital, sugerindo que o professor faça o *download* da internet gratuitamente, o *software* livre GeoGebra, para construir gráficos, oportunizando atividades que abram espaço para reflexão, para a crítica, para o uso da linguagem matemática quando o aluno é provocado a investigar, explorar e ter de justificar suas estratégias de resolução utilizando raciocínio lógico-dedutivo; atividades estas recomendadas pela proposta curricular pelo grande potencial de desenvolvimento de habilidades e competências previstas para o ensino médio. Dentre as atividades que pudemos verificar no livro A existe um tutorial apresentado pelo autor para orientar os trabalhos dos alunos passo a passo, o que vai de acordo com os PCNEM:

#### Investigação e compreensão



- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- **Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.**
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.). (BRASIL, 2002, p. 12)

Figura 72: Representar graficamente funções, seguindo os passos dados tutorado pelo autor

1. Repita os passos anteriores e construa os gráficos das funções:  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = 10^x$  e  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .  
Veja os gráficos no Manual do Professor.

**Influência dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  em funções do tipo  $f(x) = a \cdot b^x + c$**


Agora, siga os passos dados e observe a influência dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  em funções do tipo  $f(x) = a \cdot b^x + c$ .

**1º passo:** Na barra de ferramentas; clique com o botão esquerdo do *mouse* inicialmente na opção controle deslizante ; em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (zona gráfica) e tecle "Enter". Nesse instante aparecerá o parâmetro  $a$  (com valor inicial igual a 1) . Repita a operação e insira novos parâmetros ( $b$  e  $c$ ).

**2º passo:** No campo "Entrada" insira a função  $f(x) = a \cdot b^x + c$  e tecle "Enter". Lembre-se de que "\*" significa a operação de multiplicação.

**3º passo:** Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do *mouse* sobre o gráfico e faça o procedimento descrito anteriormente para mudar a cor e a espessura da curva.

**4º passo:** Na barra de ferramentas (parte superior da tela) clique na aba "Exibir" e depois em "Malha". Agora, vamos observar significados importantes para os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

**5º passo:** Clique na bolinha do controle deslizante de  $b$   e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Arraste a bolinha até obter  $b = 2$ . Repita a operação para o controle deslizante  $c$ , fazendo  $c = 0$ . Dessa forma você terá o gráfico obtido anteriormente, ou seja, da função  $f(x) = 2^x$ .

**Fique atento!**  
 Lembre-se de que na relação  $f(x) = a \cdot b^x + c$ , se  $a = 0$ ,  $b = 1$  ou  $b \leq 0$  não teremos uma função do tipo exponencial.

**6º passo:** Repita a operação para os controles deslizantes de  $a$  e  $b$  (utilize um controle deslizante por vez). Observe o que acontece com o gráfico da função.

Resolva os exercícios a seguir com base na função  $f(x) = a \cdot b^x + c$ . (Utilize o gráfico obtido acima).

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.163

## Quanto a oferecer exercícios aos alunos para explorar

O uso das tecnologias como computadores, calculadoras comuns ou mesmo científicas ajudam os professores a propor atividades que despertam interesse, desenvolvendo o raciocínio dedutivo, a elaboração de conjecturas, promovendo a oportunidade dos alunos explorarem caminhos diferentes para a resolução de desafios com maior confiança, já que estes instrumentos permitem o levantamento de hipóteses sobre alguns resultados, podendo ser úteis em validações preliminares, pois os alunos podem conferir seus cálculos com o auxílio da calculadora ou observando quando na construção dos gráficos utilizando programas como o GeoGebra, se estes estão coerentes com as propriedades que os gráficos de uma função exponencial devem respeitar.

Em resumo, o conceito de função exponencial nos livros por nós analisados oferecem quanto ao uso das novas tecnologias:

**Livro C:** Não sugere o uso do computador apenas o da calculadora científica para facilitar os cálculos com os números irracionais. Exemplo Figura 49 desta pesquisa, apesar de enfatizar sua importância no final do manual do professor, até mesmo sugerindo *sites* para baixar os programas gratuitos para uso em sala de informática.

**Livro B:** Não sugere o uso do computador, mas assim como o Livro C sugere o uso da calculadora científica para facilitar os cálculos com os números Irracionais e para trabalhar com o **e** (Euler). Também possui orientações quanto ao uso de *softwares* gratuitos no final do livro destinado ao manual do professor.

Porém O **livro A** sugere ir ao laboratório de informática e dá como exemplo o uso do *software* GeoGebra, oferecendo mais três exercícios seguindo os passos sugeridos no exemplo dado. Porém não sugere a calculadora científica para facilitar os cálculos com os números Irracionais. Na final do livro, na parte destinada ao professor, o uso da calculadora dos celulares é bastante incentivado nos casos de os cálculos forem apenas auxiliares justificando seu uso para liberar mais tempo para o aluno pensar, criar, investigar, conjecturar, relacionar ideias, descobrir regularidades, permitindo que o aluno dedique mais tempo para propor novas estratégias para a resolução de problemas, soluções de um desafio, ao invés de restringir seu tempo apenas com tarefas manipulativas, diversificando a oferta de tarefas que propiciem o desenvolvimento de habilidades e competências variadas prescritas nos documentos oficiais, PCNEM e PCN+.

- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p. 42)
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (BRASIL, 2002; p.12–13)

### **Conjeturar e argumentar**

Encontramos nos livros tarefas em que o professor tem a chance de oferecer oportunidades aos alunos de conjecturarem estratégias de resolução de exercícios para o qual eles devem apresentar um discurso lógico-dedutivo que justifique os procedimentos por eles escolhidos ao resolvê-las. Isto é, o aluno pode argumentar usando conceitos já conhecidos, por exemplo, as propriedades de potências para justificar os procedimentos adotados na resolução, e para que o resultado tenha um discurso lógico que o justifique. O que também está de acordo com os PCN+:

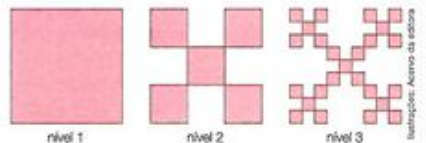
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
- Formular hipóteses e prever resultados. (BRASIL, 2002, p.12)

Trouxemos exemplos destas tarefas que analisamos de cada um dos livros escolhidos.

A tarefa que trouxemos na Figura 73, trabalha com a percepção da sequência geométrica. O aluno precisa perceber o padrão desta sequência e definir a razão da progressão geométrica de maneira intuitivamente, porque o autor não fez menção da relação entre esta e a função exponencial, uma das prescrições curriculares que não foi atendida pelo livro C.

- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações. (BRASIL, 2000, P.42)

Figura 73: Exercício para conjecturar/argumentar

<p>44. A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.</p>  <p>nível 1      nível 2      nível 3</p> <p>a) Utilizando malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.</p> <p>b) Qual função expressa o número <math>y</math> de quadradinhos existentes na figura de nível <math>x</math> dessa sequência?</p> <p>* <math>y = 5^{x+1}</math>      * <math>y = 5^x</math>      * <math>y = 5^{x-1}</math></p> <p>c) Em qual nível da sequência a figura será formada por:</p> <p>* 3 125 quadradinhos?</p> <p>* 78 125 quadradinhos?</p>	<p>Verifique quais das sentenças dadas correspondem à lei de uma função exponencial.</p> <p>a) <math>f(x) = 9^x</math></p> <p>b) <math>f(x) = (0,666\dots)^x</math></p> <p>c) <math>y = x^2</math></p> <p>d) <math>f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x</math></p>
--	---

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 164

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.159

De qualquer forma o aluno vai precisar fazer proposições e conjecturas e lançar mão de argumentos lógicos dedutivos para resolver a situação-problema contextualizada na matemática.

A tarefa seguinte desta mesma Figura 73 pede para o aluno identificar quais das sentenças dadas correspondem à lei de uma função exponencial; a princípio parece uma tarefa de aplicação da definição, mas quando analisamos o procedimento para se resolver esta tarefa percebemos que, o aluno terá de observar cada item da questão e analisar se as condições para se atender o pedido estão contempladas e para tanto este precisa argumentar, justificar sua escolha se embasando nas condições necessárias e suficientes para responder se o exemplo fornecido seja definido como uma função exponencial ou não, e para cada um justificar, o porquê sim ou porquê não.

- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. (BRASIL, 2002, p.12)

A seguir, optamos por trazer o exemplo do livro B, item c, da Figura 72. Uma ONG clama por providências para se salvar a população de peixes de um lago, afetada por contaminação de resíduos industriais. Os dados dos itens a e b da questão uma vez resolvidos dão fundamento para a argumentação necessária para a resolução da situação-problema.


Para respondê-la o aluno terá de fundamentar suas conjecturas argumentando através dos resultados obtidos utilizando o modelo matemático fornecido no enunciado, competência que vai ao encontro ao currículo de matemática:

- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade. (BRASIL, 2000, p.42)

E segundo o PCNEM:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta. (BRASIL, 2002, p.12)

Figura 74: Problema contextualizado já modelado que pede para argumentar/conjecturar

<p>A população de peixes em um lago está diminuindo devido à contaminação da água por resíduos industriais.</p> 	<p>A lei <math>n(t) = 5000 - 10 \cdot 2^{t-1}</math> fornece uma estimativa do número de espécies vivas (<math>n(t)</math>) em função do número de anos (<math>t</math>) transcorridos após a instalação do parque industrial na região.</p> <p>a) Estime a quantidade de peixes que viviam no lago no ano da instalação do parque industrial.</p> <p>b) Algum tempo após as indústrias começarem a operar, constatou-se que havia no lago menos de 4 920 peixes. Para que valores de <math>t</math> vale essa condição?</p> <p>c) Uma ONG divulgou que, se nenhuma providência for tomada, em uma década (a partir do início das operações) não haverá mais peixes no lago. Tal afirmação procede?</p>
---	---

Fonte: Gelson Iezzi, et al., 2013, p. 159

Outra forma de argumentar é usando a linguagem algébrica. Os três livros trazem exercícios resolvidos passo a passo, justificando com o uso das propriedades de potência e definições os procedimentos realizados no intento de resolver o exercício. Trouxemos um exemplo do que encontramos em cada livro que analisamos os quais estão de acordo com as habilidades e competências a serem desenvolvidas e que foram citadas no PCN+.

- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados. (BRASIL, 2002, p.12)

Figura75: Argumentação na linguagem algébrica

<p>7. Calcule <math>x</math> e <math>y</math> no sistema de equações: <math>\begin{cases} 5^{x+y} = 1 \\ 3^x \cdot 9^y = \frac{1}{9} \end{cases}</math></p> <p><b>Resolução:</b>  <math>5^{x+y} = 1 \Rightarrow 5^{x+y} = 5^0 \Rightarrow x + y = 0</math>  <math>3^x \cdot 9^y = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x \cdot 3^{2y} = 3^{-2} \Rightarrow 3^{x+2y} = 3^{-2} \Rightarrow</math>  <math>x + 2y = -2</math>  Os valores de <math>x</math> e <math>y</math> serão obtidos resolvendo-se o sistema do 1º grau:  <math>\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = -2</math>  <math>S = \{(2, -2)\}</math></p>	<p>Resolver, em <math>\mathbb{R}</math>, a seguinte equação exponencial: <math>3^{x+1} - 3^x - 3^{x-1} = 45</math>.</p> <p><b>Solução:</b>  Vamos usar as propriedades das potências. Podemos fazer: <math>3^x \cdot 3^1 - 3^x - \frac{3^x}{3} = 45</math>.  Colocando <math>3^x</math> em evidência, temos:  <math>3^x \cdot \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) = 45</math>  <math>3^x \cdot \frac{5}{3} = 45 \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}</math></p>	<p><b>R3.</b> Resolva as equações.</p> <p>a) <math>3^x = 27</math> <span style="float: right;">c) <math>7^{x^2-9} = 1</math></span>  b) <math>2^{x-15} = 16</math></p> <p><b>Resolução</b>  a) <math>3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3</math>  Portanto, <math>S = \{3\}</math>.  b) <math>2^{x-15} = 16 \Rightarrow 2^{x-15} = 2^4 \Rightarrow x - 15 = 4 \Rightarrow x = 19</math>  Portanto, <math>S = \{19\}</math>.  c) <math>7^{x^2-9} = 1 \Rightarrow 7^{x^2-9} = 7^0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}</math>  Portanto, <math>S = \{-3, 3\}</math>.</p>
--	--	---

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.166

Fonte: Gelson Izzi, et al., 2013, p. 152

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 163

Os livros trazem os exercícios resolvidos justificando os passos de resolução, o que subsidia o trabalho do professor em explicar os procedimentos que o aluno precisa aprender para resolver a tarefa. Isto justifica a importância de se aprender definições e as propriedades de potência. Tal oferta vai ao encontro das prescrições curriculares. Notamos que os livros não trazem demonstrações, sem apresentadas e nem para serem feitas.

- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. (BRASIL, 2002, p. 12-13)

## Modelar


O livro traz tarefas que ajudem aos professores a oferecer problemas contextualizados em situações da vida real, fora da matemática. O aluno terá de “traduzir” a situação-problema para a linguagem Matemática, criando um modelo matemático, para resolver o problema. Este tipo de tarefa pode permitir ao aluno desenvolver um espírito de investigação, utilizando o conhecimento matemático para resolver problemas da vida real, prescrição orientada pelo currículo de matemática para o ensino médio. Embora sejam tarefas altamente recomendadas pelos PCN+, o Livro A oferece apenas três delas, o Livro B oferece cinco, e o Livro C também oferece apenas seis dentre a centena de tarefas propostas.

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
  - Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
  - desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo (BRASIL, 2000, p.42)
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
  - Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
  - Produzir textos matemáticos adequados.
  - Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
  - Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
  - Formular hipóteses e prever resultados.
  - Selecionar estratégias de resolução de problemas.
  - Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
  - Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
  - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
  - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
  - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
  - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2002, p. 12-13)


Trouxemos quatro tarefas, situações-problema, oferecidas pelos autores para serem modeladas pelos alunos, das quatorze disponibilizadas nos livros analisados.

Figura 76 : Situação-problema para se determinar a idade de um fóssil

<p><b>Elemento-chave</b></p> <p>A variação na massa atômica do carbono permite calcular a idade de organismos mortos há dezenas de milênios</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Combinado com o oxigênio do ar, o carbono-14 radioativo forma gás carbônico.</li> <li>2. O carbono-14 – assim como o carbono-12 – é absorvido pelas plantas por meio da fotossíntese.</li> <li>3. Os animais se alimentam das plantas, fazendo o carbono-14 entrar na cadeia alimentar.</li> <li>4. A proporção de carbono-12 e 14 nos seres vivos permanece constante durante toda sua vida.</li> <li>5. Após a morte, porém, essa proporção começa a ser alterada pela radioatividade.</li> <li>6. A cada 5730 anos, metade do carbono-14 presente nos restos mortais vira carbono-12. Esse período de tempo – chamado de meia-vida – serve de referência para determinar a idade do fóssil.</li> <li>7. Depois de descobertos, os fósseis têm de ser levados a um laboratório, onde as massas de carbono-12 e 14 podem ser identificadas com precisão e usadas no cálculo final.</li> <li>8. O aparelho que detecta a massa atômica exata de cada elemento químico encontrado no fóssil é o espectrômetro de massa. Com esses números na mão, fica fácil calcular a idade.</li> </ol> <p><small>COMO é determinada a idade de um fóssil? Mundo Estranho. Disponível em: &lt;http://mundoestranho.abril.com.br/materia/como-eh-determinada-a-idade-de-um-fossil&gt;. Acesso em: 20 set. 2012.</small></p> 	<p>e) Escreva a função do tipo exponencial que expressa a massa <math>f</math> de carbono-14 de determinado fóssil, em um dado período de tempo <math>t</math>, em anos, considerando que inicialmente esse organismo possuía massa <math>m</math> de carbono-14.</p>
---	---

O contexto da situação-problema se refere à datação de um fóssil, e utiliza dados do elemento químico, carbono-14. Como os alunos são do 1º ano do ensino médio, iniciantes na disciplina de Química, é interessante perceberem a importância da Química e da Matemática em outra ciência como a Paleontologia. Além do que terão de ler, interpretar, compreender os elementos conhecidos da situação-problema proposta, elaborar o modelo matemático, e testar este modelo para ver se ele dará conta de obter a resposta para o problema. Modelação é um tipo de tarefa que desenvolve várias habilidades e competências prescritas nas prescrições curriculares.

Figura 77: Problema a ser modelado

<p>Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.</p> <p>a) Faça uma tabela para representar a população de bactérias nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 1 hora, 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas.</p> <p>b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (<math>n</math>) em função de tempo (<math>t</math>).</p>	<p>25. Um conjunto de sofás foi comprado por R\$ 2000,00. Com o tempo, por descuido do comprador, o sofá foi queimado o tecido do sofá, que perdeu a cor original. Um comerciante do ramo informou ao comprador que em uma situação desse tipo, a cada ano o sofá perde 10% do valor que tinha no ano anterior.</p>  <p>a) Faça uma tabela para representar o valor do sofá depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.</p> <p>b) Sabendo que o comprador se informou com o comerciante 7 anos depois da compra, que valor o sofá teria nesta data, segundo o comerciante?</p> <p>c) Qual é a lei da função que relaciona o valor (<math>y</math>), em reais, do conjunto de sofás e o tempo <math>t</math>, expresso em anos após a sua aquisição?</p>
--	--

Fonte: Gelson Iezzi, et al., 2013, p.149

Esta outra situação-problema está dentro do contexto de crescimento populacional e também precisa ser modelada para se determinar a solução do problema proposto pelo autor.

Figura 78: Situação-problema para ser modelada

<p><i>Biologia</i></p> <p>Os biólogos afirmam que, sob condições ideais, o número de bactérias em uma certa cultura cresce de tal forma que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo de tempo considerado. Suponhamos que 2000 bactérias estejam inicialmente presentes em uma certa cultura e que 4000 estejam presentes 30 minutos depois. Quantas bactérias estarão presentes no fim de 2 horas?</p>	<p><i>Química</i></p> <p>Os átomos de um elemento químico radioativo têm uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:</p> <p>a) após 12 horas de sua ingestão?</p> <p>b) após <math>t</math> horas de sua ingestão?</p>
---	---

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.172

Os contextos apresentados tanto no problema de Biologia, cultura de bactérias, quanto no de Química, tempo de duração do efeito de um antibiótico enquanto no organismo do indivíduo adoentado, são problemas da vida real, que instigam curiosidade e podem estimular aos alunos a investigá-los, muito pertinente segundo as prescrições curriculares:



- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

### Resolução de Problemas

Quando classificamos as situações-problema propusemos separar entre problemas cujo contexto é o da realidade e ou de outras ciências já modelados, dos que para serem resolvidos necessitam que fossem modelados.

E não poderíamos nos esquecer de que temos os problemas cujo contexto é o da matemática pura que também precisam ser resolvidos, e estes podem ser: da Geometria, da Álgebra, de Geometria Analítica, de Probabilidade, etc.

Quando a situação-problema exige modelação para ser resolvida, nós analisamos em separado nos livros A, B e C no item 6 desta pesquisa.

Deixamos para ser analisado neste item 7 os problemas que necessitam de resolução sem precisar modelar, pois as habilidades e competências são diferenciadas.

Como podemos constatar no gráfico, a quantidade de tarefas oferecidas de resolução de problemas varia bastante de um livro para o outro.

Tabela 11: Quantidade de problemas por livro

Livros	A	B	C
Nº DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS	11	25	43

Fonte: A pesquisadora

Embora tenhamos encontrado poucos exercícios que oferecem esta oportunidade nos livros didáticos A e um pouco mais no B, no livro C encontramos 43 deles, um número alto em relação aos outros.

Segundo as diretrizes curriculares, a resolução de problemas é a estratégia de ensino da Matemática que mais é recomendada, pois estas apontam um grande potencial para o desenvolvimento de habilidades e competências prescritas nos PCN+.

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
  - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
  - Ler e interpretar textos de Matemática.
  - Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.). (BRASIL, 2002, p. 12-13)

É importante que o professor proponha problemas aos seus alunos para que estes possam se sentir desafiados em suas capacidades matemáticas, e assim experimentar o

gosto pela descoberta. Polya (1995) considera esse procedimento uma condição fundamental para que os alunos possam perceber a verdadeira natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto por esta disciplina. Estas ideias influenciam profundamente os currículos da atualidade, de tal modo que hoje em dia a resolução de problemas em Matemática constitui um traço fundamental das orientações curriculares de todos os níveis de ensino, do 1º ciclo do ensino básico ao ensino superior. (PONTE, 2005, p.3, apud POLYA, G., 1981)

O contexto da Matemática pura ou em situações reais que já podem estar modeladas.

Figura 79: Situação-problema com contexto de outra ciência- já modelado

(Cefet-PB) Um produto estragado causou mal-estar nos frequentadores de um restaurante. Uma investigação revelou a presença de uma bactéria, que se multiplica segundo a lei:  $n(t) = 300 \cdot 2^{kt}$ , onde  $n(t)$  é o número de bactérias encontradas na amostra do produto  $t$  horas após o início do almoço e  $k$  é uma constante real. Sabendo-se que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era de 1200, copie a alternativa correta relativa ao valor da constante  $k$ .

a) 1	c) $\frac{2}{3}$	e) $\frac{5}{3}$
b) $\frac{3}{2}$	d) $\frac{1}{2}$	

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.164

Figura 80: Problema modelado

Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após  $t$  semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar  $p$  unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona  $p$  e  $t$  é:  $p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$  (leia o texto da seção *Aplicações*, página 150).

- Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?
- Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use a aproximação  $e^{0,2} = 1,2$ .
- Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?

Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 149

Figura 81: Problema resolvido segundo método de Polya

**» Resolvido passo a passo**

11. (Uneb-BA) A expressão  $P(t) = K \cdot 2^{0,05t}$  fornece o número  $P$  de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo  $t$ , em anos. Se em 1990 essa cidade tinha 300 000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano 2000?

a) 352 000      c) 423 000      e) 441 000  
b) 401 000      d) 439 000

**1. Lendo e compreendendo**

a) O que é dado no problema?  
É dada uma função exponencial que relaciona o número esperado de habitantes da cidade com o ano:  $P(t) = K \cdot 2^{0,05t}$ . Também é dada a população da cidade em 1990: 300 mil habitantes.

b) O que se pede?  
O número esperado de habitantes na cidade citada no ano 2000.

**2. Planejando a solução**

A função dada relaciona a população esperada da cidade com o ano. Entretanto, a função não é inteiramente conhecida, pois existe uma constante  $K$  que precisaremos determinar para conhecer a função e depois obter a população no ano 2000. Para obter a constante  $K$ , usaremos um dado conhecido: em 1990 a população era de 300 mil habitantes. Então, uma primeira estratégia a ser seguida pode ser: 1ª) obter  $K$  usando os dados conhecidos de 1990; 2ª) substituir o valor de  $K$  na função para conhecê-la; 3ª) usar a função para estimar a população da cidade em 2000.

**3. Executando o que foi planejado**

Se em 1990 a população era de 300 mil habitantes, temos  $P(1990) = 300\,000$ . Então:  
 $300\,000 = K \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \Rightarrow 300\,000 = K \cdot 2^{99,5} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow K = \frac{300\,000}{2^{99,5}}$

Não há necessidade de desenvolver melhor o valor de  $K$ , uma vez que seu valor está sendo determinado apenas para que a função exponencial seja conhecida completamente. Vamos substituí-lo na função:

$$P(t) = \frac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05t}$$

Com a função completamente determinada, podemos agora obter  $P(2000)$ , que é a população esperada no ano 2000.

$$P(2000) = \frac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05 \cdot 2000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2000) = \frac{300\,000}{2^{99,5}} \cdot 2^{100}$$

Neste momento, observe a ocorrência de uma das propriedades da potenciação – divisão de potências de mesma base:

$$\frac{2^{100}}{2^{99,5}} = 2^{100-99,5} = 2^{0,5}$$

Assim, temos  $P(2000) = 300\,000 \cdot 2^{0,5}$ .

**Atenção:** Lembre-se de que potências com expoentes racionais são raízes:  $2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ . Agora, temos  $P(2000) = 300\,000 \cdot \sqrt{2}$ . Estimando  $\sqrt{2}$  como o decimal 1,41, temos:  $P(2000) = 300\,000 \cdot 1,41 = 423\,000$ . Então, em 2000, espera-se que a população seja, aproximadamente, de 423 000 habitantes.

**4. Verificando**

Vamos resolver essa questão de outra maneira:  $P(1990) = K \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \Rightarrow P(1990) = K \cdot 2^{99,5} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow K = \frac{P(1990)}{2^{99,5}}$

$$P(2000) = K \cdot 2^{0,05 \cdot 2000} \Rightarrow P(2000) = K \cdot 2^{100}$$

Substituindo  $K$  na expressão anterior, temos:

$$P(2000) = \frac{P(1990)}{2^{99,5}} \cdot 2^{100} = 300\,000 \cdot \frac{2^{100}}{2^{99,5}} =$$

$$= 300\,000 \cdot 2^{0,5} = 300\,000 \cdot \sqrt{2} = 300\,000 \cdot 1,41 =$$

$$= 423\,000$$

Isso confirma o resultado obtido.

**5. Emitindo a resposta**

A resposta é a alternativa c.

**6. Ampliando o problema**

a) Qual é a população esperada para essa cidade em 2010? E em 2030? 2010: 600 000 habitantes; 2030: 1 200 000 habitantes

b) Interprete o que está ocorrendo com a população dessa cidade de 20 em 20 anos, ou seja, de 1990 a 2010, de 2010 a 2030. Isso parece algo razoável em termos reais?

c) *Discussão em equipe*  
Converse com seus colegas sobre o crescimento populacional e como isso pode afetar a vida dos moradores de uma cidade. O que pode ocorrer se uma cidade tiver um grande aumento populacional em um curto intervalo de tempo? Pensem nos pontos positivos e nos negativos. Que medidas podem ser tomadas pelas autoridades para evitar que a qualidade de vida dos cidadãos seja afetada pelo crescimento populacional?

d) *Pesquise* Resposta pessoal.  
Qual é a maior cidade do planeta em termos de população (apenas área urbana, sem contar a região metropolitana)? Onde fica? Quantos habitantes tem? Pequim ou Beijing, na China, com 19,6 milhões de habitantes, dados de 2013.

b) A população dessa cidade dobra de 20 em 20 anos. Isso não parece ser um valor razoável, pois não é condizente com o que se costuma observar na realidade.

Fonte: Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.173

## Linguagem formal ou informal

A linguagem utilizada pelos autores segundo o guia do PNLD 2015 é acessível e de fácil compreensão em todas as coleções que analisamos, inclusive na parte dos manuais direcionados aos professores.

Fizemos uso do termo linguagem informal e formal em nossa pesquisa, no intuito de classificar a linguagem natural como linguagem informal e desenho ilustrativo, e como linguagem formal, a algébrica, a gráfica e a tabular.

A linguagem natural citada como linguagem corrente nos PCNEM, a algébrica, a gráfica e tabular, são utilizadas em todo o capítulo de funções exponencial, procurando oferecer exercícios variados e que transitem entre as várias formas de representação da linguagem matemática, o que vai de acordo com a proposta curricular de matemática e os PCNEM e PCN+.

- Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 42)
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta. (BRASIL, 2002; p.12).

Como exemplo, trouxemos a introdução do livro C que apresenta o conceito de função exponencial explicando na linguagem natural para o aluno, os procedimentos de uma experiência de Botânica:

Figura 82: Exemplo de problema na linguagem natural e algébrica

## FUNÇÃO EXPONENCIAL

### Estudando função exponencial

Neste capítulo, iremos estudar as funções exponenciais, um tipo de função que descreve várias situações como, por exemplo, o crescimento populacional de bactérias, os rendimentos obtidos em uma aplicação a juros compostos, entre outras.

Veja a seguir uma situação relacionada a uma função exponencial.

Durante determinado período de seu desenvolvimento, a altura de certo tipo de planta dobra a cada mês. Sabendo que a altura da planta no início desse período é 1 cm, calcularemos a altura dessa planta ao final do 4º mês.

A altura da planta, ao final do:

- 1º mês, será 2 cm, pois  $2 \cdot 1 = 2$
- 2º mês, será 4 cm, pois  $2 \cdot 2 = 4$
- 3º mês, será 8 cm, pois  $2 \cdot 4 = 8$
- 4º mês, será 16 cm, pois  $2 \cdot 8 = 16$

Podemos escrever a altura da planta, a partir do final do 2º mês, da seguinte maneira:

- 2º mês:  $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
- 3º mês:  $2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
- 4º mês:  $2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

Portanto, a altura da planta ao final do 4º mês será 16 cm.

E qual a altura dessa planta no final do mês  $x$  do período?

Utilizando raciocínio semelhante, podemos calcular a altura da planta por meio da fórmula  $A = 2^x$ .

Observando essa fórmula, note que  $A$  é dado em função de  $x$ , e que a variável independente está em um expoente. Essa é uma **função exponencial**.

Podemos representar essa situação por meio de um gráfico.

Antes de estudarmos as funções exponenciais, bem como as equações e inequações exponenciais, revisaremos o conceito de potenciação.

Fonte: Joamir Souza, 2013, p. 149

Nos Livros B e C, os autores propõem atividades que além de se utilizar da linguagem algébrica, tabular e gráfica nas situações de contextualização e trazer problemas em que explicam o contexto na linguagem natural, apresentam fotos deste contexto em que pretendem ser mais explícitos quanto aos exercícios.

### Conceitos explícito ou implícito?


O autor propõe a introdução do conceito de função exponencial de maneira implícita à medida que fornece no livro didático a oportunidade de introduzir o conhecimento matemático emergente contextualizado numa situação da realidade, provocando a curiosidade e o interesse pelo assunto novo. Esta é uma das recomendações das prescrições curriculares, isto é, o aluno precisa perceber a ideia de

crescimento abrupto ou mesmo de decrescimento acelerado, sem que lhe seja dada a definição de função exponencial.

Porém o livro A é o único que numa situação inicial, oferece ao professor orientações quanto a introduzir o conceito de função exponencial de maneira intuitiva.

Figura 83: Tarefa em dupla para introduzir o conceito emergente

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Reúna-se com um colega e façam uma tabela com o número de bactérias nas 10 primeiras horas, considerando que há 1000 bactérias no início da pesquisa.



Cultura de bactéria  
alimento coló em  
placa de Petri.

Veja um exemplo de tabela, com as primeiras linhas preenchidas.

Horas após o início	Número de bactérias	Proporção entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial
0	1000	1
1	2000	2

*Estimule os alunos a preencher a tabela corretamente, explicando-lhes, caso necessário, o que deve ser colocado em cada coluna. Se eles quiserem, podem até usar calculadora (a maioria dos celulares tem uma, por exemplo). Depois, confira com eles oralmente e passe a questioná-los sobre as questões propostas. No item a, a ideia é que essa percepção ajude depois a entender intuitivamente que o gráfico da função exponencial não será uma reta. Nos itens b, c e d, a ideia é chegar intuitivamente para a lei da função exponencial que descreve a situação proposta.*

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p. 147

Os outros dois livros optam por propor ao professor um problema cujo contexto não é da Matemática pura, sendo um de crescimento populacional e outro do crescimento de uma planta qualquer, em que, apesar de procurar atrair a curiosidade pelo assunto, o autor opta por desenvolver a tarefa, ficando a critério do professor como propor a investigação e a compreensão, para propiciar oportunidade de os alunos desenvolverem as competências sugeridas pelos PCNEM (BRASIL, 2000), tais como: Identificar o problema, selecionar e interpretar informações relativas ao problema, formular hipóteses e prever resultados, assim como também selecionar estratégias de resolução de problemas, interpretar e criticar resultados numa situação concreta, procurando distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos, podendo fazer e validar conjecturas, experimentando e recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, permitindo que façam relações e percebam propriedades, a fim de que consigam discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Podemos citar o exemplo do Livro A, Figura 07, uma situação-problema no contexto da Arqueologia ou da Geologia utilizando a Matemática para modelar e daí chegar à solução. Bastante pertinente à interdisciplinaridade, pois segundo a proposta curricular de matemática:

- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade. (BRASIL, 2000, p. 42)

Porém uma vez compreendido o conceito de função exponencial, os autores dos três livros analisados formalizam o novo conhecimento institucionalizando, de maneira lógico dedutiva, utilizando a linguagem algébrica. Eles trazem a definição de maneira formal, apresentam as propriedades, e apenas a justificam com exemplos e exercícios resolvidos, como podemos ver pelo exemplo abaixo:

Figura 84: Definição de Função Exponencial, propriedades e exemplos.

Vamos agora estudar a **função exponencial** definida por  $f(x) = a^x$ .

**Definição**

Consideremos um número  $a$  real positivo tal que  $a \neq 1$ . A função exponencial de base  $a$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , representada por  $f(x) = a^x$ , é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam  $x$  e  $y$  reais:

- 1º)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- 2º)  $f(1) = a^1 = a$
- 3º)  $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$   
 $x < y \Rightarrow a^x > a^y$  quando  $0 < a < 1$

**Exemplos:**

a) $f(x) = 3^x$	c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	e) $f(x) = (\sqrt{2})^x$
b) $y = 5^x$	d) $f(x) = (0,4)^x$	f) $f(x) = 10^x$

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.159

### Proposições quanto à revisão de potenciação

As três obras analisadas propõem a revisão da potenciação da mesma forma: cada autor introduz o conceito de potenciação definindo-o, oferece exemplos e apresenta as propriedades, as quais elencamos na página 80 desta pesquisa, justificando os procedimentos ao desenvolver exercícios passo a passo. Assim como revê a potenciação com expoente natural, inteiro, racional, irracional e como que um arredondamento, no campo dos números reais.

Figura 85: Definição de potência e explicação da propriedade fundamental

<p><b>Potência com expoente natural</b></p> <p>Dados um número real positivo <math>a</math> e um número natural <math>n</math>, <math>n \geq 2</math>, chama-se <b>potência de base <math>a</math> e expoente <math>n</math></b> o número <math>a^n</math>, que é igual ao produto de <math>n</math> fatores iguais a <math>a</math>:</p> $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$ <p>Acompanhe alguns exemplos:</p> <p>a) <math>2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32</math></p> <p>b) <math>1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1</math></p>	<p>Dados dois números reais, <math>a</math> e <math>b</math>, e dois números naturais não nulos, <math>m</math> e <math>n</math>, valem as propriedades a seguir:</p> <p>1ª) Propriedade fundamental: <math>a^m \cdot a^n = a^{m+n}</math></p> <p>Essa igualdade é verdadeira, pois em ambos os membros da igualdade temos o produto de <math>m + n</math> fatores iguais a <math>a</math>.</p> <p>Exemplo: <math>2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{3+2}</math></p> <p>Essa propriedade continua válida para um número qualquer de fatores. Para <math>m_1, m_2, \dots, m_p</math> quaisquer pertencentes a <math>\mathbb{N}^*</math>, temos:</p> $\underbrace{a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_p}}_{p \text{ fatores}} = a^{m_1 + m_2 + \dots + m_p}$ <p>Exemplo: <math>2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{2+3+5} = 2^{10}</math></p>
---	--

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.149

No livro C, constatamos que a coleção apresenta o conceito de potência e as propriedades de maneira resumida. Como vemos no exemplo a seguir:

Figura 86 : Resumo da revisão das propriedades de potência

<p><b>Propriedades das potências</b></p> <p>Agora, vamos rever algumas propriedades das potências.</p> <p>• 1ª propriedade: Uma multiplicação de potências de mesma base pode ser escrita como uma única potência. Exemplo:</p> $2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} = 2^5 \text{ ou } 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$ <p>De maneira geral, para <math>a \in \mathbb{R}</math>, <math>m \in \mathbb{Z}^*</math> e <math>n \in \mathbb{Z}^*</math>, temos: <math>a^m \cdot a^n = a^{m+n}</math>.</p> <p>• 2ª propriedade: Uma divisão de potências de mesma base (não nula) pode ser escrita como uma única potência. Exemplo:</p> $6^5 : 6^3 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 6^2 \text{ ou } 6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$ <p>De maneira geral, para <math>a \in \mathbb{R}^*</math>, <math>m \in \mathbb{Z}^*</math> e <math>n \in \mathbb{Z}^*</math>, temos: <math>a^m : a^n = a^{m-n}</math>.</p> <p>• 3ª propriedade: Em uma multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um expoente, podemos elevar cada um dos fatores a esse mesmo expoente. Exemplo:</p> $(4 \cdot 3)^2 = (4 \cdot 3)(4 \cdot 3) = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 4}{4^2} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3^2} = 4^2 \cdot 3^2$ <p>De maneira geral, para <math>a \in \mathbb{R}</math>, <math>b \in \mathbb{R}</math> e <math>m \in \mathbb{Z}^*</math>, temos: <math>(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m</math>.</p> <p>• 4ª propriedade: Em uma divisão elevada a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente. Exemplo:</p> $(15 : 7)^3 = \left(\frac{15}{7}\right)^3 = \frac{15}{7} \cdot \frac{15}{7} \cdot \frac{15}{7} = \frac{15^3}{7^3}$ <p>De maneira geral, para <math>a \in \mathbb{R}</math>, <math>b \in \mathbb{R}^*</math> e <math>m \in \mathbb{Z}^*</math>, temos: <math>(a : b)^m = a^m : b^m</math>.</p> <p>• 5ª propriedade: Uma potência elevada a um expoente pode ser escrita como uma única potência. Exemplo:</p> $(7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^6 \text{ ou } (7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$ <p>De maneira geral, para <math>a \in \mathbb{R}</math>, <math>m \in \mathbb{Z}^*</math> e <math>n \in \mathbb{Z}^*</math>, temos: <math>(a^m)^n = a^{m \cdot n}</math>.</p>
--

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.151

O que nos sugere que o foco maior deste autor é no conhecimento emergente de função exponencial a ser apreendido pelos alunos. Concentra-se em oferecer um maior número de tarefas diversificadas para que o professor possa propor mais desafios aos seus alunos, sugerindo que este pense como um matemático.



### Procedimentos: métodos de resolução de exercícios

Na revisão de potência, os três livros analisados trazem predominantemente a linguagem algébrica na resolução de exercícios e justificam os procedimentos adotados passo a passo.

Figura 87: Resolução passo a passo de exercícios de revisão

Calcule, em $\mathbb{R}$ , as potências.			
a) $(2^3)^2$	b) $2^{3^2}$	c) $(9 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^3})^{-1}$	d) $\left[ \frac{(5^2)^3}{(5^3)^2} \right]^{-1}$
<b>Resolução</b>			
a) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$			
b) $2^{3^2} = 2^9 = 512$			
c) $(9 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^3})^{-1} = \left( \frac{3^2}{9} \cdot 3^2 \cdot 3^{-3} \right)^{-1} = (3^{2+2-3})^{-1} = (3^1)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$			
d) $\left[ \frac{(5^2)^3}{(5^3)^2} \right]^{-1} = \left( \frac{5^{2 \cdot 3}}{5^{3 \cdot 2}} \right)^{-1} = \left( \frac{5^6}{5^6} \right)^{-1} = (5^0)^{-1} = (5^0)^{-1} = 1^{-1} = 1$			

Fonte: Joamir Souza, 2013, p.151

Os autores em seus livros propõem algumas estratégias como exemplos de resolução de exercícios antes de o aluno a explorar ou investigar.

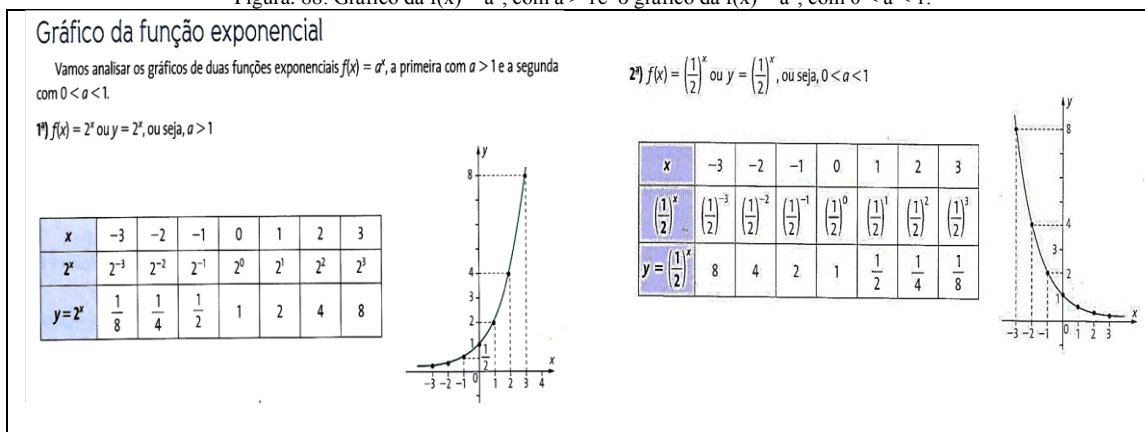
O uso de calculadora científica ou comum, é sugerido no intuito de agilizar os cálculos nos livros B e C. E os autores tutoram sua utilização. E não deixando de citar o cálculo com o número irracional  $e$  (Euler) como exemplo de facilitador de cálculos no livro B.

E quanto ao uso de computador, o livro A opta por tutorar a atividade proposta para utilizar o *software* GeoGebra. Como o já citado na Figura 15 ou 17

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (BRASIL, 2002; p.12–13)

A respeito do conceito de função exponencial, assunto emergente:

Dante usa linguagem natural, algébrica tabular e gráfica.

Figura. 88: Gráfico da  $f(x) = a^x$ , com  $a > 1$  e o gráfico da  $f(x) = a^x$ , com  $0 < a < 1$ .

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.159-160

No livro B o autor apresenta esta resolução de exercícios, trabalhando mais com exemplos de aplicação das propriedades de potência.

Figura 89: Exemplo de exercício resolvido de potenciação

**Exercício resolvido**

2. Calcular o valor de  $y = 27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$ .

**Solução:**

Podemos resolver de duas formas:

- a) Escrevendo as potências na forma de raízes:  $y = \sqrt[3]{27^2} - \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[3]{729} - \sqrt[4]{4096} = 9 - 8 = 1$
- b) Usando as propriedades das potências:  $y = (3^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{\frac{3}{4}} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

Fonte: Gelson Iezzi, et al., 2013, p.141

Figura 90: Exercício resolvido de potência

1. Calcule o valor de  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + [2^{-1} - (-2)^{-1}]^{-1}$ .

**Resolução:**

$$a = \left(\frac{2}{1}\right)^2 + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{-2}\right]^{-1} = \frac{4}{1} + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]^{-1} = 4 + 1^{-1} = 4 + 1 = 5$$

Logo,  $a = 5$ .

Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p. 150

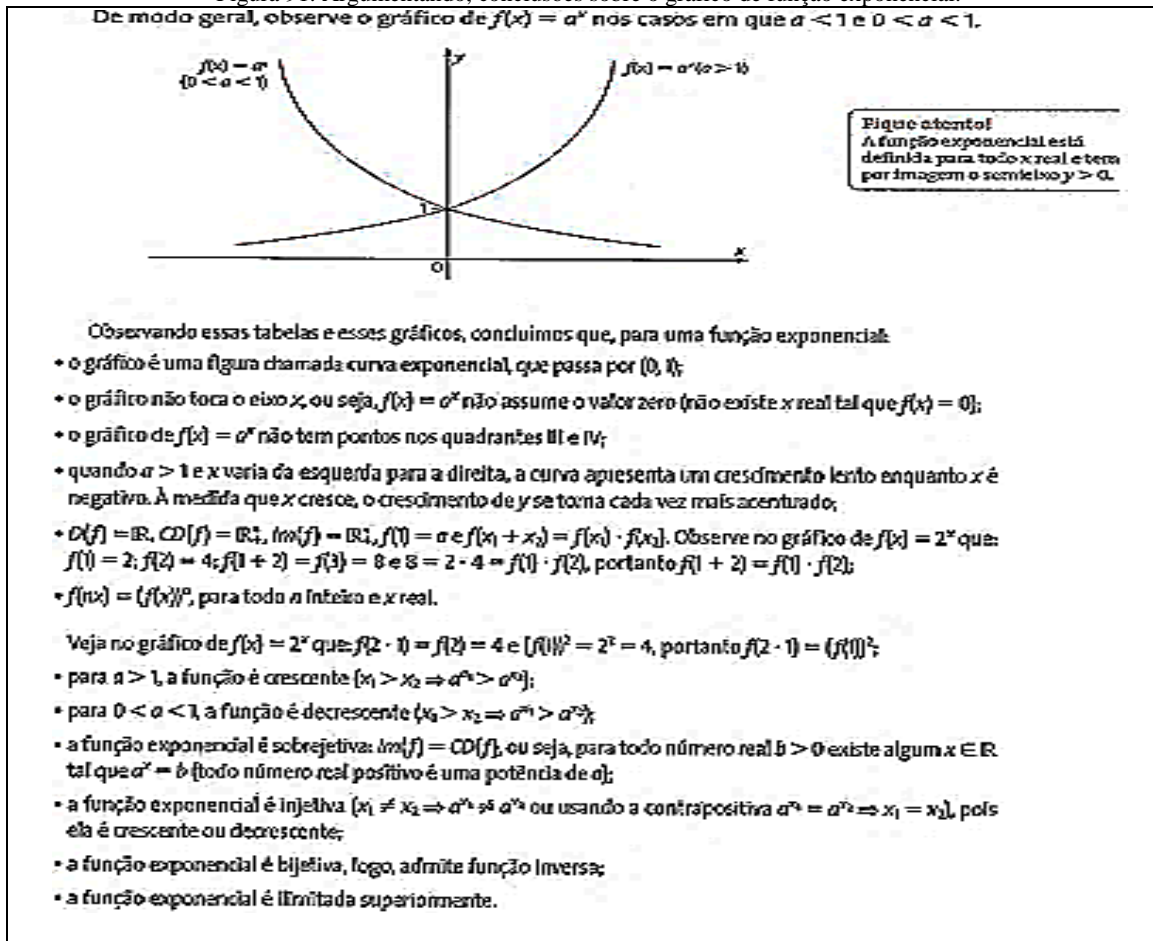
Ao tuturar a atividade, o autor oferece sugestões ao professor para trabalhar na sala de informática, apontando como deve conduzir a atividade. Deixando outras três tarefas a cargo do professor, propor aos alunos experimentar simular situações e de redescobrir seus conhecimentos, surgindo um novo modo de pensar Matemática.

**Argumentações**

Os três autores apresentam um discurso em linguagem verbal e ou gráfica para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de contextualizações, exemplos concretos para a generalização formal.

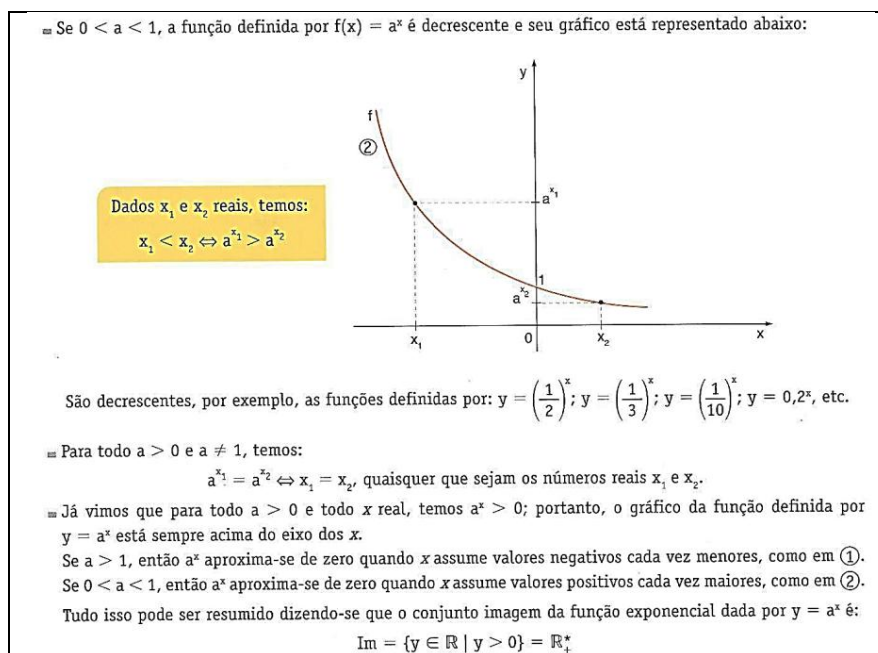
O autor do Livro A apresenta uma linguagem em que os argumentos convencem a validade das propriedades.

Figura 91: Argumentando, conclusões sobre o gráfico de função exponencial.



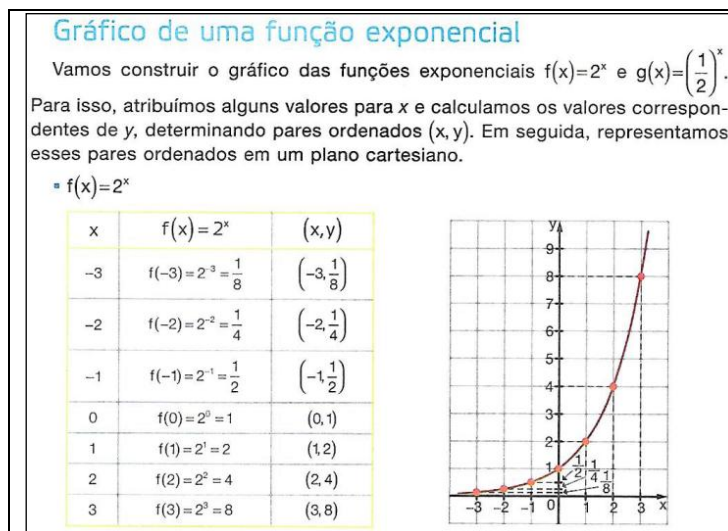
Fonte: Luiz Roberto Dante, 2013, p.160

Figura 92: Argumentando as características da função exponencial decrescente utilizando a linguagem algébrica e gráfica



Fonte: Gelson Iezzi et al., 2013, p. 147.

Figura 93: Argumentando a construção do gráfico da função exponencial



Fonte: Joamir Souza, 2014, p. 160

Livros A e B trazem gráficos como justificativa visual: os resultados encontrados após manipulação e construção de tabela, ao serem transcritos no eixo cartesiano se perfilam em uma curva ascendente ou descendente acentuadamente como esperado a uma curva de crescimento ou decrescimento exponencial, tal coerência justifica os procedimentos da resolução dos exercícios e resultados obtidos. Não entra em questão o fato de a curva ser discreta ou contínua.

Prova usada: Nenhum dos autores utiliza a demonstração, apesar da proposta curricular de matemática ou recomendar nas finalidades da matemática para o ensino médio, estes justificam utilizando as propriedades, passo a passo, de maneira lógico-indutiva ou dedutiva, conforme o exercício.

- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 42)

Assim como também nos PCN+:

- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados. (BRASIL, 2002, p.12–13)

### 5.3 Conclusão das Análises

**Podemos sintetizar o que observamos de comum nos três livros analisados quanto a estar de acordo com as prescrições curriculares no ensino de função exponencial.**

Os autores introduzem o conceito de função exponencial de maneira implícita, por meio de situação-problema dentro de um contexto da vida real ou de outra ciência.

Não apresentam tarefas para que os alunos demonstrem alguma das proposições, porém trazem tarefas que cabem a justificativa, resolução de exercícios, utilizando o método sintético que estabelecendo uma cadeia de proposições articuladas de tal forma que, uma proposição seja consequência da anterior tendo como resultado a última e que esta seja a consequência da primeira.

Os autores utilizam diferentes linguagens, tendo uma preocupação especial com a linguagem natural para que esta seja de fácil compreensão dos professores e dos estudantes; assim como também utilizam a linguagem algébrica, gráfica, numérica e tabular. A linguagem utilizada no contexto dos enunciados e nas apresentações das propriedades é a lógico-formal.

Contextualizações que aparecem nas situações-problema são bastante diversificadas com assuntos da vida real, da matemática, assim como também de outras ciências, demandando maior competência do professor em outras áreas de conhecimento como na Química, Biologia, Geologia, Estatística, Matemática Financeira, e outros.

As situações-problema que demandam para a sua solução que os problemas sejam modelados pertencem a situações reais, permitindo que o aluno conheça a aplicação do que está aprendendo na vida real.

A Notação Científica traz uma aplicação de potência em outras ciências e na vida real.

**Não estão de acordo com as prescrições curriculares no que diz respeito ao ensino de função exponencial**

Privilegiar exercícios de manipulação em relação aos outros oferecidos conforme gráficos apresentados.

Definir o conceito de potenciação na revisão explicitamente e o institucionalizar, dando exemplos e exercícios resolvidos.

Os autores não trazem demonstrações.

Nenhuma tarefa sobre funções exponenciais oferecidas pelos autores dos livros analisados traz para os alunos provar formalmente, isto é, demonstrar.

Os três livros trazem poucas tarefas de problemas que necessitem ser modeladas.

Grande parte dos problemas contextualizados já vem modelados, o que reduz sua resolução à manipulação, dentre competências almejadas pelo PCNEM.

Os gráficos são feitos pelos próprios autores que fazem suas considerações, argumentando as propriedades da função exponencial.

### **Diferenças entre os três livros no que concerne ao ensino de função exponencial**

#### Livro A:

Introduz o conceito de função exponencial implicitamente propondo ao professor uma atividade que lhes permitam investigar, orientando o professor em sua função de mediador dos trabalhos.

Após a revisão de potência e radiciação, o autor traz uma segunda introdução oferecendo ao professor o cálculo passo a passo dos juros compostos de um empréstimo, chegando a sintetizar a fórmula para o cálculo do montante ( $M$ ), adquirido após um determinado capital ( $C$ ) ficar um período de tempo ( $t$ ) submetido a uma taxa de juros ( $i$ ).

$$\text{Modelo Matemático: } M = C(1 + i)^t$$

Tarefas para construir gráficos usando *software* GeoGebra. Não usa calculadora para ajudar com cálculos envolvendo números irracionais.

Faz conexões intradisciplinares com os temas de Progressão Aritmética para com a Função Afim e Progressão Geométrica com Função Exponencial.

Resolução de problema usando o método de Polya.

Propõe a revisão de radiciação.

Resolução das tarefas de construção de gráficos em grande quantidade e o próprio autor faz as considerações.

#### Livro B:

Propõe uso de calculadora científica para se trabalhar com números irracionais.

Na revisão de potência traz tarefa cuja situação-problema da realidade ou da medicina envolve o Conselho Nacional de Saúde, a saber, peso ideal.

Os autores não oferecem tarefas cujo contexto está na utilização da Notação Científica.

Eles também oferecem uma situação-problema do cálculo do peso ideal para aplicação do conceito de potência na vida real com embasamento de outra ciência: Biologia e/ou Educação Física, ou mesmo na Medicina.

Apresentam tarefas para a construção de gráficos: manualmente 12 e esboço 3, nenhum usando as novas tecnologias.

Os autores oferecem problemas contextualizados e já modelados de equação exponencial e inequação exponencial.

### Livro C:

Propõe uso de calculadora científica para se trabalhar com números irracionais.

Propõe a revisão de Potência bem sucinta, não justifica as propriedades.

Não traz exercícios resolvidos de função exponencial.

O autor oferece uma situação-problema contextualizada para uso nas empresas, e já modelado numa função matemática, que consiste numa equação exponencial.

As tarefas as quais os alunos podem desenvolver habilidades e competências para conjecturar, argumentar e resolver problemas que contextualizam situações da vida real e de outras ciências já modelados é em maior quantidade.

O autor propõe uma situação - problema que permite relacionar a etapa da história da Matemática com a evolução Humana: “O último teorema de Fermat”.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo analisar como é proposto o estudo de funções exponenciais em livros didáticos de Matemática aprovados na avaliação do PNLD do ano de 2015.

Investigamos três livros dentre os sete aprovados, os que tiveram a maior distribuição pelo território nacional.

Esta acessibilidade nos intrigou, pois poderíamos conjecturar em várias possibilidades, não entrando na questão financeira e nem mercadológica, mas destes livros terem a potencialidade de atingir os professores em larga escala, podendo pensar, na medida em que nos referimos ao manual do professor no final dos livros analisados, que este material curricular segundo Gérard e Roegiers (1998, *apud* BRASIL, 2015), pode ser considerado como um material educativo, não só para os alunos, mas também para o professor.

É importante enfatizar que a tarefa de organização e desenvolvimento do currículo em sala de aula depende muito da formação do professor e de sua compreensão do que é um currículo. Muito se lê sobre a má formação dos professores e da dissociação entre currículos prescritos, currículos apresentados (materiais curriculares), currículo moldado pelos professores, currículo efetivamente realizado em sala de aula, currículo avaliado, que são os níveis de currículo indicados por Sacristán (2000).

Nossas análises dizem respeito ao primeiro nível de concretização do currículo, currículo apresentado segundo Sacristán, e este acontece por meio dos materiais curriculares, por exemplo, os livros didáticos que chegam às escolas e, por conseguinte, são moldados pelos professores de acordo com as necessidades de aprendizagem de seus alunos e segundo o plano político pedagógico da escola.

Existem pesquisas que estão estudando esta modelação feita pelo professor nos livros didáticos para que melhor se adeque à aprendizagem dos alunos, e nosso estudo irá colaborar com esta linha de pesquisa e seu projeto, à medida que analisamos o livro didático como objeto de pesquisa, mesmo que apenas na perspectiva da função exponencial.



Além do que, nestes manuais destinados ao professor, os autores oferecem textos e orientações metodológicas, bem como tarefas que desenvolvam habilidades e competências, sob a nova perspectiva do currículo prescrito. Tais materiais, segundo Brown (2009) têm o potencial de representar ideias, transmitir práticas e recomendações de como estruturar uma determinada atividade, assim como também a distribuição do tempo para executá-la, reforçar normas culturais, estratégias pedagógicas e influenciar professores.

Segundo Remillard (2009) não há garantias de que os professores vão ler todo o apoio prestado nestes manuais do professor, pois os mesmos podem escolher os aspectos em que têm um maior interesse.

Mesmo assim, nossos referenciais teóricos trouxeram a importante relação do professor com os materiais curriculares, que em nossa pesquisa se traduz no uso do livro didático segundo a perspectiva curricular. Isto é: como os autores dos livros didáticos por nós analisados propõem o estudo de função exponencial na perspectiva do currículo.

Nosso estudo analisou a proposta curricular feita pelo autor para o ensino e aprendizagem de funções exponenciais. Para tanto, fizemos um levantamento de documentos oficiais destinados ao ensino médio como PCNEM (2000), PCN+ (2002), OCNEM (2006), para saber o que estes documentos prescritos propuseram para o ensino de função exponencial e as expectativas de qualidade em sua aprendizagem pelo aluno do ensino médio, ou seja, as habilidades e competências almejadas com sua aprendizagem.

A escolha pelo tema função exponencial foi devido a este ser um conteúdo de fácil interdisciplinaridade, facilitando sua contextualização em situações do dia a dia, de outras ciências ou da própria Matemática.

Uma vez determinado que iríamos investigar habilidades e competências possíveis de serem trabalhadas com os alunos por meio da proposta curricular sugerida pelo autor no capítulo de função exponencial, tentamos elaborar algumas tabelas, as quais organizassem as questões norteadoras desta pesquisa.

Foi sugerido em orientação que adaptássemos a grade utilizada na dissertação de FONSECA (2013) às nossas prescrições curriculares, PCNEM (2000). Em seguida determinamos nossos descritores com base na proposta curricular nacional para o ensino médio e estruturamos nossa tabela para tabulação dos dados.

A grande dificuldade que encontramos foi analisar uma a uma as tarefas oferecidas aos professores para trabalharem com seus alunos no uso do livro didático em sala de aula, ou mesmo para tarefa extraclasse.

À medida que resolvíamos os exercícios, procurávamos observar quais das habilidades ou competências eram exigidas de nós para conseguirmos resolver cada atividade proposta, pois tivemos momentos de dúvidas quanto à predominância de uma ou de outra. Mas determinamos o critério que deveria ser a habilidade ou competência que de início percebemos ser necessário para resolver cada situação - problema.

Uma vez terminadas as tarefas propostas pelos três autores das obras em avaliação, deparamo-nos com outra dificuldade: o descritor de tarefas *resolução de problemas* englobava também os que usariam a estratégia de modelação para serem resolvidos, as quais tinham a intenção de analisarmos em separado, pois este tipo de tarefa pretende desenvolver competências com grau de dificuldade maior do que na *resolução de problemas*, uma vez que envolvem conhecimentos interdisciplinares. Assim surgiu a necessidade de separar a *resolução de problemas* e as tarefas de *modelação*.

Outra dificuldade por nós enfrentada surgiu à medida que contabilizávamos tarefas que para serem resolvidas. Estas necessitavam do uso de propriedades de potência ou da definição de função exponencial. Decidimos englobá-las no descritor que chamamos de *manipulação*.

Os problemas contextualizados na Matemática Financeira ou na Estatística, com raras exceções, não eram apresentados já modelados, mas quando o contexto apresentava uma situação da vida real ou de outra ciência, este já vinha modelado, o que reduziu em muito a oferta de tarefas investigativas, as quais desenvolvessem as habilidades e competências como vem sendo recomendado pelo currículo prescrito, PCN+ (2002, p.13) para os alunos de ensino médio, tais como identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.); procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados numa situação concreta; desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, especialmente em outras áreas do conhecimento; ler e interpretar textos de Matemática, assim como também ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.) (BRASIL, 2002, p. 12-13).

Para realizarmos uma análise comparativa entre dados parciais da tabela de nossos descritores resolvemos, após tabular os dados, construir gráficos ilustrativos desta comparação, quantificando-os, o que exemplificou em muito as análises.

Uma das boas surpresas que encontramos foi a diversidade de tarefas oferecidas pelos autores nos livros didáticos. A oferta de tarefas de diversos tipos propicia estabelecer estratégias de trabalho para que os alunos tenham oportunidades, se oferecido espaço durante as aulas, de explorar, refletir e discutir, oportunizando atividades as quais favoreçam o aprendizado, o que vai ao encontro das nossas concepções a respeito da condução do processo ensino e aprendizagem na sala de aula ser um ponto crucial para a *planificação* do currículo, Ponte (2005). Isto é, o planejamento feito pelo professor para adoção de estratégias de diferenciação pedagógica e adequação do currículo às características dos alunos, pois envolve o conhecimento da prática profissional do professor de matemática.

Segundo Remillard (1992), os professores muitas vezes se afastam da proposta de desenvolvimento curricular do autor do livro didático, adicionando suas próprias estratégias, modificando estruturas existentes, até mesmo omitindo parte que não os interessam ou estão além das suas próprias competências ou das capacidades de seus alunos.

Mesmo ciente da recontextualização, termo utilizado por Brown (2009), realizada pelos professores no uso do livro didático, acreditamos ser pertinente nesta pesquisa fazermos uma investigação a respeito deste material de apoio ao professor, pensando na possibilidade deste o ter como seu material de apoio no cotidiano em sala de aula, ou ainda para trabalhar o conceito de função exponencial que nos propusemos a investigar: O que este professor encontraria nas três coleções por nós analisadas para ajudá-lo.

Nosso trabalho nos permitiu concluir que os três livros didáticos analisados oferecem aos professores situações contextualizadas da vida real, da matemática pura e de outras ciências, permitindo a interdisciplinaridade, assim como introduzem o conceito de função exponencial dentro de um contexto fora da Matemática procurando provocar o interesse dos alunos pelo tema. Propondo, desta forma, a revisão de potência de maneira formal, não demonstrando, porém, justificando com exercícios resolvidos, bem como com uma lista extensa de tarefas de manipulação para serem feitos.

Assim como também podemos dizer que a respeito do conhecimento emergente de função exponencial, os autores utilizam linguagem adequada para a faixa etária, oferecendo várias formas de representação na linguagem natural, algébrica gráfica e tabular, e argumentam utilizando a resolução de exercício passo a passo. Predominam nas três coleções analisadas, quanto ao ensino de função exponencial, exercícios de manipulação, poucas tarefas de resolução de problema que precisem modelar para se

chegar à solução, e nenhuma tarefa de demonstração, pois preferem justificar resolvendo exercícios mostrando todas as passagens algébricas.

Podemos dizer a respeito do que encontramos de peculiar nos livros analisados, no que concerne ao ensino de função exponencial, é que o Livro A é o único dentre os três o qual trabalha a construção de gráficos utilizando o computador, permitindo-se desenvolver habilidades de exploração e investigação e faz a relação *intramatématica* com progressão geométrica e função exponencial; assim como o Livro C é a obra que traz em maior quantidade tarefas para conjecturar/argumentar, sugerindo o autor que se trabalhe em duplas, assim justificando trazer uma quantidade muito menor, em comparação aos outros livros, de exercícios resolvidos, e este oferece uma quantidade elevada de problemas para serem resolvidos, como também reduzida quantidade de exercícios manipulativos, se compararmos com as outras obras.

Uma observação se faz pertinente quanto aos problemas contextualizados em situações da vida real ou mesmo interdisciplinares ou *extramatématicas* quando no ensino de função exponencial: a grande maioria é oferecida a situação já modelada, cabendo apenas a substituição da incógnita na fórmula para resolver o problema, e isso não traz uma situação de desafio de interesse investigativo.

Uma preocupação surgiu ao concluirmos as análises - levando em conta que a avaliação do Programa Nacional do Livro Didático exigiu em seu edital de concorrência, que as editoras colocassem à disposição das análises dos avaliadores do programa, as obras didáticas no ano de 2013, mesmo tendo sido concluído todos os trâmites legais, estes livros chegaram às escolas em meados de 2014 para a escolha dos professores, adotados para o trabalho com os alunos em sala de aula, entretanto, chegaram às mãos de grande parte dos alunos brasileiros apenas em 2015. Dois anos é um procedimento muito longo quando se trata de atualizações, renovações, e mudanças.

Acreditamos que por conta deste fato, apenas o Livro A ofereça atividades para o ensino de função exponencial, as quais utilizam o computador, *software* GeoGebra, mesmo assim apenas três delas. Os outros dois livros analisados, assim como este último, na parte do *manual do professor* trazem um discurso pedagógico muito pertinente a respeito da importância de se usar materiais curriculares tecnológicos, também indicam *sites* de busca e programas a serem usados em tarefas estimulantes de grande aceitação entre os alunos. Assim sendo, acreditamos estar mais do que na hora de colocarmos este discurso em prática.

Dessa forma, a partir da análise realizada nas três coleções em termos de situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e

argumentações e a contabilização de diferentes tipos de tarefas, podemos dizer que os livros didáticos investigados, quando no ensino de função exponencial, trazem diferentes tarefas, oportunizando ao professor oferecer situações de aprendizagem diferenciadas, porém ainda são em número reduzido, com exceção ao livro C nas especificidades citadas, assim como não propõe situações para o ensino de demonstrações no que diz respeito à revisão de potência e à aprendizagem de função exponencial.

Não podemos deixar de acrescentar as limitações desta pesquisa quanto à análise de função exponencial, pois este conteúdo é apenas um dentre tantos outros explorados pelos autores das obras analisadas, e o fato dos autores não incluírem tarefas de demonstração, se limita a este conteúdo em específico, o que não significa que isso ocorra no livro inteiro ou mesmo nos três volumes da coleção de cada autor estudado. Ou seja, é possível que estes tenham incluído demonstrações em outros tópicos do livro.

Contudo, segundo Ponte (2005), a gestão do currículo em sala de aula é a maneira como o professor concretiza a estratégia definida por ele em planejamento, prevendo o que vai fazer como professor, o que espera que o aluno faça e qual a sequência das atividades que deverá propor aos seus alunos. Precisa saber lidar com a relação professor-aluno, assim como também saber utilizar a linguagem adequada para se fazer compreender, sem perder o foco dos objetivos e finalidades propostas pela proposta curricular.

Mostramos com nossas análises que o livro pode trazer uma grande variedade e quantidade de tarefas, entretanto, cabe ao professor explorar as situações que surgirem no decorrer das aulas, tirar partidos das intervenções dos alunos, propor oportunidades de aprendizagem utilizando tarefas apresentadas nos materiais curriculares, podendo ou não estar o livro didático à disposição do professor, de maneira que o estimule e o desafie a tornar suas aulas interessantes, para que seus alunos sejam ativos no processo de construção do seu conhecimento.

Assim sendo, este trabalho investigativo poderá contribuir com outros grupos de pesquisas as quais investigam as relações dos professores com materiais curriculares, assim como trazer à tona as características dos livros didáticos aqui analisados sob a perspectiva do currículo, diferente do que encontramos em nossa revisão de literatura.

Estes livros por nós analisados foram distribuídos para grande parte dos estudantes e professores do Brasil por meio do PNLD 2015, o que o torna o material curricular de maior influência na prática pedagógica do professor, se este fizer parte de

seu material de consulta, sendo muito importante que os mesmos sistematizem e aproveitem o melhor do pensamento curricular.

Durante o desenvolvimento dos trabalhos, outras questões de pesquisa foram surgindo como:

- Como está acontecendo o uso do livro didático digital de Matemática em sala de aula?
- Quais são os aspectos importantes que um professor leva em consideração quando na escolha do livro didático?

## REFERÊNCIAS

- ABRANTES, P.; *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT789* (Dissertação de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 1994.
- ALMOULOUD, S. A.; FUSCO, C. A. *Discutindo algumas dificuldades de professores dos ensinos Fundamental e Médio a respeito do conceito de demonstração*. In: Anais do III SIPEM – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia, SP, 2006.
- ALMOULOUD, S. A. e FUSCO, C. A. (2010); *Provas e demonstrações em Matemática: Uma questão problemática nas práticas docentes no ensino médio*. X Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM, Salvador. 2010.
- ALMOULOUD, S. A. et al.; *Provar e Demonstrar: um espinho nos processos de ensino e aprendizagem da matemática*. *Revista Paranaense de Educação Matemática: RPEM*, Campo Mourão, Pr., v. 1, n. 1, p.22-41, jul. 2012. Semestral.
- ANDRADE, S. N.; *Expectativas Institucionais Relacionadas à Transição Entre o Ensino Médio e Ensino Superior para o Caso da Noção de Função Exponencial*. Tese de Doutorado – Uniban, São Paulo, 2012.
- BALACHEFF, N.; *Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 3, n.3, p. 261 – 304, 1982.
- BALACHEFF, N.; *Processus de preuves et situations de validation*. *Educational Studies in Mathematics* 18 (2), p. 147-176, 1987.
- BALACHEFF, N.; *Aspecto f proof in pupil's practice of school mathematics*. Pimm, D. (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. London: Hodder and Stoughton, p. 216-235, 1988.
- BARBOSA, J. C.; *O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática?* *Zetetiké*, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999.
- BARBOSA, J. C.; *Modelagem Matemática em sala de aula*. *Perspectiva*, Erichim. v.27, nº 98, junho, p. 65-74, 2003.

BARBOSA, J.C.; *A “contextualização” e a modelagem na educação matemática do Ensino Médio*. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8.,2004, Recife. *Anais...* Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BARDIN, L.; *Análise de Conteúdo*/ Laurence Bardin; tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. – São Paulo: Edições 70, 2011.

BASSANEZI, R. C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002, p 389.

BASSANEZI, R.C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo. Contexto, 2009.

BASSANEZI, R. C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BISHOP, A., & GOFFREE, F.; *Classroom organization and dynamics*. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*(pp. 309- 365). Dordrecht: D. Reidel,1986.

BLANCO, N.; *Materiales curriculares: los libros de texto*. In: BLANCO, N.; ANGULO, José (Coord.). *Teoría y desarrollo del currículum*. Málaga: Aljibe, 1994.p. 263-279.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. - *Características da investigação qualitativa*. In: *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Porto Editora, p. 47-51, 1994.

BRASIL, **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Das Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: Diário oficial da União, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEE, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.



BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEF, v.3, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: Parte I: Bases Legais*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: Parte III: Ciências da natureza matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias: PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares Nacionais para Ensino médio: Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias*: Brasília: MEC/SEB, v.2, 2006.

BRASIL, *Guia de livro didático: PNLD 2008: Educação Básica*, 2007. <http://portal.mec.gov.br/seb/index.php>

BRASIL, *Guia de livro didático: PNLD 2015: Educação Básica*, 2014. <http://portal.mec.gov.br/seb/index.php>

BROWN, M. W.; The Teacher-Tool Relationship: Theorizing the Design and Use of Curriculum Materials. In: REMILLARD, J. T., Herbel-Eisenmann, B. A., & Lloyd, G. M. (Eds.). *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series, A. Schoenfeld, Ed.). New York: Routledge, 2009.

CARMO, P. F.; *Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de matemática no ensino médio*. Dissertação ( Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.2014.

CARVALHO, P.C.P., LIMA, E.L., MORGADO, A.C., WAGNER, E.; *A Matemática do Ensino Médio – Volume 1*. Coleção do Professor de Matemática, 3º edição, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

DANTE, L. R.; *Matemática contexto & aplicações*, 2 ed, v.1– São Paulo: Ática, p.144-173, 2013.

**Decreto nº 91.542**, de 19 de Agosto de 1985. Diário Oficial da União - Seção 1 - 20/8/1985, Página 12178 (Publicação Original)

DOUADY, R.; *De La didactique dès mathématiques à h'heure actuelle*. Cahiers de Didactique dès mathématiques, n.6, IREM de Paris 7, 1985.

DOUADY, R.; *Des apports de La didactique dès mathématiques à l'enseignement*. Repères, IREM, [S.I.], n.6, p.132-158, 1992.

FIORENTINI, D., MIORIN, M.A., MIGUEL,.; *A Contribuição para um repensar...a Educação Algébrica Elementar*. Proposições Vol. 4 n° 1[10], março de 1993.

FIORENTINI, D., LORENZATO, S. A.; *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 1ª ed, v.1, Campinas: Autores Associados. 2006, 226 p.

FIORENTINI, D., FERNANDES, F. L. P., CRISTÓVÃO, E. M.; *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico*. In: Seminário Luso-Brasileiro de investigações matemáticas no currículo e na formação de professores (2005). Disponível em: [http://alb.com.br/arquivomorto/edicoes\\_anteriores/anais15/sem04/FernanoLuis.htm](http://alb.com.br/arquivomorto/edicoes_anteriores/anais15/sem04/FernanoLuis.htm). Acesso em 25/03/2013.

FNDE Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>; acesso em 2 mar. 2015, às 21h.

FONSECA, Carla Isabel T.T. Rebimbas da.; *AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICA NOS LIVROS DIDÁTICOS ESCOLARES DO 12 ANO*. Dissertação de mestrado. Universidade de Aveiro. Departamento de Educação. Portugal, 2013.

FUSCO, C. A. da S., SILVA, M. J. F. da ALMOULOU, S. A.; *O comportamento de professores do Ensino Básico frente a uma situação de demonstração em matemática*. IX Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM, Belo Horizonte, 2007.

GÉRARD, F. M., ROEGIERS, X.; *Como conceber e avaliar livros didáticos escolares*. Portugal: Porto Codex: Porto, 1998.

GHEDIN, E., FRANCO, M. A. S.; *Questões de método na construção da pesquisa em educação*. São Paulo: Cortez, 2008.

GRAVEMEIJER, K. P. E.; *O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar?.* Educação matemática: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, p. 83-101. 2005.

HAMAZAKI, A. C.; *Análise da situação de aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do Professor de 2009 do Estado de São Paulo*. 132 f. Dissertação em educação Matemática, PUC-SP, 2010.

<https://problemasteoremas.wordpress.com/2012/06/06/metodos-analitico-e-sintetico-de-demonstracao-de-identidades-trigonometricas/>, acesso em 12 de maio. 2015 às 22:14h.

<http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/planilhas-para-download>, acesso em 12 de maio. 2015. às 22:07h.

[www.significados.com.br/conceito/](http://www.significados.com.br/conceito/) acesso em 12 de maio. 2015 às 13h32.

[www.significados.com.br/?s=logico+indutivo](http://www.significados.com.br/?s=logico+indutivo), acesso em 12 de maio 2015. Às 13h45.

IEZZI, G. *et al.*; *Matemática: ciências e aplicações*. Livro didático, 7ª ed.v.1.- São Paulo: Saraiva, 2013.

JANUÁRIO, G.; *Currículo de Matemática de Educação de Jovens e adultos: análise de prescrições na perspectiva cultural de matemática*. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. PUC/SP. 2012.

LIMA, E. L. *et al.*; *A Matemática do ensino médio.*, 5ª ed, v.1, Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LOPES, S. J.; *"A NOÇÃO DE INFINITO EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO BÁSICO"* Mestrado acadêmico em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. PUC/SP. 2011.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A.; *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas* São Paulo: Editora Pedagógica Universitária, 1986.

MANTOVANI, K. P.; *O Programa do Livro Didático-PNLD: impactos na qualidade do ensino público*. 2009. 120f. Dissertação (Mestrado em Geografia Humana) – Faculdade de São Paulo, USP, São Paulo, 2009.

MARTINS, E. A.; *PROGRESSÃO ARITMÉTICA E GEOMÉTRICAS: PRAXEOLÓGICAS EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA*. Mestrado acadêmico em Educação. Universidade Federal de Mato Grosso. 2012.

OLIVEIRA, João Batista Araújo e GUIMARÃES, Sonia Dantas Pinto; BOMÉNY, Helena Maria Bousquet.; *A política do livro didático*. São Paulo: Summus; Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1984.

PIRES, C. M. C.; *Grupo de Pesquisa: Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores em Matemática*. Texto base para a Organização do Projeto de Pesquisa sobre o Tema: Relações Entre Professores e Materiais Que Apresentam o Currículo de Matemática: Um Campo Emergencial. São Paulo, 2012.

PIRES, C. M. C.; *Implementação de inovações curriculares em Matemática e embates com concepções, crenças e saberes de professores: breve retrospectiva histórica de um problema a ser enfrentado*. Unión (San Cristobal de La Laguna), v. 12, 2007, p. 53-72.

PIRES, Celia Maria Carolino.; REnCiMa, v.4, n.2, p.57-74, 2013.

PIRES, C.M.C. e Curi, E.; *Relações entre professores que ensinam matemática e prescrições curriculares*. Artigo submetido a periódico. v.4, n.2, p. 57-74 São Paulo. 2013.

PIRES, C. M. C.; *Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil*. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 1, p. 1, 2008.

PIRES, C. M. C.; *Currículo de Matemática: da organização linear à ideia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.

PONTE, João Pedro da, BROCARD, Joana, OLIVEIRA, Hélia.; *Investigações matemáticas na Sala de Aula*, Coleção Tendências em Educação Matemática, Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2003, 165p.

PONTE, J. P.; A gestão curricular. In: GTI (Coord.), *O professor e o desenvolvimento curricular* Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M.; *Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem*. In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49-74). Cuiabá: UFMT, 2012.

PONTE, J. P., SERRAZINA, M. L.; *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

PONTE, J. P.; *Da formação ao desenvolvimento profissional*, Actas do profMat 98 (pp. 27-44). Lisboa: APM.1998.

POLYA, G.; *A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático*. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo - 2 reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

\_\_\_\_\_; *Mathematical discovery* (edição original de 1962/1965). New York: Wiley. 1981.

REMILLARD, J. T, HERBEL-EISENMANN, B. A., LLOYD, G. M., (Eds.); *Mathematics Teachers at Work: Connecting curriculum materials and classroom instruction*. New York: Routledge, 2009.

RICHAUDEAU, F.; *Conceptio et production des manuels scolaires: guide pratique*. Paris: Unesco, 1979.

SACRISTÀN, J. G.; *O currículo: Uma reflexão sobre a prática*. 3. ed. Tradução: Ernani F. da Fonseca. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SKOVSMOSE, O.; *Cenários para investigação*. *Bolema*, 14, 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O.; *Educação Matemática crítica: a questão da democracia*. 3. Ed. Campinas: Papirus, 2001.

SILVA, R. R.; *A transposição com expansão do conteúdo do livro didático de matemática para tablet na perspectiva da teoria cognitiva de aprendizagem multimídia*. Dissertação de mestrado. UNICAMP, 2013.

SILVA, Rodrigo Sychocki da.; *O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica*. Dissertação, UFRS, Porto Alegre. 2012.

SOARES. M. B.; *Novas Práticas de leitura e escrita: Letramento na Cibercultura*. Educação e Sociedade: Dez. 2002. V.23.n.81, p.141-160.

SOUZA, Joamir R. De.; *Novo olhar: matemática*. Livro didático, 2ª ed, v.1.– São Paulo: FDT, 2013.

STEPHANOU, M.; Bastos M.H.C (Org). *História e Memórias da Educação – Século XX*. Ed. Vozes, Petrópolis, Brasil., v.3, p.381,2005.

URSINI, S., ESCAREÑO, F., MONTES, D., TRIGUEIROS, M.; *Enseñanza Del álgebra elemental: uma propuesta alternativa*. México: Trilhas, 2005.

ZABALZA, M.; *Planificação e desenvolvimento curricular na escola*. Rio Tinto: Edições, 1992.

ZABALZA, M.; *Planificação e Desenvolvimento Curricular na Escola*, Ed. ASA, Porto, 1994.

ZABALA, A.; *A prática educativa: Como ensinar*. Porto Alegre: Artimed, 1998.