PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

MARIA ELIANA SANTANA DA CRUZ SILVA

CONCEPÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR POR ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2016

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

MARIA ELIANA SANTANA DA CRUZ SILVA

CONCEPÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR POR ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada à Banca Examinadora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação da Prof.ª D.ra Sílvia Dias Alcântara Machado.

São Paulo
2016

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processo de fotocopiadoras ou eletrônicos, desde que citada a fonte.

Assinatura:

Local e data:

AGRADECIMENTOS

À Deus, inteligência suprema, causa primeira de todas as coisas.

À minha orientadora, Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado, por confiar e acreditar neste trabalho, dando-me sentido e direção.

À Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires, pelas suas valiosas contribuições.

Aos membros da banca, Professores Doutores Barbara Lutaif Bianchini, Gerson Pastre de Oliveira, Norma Suely Gomes Allevato e Marilene Ribeiro Resende, pelas contribuições.

Ao Corpo Docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Em especial ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.

À Universidade do Estado da Bahia (UNEB), pelo apoio e incentivo, com especiais agradecimentos ao Professor Doutor Lourisvaldo Valentin da Silva.

Aos estudantes que gentilmente aceitaram participar desta pesquisa.

À meus pais Humberto e Elza, pela confiança e incentivos diários e por vibrarem sempre com as minhas realizações.

À minha tia irmã Celeste, por estar sempre presente apoiando e incentivando.

Às minhas irmãs Elisabete, pelo amor encorajador, e Elisete, pelo incentivo amoroso e colaborador no acompanhamento desse trabalho com suas leituras criticas.

Aos meus sobrinhos Fábio, Camila, Roberta, Bruna e Bárbara: vocês são o meu estímulo e a certeza de que tudo vale a pena. A meus cunhados, minha prima Zildete e tia Valquiria, pelo estimulante de fé.

À meu companheiro de caminhada, Ronald, pelo apoio e compreensão.

Aos colegas de jornada: Gianete, Mirian, Samuel e Robson.

Às minhas amigas e irmãs, meninas superpoderosas, companheiras inseparáveis nesta caminhada: Grace, Maridete e Fátima. Uma por todas, todas por uma, sempre.

A todos os meus amigos e aos companheiros da UNEB, principalmente à Erica Macêdo, por sua constante disponibilidade. A todas as pessoas que fizeram e fazem parte da minha história e que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Quando você traça um caminho, é natural que surjam dificuldades nesse caminhar, mas a sabedoria está no que aprendemos nesses momentos e na felicidade da chegada ao seu destino. Maria Eliana

RESUMO

Esta tese apresenta uma pesquisa que busca investigar as concepções de transformação linear de alunos de uma licenciatura em matemática ao vivenciarem um curso de álgebra linear elaborado com a intenção de envolvê-los na busca de elementos para a construção desse objeto matemático. A análise das concepções se embasou principalmente em partes da teoria APOS, de Dubinsky e Lewin (1986) e Asiala *et al*. (1996), articulada com alguns pressupostos da engenharia didática (MACHADO, 2010). A pesquisa se caracteriza como qualitativa, abordagem que, segundo Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (1986), possibilita investigar e interpretar o contexto investigado, uma vez que todo estudo qualitativo visa retratar a realidade de forma densa, procurando representar as diferentes perspectivas presentes em dada situação social. A partir dessa compreensão de pesquisa qualitativa, foi possível organizar aulas com o objetivo de envolver ativamente os participantes da pesquisa, de forma a facilitar a coleta de dados, que foi realizada após três semestres do curso em questão. Utilizamos pressupostos da engenharia didática na preparação e execução das atividades, discutidas e resolvidas em duplas, atividades essas audiogravadas e descritas por um observador. As análises revelaram que os sujeitos que compuseram as duplas durante a realização das atividades vivenciaram diferentes etapas em termos de concepção (ação, processo e objeto) na maioria das atividades propostas. Concluímos que os sujeitos da pesquisa nem sempre demonstraram uma concepção de objeto no desenvolvimento das atividades, mas todos foram capazes de demonstrar uma concepção de processo da noção de transformação linear.

Palavras-chave: Álgebra linear. Transformação linear. Licenciandos em Matemática. Educação Matemática.

ABSTRACT

This doctoral dissertation reports an investigation of the conceptions of linear transformation held by teaching certification students in mathematics following a course of linear algebra devised to involve students in the search for elements to build the concept of this mathematical object. The analysis of these conceptions was carried out according to the APOS theory by Dubinsky and Lewin (1986) and Asiala *et al*. (1996), in articulation with premises of didactic engineering (MACHADO, 2010). The investigation was a qualitative, case-study type, which, according to Bogdan and Biklen (1994) and Lüdke and André (1986), enables the context studied to be investigated and interpreted, given that all qualitative studies seek to portray reality in a more dense fashion and represent the different perspectives present in a given social situation. Centered on this understanding of qualitative research, classes were organized with the aim of actively involving the study participants to facilitate data collection, which was carried out three semesters after the linear algebra course. Premises of didactic engineering were employed to prepare and conduct the activities, which were discussed and solved by paired students. Their interactions were audio recorded and also noted by an observer. The analysis revealed that the subjects paired for the activities experienced different stages in terms of conception (action, process, and object) in most of the activities. We concluded that the students investigated did not always show a conception of object during the activities, but were all able to demonstrate a conception of process for the notion of linear transformation.
Keywords: Linear algebra. Linear transformation. Teaching degree in mathematics. Mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este trabalho, que se insere na linha de pesquisa ‘História, epistemologia e didática da matemática’ do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), foi desenvolvido no Grupo de Pesquisa Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores, liderado pela D.ra Célia Maria Carolino Pires até a época da qualificação, e finalizado no Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica, liderado pelas D.ras Silvia Dias Alcântara Machado e Barbara Lutaif Bianchini.

O objetivo do estudo foi investigar a concepção de transformação linear de alunos de licenciatura em matemática ao vivenciarem um curso de álgebra linear elaborado com a intenção de envolvê-los na busca de elementos para a construção desse objeto matemático.

A relevância do tema está no fato de que a álgebra linear é um dos conteúdos trabalhados nas licenciaturas em matemática e várias pesquisas têm revelado as dificuldades que os licenciandos apresentam na compreensão de conceitos desse ramo da álgebra, dentre eles o de transformação linear.

O primeiro capítulo apresenta minha trajetória acadêmico-profissional, com a finalidade de ilustrar a origem de minha preocupação com o ensino e a aprendizagem de álgebra linear.

O segundo capítulo, teórico-metodológico, apresenta o referencial teórico que serve de esteio a este trabalho, que é a teoria *Action, Process, Object, Scheme*[1] (APOS), de Dubinsky e Lewin (1986) e Asiala *et al*. (1996). São também focalizadas algumas das pesquisas que mais se identificam com este trabalho. Também neste capitulo, descrevemos as escolhas metodológicas, com o respaldo de Bogdan e Biklen (1994) e de Lüdke e André (1986).

No terceiro capitulo, apresentamos o objeto matemático ‘transformação linear’ e o modo como esse conceito é abordado em alguns livros didáticos – os de Herstein (1970), Hoffman e Kunze (1970), Boldrini *et al*. (1980), Banchoff e Wermer (1992), Lima (2008) e Lipschutz (1994) – e descrevemos como transcorreram as

[1] Ação, Processo, Objeto, Esquema.

aulas sobre transformação linear no lócus da pesquisa e o envolvimento com o tema pelos estudantes que foram sujeitos deste estudo.

No quarto capitulo, descrevemos e analisamos os protocolos, com foco nas questões relativas ao conceito de transformação linear.

Terminamos tecendo as considerações finais.

CAPÍTULO 1
CAMINHO RUMO AO OBJETIVO

Neste capítulo, apresento minha trajetória acadêmico-profissional, com a finalidade de ilustrar a origem de minha preocupação com o ensino e a aprendizagem de matemática em geral e, mais especificamente, com a álgebra linear em cursos de licenciatura em matemática.

TRAJETÓRIA ACADÊMICO-PROFISSIONAL

O processo formativo no campo da educação se inicia no antigo curso de magistério, que permitiu meu ingresso profissional nas séries iniciais do ensino fundamental. Concomitantemente com essa docência, cursei licenciatura em matemática na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Concluindo esse curso, passei a ministrar aulas de matemática também nos segmentos atualmente chamados de ensino fundamental II e ensino médio.

A docência como professora de matemática da educação básica me possibilitou perceber algumas das dificuldades, tanto do processo de ensino como principalmente no de aprendizagem de meus estudantes. No entanto, ainda não havia despertado para a importância de compreender esses processos, pois durante minha licenciatura não tivemos oportunidade de refletir sobre esses processos, de ensino ou de aprendizagem. Assim, lecionava matemática da mesma forma "tradicional"[2] que vivenciara em minha formação acadêmica no ensino fundamental, no magistério e na licenciatura.

Buscando qualificar minha formação inicial, cursei especialização em matemática no período de 1987-88, em Vassouras, RJ. O título de especialista me proporcionou, em 1990, o ingresso como docente na Universidade do Estado da

---

[2] Nessa abordagem, o professor expõe o conteúdo de matemática na lousa, o aluno copia no caderno, o professor resolve um problema e propõe problemas análogos para o aluno resolver individualmente, o professor avalia se o aluno se apropriou do método de resolver aquele tipo de problema etc.

Bahia (UNEB), *Campus* II, lecionando ‘Fundamentos da matemática’ e ‘Álgebra linear’.

Em 2000, ingressei no mestrado em matemática da UFBA, onde desenvolvi pesquisa no campo de sistemas dinâmicos e, em 2003, defendi a dissertação intitulada *Ergodicidade de aplicações unimodais*. Durante o período de mestrado, fiquei afastada das atividades na UNEB, embora continuando a lecionar no ensino fundamental.

Em 2003 retornei à docência na UNEB, voltando a ministrar ‘Álgebra linear’, além de outras disciplinas. Cabe ressaltar que nesse retorno me sentia mais preocupada com o rigor dos saberes a ensinar, tornando-me assim mais “conteudista”. Nessa época, nós professores do *Campus* II da UNEB, ao qual ainda pertenço, reprovávamos muitos alunos nas disciplinas ditas básicas da licenciatura em matemática, principalmente ‘Álgebra linear’. Atribuíamos essas reprovações ao despreparo dos estudantes, sem atinar que, embora a licenciatura fosse um curso voltado a preparar o futuro professor de matemática da educação básica, exigíamos o que pensávamos ser necessário para que ele adentrasse um mestrado em matemática.

Com o decorrer do tempo, comecei, com colegas de trabalho que cursaram o mestrado comigo, a refletir e discutir sobre a causa de tantas reprovações. A partir dessas discussões, passei a observar mais atentamente as dificuldades dos estudantes em compreender os conceitos da álgebra linear – não que essa dificuldade não ocorresse anteriormente, mas foi somente nesse período, após anos de docência, que passei a me inquietar com tal situação.

As discussões sobre as dificuldades de aprendizagem de nossos estudantes instigaram nosso grupo a procurar alternativas à forma de ensino tradicional. Assim, passamos a frequentar congressos e outros eventos que abordavam o ensino da matemática, a educação matemática ou ambos. Nessa época, nos inscrevemos como alunas especiais do Programa de Pós-graduação de Ensino, Filosofia e História das Ciências oferecido pela UFBA, onde cursamos as disciplinas ‘Introdução à história das ciências’, ‘*Os elementos* de Euclides e sua influência’ e ‘Modelagem matemática’.

Convencidas da importância dos assuntos tratados nesse curso, passamos a organizar na UNEB fóruns e semanas sobre educação matemática, com o intuito de oportunizar a nossos licenciandos o contato com a educação matemática.

Movidas pelo anseio em melhorar a aprendizagem de nossos estudantes, decidimos realizar nosso doutoramento no campo da educação matemática. Para tanto, prestamos o exame de seleção de doutorado do Programa de Estudos Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no qual fomos aprovadas.

O projeto de pesquisa que apresentei nesse exame de seleção me conduziu ao Grupo de Pesquisa Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores, liderado pela D.ra Célia Maria Carolino Pires. Minhas inquietações sobre o ensino e a aprendizagem de álgebra linear, no entanto, me conduziram à elaboração de um novo projeto de pesquisa, voltado ao ensino de álgebra linear na licenciatura em matemática.

No exame de qualificação, apresentei um relatório no qual descrevi e analisei alguns episódios de aulas de álgebra linear preparadas com a intenção de provocar uma aprendizagem significativa. Durante as discussões ocorridas na qualificação, recebi inúmeras sugestões dos componentes da banca, que tinha entre seus membros a D.ra Silvia Dias Alcântara Machado. Essa pesquisadora, que conta com artigos e vem realizando pesquisas sobre o ensino e sobre a aprendizagem de álgebra linear desde 1990, sugeriu, entre outros comentários, que me aprofundasse em aspectos envolvidos na compreensão do conceito de transformação linear entre espaços vetoriais.

Dessa forma, quando a D.ra Célia Carolino teve de deixar o programa no final de 2014, solicitei à D.ra Silvia Machado que se encarregasse de minha orientação. Foi assim que, em fevereiro de 2015, passei a integrar o Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), liderado pelas D.ras Silvia Machado e Barbara Lutaif Bianchini.

PROBLEMÁTICA

A álgebra linear é uma área da matemática desenvolvida a partir do início do século XX – recente, portanto, em termos da história da matemática. Vários pesquisadores, como Dubinsky (1997), salientam a extrema relevância da álgebra linear, não só no desenvolvimento da matemática propriamente dita, mas também em suas inúmeras aplicações em outras áreas de conhecimento, como computação gráfica, criptografia, redes elétricas e genética.

Dada a inconteste importância matemática dos conhecimentos de álgebra linear, são várias as pesquisas sobre seu ensino e aprendizagem, tanto nacionais, como as de Silva (2003) e Oliveira (2005), quanto internacionais, como as de Dorier *et al*. (2000) e Dubinsky (1997), todas elas apontando a grande dificuldade enfrentada pelos estudantes em adquirir conhecimentos elementares sobre o assunto.

Essas investigações evidenciam que nossa realidade, no que diz respeito à aprendizagem de álgebra linear, não é diferente da de outros países, o que justifica que o GPEA venha desde a década de 1990 realizando pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse ramo da álgebra, tanto em licenciaturas em matemática quanto em cursos de serviço.

Machado e Bianchini (2012, p. 70) justificam a importância do ensino de álgebra linear na licenciatura em matemática, afirmando que:

> Embora a AL [álgebra linear] provoque dificuldades apontadas pelas pesquisas, ela constitui um assunto essencial para a formação do professor de matemática. Sua aprendizagem fornece uma poderosa ferramenta para a matemática superior, desenvolve a capacidade e habilidade de demonstrações matemáticas, explica e exemplifica a ligação entre álgebra e geometria, entre outras coisas. É importante lembrar que os conhecimentos dos conceitos básicos de Álgebra Linear dão ao professor subsídios para a compreensão da importância de certos temas abordados na Educação Básica, como matrizes, sistemas de equações, etc.

Um dos conceitos mais importantes em álgebra linear é o de transformação linear entre espaços vetoriais sobre um corpo. Lima (2008) justifica a importância desse conceito já no prefácio de seu livro, ao apontar que são numerosas e bastante variadas as situações, em matemática e em suas aplicações, nas quais esse objeto ocorre, entre elas a biologia, a geologia, a física, as engenharias e a economia, sem falar de sua utilização dentro da própria matemática.

O tópico sobre transformação linear trata de uma das noções elementares fundamentais da álgebra linear, tendo por isso sido explorado por vários pesquisadores da educação matemática. Dentre suas pesquisas, destacamos algumas que se dedicaram a investigar a concepção dos estudantes sobre transformações lineares: as de Harel (2000), Karrer (2006), Molina e Oktaç (2007) e Machado e Bianchini (2009).

A importância de focalizar transformações lineares em um curso de licenciatura em matemática reside não só nos argumentos já citados, como também em propiciar aos estudantes a oportunidade de ampliar, e portanto aprofundar, a ideia de função.

Entendemos que a matemática da educação básica tem como principal objetivo apresentar o conceito de função porque esse é o objeto matemático que, embora simples, possibilita correlacionar variáveis e, no âmbito das ciências aplicadas, permite modelizar, representar e interpretar a interdependência entre duas variáveis.

Dessa forma, estudar transformações lineares possibilita ao estudante retomar a ideia de relação entre variáveis – ou seja, ao particularizar espaços vetoriais como $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, poder compreender melhor as condições de generalização para os espaços $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ e, daí, generalizar para espaços vetoriais quaisquer sobre um corpo qualquer. Além disso, para o estudante de licenciatura em matemática, as transformações lineares destacam a importância de conceitos como matrizes e sistemas lineares. Além disso, quando as transformações lineares são representadas por matrizes, evidencia-se um sentido para o estudo de matrizes no ensino médio. Isso aponta a importância do estudo de transformações lineares dentro da álgebra linear, não só para a área de ciências exatas como para o professor de matemática.

Refletir sobre algumas das pesquisas citadas e nossa experiência docente em álgebra linear suscitou questionamentos de natureza tanto conceitual como metodológica: Qual a importância desses conteúdos na formação dos licenciandos, considerando o trabalho que estes deverão desenvolver na escola básica, com todos os desafios que o ensino de matemática lhes apresenta? Como abordar os conteúdos da disciplina com esses estudantes? Que conhecimentos prévios desses licenciandos podem auxiliar na aquisição de novos conhecimentos da disciplina?

Como aproveitar as considerações dessas pesquisas em nossa prática? Deveríamos aplicar de vez algumas dessas sugestões ou introduzi-las aos poucos?

Enquanto essas questões nos inquietavam, fomos encarregadas de lecionar ‘Álgebra linear II’ no 1.º semestre de 2013. Embora a ementa desse curso informasse serem trabalhados produto interno, ortogonalidade, formas bilineares e formas quadráticas, fomos no entanto informadas pelos docentes do semestre anterior de que não houve tempo para trabalhar o conceito de transformação linear. Essa informação foi providencial, pois nos possibilitou preparar aulas sobre esse objeto matemático, incorporando algumas das práticas que julgávamos acessíveis a nosso conhecimento na época.

No entanto, verificamos que os dados colhidos até a qualificação não proporcionavam elementos suficientes para alcançarmos nosso objetivo considerando a teoria escolhida: a da aprendizagem significativa, de Ausubel, Novak e Hanesian (1980). Assim, após a qualificação, decidimos redirecionar nosso objetivo, aproveitando nosso trajeto anterior.

Isso nos permitiu estabelecer o seguinte objetivo de pesquisa:

Investigar a concepção de transformação linear de alunos de uma licenciatura em matemática ao vivenciarem um curso de álgebra linear elaborado com a intenção de envolvê-los na busca de elementos para a construção desse objeto matemático.

CAPÍTULO 2
SOBRE O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo, apresentaremos considerações sobre a importância do conceito de transformação linear para a álgebra linear e explicaremos a forma em que vínhamos desenvolvendo seu ensino nos cursos iniciais de álgebra linear na licenciatura em matemática, terminando pela descrição de como elaboramos o curso dado em 2013, que teve o objetivo de envolver os alunos na busca de informações e conhecimentos sobre o assunto.

Em seu livro *Espacios vectoriales finito-dimensionales*[3], o famoso matemático Paul Halmos (1965) inicia seu capítulo 2 sobre transformações lineares anunciando: “Chegamos agora aos objetos que realmente fazem os espaços vetoriais serem interessantes”[4]. É inegável a importância das transformações lineares no âmbito da álgebra linear, o que é reiterado por Shokranian (2009) quando introduz o estudo de transformações lineares afirmando que:

> O capítulo de transformações lineares na álgebra linear deve ser considerado como ponto de encontro de todos os assuntos já discutidos e a serem discutidos. O conceito de transformação linear é um dos ramos mais belos e importantes da matemática, por várias razões. (SHOKRANIAN, 2009, p. 125)

Dada a importância do estudo de álgebra linear em várias ciências e as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em sua forma axiomática, muitos autores, tanto estrangeiros, como Halmos (1965), Hoffman e Kunze (1970), Herstein (1970), Lipschutz (1994), Uhlig (2002) e Poole (2004), quanto brasileiros, como Carvalho (1979), Boldrini *et al.* (1980) e Shokranian (2009), se dedicaram a focalizá-la na forma de livros didáticos.

Em geral, os livros didáticos, principalmente os mais antigos, como os de Halmos, Hoffman, Kunze e Boldrini, trazem o capítulo sobre transformações lineares após aquele que trata de espaços vetoriais. No entanto, alguns livros didáticos invertem essa sequência, como o faz Uhlig em *Transform linear algebra*, que se inicia com transformações lineares no capítulo 1 e somente no quarto capítulo trata

---

[3] Espaços vetoriais de dimensão finita

[4] Llegamos ahora a los objetos que realmente hacen interesantes a los espacios vectoriales.

dos espaços vetoriais, bem como Poole (2004), que segue essa mesma ideia e trata das transformações lineares no capítulo 3, introduzindo a noção de espaço vetorial somente no capítulo 6.

A álgebra linear na licenciatura em matemática retoma vários conceitos tratados principalmente no ensino fundamental II e no ensino médio, bem como da geometria analítica, como vetores, sistemas lineares, matrizes etc. Assim, seu estudo propicia um bom momento para o licenciando aprofundar e relacionar essas noções, principalmente quando o estudo da transformação linear definida como função obriga o estudante a revisitar esse conceito fundamental da álgebra, articulando a ideia de função real, em que os elementos estão em $\mathbb{R}$, com a de transformação linear, na qual os elementos são vetores. Essa articulação permite o desenvolvimento de um dos processos mais importantes do pensamento algébrico, e portanto do pensamento matemático avançado, que é o processo de generalização, segundo Dreyfus (1991).

Pesquisadores de educação matemática, como por exemplo os do Linear Algebra Curriculum Study Group[5] (LACSG), recomendam que em um curso inicial de álgebra linear se trabalhe com espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. Assim, dependendo do currículo do curso de licenciatura, se os alunos ainda não tiverem estudado a estrutura de corpo, convém seguir esse conselho para não acrescer mais uma dificuldade às já existentes em um curso inicial de álgebra linear.

APRESENTAÇÃO E DESCRIÇÃO DAS AULAS SOBRE TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Elaboramos as aulas sobre transformação linear com a intenção de envolver os alunos na construção dos conceitos a serem tratados.

Julgamos adequado partir do levantamento dos conhecimentos prévios acerca do tema, de forma que esses conhecimentos contribuíssem para a construção de novos saberes, como também recorrer à história e explorar

[5] Grupo de Estudo sobre o Currículo de Álgebra Linear.

aplicações do tema por meio da participação ativa dos estudantes na busca desses elementos a serem socializados durante as aulas.

Na realidade, não pretendíamos mudar a sequência com que estávamos habituados a ensinar álgebra linear, e principalmente transformações lineares, no curso de licenciatura em matemática. Pretendíamos, sim, envolver mais os alunos nos assuntos a serem aprendidos, tendo em conta que estes estavam habituados com o ensino ministrado na forma tradicional, qual seja: conceito, aplicação, propriedades e exercícios do tipo padrão.

Assim, em 2013, fiquei responsável pelas aulas de uma turma de oito licenciandos de matemática, dos quais sete eram repetentes, já havendo cursado a disciplina ‘Álgebra linear’ em semestres anteriores, ministrada por mim ou por outros professores. Julgamos oportuno ministrar aulas a esses sujeitos para que os sete repetentes tivessem oportunidade de rever o tema com outros olhos e, talvez por meio da colaboração prevista, compreender melhor o assunto.

A seguir, exporemos a participação dos alunos durante as cinco aulas de 100 min cada uma em que desenvolvemos o tema ‘transformações lineares’. Enfatizamos que seguimos a sequência dos tópicos do tema estabelecida na ementa do curso. Assim, não foi necessário obter a aquiescência da direção do curso de licenciatura para realizar nosso trabalho investigativo.

A sequência proposta na ementa do curso de álgebra linear foi elaborada ao longo dos anos com base principalmente nos seguintes livros didáticos de álgebra linear: os de (1) Callioli, Domingues e Costa (1990); (2) Boldrini *et al*. (1980); (3) Hoffman e Kunze (1970); (4) Lipschutz (1994); e (5) Steinbruch e Winterle (1987). No entanto, temos conhecimento de que a maioria dos estudantes se limita a consultar a obra de Steinbruch e Winterle (1987), embora haja vários outros livros de álgebra linear na biblioteca da instituição.

Na narrativa que se segue, utilizaremos nomes fictícios para os alunos, a fim de assegurar seu anonimato.

<u>Primeira aula</u>

Como a disciplina ‘Álgebra linear II’ estava se iniciando nesse dia, nos apresentamos e comentamos que pensávamos que nesse primeiro encontro do semestre o ambiente era propício para a colocação de expectativas – nossas e deles. Sugerimos então que cada um, ao se apresentar, dissesse qual era sua expectativa sobre o curso.

Ao nos apresentarmos, salientamos que havíamos iniciado uma pesquisa de doutoramento que tinha como objetivo investigar a concepção de transformação linear de alunos de licenciatura em matemática, propiciada pelo curso de álgebra linear**.** Para tanto, nossa intenção era desenvolver o curso de forma um pouco diferente, o que acreditávamos que poderia facilitar a aprendizagem do conteúdo. Solicitamos então que lessem o conteúdo da declaração de consentimento livre e esclarecido (Anexo A) que lhes foi entregue e, se estivessem de acordo, que a assinassem. Todos o fizeram.

A seguir exporemos o que alguns alunos expressaram sobre suas expectativas.

> PEDRO: *Uma das minhas grandes angústias sobre a álgebra linear, talvez a maior angústia, é o fato de não conseguir eliminar essa disciplina. Esse fato é muito desesperador para mim, porque, em minha opinião, não é a disciplina mais difícil da grade do curso, e é mais angustiante ainda porque eu já consegui eliminar disciplinas nas quais considero o nível de dificuldade muito maior que de álgebra linear. Queria agradecer a oportunidade de expor as minhas angústias para alguém que pode fazer algo para cessá-las, pois tenho convicção de que essa exposição de pensamentos não tem o fim de apenas atingir objetivos pessoais, e sim alcançar o objetivo de obter o melhor para todos.* [...] *fui reprovado em 'Linear I' duas vezes só consegui aprovação da terceira vez – e 'Linear II', essa é a segunda vez. E quero ser aprovado!*
>
> MARIA: [...] *espero que tenha contextualização dos conteúdos com exemplos e de como aplicá-los e suas utilidades, principalmente de seus teoremas.*
>
> ANA: *A álgebra linear, por ser uma das primeiras disciplinas abstratas que vemos no curso de licenciatura em matemática, nos dá um choque inicial, pois não oferece uma ligação direta, e de fácil visualização, entre a teoria e o aplicável!* [...] *apenas fórmulas e resolver contas é da natureza de todo estudante, mas compreender teoria e demonstrações mais rebuscadas precisa de uma carga de conhecimentos mais profunda e um tempo mais disponível, coisa que a quantidade de matérias oferecidas por semestre não nos permite.*
>
> JOÃO: *Eu espero ser aprovado e de preferência que tenha menos conteúdo, porque é um conteúdo diferente do que se costuma imaginar do estudo de matemática. Porque o excesso de conteúdo dessa disciplina contribui* [...] *para o baixo desempenho dos alunos. Esse exagero acaba por atropelar etapas do desenvolvimento do aluno na disciplina. Como se nós alunos fossemos gênios!*

À questão sobre quais conteúdos gostaria de estudar, João imediatamente respondeu:

> *Acho que o mínimo possível ou nenhum.*

Alice, porém, salientou:

> ALICE: *A disciplina 'Álgebra linear' é de suma importância para o currículo de licenciatura em matemática, pois contribui para que um futuro profissional da educação tenha uma visão mais ampla sobre os diversos conteúdos, além de prepará-lo caso o mesmo queira fazer mestrado. E espero que tenha uma maior aplicação prática da disciplina para vermos uma melhor finalidade da mesma. E acho que a ementa deveria ser revista para a licenciatura. Acredito que deveria ser feita uma análise dos assuntos que são essenciais para o curso de licenciatura, e apenas eles seriam transmitidos para os futuros profissionais da educação. Caso alguém se interessasse em se aprofundar mais na disciplina, veria os outros conteúdos, não vistos, em uma disciplina optativa.*
>
> PAULO: *Espero que durante a aplicação da fundamentação teórica realize resolução de problemas e exercícios para melhorar a compreensão dos axiomas, teoremas e proposições dadas. E ser aprovado!*
>
> JOSÉ: *Espero aprovação, que as aplicações sejam com maior nível de complexidade que evidenciem o uso das definições, teoremas, corolários e proposições e que a professora encontre formas de fazer com que os alunos investiguem os livros, criando assim maior intimidade com o conteúdo.*
>
> TIAGO: *Gostaria de algo ilustrativo para que a gente possa se situar melhor. Como os conteúdos de álgebra são muito abstratos, fica complicado uma visualização concreta do que está sendo dito.*

Após a apresentação e declaração das expectativas de cada um, comentamos que, baseando-nos em desabafos de alunos dos anos anteriores, semelhantes a alguns dos comentários desse dia, procuramos analisar nossa forma de ensinar, visando melhorar a atuação didática e, ao nos aprofundarmos em educação matemática, encontramos nessa área a possibilidade de pensar diferente.

Assim, gostaríamos de lhes propor algo que pudesse relacionar nosso anseio com os deles. No entanto, dissemos que não daríamos conta de, naquele curso, discutir toda a teoria de transformações lineares em termos de aplicações, pois muitas das aplicações se dão em outras áreas, como física, computação, engenharias, genética etc. O que propúnhamos era realizar um ensino que consistiria em partir dos conhecimentos prévios acerca de cada conceito para que esses conhecimentos pudessem contribuir significativamente para a construção dos novos saberes. Nessa busca dos conhecimentos, veríamos um pouco da história e aplicação do conteúdo a ser aprendido. Nesse sentido, tal ação seria realizada de forma colaborativa, com a participação ativa de cada um, socializada durante as aulas.

Tiago então comentou:

> *Tudo bem, mas a senhora ainda não falou na avaliação. Já marcou as datas?*

É interessante a preocupação do aluno, pois mesmo diante de uma nova proposta o que predomina são as práticas antigas. Respondemos:

> *Neste trabalho, o tempo será flexível, mas faremos avaliações escritas exigidas pela instituição, bem como avaliação do desempenho de vocês.*

Em seguida indagamos à classe:

> *Quando vocês ouvem a palavra ‘álgebra’ o que lhes vem à cabeça?*
>
> JOÃO: *Muitos cálculos, muito trabalho...*
>
> ALICE: *Muita teoria, muita dificuldade...*
>
> PEDRO: *Me remete aos espinhos da rosa. Porque aprender álgebra machuca, é doloroso e eu tenho dificuldade para aprender. Porque para aprender eu tenho que saber a teoria, minha cabeça tem que estar organizada.*

E acrescentou:

> *Eu peguei ‘Linear I’ três vezes: uma vez com a senhora e as outras duas com dois outros professores. Da primeira vez fiquei perdido e abandonei logo no início, da segunda vez abandonei também, ia perder mesmo a disciplina e só da terceira vez estudava todos os dias. Já tinha visto o conteúdo. Foi quando consegui aprovação.*
>
> JOSÉ: *Acho que é uma disciplina que só aprova se você souber. Não é como cálculo. Álgebra é uma coisa ligada a outra, então tem que saber passo a passo. Se só souber o básico da teoria, você não vai a lugar nenhum.*
>
> ANA: *Álgebra me remete a noites perdidas. Ela é uma matéria que exige muita disponibilidade de tempo. Se tivéssemos só ela para estudar, tudo bem. Mas temos outras.*
>
> MARIA: *Acho que perdemos na matéria por causa do tempo para estudar, principalmente quem trabalha. Isso faz com que a gente perca a matéria e sinta muita dificuldade.*

Questionados se conheciam diferentes álgebras, responderam:

> ALICE: *No nosso curso existem as disciplinas ‘Álgebra linear I e II’, ‘Estruturas algébricas I e II’ e ‘Estruturas algébricas III’ como livre escolha.*

No final da aula propusemos que verificassem se existem tipos diferentes de álgebra.

<u>Segunda aula (50 min)</u>

Iniciamos a aula perguntando o significado do termo ‘linear’ no contexto da álgebra. Após um silêncio, Pedro comentou:

> *Porque ela segue uma linha?*

Paulo perguntou:

> *Porque ela tem uma sequência?*

Sugerimos então a leitura dos textos que entregamos a cada um: *Alguns aspectos do desenvolvimento histórico da álgebra e da álgebra linear*, de Fiorentini, Miguel e Miorim (1993).

Alice sugeriu:

> *Por que não fazemos a leitura oralmente e cada um lê um trecho?*

Durante a leitura dos textos, fizemos algumas interrupções e tiramos algumas conclusões, como: a álgebra possui subáreas que foram subdivididas de acordo com suas especificidades; a especificidade da álgebra linear; a álgebra linear surge de ligações com a geometria, embora alguns autores achem que tem origem com o estudo dos sistemas lineares; a álgebra linear permeia quase todos os domínios da matemática, tornando-se imprescindível aos que querem trabalhar com ciências que utilizam a matemática; é importante superar a forma mecânica de se trabalhar a álgebra para que ela se torne um elo entre os campos da matemática; os conceitos algébricos são importantes desde o ensino fundamental até o superior.

Finalizamos a aula sugerindo que procurassem saber quais são os conceitos necessários para compreender o conceito de transformação linear.

Terceira aula (100 min)

Iniciamos a aula indagando sobre quais conhecimentos nos auxiliariam no entendimento do conceito de transformação linear. Após um tempo, como nenhum dos alunos se manifestasse, e como estávamos num laboratório de informática, sugerimos que procurassem na internet o que significado de transformação linear.

> PAULO E JOSÉ: *Encontramos uma aqui na Wikipédia: “Em matemática, uma transformação linear é um tipo particular de função entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar”.*

Solicitamos que escrevessem na lousa a definição encontrada e perguntamos o que era função.

> ALICE: *Uma relação entre dois conjuntos A e B, tal que a cada elemento de A corresponde um único elemento em B.*

Perguntamos então o que fazia da transformação linear uma função especial.

> TIAGO: *Será que é porque preserva as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar? E trabalha com vetores?*

Solicitamos então um exemplo de função e João exemplificou com uma função afim.

Introduzimos então o conceito de transformação linear para discutirmos o que queria dizer “preserva as operações de adição e de multiplicação por escalar”.

Definimos transformação linear como uma função que relaciona dois espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e leva cada vetor de V a um único vetor de W, preservando as operações de adição e de multiplicação por escalar. Em seguida, apresentamos uma definição mais “operacional”:

Sejam V e W espaços vetoriais reais (ou complexos), ambos de dimensão finita. Uma função T: V→W é chamada de transformação linear de V em W quando:

$$\mathrm{T}(u+v) = \mathrm{T}(u)+\mathrm{T}(v)\ \forall\, u,v \in \mathrm{V}$$

$$\mathrm{T}(au) = a\,\mathrm{T}(u)\ \forall\, a \in \mathbb{R}\ \ \forall\, u \in \mathrm{V}$$

Solicitamos então a João que verificasse se o exemplo dado por ele preservava a adição do espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, e ele percebeu que não.

Demos o exemplo de uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ e fizemos a verificação em conformidade com a definição dada, seguida de exercícios de verificação, como o de verificar se as funções de T: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T(x) = 2x$ e $\mathrm{T}(x) = x^2$ são lineares.

Definimos operador linear como um caso particular de transformação linear no qual W = V.

Introduzimos e demonstramos a propriedade: Em toda transformação linear T: V→W, a imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W, ou seja, $\mathrm{T}(0_V) = 0_W$. Comentamos que essa propriedade é necessária e facilita verificar quando uma transformação não é linear mas não é suficiente.

Demonstramos a equivalência entre a definição dada de transformação linear com: Se V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), a transformação T: V→W é tal que:

$T(au + v) = aT(u) + T(v) \ \forall\, u,v \in V,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Apresentamos algumas transformações lineares do plano, como reflexão em relação aos eixos, reflexão em relação à origem, reflexão em relação às bissetrizes e cisalhamento horizontal e vertical.

No término da aula solicitamos que em duplas pesquisassem para o próximo encontro os assuntos em que as transformações lineares são utilizadas.

Quarta aula (150 min)

Demos início à aula e após as ações de praxe comentamos que imaginávamos, devido ao *datashow* ligado, que haveria uma apresentação. Paulo explicou:

> Ontem à tarde eu, João, José e Tiago fizemos uma pesquisa pela internet, e digo à senhora: não é fácil achar muitas aplicações. Na verdade elas existem mas são aplicadas em áreas mais complexas, envolvendo um trabalho mais rebuscado. Mesmo assim achamos num *site* umas aplicações bem interessantes que vamos socializar. Dada a dificuldade de encontrarmos as aplicações, fizemos os estudos em quarteto.

Então o grupo formado por Paulo, José, João e Tiago iniciou a apresentação, explicando que pesquisaram o assunto pelo Google no *site* http//www.ehow.com.br/importancia-transformacoes-lineares-info_49673.

José iniciou a apresentação pelo *slide* 1 (Figura 2).

Figura 1. *Slide* 1.

E diz que:

> *As transformações lineares têm aplicações importantes no mundo da computação gráfica. Embora os matemáticos considerem essas transformações como ferramenta de manipulação de vetores em um plano, analogamente para os designers gráficos elas manipulam os píxels em uma tela de computador. Cada vetor representa um píxel de uma imagem. Isso permite o uso da transformação linear para aumentar, esticar ou girar píxels, um a um, dando origem a imagens tridimensionais disponíveis online.*

Após essa explicação, enfatizamos as condições para que uma transformação entre dois espaços vetoriais seja linear.

Prosseguindo a apresentação, Tiago leu os dizeres do *slide* 2 (Figura 2).

Figura 2. *Slide* 2.

Acrescentamos, então, que os modelos de regressão relacionam o comportamento de uma variável com outra para se entender como uma variável interfere na outra, e explicamos que eles são bastante utilizados em estatística, química, biologia e medicina.

Em seguida, Paulo comentou o terceiro *slide* (Figura 3).

Figura 3. *Slide* 3.

Tiago prosseguiu explicando:

> *Quando olhamos a tela de um monitor, vemos os pontos luminosos bem pequeninos. O menor desses elementos de exibição no monitor é chamado de píxel.*

João finalizou com a apresentação do *slide* 4 (Figura 4).

Figura 4. *Slide* 4.

Ressaltamos que na aula anterior pedíramos que os alunos se organizassem em duplas para o exercício dessa tarefa. Normalmente eles já trabalham assim, e pensamos que a atuação em duplas lhes facilitaria encontrar horários para o atendimento às tarefas solicitadas, mas preferiram reunir-se em quartetos, alegando a dificuldade de encontrar aplicações de transformações lineares que pudessem assimilar, pois afirmaram existir outras aplicações em áreas que eles não dominam, tais como física, computação e engenharia. Nessa justificativa, os alunos apresentam um envolvimento com o tema em estudo, ao mesmo tempo que revelam a necessidade de interlocução com os outros elementos do grupo para resolverem desafios.

Dando continuidade, o outro grupo se pronunciou, com Alice avisando:

> ALICE: *Olha, professora: eu, Pedro, Ana e Maria fizemos o nosso estudo com situações-problemas. Na verdade, duas.*

Ana coloca no quadro o seguinte exercício e o resolve:

> Qual a transformação linear do $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:
>
> T(1,0,0) = (2,0)
>
> T(0,1,0) = (0,1)
>
> T(0,0,1) = (-1,1)

Resolução:

Como {(1,0,1) ; (0,1,0) ; (0,0,1)} é uma base do $\mathbb{R}^3$, um vetor qualquer do $\mathbb{R}^3$ v = (x, y, z) , pode ser escrito como:

$(x,y,z) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0) + \alpha_3 (0,0,1)$ portanto,

$\alpha 1 = x$, $\alpha 2 = y$ e $\alpha 3 = z$. Assim:

$(x,y,z) = x (1,0,0) + y (0,1,0) + z (0,0,1)$

Aplicando a transformação linear, teremos:

$T(x,y,z) = T(x(1,0,0) + y (0,1,0) + z (0,0,1))$

Mas a transformação da soma é a soma das transformações:

$T(x,y,z) = x\, T(1,0,0) + y\, T(0,1,0) + z\, T(0,0,1))$

$T(x,y,z) = x(2,0) + y(0,1) + z(-1,1)$

$T(x,y,z) = (2x,0) + (0,y) + (-z,z)$

$T(x,y,z) = (2x-z , y+z)$

que é a transformação linear procurada.

A partir disso, entabulamos o seguinte diálogo com Alice:

DOCENTE-PESQUISADORA: – *O que essa aplicação pediu?*

ALICE: *Uma transformação linear*

DOCENTE-PESQUISADORA: *Quais dados precisaram para vocês determinarem a transformação linear?*

ALICE: *As imagens de três vetores*

DOCENTE-PESQUISADORA: *Esses vetores eram vetores aleatórios?*

ALICE: *Não. Da base canônica do $\mathbb{R}^3$.*

DOCENTE-PESQUISADORA: *Podemos concluir que se conhecemos as imagens de uma base qualquer de um espaço vetorial, podemos determinar a transformação linear ou as imagens de um vetor qualquer desse espaço.*

Comentamos então que a resolução da transformação linear apresentada decorria do seguinte teorema, que demonstramos:

Dados os espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), sendo $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V e $w_1, w_2, ..., w_n$ vetores de W, existe uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para i = 1,2,...,n.

Dando continuidade à exposição do grupo, Pedro colocou no quadro o seguinte problema:

Um determinado banco oferece aos seus investidores quatro tipos de investimentos, denominados de A, B, C e D. Um cliente resolve investir seu capital nas quatro opções oferecidas pelo banco.

Representamos a sua aplicação por um vetor 4 × 1:

$$v = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix}$$

onde:

x_a indica reais investidos na aplicação A;

x_b indica reais investidos na aplicação B;

x_c indica reais investidos na aplicação C;

x_d indica reais investidos na aplicação D .

Se o investimento A resultou em y_a reais aplicados, B resultou em y_b reais aplicados e assim sucessivamente, então o resultado total de cada investidor será calculado pela transformação linear T: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T(v) = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_a & y_b & y_c & y_d \end{bmatrix} = x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c + x_d y_d$$

que é uma aplicação da transformação linear na área financeira ou da economia.

Tiramos esse exemplo do site:

www.2.ufpa.br/quimdist/livros_bloco_4/algebralinear

Complementamos a exposição do grupo comentando que para resolver o problema eles haviam utilizado a forma matricial da transformação linear. E aproveitamos a oportunidade para introduzir o conceito de matriz associada a uma transformação linear: Se T é uma transformação linear de V→W, $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V e $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ uma base de W, então:

$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m$

$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m$

…

$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m$$

e a matriz A = (a_{ij}), i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n é chamada matriz associada a T em relação às bases α e β.

Apresentamos o conceito de núcleo de uma transformação linear: Dados os espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de dimensões finitas e T: V→W uma transformação linear, chamamos de núcleo de T ao subconjunto de V dado por:

$N(T) = \{v \in V \,/\, T(v) = 0_W\}$.

Demonstramos que o núcleo de uma transformação linear T: U→W é subespaço vetorial de V.

Recordamos o conceito de imagem de uma função e demonstramos que: dados os espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de dimensões finitas, e T: V→W uma transformação linear, Im (T) é um subespaço de W.

Propusemos então alguns exercícios voltados a encontrar o núcleo e a imagem de algumas transformações lineares.

Nesse grupo, a exemplo do primeiro, os alunos também se organizaram em quartetos para buscarem (também por meio da internet) aplicações algébricas da transformação linear.

Em seguida, terminamos a aula solicitando que procurassem identificar matemáticos que construíram os conceitos tratados nas aulas. As aulas tiveram prosseguimento com apresentações dos dois quartetos, demonstrando um comprometimento com o estudo do tema.

<u>Quinta aula</u>

Iniciamos a aula relembrando os conceitos de núcleo e de imagem de uma transformação linear e passamos a demonstrar que se T: V→W é uma transformação linear, então T é injetora se, e somente se, $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v \; \forall\, u,v \in V$; e T é sobrejetora se Im (V) = W. Exemplificamos e demonstramos a proposição: Se $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é uma base de V e T: V→W é uma transformação linear, então $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ é uma base da Im (T).

Demonstramos a proposição: Se T: V→W é uma transformação linear, então T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0_V\}$.

Anunciamos o teorema que liga as dimensões do núcleo com a da imagem de uma transformação linear e o demonstramos: Se T: V→W é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), então:
dimV = dimN(T) + dimIm (T).

Definimos isomorfismo entre espaços vetoriais: Se V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), uma transformação linear bijetora de V em W é denominada isomorfismo de V em W, e denominamos os espaços vetoriais V e W de isomorfos.

Passamos a demonstrar então os seguintes resultados: Dados os espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de dimensão finita:

1) T: V→W é um isomorfismo $\Rightarrow T^{-1}: W \to V$ é um isomorfismo.
2) V é isomorfo a W $\Leftrightarrow$ dimV = dimW

Em seguida, lembramos aos alunos a proposta da aula anterior de identificar matemáticos que se destacaram nos estudos sobre o tema ‘transformações lineares’.

Maria avisou que seu grupo (ela, Alice, Ana e Pedro) encontrou algo sobre Arthur Cayley e a matriz de uma transformação linear e mostrou um texto impresso de Hygino H. Domingues, retirado do seguinte site:
http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/11/cayley-e-teoria-das-matrizes.html.

Maria e Ana fizeram a leitura do texto e Alice relembrou o que era uma matriz de uma transformação linear, enquanto Pedro mostrava no quadro a transformação linear e sua representação matricial.

> MARIA: [...] *Como os matemáticos da Europa Continental exploraram grandemente estes últimos métodos nesse período, a matemática britânica acabou ficando bem para trás. Mas acabou havendo uma reação e a matemática britânica conseguiu voltar ao primeiro plano no século XIX, especialmente em álgebra, um campo que de um modo geral ficara algo marginalizado nesse meio tempo. E um dos maiores responsáveis por essa reascensão foi Arthur Cayley (1821-1895).*
>
> ANA: [...] *deve-se a ele, num artigo de 1854, a noção de grupo abstrato. Galois, que introduzira o termo grupo em 1830, com o sentido atual, só considerara grupos de permutações. Outra contribuição importante de Cayley, iniciada em 1843, é a geometria analítica n-dimensional, em cuja elaboração utiliza determinantes e coordenadas homogêneas como instrumentos essenciais* [...].
>
> [...] *O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo ‘matriz’ já fora usado, com o*

> *mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester. Nesse artigo Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a ideia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley introduziu-as para simplificar a notação de uma transformação linear.*
>
> [...] *Da observação do efeito de duas transformações sucessivas surgiu-lhe a definição de produto de matrizes. Daí chegou à ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (no caso, a matriz idêntica). Curiosamente foi só num outro artigo, três anos depois, que Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações* [...].
>
> [...] *Ao desenvolver a teoria das matrizes, como outros assuntos, a grande preocupação de Cayley era a forma e a estrutura em álgebra. O século XIX se encarregaria de encontrar inúmeras aplicações para suas matrizes* [...].
>
> ALICE: *Observamos que Cayley não seguiu uma ordem lógica nos seus estudos. Por exemplo, primeiro, como vimos, ele utiliza a matriz para simplificar a notação de uma transformação linear, para depois perceber as operações com matrizes. Hoje estudamos matrizes para depois estudarmos transformação linear.*

Terminada a exposição do grupo, e não havendo nenhuma indagação dos alunos, terminamos as aulas sobre o tema ‘transformações lineares’, que contaram com a participação efetiva de todos os oito alunos, deixando evidente o envolvimento da turma.

CAPÍTULO 3
IDEIAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Neste capítulo, visando investigar a concepção de alunos de licenciatura em matemática sobre transformação linear após vivenciarem um curso de álgebra linear elaborado com a intenção de envolvê-los na busca de elementos para a construção desse objeto matemático**,** apresentaremos as principais ideias que determinaram nossas escolhas teórico-metodológicas.

Para investigar a concepção dos sujeitos da pesquisa sobre transformação linear, buscamos alguns trabalhos da área de educação matemática que visaram investigar a concepção de objetos matemáticos da álgebra linear.

Dentre eles, destacamos os de Machado e Bianchini (2009, 2012), Prado (2010), Furtado (2010) e Oliveira (2002). Os três primeiros investigaram concepções elementares da álgebra linear, como base e transformação linear, sob a ótica da teoria APOS, desenvolvida por Dubinsky (1991) e descrita por ele e sua equipe em Asiala *et al.* (2004).

Em suas dissertações de mestrado, Oliveira (2002) e Furtado (2010) investigaram a concepção de estudantes sobre transformação linear, sendo que Furtado embasou suas análises em Gray e Tall, focando a flexibilidade apresentada pelos alunos nas fases de procedimento, processo e conceito, enquanto Oliveira se embasou na teoria dos campos semânticos desenvolvida por Lins (1992). Cabe notar que ambos os autores concluíram que os sujeitos evidenciaram ter desenvolvido as concepções até o nível de processo para a noção de transformação linear.

Tendo em conta que as ideias de Gray e Tall são muito semelhantes às da teoria APOS, e que esta tem se mostrado adequada para investigar a concepção de várias noções de álgebra linear, optamos por utilizar nas análises requeridas a parte dessa teoria que permite entender os níveis de compreensão conceitual e, para construir as atividades a serem apresentadas aos alunos para a coleta de dados, nos baseamos em alguns dos pressupostos da engenharia didática, descrita por Machado (2010). A seguir apresentaremos, dessas duas metodologias de pesquisa, as ideias que nos embasaram.

Teoria APOS

A teoria APOS – Ação, Processo, Objeto, Esquema – é um referencial teórico que surgiu da necessidade de pesquisadores do grupo Research in Undergraduate Mathematics Education Community[6] (RUMEC) em "considerar os processos mentais pelos quais novos conceitos abstratos são adquiridos"[7] (DUBINSKY; LEWIN, 1986, p. 55). Esse grupo, constituído por Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews e Thomas, parte do princípio de que o professor, ao tentar ensinar uma nova noção, está na verdade estimulando o desenvolvimento cognitivo de seu estudante.

Dubinsky e Lewin (1986), baseando-se na epistemologia genética de Piaget, a qual descreve o desenvolvimento da estrutura cognitiva humana ao longo do tempo de acordo com leis gerais, estabeleceram como foco de estudo o sujeito conhecedor, considerado como "sujeito epistêmico". Afirmam que:

> [...] implícita na análise de Piaget está a ideia de que o conhecimento e a compreensão são adquiridos somente quando o sujeito epistêmico adapta sua estrutura cognitiva existente a esta da qual se torna consciente, à qual nos referiremos como "alimento cognitivo". Os alimentos são integrados fazendo as modificações apropriadas em uma ou mais estruturas cognitivas[8]. (DUBINSKY; LEWIN, 1986, p. 58)

Para acomodar o alimento cognitivo, o "sujeito epistêmico" busca uma equilibração, que se refere a:

> [...] séries de ações cognitivas realizadas por um conhecedor buscando compreender os alimentos cognitivos. O alimento, como tal, é experienciado como novo, resistente, perturbador, desequilibrador – termos que são *grosso modo* sinônimos – para o sistema cognitivo do conhecedor[9]. (DUBINSKY; LEWIN, 1986, p. 60)

De acordo com Asiala *et al*. (1996), a teoria APOS pode ser utilizada como metodologia de pesquisa para o ensino da matemática.

A seguir, apresentaremos a fase da teoria APOS na qual nos embasamos para parte das análises requeridas, após o que descreveremos os pressupostos da

---

6 Pesquisa na Comunidade de Educação Matemática Universitária.

7 [...] to consider the mental processes by which new abstract concepts are acquired.

8 [...] implicit in Piaget's analysis is the idea that knowledge and understanding are acquired only as the epistemic subject applies its existing cognitive structures to that of which it become aware, which we will refer to as 'cognitive aliments'. Aliments are integrated by making the appropriate modifications in one or more cognitive structures.

9 […] series of cognitive actions performed by a knower seeking to understand cognitive aliments. The aliment as such, is experienced as novel, resistant, perturbing, disequilibrating – terms which are roughly synonymous – to the cognitive system of the knower.

engenharia didática que selecionamos e que, articulados com as fases da teoria APOS, também contribuíram para essas análises.

Observação e avaliação segundo a teoria APOS – Esta fase é aquela em que se relacionam os pressupostos da análise ao que se passa na mente do estudante ao aprender um conceito matemático, além de verificar se as implementações das atividades tiveram êxito ou não. Nesse sentido, torna-se imprescindível compreender como o estudante aprende, isto é, como se dá o entendimento por um aprendiz de uma noção – no caso, de matemática:

> O conhecimento matemático de um indivíduo é a sua tendência em responder e perceber situações-problema matemáticas pela reflexão sobre os problemas e suas soluções em um contexto social e pela construção ou reconstrução de ações, processos e objetos matemáticos que são organizados em esquemas para utilizá-los ao tratar dessas situações[10]. (ASIALA *et al*., 1996, p. 7)

Salientamos que a descrição de um conhecimento matemático apontada por Asiala *et al*. (1996) evidencia que o conhecimento tem início com uma manipulação de objetos mentais ou físicos em forma de ações, as quais por sua vez são interiorizadas e abstraídas em processos que são encapsulados para formar objetos. Esses objetos podem ser desencapsulados nos processos iniciais com o intuito de criar novos objetos organizados (Figura 5).

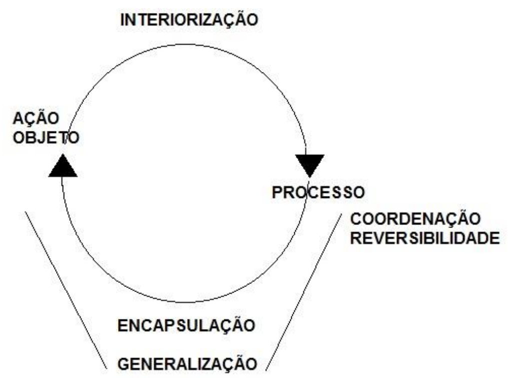


Figura 5. Adaptação – Construção de um esquema.
Fonte: DUBINSKY (1991, p. 107).

[10] An individual's mathematical knowledge is her or his tendency to respond to perceived mathematical problem situations by reflecting on problems and their solutions in a social context and by constructing or reconstructing mathematical actions, processes and objects and organizing these in schemes to use in dealing with the situations.

Portanto, no processo de aprendizagem de um conceito os níveis de ação, processo, objeto e esquema – não necessariamente nesta ordem – estão presentes nas estruturas mentais do conhecimento relativo a um conceito, dependendo em parte da natureza da abstração. De acordo com Dubinsky (1991), no entendimento de um conceito matemático as estruturas organizacionais de concepções – **ação**, **processo**, **objeto** e **esquema** – são identificadas da seguinte forma:

Ação: ocorre quando um indivíduo reconhece um objeto matemático e busca meios físicos ou mentais para transformá-lo. O indivíduo percebe o objeto matemático como algo exterior a ele próprio. Segundo Machado e Bianchini (2012):

> Esse tipo de mudança é percebido como algo exterior ao próprio indivíduo, ou seja, a mudança é uma reação a indicações que fornecem informações precisas sobre os procedimentos a serem realizados. Um exemplo de ação é a do estudante que, para decidir se uma transformação do plano dada no registro gráfico é linear, verifica se a imagem de uma reta é uma reta que passa pela origem. (MACHADO; BIANCHINI, 2012, p. 72)

Se um indivíduo pratica uma ação sobre uma noção, porém demonstra uma ação limitada, dizemos que apresenta uma **concepção-ação.** Exemplificando: ao ser dada uma atividade que apresenta algumas transformações, solicitando-se a identificação daquelas que são lineares, o sujeito utiliza somente a condição necessária de linearidade da transformação, sem atentar para os conjuntos a fim de verificar se são espaços vetoriais etc. Nesse caso, o indivíduo utiliza conhecimentos prévios de atividades-padrão propostas em classe, limitando-se a técnicas de resolução conhecidas, sem estabelecer relação entre os conceitos envolvidos.

Processo: Ocorre quando o indivíduo é capaz de desenvolver na mente uma ação de modo intuitivo e tem domínio de todos os passos da ação, sem que seja necessário ordenar ou efetuar todos os passos de algum procedimento. Demonstra, assim, controle sobre a transformação realizada. Machado e Bianchini (2012, p. 72) expõem: “Um exemplo de processo é o de um estudante que apresenta o registro algébrico de transformação linear do plano, apresentada no registro gráfico, e a valida”.

Nessa etapa, o indivíduo passa a se desprender dos exemplos dados e já faz relação com outros exemplos. Diz-se então que o indivíduo possui uma **concepção-processo,** ou seja, dada uma noção matemática de um estudo, o indivíduo demonstra sua mais profunda compreensão da transformação, o que lhe permite percebê-la como processo.

Quando um indivíduo consegue conscientemente realizar transformações sobre um processo através de outras ações ou processos e é capaz de construí-las e desconstruí-las, diz-se que o processo foi encapsulado na forma de **objeto.** É o caso da transformação linear entre espaços vetoriais sobre um dado corpo K, que se constitui em um objeto da álgebra linear.

Outro exemplo de encapsulação ocorre:

> [...] quando o indivíduo reconhece um esboço do gráfico de uma função polinomial de primeiro grau e é capaz de descrevê-la em linguagem algébrica, da mesma maneira que, ao se deparar com a linguagem algébrica desse objeto, é capaz de esboçar seu gráfico. (PRADO, 2010, p. 36)

Quando um indivíduo alcança consciência do processo, reflete sobre suas propriedades e é capaz de realizar ações sobre o objeto em estudo, diz-se que possui uma **concepção-objeto.** Uma coleção de processos e objetos pode ser organizada de maneira estruturada que forme um esquema. "Os esquemas também podem ser tratados como objetos e serem incluídos na organização de um esquema de nível superior" (Asiala *et al*., 1996, p. 12).

Visando a elaboração do instrumento de coleta de dados, ou seja, o conjunto das atividades sobre transformação linear a serem propostas aos sujeitos da pesquisa, recorremos a alguns dos pressupostos da engenharia didática, conforme Machado (2010).

A engenharia didática é uma das abordagens do campo da didática da matemática que busca organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas, com a finalidade de analisar situações didáticas desenvolvidas nas aulas de matemática.

Neste momento é pertinente situar nossa compreensão sobre o sentido da engenharia didática, a partir das ideias de Artigue (1988 *apud* Machado, 2010, p. 234):

> [...] este termo foi "cunhado" para o trabalho didático, que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Assim, Artigue afirma e caracteriza a engenharia didática como sendo um plano experimental fundamentado em sequências didáticas que são efetivadas em sala de aula, ou seja essa metodologia possibilita analisar a concepção, a realização, a observação e a análise de uma sequência didática para o ensino de um objeto matemático.

Nesse sentido, a engenharia didática assume dupla função: é tanto metodologia de pesquisa quanto de produção para o ensino, de acordo com Douady (1993 *apud* Machado, 2010, p. 234).

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor.

A metodologia em seu processo experimental é composta de quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori,* experimentação e análise a *posteriori*, e a validação consiste na confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

A seguir descreveremos cada uma das fases. Na primeira exemplificaremos como ela ocorreu; nas seguintes, a explicação de como ocorreram se limitará à descrição da elaboração das atividades requeridas para investigarmos as concepções dos sujeitos sobre transformação linear.

A fase da **análise preliminar** se caracteriza pela busca dos conhecimentos didáticos sobre o objeto em questão, já apresentada quando explicitamos nossa escolha pela teoria APOS para investigar a concepção dos sujeitos da pesquisa sobre transformação linear. Nesse sentido, os estudos preliminares de nosso trabalho tiveram início com o levantamento da literatura nacional e internacional sobre concepções da noção de transformação linear e de trabalhos da área que tratassem do ensino e aprendizagem dessa noção.

A fase da **concepção e análise *a priori*** é aquela em que a sequência, que em nosso caso são as atividades a serem propostas aos sujeitos para observarmos suas concepções, é concebida e analisada considerando as variáveis fixadas.

Na fase de **experimentação** ocorre a engenharia propriamente dita, com um grupo de alunos selecionados para o experimento. Em particular, nosso grupo constou de três duplas de ex-alunos de álgebra linear, dois dos quais foram participantes do curso voltado a envolvê-los na busca de elementos para a construção desse objeto matemático.

A fase de **análise *a posteriori*** e de **validação** se baseia nos dados coletados durante a aplicação da sequência. Nessa fase, os registros são analisados à luz da teoria adotada – em nosso caso, a teoria APOS – e ocorre a validação (ou não) das hipóteses levantadas nas análises preliminares.

CAPÍTULO 4
A EXPERIMENTAÇÃO

Para investigar a concepção de transformação linear de alunos de um curso de licenciatura em matemática, decidimos realizar uma pesquisa empírica norteada pela seguinte questão geral:

- **Qual a concepção de transformação linear de alunos de uma licenciatura em matemática ao vivenciarem um curso de álgebra linear elaborado com a intenção de envolvê-los na busca de elementos para a construção desse objeto matemático?**

Dado que esses alunos já haviam participado de um primeiro curso de álgebra linear, decidimos convidá-los para as atividades.

A ação desenvolvida com os participantes nos induz à seguinte questão específica, a ser respondida pela pesquisa:

- **As atividades elaboradas possibilitam aos alunos que cursaram álgebra linear expor suas concepções sobre a noção de transformação linear?**

Descreveremos a seguir os procedimentos metodológicos adotados na elaboração da coleta de dados.

PREPARAÇÃO DA COLETA DE DADOS

No 1.º semestre de 2015, então sob orientação da Prof.ª D.ra Silvia Machado, decidimos que, para atingir o objetivo de investigar a concepção de transformação linear de alunos de licenciatura em matemática propiciada por um primeiro curso de álgebra linear elaborado com a intenção de envolvê-los na busca de elementos do conceito em construção**,** deveríamos realizar mais um encontro com esses alunos que participaram do curso, com a intenção de obtermos dados passíveis de serem analisados segundo alguns dos pressupostos da teoria APOS e da engenharia didática.

Solicitamos e obtivemos a permissão da Chefe de Departamento para contatar os alunos para a coleta de dados. Infelizmente, nessa mesma época os professores faziam assembleia sobre a necessidade de realizar uma paralização por tempo indeterminado. Assim, os docentes iniciaram as atividades avaliativas para que a greve não prejudicasse os alunos. Na semana em que foi decretada a greve, procuramos cada um dos oito alunos, pois dispúnhamos de seus contatos desde o curso de 2013 e tínhamos que restringir a sessão prevista a um dos dois dias que antecipavam a paralisação dos docentes. Ao contatar os alunos, recordamos-lhes que estávamos terminando a coleta de dados da pesquisa de nossa tese e solicitamos que participassem de um encontro. Todos os oito participantes aceitaram o convite e confirmaram presença.

Previmos uma sessão de 140 minutos, com dois momentos: os primeiros 20 minutos seriam dedicados à explicação dos procedimentos didáticos, além do tempo necessário para que os sujeitos os compreendessem e, conforme seu discernimento, assinassem o termo de consentimento livre e esclarecido (Anexo B). O segundo momento seria destinado à execução das atividades propostas.

Organizamos os presentes em duplas. As expressões de pensamentos e estratégias de resolução dos integrantes seriam captadas por um gravador e notas do pesquisador e/ou do observador.

Entregamos a cada dupla uma única folha por vez, de cada uma das seis atividades, para que fossem lidas em conjunto e a atividade fosse discutida.

Convidamos uma colega da instituição, que também ministra álgebra linear, explicando o que esperávamos de sua atuação como observadora: não responder perguntas sobre as atividades, não interferir nas discussões das duplas e anotar as falas que julgasse importantes para a finalidade da pesquisa.

ANÁLISE *A PRIORI* DAS ATIVIDADES

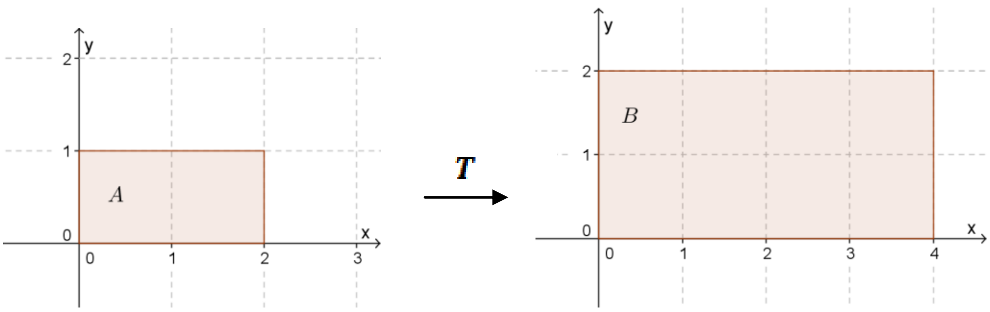
Com a intenção de investigar a concepção de transformação linear dos alunos de licenciatura em matemática, elaboramos as seis atividades sobre transformação linear e as organizamos em ordem crescente de dificuldade, para incentivar os sujeitos a exporem suas concepções. Optamos por propor na maioria das atividades o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$, dada a vivência dos sujeitos com esse espaço vetorial. Posteriormente, na quinta e sexta atividades, trabalhamos com espaços $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}$. As três primeiras atividades versaram sobre transformação no plano, visando que os pesquisados percebessem as ações das transformações e a noção de linearidade. As três últimas versaram sobre transformação linear, com a finalidade de induzir os pesquisados a um reconhecimento de uma transformação linear e, assim, expor suas concepções sobre esta.

A seguir apresentaremos cada atividade com sua respectiva análise *a priori*.

Atividade 1

A intenção desta atividade foi provocar: (*a*) a observação da ação de expansão da figura; (*b*) o registro da expansão do retângulo A; (*c*) a recordação de uma das bases do $\mathbb{R}^2$ para facilitar a conjectura e possível registro da expansão T.

Observe a figura 1 abaixo, onde *T* representa uma função do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$ cuja ação transforma o retângulo *A* no retângulo *B*.



Assim, $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$*, e a imagem indica que* $\boldsymbol{T}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = (\mathbf{2},\mathbf{0})$*. Encontre a imagem dos vértices do retângulo:*

$\boldsymbol{T}(\mathbf{0},\mathbf{0}) =$ ....

$\boldsymbol{T}(\mathbf{2},\mathbf{0}) =$ ....

$\boldsymbol{T}(\mathbf{0},\mathbf{1}) =$ ....

$\boldsymbol{T}(\mathbf{2},\mathbf{1}) =$ ....

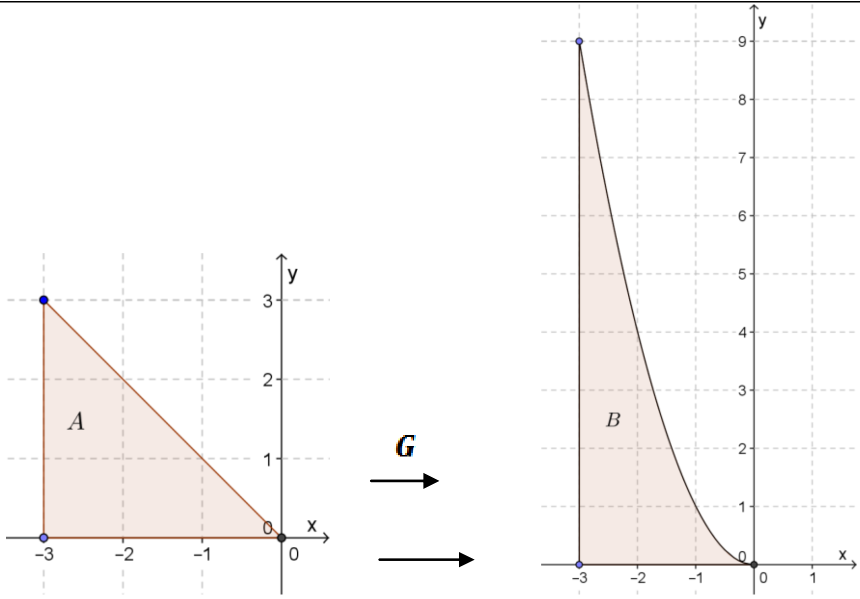
Lembrando que $\{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ *é uma das bases do* $\mathbb{R}^2$*, e que então, o vetor* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *do* $\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como* $\boldsymbol{x}(\mathbf{1},\mathbf{0}) + \boldsymbol{y}(\mathbf{0},\mathbf{1})$*, faça uma conjectura sobre qual seria a imagem dessa transformação.*

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$: ...

Figura 6. Atividade 1.

Atividade 2

O objetivo desta atividade foi levar as duplas a perceber a transformação da figura e conjecturar sobre ela; identificar o triângulo como polígono e perceber que a outra figura, embora delimitada, não é um polígono; reconhecer que um dos segmentos de reta não respeitou a linearidade para que a transformação G seja considerada linear; correlacionar o segundo elemento do par (x,y^2) com a forma corresponde a uma parte da parábola $y \rightarrow y^2$.



Assim, $\boldsymbol{G}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\boldsymbol{G(x,y)} = \boldsymbol{(x,y^2)}$, ao atuar sobre o triângulo *A* de vértices:

$V_1 = (-3,3)$, $V_2 = (0,0)$ e $V_3 = (-3,0)$, transforma o triângulo *A* na figura *B*.

a) Como você define polígono?

b) O triângulo $\boldsymbol{A}$ é um polígono?

c) A figura $\boldsymbol{B}$ obtida pela ação da transformação $\boldsymbol{G}$ sobre o triângulo $\boldsymbol{A}$ é um triângulo? Justifique sua resposta.

d) O que diferencia a transformação $\boldsymbol{T}$ da atividade 1 da transformação $\boldsymbol{G}$?

Figura 7. Atividade 2.

Atividade 3

O propósito desta atividade foi levar as duplas a:

a) observar, interpretar e denominar as ações das transformações dadas;

b) modelizar as ações de duas transformações; no caso, J e M.

Como os alunos já dispunham dessas vivências em geometria analítica, essas ações foram escolhidas no plano, com o propósito de que, ao retomá-las, percebessem as ações de uma transformação linear. A atividade proposta foi:

Observe as seguintes transformações do plano:

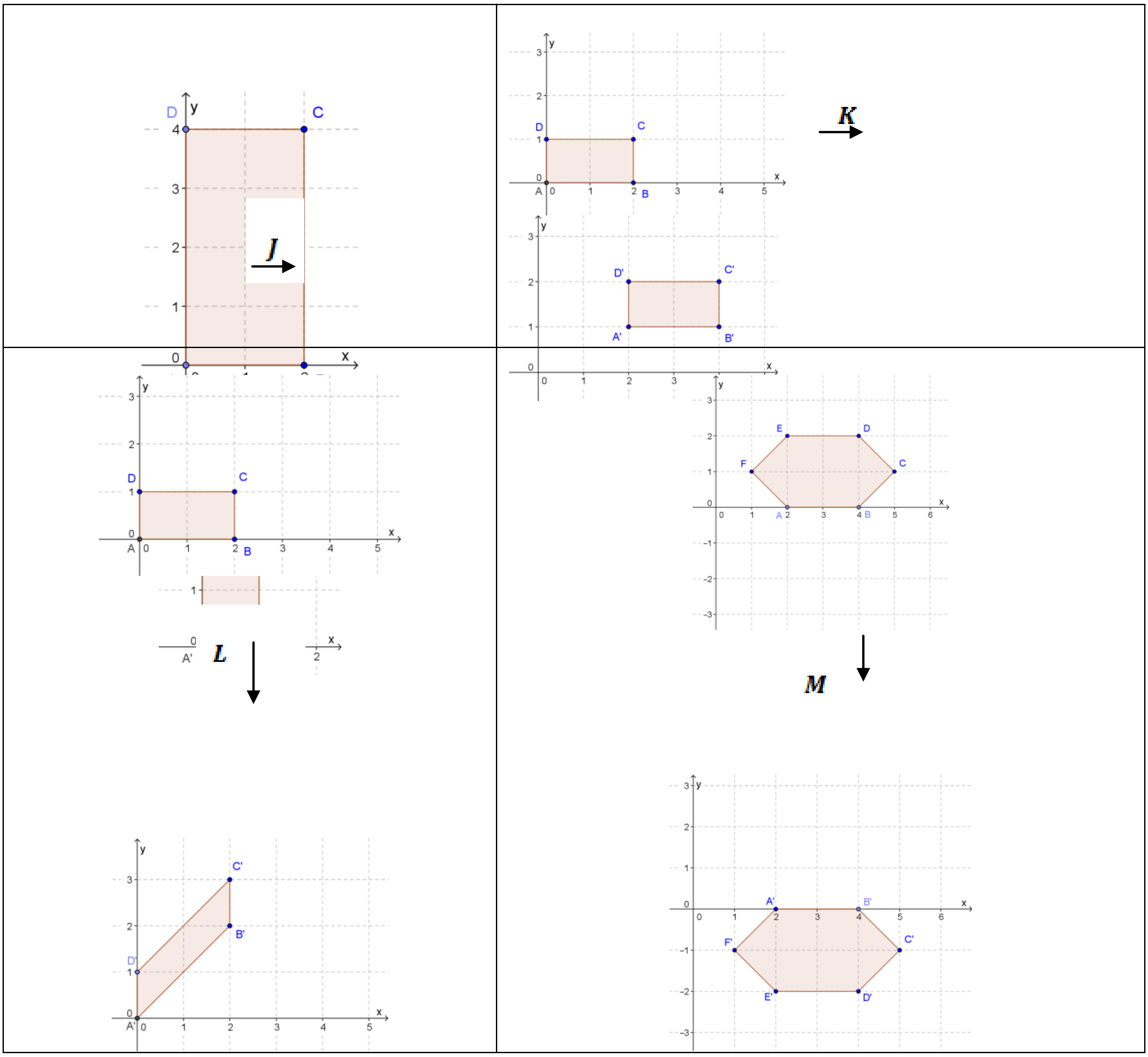


Figura 8. Atividade 3.

a) Observando cada uma das transformações do plano acima, como você as denominaria?

J:	K:
L:	M:

b) Encontre a forma de representação funcional de $\boldsymbol{J}$ e de $\boldsymbol{M}$. Por exemplo:

$$\boldsymbol{J}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ \boldsymbol{J}(x,y) = \boldsymbol{J}\big(x(1{,}0) + y(0{,}1)\big) = x\,\boldsymbol{J}(1{,}0) + y\,\boldsymbol{J}(0{,}1) = \cdots$$

Sabemos que todo conjunto $\mathbb{R}^n$ com $\boldsymbol{n} > 0$ e $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dentre as funções estudadas na educação básica, constam funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$**,** assim denominadas:

Função linear: $\boldsymbol{F}$**,** dada por $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, com os parâmetros $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

Função quadrática: $\boldsymbol{G}$**,** dada por $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$, com os parâmetros $a \neq 0,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

Assim, a imagem de uma função linear é uma reta e a imagem de uma função quadrática é uma curva (não reta).

Consideremos as funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, chamadas de *transformações do plano*, lembrando que $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Atividade 4

Observando as transformações do plano das atividades anteriores, quais delas você classificaria como linear?

Transformações do plano: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	Linear		Justifique
	É	Não é	
$T(x,y) = (2x\ ,2y)$			
$G(x,y) = (x, y^2)$			
$J(x,y) = (\ ½\ x, ½\ y)$			
$K(x,y) = (x+2, y+1)$			
$M(x,y) = (x, -y)$			

Atividade 5

O objetivo desta atividade foi utilizar a definição de transformação linear para demonstrar suas propriedades.

Dados dois espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}$, dizemos que a transformação $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear se:

i) $\forall\, u, u' \in \mathbb{R}^n \qquad T(u + u') = T(u) + T(u')$

ii) $\forall\, u \in \mathbb{R}^n \;\; e \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad T(\alpha u) = \alpha \cdot T(u)$

Essas duas condições para que uma *transformação* entre espaços vetoriais seja considerada *linear* indicam que a transformação *preserva a linearidade*.

Em outras palavras: a transformação preserva as operações do espaço vetorial: a adição $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u'})$ e a multiplicação por escalar $(\alpha \cdot \boldsymbol{u})$.

Propriedades de transformações lineares que são consequências simples da **linearidade:**

Consideremos as transformações lineares entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}$, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u'} \in \mathbb{R}^n$. Valem então as seguintes propriedades:

i) $\boldsymbol{T(0, 0, \ldots 0)_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots 0)_{\mathbb{R}^m}}$

ii) $\boldsymbol{T(-u) = -T(u); \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n}$

Tentem demonstrar cada uma dessas propriedades.

Atividade 6

Esta atividade teve por objetivo generalizar a definição de transformação linear para espaços vetoriais quaisquer sobre $\mathbb{R}$.

Até aqui, estivemos tratando apenas com espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. No entanto, existem vários outros espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, como o conjunto dos vetores da geometria analítica, o conjunto das matrizes reais $m \times n$, o conjunto dos números complexos etc.

Baseados nas definições e propriedades expostas anteriormente e considerando que $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ são dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$:

i) Defina transformação linear $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$.

ii) Verifique se as seguintes transformações entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ são lineares:

1. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $\quad A(x, y, z) = (x + y, z)$
2. $B: \mathbb{C} \to M_{3\times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos)

$$B(x + yi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

SESSÃO DE COLETA DE DADOS

Antes do início da sessão, preparamos a sala de forma a facilitar que os alunos se sentassem em duplas. Organizamos o material e verificamos os gravadores.

Às 8 h, chegaram dois alunos dos oito que haviam confirmado presença e nos avisaram que os outros seis estavam naquele momento em atividades avaliativas de outras matérias. Diante desse fato imprevisível, ocorrido em um momento de tumulto por causa de uma greve de duração indeterminada, decidimos postergar a sessão para um horário em que os dois alunos presentes declararam poder comparecer para a coleta de dados. Com isso ganhamos tempo para encontrar os outros seis estudantes.

Marcamos a sessão para ocorrer após o almoço. Ao encontrarmos os alunos que não puderam vir à sessão no horário combinado, todos eles explicaram que infelizmente não poderiam participar, pois teriam outras atividades obrigatórias à tarde.

Decidimos então convidar ex-alunos de álgebra linear para participarem da sessão de coleta. Julgamos que isso não prejudicaria nossos resultados, pois a parte teórica de transformação linear não sofrera mudança no curso de 2013 – pelo contrário: se houvesse discrepância entre o que dissessem os dois alunos de 2013 e os outros, poderíamos considerar mais um quesito.

No horário marcado, compareceram os dois alunos do curso e quatro ex-alunos de álgebra linear que não haviam dele participado. Agradecemos pela presença dos seis alunos e solicitamos que sentassem em duplas nos lugares demarcados. Reiteramos que seus nomes seriam substituídos por nomes fictícios e que os resultados da análise dos dados poderiam contribuir para a melhoria do ensino e consequentemente da aprendizagem de álgebra linear na licenciatura em matemática. Explicamos o papel da observadora e lhes entregamos os termos de compromisso livre e esclarecido, que lemos em voz alta, explicando. Todos assinaram seus respectivos termos.

Consultamos sobre a possibilidade de audiogravar as discussões das duplas, lembrando que serviriam para enriquecer a análise dos protocolos. As três duplas concordaram com a gravação. Esclarecemos que nós duas não poderíamos responder questões que envolvessem a resolução das atividades, para não prejudicar a análise dos dados. Solicitamos também que, caso “errassem”, não impedissem que notássemos tal “erro” ou caminho. Para tanto, deveriam apenas passar um risco sobre ele, pois todo “erro” encerra uma “sabedoria”.

Durante as duas horas da sessão, houve apenas uma interrupção, quando uma criança, filho de Bela (todos os nomes são fictícios), adentrou a sala, mas rapidamente a mãe providenciou sua saída.

Os resultados obtidos durante a aplicação das atividades foram analisados seguindo os pressupostos da engenharia didática articulada com a teoria APOS. No próximo capítulo, apresentaremos a análise das concepções dos sujeitos pesquisados sobre a noção de transformação linear, considerando os objetivos de nossa pesquisa.

CAPÍTULO 5
ANALISANDO AS PRODUÇÕES VIA PROTOCOLOS E GRAVAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos a análise das concepções dos estudantes sobre a noção de transformação linear por meio dos registros (escritos e audiogravados devidamente transcritos) do conjunto de atividades que compuseram o protocolo.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS PROTOCOLOS DAS DUPLAS[11]

Atividade 1

Sobre a parte do texto que explica: ***Assim, T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e a imagem indica que T(1,0) = (2,0). Encontre a imagem dos vértices do retângulo: ...***, colheram-se as seguintes falas:

Dupla A

Eni: *A imagem de T(1,0) = (2,0).*
T(0,0)? T(0,0) = (0,0), pois é uma transformação linear. Não é?

Liu: *É.*

É interessante ressaltar que, embora a atividade informe que se trata de atividade sobre transformações do plano, Eni logo supõe tratar-se de uma transformação linear, sem julgar necessário verificar tal suposição, e conclui que, como é uma transformação linear, vale a propriedade que leva vetor nulo do domínio no vetor nulo do contradomínio. Liu, baseando-se na suposição de Eni, confirma a conclusão desta.

Segue o diálogo da dupla para obter a imagem de T(2,0), T(0,1) e T(2,1).

[11] Para facilitar o acompanhamento desta parte, incluímos nos exemplares em papel um encarte com o resumo das atividades. No exemplar disponibilizado na internet, tal sumarização consta somente como anexo.

Eni: *T(2,0) eu vou colocar (4,0). Em minha opinião ampliou em duas unidades.*

Liu: *É (4,0). Mas em relação à área a figura, quadruplicou. E considerando a transformação, ela dobra a função. Então T(2,0) = (4,0).*

Enquanto Eni percebe e estabelece que a ação da transformação “ampliou em duas unidades” a figura, Liu observa duas ações da transformação: na primeira ela quadruplica a área e na segunda ela dobra a imagem da função.

Eni: *E agora, T(0,1)? (0,1) é esse ponto daqui. Pra mim T(0,1) vai em (0,2), entendeu? É, eu estou olhando isso aqui.*

Liu: *Pegando o vértice...*

Eni: *Observe: esse vértice (2,0), ele foi em (4,0). O que você conclui?*

Liu: *O 2 andou duas unidades, então o 1 vai para o 3. Não?*

Eni: *Mas, aqui se você multiplicar o 2 por 1 dá 2. Entendeu?*

Liu: *É, é mesmo.*

Eni: *É, pode ser que não seja isso, mas parece claro. Acho que a intenção é encontrar a fórmula, mas tem que ter mais de um ponto.*

Liu: *É, acho que é (0,2) mesmo. T(0,1) = (0,2).*

Então esse ponto (2,1) vai para (4,2)

Eni: *Isso. T(2,1) = (4,2)*

Eni rapidamente associa os vértices do retângulo A do domínio da transformação aos vértices do retângulo B da imagem, enquanto Liu parece ser mais cautelosa em suas observações, pois de início diz que o ponto andou “duas unidades”, interpretando que para obter a imagem do ponto (0,1) basta somar 2 a cada elemento do par, ao que Eni chama sua atenção para o fato de que para obter a imagem é necessário multiplicar por 2 os elementos do par. Neste caso fica evidente a importância do trabalho em dupla, no sentido de favorecer a compreensão por seus componentes.

Quanto à questão final desta primeira atividade: **Lembrando que {(1,0), (0,1)} é uma das bases do $\mathbb{R}^2$, e que então, o vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$, pode ser escrito como x(1,0) + y(0,1), faça uma conjectura sobre qual seria a imagem dessa transformação.**

T (x,y) = ...

Liu: Lê a questão vagarosamente.

Eni: *Pegamos um vetor qualquer e determinamos a sua imagem.*

T(x,y) = x((1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y)

Essa é a imagem: T(x,y) = (x,y)

Liu: *Eu acho que não é isso, não.*

Eni: *É, isso aqui é uma base. Então?*

Liu: *Não seria x mais y?*

Eni: *É porque a resposta deveria ser em forma de conjunto. Então seria isso aqui*:

Im (T) = {(x,y) ∊ $\mathbb{R}^2$ /x,y∊$\mathbb{R}$}

A fórmula, não é? Mas isso aqui é uma base.

*Olhe, vamos deixar assim mesm*o.

Liu: [Após um momento de silêncio.] *Sim, T é a imagem. Vamos para outra.*

A dupla demonstrou compreender a ação da transformação T. Dizem que a função dobrou, mas não conseguem fazer esse registro. Embora Liu não tenha concordado com a resposta final, a dupla conclui o item definindo a imagem de uma transformação linear no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, conforme fala de Eni: *"É porque a resposta deveria ser em forma de conjunto. Então seria isso aqui: Im (T) = {(x,y) ∊ $\mathbb{R}^2$/x,y∊$\mathbb{R}$}".*

Nesta atividade 1, a dupla conjecturou sobre a expansão da figura, determinou as imagens dos vértices, mas não determinou a imagem da transformação. Assim, nesta atividade, a dupla demonstra estar no início do nível de processo, segundo a teoria APOS.

Dupla B

Bela: *O que ocorreu com o retângulo?*

Alice: *Ele duplicou, não foi? O que estava no 1 foi pro 2, o que estava no 2 foi para o 4, assim, completando*

T(0,0) ficou (0,0)

T(2,0) ficou (4,0)

T(0,1) = (0,2)

T(2,1) = (4,2)

A dupla visualizou a expansão da figura, conforme fala de Alice (*"ele duplicou"*) e determinou as imagens dos vetores pedidos, aparentemente observando a figura B, surgida pela ação da transformação T sobre o retângulo A. Dando prosseguimento, a dupla dialoga sobre a segunda parte da atividade**:** ***Lembrando que {(1,0), (0,1)} é uma das bases do $\mathbb{R}^2$, e que então o vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como x(1,0) + y(0,1), faça uma conjectura sobre qual seria a imagem dessa transformação.***

T (x,y) = ...

Bela: *Vamos determinar a imagem dessa transformação. {(1,0),(0,1)} é uma base do $\mathbb{R}^2$, a imagem da transformação.*

Alice: *Então, (x,y) pode ser escrito assim porque essa é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Se dermos valores...*

Alice utiliza o fato de que se {(1,0); (0,1)} é uma base do $\mathbb{R}^2$, então qualquer vetor desse espaço pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base de $\mathbb{R}^2$. Ela reflete claramente sobre o objeto e estabelece um procedimento.

Bela: *Não, essa é uma das bases.*

Alice: *Vai usar essa transformação aqui.*

Bela: *Não, vamos usar a base. Aqui é o caso em que o vetor (x,y) é 1 e 1, vamos ver o que acontece para x e y iguais a 2 e 2.*

Alice: *É melhor usar a base {(2,0), (0,2)}.*
Par (2x,2y), e vamos ver o que ocorre, porque precisamos fazer uma conjectura de qual seria a imagem dessa nova transformação.
Então para o par (x,y) = (1,2) o que ocorre com a transformação?
Vamos escrever como combinação linear da base
(1,2) = x(1,0) + y(0,1) → x = 1 e y = 2 que é o par (1,2).

Bela: *Essa é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Todo vetor vai ser igual a ele mesmo. Tem que aplicar a transformação nesse vetor.*

Alice: *Mas que elementos são esses? Esse elemento que pegamos não é qualquer? E trabalhamos com a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Ela está me perguntando: qual seria a imagem dessa transformação?*

Bela: *Sim, eu sei, mas ela quer saber a transformação que ocorreu aqui. Ela quer saber o que ocorre, utilizando o par (x,y) que está na base canônica. Entendeu agora?*
Aí no caso é a transformação T que leva o par (x,y) em (2x,2y) que é o mesmo que x(2,0) + y(0,2) = 2x(1,0) + 2y(0,1). Não é isso?

Alice: *Sim.*

Bela: *A transformação dobra cada coordenada do ponto.*
Observe que aqui os pares aqui foram: (1,1), (0,1) e (0,2).
T(0,1) = (0,2).

Alice: *No caso, ela quer que descreva: o retângulo vai de 0 a 2, foi para 0 a 4. Ela quer que descreva: se não fosse um retângulo e fosse qualquer outra imagem, o que a transformação faria.*
Como seria a imagem de qualquer vetor (x,y). Daí temos que dizer, no caso, aí ela dobra os componentes do ponto.

As alunas se mostram minuciosas no detalhamento da atividade, ambas concordando sobre os efeitos da transformação T, buscando generalizar sua ação. No entanto, pela descrição mencionada por Alice (*"No caso ela quer que descreva, o retângulo vai de 0 a 2 foi para 0 a 4. Ela quer que descreva se não fosse um retângulo e fosse qualquer outra imagem, o que a transformação faria"*), percebe-se que de forma intuitiva ela já conhece a lei da transformação.

Bela: *É o que essa transformação faz?*

Alice: *É o que essa transformação faz com o ponto (x,y)?*

Bela: *Então. É para pegar os vetores com essa cara e jogar na transformação canônica. Não é isso?*

Alice: *Já está na base canônica.*

Bela: *Não necessariamente. Então é isso que eu estou tentando lhe dizer: que qualquer coisa que jogar na base canônica vai dar ela mesma.*

Alice: *Mas, a transformação vai dar ela mesma. Entendi o que você quis dizer, mas o raciocínio que usamos aqui não foi dobrar. Então a transformação aqui vai ser $T(x,y) = (2x,2y)$, que pode ser escrito como na base canônica?*
$2x(1,0) + 2y(0,1)$

Bela: *Aí você já está mudando a base.*

Nesse momento a dupla aparenta não mais concordar. As alunas estavam aparentemente alinhadas nas deduções do desenvolvimento da atividade e nesse instante nota-se um momento de ruptura, porque cada uma apresenta seu entendimento sobre uma mesma informação.

Alice: *Não, (1,0) e (0,1) não forma a base canônica?*
$x(2,0) + y(0,2)$, (2,0) e (0,2) não são múltiplos da base canônica?

Bela: *Sim.*

Alice: *Então continua sendo a própria base.*

Bela: *Para que serve a base? A base de uma transformação? Aí, você está sugerindo que qualquer vetor..., é o que está pegando, um vetor genérico do $\mathbb{R}^2$. Isso aqui é uma base do $\mathbb{R}^2$, e isso aqui um vetor genérico do $\mathbb{R}^2$: pode ser escrito assim, nessa base. Então se pegarmos um vetor e escrevermos nessa base, o que vai acontecer?*

Alice: *Mas (2,1) escrito na base canônica não é:*
$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$. Não é isso. Então quando eu aplico a transformação aqui:
$T(2,1) = 2T(1,0) + 1T(0,1)$
$(4,2) = 2(2,0) + 1(0,2)$

Bela: *Então você está sugerindo que se eu aplicar esses vetores aqui na base canônica, ele vai dobrar? É isso que você quer dizer?*

Alice: *Não, é quando usamos a transformação. A transformação dada, não dobrou? Então esses vetores aqui, mesmo na base canônica, quando* *se aplica a transformação eles dobram. E qualquer vetor que eu pegue, não importa a base, com essa transformação ele vai dobrar. Eu acredito que não depende da base, depende da transformação.*

Bela: *Você está levantando a hipótese que não depende da base e eu digo que depende. Na minha cabeça não dobra, na minha cabeça vai ficar ele mesmo. Tipo: se eu pegar esses vetores, por mais que eles estejam dobrados nessa transformação, quando eu aplico a base canônica vai ficar ele mesmo. Entendeu? Na minha cabeça está assim: como se não ocorresse nenhuma transformação.*

Alice argumenta sobre a ação algébrica dessa transformação (*"Não, é quando usamos a transformação. A transformação dada, não dobrou? Então: esses vetores aqui, mesmo na base canônica, quando aplica a transformação eles dobram. E qualquer vetor que eu pegue, não importa a base, com essa transformação ele vai dobrar. Eu acredito que não depende da base. Depende da transformação"*) e respeita a opinião de Bela, que demonstra fragilidade em sua noção sobre transformação (*"Você está levantando a hipótese que não depende da base e eu digo que depende. Na minha cabeça não dobra. Na minha cabeça vai ficar ele mesmo.* [...] *Na minha cabeça está assim: como se não ocorresse nenhuma transformação"*). Porém Alice mantém-se segura em sua linha de raciocínio, e prossegue:

Alice: *Entendi. Mas, está pedindo uma transformação.*

Bela: *Sim, mas a transformação está pegando ele e levando nele mesmo. Na minha cabeça não tem nenhuma transformação. Ela está levando ele nele mesmo.*

Pela discussão, Bela aparenta ter esquecido que, mesmo escrevendo um vetor como combinação linear dos elementos de uma base canônica, é possível aplicar uma transformação linear aos membros dessa combinação se conhecemos suas imagens, assim obtendo a representação da imagem do vetor considerado.

Alice: *Mas, ele não está pedindo a base canônica. Ele está pedindo a cara do vetor. Como é que vai ficar a cara desse vetor com essa transformação? Entendeu agora? Ele não está lhe perguntando a base. A base canônica vai ficar a mesma {(1,0); (0,1)}. Só que utilizando o vetor (x,y) em qualquer ponto que eu pegar nessa transformação, ele vai ficar dobrado.*

Bela: *Então, qual seria a imagem? A imagem continuaria sendo $\mathbb{R}^2$.*

Alice: *A imagem do vetor. Não é a imagem do $\mathbb{R}^2$. Se lhe pedisse aqui: Qual a imagem do vetor (1,1) usando essa transformação?*

Bela: *T(1,1) = (2,2)*

Alice: *Então, para generalizar, usando (x,y) em qualquer ponto do $\mathbb{R}^2$, depois da transformação que cara ele vai ter?*

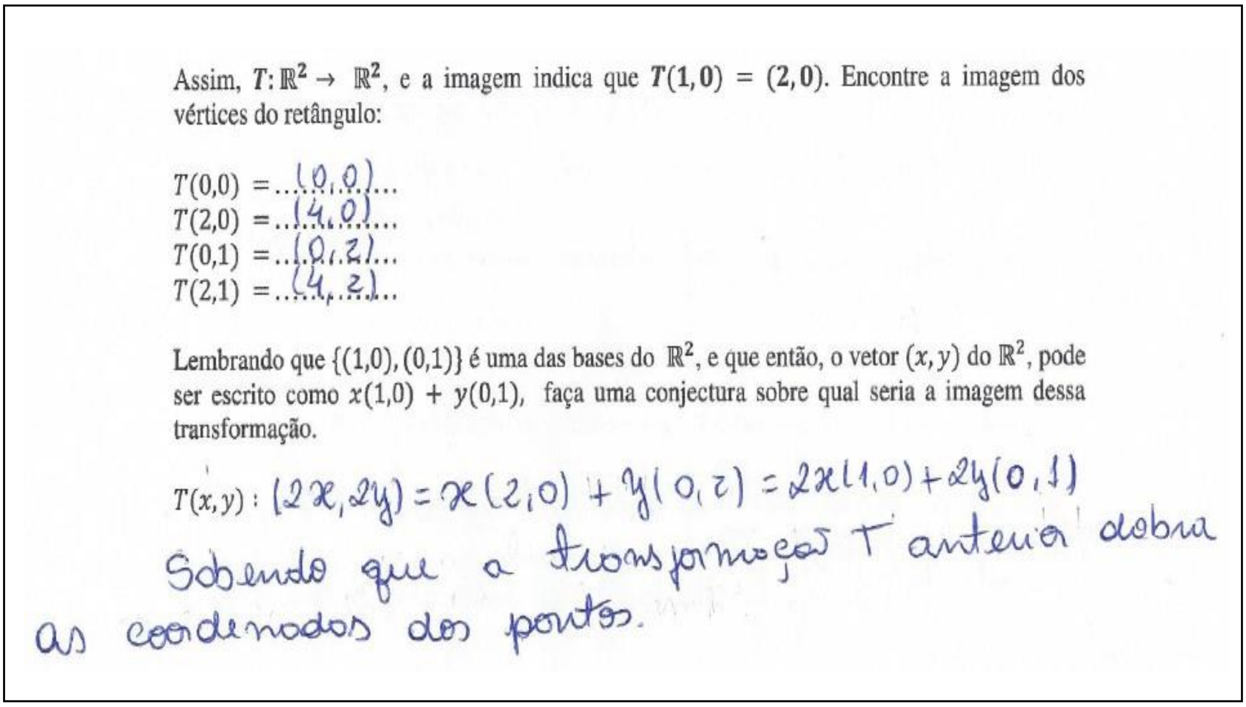
Bela: *2(x,y). Agora, para um ponto em que x = 0 e y = 0 vai dar quanto?*

Alice: *Aqui (0,0), porque 2(0,0).*

Bela: *Entendi o que você quis dizer. Não é 1, porque 1 não é subconjunto, não é par. Só os múltiplos de 2, só os pares. Entendi. Para mim cabia todo mundo: 0, 1, 2, 3.*

Alice: *Você está presa a Mat 1. Qual a imagem dessa função? E você respondia: $\mathbb{R}$ – 0.*

Alice, com sua argumentação (*“Mas, ele não está pedindo a base canônica. Ele está pedindo a cara do vetor. Como é que vai ficar a cara desse vetor com essa transformação. Entendeu agora? Ele não está lhe perguntando a base. A base canônica vai ficar a mesma {(1,0); (0,1)}. Só que utilizando o vetor (x,y) em qualquer ponto que eu pegar nessa transformação, ele vai ficar dobrado.”*), proporciona a Bela um instante de reflexão, levando a dupla a perceber a expansão da figura, conjecturando e determinando a lei da transformação de acordo com os registros do protocolo. Nesta atividade, a dupla demonstra uma concepção-processo.



Assim, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e a imagem indica que $\boldsymbol{T(1,0)} = \boldsymbol{(2,0)}$. Encontre a imagem dos vértices do retângulo:

$T(0,0) =$ ...(0,0)...
$T(2,0) =$ ...(4,0)...
$T(0,1) =$ ...(0,2)...
$T(2,1) =$ ...(4,2)...

Lembrando que $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma das bases do $\mathbb{R}^2$, e que então, o vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$, pode ser escrito como $x(1,0) + y(0,1)$, faça uma conjectura sobre qual seria a imagem dessa transformação.

$T(x,y)$: $(2x,2y) = x(2,0) + y(0,2) = 2x(1,0) + 2y(0,1)$
Sabendo que a transformação T anterior dobra as coordenadas dos pontos.

Figura 9. Atividade 1 da dupla B.

Nesta atividade, podemos observar, de acordo a teoria APOS, uma estudante ainda iniciando uma ação e a outra no nível de objeto.

<u>Dupla C</u>

Cali: *O ponto (0,1) foi para (0,2).*

Pedro: *A transformação duplica isso aqui, multiplica todo elemento do conjunto pelo escalar 2. Não é isso? Geometricamente, podemos perceber que a área quadriplica. Observe: a base em x saiu de 0 até 2 para de 0 até 4.*

Cali: *Em y de 0 até 1 para de 0 a 2.*

Pedro: *Então as imagens ficam: (0,0); (4,0); (0,2) e (4,2).*

Neste diálogo, os alunos demonstram que perceberam a ação da transformação. Pedro prontamente indica as imagens dos pontos solicitados, conforme sua fala (*“A transformação duplica isso aqui, multiplica todo elemento do* *conjunto pelo escalar 2. Não é isso? Geometricamente, podemos perceber que a área quadriplica.* [...] *Então as imagens ficam: (0,0); (4,0); (0,2) e (4,2)"*).

Cali: *É sobre que transformação? Essa transformação daqui?*

Pedro: *Sim, dessa T, que é isso: 2(x,y). Fica fácil porque é a base canônica. Pelo pouco que dá para lembrar, acho que é isso mesmo.*

Cali: *Mas não multiplicou o x e o y.*

Lembrando que {(1,0), (0,1)} é uma das bases do $\mathbb{R}^2$, e que então, o vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$, pode ser escrito como x(1,0) + y(0,1), faça uma conjectura sobre qual seria a imagem dessa transformação.

T (x,y) = ...

Pedro: *Olhe, aqui está a base: {(1,0), (0,1)}*

T(1,0) = (2,0) = 2 (1,0)

T(0,1) = (0,2) = 2 (0,1)

T(1,0) + T(0,1) = 2 (1,0) + 2 (0,1) = 2 [(1,0) + (0,1)], que é duas vezes a base canônica. Isso é óbvio, é óbvio porque estamos trabalhando com a base canônica.

A transformação T, ao multiplicar os elementos do domínio por um escalar, gera uma figura semelhante à primeira. Basta colocar aí T(x,y) = 2(x,y), É o procedimento que multiplica os dois elementos do par. Eu estou curioso para ver o resto. Será que tem algum procedimento complicado?

Cali: *Eu pensei que era para provar isso: 2(x,y). Não é, não?*

Pedro: *Conjectura é para você especular mesmo e não provar. Mas nós conjecturamos e usamos o bom senso se foi duplicado aí. O que a transformação faz? A transformação pega cada elemento do conjunto e duplica. Não é isso? Vamos para próxima atividade.*

Pedro demonstra nesta atividade uma rapidez de raciocínio e conhecimento do tema, utilizando linguagem matemática adequada, o que leva a dupla a concluir rapidamente a atividade e fazer registro direto no protocolo. Eles chegam ao objetivo da atividade, percebem a expansão da figura, registram a expansão do retângulo e determinam a lei da transformação, demonstrando uma concepção-objeto no desenvolvimento dessa atividade, segundo a APOS.

Assim, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e a imagem indica que $\boldsymbol{T(1,0) = (2,0)}$. Encontre a imagem dos vértices do retângulo:

$T(0,0) =$ ...(0,0)...
$T(2,0) =$ ...(4,0)...
$T(0,1) =$ ...(0,2)...
$T(2,1) =$ ...(4,2)...

Lembrando que $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma das bases do $\mathbb{R}^2$, e que então, o vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$, pode ser escrito como $x(1,0) + y(0,1)$, faça uma conjectura sobre qual seria a imagem dessa transformação.

$T(x,y)$: 2.(x,y)

Figura 10. Atividade 1 da dupla C.

Assim, nesta atividade nota-se que todas as duplas perceberam e registraram a expansão do retângulo. Duas delas determinaram algebricamente a imagem da transformação dada, utilizando o fato de que, conhecendo-se a base de um espaço vetorial e as imagens de seus elementos, é possível determinar a imagem da transformação. De acordo com os objetivos dessa questão, essas duas duplas chegaram ao objeto, segundo a teoria APOS. Um grupo tentando registrar a lei da transformação, definiu o conjunto-imagem de uma transformação linear, conforme protocolo da dupla (Figura 11).

Lembrando que $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma das bases do $\mathbb{R}^2$, e que então, o vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$ ser escrito como $x(1,0) + y(0,1)$, faça uma conjectura sobre qual seria a imagem transformação.

$T(x,y)$: $x(1,0) + y(0,1)$

$= (x,0) + (0,y)$

$= (x,y)$

$Im(T) = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x,y \in R\}$

Figura 11. Atividade 1 da dupla A.

Atividade 2

Com relação ao texto: **Assim, G:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por G(x,y) = (x,y^2) ao atuar sobre o triângulo A de vértices: V_1 = (-3,3), V_2 = (0,0) e V_3 = (-3,0), transforma o triângulo A na figura B.**

a) Como você define polígono?

b) O triângulo A é um polígono?

c) A figura B obtida pela ação da transformação G sobre o triângulo A é um triângulo? Justifique sua resposta.

<u>Dupla A</u>

Eni: *Linhas delimitam um polígono.*

Liu: *Você não lembra a definição?*

Eni: *É uma área delimitada.*

Liu: *É alguma coisa assim.*

Eni: *Quando nós determinamos os vértices nós delimitamos uma área. Como temos três vértices nós delimitamos uma área. E é um polígono.*

Elas dialogam, buscando relembrar a definição formal de um polígono.

Eni: *E a justificativa? Tem que ser perfeita por causa desse ângulo aqui.*

Liu: *Esse ângulo continua reto.*

Eni: *Como vamos definir o que vamos usar?*

A dupla está se referindo à figura obtida pela ação da transformação G sobre o triângulo A dessa atividade.

Liu: *Ela está determinando um triângulo? Nós pegamos a primeira coordenada, levamos nela mesmo, e a segunda elevamos ao quadrado.*

Eni: *Mas essa segunda coordenada determina que esse lado seja uma parabolazinha por causa desse y^2. Acho que polígono é uma região delimitada por, não sei se retas ou segmentos de retas.*

Liu: *Segmentos de retas, pois a reta é infinita.*

Ao discutirem sobre a ação da transformação G sobre o triângulo A, a dupla se apoia pouco a pouco em seus fragmentos de lembranças, construindo a definição de polígono, conforme diálogo (Eni: *"Mas essa segunda coordenada determina que esse lado seja uma parabolazinha por causa desse y^2. Acho que polígono é uma região delimitada por, não sei se retas ou segmentos de retas."* Liu: *"Segmentos de retas, pois a reta é infinita"*), além de refletirem claramente sobre o objeto.

Liu: *O triângulo é um polígono?*

Eni: *É.*

Liu: *Tem que justificar?*

Eni: *Não, então vamos para outro item.*

Liu: *Não, Para ser um triângulo, não teria que ser três retas?*

Eni: *Três segmentos de retas. Eu estou na dúvida se isso vale para qualquer polígono ou só para polígonos regulares.*

Liu: *Então não é um triângulo. Quer dizer, não é um triângulo no $\mathbb{R}^2$.*

O interessante aqui é que Liu corrige Eni dizendo: “segmentos de retas” e nessa penúltima fala de Eni. É ela quem chama atenção de Liu. No entanto, concluem o item afirmando que a figura B obtida pela ação da transformação G sobre o triângulo A não é um triângulo, pois um de seus lados é uma parábola. Dando continuidade, fazem a leitura do item *d*:

Liu: *A transformação da atividade 1 levou o retângulo A num retângulo B proporcional ao retângulo A. Será que eles têm a mesma área?*

Eni: *Não, o retângulo B tem uma área maior. O que acontecia com cada ponto na transformação da atividade 1?*

Liu: *Nós multiplicávamos cada um por 2. Se pegarmos o ponto (2,1), ficava $x = 4$ e $y = 2$. Então a transformação daqui fica assim: $T(x,y) = (2x,2y)$. E nessa $G(x,y) = (x,y^2)$, a segunda coordenada vai ficar elevada ao quadrado. Será que a diferença é essa?*

Eni: *Deve ser. Não é? Outra coisa: a transformação da atividade 1 ela amplia, e a transformação da atividade 2 ela deforma, e a da atividade 1 não. E a G leva x em x e y em y^2, além de que pela transformação T o retângulo A foi quadruplicado em sua área, obtendo figuras proporcionais.*

Liu: *Já a transformação G, o triângulo A foi a uma figura B diferente de um triângulo. Ela perguntou se era um triângulo e nós dissemos que não.*

Eni: *É porque um triângulo é delimitado por três segmentos de retas: a figura B da atividade 2 não é delimitada por segmentos de reta; um dos seus lados é uma semiparábola.*

Liu: *E aqui é uma semiparábola.*

Eni: *É sim: uma meia parábola.*

Liu: *O triângulo maior é um polígono?*

Eni: *Não.*

A dupla voltou à atividade 1 procurando rever as ações da transformação T sobre o retângulo A e comparando-as com as ações da transformação G, buscando analisar as ações das duas. Estabelecendo as diferenças geometricamente e algebricamente, identificaram o triângulo como um polígono, além de concluir que a figura obtida pela ação da transformação G não é um triângulo. A dupla não se refere à linearidade da transformação T e à não linearidade da G, mas percebe que um dos lados da figura não é linear.

Dupla B

Alice: *É uma figura que tem vários lados. O que vai dizer se ele é regular ou não, se ele é um triângulo, quadrado etc.*

Bela: *Polígono é uma figura formada por segmentos de retas. Só isso.*

O triângulo A é um polígono? Sim.

A figura B não é um triângulo. Por quê?

Alice: *Quando usamos em cálculo, pegamos a reta que tangencia a curva, a reta que mais se aproxima da curva ou a curva que mais se aproxima do comprimento daquela reta. Por mais que façamos aqui para transformar numa figura reta, vai existir três lados do triângulo.*

Bela: *E outra coisa também: pela definição que nós tomamos – uma figura formada por segmento de retas –, esse segmento aqui não é um segmento de reta, pois na figura B temos um que um dos lados não é delimitado por um segmento de reta e sim por uma linha curva.*

A dupla relembra a definição de polígono e faz a identificação de um – como mostra a fala de Bela (*"Polígono é uma figura formada por segmentos de retas.* [...] *O triângulo A é um polígono? Sim"*.), além de constatar que a figura B não é um polígono. As alunas continuam a atividade, conjecturando sobre o item *d*.

Bela: *O que a transformação T faz? Leva os pares (x,y) a*

$T(x,y) = (2x,2y)$ e $G(x,y) = (x,y^2)$.

Alice: *Também poderíamos justificar assim: A transformação T preserva as características da figura e, na transformação G, o que era um polígono deixou de ser um polígono.*

Bela: *Podemos observar que na transformação T as características da figura são preservadas, ocorrendo apenas um aumento proporcional de tamanho. Já na transformação G, ocorre uma mudança considerável da figura, deixando de preservar as suas características. Um lado foi*

> *preservado, o outro aumentou e esse assumiu o comportamento de uma curva.*

Embora a dupla tenha concluído a atividade geometricamente, sem registrar que uma transformação é linear e a outra não, as alunas evidenciam que perceberam a transformação da figura: que a figura B, embora delimitada, não é um polígono; e que um dos lados figura B não é linear, conforme as falas de Alice (*"Também poderíamos justificar assim: a transformação T preserva as características da figura e, na transformação G, o que era um polígono deixou de ser um polígono"*) e de Bela (*"Podemos observar que na transformação T as características da figura são preservadas, ocorrendo apenas um aumento proporcional de tamanho. Já na transformação G, ocorre uma mudança considerável da figura, deixando de preservar as suas características. Um lado foi preservado, o outro aumentou e esse assumiu o comportamento de uma curva."*) Demonstram, assim, que nesta atividade apresentam uma concepção-ação, segundo a teoria APOS.

<u>Dupla C</u>

Pedro: *Isso aqui é uma função modular? Não. É linear*?

Cali: *Isso é uma parábola, não é?*

Estão se referindo à observação do efeito da transformação G sobre o triângulo A da atividade 2.

Pedro: *Polígono. Vamos à definição.*

Cali: *É uma figura plana, fechada. Um segmento de reta, se é o que dizemos que é polígono.*

Pedro: *E se não for fechada?*

Cali: *Não é um polígono.*

Pedro: *Então polígono é uma linha poligonal fechada.*

Cali: *O triângulo A é um polígono? Sim, o triângulo A é um polígono. E a figura B é um triângulo? Não, por causa disto.*

Pedro: *Degenerado, triângulo degenerado. Você tem certeza que essa figura obtida não é um polígono?*

Cali demonstra mais segurança, conforme sua fala (*"O triângulo A é um polígono? Sim o triângulo A é um polígono. E a figura B é um triângulo? Não."*), enquanto Pedro aparenta ter dúvidas e se revela surpreso com os efeitos da transformação. Eles prosseguem o diálogo:

Cali: *Segundo essa definição que demos, não, porque isso não é um segmento de reta. Ela possui segmento de retas e uma linha curva.*

Qual a diferença entre a transformação T da atividade 1 para a transformação G?

Na atividade 1 são preservadas as características.

Pedro: *É isso mesmo, preserva as características.*

Cali: *Na transformação T são preservadas as características do retângulo A no retângulo B.*

Pedro: *Espere aí. Você está falando dentro de uma visão geométrica. Não é?*

Cali: *Mas, não é isso que a transformação faz? Ela tinha isso e transformou nisso. A figura B continua a ser um retângulo.*

Pedro: *É sua justificativa em cima de uma visão geométrica. Mas tipo assim: os elementos da imagem continuam do mesmo tipo, da mesma forma?*

Cali: *Sim, a imagem é ampliada.*

Pedro: *Na transformação T multiplicamos por um escalar, gerando uma figura ampliada, mas semelhantes.*

Cali: *Porém isso não acontece com a transformação G, onde não foram preservadas as características do triângulo A na figura B, que não é um polígono.*

Pedro: *Podemos melhorar essa escrita. A transformação T, ao multiplicar os elementos do conjunto de partida... Acho que posso falar assim, porque isso é uma função, não é? Então 'domínio'. Ao multiplicar os elementos do domínio por um escalar, a transformação gera uma figura semelhante. Figura semelhante segundo a interpretação geométrica.*

A dupla discute os itens *a*, *b* e *c* da atividade 2 simultaneamente. Define e identifica um polígono. Cali justifica geometricamente os efeitos das transformações. Pedro identifica a transformação de espaços vetoriais como uma função, de acordo com sua fala: "*A transformação T, ao multiplicar os elementos do conjunto de partida... Acho que posso falar assim, porque isso é uma função, não é?"*. Os dois aparentam ter visões diferentes sobre o mesmo ponto.

Cali: *Não tem como separar essa visão geométrica, isso só acontece por causa disso. Se ele não multiplicasse por um escalar, a figura ia continuar assim. Quando falamos da ampliação, já estamos falando dessa multiplicação que você quer falar. Se transformar uma figura em outra, é porque houve alguma coisa aqui.*

Pedro: *Base. Modificou os elementos da base? É isso que eu estou pensando.*

Cali: *Ela está se referindo a essa transformação. É justamente sobre o que está ocorrendo aqui.*

Pedro: *É, eu acho que é isso. Os elementos da base passam por uma transformação e geram o conjunto-imagem. Tipo... Sei lá: você tem os elementos do domínio e vai para a imagem.*

Cali: *O que a função faz? Pega elementos, uma coisa aqui e leva naquilo ali. E continua $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. É uma função da mesma forma que essa de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não é diferente.*

Pedro: *Uma dimensão não pode conter mais de uma base? Essa transformação deixou na mesma base canônica. Olha, vamos falar só em termos de transformação e base, sem utilizar geometria.*

A dupla inicia uma discussão sobre visão geométrica e visão algébrica, Pedro acha que as atividades devem ser discutidas em termos algébricos e Cali acha que não se pode separar a visão algébrica da visão geométrica. A verdade é que deixam claro que estão percebendo a mesma coisa, embora o registro oral pareça ser diferente.

Cali: *Acho que não.*

Pedro: *E tudo vai ser geometria?*

Cali: *Eu acho que explica melhor a situação.*

Pedro: *Por que acontece isso aqui?*

Cali: *Você fala em base. Eu estou falando de domínio e imagem. Uma transformação multiplica por um escalar e essa faz uma coisa diferente.*

Pedro: *Eu acho que isso tem relação com base, essa questão que você só vê como geometria.*

Cali: *Eu acho que não Ela tem relação com a geometria. Essa transformação T, ela só vai ampliar, ela não vai deformar e essa aqui deforma.*

Pedro: *Sei lá, não dá para explicar formalmente. A transformação T gera uma imagem de elementos preservando a base destes.*

Cali: *Preserva a base... Eu não gosto disso. Nós estamos de* $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$*. A base mudaria se saíssemos de uma dimensão para outra.*

Pedro: *Não é isso, numa só dimensão você pode ter outras bases. Essa aqui é a base canônica.*

Cali: *Mas uma transformação tem mais de uma. Eu não me lembro disso, não.*

Pedro: *Uma transformação é só uma.*

Nesta parte do diálogo, ainda discutem sobre qual visão utilizar para estabelecerem as diferenças entre as transformações das atividades 1 e 2. Falam sobre as bases de um espaço vetorial, dimensão de um espaço e falam intuitivamente sobre a unicidade de uma transformação linear. Na verdade, utilizam-se de seus conhecimentos prévios sem estabelecerem uma relação entre estes, caracterizando bem a fase-ação da teoria APOS.

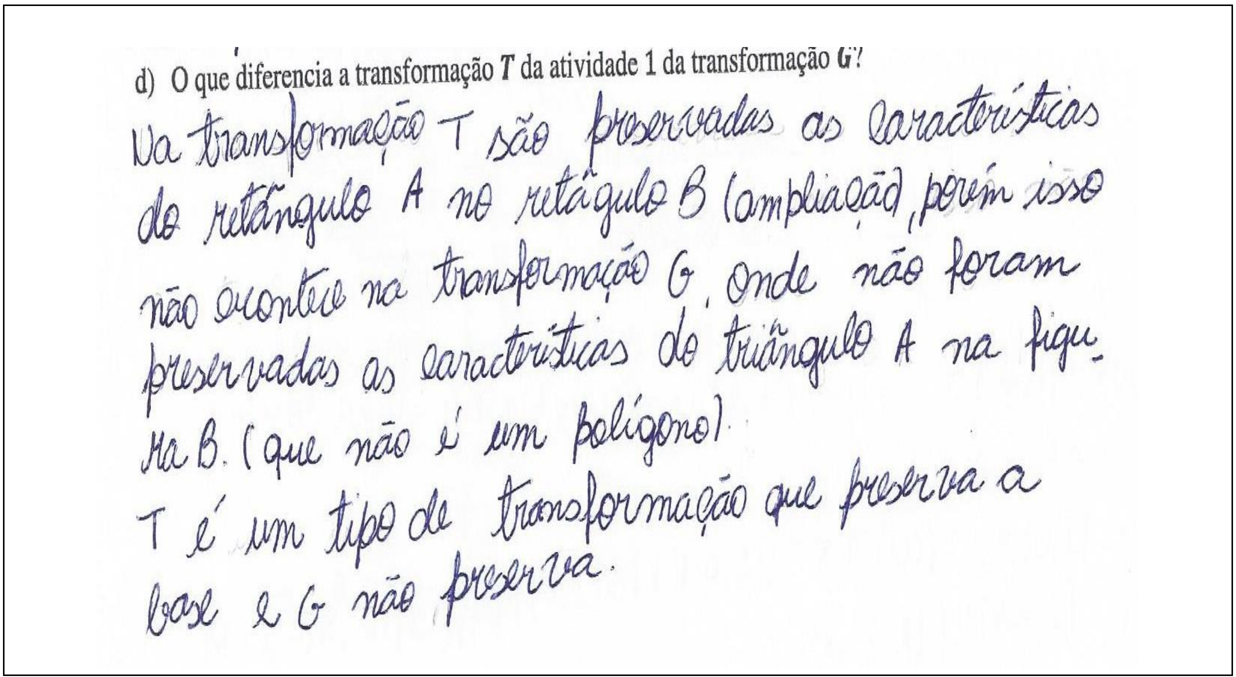
Cali: *Acho que não tem relação com base se essa transformação conserva o primeiro elemento e eleva ao quadrado o segundo. Eu vejo assim.*

Pedro: *A combinação linear dessas bases é quem gera os elementos. Olhe, deixa em termos de geometria mesmo, se você se sente melhor. Mas existe um tipo específico de transformação linear que preserva a base. Essa T, por exemplo, é um tipo de transformação linear que preserva a base.*

Cali: *Eu vou estudar sobre isso quando chegar em casa.*

Pedro: *Eu vou estudar mais isso para o meu TCC, que vai ser em sistemas dinâmicos. Eu posso precisar. Tenho que estudar de fato e com calma. Porque na pressa você não aprende nada.*

A dupla define polígono e reconhece que a figura B não é um polígono, de acordo com Cali (*"O triângulo A é um polígono? Sim o triângulo A é um polígono. E a figura B é um triângulo? Não, por causa disto"*), que percebe a transformação da figura e sua não linearidade (*"Porém isso não acontece com a transformação G, onde não foram preservadas as características do triângulo A na figura B, que não é um polígono."*). Conclui a atividade deixando claras, conforme protocolo (Figura 12), as diferenças entre as transformações T e G. Finalizam a atividade percebendo a necessidade de um estudo mais aprofundado do tema. Consideramos muito interessante esse despertar, reconhecendo porém suas limitações.


d) O que diferencia a transformação ***T*** da atividade 1 da transformação ***G***?

Na transformação T são preservadas as características do retângulo A no retágulo B (ampliação), porém isso não acontece na transformação G, onde não foram preservadas as características do triângulo A na figu-ra B. (que não é um polígono)
T é um tipo de transformação que preserva a base e G não preserva.

Figura 12. Atividade 2 da dupla C.

Observamos que as três duplas conceituaram corretamente um polígono,

As duplas enunciaram o conceito de polígono, registraram justificando que a figura B não era um polígono e reconheceram que um dos lados da figura não respeitou a linearidade. Geometricamente, estabeleceram diferenças entre as transformações das atividades 1 e 2, porém nenhuma das três duplas colocou a diferença como sendo: "A transformação T é linear e a transformação G não linear". Demonstraram assim uma concepção-ação da atividade, segundo a teoria APOS.

Atividade 3

Nesta atividade, foi dado um quadro representando quatro transformações: a transformação linear J, cuja ação era de contração da figura; a transformação K, que fazia uma translação da figura: a transformação L, que provocava um cisalhamento da figura; e a transformação M, cujo efeito era a rotação em relação ao eixo dos *x*.

a) Observando cada uma das transformações do plano acima, como você as denominaria?

J:	**K:**
L:	**M:**

<u>Dupla A</u>

Eni: *Como será esse "denominaria"?*

Liu: *Não é para dizer se é injetora, sobrejetora, não?*

Eni: *Não, "denominaria" é dar nome.*

Liu: *Ou será que dar nome é dizer o tipo da transformação?*

Eni: *A transformação J diminuiu o retângulo.*

Liu: *De quanto?*

Eni: *Eu estou com vergonha de colocar assim: a J é uma redução.*

Liu: *Mas será que não é isso? Deveria poder tirar dúvida, mas não pode. Tipo assim: nós não entendemos o que é para fazer aqui.*

Eni: *Como eu vou denominar isso aqui?*

Liu: *Acho que deveria estar escrito assim: diga o tipo das transformações.*

Eni: *E que nome vamos dar? Vamos dizer que a transformação reduz, diminui, sei lá.*

No diálogo acima, a dupla mostra que não compreende bem o enunciado da atividade, chegando a sugerir um novo enunciado para a questão, porém observa os efeitos das transformações através das figuras. Segundo Eni: *“A transformação J diminuiu o retângulo”.*

Liu: *Vamos ver se nós conseguimos achar os termos*

Eni: *A J pega o par (0,0) e leva em (0,0) o ponto (1,1). Não é isso, não. Acho que vamos pegar esses pontos daqui (0,4), que foi levado para (0,2).*

Liu: *O (0,2) vai no (0,1). E (0,1) vai onde?*

Eni: *Eu só tenho mais uma ideia, que é: x-1 e y-2. Se eu pegar o ponto (2,4), vai para (1,2). Que outro ponto podemos pegar?*

Liu: *A metade, aí.*

Eni: *(1,2)? (1,2) vai em (0,0). E (1,2) aqui no gráfico? E não dá diferente.*

Liu: *(1,2) vai aqui, desceu tudo aqui.*

Eni: *E (1,4) está na transformação e (1,4) vai em (0,2) e (0,2) está na transformação.*

Liu: *É, (0,2) está na transformação. Vamos ver (1,3).*

Eni: *(1,3) vai em (0,1) e se nós pegarmos (1,1)...*

Liu: *(1,1) vai em (0,-1). Não está na transformação.*

Eni: *E o (0,2) vai em (-1,0). Também não está.*

Liu: *Teria que dar (0,1).*

Eni: *Então está errado.*

Liu: *Eu acho que pode ser que dividindo...*

Para denominar as ações das transformações, analisam ponto por ponto até perceberem que o que estão tomando como ação da transformação é falho e levantam novas suposições. Passo a passo, seguem as orientações.

Eni: *Dividir? (2,4) foi para quanto?*

Liu: *(1,2).*

Eni: *Acho que está errado.*

Liu: *Mas não dá numero negativo. Os pontos ficam no gráfico.*

Eni: *E o y?*

Liu: *O y dividido por 2 também, mas espere aí. Vai dar proporcional.*

Eni: *Já fizemos isso, mas vamos testar para ver se vai dar certo com (4,2) e (2,4). (2,4) vai em (1,2); (4,2) vai em (2,1); (0,0) vai em (0,0). Qual é o outro? (0,2) que vai em (0,1) está certo.*

Liu: *Agora está certo. Eu acho que temos que dizer se é redução, translação. Essa L tem um nome, só que eu não sei dizer.*

Eni: *Esta reduziu. Agora vamos ver a outra. Essa aqui é simétrica. E essa aqui, que inclina?*

Liu: *Ela tem nome, mas não sei dizer, e essa M é tipo um espelho.*

Eni: *Reflexão, então isso responde. Como você denominaria…*

Liu: *Acho que é o nome mesmo: redução, translação, inclinação e reflexão. Vamos colocar.*

Eni: *Então são esses os nomes.*

Liu: *Mas essa que está inclinada, que eu acho que a área está alterada, ela tem um nome.*

Eni: *Será que ela saiu do $\mathbb{R}^2$?*

Liu: *E foi para onde? Para o espaço?*

Eni: *Olhe o ponto: era (2,0), foi para (2,2). Você está vendo? Ela cresceu.*

Liu: *Mas esses pontos ficaram fixos.*

Eni: *A partir do (0,0) ela começou a crescer. Olha, não sei não. Vamos colocar inclinação.*

Elas testam as ações de cada uma das transformações J, K, L e M através de pontos e observando os gráficos. Na transformação J, buscam suas ações nos pontos dos vértices do gráfico, conforme fala de Eni: "*A J pega o par (0,0) e leva em (0,0) o ponto (1,1). Não é isso, não. Acho que vamos pegar esses pontos daqui (0,4), que foi levado para (0,2)*".

Em K e M identificam rapidamente uma translação e uma reflexão, fazendo uma observação gráfica. Na transformação L, Liu afirma que essa transformação tem um nome específico, mas não consegue lembrar-se e resolve chamá-la de inclinação: *"Mas essa que está inclinada, que eu acho que a área está alterada. Ela tem um nome"*. Eni fica intrigada se a ação da transformação L permanece em $\mathbb{R}^2$.

b) Encontre a forma de representação funcional de J e de M. Por exemplo:

J: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, J(x(1,0) + y(0,1)) = xJ(1,0) + yJ(0,1) = ...

Na atividade acima a dupla não teceu comentários e passou à atividade seguinte. Segundo a teoria APOS, as alunas demonstram estar numa fase-ação.

<u>Dupla B</u>

Bela: *Aqui houve uma duplicação*

Alice: *Aqui ele foi transladado, houve uma translação.*

Bela: *Ficou uma parte presa e outra foi esticada.*

Alice: *Houve uma rotação e aqui foi uma reflexão.*

Bela: *Então fica: a K é translação, a M reflexão, a L rotação. E essa J?*

Alice: *Não podemos falar aumento. Aumento é feio. Ela reduziu, ela foi reduzida. Então, redução.*

Bela: *Sim.*

Alice: *Mas não sei se o nome é esse.*

Bela: *Redução, mas não foi uma redução qualquer. Foi uma redução proporcional.*

De acordo com suas concepções e observação de cada figura, a dupla denominou as transformações, passando para o item *b* dessa atividade.

b) Encontre a forma de representação funcional de J e de M. Por exemplo:

J: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, J(x(1,0) + y(0,1)) = xJ(1,0) + yJ(0,1) = ...

Bela: *Encontre a forma de representação funcional de J e de M.*

A transformação J transforma em meio, não é?

Alice: *É. Reduziu à metade. No caso,* $\frac{1}{2}(x, y)$.

Bela: $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 = J(x, y) = J\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = xJ(1,0) + yJ(0,1) = x\frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}y(0,1)$.

Como fica essa M? Como vamos refletir isso aí?

Alice: *No caso só muda a imagem.*

Bela: *Vai para -1?*

$M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$M(x, y) = M\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = xM(1,0) + yM(0,1) = x(1,0) + y(0,1)$

Elas solucionam o item *b* algebricamente, sem maiores dificuldades, demonstrando no desenvolvimento da atividade um nível de concepção-objeto segundo a teoria APOS. E seguem para a atividade 4.

Dupla C

Pedro: *Homotetia, quando se obtém uma figura semelhante por redução ou ampliação.*

Cali: *Essa aqui é a transformação T. São as mesmas.*

Pedro: *É homotetia, não é isso que ele quer saber? Essa K é translação, porque na hora que você translada você tem isso aqui. A M fez uma rotação em torno do eixo x e essa L degenerou. O que é isso aqui? Uma transformação degenerada. Nossa!!*

Cali: *Eu não sei.*

Pedro: *É uma transformação que degenerou, degenerou sim, mas não coloque isso aí. Diga que nós não sabemos ou deixe em branco.*

Pedro, por sua observação (*"É homotetia, não é isso que ele quer saber? Essa K é translação, porque na hora que você translada você tem isso aqui. A M fez uma rotação em torno do eixo x e essa L degenerou. O que é isso aqui? Uma transformação degenerada. Nossa!!"*), denomina as transformações expressas através dos gráficos.

b) Encontre a forma de representação funcional de J e de M. Por exemplo:
J: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, J(x(1,0) + y(0,1)) = xJ(1,0) + yJ(0,1) = ...

Cali: *Não entendi esse item b.*

Pedro: *É só multiplicar por um escalar.*

Cali: *Vamos multiplicar como? Partindo desse xJ(1,0) + yJ(0,1)? E faz o quê?*

Pedro: *O escalar é* $\frac{1}{2}$*, daí fica x* $\left(\frac{1}{2},0\right)+y\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Essa M é uma translação fixa x e muda o sinal de y.

Cali: *M: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; xM(1,0) + yM(0,1) = x(1,0) + y(0,-1).*

Achei essas escritas feias. É assim mesmo?

Pedro: *Eu queria escutar isso aí depois. Eu ia rir muito.*

Olhe: alterou a base canônica, mas esses vetores formam uma base.

Cali: *Esse seu "altera base", me irrita, pois não me lembro de nada disso. Vamos para atividade 4.*

Pedro respondeu o item a e concluíram o item b, que segundo Pedro "É só multiplicar por um escalar [...]. O escalar é $\frac{1}{2}$, daí fica x $\left(\frac{1}{2},0\right)$+ y$\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Essa M é uma translação fixa x e muda o sinal de y".

Nesta atividade as duplas observaram e interpretaram as ações das transformações dadas e modelizaram as ações das transformações J e M. apenas uma das duplas chegou ao objeto da atividade. As demais encerraram com uma concepção-ação.

Atividade 4

Observando as transformações do plano das atividades anteriores, quais delas você classificaria como lineares?

<u>Dupla A</u>

Liu: *Essa aqui já não é, pois quando aplicada a (0,0) é diferente de zero.*

Liu utiliza mais uma vez o conhecimento da propriedade da transformação linear que diz: "Se uma transformação é linear, então leva vetor nulo do domínio e vetor nulo do contradomínio", como se essa fosse uma condição necessária e suficiente.

Eni: *E tem que justificar?*

Liu: *Sim. É porque...; não porque...*

Eni: *Mas como vamos justificar só usando o fato da aplicação em (0,0) ser igual a zero? Acho que também vamos precisar utilizar o fato da soma e* *multiplicação por escalar.*

Liu: *É para provar que é transformação? Então temos que verificar se satisfaz T(u+v) = T(u) + T (v) e T(αu) = αu (*).*

Eni: *Não é assim não. Será que podemos usar esse conhecimento?*

Percebe-se que, embora até esta atividade a informação sobre as condições da definição de uma transformação linear não tenha sido mencionada, a dupla já demonstra ter esse conhecimento, porém Eni não tem muita certeza se deve utilizá-lo.

Liu: *É, sim. Por exemplo, você chama u de (x_1,x_2) e v de (y_1,y_2) e verifica se a lei da transformação satisfaz a condição.*

Eni: *É, sim. Fica u+v = (x_1+ y_1, x_2 + y_2). Vamos verificar para todas. A primeira aplicação T é linear porque, além da imagem ser uma reta, satisfaz a condição (*).*

Elas passam a usar (*) em lugar de T(u+v) = T(u) + T(v) e T(αu) = αu.

Liu: *Já a aplicação G não satisfaz a definição (*) T(u+v) ≠ T(u) + T (v) e a J também é linear. A T tem até a resposta lá na frente.*

Eni: *A aplicação K dá para ver logo que não é linear porque T(0,0) ≠ (0,0), T(0,0) = (2,1). Não é linear.*

Essa é fácil. Nós percebemos logo. Vamos verificar se as outras duas também são.

Liu: *A transformação L é linear e a M também. O quadro vai ficar assim:*

A primeira é, a segunda não, a terceira é e a quarta não. A quinta e a sexta são lineares.

Transformações do plano: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	Linear é	Linear não é	Justifique
$T(x,y) = (2x, 2y)$	x		Além da imagem ser uma reta, satisfaz as condições (*)
$G(x,y) = (x, y^2)$		x	Não satisfaz a definição: $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$
$J(x,y) = (½x, ½y)$	x		(~~Não~~) Satisfaz (*)
$K(x,y) = (x+2, y+1)$		x	Não satisfaz $T(0,0) = (0,0)$, pois $T(0,0) = (2,1)$
$L(x,y) = (x, x+y)$	x		(~~Não~~) Satisfaz (*)
$M(x,y) = (x, -y)$	x		Satisfaz (*)

(*)

$T(u+v) = T(u) + T(v)$

$T(\lambda u) = \lambda T(u)$

Figura 13. Atividade 4 da dupla A.

Assim, de acordo com dados constantes no rascunho do protocolo da dupla, as alunas utilizaram as condições da definição de uma transformação linear para classificar as transformações em lineares ou não lineares. As estudantes analisam o comportamento das transformações dadas utilizando a definição de transformação linear, chegando ao objeto da atividade.

<u>Dupla B</u>

Bela: *Uma transformação é linear quando T(0,0) = 0 e quando a soma e a multiplicação por escalar ainda permanecem na transformação. Não é isso? T(0) = 0, isso aí eu sei.*

Aqui, por exemplo, não é linear, pois T(0) ≠ 0 vai ser (2,1).

Alice: *Então aqui também não vai ser, não.*

Bela: *Eu sei que a soma também tem que estar e a multiplicação por escalar também.*

Alice: *Tem que estar? Como assim?*

Bela: *Você tem, por exemplo: se pegar dois vetores aqui, u e v do $\mathbb{R}^2$. Se você pegar 2u, não.*

Se eu pegar um vetor v aqui eu digo que u = (2u,2v). Certo? Deus! É mais. Não é isso que eu quero dizer, não.

É assim: $u = (2u_1,2u_2)$ e $v = (2v_1,2v_2)$. E u+v vai ser quem?

Alice: *Você quer dizer T(v) + T(u).*

Bela define uma transformação linear pela propriedade, e em seu discurso apresenta concepções um tanto fragmentadas sobre as condições de linearidade (*"Uma transformação é linear, quando T(0,0) = 0 e quando a soma e a multiplicação por escalar ainda permanecem na transformação. Não é isso? T(0) = 0. Isso aí eu sei"*). Aparenta relembrar a definição de subespaço vetorial e faz uma fusão com o que se lembra da definição de transformação linear (*"Eu sei que a soma também tem que estar e a multiplicação por escalar também"*). Já Alice, em sua fala deixa subentendido compreender o que deve ser feito na atividade (*"Você quer dizer T(v) + T(u)"*). E prosseguem:

Bela: *Então:*

$u+v = (2u_1+2v_1,2u_2+2v_2) = 2(u_1+v_1) + 2(u_2+v_2) = T(u_1+v_1), T(u_2+v_2)$

Então isso aqui é linear, é uma transformação linear Falta testar a multiplicação por escalar α.

Lembrei agora: se pegarmos α2u = 2αu, porque αT = Tα, então aqui é uma transformação linear. Agora, pelo o que entendi aqui, é para você pegar o desenho e observar.

Alice: *Vamos testar para ver se esta é.*

Bela: *Vamos observar as figuras. Por exemplo, essa transformação levou essa figura nessa. Uma transformação, para ser linear, ela não tem que preservar? Tem que ter uma proporção, haver uma preservação, só muda se ela rotacionar, reduzir, ampliar, transladar. Acho que temos que testar as propriedades. Vamos ver o próximo item?*

A dupla demonstra um pouco de insegurança no que está observando e tentando registrar.

Bela: *É, temos que verificar essas condições*

Alice: *Eu prefiro verificar pela figura.*

A dupla está se referindo às condições da definição de transformação linear vista ao passar para a atividade seguinte.

Bela: V*eja como fica a soma para essa K, que sabemos que não é linear.*

Se nós pegarmos os pontos tipo (0,0) e (0,1).

Alice: *Nessa ou nessa?*

Bela: *Vamos supor que temos o par (1,2) e aplicamos essa transformação K. O que vai acontecer com esse par (1,2) ele vai dar em (3,3). Agora, se pegarmos o par (2,4), ele vai dar em (4,5). Não tem nada proporcional. Está vendo? Se pegarmos (3,6) vai dar par (5,7). Está acontecendo o quê? Aqui está seguindo um padrão e aqui também está.*

Alice: *Que padrão?*

Bela: *Aqui: não está aumentando de dois em dois e aqui de um em um?*

Bela busca encontrar uma regularidade na transformação K que responda ao fato de ela ser ou não linear (*"Vamos supor que temos o par (1,2) e aplicamos essa transformação K. O que vai acontecer com esse par (1,2) ele vai dar em (3,3). Agora se pegarmos o par (2,4)? Ele vai dar em (4,5). Não tem nada proporcional. Está vendo? Se pegarmos (3,6) vai dar par (5,7). Está acontecendo o quê? Aqui está seguindo um padrão e aqui também está"*). Alice não diz que está certo ou errado; apenas questiona a colega (*"Que padrão?"*), levando Bela a uma reflexão.

Alice: *Então não é. Vai ter que ser por T(u) + T(v) mesmo.*

Bela: *Eu acho que tem que preservar a figura.*

Alice: *Mas se for só para preservar a figura, essa preservou.*

Alice está se referindo à transformação K.

Bela: *Mas é uma transformação linear. Uma translação é uma transformação linear.*

Alice: *Observe o exemplo que pegou. Não foi a transformação K? E ela é linear?*

Bela: *Não, a K não é linear.*

Alice: *Você está dizendo que pra ser linear tem que preservar a figura e esse exemplo K preserva?*

Bela: *É, e agora? E essa M? Pela cara acho que não é.*

Alice: *Mas a M é. A reflexão é uma transformação linear.*

Alice, de forma sutil e pedagógica, vai contra-argumentando com Bela (*"Observe o exemplo que pegou. Não foi a transformação K? E ela é linear?* [...] *Você está dizendo que pra ser linear tem que preservar a figura e esse exemplo K preserva?"*), fazendo com que Bela perceba exemplos e contraexemplos de transformações lineares, tentando levar a colega da ação para o nível de processo. E, dessa forma, elas seguem classificando as transformações como lineares ou não lineares.

Bela: *Vamos pegar dois vetores aqui:* $u = (u_1, u_2)$ *e* $v = (v_1, v_2)$.

Então: $T(u) + T(v) = T(u_1, u_2) + T(v_1, v_2) = (u_1, u_2^2) + (v_1, v_2^2) =$
$= (u_1 + v_1 + u_2^2 + v_2^2)$*. Vamos ver se é igual a* $T(u+v)$*:*

$T(u + v) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (u_1 + v_1 , (u_2 + v_2)^2)$

Alice: *Vai dar diferente porque aqui é soma dos quadrados e aqui é quadrado da soma.*

Bela: *E essa a metade? Vamos ver se a soma é? Eu até me lembro que era no subespaço vetorial que o zero tinha que estar, eu me lembro da professora dizendo que tinha que verificar antes da soma se (0,0) estava.*

Bela, nesta última fala (*"E essa a metade? Vamos ver se a soma é? Eu até me lembro que era no subespaço vetorial que o zero tinha que estar, eu me lembro da professora dizendo que tinha que verificar antes da soma se (0,0) estava"*), deixa claro que está se relembrando de subespaço vetorial e, sem que perceba, essa memória está se fundindo à lembrança da definição de transformação linear e dificultando um pouco seu desempenho na atividade.

Alice: *Parece que esta não vai ser transformação. Sabe por quê? Porque quando fazemos uma translação a base muda e* $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$.

Bela: *Na verdade o gráfico só vai sair do lugar*

Alice: *Mas não é uma transformação.*

Bela: *E essa aqui está fixando o x e arrastando y, pegando alguém e somando com o y. Mas ela é uma transformação linear. Agora esta M, acho que não é, não.*

Vamos pegar T(u) + T(v).

$T(u) + T(v) = (u_1,-u_2) + (v_1,-v_2) = (u_1+v_1 , -u_2-v_2) = (u_1+v_1, -(u_2+v_2))$

$T(u+v) = T(u_1+v_1 , u_2+v_2) + (u_1+v_1, -(u_2+v_2))$ é linear.

Bela está se referindo à transformação L. Dessa forma, elas classificam e justificam se as transformações são ou não lineares (de acordo com a audiotranscrição e o protocolo). Alice aparenta na resolução desta atividade ter a capacidade de transformar, refletir, tornando-se consciente de quais processos podem ser utilizados, e chega ao objeto da atividade, segundo a teoria APOS, além de conduzir a colega.

Transformações do plano: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	Linear é	Linear não é	Justifique
$T(x,y) = (2x, 2y)$	X		Por ocorrer um aumento proporcional na figura.
$G(x,y) = (x, y^2)$		X	Pois, não a uma preservação nas características da figura.
$J(x,y) = (½\,x, ½\,y)$	X		Por ocorrer uma redução proporcional.
$K(x,y) = (x+2, y+1)$		X	Nesse caso, $t(u,v) \neq t(u)+t(v)$
$L(x,y) = (x, x+y)$	X		Por ocorrer uma rotação na figura.
$M(x,y) = (x, -y)$	X		Por ocorrer uma reflexão na figura.

Figura 14. Atividade 4 da dupla B.

Dupla C

Cali: *É preciso justificar todas?*

Pedro: *Sim, essa aqui e essa são lineares.*

Cali: *Por quê?*

Pedro: *Eu acho que ela é linear, pela expressão que define a transformação. Qual a função de uma transformação linear? Eu já respondi aqui: é, é e é. Essas são lineares. Toda transformação se apoia na base.*

Cali: *Sim, e agora essa justificativa. Eu não sei.*

Pedro: *É porque os elementos gerados pela imagem são do mesmo tipo?*

Cali: *Mas isso deve ser permitido. Isso não é um espaço vetorial?*

Pedro identifica, dentre as transformações, quais são lineares (*"Eu acho que ela é linear, pela expressão que define a transformação. Qual a função de uma transformação linear? Eu já respondi aqui: é, é e é. Essas são lineares."*), porém, quando questionado por Cali sobre as justificativas, não aparenta tanta desenvoltura. Isso significa que ele reflete sobre o objeto da atividade, mas não expressa como pode controlar as mudanças do objeto do item estudado. Assim, evidencia uma ação nessa atividade, de acordo com a teoria APOS.

Pedro: *O que a transformação faz com o vetor?*

Cali: *É assim: ela amplia, reduz, faz translações, rotações. Isso é uma justificativa?*

Pedro: *E essa quadrática aqui, deve ser porque ela não é linear, o que já é a resposta. O que isso significa?*

Cali: *Porque a imagem não é uma reta. Mas não é óbvio?*

Eles se referem à transformação G da atividade 2.

Pedro: *Porque uma transformação linear pode ser de um número limitado de tipos.*

Cali: *Será que nós justificamos apenas colocando o nome da transformação?*

Pedro: *Seria o quê? Justificar com o quê? Essa é linear e gera uma homotetia. Seria isso?*

Cali: *Gera uma ampliação, gera uma redução.*

Pedro: *Mas o que seria isso? Na verdade, o que todos esses tipos de transformação linear fazem? Ou o que elas não fazem? Elas preservam alguma coisa. Em minha opinião são dois casos de homotetia, dois de translação e uma rotação. Eu tenho certeza que uma transformação linear preserva alguma coisa. O problema é: o quê? O elemento gerado pode ser escrito como combinação linear nas mesmas bases do elemento de origem, se preservou.*

Cali: *Lá vem você outra vez com isso, você e essas bases preservadas. Eliana bem que poderia comentar com a gente. Tudo é a função, é a curva. Vamos para a próxima atividade. Eu pensei que isso fosse mais simples. Isso foi uma pegadinha, viu, Eliana?*

A dupla mostrou que observou as transformações e fez a classificação em linear e não linear, porém para justificar essa classificação os alunos conjecturaram e em seus diálogos observam-se as justificativas de uma ou outra transformação, conforme transcrição, mas não as registraram no protocolo.

Transformações do plano: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	Linear é	Linear não é	Justifique
$T(x,y) = (2x, 2y)$	X		homotetia
$G(x,y) = (x, y^2)$		X	
$J(x,y) = (½x, ½y)$	X		homotetia
$K(x,y) = (x+2, y+1)$	X		translação
$L(x,y) = (x, x+y)$	X		translação
$M(x,y) = (x, -y)$	X		rotação

Figura 15. Atividade 4 da dupla C.

O que eles registraram como justificativa foram os nomes das transformações, que julgaram ser as correspondentes. Percebe-se que Pedro conseguiu classificar, mas não conseguiu justificar para Cali por que as transformações são ou não lineares. Concluíram dizendo de que a pesquisadora estava fazendo uma "pegadinha" com a atividade e que deveria dar-lhes um retorno, o que comprova que só atingiram a ação nesta atividade.

No geral, as duplas A e B atenderam às expectativas desta atividade, chegando à concepção-processo. A dupla C atingiu o nível de ação sobre o objeto da atividade.

Atividade 5

Nesta atividade, pretendemos que as duplas utilizassem a definição de transformação linear para demonstrar suas propriedades.

Propriedades de transformações lineares que são consequência simples da linearidade: Consideremos as transformações lineares entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}$, T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $\forall$ u, u' $\in \mathbb{R}^n$. Então valem as seguintes propriedades:

i) $T(0,0,...0)_{\mathbb{R}^n} = (0,0,...0)_{\mathbb{R}^m}$

ii) $T(-u) = -T(u)$; $\forall$ u $\in \mathbb{R}^n$

Tentem demonstrar cada uma dessas propriedades.

<u>**Dupla A**</u>

Eni: *Vamos ter que demonstrar cada uma dessas propriedades na verdade.*

Liu: *Sai daqui: T(0,0,...0). A propriedade sai daqui.*

Eni: *É. Tem que mostrar que a soma disso é zero, daí demonstra. É mostrar que T(0) é igual a zero.*

Liu: *Tem que pegar um vetor aqui e mostrar que, se ele for zero, T(0) = 0, soma e pega vários vetores. Será que vai ser isso?*

Eni: *Se pegar um vetor assim: v = (2x,y+1,z + 3), e substituir x,y e z por 0, vai ter que dar zero, e nesse caso não dá zero.*

Liu: *Mas é a propriedade que diz que para ser transformação linear a transformação aplicada ao vetor (0,0) vai ser zero, independente da transformação. Nós não testamos na 1 e deu zero? Então já temos que pegar o vetor (0,0....,0).*

Eni: *Faça o que você está pensando.*

Liu: *Mas eu não sei escrever o que eu estou pensando.*

As alunas revelam ter entendimento do que fazer no item *i* da atividade 5, conforme diálogo acima, porém expressam dificuldade em fazer o registro escrito do que conjecturaram (Eni: *"Faça o que você está pensando".* Liu: *"Mas eu não sei* *escrever o que eu estou pensando".*). Elas não fizeram nenhum assentamento no protocolo e nem no rascunho deste item da atividade, ou seja, intuitivamente estabeleceram um processo, mas não o registraram. Passaram para a atividade seguinte e só depois, quando foram revisar as atividades, retornaram a esta, para desenvolvimento do item *ii*, com o seguinte diálogo:

Liu: *Vamos tomar*

$u = (x_1, x_2, ...x_n)$ e $–u = (-x_1, -x_2, ...-x_n)$ e provar que $T(-u) = -T(u)$.

Eni: *Você tem que levar –u a alguma coisa. Entendeu?*

Por exemplo: T(u) = 2u.

Liu: *Deixe-me concluir.*

Eni: *É isso mesmo.*

A dupla utiliza a condição T(αu) = αT(u) da definição de transformação linear e consegue demonstrar a propriedade (Figura 16). As alunas estabeleceram uma ação e um processo na resolução.

ii) Seja $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $-u = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$. Então

$$T(-u) = T(-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = T(-(x_1, x_2, \dots, x_n)) =$$
$$= -T(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= -T(u)$$

Figura 16. Atividade 5 da dupla A.

<u>Dupla B</u>

Alice: *E tem que provar tudo?*

Bela: *Não, é só os itens i e ii, as propriedades. Vamos fazer assim:*

Sejam $T:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, *com u e v* $\in \mathbb{R}^n$.

Queremos mostrar que $T(0,0,.....0)_{\mathbb{R}}{}^n = (0,0, ...0)_{\mathbb{R}}{}^m$.

Para provar isso devemos ter $u = (u_1, u_2,...., u_n)$.

$T(0,0,......0) = T(0+0+.....+0) = T(0,0,......0)_{\mathbb{R}}{}^n + T(0,0, ...0)_{\mathbb{R}}{}^m$

Agora me preocupei, porque ele está em $\mathbb{R}^m$.

Alice: *Se a transformação pega um cara do* $\mathbb{R}^n$ *e leva em* $\mathbb{R}^m$, *ele tem que estar contido naquele espaço. É muito óbvio, aí fica difícil de provar. Ela pega entradas n e leva em entradas m.*

Bela: *Então se eu pego um cara aqui, ele vai ser levado lá com entradas nele. Como foi ser somado aqui esse T(0,0,0.....,0) ele não está mais em n e sim em m. Então quando eu for somar já vai estar em m. Vamos deixar assim:*

$= (0,0, ...0)_{\mathbb{R}}{}^m + (0,0, ...0)_{\mathbb{R}}{}^m = (0,0, ...0)_{\mathbb{R}}{}^m$

Pelo fato de dados u e v $\in \mathbb{R}^n \rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v)$

(ii) Seja $u = (u_1, u_2,...,u_n)$

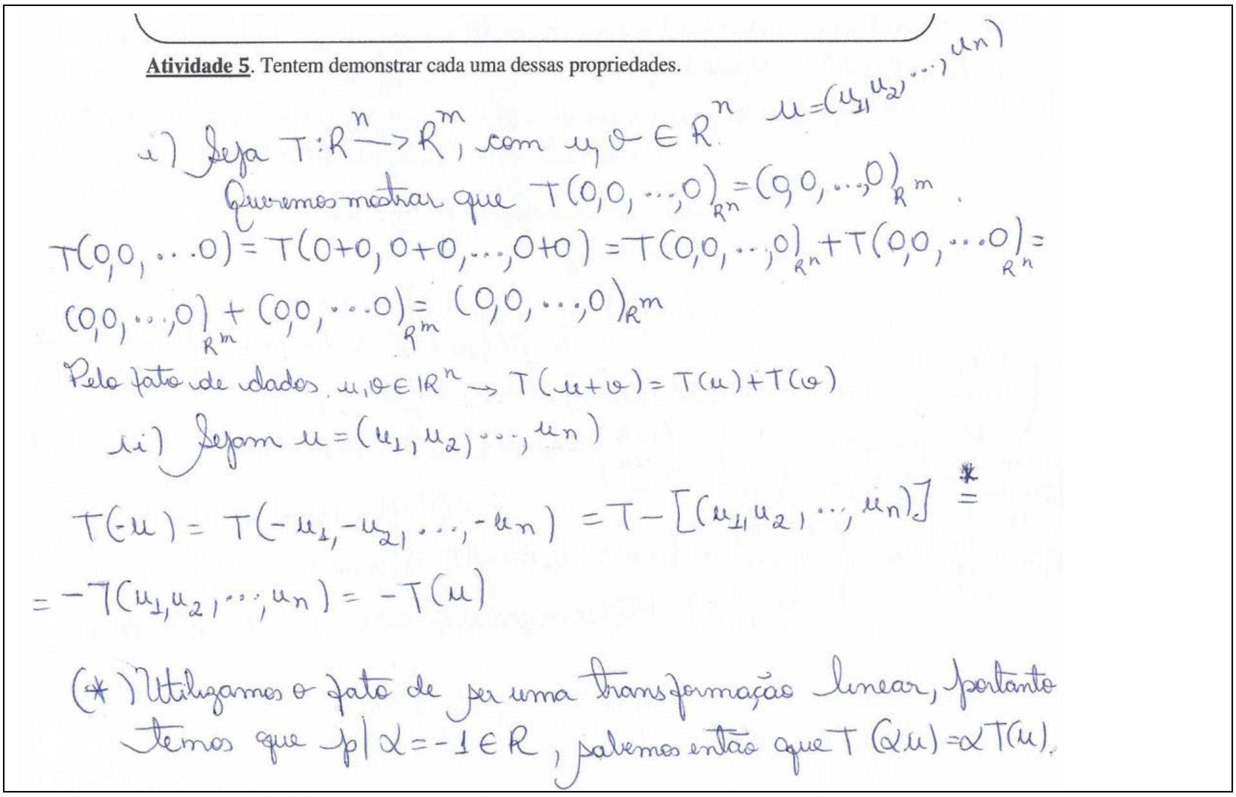
$T(-u) = T(-u_1, -u_2,...,-u_n) = T - [(u_1, u_2,...,u_n)] = -T(u_1, u_2,...,u_n) = -T(u)$

Como T é uma transformação linear, tem uma consequência $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Utilizando o fato de ser uma transformação linear, portanto, temos que para $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, *sabemos então que* $T(\alpha u) = \alpha T(u)$. *Então vale.*

Pelo menos não vamos passar tanta vergonha assim.

Esta dupla demonstra as propriedades utilizando as condições da definição de uma transformação linear, de acordo com o protocolo e a audiotranscrição. As alunas mostram-se preocupadas com avaliação da dupla na execução das atividades. Nesta atividade, Bela já demonstra mais desenvoltura.



Atividade 5. Tentem demonstrar cada uma dessas propriedades.

i) Seja $T: R^n \to R^m$, com $u, v \in R^n$ $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$

Queremos mostrar que $T(0,0,\dots,0)_{R^n} = (0,0,\dots,0)_{R^m}$.

$T(0,0,\dots 0) = T(0+0,0+0,\dots,0+0) = T(0,0,\dots,0)_{R^n} + T(0,0,\dots 0)_{R^n} =$

$(0,0,\dots,0)_{R^m} + (0,0,\dots 0)_{R^m} = (0,0,\dots,0)_{R^m}$

Pelo fato de dados $u, v \in \mathbb{R}^n \to T(u+v) = T(u)+T(v)$

ii) Sejam $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$

$T(-u) = T(-u_1,-u_2,\dots,-u_n) = T-[(u_1,u_2,\dots,u_n)] \overset{*}{=}$

$= -T(u_1,u_2,\dots,u_n) = -T(u)$

(*) Utilizamos o fato de ser uma transformação linear, portanto temos que p/ $\alpha=-1 \in R$, sabemos então que $T(\alpha u)=\alpha T(u)$.

Figura 17. Atividade 5 da dupla B.

Dupla C

Cali: *Aí, sim. Agora eu gostei. Olhe a explicação da transformação linear.*

Pedro: *É a definição de transformação linear.*

Cali: *E aqui está escrito: "preserva a linearidade" a adição e multiplicação por escalar.*

Cabe ressaltar que Cali mostrou-se irritada quando Pedro falava que "a transformação preserva". Então Cali se surpreende quando lê: preserva a linearidade, a adição e multiplicação por escalar.

Pedro: *Para provar isso, considera o vetor nulo:*

T(0,0,...,0) = T [(0,0,...,0) + (0,0,...,0)] = ...

Cali: *Não teria que verificar se T(u + v) = T(u) + T(v)?*

Pedro: *É, porque é para provar que T(0) = 0. Daí não precisa de dois vetores.*

Cali: *Minha cabeça não está processando isso, não. Eu não posso colocar 1 aqui?*

Pedro: *Nós estamos falando do vetor nulo, e a transformação leva o vetor nulo. num vetor nulo. Isso caracteriza a transformação linear e é isso que nós queremos mostrar. Vai, acredite nisso e vamos terminar de fazer. Utilize a propriedade da soma das transformações e escreva:*

... T(0,0,...,0) + T(0,0,...,0) = (0,0,...,0) + (0,0,...,0) = (0,0,...,0)

Cali: *Está provada a primeira? Eu não estou entendendo mais o que estou escrevendo. Isso aqui é o quê?*

Pedro: *A definição de transformação linear.*

Cali: *E isso é o quê?*

Fica evidente que Cali nesse momento não acompanha e não entende o desenvolvimento desta atividade, embora questione e demonstre vontade em entender: *"Minha cabeça não está processando isso, não. Eu não posso colocar 1 aqui?"*. Pedro, por sua vez, responde: "*Nós estamos falando do vetor nulo, e a transformação leva o vetor nulo. num vetor nulo. Isso caracteriza a transformação linear e é isso que nós queremos mostrar. Vai, acredite nisso e vamos terminar de fazer. Utilize a propriedade da soma das transformações e escreva* [...]*"*. Pedro, no desenvolvimento desta atividade, apresenta uma concepção-processo.

Pedro: *Propriedades de uma transformação linear.*

Cali: *Então eu não teria que utilizar essas duas condições?*

Pedro: *Para provar isso, usando essa informação.*

Cali: *Então eu não provei nada.*

Pedro: *Provou, sim. Vamos para próxima para ver se você entende:*

(ii) Seja u vetor de $\mathbb{R}^n$.

Os alunos desenvolveram o item *i* da atividade 5, ditada por Pedro e registrada por Cali. Pedro demonstra entendimento do que tinha que ser feito, mas não demonstra calma para explicar à colega, que repete não estar acompanhando o desenvolvimento da atividade.

Cali: *Está errado isso aqui. Não teria que ser dois vetores, u e v?*

Pedro: *Não. Só precisa de um.*

u = (x,y,...,z)

T(-u) = T[-(x,y,...,z)] = T(-1) (x,y,...,z) = (-1) T(u) = -T(u)

Não é isso?

Cali: *Não sei.*

Pedro: *Isso vale, sim, pois (-1) seria o α, o α sai, pois é um escalar. Então, pronto: vale. T(-u) = -T (u), mas é, está certo, utilizamos que a transformação da soma é igual à soma das transformações, e a outra condição. É isso.*

Cali: *Eu acho que nós utilizamos o que queríamos provar. Entende? Eu acho que teríamos que partir disso para chegar a isso e não foi isso que fizemos.*

Pedro: *Não tem outra forma para fazer isso aí. Vamos para outra atividade.*

A dupla conclui a atividade, atingindo um nível de processo no desenvolvimento da atividade.

Duas duplas demonstraram certo entendimento com a utilização da definição de transformação linear. Apenas uma das duplas deixou um item por fazer, mas conjecturou sobre ele. Nesse item, só a dupla A permaneceu na ação, não registrando o que conjecturou. As demais mostraram uma concepção-processo na atividade.

Atividade 6

Nessa atividade pretendemos que as duplas generalizassem a definição de transformação linear para espaços vetoriais quaisquer sobre $\mathbb{R}$.

Baseados nas definições e propriedades expostas anteriormente, considerando que U e V são dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$:

i) Defina transformação linear A: U→V

ii) Verifique se as transformações entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ são lineares:

1. A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; A(x,y,z) = (x+y,z)

2. $B: \mathbb{C} \to M_{3\times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}$ **(conjunto dos números complexos)**

$$\boldsymbol{B(x+yi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

<u>**Dupla A**</u>

Eni: *Vamos fazer o item 2 dessa atividade, que é mais fácil. Vamos verificar se A(0,0,0) = (0,0,0).*

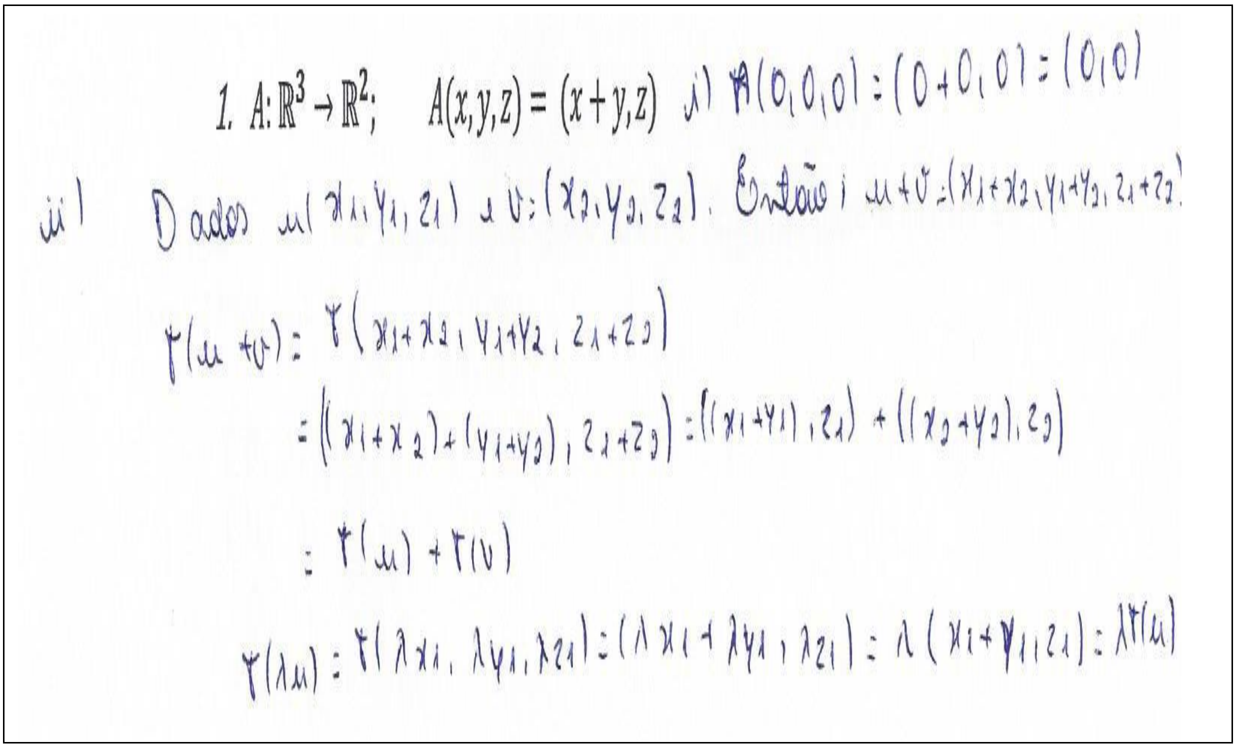
É verdade, pois A(0,0,0) = (0+0,0) = (0,0,0).

Vamos tomar u = (x_1, x_2, x_3) e v = (y_1, y_2, y_3) e vamos verificar se

T(u+v) = T(u) + T (v) e T(αu) = αu

Liu: *É está certo. E como foi verificado, é linear*.

Elas estão se referindo ao item *ii*-1 da atividade e registram no protocolo e no rascunho todo o desenvolvimento desse item (Figura 18).



1. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $A(x,y,z) = (x+y,z)$ i) $A(0,0,0) = (0+0,0) = (0,0)$

ii) Dados $u(x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Então: $u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), z_1+z_2) = ((x_1+y_1), z_1) + ((x_2+y_2), z_2)$

$= T(u) + T(v)$

$T(\lambda u) = T(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda(x_1+y_1, z_1) = \lambda T(u)$

Figura 18. Atividade 6-1 da dupla A.

Eni: *Vamos para a transformação B, que leva números complexos para matriz 3×1. Vamos tomar dois vetores e fazer a mesma coisa, verificando primeiro se B(0,+0i) = 0 e vale.*

E os vetores u = (x_1 + y_1i) e v = (x_2 + y_2i).

E vale T(u+v) = T(u) + T (v) e T(αu) = αu.

Então B também é linear.

Elas estão se referindo ao item *ii*-2 da atividade e registram no protocolo e no rascunho todo o desenvolvimento desse item. No item *ii* a dupla demonstra habilidade em verificar se as transformações dadas são lineares utilizando as condições de linearidade da definição de transformação linear. Até esse instante elas não se referem ao item *i*.

2. $B: \mathbb{C} \to M_{3\times1}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}$ (Conjunto dos nº Complexos)

$$B(x+yi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) $B(0+0i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

ii) Dados $u = x_1 + y_1 i$ e $v = x_2 + y_2 i$. Então, $u+v = [(x_1+x_2), (y_1+y_2)i]$

$$T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1 i + y_2 i) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1 i + y_2 i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 i \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= T(u) + T(v)$$

$$T(\lambda u) = T(\lambda x_1 + \lambda y_1 i) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda T(u).$$

Figura 19. Atividade 6-2 da dupla A.

Liu: *Vamos passar a limpo ou vamos pensar no que nós não fizemos?*

Eni: *Vamos pensar no que ainda não fizemos. Olha só aqui, na atividade 4: ela mesmo deu a resposta do que ela pediu.*

Liu: *É, mas, nós conseguimos fazer.*

No diálogo acima percebe-se que elas descobriram algo que fora pedido anteriormente, e a afirmação de Liu deixa subentendido que conseguiram êxito, mesmo sem terem visto a informação da atividade 4. Dando continuidade:

Eni: *Eu acho que vou pedir o resultado a ela* [pesquisadora].

Liu: *Eu acho que não fomos tão ruins. Comecei isso sem saber nada, mas...*

Eni: *É para vermos que as coisas ficam guardadas no nosso cérebro, que nós não usamos*

Liu: *Deixe-me rever essa definição de transformação linear. Olhe: essa redução aqui a professora vai entender, mas acho que a palavra não é essa, mas bota essa que nós sabemos.*

É interessante o anseio das alunas pela análise de seu desempenho. Ao mesmo tempo, mostram-se surpresas com a capacidade que tiveram em relembrar os conhecimentos. Preocupam-se com a avaliação que possam receber por não encontrarem uma palavra que julgam ser a mais adequada para uma denominação da transformação indicada.

Liu: *E essa outra aqui, que parece espelhado?*

Eni: *Essa não seria simetria? Veio na minha cabeça homotetia; a palavra está aqui, mas não consigo lembrar. Vejo o professor falando o nome correto. Vamos rever essa quinta atividade.*

Liu: *Observe: a imagem de uma função linear é uma reta. E os gráficos das transformações L e M são lineares, e além das imagens serem retas satisfazem as condições de linearidade:*

$T(u+v) = T(u) + T(v)$ *e* $T(\alpha u) = \alpha u$

Liu, ao revisar a atividade, mostra resumidamente que seu entendimento se deu em ação, processo e objeto.

Eni: *Defina transformação linear. Isso é repetição? Dados dois espaços vetoriais... Nós temos que conhecer os elementos desse e daquele espaço, porque aqui são números reais. Por que escrever essa definição se a definição é para todo mundo?*

Elas reveem as atividades e conferem suas respostas, item por item.

Liu: *Eu acho que é para escrever que uma transformação linear que vai de um espaço para o outro. Não é isso, não? E que vale as condições tal e tal?*

Eni: *Sim, mas ela quer agora que defina essa, porque diz que antes só tratou de espaços vetoriais* $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Liu: *Então como seria?*

Eni: *Acho que teria de conhecer os elementos, pois não diz se é vetor nem nada. Só diz que é espaço vetorial.*

Liu: *Então a definição está em $\mathbb{R}^n$.*

Eni: *Eu acho que é para um espaço qualquer que não seja $\mathbb{R}$. Porque para $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ valem as condições. E para isso aqui?*

No momento em que se referem ao item *i* da atividade 6, Eni acha que a definição de transformação linear é uma repetição e conclui que é preciso conhecer os elementos de um espaço para chegar à definição. Liu demonstra saber como generalizar a definição de uma transformação linear para qualquer espaço vetorial. Eni apresenta dúvidas com relação aos espaços vetoriais a serem considerados. Dessa forma, elas não conseguem registrar uma formalização da definição de transformação linear.

No desenvolvimento das atividades, percebe-se Liu mais comedida e observadora na execução das atividades, ao passo que Eni mostra-se mais prática e mais direta. De modo geral, elas demonstram clareza em suas atividades, vivenciando o nível de processo e em algumas situações chegando ao de objeto. Foi uma dupla equiparada em todas as atividades.

Ao entregar o protocolo da dupla, Eni comentou: "*Quando comecei a fazer essas atividades, pensei que não ia conseguir, mas aos poucos fomos relembrando e no final fiquei impressionada com o que lembrei".*

<u>Dupla B</u>

Bela expõe sua concepção sobre uma transformação A: U→V:

Bela: *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, definimos como transformação linear como sendo as aplicações que levam vetores pertencentes ao espaço vetorial U em vetores pertencentes ao espaço vetorial V.*

Embora não tenha levado em consideração as condições de linearidade da transformação A, Alice nada questionou com relação a essa definição.

Bela: *(ii)*

1. A: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; A(x,y,z) = (x + y, z)':

Já temos o costume de colocar T, não é?

Alice: *É, está intrínseco.*

Esse diálogo deixa evidente o condicionamento que existe em relação ao uso de simbologias. Normalmente utiliza-se T para indicar uma transformação, o que é constatado no diálogo da dupla.

Bela: *Para provar esse, só precisa provar a propriedade?*

Alice: *É a soma e o produto escalar.*

Bela: *Vamos usar apenas dois vetores de três coordenadas.*

Alice: *Dados* $u = (u_1,u_2,u_3)$ *e* $v = (v_1,v_2,v_3)$

$A(u+v) = A(u_1+v_1 ,u_2+v_2,u_3+v_3) = (u_1+v_1+u_2+v_2,u_3+v_3)$

$A(u)+A(v) = A(u_1,u_2,u_3)+A(v_1,v_2,v_3) = (u_1+u_2,u_3)+(v_1+v_2,v_3) =$
$= (u_1+v_1+u_2+v_2,u_3+v_3) = A(u+v) = A(u)+A(v)$

$A(\alpha u) = A(\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3) = (\alpha u_1,+\alpha u_2,\alpha u_3) = (\alpha(u_1,+u_2),\alpha u_3) =$
$= \alpha((u_1,+u_2),u_3) = \alpha A(u)$

2. $B(x+yi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Dados $u = (u_1+u_2i)$ *e* $v = (v_1+v_2i)$

$B(u+v) = B(u_1+v_1,u_2i+v_2i) = B(u_1+v_1,i(u_2+v_2)) = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

Bela: *Acho que de fato nós aprendemos álgebra linear:*

$\mathrm{B(u) + B(v) = B(u_1+u_2i) + B(v_1+v_2i)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

A soma de matrizes é de coordenada a coordenada.

Alice: *Se caísse um desse na prova, acho que não fazia.*

Bela: *Acho que fazemos, porque aqui não estamos com a tensão da prova.*

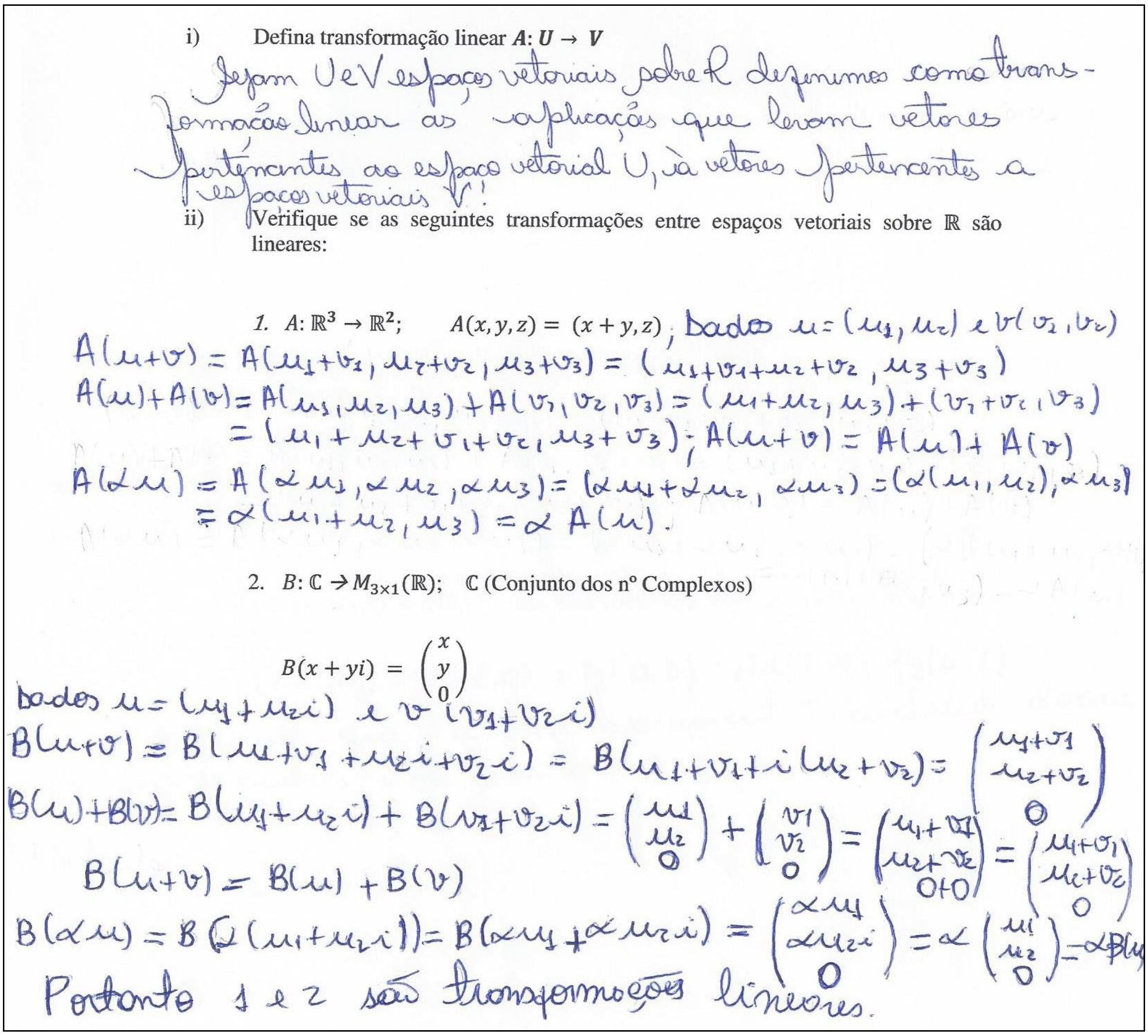
B(u+v) = B(u) + B(v)

$$B(\alpha u) = B(\alpha u_1 + \alpha u_2 i) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha\, u_2 i \\ 0 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha B$$

Portanto 1 e 2 são transformações lineares

Vamos da uma revisada. Se nesse item nós tivéssemos definido polígono como uma linha fechada simples, esse também seria um polígono.

Alice: *É verdade.*



i) Defina transformação linear $A: U \to V$

Sejam U e V espaços vetoriais sobre R definimos como transformação linear as aplicações que levam vetores pertencentes ao espaço vetorial U, à vetores pertencentes a espaços vetoriais V!

ii) Verifique se as seguintes transformações entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ são lineares:

1. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $A(x,y,z) = (x+y, z)$; Dados $u = (u_1, u_2)$ e $v(v_1, v_2)$

$A(u+v) = A(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) = (u_1+v_1+u_2+v_2, u_3+v_3)$

$A(u)+A(v) = A(u_1, u_2, u_3) + A(v_1, v_2, v_3) = (u_1+u_2, u_3) + (v_1+v_2, v_3)$

$= (u_1+u_2+v_1+v_2, u_3+v_3)$; $A(u+v) = A(u) + A(v)$

$A(\alpha u) = A(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) = (\alpha u_1 + \alpha u_2, \alpha u_3) = (\alpha(u_1, u_2), \alpha u_3)$

$= \alpha(u_1+u_2, u_3) = \alpha A(u)$.

2. $B: \mathbb{C} \to M_{3\times1}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}$ (Conjunto dos nº Complexos)

$B(x+yi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

dados $u = (u_1 + u_2 i)$ e v $(v_1 + v_2 i)$

$B(u+v) = B(u_1+v_1+u_2 i+v_2 i) = B(u_1+v_1+i(u_2+v_2)) = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B(u)+B(v) = B(u_1+u_2 i) + B(v_1+v_2 i) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B(u+v) = B(u) + B(v)$

$B(\alpha u) = B(\alpha(u_1+u_2 i)) = B(\alpha u_1 + \alpha u_2 i) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha B(u)$

Portanto 1 e 2 são transformações lineares.

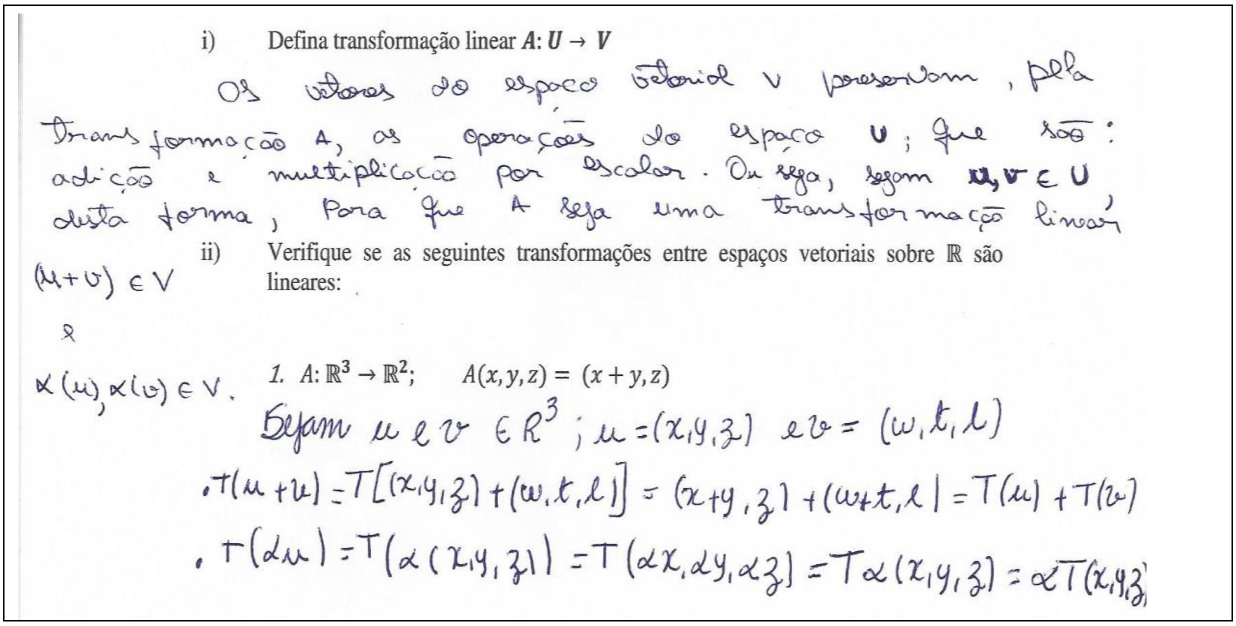
Figura 20. Atividade 6 (*i*, *ii*) da dupla B.

As duas alunas resolveram o item *ii* utilizando a definição de transformação linear, concluindo que aprenderam álgebra linear. Pontuam que se essa atividade fosse voltada à avaliação, talvez não a tivessem realizado com êxito. Isso sinaliza que uma avaliação (prova) pode influenciar o desempenho da atividade. Elas demonstraram satisfação na execução da atividade. De modo geral, Alice mostrou estar compreendendo bem a atividade. Bela se confundia um pouco, mas o companheirismo de Alice a foi conduzindo, permitindo-lhe fazer suas próprias construções e deduções. Quando ela se desviava, Alice a provocava, fazendo com que refletisse, assumindo uma postura pedagógica, atitude importante em sua formação. Em geral, neste protocolo podemos observar que Alice, na maioria das atividades, evidenciou ação, processo e objeto e Bela demonstrou ação e processo em algumas atividades.

<u>Dupla C</u>

Pedro: *O espaço vetorial V preserva pela transformação A as operações do espaço vetorial U. Seria isso? As operações são adição e multiplicação por escalar. Assim, sejam u, v ∊ U. Desta forma, para que A seja uma transformação linear, (u +v) ∊ V e (αu) ∊ V.*

De acordo com a audiotranscrição, o registro em protocolo abaixo (Figura 21) e o rascunho, percebe-se que Pedro chega a uma concepção de uma transformação linear A: U→V, mesmo equivocando-se com as condições da definição. Contudo, demonstra ação e processo. O mesmo não se observa em Cali. Fica implícito, de acordo com observações anteriores, que Cali não pôde conjecturar para que pudesse se expressar nesse item *i* da atividade 6.



i) Defina transformação linear $A: U \to V$

Os vetores do espaço vetorial V preservam, pela transformação A, as operações do espaço U; que são: adição e multiplicação por escalar. Ou seja, sejam $u, v \in U$ desta forma, para que A seja uma transformação linear,

$(u+v) \in V$

e

$\alpha(u), \alpha(v) \in V$.

ii) Verifique se as seguintes transformações entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ são lineares:

1. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $A(x,y,z) = (x+y, z)$

Sejam u e $v \in R^3$; $u = (x,y,z)$ e $v = (w,t,l)$

. $T(u+v) = T[(x,y,z)+(w,t,l)] = (x+y,z)+(w+t,l) = T(u)+T(v)$

. $T(\alpha u) = T(\alpha(x,y,z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = T\alpha(x,y,z) = \alpha T(x,y,z)$

Figura 21. Atividade 6 (*i*, *ii*) da dupla C.

Cali: *Ainda vamos ter que provar essas coisas da atividade 6. Na verdade eu tentei fazer. Olhe aqui:*

Sejam u e v ∈ $\mathbb{R}^3$; u = (x,y,z) e v = (w,t,l)

T(u+v) = t[(x,y,z) + (w,t,l)] =

Eu tenho dúvida aqui. Aqui eu já vou aplicar essa lei? Ou não?

(x+y, z) + (w+t, l) = T(u) + T(v). Isso já é T(u), T(v), achei muito rápido.

Pedro: *Achei que não provou nada.*

Cali: *Mas é isso que nós queremos: sair daqui e chegar aqui.*

Pedro: *Parece que está certo. Falta a multiplicação por escalar.*

T(αu) = T(α (x,y,z)) T(αx, αy, αz) = Tα (x,y,z) = αT (x,y,z)

Cali: *A mesma coisa vamos fazer com esse que envolve números complexos.*

Sejam u e v ∈ $\mathbb{C}$; u = (a+bi) e v = (c+di)

B(u+v) = B[(a+bi) + (c+di)] =

Pedro: *Você vai somar imaginário com imaginário e real com real, para depois aplicar a transformação.*

Cali: *Foi isso que eu lhe perguntei antes; no outro eu já apliquei a transformação.*

$$= B\,[(a+c) + (b+d)i] = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = B(u) + B(v)$$

$$B(\alpha u) = B[\alpha\,(a+bi)] = B[(\alpha a + \alpha bi)] = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha B(u)$$

No item anterior a transformação era A e eu coloquei T em tudo.

Pedro: *Acabamos, fiquei com uma sensação boa.*

Cali: *E eu fiquei até com saudades e a sensação de ter que estudar mais.*

No item *i* desta atividade Pedro enuncia a definição de transformação linear A: U →V como: "*O espaço vetorial V preserva pela transformação A as operações do espaço vetorial U. Seria isso? As operações são adição e multiplicação por escalar. Assim, sejam u, v ∊ U desta forma, para que A seja uma transformação linear (u +v) ∊ V e (αu) ∊ V".*

Ao iniciarem o item *ii* desta atividade, observa-se um desalinho na dupla, mas logo em seguida eles se reajustam e seguem harmoniosos no desenvolvimento da atividade. Cali já demonstra ter entendimento sobre o que fazer no item, com ação e processo. Assim seguem em boa sintonia, complementando a atividade e concluindo o protocolo. Pedro, aparentando rapidez de raciocínio, demonstrou um pouco mais de ação e processo no protocolo. Cali demonstrou maior cautela, permanecendo mais na ação. Um aspecto muito bom a ser comentado diz respeito às impressões deixadas pela dupla, que demonstrou satisfação em fazer o protocolo, enquanto Cali reafirmou a necessidade de continuar estudando o tema.

Em geral, as duplas verificaram satisfatoriamente se as transformações entre os $\mathbb{R}$ - espaços vetoriais dados são lineares, demonstrando entendimento das condições de linearidade. No entanto, apresentaram dificuldade em definir a transformação linear A: U→V. Duas das duplas deixaram claro que a dificuldade decorre do hábito de indicar a transformação pela letra T, como foi o caso da dupla B (*"Já temos o costume de colocar T, não é?"*) e da dupla A (Liu: *"Eu acho que é para escrever que é uma transformação linear que vai de um espaço para o outro. Não é isso, não? E que vale as condições tal e tal?"* Eni*: "Sim, mas ela quer agora que defina essa, porque diz que antes só tratou de espaços vetoriais* $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}$*. [...] Eu acho que é para um espaço qualquer que não seja* $\mathbb{R}$*. Porque para* $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}$ *vale as condições. E para isso aqui?"*). Isso deixa clara a dificuldade encontrada pelas duplas ao se defrontarem com uma notação tida como diferente da habitual.

Alice e Pedro, que participaram do curso em 2013, mostraram-se mais seguros no desenvolvimento das atividades, assumindo a liderança das discursões na maioria delas.

No contexto geral, as duplas entregaram protocolos que, de acordo com pressupostos da engenharia didática articulada com a teoria APOS, revelaram para a noção de transformação linear uma concepção em nível de processo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Nesta pesquisa buscamos investigar a concepção de transformação linear de alunos de licenciatura em matemática ao vivenciarem um curso de álgebra linear elaborado com a intenção de envolvê-los na busca de elementos para a construção desse objeto matemático. Para tanto, além das aulas com participação efetiva dos estudantes da turma, contamos como instrumentos de coleta de dados com os registros escritos e em áudio dos participantes, registros estes que, analisados com auxílio dos pressupostos da engenharia didática articulada à teoria APOS, nos permitiram concluir que, de acordo com nosso entendimento, nosso objetivo foi alcançado.

As aulas visaram envolver o grupo de alunos na busca por elementos para a construção da noção do objeto matemático em estudo. Esses alunos, que fizeram parte do curso em 2013, procuraram se envolver com as aulas investigando o tema em estudo, socializando seus achados. Essa proposta de envolvimento também vem respaldada pelo atendimento das solicitações iniciais dos alunos de verem mais aplicações do tema. Houve envolvimento de todos os alunos, que, agrupados em dois quartetos, proporcionaram a todos os envolvidos uma troca de conhecimentos. De acordo com suas apresentações, um quarteto se mostrou interessado nas aplicações das transformações lineares em áreas diversas; o outro, em aplicações algébricas e na parte histórica do tema em estudo.

Conforme a teoria APOS, o processo de construção dos conhecimentos matemáticos passa pelas seguintes etapas, segundo Dubinsky (1986): ação, processo, objeto e esquema. Nesta investigação focamos na construção da noção de transformação linear tomando como lastro os pressupostos dessa teoria.

As análises nos possibilitaram concluir que durante a execução das atividades propostas nossos pesquisados nem sempre demonstraram uma concepção-objeto no desenvolvimento das atividades, pois para a construção dessa concepção seria preciso que tivessem realizado as transformações necessárias por meio de dispositivos cognitivos que envolvessem ações sobre o objeto matemático em questão e concomitantemente apresentassem domínio no processo realizado. Ou seja, conforme comentam Machado e Bianchini (2012, p. 72), é preciso que o "estudante reflita sobre um processo e transforme o processo em objeto", situação em que "interpretamos que ele demonstra ter uma concepção objeto sobre aquela noção". Na análise, podemos observar que em uma mesma atividade, enquanto um componente da dupla mostrava uma concepção do tipo ação, processo ou objeto, o parceiro às vezes não chegava à concepção-ação. Em outras atividades, a dupla evidenciava ação e processo; em outras poucas vezes, a dupla chegava à concepção-objeto.

Vale ressaltar que os participantes fizeram todas as atividades propostas; apenas uma dupla deixou um item de uma das atividades em branco, porém registrou em áudio qual seria o processo de desenvolvimento desse item. A análise mostrou que as duplas, no desenvolvimento das atividades, demonstraram concepção-processo, de acordo com pressupostos da engenharia didática articulada com a teoria APOS. Houve atividades em que as duplas chegaram ao objeto, de acordo com a APOS, como por exemplo as duplas B e C na atividade 1. Constatamos também que as duplas, em seu processo construtivo de conhecimento de transformação linear, não conseguiram atingir um esquema; nesse sentido é pertinente citar Asiala *et al*. (1996), quando comentam que para a construção do esquema é preciso que os estudantes organizem de forma estruturada os conjuntos de processos e objetos. Salientam ainda que "os próprios esquemas podem ser tratados, como objetos e ser incluídos na organização de um esquema de nível superior" (p. 12). De modo geral, podemos concluir que os sujeitos pesquisados estão numa fase-processo da noção de transformação linear, de acordo a teoria APOS.

Este trabalho também nos permitiu, através da análise das concepções dos estudantes sobre a noção de transformação linear, identificar questões importantes na formação inicial do professor de matemática que, mesmo estando relacionadas à álgebra linear, podem também auxiliar na prática de professores de outras disciplinas. Os registros escritos e em áudio nos permitiram inventariar:

- como os participantes lidaram com as atividades propostas, bem como os desafios e as possibilidades de trilharem caminhos para a construção dos conhecimentos de transformação linear;
- o modo como pensaram e produziram suas estratégias e procedimentos;
- quais interpretações fizeram sobre seus enunciados;

- que conhecimentos utilizaram e que limitações demonstram;
- que os sujeitos pesquisados que participaram do primeiro momento deste trabalho demonstraram segurança na resolução das atividades, assumindo a condução do desenvolvimento destas.

As observações supracitadas podem auxiliar tanto a prática do professor em sala de aula como a aprendizagem dos estudantes, pois o trabalho em grupo favorece a troca de ideias para argumentação com os colegas e/ou para convencimento, o que favorece a construção e reconstrução dos conhecimentos matemáticos, além de fomentar reflexões sobre a metodologia utilizada para propor estudos sobre o tema em questão. Esperamos que este trabalho contribua para reflexões no âmbito da educação matemática, cabendo apontar novas perspectivas que emergem da pesquisa, como:

- Compreender como a motivação e autonomia dos estudantes nas aulas podem contribuir para o processo de construção dos conhecimentos matemáticos.
- Quais as principais fragilidades apresentadas pelos estudantes acerca da noção de linearidade nos cursos de licenciatura em matemática?
- Que fatores contribuem para geração de distorções, equívocos e lacunas na estruturação do pensamento, dificultando a memória relativa acerca das noções matemáticas trabalhadas?
- Como o trabalho em grupo pode contribuir para minimizar as dificuldades na construção dos conhecimentos de transformação linear?

Enfim, sinto que não concluí e que estou mergulhada em (in)conclusões, pois as questões apresentadas nesta investigação suscitam possíveis continuidades, temas a serem investigados futuramente. No entanto, considero que o estudo muito contribuiu para minha itinerância acadêmico-profissional, por se configurar como pertinente ao âmbito do ensino superior e ensino médio, pois possibilita refletir sobre uma temática e sobre o processo de “ensinagem” da matemática – neologismo este cunhado por Anastasiou (2004) para atribuir um sentido a uma prática de ensino da qual necessariamente decorra a aprendizagem, sendo para tanto fundamental a parceria entre professor e alunos. Esta investigação contribui para a constituição dessa parceria, bem como para refletirmos sobre o currículo dos cursos de licenciatura em matemática.

Referências

ASIALA, M. *et al*. *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. 2004. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2015.

ASIALA, M. *et al.* A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In: KAPUT, J.; SHOENFELD A. H.; DUBINSKY, E. (Eds.). *Research in collegiate mathematics education.* 2. V. [s.l.]: American Mathematical Society, 1996. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2015.

AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BANCHOFF**,** T.; WERMER, J. *Linear algebra through geometry*. New York: Springer, 1992.

BARDIN, L**.** *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

BOLDRINI, J. L. *et al. Álgebra linear* . São Paulo: Harbra, 1980.

CALLIOLI, C. *et al. Álgebra linear e aplicações* . São Paulo: Atual, 1990.

CARVALHO, J. P. *Álgebra linear:* introdução. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

DORIER, J.-L. État de l'art de la recherche en didactique : a propos de l'enseignement de l'algébre linéaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 18, n. 2, p. 191–230, 1998.

________. *On the teaching of linear algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, J.-L. *et al*. On a research program about the teaching and learning of linear algebra in first year of french science university. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology*, v. 31, n. 1, p. 27-35, 2000.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. *Advanced mathematical thinking.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

DUBINSKY, E. *Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level.* 1997. Disponível em: <http://.math.kent.edu/~edd/linearalgebra.pdf>. Acesso em: 4 abr. 2015.

________. Reflective abstraction in advanced nathematical thinking. In: TALL, D. *Advanced Matematical Thinking.* Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 231 - 250

DUBINSKY E.; LEWIN, P. Reflective abstraction and math.education: the genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior*, 5 v., n. 1, p. 55-92, 1986.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A., Contribuições para um repensar... a Educação Algébrica Elementar: *Pro-Posições* Vol. . Nº 1 1993.

FURTADO. A. L. C. *Dificuldades na aprendizagem de conceitos abstratos de álgebra linear.* 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

HALMOS, R. P. *Espacios vectoriales finito-dimensionales*. México: Continental, 1965.

HAREL , G. *Three principles of learning and teaching mathematics*. In: DORIER, J. L. (ed.). On the teaching of Linear Algebra. Dordrecht: Kluwer, 2000.

HERSTEIN**,** I. N. *Tópicos de álgebra*. São Paulo: Polígono, 1970.

HOFFMAN**,** K.; KUNZE, R. *Álgebra linear*. São Paulo: Polígono, 1970.

KARRER, M. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria*: um estudo sobre as transformações Lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. Tese de (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006

LIMA, E. L. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra linear*. São Paulo: McGraw-Hill, 1994.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: Pedagógica e Universitária, 2013.

MACEDO. R. S.. *Um rigor outro sobre a qualidade na pesquisa qualitativa:* educação e ciências humanas. Salvador: Edufba, 2009.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. *Noções básicas de álgebra linear: o que revelam as pesquisas do GPEA?* In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., *Anais…* Brasilia, DF, 2009.

______. A álgebra linear e a concepção de transformação linear construída por estudantes de EAD. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática,* Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 69-89, 2012.

MACHADO, S. D. A.; *et al*. *Educação Matemática.* São Paulo: EDUC, 2010.

MOLINA, J. G.; OKTAÇ, A. *Concepciones de la Transformación Linear en contexto Geométrico*. RELIME, Mexico, v. 10, n. 2, p. 241-273, julio, 2007.

OLIVEIRA, L. C. B. *Como funcionam os recursos-meta em aula de álgebra linear?* 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

OLIVEIRA, V. C. A. de. *Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear***.** 2002. 187 f. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.

POOLE, D. *Álgebra linear*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

PRADO, E. de A. *Alunos que completaram um curso de extensão em álgebra linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial*. 2010. 186 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

QUEIROZ, D. T. *et al*. Observação participante na pesquisa qualitativa: conceitos aplicações na área da saúde. *Revista Enferm UERJ*, Rio de Janeiro, v. 15, n. 2, p. 276-283, abr.-jun. 2007. Disponível em: <http://www.facenf.uerj.br/v15n2/v15n2a19.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2013.

SHOKRANIAN, S. *Uma introdução à álgebra linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

SILVA, A. M*. Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática.* 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Algebra linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SZYMANSKI, H.; ALMEIDA, L. R.; PRANDINI, C. A. R. *A entrevista na pesquisa em educação*. Brasília, DF: Líber Livro, 2004 (Série Pesquisa em Educação, 4).

THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. São Paulo: Cortez**,** 2011.

UHLIG, F. *Transform linear algebra.* New Jersey: Prentice-Hall, 2002.

Anexo A

1ª TCLE

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu,____

RG________________________, aceito participar como colaborador (a) da pesquisa de doutorado de Maria Eliana Santana da Cruz Silva, sob orientação da Dra. Maria Célia Carolino Pires. Tenho conhecimento de que o objetivo da pesquisa de doutoramento é: Investigar propostas de trabalho que apontem possibilidades de como o componente curricular Álgebra Linear pode contribuir na formação docente no curso de licenciatura em Matemática do Campus da UNEB.

Declaro que estou ciente de que a pesquisadora utilizará nomes fictícios a fim de evitar minha identificação. Dou meu consentimento na gravação do que falar sobre o assunto de Álgebra Linear durante as aulas do curso, e estou ciente de que posso retirar meu consentimento à gravação a qualquer momento, sem sofrer prejuízo.

Alagoinhas, ... de.................... 2013

Assinatura:

M. Eliana S. da Cruz Silva

Tel. (71)88488992 Dra. M. Celia C. Pires

Anexo B

2ª TCLE

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu,____

RG__________________________, aceito participar como colaborador (a) da pesquisa de doutorado de Maria Eliana Santana da Cruz Silva, sob orientação da Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado. Tenho conhecimento de que o objetivo da pesquisa de doutoramento é: Investigar propostas de trabalho que apontem possibilidades de como o componente curricular Álgebra Linear pode contribuir na formação docente no curso de licenciatura em Matemática do Campus da UNEB.

Declaro que estou ciente de que a pesquisadora utilizará nomes fictícios a fim de evitar minha identificação. Dou meu consentimento na gravação do que falar sobre o assunto durante a sessão proposta para ocorrer durante duas horas. Estou ciente de que posso retirar meu consentimento à gravação a qualquer momento, sem sofrer prejuízo.

Alagoinhas,.....de...................2015

Assinatura:

M. Eliana S. da Cruz Silva Dra. Silvia Machado

Cel.: 988488992

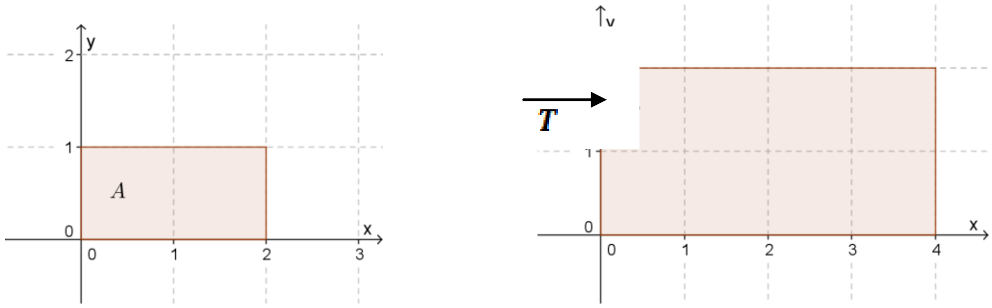
Anexo C

Atividades sobre transformações do plano

Atividade 1

Observe a figura 1 abaixo, onde T representa uma função do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$ cuja ação transforma o retângulo A no retângulo B.

Figura 1



Assim, $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$*, e a imagem indica que* $\boldsymbol{T}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = (\mathbf{2},\mathbf{0})$*. Encontre a imagem dos vértices do retângulo:*

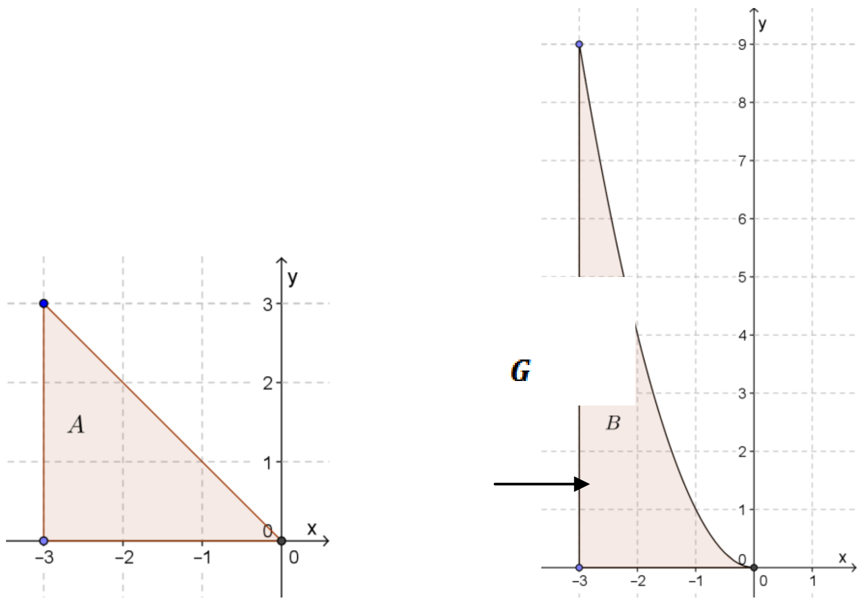
$\boldsymbol{T}(\mathbf{0},\mathbf{0}) =$ ....
$\boldsymbol{T}(\mathbf{2},\mathbf{0}) =$ ....
$\boldsymbol{T}(\mathbf{0},\mathbf{1}) =$ ....
$\boldsymbol{T}(\mathbf{2},\mathbf{1}) =$ ....

Lembrando que $\{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$ *é uma das bases do* $\mathbb{R}^2$*, e que então, o vetor* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *do* $\mathbb{R}^2$*, pode ser escrito como* $\boldsymbol{x}(\mathbf{1},\mathbf{0}) + \boldsymbol{y}(\mathbf{0},\mathbf{1})$*, faça uma conjectura sobre qual seria a imagem dessa transformação.*

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:

Atividade 2

Figura 2:



Assim, $\boldsymbol{G}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^2)$ ao atuar sobre o triângulo $\boldsymbol{A}$ de vértices :

$V_1 = (-3,3)$; $V_2 = (0,0)$ e $V_3 = (-3,0)$ transforma o triângulo $\boldsymbol{A}$ na figura $\boldsymbol{B}$.

a) Como você define polígono?

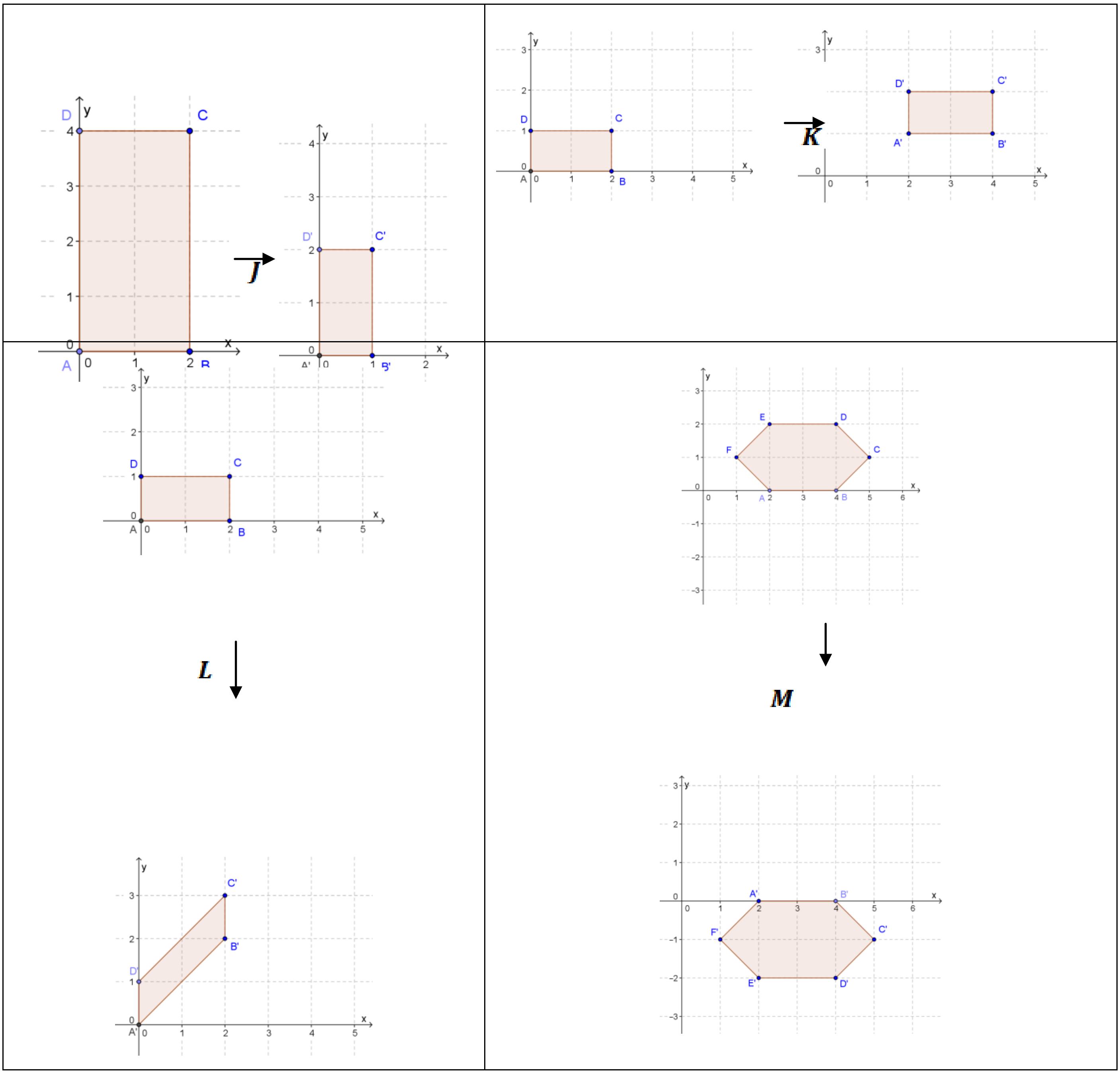
b) O triângulo A é um polígono?

c) A figura $\boldsymbol{B}$ obtida pela ação da transformação $\boldsymbol{G}$ sobre o triângulo $\boldsymbol{A}$ é um triângulo? Justifique sua resposta.

d) O que diferencia a transformação $\boldsymbol{T}$ da atividade 1 da transformação $\boldsymbol{G}$?

Atividade 3

Observe as seguintes transformações do plano:



c) Observando cada uma das transformações do plano acima como você as denominaria?

J:	*K*:

L:	M:

d) Encontre a forma de representação funcional de $\boldsymbol{J}$, e de $\boldsymbol{M}$, por exemplo:

$$\boldsymbol{J}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{J}(x,y) = \boldsymbol{J}\big(x(1{,}0) + y(0{,}1)\big) = x\,\boldsymbol{J}(1{,}0) + y\,\boldsymbol{J}(0{,}1) = \cdots$$

Atividades sobre transformações lineares

Sabemos que todo conjunto $\mathbb{R}^n$, com $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Dentre as funções estudadas na Educação Básica constam funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ denominadas:

Função linear: $\boldsymbol{F}$, dada por $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, com os parâmetros $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

Função quadrática: $\boldsymbol{G}$, dada por $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$, com os parâmetros $a \neq 0,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

Assim, a imagem de uma função linear é uma reta, e a imagem de uma função quadrática é uma curva (não reta).

Consideremos as funções do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$, chamadas de **transformações do plano**, lembrando que $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Atividade 4

Observando as transformações do plano das atividades anteriores, quais delas você classificaria como linear?

Transformações do plano: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	Linear é	Linear não é	Justifique
$T(x,y) = (2x\,,2y)$			
$G(x,y) = (x,y^2)$			
$J(x,y) = (\,½\,x, ½\,y)$			
$K(x,y) = (x+2, y+1)$			
$L(x,y) = (x, x+y)$			
$M(x,y) = (x,-y)$			

Dados dois espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}$, dizemos que a transformação $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear se:

iii) $\forall\, u, u' \in \mathbb{R}^n \qquad T(u + u') = T(u) + T(u')$

iv) $\forall\, u \in \mathbb{R}^n \;\; e \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad T(\alpha u) = \alpha \cdot T(u)$

Essas duas condições para que uma **transformação** entre espaços vetoriais seja considerada **linear** indicam que a transformação preserva **a linearidade.**

Em outras palavras: a transformação preserva as operações do espaço vetorial: a adição $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}')$ e a multiplicação por escalar $(\alpha \cdot \boldsymbol{u})$**.**

Propriedades de transformações lineares que são consequências simples da **linearidade:**

Consideremos as transformações lineares entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}$**,**

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **,** com $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathbb{R}^n$ então valem as seguintes propriedades:

iii) $\boldsymbol{T(0, 0, \ldots 0)_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots 0)_{\mathbb{R}^m}}$

iv) $\boldsymbol{T(-u) = -T(u)}; \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Atividade 5

Tentem demonstrar cada uma dessas propriedades.

Atividade 6

Até aqui, estivemos tratando apenas com os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$**.** No entanto existem vários outros espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$**,** como o conjunto dos vetores da geometria analítica, o conjunto das matrizes reais $m \times n$, o conjunto dos números complexos, etc.

Baseados nas definições e propriedades expostas anteriormente, considerando que $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ são dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$,

iii) Defina transformação linear $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{U} \rightarrow \boldsymbol{V}$

iv) Verifique se as seguintes transformações entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ são lineares:

3. $T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\quad T_1(x, y, z) = (x + y, z)$

4. $T_2: \mathbb{C} \rightarrow M_{3\times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}$ (Conjunto dos nº Complexos)

$$T_2(x + yi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$