NILZE SILVEIRA DE ALMEIDA

UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO MATEMÁTICA-EPISTEMOLÓGICA COM PROFESSORES DO SEGUNDO GRAU

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de

MESTRE EM MATEMÁTICA

à Comissão Julgadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da Profª. Dra. Michéle Artigue e com co-orientação da Profª. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos.

PUC - SP
1992

Comissão Julgadora

Tânia Maria Meampi

[signature]

Paulo Figueiredo Lima

R E S U M O

Nilze Silveira de Almeida

O objetivo deste trabalho é a análise didática de um curso ministrado a professores do primeiro e segundo graus, que denominamos "Sobre os Números Complexos".

Nesse curso, procuramos evidenciar que o ensino da Matemática não visa simplesmente a transmissão de conhecimentos matemáticos, mas também a de uma cultura, acreditando que a identificação das concepções históricas estudadas nos ajudam a interpretar certas respostas de nossos alunos e a compreender sua coerência.

Nesta perspectiva, tentamos restituir a historicidade de um grande número de questões fundamentais através da leitura e análise de textos originais de D'Alembert, De La Chapelle, Euler e Argand, relativos às quantidades imaginárias. Tais textos e suas respectivas traduções se encontram no Apêndice deste trabalho.

Reunindo a seguir o estudo histórico e o ensino atual dos números complexos, mostramos as diferentes aplicações desses números em outros campos da Matemática.

Cada capítulo do trabalho é referente, respectivamente, a cada uma das sete aulas por nós ministradas durante o primeiro semestre de 1990.

O que conta não é o que fazemos, nem a quantidade do que fazemos, mas o amor que pomos em nossos atos.

«Madre Tereza de Calcutá»

Ao meu marido

Lafaiete

Aos meus filhos

Fabio

Cynthia

A G R A D E C I M E N T O S

Na orientação segura da Profa. Dra. Michéle Artigue, *encontrei a certeza de estar desenvolvendo de modo adequado meu trabalho; portanto, a ela reservo o meu reconhecimento esperando ter correspondido à confiança depositada.*

Agradeço à Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos, *que abriu caminho para minhas pesquisas e incentivou-me durante o decorrer de todo o trabalho.*

Sinto-me agradecida à minha mãe Nair *e à* minha prima Eunice, *que como instrumentos de amor, de união e de despreendimento, me cercaram de carinho e trabalharam por mim, permitindo que eu tivesse tempo e tranquilidade para progredir em meus estudos.*

Estou grata a cada amigo, a cada colega, *que me disse a palavra certa na hora adequada, que me incentivou, que em mim confiou, para que eu sentisse mais segurança e com firmeza chegasse à meta desejada.*

A Autora.

S U M Á R I O

UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO MATEMÁTICA-EPISTEMOLÓGICA COM PROFESSORES DO SEGUNDO GRAU

INTRODUÇÃO.

No primeiro semestre de 1990, um grupo de professores de primeiro e segundo graus iniciou um curso de especialização, no Centro de Ciências Matemáticas, Físicas e Tecnológicas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, intitulado "Sobre os Números Complexos", que teve como objetivo principal o enfoque da Teoria dos Números Complexos sob um ponto de vista didático-epistemológico, a nível do segundo grau. O curso teve a duração de sete semanas, sendo dadas 4 horas-aulas semanais.

- "Por que transportar a realidade histórica em termos de didática e, de um modo mais geral, no ensino da matemática?"

A resposta a esta questão aparecerá na análise final do curso, quando vê-se então que os professores alteram sua postura de ensino, após tomarem conhecimento dos processos através dos quais se formam e se desenvolvem os conceitos matemáticos, particularmente, em relação aos números complexos.

Através da análise de textos históricos foi possível mostrar as diferentes representações dos números complexos usadas pelos autores, bem como suas respectivas aplicações; isto nos permitiu relevar a importância de sua aplicação a novas técnicas de resolução de problemas não formulados no contexto.

São várias as razões que motivaram a escolha do assunto a ser tratado:

- o conhecimento, através da Professora Doutora Michéle Artigue, de um trabalho realizado nesta direção no IREM (Institute de Recherches d'Enseignement des Mathématiques) da Universidade de Paris VII;
- o fato de que a teoria dos números complexos, a nível do 2º grau, ser pouco desenvolvida;
- o fato do assunto ser conhecido e, ao mesmo tempo, desconhecido para os professores;
- o fato da história ser rica e, entretanto, não muito difícil de ser abordada; em particular, ela pode levar os professores a tomar consciência do desenvolvimento envolvido pela troca de pontos de vista e as limitações do ensino usual.

A metodologia usada no decorrer do curso foi desenvolvida através de aulas expositivas, leitura e análise de textos em grupos, com posterior apresentação de conclusões.

Vamos apresentar aqui, por semana, um resumo do trabalho realizado:

1ª SEMANA

Antes do início do curso propriamente dito, foi aplicado um questionário (Capítulo I) que objetivava conhecer melhor os professores com os quais seriam desenvolvidos os trabalhos. As questões propostas referiam-se aos métodos de resolução de uma cúbica, noções básicas da teoria dos números complexos, o papel da história no ensino e ao trabalho dos professores como profissionais.

Ainda nesta aula, abordou-se um pouco a História da Matemática a fim de que todos pudessem ter uma maior visão da importância da "descoberta" dos números complexos e como sua existência permitiu o desenvolvimento de novas teorias, tanto em Análise como em Álgebra. Para isso, foi usado um texto para leitura, extraído do livro "Une histoire des Mathématiques" – A. Dahn-Dalmedico / J. Peiffer – e feitas algumas citações do livro "História da Matemática" – C. Boyer.

2ª SEMANA

Primeiramente fêz-se uma revisão dos conceitos básicos da teoria dos números complexos, já que as respostas ao questionário aplicado na aula anterior mostraram a necessidade de tal. Foram apresentados de forma resumida os conceitos de conjugado, módulo e argumento (nas representações cartesiana e geométrica), as operações de adição, multiplicação e divisão (nas formas algébrica e trigonométrica), raiz quadrada na forma algébrica, potenciação e radiciação na forma trigonométrica e a interpretação geométrica das raízes da unidade.

A seguir, foi apresentada uma atividade preliminar sob a forma de duas questões:

1) Mostrar que a resolução das equações do 3º grau se reduz à das equações da forma $x^3 + qx + r = 0$.

2) Pelo estudo das funções da forma $x \longmapsto x^3 + qx + r$, determinar o número de raízes reais da equação $x^3 + qx + r = 0$, segundo os valores de q e r.

Como nenhum dos professores presentes respondeu às questões dessa atividade, fomos levados a dar uma explicação detalhada sobre o assunto (Capítulo II).

Esta atividade tinha por objetivo auxiliar na compreensão do texto a ser estudado na aula seguinte.

3ª SEMANA

Nesta aula foi apresentado um texto de D'Alembert ("Cas Irredutible" – séc. XVIII – extraído da Encyclopédie de Diderot e D'Alembert) para leitura e posterior resposta a um questionário no qual cada questão era referente a uma parte do texto. Para a realização desse trabalho, os professores foram divididos em grupos de três, a fim de facilitar a compreensão do texto e responder ao questionário. Nesta parte houve a necessidade da nossa intervenção, de maneira expositiva, para detalhar alguns trechos do texto e ajudar nas respostas do questionário (desenvolvimento de $(a + bi)^{1/3}$, expressão de $\cos 3\theta$ em função de $\cos \theta$) (Capítulo III).

4ª SEMANA

A atividade desta aula foi a análise dos três textos seguintes:

- um extrato do "Traité des sections coniques" de De La Chapelle (1765);
- um extrato dos "Élèments d'Algèbre" de Euler (1760);
- o artigo "Imaginaire" de D'Alembert, na Encyclopédie Méthodique (1751-1772).

O objetivo da leitura e análise desses textos era que os professores percebessem a concepção das quantidades imaginárias ou números imaginários, ou impossíveis, por aqueles matemáticos, bem como eles manipulavam esses números e o símbolo $\sqrt{-1}$, dentro de um quadro exclusivamente algébrico, usando para isto uma extensão das propriedades dos números reais.

Foram formados grupos de três professores para a leitura dos textos, para os quais se propôs uma análise através de um questionário, cujas respostas foram dadas oralmente por um único elemento do grupo. As conclusões, por grupo, foram anotadas no quadro-negro e debatidas por todos os presentes (Capítulo IV).

Percebeu-se nesta aula um grande interesse de todos os professores, cremos que motivados pela riqueza e facilidade de compreensão do conteúdo apresentado, sob o ponto de vista matemático.

5ª SEMANA

Nesta aula foi feita a leitura de um texto histórico de M. Argand (1813), publicado nos "Annales de Mathématiques", t. IV, p. 133-147, sob o título "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques".

O uso deste texto teve como objetivo principal mostrar aos professores a maneira como Argand introduz a representação geométrica das quantidades imaginárias, bem como suas aplicações em trigonometria (no cálculo de cos (a+b), sen (a+b), cos a - cos b e sen a - sen b) e o uso do que ele chama "linhas dirigidas" (lembrando que, naquela época, ainda não era conhecida a estrutura de espaço vetorial).

A leitura do texto foi igualmente feita em grupos de três professores, tendo sido necessária nossa intervenção para esclarecer alguns pontos nas aplicações da teoria introduzida (ítens 8 e 9 do texto em questão).

Após a leitura, foi aplicado um questionário, no qual as perguntas envolviam a interpretação do texto e aplicações do quadro geométrico introduzido. Os professores, de um modo geral, sentiram dificuldade para responder às questões propostas, conforme mostrará a análise feita ao final do capítulo referente a esta semana (Capítulo V).

6ª SEMANA

O tema abordado nesta aula foi "Aplicações dos números complexos à resolução de problemas não formulados neste contexto".

O assunto foi apresentado de maneira expositiva, introduzindo inicialmente as perspectivas construtivistas do processo de aprendizagem (Teoria do equilíbrio cognitivo de Piaget) e o seu papel na resolução de problemas e depois, no caso dos números complexos, procurando atingir nossos objetivos particulares, ou sejam,

1º) **Objetivos didáticos**

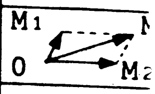
- evidenciar o desenvolvimento usado em diferentes campos no tratamento atual dos números complexos e os desenvolvimentos causados pelas mudanças de quadros (R. Douady);
- evidenciar os mecanismos gerais da resolução de problemas (estratégias gerais) e também o fato de que eles não são eficazes se não estiverem ligados ao conhecimento no campo (Polya; Schoenfeld).

2º) **Objetivos matemáticos**

- diferenciar a fase de resolução das fases de formulação e redação, que visam a comunicação a outros;
- melhorar a capacidade de resolução de problemas no campo dos números complexos.

A seguir, foram explicitados os quadros algébrico e geométrico com as representações seguintes e destacado, sobre alguns exemplos, o papel das escolhas dos quadros e representações, bem como a troca de representações envolvidas na resolução de um problema.

QUADRO ALGÉBRICO (Q.A.)

registro conceito	intrínsico z	cartesiano $a+bi$	exponencial $\rho e^{i\theta}$	pontual M	vetorial $\vec{v}$
conjugado	$\bar{z}$	$a-bi$	$\rho e^{-i\theta}$	M'	
adição	z_1+z_2	$(a+c)+(b+d)i$	$\rho_1 e^{i\theta_1}+\rho_2 e^{i\theta_2}$		
multiplicação	$z_1 \cdot z_2$	$ac-bd+(ad+bc)i$	$\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$		
módulo	$\lvert z\rvert=(z\bar{z})^{1/2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$	ρ	$d(0;M)$	$\lVert\vec{v}\rVert$
argumento	α	$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	θ	$(\widehat{\overrightarrow{OX};\overrightarrow{OM}})$	$(\widehat{\overrightarrow{OX};\vec{v}})$

QUADRO GEOMÉTRICO

- representações: pontual e vetorial
- igualdade de comprimentos; translação; rotação; homotetia; semelhança; simetrias; ortogonalidade; alinhamento; etc...

Como exemplos, foram dados os seguintes problemas, para serem resolvidos mediante a aplicação da teoria dos números complexos:

I. Considere-se um triângulo qualquer e sejam α, β e γ os seus ângulos internos que se opõem aos lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, respectivamente. Usando a teoria dos números complexos, mostre que:

1) $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$ (teorema das projeções)

2) $\dfrac{b}{\text{sen } \beta} = \dfrac{c}{\text{sen } \gamma}$ (lei dos senos)

3) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ (lei dos co-senos)

II. Determinar a equação da reta pelos pontos $A(-2;\ 1)$ e $B(0;\ -1)$.

III. Provar que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio.

IV. Mostrar que $2 \cdot \cos \frac{2\pi}{9}$ é raiz da cúbica $x^3 - 3x + 1 = 0$.

O objetivo desses exemplos era evidenciar as aplicações dos números complexos em outros campos e o jogo de quadros envolvidos em sua resolução. Em todos os exemplos foram executadas três fases:

- apresentação de uma estratégia de resolução;
- resolução propriamente dita, pelo professor;
- análise da resolução (escolha de representações, troca de quadros, dificuldades encontradas), pelos professores-alunos.

Propôs-se então uma atividade para ser desenvolvida em casa, na qual os professores, divididos em grupos de três, deveriam apresentar os resultados na semana seguinte, mediante uma exposição oral.

O objetivo dessa atividade era verificar o que os professores conseguiriam desenvolver por si mesmos e se haviam assimilado o processo de aprendizagem ensinado.

Como os problemas propostos eram de difícil resolução e envolviam outros campos (Geometria Analítica e Geometria Plana), foi sugerido que, em caso de dúvidas, os professores nos procurassem para esclarecê-las no decorrer da semana seguinte, antes de sua exposição oral.

7ª SEMANA

Durante esta semana fomos procurados por todos os elementos dos grupos. As resoluções exigiram nossa intervenção em todas as fases a serem desenvolvidas, citadas no ítem anterior.

Superadas as dificuldades, os resultados foram bastante satisfatórios, conforme mostraremos em análise posterior (Capítulo VII).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como encerramento do curso, foi aplicado um questionário para a avaliação do que foi ensinado, no qual foram propostas as seguintes questões:

- Se você já ensina ou vai ensinar os números complexos, o curso feito irá alterar sua organização atual? E como?
- Quais são, para você, as coisas verdadeiramente importantes na teoria dos números complexos?
- O que foi ensinado mudou a sua visão da Matemática?
- Que sugestões você daria para melhorar este ensino?

A análise das respostas a estas questões (Capítulo VIII) nos levaram a concluir que, de um modo geral, os professores presentes pretendem alterar sua postura no que se refere ao ensino dos números complexos no curso secundário.

C A P Í T U L O I

Este capítulo é referente à análise da primeira aula do curso dado.

Preliminarmente foi aplicado o seguinte questionário, cujos objetivos já foram definidos na Introdução (1ª semana):

Q.1. Que métodos vocês conhecem que possibilitam resolver uma cúbica?

Q.2. Como vocês colocam a seus alunos a importância do estudo dos números complexos?

Q.3. Vocês acham importante a análise epistemológica no ensino da matemática?

Q.4. Resolva os seguintes problemas:

São dados os números complexos $v = 2 - 2i$ e $w = -\sqrt{3} + i$.

a) Calcular $v + w$, $v - w$, $v \cdot w$ e $v \cdot w^2$;

b) Determinar o menor número natural n, tal que w^n seja um imaginário puro;

c) Determinar os pontos M_1 e M_2, de afixos v e w, respectivamente;

d) Determinar a forma trigonométrica de v e w;

e) Representar e interpretar geometricamente v + w e v · w.

I.1. ANÁLISE A PRIORI DAS QUESTÕES PROPOSTAS

Q.1.

Esta questão teve por objetivo verificar o preparo de cada um para a leitura e compreensão da ficha III anexa (Caso Irredutível).

Para a resolução de uma cúbica, dispõe-se dos seguintes métodos:

- Exato: Método dos radicais

$$x^3 + qx + r = 0 \iff x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} \quad (1)$$

Observação.

▫ Esta fórmula, que tem o nome de "Fórmula de Cardano", foi por ele publicada em 1545.

▫ Se $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} > 0$, demonstra-se que a cúbica admite uma única raiz real, dada pela expressão (1).

□ Se $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} < 0$, a fórmula de Cardano não tem sentido, entretanto pode-se mostrar que, neste caso, a cúbica admite três raízes reais.

■ Aproximados: métodos numéricos, métodos gráficos.

Observação.

□ Pode-se ainda tentar reduzir a cúbica a uma equação do 2º grau, verificando se a equação admite raízes racionais: "Se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $mdc(p,q) = 1$, é raiz da equação com coeficientes inteiros $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, então $p|d$ e $q|a$".

Mas, neste caso, não temos aqui um método de resolução para as cúbicas.

Q.2.

Esta questão foi colocada para que suas respostas fossem comparadas às respostas de outro questionário a ser aplicado ao término do curso, para então verificar se os professores alteraram sua postura em relação ao ensino dos números complexos.

As respostas esperadas para tal questão deveriam ser, entre outras,

□ Na problemática do cálculo das raízes de índice par de números negativos; a resolução das equações do 2º grau;

□ Na divisão ideal da circunferência em n partes iguais; as raízes n-ésimas da unidade;

- Como meio de representar vetores;

- Como instrumento para facilitar a resolução de problemas;

- Para auxiliar a dedução de fórmulas em Trigonometria (cos (a ± b), sen (a ± b), sen a ± sen b, cos a ± cos b, lei dos senos, lei dos co-senos, teorema das projeções, cos $n\theta$ e sen $n\theta$);

- Para auxiliar a resolução de problemas e demonstrações de teoremas da Geometria Plana (como exemplos, entre outros, determinação de comprimentos, paralelismo, perpendicularismo, rotação, translação, homotetia);

- Para aplicações em Geometria Analítica (como por exemplo: equações de reta, circunferência e elipse);

- Aplicações na Física, particularmente no estudo de Eletricidade e Eletromagnetismo.

Q.3.

Esta questão teve por objetivo sondar as opiniões de cada professor sobre o assunto, em virtude do que será abordado no decorrer do curso.

Acreditávamos que a maior parte dos professores não sabia o significado da palavra "epistemologia", entretanto as suas respostas seriam um importante resultado de comparação ao término do curso.

Q.4.

Com este tipo de questão pretendia-se diagnosticar os conhecimentos básicos de cada um sobre a teoria dos números complexos.

a) O esperado para este ítem seriam resoluções apenas dentro de um quadro algébrico, ou seja,

$$v + w = (2 - 2i) + (-\sqrt{3} + i) = 2 - \sqrt{3} - i$$

$$v - w = (2 - 2i) - (-\sqrt{3} + i) = 2 + \sqrt{3} - 3i$$

$$v \cdot w = (2 - 2i)(-\sqrt{3} + i) = -2\sqrt{3} + 2i + 2i\sqrt{3} - 2i^2 =$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} + (2 + 2\sqrt{3})i$$

$$v \cdot w^2 = (2 - 2i)(-\sqrt{3} + i)^2 = (2 - 2i)(3 + i^2 - 2\sqrt{3}i) =$$
$$= (2 - 2i)(2 - 2\sqrt{3}i) = 4 - 4i\sqrt{3} - 4i + 4i^2\sqrt{3} =$$
$$= (4 - 4\sqrt{3}) - (4 + 4\sqrt{3})i$$

Entretanto, o cálculo de $v \cdot w$ e $v \cdot w^2$ pode ser feito dentro de um quadro trigonométrico, ou de um quadro exponencial:

$$v = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ou

$$v = 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$w = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

ou

$$w = 2e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$$

Logo,

$$v \cdot w = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \cdot \mathrm{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$$

ou

$$v \cdot w = 4\sqrt{2}e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{7\pi}{12}}$$

e, como

$$w^2 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \mathrm{sen}\frac{5\pi}{3}\right) \text{ ou } w^2 = 4e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}},$$

temos

$$v \cdot w^2 = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i \cdot \mathrm{sen}\frac{17\pi}{12}\right)$$

ou

$$v \cdot w^2 = 8\sqrt{2}e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right)} = 8\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{17\pi}{12}}$$

Quadro Algébrico utilizado:

- registro cartesiano: $a + bi$
- conceitos de $\begin{cases} \text{adição: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i \\ \text{multiplicação: } (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i \end{cases}$

e mais, no caso dos cálculos de $v \cdot w$ e $v \cdot w^2$, destacados:

- registro trigonométrico: $\rho(\cos\theta + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta)$

■ conceitos de $\begin{cases} \text{módulo: } \rho = \sqrt{a^2+b^2}; \text{ argumento: } \theta \\ \text{multiplicação: } z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \\ \qquad + i\cdot \text{sen}(\theta_1+\theta_2)) \\ \text{potenciação: } z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\cdot\text{sen } n\theta) \end{cases}$

ou

■ registro exponencial: $\rho e^{i\cdot\theta}$

■ conceitos de $\begin{cases} \text{módulo: } \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{argumento: } \theta \\ \text{multiplicação: } z_1\cdot z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \text{potenciação: } z^n = \rho^n e^{i\cdot\theta n} \end{cases}$

b) Esperava-se que a resolução deste ítem fosse feita de três modos:

1º) Para cada n ∊ ℕ, calcula-se o desenvolvimento do binômio $w^n = (-\sqrt{3} + i)^n$, até obter-se o resultado desejado:

$n = 0 \Longrightarrow (-\sqrt{3} + i)^0 = 1$

$n = 1 \Longrightarrow (-\sqrt{3} + i)^1 = -\sqrt{3} + i$

$n = 2 \Longrightarrow (-\sqrt{3} + i)^2 = 3 - 2i\sqrt{3} + i^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

$n = 3 \Longrightarrow (-\sqrt{3} + i)^3 = -3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3}i^2 + i^3 = 8i$

Logo, min n = 3.

Foi usado aqui apenas o Quadro Algébrico:

■ registro cartesiano: a + bi

- conceitos de $\begin{cases} \text{adição: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i \\ \text{multiplicação: } (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i \\ \text{imaginário puro: } z \in \mathbb{C} \text{ é imaginário puro} \iff \\ \qquad \iff Re(z) = 0 \text{ e } Im(z) \neq 0 \end{cases}$

<u>Observação</u>.

Este modo de resolução, sem dúvida alguma mais usual, tem a desvantagem de, em certos casos, ser impraticável. Por exemplo, se tivéssemos que calcular $(-\sqrt{3} + i)^{191}$, para obter a resposta procurada.

2º) Para o uso deste método de resolução é necessário que se saiba passar da forma cartesiana para a forma trigonométrica.

$$w = -\sqrt{3} + i \implies w = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i\cdot \text{sen } \frac{5\pi}{6}) \implies$$

$$\implies w^n = 2^n(\cos \frac{5n\pi}{6} + i\cdot \text{sen } \frac{5n\pi}{6})$$

w^n é imaginário puro $\iff \cos \frac{5n\pi}{6} = 0 \iff \frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Como $k = \frac{5n-3}{6} \in \mathbb{Z}$, então min $n = 3$.

Quadro Algébrico utilizado:

- registro trigonométrico: $\rho(\cos \theta + i\cdot \text{sen } \theta)$
- conceitos de $\begin{cases} \text{potenciação: } w^n = \rho^n(\cos n\theta + i\cdot \text{sen } n\theta) \\ \text{imaginário puro: } z \in \mathbb{C} \text{ é imaginário puro} \iff \\ \qquad \iff Re(z) = 0 \text{ e } Im(z) \neq 0 \end{cases}$

Observação.

Este método apresenta a desvantagem de não poder ser utilizado quando o argumento do número complexo em questão não for um ângulo conhecido. Nesse caso, seria necessário o uso de tabelas trigonométricas.

3º) Como $\arg w^n = n\cdot\arg w$, temos que $\arg w^n = n\cdot\frac{5\pi}{6}$ e, w^n é imaginário puro $\Longleftrightarrow n\cdot\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Logo, $k = \frac{5n-3}{6} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \min n = 3$

Quadro Algébrico utilizado:

- propriedade: $\arg w \ = n\cdot\arg w$
- conceito de imaginário puro

c) Este ítem, de fácil resolução, exige apenas que se faça uma troca de registros: do cartesiano (a+bi) para o geométrico (representação pontual)

$$v = 2 - 2i \Longrightarrow M_1 = (2;\ -2)$$

$$w = -\sqrt{3} + i \Longrightarrow M_2 = (-\sqrt{3};\ 1)$$

d) Neste ítem, pede-se explicitamente que se faça a troca de registros: do cartesiano (a+bi) para o trigonométrico ($\rho(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\ \theta)$). Vamos apresentar dois modos de resolução:

1º)

$$v = 2 - 2i \Longrightarrow |v| = 2\sqrt{2};\ \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e sen } \theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w = -\sqrt{3} + i \Longrightarrow |w| = 2;\ \cos\theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e sen } \theta' = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$v = 2\sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\cdot\text{sen}(-\tfrac{\pi}{4})) \text{ e } w = 2(\cos\tfrac{5\pi}{3} + i\cdot\text{sen}\tfrac{5\pi}{3})$$

2º)

$$v = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\cdot\text{sen}(-\tfrac{\pi}{4}))$$

$$w = -\sqrt{3} + i = 2(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}) = 2(\cos\tfrac{5\pi}{3} + i\cdot\text{sen}\tfrac{5\pi}{3})$$

Observa-se que o 1º modo é feito através do uso das fórmulas para o cálculo do módulo e do argumento, enquanto que o 2º é desenvolvido de maneira mais prática, exigindo um maior desembaraço para utilizá-lo.

Em ambos os casos, foi utilizado somente o Quadro Algébrico:

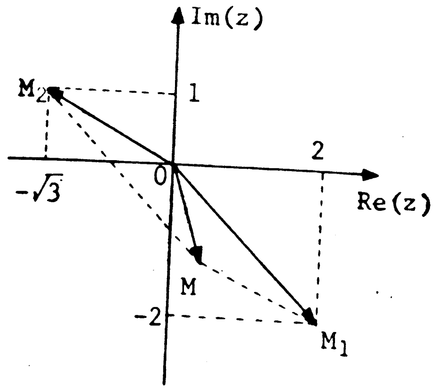
- conceito de $\begin{cases} \text{módulo: } \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{argumento: } \theta \end{cases}$

e) A resolução esperada para este ítem era a seguinte:

Adição

$v = 2 - 2i \Longrightarrow M_1 = (2; -2)$

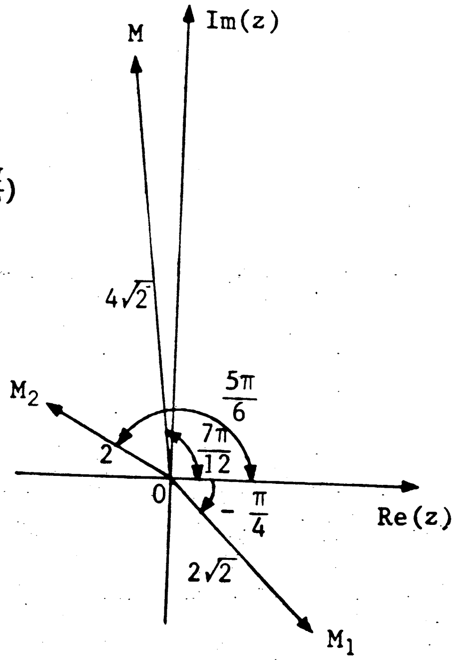
$w = -\sqrt{3} + i \Longrightarrow M_2 = (-\sqrt{3}; 1)$



A soma v + w é representada geometricamente pela soma vetorial dos vetores $\vec{OM}_1$ e $\vec{OM}_2$, representantes de v e w, respectivamente.

Multiplicação

$$\left.\begin{array}{l} v = 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} \\ \\ w = 2e^{i(\frac{5\pi}{6})} \end{array}\right\} \Longrightarrow v \cdot w = 4\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$



O produto v · w é representado geometricamente pela rotação do vetor $\vec{OM}_1$ de um ângulo de $\frac{5\pi}{6}$ rad, seguida de uma homotetia de centro O e razão igual a 2.

Usou-se para a resolução deste ítem apenas o Quadro Geométrico seguinte:

- Representação pontual: M_1, M_2, M_{v+w}, $M_{v \cdot w}$
- Representação vetorial: $\vec{OM}_1$, $\vec{OM}_2$, $\vec{OM}_{v+w}$, $\vec{OM}_{v \cdot w}$
- Soma vetorial
- Rotação
- Homotetia

I.2. ANÁLISE DAS RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO I, QUESTÃO POR QUESTÃO

Q.1.

As respostas dadas a esta questão foram:

- não conhecem qualquer método (7 professores);
- relações entre raízes e coeficientes (11 professores); (A)
- teste das raízes racionais (7 professores); (B)
- fazem uso dos métodos (A) e (B) (5 professores).

As respostas obtidas nos levaram a concluir que todos os professores desconhecem os métodos mais gerais de resolução de uma equação, já que os únicos métodos citados (A e B) só permitem resolver uma equação sob determinadas condições:

(A): além das relações entre as raízes e os coeficientes, deve haver uma condição adicional

(B): a equação deve ter coeficientes inteiros e só são determinadas as raízes racionais (se existirem).

Alguns professores alegaram desconhecer qualquer método pelo fato de não ministrarem aulas no 2º grau há algum tempo.

Q.2.

Distinguem-se aqui as seguintes respostas:

- não destacam a seus alunos a importância de tal assunto (12 professores);

- destacam que após tal estudo será sempre possível obter um conjunto-solução para as equações do 2º grau; (A) (9 professores);
- destacam sua importância nas aplicações em Física; (B) (4 professores);
- destacam (A) e (B); (2 professores);
- não opinaram, pelo fato de nunca terem lecionado no 2º grau (3 professores).

A alegação dos 12 professores, não destacarem a importância do estudo dos números complexos, foi justificada por eles pelo fato do assunto ser ministrado ao final do 3º colegial, quando, na ânsia do cumprimento do programa, não lhes sobra tempo para tal.

<u>Q.3.</u>

A resposta unânime a este ítem foi: não sei.

Esta resposta justifica-se pelo fato de todos os professores desconhecerem o significado da palavra "epistemologia", fato este que já era por nós previsto.

<u>Q.4.</u>

a) Este ítem foi respondido com facilidade por todos os professores, sendo que a resolução foi feita algebricamente, como se segue:

$$v + w = (2-2i) + (-\sqrt{3} + i) = 2 - \sqrt{3} - i$$

$$v - w = (2-2i) - (-\sqrt{3} + i) = 2 + \sqrt{3} - 3i$$

$$v \cdot w = (2-2i)(-\sqrt{3} + i) = -2\sqrt{3} + 2i + 2i\sqrt{3} - 2i^2 =$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} + (2 + 2\sqrt{3})i$$

Para o cálculo de $v \cdot w^2$, distinguiram-se três modos distintos:

$$\text{I. } v \cdot w^2 = (v \cdot w) \cdot w = ((2 - 2\sqrt{3}) + (2 + 2\sqrt{3})i) \cdot (-\sqrt{3} + i) =$$
$$= -2\sqrt{3} + 6 + (2 - 2\sqrt{3})i - \sqrt{3}(2 + 2\sqrt{3})i +$$
$$+ (2 + 2\sqrt{3})i^2 = -2\sqrt{3} + 6 - 2 - 2\sqrt{3} +$$
$$+ (2 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6)i = 4 - 4\sqrt{3} + (-4 - 4\sqrt{3})i$$

$$\text{II. } v \cdot w^2 = (2 - 2i)(-\sqrt{3} + i)^2 = (2 - 2i)(3 + i^2 - 2\sqrt{3}i) =$$
$$= (2 - 2i)(2 - 2\sqrt{3}i) = 4 - 4\sqrt{3}i - 4i + 4\sqrt{3}i^2 =$$
$$= 4 - 4\sqrt{3} - (4\sqrt{3} + 4)i$$

$$\text{III. } v \cdot w^2 = v \cdot w \cdot w = (2 - 2i)(-\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} + i) =$$
$$= (2 - 2i)(3 - \sqrt{3}i - \sqrt{3}i + i^2) =$$
$$= (2 - 2i)(2 - 2\sqrt{3}i) = 4 - 4\sqrt{3}i - 4i + 4\sqrt{3}i^2 =$$
$$= 4 - 4\sqrt{3} - (4 + 4\sqrt{3})i$$

No primeiro dos três casos, nota-se que os professores usaram o resultado obtido no ítem anterior $(v \cdot w)$; no segundo, o uso do produto notável (quadrado da soma) facilitou a operacionalização; o terceiro caso foi usado pelos professores que alegaram não trabalhar há algum tempo com números complexos.

b) Para este ítem, o resultado obtido foi:

- respostas corretas: 20 professores
- respostas incorretas: 6 professores
- ausência de resposta: 4 professores

Aqueles que resolveram corretamente a questão apresentaram duas maneiras distintas de resolução:

1ª) puramente mecânica, utilizando apenas a forma algébrica dos números complexos e o conceito de imaginário puro:

$$w = -\sqrt{3} + i \Longrightarrow w^n = (-\sqrt{3} + i)^n$$

e temos,

$n = 0 \Longrightarrow w^0 = 1$

$n = 1 \Longrightarrow w^1 = -\sqrt{3} + i$

$n = 2 \Longrightarrow w^2 = (-\sqrt{3} + i)^2 = 3 + i^2 - 2i\sqrt{3} = 2 - 2i\sqrt{3}$

$n = 3 \Longrightarrow w^3 = (-\sqrt{3} + i)^3 = (-\sqrt{3} + i)^2(-\sqrt{3} + i) =$

$= (2 - 2i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i) = -2\sqrt{3} + 2i + 6i - 2\sqrt{3}i^2 = 8i$

Logo, $n = 3$.

Convém observar que, para o cálculo de w^3, alguns professores fizeram uso do binômio de Newton.

A nosso ver, essa maneira de resolver o problema distingue aqueles professores que têm alguma dificuldade de interpretar os problemas em outra situação que não seja apresentada na forma algébrica.

2º) Exigindo o conhecimento da fórmula de Moivre de potenciação ($z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \cdot \text{sen } n\theta)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$) e do conceito de imaginário puro, para complexos escritos na forma trigonométrica ($z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen }\theta)$ é imaginário puro $\Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

$$w = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow w^n = 2^n\left(\cos n\cdot\frac{5\pi}{6} + i\cdot\text{sen}\, n\cdot\frac{5\pi}{6}\right)$$

Como w^n é imaginário puro $\Longleftrightarrow n\cdot\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$5n = 3 + 6k \Longrightarrow k = \frac{5n-3}{6}$$

Logo, o menor $n \in \mathbb{N}$, tal que $k \in \mathbb{Z}$, é $n = 3$.

No primeiro modo de resolução os erros cometidos foram puramente de natureza de cálculo algébrico, como por exemplo, de sinais e nas contas. Estes erros foram cometidos por apenas três professores. No segundo modo, os erros foram mais grosseiros, como por exemplo,

- ao escrever $w = -\sqrt{3} + i$ na forma polar, tomar para argumento o ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad (erro cometido por um professor);

- considerar que $\cos\frac{5\pi}{6}\cdot n = 0 \Longleftrightarrow \frac{5\pi}{6}\cdot n = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (erro cometido por dois professores).

c) Não houve qualquer problema quanto às respostas deste ítem (extremamente fácil); 27 professores o responderam corretamente, ou seja, $M_1(2; -2)$ e $M_2(-\sqrt{3}; 1)$. Os três professores que deixaram de respondê-lo são justamente aqueles que nunca lecionaram no 2º grau e desconheciam o significado da palavra afixo.

d) Para resolver esse ítem seria necessário o conhecimento dos conceitos de módulo e argumento de um número complexo.

O resultado obtido para essa questão foi:

- chegaram às conclusões esperadas: 18 professores;
- chegaram a respostas erradas: 8 professores;
- não responderam: 4 professores.

Os professores que chegaram às conclusões esperadas, apresentaram dois tipos de resoluções:

1ª) $v = 2 - 2i \Longrightarrow |v| = 2\sqrt{2}$

Logo, $v = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

$w = -\sqrt{3} + i \Longrightarrow |w| = 2$

Logo, $w = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

2ª)

$v = 2 - 2i \Longrightarrow |v| = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Logo, $v = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

$w = -\sqrt{3} + i \Longrightarrow |w| = 2$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Logo, $w = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

Convém observar que o segundo modo de resolução é o que habitualmente aparece nos livros didáticos de 2º grau.

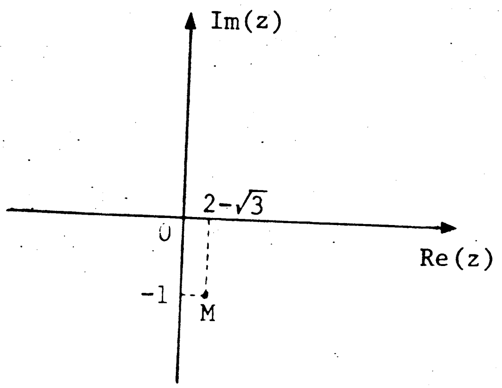
Quantos aos erros observados nesse ítem, todos foram cometidos na determinação dos argumentos (ou ao considerar $\arg v = \frac{3\pi}{4}$, ou ao considerar $\arg w = \frac{2\pi}{3}$).

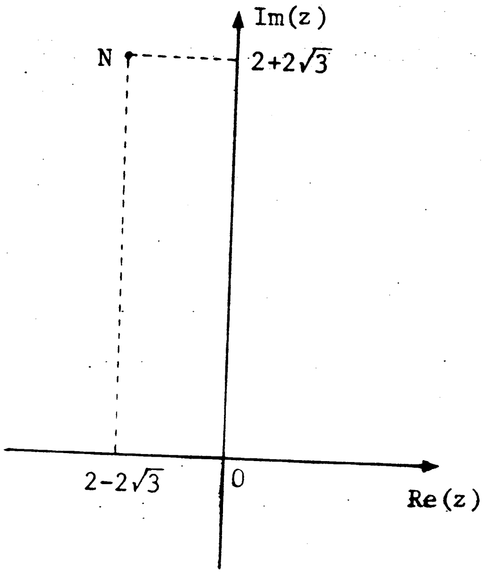
Notou-se também que nenhum professor utilizou a representação exponencial para os complexos ($z = \rho e^{i\theta}$).

e) Para a resolução deste ítem seria necessário saber: representar a imagem de um complexo no plano, sua representação vetorial e os conceitos de soma vetorial, homotetia e rotação.

O resultado obtido foi:

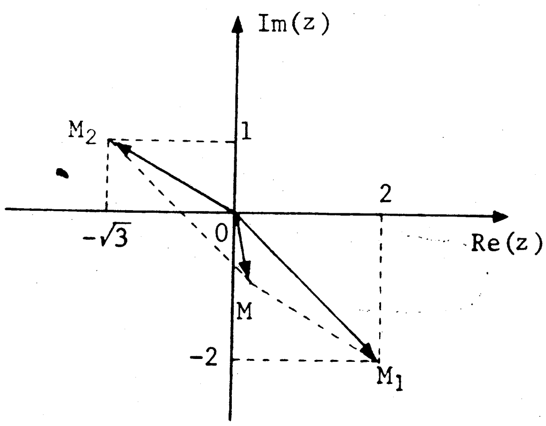
▪ 21 professores representaram as imagens de $v + w$ e $v \cdot w$ no plano, utilizando os resultados obtidos no ítem a), ou seja, $M(2 - \sqrt{3}; -1)$ e $N(2 - 2\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3})$ como imagens de $v + w$ e $v \cdot w$, respectivamente. Entretanto, nenhum professor conseguiu dar uma interpretação geométrica para os resultados. Nesse caso, a solução por eles apresentada foi:





■ 6 professores fizeram apenas a representação e interpretação geométrica de v + w, do seguinte modo:

Sejam $\overrightarrow{OM}_1$ e $\overrightarrow{OM}_2$ os vetores representantes dos complexos v e w, respectivamente. O complexo v + w é representado pelo vetor $\overrightarrow{OM}$, obtido geometricamente pela soma vetorial de $\overrightarrow{OM}_1$ e $\overrightarrow{OM}_2$.



■ 3 professores não responderam a este ítem.

1.3. RESULTADOS GLOBAIS, PROFESSOR POR PROFESSOR

Após a apresentação dos resultados, questão por questão, vamos mostrar um quadro onde aparecem os resultados globais obtidos, professor por professor.

Para isso, vamos estabelecer um código de referência para a análise feita precedentemente de cada questão:

■ Para todas as questões, o símbolo ϕ designa a ausência de resposta.

- Questão 1:

Código para as respostas: + (questão respondida)

Código para as justificativas:

R significa "relação entre raízes e coeficientes"

T significa "teste das raízes racionais"

RT significa "relação entre raízes e coeficientes" e "teste das raízes racionais"

N significa "desconhece qualquer método"

- Questão 2:

Código para as respostas: + (satisfatória); - (insatisfatória)

Código para as justificativas:

E significa "resolução das equações do 2º grau"

F significa "aplicações em Física"

EF significa "resolução das equações do 2º grau" e "aplicações em Física"

~D significa "a importância não é destacada"

- Questão 4:

Para os ítem a), b), c) e d) usaremos:

C: para as respostas corretas.

E: para as respostas erradas.

Ítem a): Código para as justificativas:

I, II e III correspondem, respectivamente, aos métodos de resolução citados na análise das respostas.

Ítem b): Código para as justificativas:

A significa "atribuindo valores a $n \in \mathbb{N}$"

B significa "usando a fórmula de Moivre para a potenciação"

EG significa "erros grosseiros" dos tipos: (1) de sinais, no cálculo algébrico; (2) ao considerar $\arg w = \frac{2\pi}{3}$; (3) $\cos \frac{5\pi}{6} n = 0 \Longrightarrow \frac{5\pi}{6} n = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ítem d): Código para as justificativas:

P significa "resolvido de modo mais prático"

-P significa "resolvido de modo menos prático"

EG significa "erros grosseiros" dos tipos:
(1) $\arg v = \frac{3\pi}{4}$; (2) $\arg w = \frac{2\pi}{3}$.

Ítem e): Código para as respostas: + (parcialmente respondido)

Código para as justificativas:

RG significa "apenas representação geométrica"

RVA significa "representação e interpretação geométrica da adição".

PROFESSOR	Q. 1		Q. 2		Q. 3	Q. 4								
						a		*b*		*c*	*d*		*e*	
	RESP	JUST	RESP	JUST	RESP	RESP	JUST	RESP	JUST	RESP	RESP	JUST	RESP	JUST
NTW	+	T	+	F	ϕ	C	I	C	A	C	E	EG1	+	RVA
SCT	+	R	+	E	ϕ	C	I	C	A	C	C	-P	+	RG
SM	+	R	-	~D	ϕ	C	I	E	EG1	C	C	-P	+	RG
MMB	+	RT	+	E	ϕ	C	II	C	B	C	C	-P	+	RG
KSY	+	T	-	~D	ϕ	C	I	E	EG3	C	E	EG2	+	RG
ACS	+	N	-	~D	ϕ	C	I	E	EG1	C	C	-P	+	RG
ARS	+	R	+	F	ϕ	C	II	C	A	C	C	-P	+	RVA
CSB	+	R	+	E	ϕ	C	I	C	A	C	C	-P	+	RG
RSS	+	N	-	~D	ϕ	C	I	C	A	C	E	EG2	+	RG
VSC	+	R	+	E	ϕ	C	II	C	A	C	C	-P	+	RG
AMR	+	T	+	E	ϕ	C	II	C	A	C	C	-P	+	RG
MB	+	T	-	~D	ϕ	C	I	E	EG1	C	E	EG2	+	RG
SMZ	+	N	-	~D	ϕ	C	I	ϕ		C	ϕ		+	RG
ACB	+	R	-	~D	ϕ	C	I	C	A	C	E	EG2	+	RG
RR	+	T	+	F	ϕ	C	I	C	A	C	C	P	+	RG
EAT	+	N	ϕ		ϕ	C	III	ϕ		ϕ	ϕ		ϕ	
VMZ	+	N	ϕ		ϕ	C	III	ϕ		ϕ	ϕ		ϕ	
WSR	+	T	-	~D	ϕ	C	I	C	A	C	C	-P	+	RG
ASS	+	R	+	E	ϕ	C	I	C	A	C	C	-P	+	RVA
LRL	+	R	-	~D	ϕ	C	I	C	A	C	C	-P	+	RG
MAS	+	T	+	E	ϕ	C	II	C	A	C	C	-P	+	RG
FAM	+	RT	+	EF	ϕ	C	II	C	B	C	C	P	+	RVA
IMB	+	N	-	~D	ϕ	C	I	E	EG3	C	E	EG1	+	RG
JF	+	R	+	F	ϕ	C	I	C	A	C	C	-P	+	RG
LTS	+	RT	+	EF	ϕ	C	II	C	B	C	C	P	+	RVA
RCA	+	RT	+	E	ϕ	C	II	C	A	C	C	P	+	RVA
MCR	+	RT	+	E	ϕ	C	I	C	B	C	C	-P	+	RG
AMP	+	R	-	~D	ϕ	C	I	E	EG2	C	E	EG2	+	RG
USD	+	R	-	~D	ϕ	C	I	C	A	C	C	-P	+	RG
EPZ	+	N	ϕ		ϕ	C	III	ϕ		ϕ	ϕ		ϕ	

Considerações finais

Este quadro sintetiza as informações contidas na análise precedente e permite o diferenciamento dos professores com os quais se pretende trabalhar. Vê-se, por exemplo, que o grupo formado pelos professores FAM-LTS-RCA-MMB-ARS foi o que apresentou um melhor desempenho, enquanto que aquele formado pelos professores ACB-EAT-VMZ-IMB-EPZ-AMP-MB-KSY apresentou os resultados mais fracos.

Nota-se também que, de um modo geral, todos têm condição de acompanhar o curso a ser ministrado. Entretanto, percebe-se a necessidade de uma revisão dos principais conceitos da teoria dos números complexos, a fim de que se possa obter um melhor aproveitamento e atingir os objetivos esperados.

CAPÍTULO II

Esta unidade, referente à 2ª semana do curso, foi inteiramente desenvolvida por nós, de maneira expositiva.

Diante da necessidade da revisão de conceitos básicos da teoria dos números complexos, evidenciada pelas respostas do questionário proposto na aula anterior, expusemos aos professores o seguinte:

1. Dado o número complexo $z = a + bi$, com a e b reais, definem-se:

- conjugado de z, o número complexo $\bar{z} = a - bi$.
- módulo de z, o número real ρ, não negativo, dado por

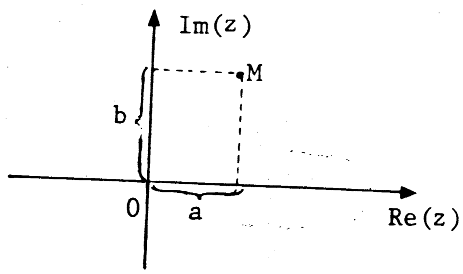
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- imagem de z, o ponto $M(a; b)$ do plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais $Re(z)$ (eixo real) e $Im(z)$ (eixo imaginário).

- argumento de z, $z \neq 0$, o ângulo θ, determinado pelo semi-eixo real positivo e pelo vetor $\overrightarrow{OM}$, no qual O é a origem do plano complexo e M é a imagem de z.

2. Representação geométrica de $z = a + bi$, onde a e b são reais.

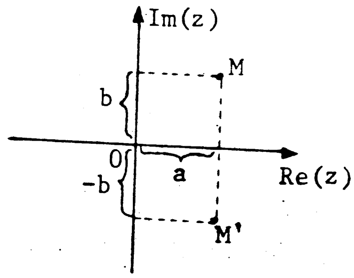
$$z = a + bi \iff M(a;\ b)$$



3. Interpretações geométricas

I. do conjugado:

A imagem de $\bar{z}$ é o ponto simétrico da imagem de z, em relação ao eixo real.



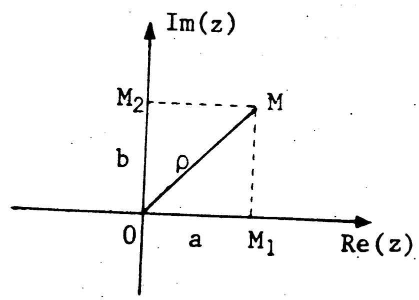
II. do módulo:

ΔOM_1M é retângulo $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow OM^2 = MM_1^2 + OM_1^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow OM^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho$



O módulo de z é representado geometricamente pela distância da origem do plano complexo à imagem de z.

4. Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, definem-se:

- Adição de z_1 e z_2: $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$
- Multiplicação de z_1 e z_2: $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$
- Divisão de z_1 por z_2, $z_2 \neq 0$: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$

5. O cálculo da raiz quadrada de um número complexo na forma algébrica, através do seguinte exemplo:

Seja $\sqrt{-3 - 4i} = a + bi$, onde $a,b \in \mathbb{R}$, e temos

$$-3 - 4i = (a+bi)^2 \Longrightarrow -3 - 4i = a^2 - b^2 + 2abi$$

Pela definição de igualdade de números complexos,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \ (I) \\ 2ab = -4 \ (II) \end{cases}$$

de (II), $b = -\dfrac{2}{a}$ que, substituído em (I) resulta:

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \Longrightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \\ a^2 = -4 \end{cases}$$

Como $b = -\dfrac{2}{a}$, então

$$a = 1 \Longrightarrow b = -2 \Longrightarrow \sqrt{-3 - 4i} = 1 - 2i$$

$$a = -1 \Longrightarrow b = 2 \Longrightarrow \sqrt{-3 - 4i} = -1 + 2i$$

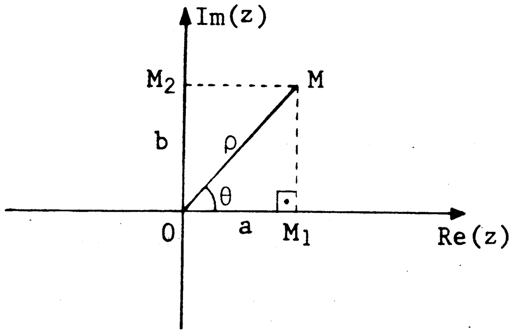
Logo, $\sqrt{-3 - 4i} = \pm 1 \mp 2i$

Observação.

Embora o cálculo da raiz quadrada de um número complexo tenha sido feito através de um exemplo numérico, foi destacado o fato de que no cálculo de $\sqrt{a + bi}$ na forma algébrica, sempre chega-se a uma equação da forma $x^4 + \alpha x^2 + \beta = 0$, na qual β é sempre negativo. E, deste fato, resulta obter-se sempre um valor positivo para x^2.

6. Forma trigonométrica de z

Dado o complexo não nulo $z = a + bi$, com a e b reais, temos



$$\Delta OM_1M \text{ é retângulo} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \rho \cdot \cos\theta \\ b = \rho \cdot \text{sen}\,\theta \end{cases}$$

e temos, $z = a + bi = \rho\cos\theta + (\rho\,\text{sen}\,\theta)i$.

Logo, $z = \rho(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta)$.

Observações.

a) Conhecidos o módulo e o argumento de um número complexo z, pode-se também representá-lo através da notação exponencial $z = \rho e^{i\theta}$ (Euler)

$$z = \rho e^{i\theta} \iff z = \rho(\cos\theta + i\cdot \text{sen}\,\theta)$$

b) $z = \rho e^{i\theta} \Longrightarrow \bar{z} = \rho e^{i(-\theta)}$

7. Dados $z = \rho e^{i\theta}$, $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, definem-se:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$z^n = \rho^n \cdot e^{i\theta n}$, com $n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, onde $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $k = 0, 1, \ldots, n-1$

8. As raízes n-ésimas da unidade são da forma

$$\sqrt[n]{1} = e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})},$$

onde $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Geometricamente, as imagens das raízes n-ésimas da unidade pertencem a uma circunferência de centro na origem do plano de Argand-Gauss e dividem essa circunferência em n partes iguais, pois os argumentos dessas raízes formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$. A solução geométrica desse problema é chamada divisão ideal da circunferência em n partes iguais.

Feita, de modo sucinto, a exposição anterior, foi proposta uma atividade aos presentes, cujo objetivo era a preparação para a leitura e análise de um texto a ser apresentado na aula seguinte.

Essa atividade era composta das seguintes questões:

1) Mostrar que a resolução das equações do 3º grau se reduz à das equações da forma $x^3 + qx + r = 0$.

2) Pelo estudo das funções da forma $x \longmapsto x^3 + qx + r$, determinar o número de raízes reais da equação $x^3 + qx + r = 0$, segundo os valores de q e r.

Como nenhum dos presentes conseguisse responder às questões de modo satisfatório, fizemos um relato detalhado do assunto, da maneira seguinte:

1) Mostremos que toda equação do 3º grau pode, através de uma transformação aditiva, reduzir-se a uma outra equação do 3º grau desprovida do termo do 2º grau, isto é, uma equação da forma $x^3 + qx + r = 0$.

Seja a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde $a \neq 0$, e temos

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \iff x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \qquad \text{(I)}$$

Como

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 = x^3 + 3x^2\left(\frac{b}{3a}\right) + 3x\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) + \frac{b^3}{27a^3} =$$

$$= \left(x^3 + \frac{b}{a}x^2\right) + \left(\frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3}\right)$$

temos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 = \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{b^2}{3a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I):

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{b^2}{3a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)x + \left(\frac{27a^2d - b^3}{27a^3}\right) = 0$$

Fazendo-se $x + \frac{b}{3a} = y$, temos

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \left(\frac{27a^2d - b^3}{27a^3}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y - \left(\frac{3abc - b^3}{9a^3}\right) + \frac{27a^2d - b^3}{27a^3} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}\right) = 0$$

ou seja, toda equação do 3º grau pode ser escrita na forma $x^3 + qx + r = 0$.

2) Seja a função $f: x \longmapsto x^3 + qx + r$ e temos

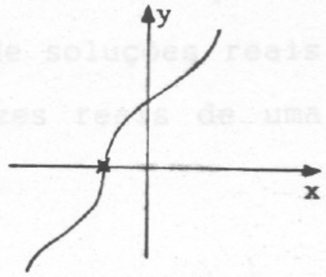
$$f(x) = x^3 + qx + r \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + q.$$

Analisemos os máximos e os mínimos desta função:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + q = 0 \Longrightarrow x^2 = -\frac{q}{3}$$

Logo,

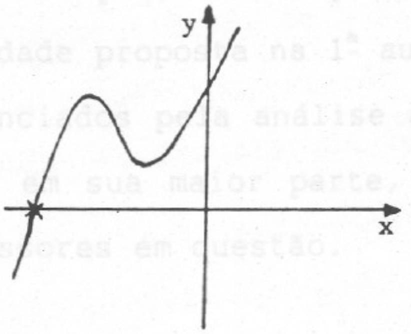
$q > 0 \Longrightarrow$ f não tem máximo ou mínimo $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ a equação $x^3 + qx + r = 0$ admite uma única raiz real

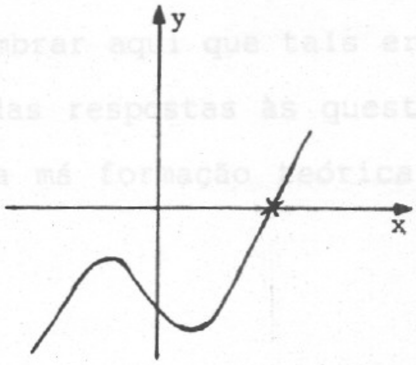


$$q < 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{a equação admite um mínimo em } x_0, \text{ se } f''(x_0) > 0 \\ \text{a equação admite um máximo em } x_1, \text{ se } f''(x_1) < 0 \end{cases}$$

Podem aqui ocorrerem dois casos:

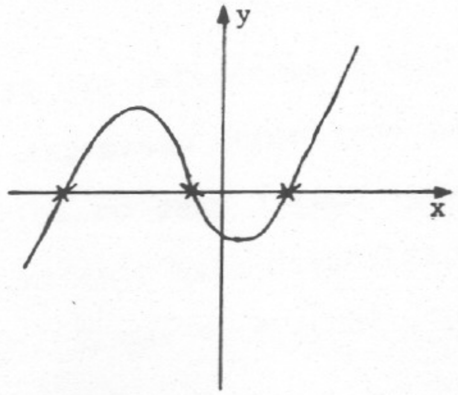
(A) máximo e mínimo de mesmo sinal $(f(x_0) \cdot f(x_1) > 0)$





Em ambos os casos, a equação admitirá uma única raiz real.

(B) máximo e mínimo de sinais contrários $(f(x_0) \cdot f(x_1) < 0)$



Neste caso, a equação admitirá três raízes reais.

Evidenciamos, através deste método, que o uso do quadro gráfico (analítico) como instrumento de análise de soluções reais do problema, nos permite trabalhar sobre as raízes reais de uma equação sem saber resolvê-la.

Considerações finais

A revisão por nós desenvolvida foi muito importante para todos os professores presentes.

Através das perguntas por eles formuladas no decorrer da aula, foi possível compreender e justificar os erros cometidos na atividade proposta na 1ª aula. Convém lembrar aqui que tais erros, evidenciados pela análise a posteriori das respostas às questões, eram, em sua maior parte, frutos de uma má formação teórica dos professores em questão.

CAPÍTULO III

Nesta unidade foram propostos a leitura da tradução do artigo "Cas Irredutible", de D'Alembert, e um questionário relativo à interpretação e compreensão do texto, cujas questões deveriam ser respondidas no decorrer da leitura.

Para a realização desse trabalho, dividiu-se a classe em grupos de três professores que, após a leitura conjunta do texto e respostas às questões, nomearam um relator dos resultados.

As perguntas relativas ao texto eram as seguintes:

1) Qual é o método de resolução da equação do 3º grau proposto ao início do texto? A que expressão chegou-se para as raízes?

2) D'Alembert faz uma referência a uma demonstração de M. Nicole, mostrando que a expressão encontrada para x, ainda que seja expressa por imaginários no caso irredutível, corresponde a um número real. Tente reconstruir esta demonstração, após as indicações que figuram no texto. O que você acha? Como vocês estudariam a natureza desta expressão?

3) D'Alembert escreveu: "quando uma das três raízes reais e distintas é comensurável (racional, na linguagem moderna), então a equação não está mais no caso irredutível, porque um dos divisores do primeiro termo dá a raiz comensurável".

Reconstitua o argumento de divisibilidade usado aqui por D'Alembert (supondo que q e r são números inteiros).

4) D'Alembert escreveu em seguida: "Esta raiz do caso irredutível, tão difícil de se encontrar pela Álgebra, se encontra facilmente pela Geometria".

Mostre que a resolução da equação do 3º grau, no caso irredutível, se reduz efetivamente ao problema geométrico da trissecção do ângulo, exprimindo-se cos 3θ em função de cos θ.

5) A que D'Alembert atribui a imperfeição do método de resolução proposto?

6) Identificar as diferentes partes do raciocínio de D'Alembert visando, ao fim do texto, obter em cada caso uma expressão das três raízes da equação. Como vocês exprimiriam estas raízes na linguagem matemática atual?

III.1. ANÁLISE A PRIORI DAS QUESTÕES PROPOSTAS

Questão 1)

A resolução proposta por D'Alembert é o uso do método dos radicais, que ele chama método ordinário. Tal método envolve uma mudança de variáveis, que permite a resolução da cúbica através da resolução de uma equação do 2º grau, ou seja, dada a equação $x^3 + qx + r = 0$ (1), fazendo-se $x = y + z$, temos

$$x^3 = y^3 + \underbrace{3y^2z + 3yz^2}_{3yz(y+z)} + z^3$$

Logo, $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$ (2).

Comparando-se (1) e (2), temos:

$$\begin{cases} -3yz = q \\ -y^3 - z^3 = r \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z = -\dfrac{q}{3y} & (3) \\ y^3 + z^3 = -r & (4) \end{cases}$$

Substituindo-se (3) em (4), obtém-se:

$$y^3 - \frac{q^3}{27y^3} = -r \Longrightarrow 27y^6 + 27ry^3 - q^3 = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow 27(y^3)^2 + 27ry^3 - q^3 = 0$ (equação do 2º grau na incógnita y^3)

Resolvendo-se a equação do 2º grau acima, obtém-se:

$$y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} \Longrightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$$

Como $z^3 = -r - y^3$, tem-se

$$z^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} \Longrightarrow z = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$$

e, como $x = y + z$, a expressão para as raízes da equação $x^3 + qx + r = 0$ é

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$$

O objetivo desta questão era evidenciar as dificuldades de aplicação deste método para determinar-se algebricamente as raízes de uma equação do 3º grau.

<u>Questão 2)</u>

Com o propósito de justificar que uma equação do 3º grau que admite três raízes reais e distintas, possa apresentar a raiz real escrita como uma expressão que contém os imaginários, M. Nicole formou séries que exprimissem os valores de $(a + b\sqrt{-1})^{1/3}$ e $(a - b\sqrt{-1})^{1/3}$.

Façamos a reconstituição desse argumento:

Se a e b são números reais não nulos, temos:

$$a + bi = a(1 + \frac{b}{a}i) \quad e \quad a - bi = a(1 - \frac{b}{a}i)$$

e então,

$$(a + bi)^{1/3} = a^{1/3} \cdot (1 + \frac{b}{a}i)^{1/3} \quad e \quad (a - bi)^{1/3} = a^{1/3} \cdot (1 - \frac{b}{a}i)^{1/3}$$

Lembrando que

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \ldots$$

temos

$$(1 + \frac{b}{a}i)^{1/3} =$$

$$= 1 + \frac{b}{3a}i + \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot i^2 + \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{6} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot i^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{b}{3a} \cdot i + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{5b^3}{81a^3} \cdot i - \ldots \qquad (1)$$

e

$$(1 - \frac{b}{a} i)^{1/3} =$$

$$= 1 - \frac{b}{3a} i + \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot i^2 - \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{6} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot i^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{b}{3a} \cdot i + \frac{b^2}{9a^2} + \frac{5b^3}{81a^3} \cdot i - \ldots \qquad (2)$$

Somando-se membro a membro (1) e (2), temos

$$(1 + \frac{b}{a} i)^{1/3} + (1 - \frac{b}{a} i)^{1/3} = 2 + \frac{2b^2}{9a^2} - \frac{40b^4}{243a^4} + \ldots = k \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Logo, considerando-se a raiz da equação $x^3 + qx + r = 0$,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}},$$

se $\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4} < 0$, façamos $-\frac{r}{2} = a$ e $\sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} = bi$, e temos

$$x = \sqrt[3]{a \pm bi} + \sqrt[3]{a \mp bi} = a^{1/3} \cdot (1 \pm \frac{b}{a} i)^{1/3} + a^{1/3} \cdot (1 \mp \frac{b}{a} i)^{1/3} =$$

$$= a^{1/3} \underbrace{\left[(1 \pm \frac{b}{a} i)^{1/3} + (1 \mp \frac{b}{a} i)^{1/3}\right]}_{(*)} = a^{1/3} \cdot k$$

ou seja, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Questão 3)</u>

O objetivo dessa questão era mostrar que uma cúbica, admitindo uma raiz racional, pode ser resolvida sem a aplicação do método dos radicais e que havendo outras raízes reais, estas não se apresentarão sob um forma que contém quantidades imaginárias.

Em outras palavras, a raiz racional de uma cúbica pode ser determinada pela aplicação do teorema abaixo e as demais raízes, através da resolução de uma equação do 2º grau. A demonstração de tal teorema justifica o argumento de divisibilidade usado no texto por D'Alembert, ou seja, que "quando uma das três raízes reais e distintas é comensurável (racional), então a equação não está mais no caso irredutível, porque um dos divisores do 1º termo dá a raiz comensurável".

TEOREMA.

"Se a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$, admite o número racional $\frac{p}{q}$, p e q primos entre si, como raiz, então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n."

Demonstração.

Por hipótese, a fração irredutível $\frac{p}{q}$ é raiz da equação

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

ou seja,

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

e temos

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \dots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n \cdot p^n = q \cdot \underbrace{(-a_{n-1} \cdot p^{n-1} - \dots - a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} - a_0 \cdot q^{n-1})}_{\in \mathbb{Z}} & (1) \\ \text{ou} & \\ a_0 \cdot q^n = p \cdot \underbrace{(-a_n \cdot p^{n-1} - a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q - \dots - a_1 \cdot q^{n-1})}_{\in \mathbb{Z}} & (2) \end{cases}$$

De (1), conclui-se que $q | a_n \cdot p^n$ e portanto, $q | a_n$, pois p e q são primos entre si.

De (2), conclui-se que $p | a_0 \cdot q^n$ e portanto, $p | a_0$, pois p e q são primos entre si.

E, essas duas conclusões provam o teorema.

Observação.

Este teorema, aplicado à equação $x^3 + qx + r = 0$, onde q e r são números inteiros, justifica o fato de que se a equação admite uma raiz comensurável (racional), esta raiz é um número inteiro e divisor de r.

Questão 4)

Como, pela questão 1), ficava evidenciada a dificuldade de resolução das cúbicas através de um método puramente algébrico, esta questão objetivava mostrar que tal problema poderia ser facil mente resolvido pela Geometria, ou seja, pela resolução do problema da trissecção de um ângulo.

Viète (1540-1603) observou que o problema da trissecção do ângulo levava a uma equação cúbica.

De fato, se na equação $x^3 + qx + r = 0$ fizermos $mx = y$ (para termos posteriormente um grau de liberdade de escolha de um valor para m), temos:

$$\frac{y^3}{m^3} + q \cdot \frac{y}{m} + r = 0 \Longrightarrow y^3 + qm^2y + rm^3 = 0 \qquad (1)$$

Lembrando que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, temos

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos^3\theta - \frac{3}{4} \cdot \cos\theta - \frac{1}{4} \cdot \cos 3\theta = 0 \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), obtêm-se

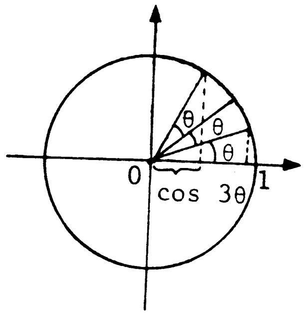
$$\begin{cases} y = \cos\theta & (I) \\ qm^2 = -\frac{3}{4} & (II) \\ rm^3 = -\frac{1}{4} \cdot \cos 3\theta & (III) \end{cases}$$

Como q é dado, então m é determinado pela equação (II) (e será sempre real, já que as raízes, nesse caso irredutível, são reais).

Logo, com m e r (dado), tem-se, pela equação (III), o valor de $\cos 3\theta$ e, consequentemente, 3θ.

Conhecido θ, pela equação (I), obtém-se $y = \cos\theta$ e, como $mx = y$, fica determinada a raiz $x = \frac{m}{y}$.

Geometricamente, como mostra a figura ao lado, conhecido o valor de cos 3θ, obtém-se o ângulo 3θ e, pela trissecção deste, o ângulo θ.



Como $y = OM = \cos\theta$, obtém-se $x = \frac{m}{y}$, raiz da equação dada.

Convém observar que, a menos que θ seja um ângulo particular, o valor obtido para x é aproximado.

Destacamos também aqui o problema da impossibilidade da construção com régua e compasso da trissecção de um ângulo qualquer (prova dada por Wantzel em 1848).

Questão 5)

O objetivo desta questão era verificar a capacidade de análise e síntese de cada professor.

Como resposta esperava-se que cada um, após a análise do parágrafo referente à questão, respondesse de modo sucinto o seguinte:

No referido método de resolução supunha-se $x = y + z$, para obter-se a equação $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$ e então, compará-la termo a termo com a equação original $x^3 + qx + r = 0$.

Tal comparação resultaria num sistema de duas equações, nas incógnitas y e z, cuja resolução reduzir-se-ia a uma equação do 2º grau em y^3 (ou, em z^3).

No caso irredutível e pelo fato de y e z serem quantidades indeterminadas, os valores encontrados para y e z, ao invés de serem reais, podem ser quantidades imaginárias. Aí está o inconveniente do método quando aplicado no caso irredutível, pois a expressão de x, embora real, seria dada pela soma de duas quantidades imaginárias.

Questão 6)

Nesta questão também era objetivada a capacidade de síntese de cada um e ainda mostrar que o uso dos quadros analítico e algébrico na linguagem matemática atual facilita a interpretação das raízes de uma cúbica.

Na questão 1), apresentou-se a resolução da equação $x^3 + qx + r = 0$, fazendo-se $x = y + z$.

As expressões obtidas para y e z eram da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & \left\{\begin{array}{l} y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} \\ \\ z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} \end{array}\right. \\ \text{II)} & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{III)} & \left\{\begin{array}{l} y^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} \\ \\ z^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} \end{array}\right. \\ \text{IV)} & \end{array}$$

Se $a + b\sqrt{-1}$ é uma das raízes cúbicas de $-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$, então $a - b\sqrt{-1}$ é uma das raízes cúbicas de $-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$.

E temos:

$$\text{raízes da equação I):} \begin{cases} y = a + b\sqrt{-1} & (1) \\ y = (a + b\sqrt{-1})\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) & (2) \\ y = (a + b\sqrt{-1})\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right) & (3) \end{cases}$$

$$\text{raízes da equação II):}\quad \begin{cases} z = a - b\sqrt{-1} & (4) \\ z = (a - b\sqrt{-1})(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}) & (5) \\ z = (a - b\sqrt{-1})(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}) & (6) \end{cases}$$

Como as raízes da equação III) são as mesmas das de II) e as raízes da equação IV) são as mesmas das de I), D'Alembert concluiu que:

1) Combinando-se as raízes de III com as de IV, obter-se-ia o mesmo resultado da combinação das raízes de I com as de II.

2) Como devemos ter $yz = -\frac{q}{3}$, então as únicas combinações possíveis para a obtenção de $x = y + z$ são as seguintes:

$$(1) + (4) \Longrightarrow x = y + z = a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = 2a$$

$$(2) + (6) \Longrightarrow x = y + z = (a + b\sqrt{-1})(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}) +$$

$$+ (a - b\sqrt{-1})(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}) = a\ (\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}) +$$

$$+ b\sqrt{-1}\ (\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} - \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}) = - a + b\sqrt{-1}\ \sqrt{-3} =$$

$$= - a + b\sqrt{3}$$

$$(3) + (5) \Longrightarrow x = y + z = (a + b\sqrt{-1})(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}) +$$

$$+ (a - b\sqrt{-1})(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}) = a(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}) +$$

$$+ b\sqrt{-1}\ (\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} - \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}) = - a + b\sqrt{-1}(-\sqrt{-3}) =$$

$$= - a - b\sqrt{3}$$

Vê-se portanto que, no caso irredutível, as três expressões obtidas para a raiz x são números reais.

Na segunda parte da questão o esperado era que os professores conhecessem a forma analítica e geométrica de interpretação das raízes de um número complexo para então poderem justificar o caso em que a soma de duas quantidades imaginárias resulta em um número real.

A resolução esperada era a seguinte:

Como já foi visto, o método ordinário de resolução da cúbica $x^3 + qx + r = 0$ nos conduzia, mediante a transformação $x = y + z$, ao sistema:

$$\begin{cases} yz = -\frac{q}{3} \Longrightarrow z = -\frac{q}{3y} & (1) \\ y^3 + z^3 = -r & (2) \end{cases}$$

Substituindo-se (1) em (2), obtém-se a equação trinômia $27y^6 + 27ry^3 - q^3 = 0$, cuja solução é expressa por

$$y^3 = \frac{-27r \pm \sqrt{27^2 \cdot r^2 + 4 \cdot 27 \cdot q^3}}{2 \cdot 27}$$

ou seja,

$$y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$$

e, como $z^3 = -r - y^3$, tem-se que

$$z^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$$

Se $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} < 0$, então

$$y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}\right)(-1)} = -\frac{r}{2} \pm i\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$$

e

$$z^3 = -\frac{r}{2} \mp i\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$$

Como $y^3 \neq 0$, chamemos $\theta = \arg y^3$ e $\rho = |y^3|$ e, sendo z^3 o conjugado de y^3, consequentemente temos $-\theta = \arg z^3$ e $\rho = |z^3|$.

Logo, $y^3 = \rho e^{i\theta}$ e $z^3 = \rho e^{-i\theta}$,

ou seja, $$y = \sqrt[3]{\rho e^{i\theta}} \quad \text{e} \quad z = \sqrt[3]{\rho e^{-i\theta}}$$

Lembrando que:

$$z = \rho e^{i\theta} \Longrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},$$

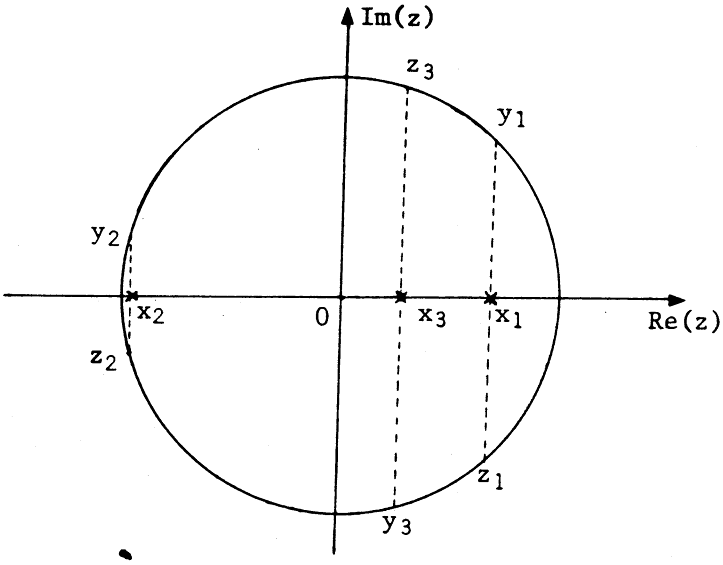
onde $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ e $k = 0,1,2,\ldots, n-1$, temos que, para $n = 3$ e $k = 0,1$ e 2,

$$y_1 = \sqrt[3]{\rho}\, e^{i\cdot\frac{\theta}{3}} \qquad z_1 = \sqrt[3]{\rho}\, e^{i\left(-\frac{\theta}{3}\right)}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} \qquad z_2 = \sqrt[3]{\rho}\, e^{i\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} \qquad z_3 = \sqrt[3]{\rho}\, e^{i\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Representando geometricamente esses valores, observamos facilmente que as raízes $x_1 = y_1 + z_1$, $z_2 = y_2 + z_2$ e $x_3 = y_3 + z_3$ são reais e distintas, pois $y_1 = \bar{z}_1$, $y_2 = \bar{z}_2$ e $y_3 = \bar{z}_3$.



III.2. ANÁLISE A POSTERIORI DAS QUESTÕES PROPOSTAS

Esta análise foi feita através das soluções apresentadas por um relator, nomeado em cada grupo.

Os grupos formados para desenvolver esta atividade eram os seguintes:

(I) NTW, SM, RSS

(II) ACS, CSB, JF

(III) LTS, RCA, VSC

(IV) MCR, AMP, USD

(V) FAM, MMB, ASS

(VI) VMZ, SCT, SMZ

(VII) KSY, AMR, MAS

(VIII) EAT, MB, WSR

(IX) ACB, IMB, LRL

(X) EPZ, ARS, RR

Questão 1)

Esta questão foi respondida da mesma forma por todos os grupos, que se limitaram apenas à transcrição do texto lido.

Entretanto, todos os professores solicitaram que fosse dada uma equação nas condições mencionadas no texto (caso irredutível) a fim de que fosse justificado o argumento de D'Alembert, ou seja, "uma raiz real que se apresentasse sob uma forma que contém as quantidades imaginárias".

Como exemplo, foi escolhida a equação cujas raízes são $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, ou seja,

$$x^3 + \sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3} = 0 \qquad (1)$$

Obteve-se a seguir a transformada dessa equação, desprovida do termo do 2º grau, para podermos resolvê-la aplicando o método dos radicais sugerido no texto:

Como $(x + \frac{\sqrt{3}}{3})^3 = x^3 + \sqrt{3}x^2 + x + \frac{\sqrt{3}}{9}$, temos que

$$x^3 + \sqrt{3}x^2 = (x + \frac{\sqrt{3}}{3})^3 - x - \frac{\sqrt{3}}{9} \qquad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1), obtemos

$$(x + \frac{\sqrt{3}}{3})^3 - x - \frac{\sqrt{3}}{9} - 2x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$(x + \frac{\sqrt{3}}{3})^3 - 3x - \frac{19\sqrt{3}}{9} = 0$$

Fazendo-se $x + \frac{\sqrt{3}}{3} = y$, temos

$$y^3 - 3(y - \frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{19\sqrt{3}}{9} = 0$$

ou seja,

$$y^3 - 3y - \frac{10\sqrt{3}}{9} = 0 \qquad (3)$$

Observe que esta equação admite três raízes reais e distintas, a saber

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad y = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{3} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3},$$

valores estes determinados a partir das raízes da equação (1), previamente conhecidas. Entretanto, a expressão das raízes da equação (3), obtida pela aplicação do método dos radicais, é

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1000 \cdot 3\sqrt{3}}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} \mp \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1000 \cdot 3\sqrt{3}}{729}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1000\sqrt{3}}{243}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} \mp \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1000\sqrt{3}}{243}}}$$

Como $\frac{9}{4} - \frac{1000\sqrt{3}}{243} < 0$, então tem-se que y, embora real, aparece como uma soma de quantidades imaginárias.

<u>Questão 2)</u>

Como nenhum dos grupos apresentasse respostas para os ítens dessa questão, fomos levados a respondê-la da maneira como o exposto na análise a priori desta unidade.

Este fato confirma o quadro apresentado na aula anterior, quando então concluímos que os professores, de um modo geral, desconhecem os métodos mais gerais de resolução de problemas. Neste caso, segundo eles mesmos, o desconhecimento do desenvolvimento em série de um binômio da forma $(a + b)^n$, onde $n \in \mathbb{Q}$.

Questão 3)

Este ítem, apresentou o seguinte resultado:

- dois grupos (III e V) responderam a questão de modo satisfatório;
- três grupos (II, IV e VII) apresentaram suas respostas através de exemplos numéricos;
- cinco grupos (I, VI, VIII, IX e X) não responderam a questão.

Os dois primeiros grupos (III e V), reconstituíram o argumento de divisibilidade de D'Alembert apresentando uma prova do teorema demonstrado na análise a priori desta questão, no caso particular da equação $x^3 + qx + r = 0$, onde q e r são números inteiros:

"Se o número racional $\frac{a}{b}$, com a e b primos entre si, é raiz da equação $x^3 + qx + r = 0$, onde $q, r \in \mathbb{Z}$, então a é um divisor de r e b é um divisor de 1."

Demonstração apresentada:

Por hipótese, $\frac{a}{b}$ é raiz da equação $x^3 + qx + r = 0$ ou seja,

$$\frac{a^3}{b^3} + q \cdot \frac{a}{b} + r = 0 \Longrightarrow a^3 + qab^2 + rb^3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a^3 = -b(qab + rb^2) \Longrightarrow b \mid a^3 \Longrightarrow b = \pm 1, \text{ pois a e b são primos entre si} \\ \text{ou} \\ rb^3 = -a(a^2 + qb^2) \Longrightarrow a \mid rb^3 \Longrightarrow a \mid r, \text{ pois } a \nmid b^3 \end{cases}$$

Logo, b é divisor de 1 e a é divisor de r.

Um dos grupos que apresentou a demonstração acima, III, ainda observou que, se a equação $x^3 + qx + r = 0$, com q e r inteiros, admite uma raiz racional, essa raiz é um número inteiro e divisor de r.

Entre os exemplos numéricos que foram apresentados, vamos apresentar apenas um, já que os demais eram similares a este escolhido e nada tinham a acrescentar.

Exemplo. Resolução da equação $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Se a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$ admite o número racional $\frac{a}{b}$ como raiz, então $a \mid 2$ e $b \mid 1$, ou seja, $\frac{a}{b} \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Testando as possíveis raízes, pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini,

	-2	4	-2	
1	0	-3	2	-2
1	-2	1	0	

ou seja, -2 é raiz da equação e divisor de r = 2.

Logo, a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$ pode ser escrita como $(x + 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$ e, a resolução da equação $x^2 - 2x + 1 = 0$ nos permite determinar facilmente as demais raízes da equação dada. Isto nos permite concluir que a equação não está no caso irredutível.

Convém observar que alguns professores pertencentes aos grupos que não responderam à questão, destacam duas razões: o fato de desconhecerem qualquer justificativa para o argumento de divisibilidade mencionado no texto de D'Alembert (11 professores) e o fato de nunca haverem lecionado no 2º grau (3 professores).

Questão 4)

Nesta questão, todos os professores alegaram desconhecer a maneira como se poderia reduzir a resolução de uma cúbica ao problema geométrico da trissecção do ângulo. Isto nos levou a mostrar o problema da forma como foi exposto na análise a priori da questão. Entretanto, a exemplo da questão 1), nos foi solicitada a apresentação de um exercício numérico para uma maior visualização do problema.

Foi então proposta a resolução da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$. Na equação dada, fazendo-se $mx = y$, ou seja, $x = \frac{y}{m}$ (1), temos

$$\frac{y^3}{m^3} - \frac{3y}{m} + 1 = 0 \Longrightarrow y^3 - 3m^2y + m^3 = 0 \qquad (2)$$

Como

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \Longrightarrow \cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0 \qquad (3)$$

Comparando-se (2) e (3), temos

$$\begin{cases} y = \cos\theta & \text{(I)} \\ 3m^2 = \frac{3}{4} & \text{(II)} \\ m^3 = -\frac{1}{4}\cos 3\theta & \text{(III)} \end{cases}$$

de (II): $m^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow m = -\frac{1}{2}$ ou $m = \frac{1}{2}$.

Tomando-se $m = \frac{1}{2}$ e substituindo-se na equação (III), temos

$$\frac{1}{8} = -\frac{1}{4}\cos 3\theta \Longrightarrow \cos 3\theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 3\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } 3\theta = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{9} \text{ ou } \theta = -\frac{2\pi}{9} \underset{\text{(I)}}{\Longrightarrow} y = \cos\frac{2\pi}{9} \text{ ou } y = \cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9}$$

$$\underset{(1)}{\Longrightarrow} x = 2\cos\frac{2\pi}{9} \text{ (raiz da equação)}$$

As demais raízes podem ser determinadas usando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

1	0	-3	1	
	$2\cos\frac{2\pi}{9}$	$4\cos^2\frac{2\pi}{9}$		$2\cos\frac{2\pi}{9}$ (raiz)
1	$2\cos\frac{2\pi}{9}$	$-3 + 4\cos^2\frac{2\pi}{9}$	0 (resto)	

Temos então que

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(x - 2\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\left(x^2 + \left(2\cos\frac{2\pi}{9}\right)x - \left(3 - 4\cos^2\frac{2\pi}{9}\right)\right) = 0$$

e, a resolução da equação, $x^2 + \left(2\cos\frac{2\pi}{9}\right)x - \left(3 - 4\cos^2\frac{2\pi}{9}\right) = 0$, nos dá as demais raízes procuradas, ou seja,

$$\Delta = 4\cos^2\frac{2\pi}{9} + 12 - 16\cos^2\frac{2\pi}{9} = 12 - 12\cos^2\frac{2\pi}{9} = 12\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{9}$$

Logo,

$$x = \frac{-2\cos\frac{2\pi}{9} \pm 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}}{2} = -\cos\frac{2\pi}{9} \pm \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9} =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{9} \pm \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\right) =$$

$$= \begin{cases} 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{9} \\ \text{ou} \\ 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{8\pi}{9} \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação são $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{4\pi}{9}$ e $2\cos\frac{8\pi}{9}$.

Observação.

A determinação das raízes independe do valor considerado para m, ou seja, tomando-se para m o valor $-\frac{1}{2}$ e substituindo-o em (III) temos:

$$-\frac{1}{8} = -\frac{1}{4}\cos 3\theta \Longrightarrow \cos 3\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } 3\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{9} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{9} \underset{(I)}{\Longrightarrow} y = \cos\frac{\pi}{9} \text{ ou } y = \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{9}$$

$$\underset{(I)}{\Longrightarrow} x = -2\cos\frac{\pi}{9}$$

Aplicando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini,

1	0	-3	1	
	$-2\cos\frac{\pi}{9}$	$4\cos^2\frac{\pi}{9}$		$-2\cos\frac{\pi}{9}$ (raiz)
1	$-2\cos\frac{\pi}{9}$	$-3 + 4\cos^2\frac{\pi}{9}$	0 (resto)	

A resolução da equação $x^2 - (2\cos\frac{\pi}{9})x - (3 - 4\cos^2\frac{\pi}{9}) = 0$ nos dará as demais raízes:

$$\Delta = 4\cos^2\frac{\pi}{9} + 12 - 16\cos^2\frac{\pi}{9} = 12 - 12\cos^2\frac{\pi}{9} = 12\text{sen}^2\frac{\pi}{9}$$

Logo,

$$x = \frac{2\cos\frac{\pi}{9} \pm 2\sqrt{3}\text{sen}\frac{\pi}{9}}{2} = \cos\frac{\pi}{9} \pm \sqrt{3}\text{sen}\frac{\pi}{9} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\frac{\pi}{9}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} \pm \text{sen}\frac{\pi}{3}\text{sen}\frac{\pi}{9}\right) =$$

$$= \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{9} \\ \text{ou} \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação são $-2\cos\frac{\pi}{9} = 2\cos\frac{8\pi}{9}$, $2\cos\frac{2\pi}{9}$ e $2\cos\frac{4\pi}{9}$, isto é, as mesmas obtidas quando fizemos $m = \frac{1}{2}$. Isto nos permite concluir que a determinação das raízes independe do valor de m escolhido.

Questão 6)

Na primeira parte deste ítem, todos os grupos apresentaram de forma resumida o esperado, ou seja, a maneira como D'Alembert obtém uma expressão das três raízes da equação. Isto foi feito pela transcrição de algumas partes do texto.

Entretanto, houve necessidade de nossa intervenção para esclarecimentos, nos seguintes trechos:

- a prova de que $u = b$ resulta um único valor para u, enquanto que $u^3 = b^3$ resulta em três valores para u;
- o porquê das raízes da equação

$$y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$$

poderem ser escritas como

$$y = a + b\sqrt{-1},\quad y = (a + b\sqrt{-1})\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) \text{ e } y = (a + b\sqrt{-1})\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)$$

Convém observar que alguns professores, após o esclarecimento do primeiro trecho citado, perceberam facilmente que ele era a própria justificativa do segundo.

Quanto à segunda parte do ítem, nenhum dos grupos chegou a qualquer resposta satisfatória.

III.3. RESULTADOS GLOBAIS, GRUPO POR GRUPO

Da mesma forma que no capítulo anterior, vamos mostrar um quadro onde aparecem os resultados globais, grupo por grupo.

Código de referência a ser usado para todas as questões:

- o símbolo ϕ significa "ausência de resposta para a questão"
- o símbolo + significa "resposta satisfatória"
- o símbolo - significa "resposta insatisfatória"
- TT significa "transcrição do texto estudado"
- EN significa o "uso de exemplos numéricos como justificativa"

GRUPOS	Q.1		Q.2			Q.3	Q.4	Q.5	Q.6	
	a	b	a	b	c				a	b
I	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	TT	TT	-
II	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	EN	ϕ	TT	TT	ϕ
III	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	+	ϕ	+	TT	-
IV	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	EN	ϕ	TT	TT	ϕ
V	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	+	ϕ	+	TT	-
VI	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	TT	TT	ϕ
VII	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	EN	ϕ	TT	TT	ϕ
VIII	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	TT	TT	ϕ
IX	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	TT	TT	ϕ
X	TT	+	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	TT	TT	ϕ

Considerações finais

A análise global dos resultados apresentados mostra a grande dificuldade de todos em interpretar e compreender o texto apresentado, além de uma grande limitação na expressão das próprias idéias. Nota-se ainda a falta da capacidade de síntese quando da solicitação da identificação de partes do raciocínio do autor.

Destacam-se novamente nesta unidade os mesmos professores que, no capítulo anterior, encontravam-se no grupo superior.

CAPÍTULO IV

Como já foi mencionado na introdução deste trabalho, o objetivo principal desta aula era que os professores percebessem a concepção das quantidades imaginárias através dos textos de De La Chapelle, Euler e D'Alembert, bem como tais quantidades e o símbolo $\sqrt{-1}$ eram por eles manipulados. Para isso, a atividade proposta para a aula foi a leitura e análise dos três textos seguintes, que se encontram anexados ao final deste trabalho:

- um extrato do "Traité des sections coniques" de De La Chapelle (1765);
- um extrato dos "Élèments d'Algèbre" de Euler (1760);
- o artigo "Imaginaire" de D'Alembert, na Encyclopédie Méthodique (1751-1772).

Anexo a esses textos foi apresentado um questionário, cujas respostas, decorrentes da análise dos textos, deveriam ser dadas oralmente, para um posterior debate.

Para o desenvolvimento dessa atividade, os professores foram divididos em grupos de três, ficando, em cada grupo de trabalho, um professor designado para expor os resultados obtidos.

As questões propostas eram as seguintes:

1) Nestes três textos, os números complexos são definidos? Se sim, como? Quais são as notações utilizadas para esse propósito?

2) Quais são as propriedades dos números complexos enunciadas? Demonstradas? Utilizadas implicitamente?

3) Que utilidade têm os números complexos para os autores?

4) Os três textos apresentam pontos de vista comparáveis sobre os números complexos?

IV.1. ANÁLISE A PRIORI DAS QUESTÕES PROPOSTAS

Questão 1)

O esperado era que, após a análise dos três textos, os professores observassem que os números complexos:

- não são definidos por De La Chapelle e Euler, que apenas definem, respectivamente, quantidades imaginárias (quanto se tem um negativo sob um radical cujo expoente é par) e números impossíveis ou imaginários (às raízes quadradas de números negativos).

■ são definidos implicitamente por D'Alembert, quando ele menciona em seu artigo que "uma quantidade imaginária não é apenas a raiz par de uma quantidade negativa (que ele chama imaginários simples), mas também as quantidades compostas de real e imaginário (que ele chama imaginários mistos)".

Os termos e notações utilizados pelos autores em suas definições são:

	Termos	Notação
De La Chapelle	grandezas imaginárias	$\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, etc
Euler	quantidades (ou números) impossíveis ou imaginárias	$\sqrt{-a}$
D'Alembert	imaginários simples e imaginários mistos	$\sqrt{-aa}$ $e+f\sqrt{-1}$, com e,f reais

Questão 2)

PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS ENUNCIADAS:

1) Por Euler:

- O produto de dois imaginários produz um real ou possível.
- O produto de um número possível por um impossível resulta sempre um imaginário.
- $\sqrt{-a} = +\sqrt{-a}$ ou $-\sqrt{-a}$, sendo a um real positivo.

2) Por D'Alembert

- Toda quantidade imaginária qualquer pode sempre se reduzir à forma $e + f\sqrt{-1}$, onde e e f são quantidades reais.
- Toda raiz imaginária de uma equação qualquer pode sempre se reduzir à forma $e + f\sqrt{-1}$, onde e e f são quantidades reais.
- Se $e + f\sqrt{-1}$ é uma das raízes de uma equação, então $e - f\sqrt{-1}$ será uma outra.
- As raízes imaginárias de uma equação aparecem sempre em número par.
- Duas quantidades imaginárias somadas podem formar uma quantidade real.

3) De La Chapelle:

- Não enuncia explicitamente qualquer propriedade.

PROPRIEDADES DEMONSTRADAS:

Observamos que tanto De La Chapelle como Euler não apresentam demonstrações de propriedades em seus artigos. Entretanto, D'Alembert mostra a seguinte propriedade: "A soma de uma quantidade real com uma quantidade imaginária resulta em um imaginário".

A demonstração que ele apresenta, feita por redução ao absurdo, é a que se segue:

Sejam $\underline{b}$, uma quantidade real, e $\sqrt[2]{-aa}$, uma quantidade imaginária.

Suponhamos que a soma $b + \sqrt[2]{-aa} = c$ (quantidade real). Então, $\sqrt[2]{-aa} = c - b$, o que seria impossível, já que $c - b$ é real e $\sqrt[2]{-aa}$ é uma quantidade imaginária.

Logo, $b + \sqrt[2]{-aa}$ é uma quantidade imaginária.

<u>PROPRIEDADES UTILIZADAS IMPLICITAMENTE</u>:

1) Por De La Chapelle:

- $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$

2) Por Euler:

- $(\sqrt{-a})^2 = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$, sendo $\underline{a}$ um número positivo.

- $\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$, sendo $\underline{a}$ um número positivo.

- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, quaisquer que sejam $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

Convém observar que aqueles matemáticos estendiam as propriedades válidas para os números reais aos novos números. A falsidade de certas extensões pode ser verificada através de exemplos bem simples:

- o uso da propriedade $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, sendo $\underline{a}$ e $\underline{b}$ números reais quaisquer:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

- o uso da propriedade $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, sendo a e b números reais quaisquer e $b \neq 0$:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{+1}{-1}} \Longrightarrow \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} \Longrightarrow \sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \Longrightarrow \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\sqrt{-1})^2 = 1 \Longrightarrow -1 = 1$$

Questão 3)

Segundo De La Chapelle, "as grandezas imaginárias podem e devem entrar no cálculo, já que elas permitem concluir que um problema proposto é absurdo, quando ele chega a um resultado expresso imaginariamente".

Euler, considera o cálculo dos imaginários da maior importância e, da mesma forma que De La Chapelle, destaca o fato de que "se a solução de um problema é um imaginário, isto nos leva a concluir que aquilo que se procura é impossível".

Quanto a D'Alembert, ele não destaca em seu artigo qualquer utilidade para os novos números. Entretanto, cremos que as proposições por ele citadas mostram que, certamente, ele os utilizava na teoria das equações algébricas.

Questão 4)

Nota-se que os três autores apresentam pontos comuns em seus artigos. Entre eles, destacaremos:

- os conceitos:
  - Uma quantidade é imaginária todas as vezes que se tem um negativo sob um radical cujo expoente for um número par ($\sqrt{-a^2}$) – De La Chapelle.

- Números impossíveis ou imaginários são as raízes quadradas de quantidades negativas ($\sqrt{-a}$, com $a > 0$) – Euler.
- Quantidade imaginária é a raiz quadrada de toda potência par que tem o sinal negativo ($\sqrt[2]{-aa}$) – D'Alembert.

■ Os termos utilizados:

- grandezas imaginárias ou quantidades imaginárias (De La Chapelle).
- quantidades impossíveis ou imaginárias (Euler).
- quantidades imaginárias, imaginários simples e imaginários mistos (D'Alembert).

■ As proposições enunciadas:

- o produto de dois imaginários produz um real ou possível ($\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$, com $a > 0$) – De La Chapelle e Euler.
- o produto de um possível e um impossível resulta em um impossível ($\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$, com $a > 0$) – Euler e D'Alembert.

IV.2. ANÁLISE A POSTERIORI DAS QUESTÕES PROPOSTAS

Vamos analisar aqui as respostas dadas pelos dez grupos de professores, que foram assim constituídos:

Grupo I: NTW, RSS, VSC

Grupo II: KSY, MB, WSR

Grupo III: FAM, LTS, MMB

Grupo IV: CSB, RR, LRL

Grupo V: RCA, ACB, ASS

Grupo VI: EAT, VMZ, MCR

Grupo VII: SM, AMR, MAS

Grupo VIII: IMB, ARS, AMP

Grupo IX: SCT, SMZ, USD

Grupo X: EPZ, ACS, JF

Questão 1)

Na primeira parte desta questão (a), referente à definição dos números complexos, apenas um dos grupos (III) concluiu que os números complexos não estão definidos explicitamente nos textos. Os demais concluiram que tais números estão definidos apresentando as seguintes definições:

- uma quantidade é imaginária toda vez que se tem um negativo sob um radical cujo expoente é par (De La Chapelle).
- números impossíveis ou imaginários são as raízes quadradas de números negativos (Euler).
- números imaginários são as raízes pares dos números negativos (D'Alembert).

Quanto às notações utilizadas para representar os números complexos (b), temos que:

Grupo III:

considerou que, não tendo sido definidos os números complexos, as notações apresentadas serviam apenas de instrumentos para representar quantidades não reais.

Demais grupos:

- $\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, etc. (De La Chapelle).
- $\sqrt{-a}$ (Euler).
- $\sqrt{-aa}$ e $e + f\sqrt{-1}$, onde _e_ e _f_ são reais (D'Alembert).

Quanto aos termos utilizados na definição dos números complexos (c), todos os grupos, exceptuando-se o III, apresentaram as mesmas conclusões:

- quantidade imaginária (De La Chapelle).
- números impossíveis ou imaginários (Euler).
- números impossíveis ou imaginários, imaginários simples e imaginários mistos (D'Alembert).

Questão 2)

Para esta questão, vamos apresentar as respostas de cada ítem, por grupos:

a) Propriedades enumeradas

Grupos VI, VIII e X:

De La Chapelle

□ (imaginário)·(imaginário) = real

Euler

- (imaginário)·(imaginário) = real
- (possível)·(impossível) = impossível
- $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a} = -a$
- $\sqrt{-a} = +\sqrt{-a}$ ou $-\sqrt{-a}$

D'Alembert

- Toda quantidade imaginária pode se reduzir à forma $e + f\sqrt{-1}$, com <u>e</u> e <u>f</u> reais.
- Se $e + f\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação, então $e - f\sqrt{-1}$ também o é.
- Duas quantidades imaginárias somadas podem formar uma quantidade real.

<u>Grupos</u> I, II, IV, VII e IX:

De La Chapelle

- O produto de duas quantidades imaginárias resulta num real.

Euler

- O produto de dois imaginários é um real.
- O produto de um possível e um impossível resulta em um imaginário.

D'Alembert

- Se $e + f\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação, então $e - f\sqrt{-1}$ também o é.
- Duas quantidades imaginárias somadas podem resultar uma quantidade real.
- As raízes imaginárias de uma equação aparecem em número par.

<u>Grupos</u> III e V:

De La Chapelle

- O produto de duas quantidades imaginárias resulta num real.

Euler

- $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$
- O produto de um possível e um impossível resulta em um imaginário.

D'Alembert

- Se $e + f\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação, então $e - f\sqrt{-1}$ também o é.
- Duas quantidades imaginárias somadas podem resultar uma quantidade real.
- As raízes imaginárias de uma equação aparecem em número par.
- Toda quantidade imaginária se reduz à forma $e + f\sqrt{-1}$, onde <u>e</u> e <u>f</u> são reais.

b) <u>Propriedades demonstradas</u>

Para este ítem, apenas o grupo III citou a propriedade demonstrada por D'Alembert: "A soma de uma quantidade real com uma imaginária resulta em um imaginário".

c) <u>Propriedades utilizadas implicitamente</u>

<u>Grupos</u> VI e X: não citaram qualquer propriedade.

<u>Grupos</u> I, V, VII e VIII:

Euler

- $\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$
- $(\sqrt{-a}) = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$

Grupos II, III, IV e IX:

De La Chapelle

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Questão 3)

As respostas dadas a esta questão foram as seguintes:

Grupos IV, VI, VII e VIII:

De La Chapelle

- destaca que elas apenas devem entrar no cálculo.

Euler

- destaca sua importância para concluir que um problema não admite solução.

D'Alembert

- não destaca qualquer utilidade para os números complexos.

Grupos I, II, III, V, IX e X:

De La Chapelle e Euler

- consideram os números complexos de grande importância para o cálculo, destacando que eles servem principalmente para concluir que um problema é absurdo quando sua solução é expressa por um imaginário.

D'Alembert

- não destaca qualquer importância.

Questão 4)

Houve unanimidade por parte dos grupos ao responder esta questão. Todos apresentaram como pontos de vista comparáveis:

- as definições dadas;
- os termos e as representações utilizadas para os novos números;
- algumas propriedades enunciadas e utilizadas.

IV.3. RESULTADOS GLOBAIS, GRUPO POR GRUPO

O quadro que aparece a seguir sintetiza os resultados globais obtidos, grupo por grupo.

O código de referência estabelecido para evidenciar, no quadro, a análise a posteriori feita no ítem IV.2. é o seguinte:

- Para todas as questões, o símbolo ϕ designa ausência de resposta.
- Questão 1)

  Código para as respostas dos ítens a), b) e c):

  \+ (satisfatória, com justificativa)

  ± (satisfatória, sem justificativa)

  \- (insatisfatória)
- Questão 2)

  Código para as respostas dos ítens a), b) e c):

  C (completa)

  I (incompleta)

■ Questões 3) e 4)

Código para as respostas:

+ (satisfatória)

- (insatisfatória)

	Q.1			Q.2			Q.3	Q.4
Grupos	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*		
I	±	±	+	C	ϕ	I	+	+
II	±	±	+	C	ϕ	C	+	+
III	+	+	+	C	C	C	+	+
IV	±	±	+	C	ϕ	C	-	+
V	±	±	+	C	ϕ	I	+	+
VI	-	-	+	I	ϕ	ϕ	-	+
VII	±	±	+	C	ϕ	I	-	+
VIII	±	±	+	I	ϕ	I	-	+
IX	±	±	+	C	ϕ	C	+	+
X	±	±	+	I	ϕ	ϕ	+	+

Considerações finais

Como já foi dito na introdução deste trabalho, a leitura dos três textos despertou grande interesse de todos, cremos que motivados pela riqueza dos conteúdos apresentados.

As respostas de cada grupo ao questionário proposto foram colocadas no quadro-negro e, destacados os pontos de vista comuns e os conflitantes, chegou-se a um consenso, ou seja, a uma única conclusão para cada pergunta do questionário. Essas conclusões foram sintetizadas e coincidiram com aquelas apresentadas por nós na análise a priori feita nesta unidade.

O quadro apresentado mostra que o grupo III, formado pelos professores FAM, LTS e MMB, destaca-se dos demais. Entretanto, dada a facilidade de leitura e compreensão dos textos, os demais grupos também apresentaram conclusões bastante satisfatórias.

É importante frisar que os professores, ao debaterem suas conclusões, mencionaram a possibilidade de fazer uso da história no ensino da matemática. Este fato nos levou a sentir, pela primeira vez, que começávamos a atingir os nossos objetivos propostos ao início do curso.

CAPÍTULO V

Este capítulo, referente à leitura e análise do texto de Argand (1813), "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques", objetivava que os professores conhecessem o modo como ali foi introduzida a representação geométrica das quantidades imaginárias, bem como suas aplicações em Trigonometria. Com o estudo desse texto também pretendia-se dar mais elementos aos professores para executarem a próxima fase do curso, na qual estariam envolvidos com a resolução de problemas.

Para a realização deste trabalho, foram mantidos os dez grupos formados na aula anterior que deveriam, após a leitura e análise do texto, responder às seguintes questões:

1) Quais fatos indicam o cuidado da legitimação?

2) Reconstituir o argumento de Argand. Sobre qual(is) quadro(s) se apoia este argumento?

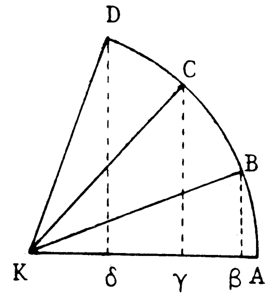
3) Como é interpretada a analogia com os números negativos?

4) Como são definidas as operações?

5) Na figura ao lado, são dados:

$\widehat{AD} = a$, $\widehat{AC} = b$ e $\widehat{AB} = \widehat{CD} = a - b$.

Determine os valores de cos (a-b) e sen (a-b).



Entretanto, no decorrer da aula, diante das dificuldades de todos na compreensão de algumas partes do texto, nos foi solicitada a exposição das respostas ao questionário, já que as dúvidas existentes os impediriam de respondê-lo a contento.

As dúvidas que, entre outras, exigiram nossa intervenção para esclarecimentos foram as seguintes:

- a diferença entre grandezas reais e imaginárias exemplificada por Argand, quando essas grandezas são designadas por objetos materiais (um franco, uma grama) ou por quantidades de peso colocados sobre os pratos de uma balança;
- a multiplicação de linhas dirigidas, referida no texto como o quarto termo da proporção 1:A::B:x;
- no parágrafo 8 do texto, entender como que, a partir de $\overline{KA} = 1$ e $\overline{KB} = u$, foram obtidos $\overline{KC} = u^2$, $\overline{KD} = u^3, \ldots,$ $\overline{KN} = u^n$;
- os cálculos de cos (a+b), sen (a+b), cos a - cos b e sen a - sen b, desenvolvidos no parágrafo 9.

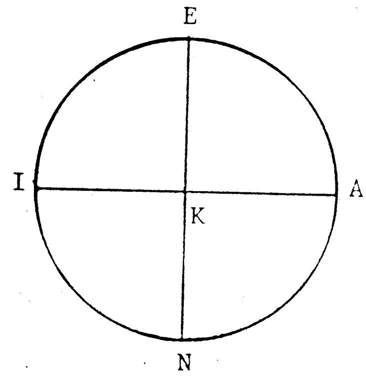
Esclarecidas as dúvidas existentes, passamos às respostas ao questionário:

Questão 1)

O cuidado da legitimação dos números complexos deve-se ao fato de ela se efetuar pela interpretação e operações dentro de um quadro já existente e estruturado matematicamente.

Questão 2)

Argand combina a idéia de grandeza absoluta com a de direção e, essa analogia permite que, geometricamente, possa ser calculada a média proporcional entre +1 e -1, ou seja, a quantidade que satisfaz a proporção +1:x::x:-1.



Para isso, ele toma como unidade positiva uma linha KA, tendo sua direção de K para A, ou seja, KA = 1.

Logo, para a unidade negativa ter-se-á a linha KI, igual a KA, mas tomada num sentido oposto, ou seja, KI = -1.

Em seguida, ele traça KE ortogonal a IKA e obtém a relação seguinte:

$$\frac{KA}{KE} = \frac{KE}{KI} \qquad (1)$$

Para que a proporção (1) seja satisfeita, Argand toma para d a direção KE, obtendo $KE = 1_d$ e, consequentemente, KN a direção oposta a KE.

Logo, em (1), tem-se que:

$$\frac{1}{KE} = \frac{KE}{-1} \Longrightarrow KE^2 = -1 \Longrightarrow KE = \sqrt{-1}$$

ou seja, uma quantidade imaginária 1_d = KE é representada geometricamente pela perpendicular IKA, na qual é tomada a unidade positiva KA = 1.

Este argumento apóia-se nos quadros algébrico (quando ele propõe e efetua o cálculo da média proporcional de grandezas numéricas) e geométrico (quando ele constrói KE ortogonal a IKA, para obter uma relação de proporcionalidade entre as direções consideradas).

Questão 3)

A analogia com os números negativos é interpretada sob o ponto de vista que Argand chama "semelhança geométrica", a qual é composta: da semelhança numérica (que depende das respectivas grandezas, consideradas absolutamente) e da semelhança de direções ou sentidos aos quais as grandezas pertencem.

Dessa analogia resultariam os resultados por ele obtidos na questão anterior.

Questão 4)

Argand define a multiplicação como a obtenção do 4º termo da proporção 1:A::B:x e estende essa definição para as linhas mencionadas no parágrafo 4.

A adição é definida como a soma de linhas dirigidas, do seguinte modo: Traça-se primeiramente uma das linhas, por exemplo, a = $\overline{AB}$ e toma-se o ponto de extremidade B, da linha traçada, como origem da linha b = $\overline{BC}$. A linha $\overline{AC}$, de origem A, no ponto de origem da primeira linha, e extremidade C, no ponto de extremidade da segunda linha, será igual a

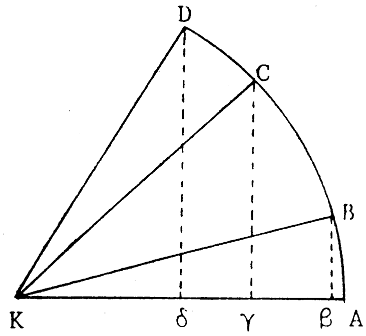
sa definição:

"Sendo A, B, C,..., F, G, H pontos quaisquer, tem-se

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{C..} + \ldots + \overline{..F} + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}."$$

<u>**Questão 5)**</u>

São dados $a = \widehat{AD}$, $b = \widehat{AC}$ e $a - b = \widehat{AB} = \widehat{CD}$ e sabe-se que



$$\cos(a-b) + \sqrt{-1}\cdot\text{sen}(a-b) = \overline{K\beta} + \overline{\beta B} = \overline{KB}.$$

Como $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KD}} = \dfrac{\overline{KA}}{\overline{KC}}$, temos $\overline{KB} = \dfrac{\overline{KD}}{\overline{KC}}$. Logo,

$$\cos(a-b) + \sqrt{-1}\cdot\text{sen}(a-b) = \frac{\overline{KD}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{K\delta} + \overline{\delta D}}{\overline{K\gamma} + \overline{\gamma C}} =$$

$$= \frac{\cos a + \sqrt{-1}\cdot\text{sen } a}{\cos b + \sqrt{-1}\cdot\text{sen } b} = \frac{(\cos a + \sqrt{-1}\cdot\text{sen } a)(\cos b - \sqrt{-1}\cdot\text{sen } b)}{\cos^2 b - (-1)\cdot\text{sen}^2 b} =$$

$$= \frac{\cos a\cdot\cos b - (-1)\text{sen } a\cdot\text{sen } b + \sqrt{-1}(\text{sen } a\cdot\cos b - \text{sen } b\cdot\cos a)}{\cos^2 b + \text{sen}^2 b}$$

e temos,

$$\cos(a-b) + \sqrt{-1}\cdot\text{sen}(a-b) = \cos a\cdot\cos b +$$

$$+ \text{sen } a\cdot\text{sen } b + \sqrt{-1}\,(\text{sen } a\cdot\cos b - \text{sen } b\cdot\cos a)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \text{sen } a\cdot\text{sen } b \\ \text{e} \\ \text{sen}(a-b) = \text{sen } a\cdot\cos b - \text{sen } b\cdot\cos a \end{cases}$$

Como nesta aula nos afastamos dos objetivos propostos, tivemos a oportunidade de fazer a revisão de novos conceitos que nos auxiliariam no desenvolvimento da aula seguinte (homotetia, produtos escalar e vetorial).

Apesar das dificuldades evidenciadas anteriormente, houve a participação de todos os presentes nos trabalhos desenvolvidos, seja na discussão de seus pontos de vista sobre o assunto, seja no envolvimento direto com o professor, quando do esclarecimento de suas dúvidas.

Convém destacar também que, de um modo geral, ficou evidenciada a riqueza do texto de Argand e a maneira como ele viria a contribuir para o desenvolvimento de várias teorias matemáticas.

C A P Í T U L O V I

Como já foi dito na introdução deste trabalho, o tema desta aula (Aplicações dos números complexos à resolução de problemas não formulados neste contexto) foi por nós apresentado de maneira expositiva.

Inicialmente, foram introduzidas as perspectivas construtivistas do processo de aprendizagem (Teoria do equilíbrio cognitivo de Piaget), evidenciando-se que ela reflete duas etapas:

- desequilíbrio: gerado pela falta de conhecimentos
- reequilíbrio majorante: adquirido por novos conhecimentos

Destacamos que essas etapas aparecem normalmente quando são planejadas ou selecionadas situações de aprendizagem e então, como etapas muito importantes a serem vencidas pelos professores, evidenciamos o seu papel na resolução de problemas, particularmente, no caso dos números complexos.

nesta unidade sejam frutos da natureza do conteúdo estudado. Que tipos de aprendizagens resultam do estudo dos números complexos? Que contribuições esses números podem trazer em relação a outras disciplinas?

Estabelecemos então uma distribuição adequada de objetivos, em uma sequência de aprendizagem, a fim de que eles servissem de instrumentos para auxiliar os professores a descobrirem sob que condições é possível atingi-los:

1º) <u>Objetivos didáticos</u>

- evidenciar o desenvolvimento usado em diferentes campos no tratamento atual dos números complexos e os desenvolvimentos usados pelas mudanças de quadros (R. Douady);
- evidenciar os mecanismos gerais da resolução de problemas (estratégias gerais) e também o fato de que eles não são eficazes se não estiverem ligados ao conhecimento no campo (Polya, Schoenfeld).

2º) <u>Objetivos matemáticos</u>

- diferenciar a fase de resolução das fases se formulação e redação, que visam a comunicação a outros;
- melhorar a capacidade de resolução de problemas no campo dos números complexos.

métrico com suas respectivas representações, e o papel dêsses quadros na análise da resolução de um problema.

Como exemplos, resolvemos os seguintes problemas, aplicando a teoria dos números complexos:

1) Considere-se um triângulo qualquer e sejam α, β e γ os seus ângulos internos que se opõem aos lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, respectivamente. Mostrar que

(I) $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$ (teorema das projeções)

(II) $\dfrac{b}{\text{sen }\beta} = \dfrac{c}{\text{sen }\gamma}$ (lei dos senos)

(III) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ (lei dos co-senos)

2) Determinar a equação da reta pelos pontos $A(-2;\ 1)$ e $B(0;\ -1)$.

3) Mostrar que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio.

4) Mostrar que $2\cdot\cos\frac{2\pi}{9}$ é raiz da cúbica $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Na resolução de cada problema foram executadas três fases:

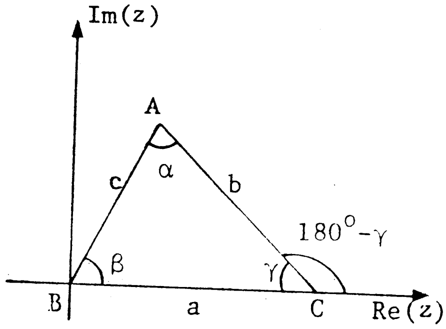
- apresentação de uma estratégia de resolução;
- resolução propriamente dita;
- análise da resolução (representações usadas, trocas de quadros, dificuldades encontradas).

Estratégia:

Construir no plano complexo o triângulo ABC, em posição ...veniente, de modo a não comprometer a generalidade do problema facilitar os cálculos a serem usados em sua resolução. Conside- ... cada lado do triângulo como um vetor tendo um número complexo ... seu respectivo representante.

Resolução:

Sejam os vetores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CA}$ e números complexos respectivamente a ... associados:



$= a\cdot e^{i0} = a$

$= c\cdot e^{i\beta} = c(\cos\beta + i\cdot \text{sen}\,\beta)$

$= b\cdot e^{i(180^\circ-\gamma)} = b(\cos(180^\circ-\gamma) + i\cdot\text{sen}\,(180^\circ-\gamma)) =$

$= b(-\cos\gamma + i\cdot\text{sen}\,\gamma)$

...o $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, temos

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} \Longrightarrow a = c(\cos\beta + i\cdot\text{sen}\,\beta) - b(-\cos\gamma + i\cdot\text{sen}\,\gamma) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a = (c\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\gamma) + i(c\cdot\text{sen}\,\beta - b\cdot\text{sen}\,\gamma) \qquad (I)$

1º) Pela definição de igualdade de números complexos temos, em (I),

$a = c\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\gamma$ (teorema das projeções)

e

$c\cdot\text{sen}\,\beta - b\cdot\text{sen}\,\gamma = 0 \Longrightarrow \dfrac{b}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma}$ (lei dos senos)

~~mos, em (I),~~

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma)^2 + (c \cdot \text{sen}\,\beta - b \cdot \text{sen}\,\gamma)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a^2 = c^2 \cdot \cos^2\beta + b^2 \cdot \cos^2\gamma + 2bc \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma +$$

$$+ c^2 \cdot \text{sen}^2\beta + b^2 \cdot \text{sen}^2\gamma - 2bc \cdot \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\gamma =$$

$$= c^2(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta) + b^2(\cos^2\gamma + \text{sen}^2\gamma) +$$

$$+ 2bc(\cos\beta \cdot \cos\gamma - \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\gamma) =$$

$$= c^2 + b^2 + 2bc \cdot \cos(\beta + \gamma) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(180° - \alpha)$$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ (lei dos co-senos)

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

- registros
  - exponencial: $\rho e^{i\theta}$
  - trigonométrico: $\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$
  - cartesiano: $a + bi$

- conceitos
  - igualdade: $a + bi = c + di \iff a = c$ e $b = d$
  - módulo: $\sqrt{a^2 + b^2}$

Quadro Geométrico utilizado:

- registros
  - pontual: construção dos vértices A, B e C
  - vetorial: construção dos vetores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$

- conceito de soma vetorial

A passagem do quadro geométrico para o algébrico deu-se quando na soma $\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{0}$ os vetores foram substituidos pelos respectivos números complexos representantes

$$(a,\ be^{i(180^\circ - \gamma)} \quad e \quad ce^{i\beta}).$$

A partir de então trabalhou-se apenas dentro de um quadro algébrico.

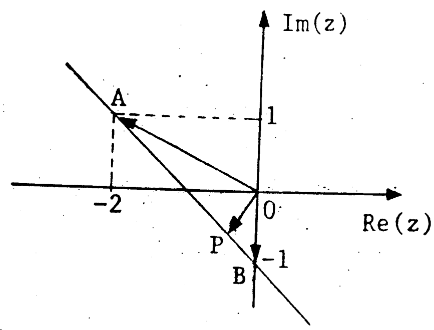
Problema 2)

Estratégia:

Considerar os pontos A e B dados como imagens de números complexos associados a vetores. Tomar um ponto P qualquer na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e impor então a condição de alinhamento para A, B e P.

Resolução:

Dados os pontos $A(-2;\ 1)$ e $B(0;\ -1)$ e sendo $P(x;\ y)$ um ponto genérico da reta procurada, temos que $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -i$ e $z = x + yi$ são os números complexos representantes dos vetores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ e $\vec{OP}$, respectivamente.



Se A, B e P são colineares, então $\underbrace{\vec{AP} = \lambda \cdot \vec{AB}}_{(I)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como

$$\begin{cases} \vec{AB} + \vec{B0} + \vec{0A} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{AB} = \vec{0B} - \vec{0A} = -i + 2 - i = 2 - 2i & (1) \\ e \\ \vec{AP} + \vec{P0} + \vec{0A} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{AP} = \vec{0P} - \vec{0A} = x + yi + 2 - i = \\ \qquad = (x + 2) + (y - 1)i & (2) \end{cases}$$

substituindo (1) e (2) em (I), temos:

$$x + 2 + (y - 1)i = 2\lambda - 2\lambda \cdot i$$

e, pela definição de igualdade de números complexos,

$$\begin{cases} x + 2 = 2\lambda \\ y - 1 = -2\lambda \end{cases} \Longrightarrow x + 2 = -y + 1 \Longrightarrow \underbrace{\boxed{x + y + 1 = 0}}_{\text{equação de } \overleftrightarrow{AB}}$$

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

- registro cartesiano: $a + bi$

- conceitos $\begin{cases} \text{adição: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i \\ \text{igualdade: } a+bi = c+di \Longleftrightarrow a = c \text{ e } b = d \end{cases}$

Quadro Geométrico utilizado:

- registros $\begin{cases} \text{pontual: representação dos pontos A, B e P como imagens de números complexos} \\ \text{vetorial: construção dos vetores } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \text{etc} \end{cases}$
- conceito de soma vetorial
- condição de alinhamento

A resolução teve início dentro de um quadro geométrico (representação vetorial e condição de alinhamento). A passagem para um quadro algébrico deu-se quando foi feita a substituição dos vetores da condição de alinhamento pelos seus respectivos números complexos representantes. A partir de então trabalhou-se exclusivamente dentro de um quadro algébrico, até obter-se a resposta procurada.

~~Convém observar~~ que a determinação da equação da reta por este método é bem mais fácil daquela através de emprego de determinantes. Esta, exige para a sua aplicação, que se demonstre a condição necessária e suficiente para o alinhamento de três pontos.

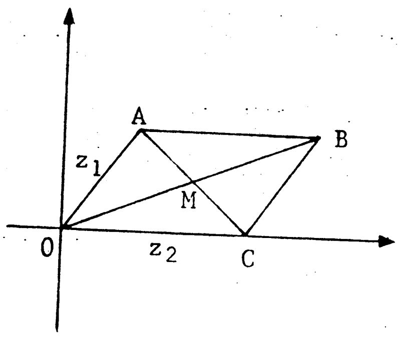
Problema 3)

Estratégia:

Representar o paralelogramo no plano complexo de modo conveniente, a fim de que os cálculos sejam facilitados. Associar a seus lados vetores, tendo cada um deles um representante número complexo. Visualizar o problema para estabelecer então as condições necessárias para provar que as diagonais do paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio.

Resolução:

Devemos provar que $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ e $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB}}{2}$.



Seja M a intersecção das diagonais do paralelogramo representado na figura ao lado e sejam os números complexos z_1 e z_2 os representantes dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$, respectivamente, e temos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = z_2 - z_1 \\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = z_2 + z_1 \end{cases}$$

Como

$$\begin{cases} \text{A, M e C são colineares} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = m\cdot\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = m(z_2 - z_1) \\ \text{O, M e B são colineares} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = n\cdot\overrightarrow{OB} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = n(z_2 + z_1) \end{cases}$$

~~e ainda $\vec{OA} + \vec{AM} + \vec{MO} = \vec{0}$~~; temos

$$z_1 + m(z_2 - z_1) - n(z_2 + z_1) = 0 \Longrightarrow (1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - m - n = 0 \\ m - n = 0 \end{cases} \Longrightarrow m = n = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\vec{AM} = \frac{\vec{AC}}{2}$ e $\vec{OM} = \frac{\vec{OB}}{2}$.

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

- registro intrínsico: z_1 e z_2

Quadro Geométrico utilizado:

- registros $\begin{cases} \text{pontual: vértice do paralelogramo} \\ \text{vetorial: vetores associados aos lados e diagonais do paralelogramo} \end{cases}$

- conceito de soma vetorial

- condição de alinhamento

A demonstração desenvolveu-se quase que totalmente dentro de um quadro geométrico. A passagem para o quadro algébrico ocorreu apenas ao final, para obter-se a conclusão esperada.

Problema 4)

Estratégia:

Utilizar a fórmula de Moivre para a potenciação, atribuindo-se a n um valor conveniente que permita relacionar o valor de $\cos\frac{2\pi}{9}$ (desconhecido) com o valor de $\cos\frac{2\pi}{3}$ (conhecido).

~~Resolução:~~

Devemos provar que $2\cdot\cos\frac{2\pi}{9}$ é raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$, ou seja, mostrar que a igualdade

$$(2\cdot\cos\tfrac{2\pi}{9})^3 - 3(2\cdot\cos\tfrac{2\pi}{9}) + 1 = 0$$

é verdadeira.

Para isso, consideremos a fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\cdot\operatorname{sen} n\theta,\ \text{onde } n \in \mathbb{Z}$$

Fazendo-se $\theta = \frac{2\pi}{9}$ e $n = 3$, temos

$$\cos 3\cdot\frac{2\pi}{9} + i\cdot\operatorname{sen} 3\cdot\frac{2\pi}{9} = (\cos\frac{2\pi}{9} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9})^3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \cos^3\frac{2\pi}{9} + 3(\cos\frac{2\pi}{9})^2\, i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9} +$$

$$+ 3\cos\frac{2\pi}{9}\,(i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9})^2 + (i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9})^3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^3\frac{2\pi}{9} - 3\cos\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{9} +$$

$$+ i(3\cos^2\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9} - \operatorname{sen}^3\frac{2\pi}{9})$$

Da definição de igualdade de números complexos obtém-se

$$-\frac{1}{2} = \cos^3\frac{2\pi}{9} - 3\cos\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{9} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} = \cos^3\frac{2\pi}{9} - 3\cos\frac{2\pi}{9}(1 - \cos^2\frac{2\pi}{9}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} = 4\cos^3\frac{2\pi}{9} - 3\cos\frac{2\pi}{9} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 8\cos^3\frac{2\pi}{9} - 6\cos\frac{2\pi}{9} + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2\cos\frac{2\pi}{9})^3 - 3(2\cos\frac{2\pi}{9}) + 1 = 0$$

ou seja, $2\cos\frac{2\pi}{9}$ é raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$

Análise da resolução:

Na demonstração apresentada fez-se uso apenas de um quadro algébrico, com as seguintes representações:

- registros $\begin{cases} \text{trigonométrico: } (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \\ \text{cartesiano: } a + bi \end{cases}$

- fórmula de Moivre para a potenciação

- conceito de igualdade: $a+bi = c+di \iff a = c \text{ e } b = d$

Convém observar que o exercício poderia ter sido provado mediante a resolução da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$. Este problema está resolvido no capítulo II, onde as raízes da equação foram obtidas pelo método da trissecção de arcos.

Considerações finais

Ao final desta aula, todos se mostraram surpresos, dada a diversidade de aplicações dos números complexos apresentadas. Todos acharam que, sob certas condições, o uso dos números complexos facilita a resolução de problemas, mas que no nosso atual sistema de ensino, no qual os números complexos são ensinados ao final do 3º colegial, torna-se impraticável mostrar aos alunos as novas técnicas de resolução aprendidas.

C A P Í T U L O V I I

Ao término da aula anterior, ficou determinado que os professores, em grupos de três, desenvolveriam uma atividade no decorrer da semana seguinte, cujos resultados deveriam ser expostos oralmente na aula a que se refere esta unidade.

O objetivo dessa atividade era verificar até que ponto haviam sido assimiladas as técnicas de resolução de problemas estudadas.

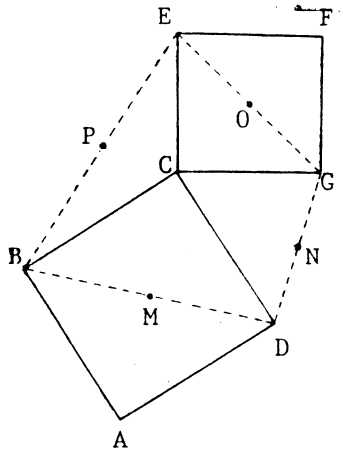
As questões propostas eram as seguintes:

1) Achar a equação da circunferência de centro no ponto (-2; -1) e raio 4.

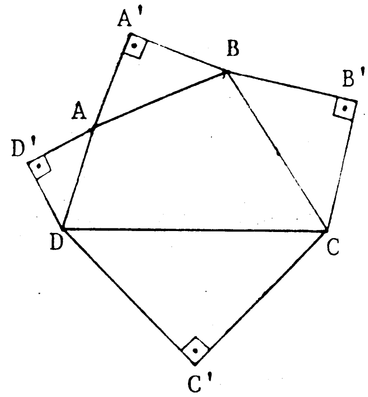
2) Mostrar que se dois inteiros são tais que cada um deles é a soma dos quadrados de dois inteiros, então o seu produto é também a soma dos quadrados de dois inteiros.

3) (Olimpíadas - Paris - 1987).

Sejam dois quadrados ABCD e CEFG tendo um vértice comum, conforme a figura ao lado, e sejam M, N, O e P os pontos médios dos lados $\overline{BD}$, $\overline{DG}$, $\overline{GE}$ e $\overline{EB}$, respectivamente. Qual é a natureza do quadrilátero MNOP?



4) Constroem-se na parte externa de um quadrilátero convexo ABCD, triângulos retângulos isósceles ABA', BCB', CDC' e DAD', conforme a figura ao lado. Mostrar que as diagonais do quadrilátero A'B'C'D' são ortogonais e de mesmo comprimento.



VII.1. ANÁLISE A PRIORI DAS QUESTÕES PROPOSTAS

Questão 1)

Como a resolução desta questão envolvia básicamente os mesmos conceitos utilizados nos exemplos resolvidos na aula anterior, esperava-se que os professores apresentassem a seguinte solução:

Estratégia:

Construir no plano complexo a circunferência, de acordo com os dados do problema, para visualizar as condições a serem impostas para a sua resolução. Considerar os pontos C(-2; -1) e P(x; y) (genérico) como imagens de números complexos e então impor as condições do problema.

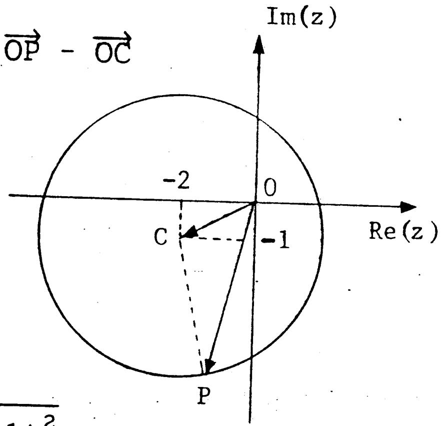
Resolução:

Sejam os números complexos $z_1 = -2 - i$ e $z = x + yi$ representantes dos vetores $\vec{OC}$ e $\vec{OP}$, respectivamente.

Devemos ter: $|\vec{CP}| = 4$.

Como $\vec{CP} + \vec{PO} + \vec{OC} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$

temos



$\vec{CP} = x + yi + 2 + i$

$\vec{CP} = (x + 2) + (y + 1)i$

e

$$|\vec{CP}| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 1)^2} = 4$$

Portanto, a equação da circunferência é

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

- registro cartesiano: a + bi

■ conceitos $\begin{cases} \text{adição: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i \\ \text{módulo: } \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

Quadro Geométrico utilizado:

■ registros $\begin{cases} \text{pontual: C e P, imagens de números complexos} \\ \text{vetorial: construção dos vetores } \vec{OC} \text{ e } \vec{OP} \end{cases}$

■ conceito de soma vetorial

A resolução do problema teve início dentro de um quadro geométrico, ao serem impostas as condições do problema. Em seguida, passamos ao quadro algébrico (ao substituirmos, nas condições impostas, os vetores pelos seus respectivos representantes), dentro do qual chegamos ao resultado procurado.

Questão 2)

Estratégia:

Lembrando que "o produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual à soma dos quadrados de dois números reais", vamos considerar dois números complexos cujas partes reais e imaginárias sejam números inteiros, para então fazer uso dessa propriedade.

Resolução:

Por hipótese, temos dois inteiros x e y, tais que

$x = a^2 + b^2$ e $y = c^2 + d^2$, com a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$

~~Devemos mostrar~~ que $x \cdot y = w^2 + v^2$, com $w, v \in \mathbb{Z}$.

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, e temos

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = x$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = (c + di)(c - di) = c^2 + d^2 = y$$

Logo,

$$x \cdot y = (z_1 \cdot \bar{z}_1)(z_2 \cdot \bar{z}_2) = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2})$$

Como $z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i$

fazendo-se $ac - bd = w \in \mathbb{Z}$ e $ad + bc = v \in \mathbb{Z}$

tem-se que $x \cdot y = w^2 + v^2$.

<u>Análise da resolução</u>:

O problema teve sua resolução feita exclusivamente dentro de um quadro algébrico.

Quadro Algébrico utilizado:

- registro cartesiano: $a + bi$

- conceitos
$$\begin{cases} \text{conjugado: } z = a + bi \Longrightarrow \bar{z} = a - bi \\ \text{multiplicação: } (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + \\ \qquad + (ad+bc)i \end{cases}$$

- propriedades
$$\begin{cases} z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \\ \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2} \end{cases}$$

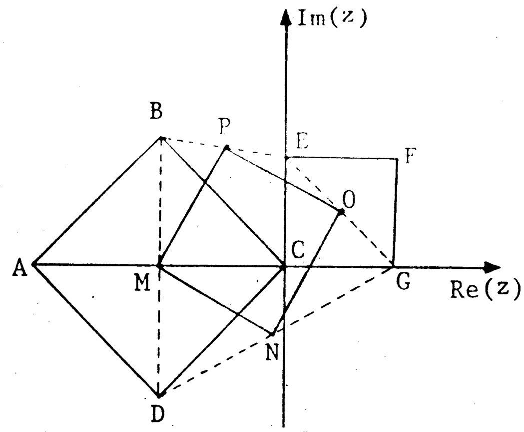
Questão 3)

Estratégia:

Representar, de modo conveniente, a figura dada no plano complexo, a fim de facilitar os cálculos envolvidos na resolução. Representar os lados por vetores associados a números complexos e então analisar os lados do quadrilátero (comprimento e condições de ortogonalidade ou de paralelismo).

Resolução:

Sejam



$$\begin{cases} \vec{CG} = 1; \ \vec{CE} = i; \ \vec{CF} = 1 + i \\ \vec{CB} = \rho e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} = \rho\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ \qquad = -\frac{\sqrt{2}\rho}{2} + \frac{\sqrt{2}\rho}{2} i \\ \vec{CA} = \rho\sqrt{2} e^{i\pi} = -\rho\sqrt{2} \\ \vec{CD} = \rho e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{2}\rho}{2} - \frac{\sqrt{2}\rho}{2} i \end{cases}$$

e temos

$$\vec{CO} = \frac{\vec{CF}}{2} \Longrightarrow \vec{CO} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$\vec{CM} = \frac{\vec{CA}}{2} \Longrightarrow \vec{CM} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$$

Determinemos os vetores associados aos lados do quadriláteros MNOP:

$$\vec{NO} + \vec{OC} + \vec{CN} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{NO} = \vec{CO} - \vec{CN} \qquad (1)$$

$$\vec{OP} + \vec{PC} + \vec{CO} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{OP} = \vec{CP} - \vec{CO} \qquad (2)$$

$$\vec{MP} + \vec{PC} + \vec{CM} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{PM} = \vec{CM} - \vec{CP} \qquad (3)$$

$$\vec{NM} + \vec{MC} + \vec{CN} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{NM} = \vec{CM} - \vec{CN} \qquad (4)$$

Cálculo de $\vec{CN}$:

$$\vec{CN} + \vec{NG} + \vec{GC} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{CN} = \vec{CG} - \vec{NG}$$

Como

$$\vec{NG} = \frac{\vec{DG}}{2} \quad \text{e} \quad \vec{DG} = \vec{CG} - \vec{CD} = 1 + \frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\, i$$

temos:

$$\vec{NG} = \frac{1}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\, i$$

Logo,

$$\vec{CN} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\, i \Longrightarrow \vec{CN} = \frac{2 - \rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\, i \qquad (I)$$

Cálculo de $\vec{CP}$:

$$\vec{CP} + \vec{PB} + \vec{BC} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{CP} = \vec{CB} - \vec{PB}$$

Como

$$\vec{PB} = \frac{\vec{EB}}{2} \quad \text{e} \quad \vec{EB} = \vec{CB} - \vec{CE} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\, i - i$$

temos:

$$\vec{PB} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\, i - \frac{i}{2}$$

Logo,

$$\overrightarrow{CP} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\,i + \frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i + \frac{i}{2}$$

$$\overrightarrow{CP} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4}\right) i \qquad \text{(II)}$$

Substituindo-se (I) em (1), temos:

$$\overrightarrow{NO} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i - \frac{2 - \rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i \Longrightarrow \overrightarrow{NO} = \frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4}\,i$$

Substituindo-se (I) em (4), temos:

$$\overrightarrow{NM} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i \Longrightarrow \overrightarrow{NM} = -\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i$$

Substituindo-se (II) em (2), temos:

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4}\right) i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i \Longrightarrow \overrightarrow{OP} = -\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i$$

Substituindo-se (II) em (3), temos:

$$\overrightarrow{PM} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4}\right) i \Longrightarrow \overrightarrow{PM} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4}\right) i$$

Fazendo $\frac{\rho\sqrt{2}}{4} = a$ e $\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4} = b$, temos

$\overrightarrow{NO} = a + bi$; $\overrightarrow{NM} = -b + ai$; $\overrightarrow{OP} = -b + ai$; $\overrightarrow{PM} = -a - bi$

Logo,

$$|\overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{NM}| = |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \text{(A)}$$

ou seja, o quadrilátero MNOP tem os quatro lados de medidas iguais

Calculemos o produto escalar $\overrightarrow{NO} \circ \overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{NO} \circ \overrightarrow{OP} = a\cdot(-b) + b\cdot a = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{NO} \perp \overrightarrow{OP} \qquad (B)$$

De (A) e (B) conclui-se que MNOP é um quadrado.

<u>Análise da resolução:</u>

Quadro Algébrico utilizado:

- registros
  - exponencial: $\rho e^{i\theta}$
  - trigonométrico: $\rho(\cos\theta + i\cdot \operatorname{sen}\theta)$
  - cartesiano: $a + bi$

- conceitos
  - adição: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
  - módulo: $\sqrt{a^2 + b^2}$
  - produto escalar: $z_1 \circ z_2 = \operatorname{Re}(\overline{z}_1 \cdot z_2)$

Quadro Geométrico utilizado:

- registros
  - pontual
  - vetorial

- conceitos
  - soma vetorial
  - igualdade de comprimentos
  - condição de perpendicularismo

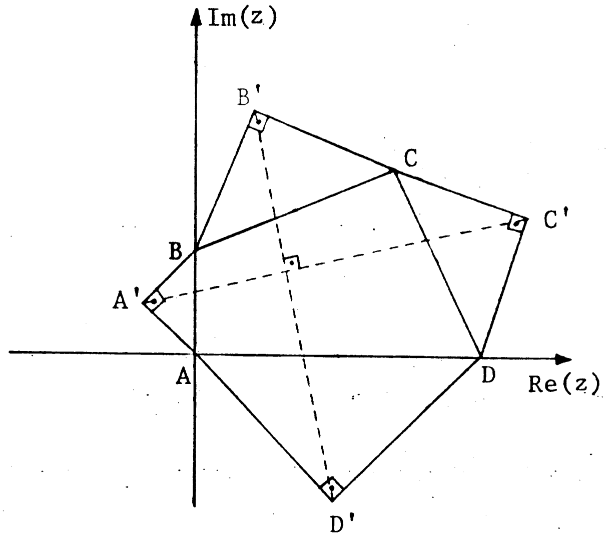
Iniciou-se a resolução dentro de um quadro geométrico, ao serem associados vetores aos lados dos quadrados dados e do quadrilátero MNOP construído; a seguir passou-se a um quadro algébrico, ao serem usados números complexos como representantes daqueles vetores e efetuarem-se as operações para determinar os vetores associados aos lados do quadrilátero ...

quadrilátero em questão é determinada dentro de um quadro geométrico.

Questão 4)

Estratégia:

Representar, de modo conveniente, a figura dada no plano complexo, a fim de facilitar os cálculos envolvidos na resolução; usar números complexos como representantes de vetores associados aos lados do quadrilátero e aplicar as condições de ortogonalidade e igualdade de comprimentos para os vetores associados a $\overline{B'D'}$ e $\overline{A'C'}$.



Resolução:

Sejam

$\vec{AD} = 1$

$\vec{AB} = \lambda e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = \lambda i$

$\vec{AC} = \rho e^{i\theta}$

e temos:

$\vec{AD'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i$

$\vec{AA'} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\, i$

$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \Longrightarrow \vec{BC} = \rho e^{i\theta} - \lambda i$

$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} \Longrightarrow \vec{CD} = 1 - \rho e^{i\theta}$

Determinemos os vetores $\overline{B'D'}$ e $\overline{A'C'}$

$$\vec{AB} + \vec{BB'} + \vec{B'D'} + \vec{D'A} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{B'D'} = \vec{AD'} - \vec{AB} - \vec{BB'} \qquad (1)$$

$$\vec{AA'} + \vec{A'C'} + \vec{C'D} + \vec{DA} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{A'C'} = \vec{AD} - \vec{AA'} - \vec{C'D} \qquad (2)$$

Cálculo de BB':

Como o triângulo BB'C é retângulo em B': B'C = i·B'B mas

$$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{BB'} + i\cdot\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (1-i)\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}\cdot\overrightarrow{BB'} = \rho e^{i\theta} - \lambda i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\, e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} - \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\, e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\,\theta + i(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)\right] -$$

$$- \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{\rho(\cos\theta - \text{sen}\,\theta) + \lambda}{2} + \left[\frac{\rho(\text{sen}\,\theta + \cos\theta) - \lambda}{2}\right] i \qquad (I)$$

Cálculo de $\overrightarrow{C'D}$:

Como o triângulo CC'D é retângulo em C': $\overrightarrow{C'C} = -\, i\cdot\overrightarrow{C'D}$ mas,

$$\overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{C'D} - \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{C'D} + i\cdot\overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow (1+i)\overrightarrow{C'D} = 1 - \rho e^{i\theta} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\cdot\overrightarrow{C'D} = 1 - \rho e^{i\theta} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{C'D} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4})} - \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\, e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{C'D} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i) -$$

$$- \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\,\theta + i(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}\,\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)\right] \Longrightarrow$$

$$\therefore \overrightarrow{C'D} = \frac{1 - \rho(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)}{2} - \left[\frac{1 + \rho(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)}{2}\right] i \quad (II)$$

Substituindo-se (II) em (2), temos:

$$\overrightarrow{A'C'} = 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda i}{2} - \frac{1 - \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{2} +$$

$$+ \left[\frac{1 + \rho(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)}{2}\right] i = \frac{1 + \lambda + \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{2} +$$

$$+ \left[\frac{1 - \lambda - \rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{2}\right] i$$

Substituindo-se (I) em (1), temos:

$$\overrightarrow{B'D'} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \lambda i - \frac{\rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + \lambda}{2} -$$

$$- \left[\frac{\rho(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - \lambda}{2}\right] i = \frac{1 - \lambda - \rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{2} -$$

$$- \left[\frac{1 + \lambda + \rho(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{2}\right] i$$

Fazendo-se

$$\frac{1 - \lambda - \rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{2} = a \quad e \quad \frac{1 + \lambda + \rho(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{2} = b$$

temos $\overrightarrow{B'D'} = a - bi$ e $\overrightarrow{A'C'} = b + ai$.

Como $|\overrightarrow{B'D'}| = |\overrightarrow{A'C'}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

conclui-se as diagonais $\overline{B'D'}$ e $\overline{A'C'}$ têm mesmo comprimento.

Calculando-se o produto escalar $\overrightarrow{B'D'} \circ \overrightarrow{A'C'}$, temos

$$\overrightarrow{B'D'} \circ \overrightarrow{A'C'} = a \cdot b + (-b) \cdot a = 0$$

ou seja, $\overrightarrow{B'D'} \perp \overrightarrow{A'C'}$.

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

$$\text{registros}\begin{cases}\text{exponencial: } \rho e^{i\theta}\\ \text{cartesiano: } a + bi\\ \text{trigonométrico: } \rho(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta)\end{cases}$$

$$\text{conceitos}\begin{cases}\text{adição: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i\\ \text{divisão: } \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}\\ \text{módulo: } \sqrt{a^2 + b^2}\\ \text{produto escalar: } z_1 \circ z_2 = \mathrm{Re}(\bar{z}_1\cdot z_2)\end{cases}$$

Quadro Geométrico utilizado:

$$\text{registros}\begin{cases}\text{pontual}\\ \text{vetorial}\end{cases}$$

$$\text{conceitos}\begin{cases}\text{soma vetorial}\\ \text{igualdade de comprimentos}\\ \text{operador de perpendicularidade } (i)\\ \text{condição de perpendicularismo}\end{cases}$$

A resolução do problema teve início dentro de um quadro geométrico, quando associamos vetores aos lados do quadrilátero e triângulos dados e, em seguida, efetuamos as operações dentro de um quadro algébrico. Finalmente, para obtermos as conclusões esperadas passamos novamente a um quadro geométrico, ao ser imposta a condição de ortogonalidade para $\overline{B'D'}$ e $\overline{A'C'}$.

A realização desta atividade exigiu um grande esforço de todos os professores, já que os problemas propostos eram de difícil resolução e exigiram que fossemos procurados durante toda a semana que antecedeu esta aula para esclarecimento de dúvidas.

Como já mencionamos no início desta unidade, a atividade deveria ser desenvolvida em grupos de três professores e seu resultado exposto oralmente por um elemento de cada grupo. Entretanto, como a maior parte dos professores, independentemente de seus grupos, esteve discutindo as soluções dos problemas em conjunto, foi por eles sugerido que apenas quatro grupos apresentassem seus resultados e os demais apenas destacassem quaisquer diferenças entre as suas resoluções e aquelas expostas.

Para a execução do trabalho, foram mantidos os mesmos grupos reunidos no capítulo IV, por sugestão dos próprios professores, ou sejam,

Grupo I: NTW, RSS, VSC
Grupo II: KSY, MB, WSR
Grupo III: FAM, LRL, MMB
Grupo IV: CSB, RR, LTS
Grupo V: RCA, ACB, ASS
Grupo VI: EAT, VMZ, MCR
Grupo VII: SM, AMR, MAS
Grupo VIII: IMB, ARS, AMP
Grupo IX: SCT, SMZ, USD
Grupo X: EPZ, ACS, JF

Os grupos escolhidos para a exposição dos problemas foram X, VII, III e V, que apresentaram as questões 1), 2), 3) e 4), respectivamente.

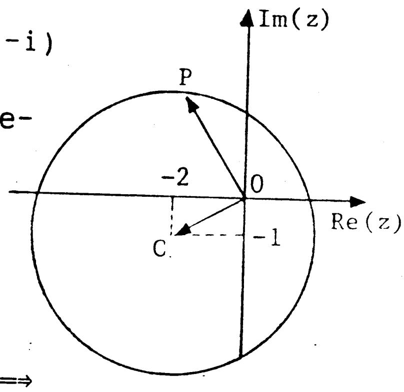
Estratégia:

Desenhar a circunferência dada no plano para visualizar o problema e impor as condições para sua resolução.

Resolução:

Seja P(x; y) um ponto qualquer da circunferência dada (λ) e x + yi o número complexo representante do vetor $\vec{OP}$ ($\vec{OP}$ = x + yi).

Dado C(-2; -1), seja -2 -i o número complexo representante do vetor $\vec{OC}$ ($\vec{OC}$ = -2 -i)



Se P $\in \lambda$, devemos ter $d_{PC} = 4$ ou seja, $|\vec{PC}| = 4$.

Calculemos $|\vec{PC}|$:

$$\vec{PC} + \vec{CO} + \vec{OP} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{PC} = \vec{OC} - \vec{OP} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{PC} = -2 - i - x - yi = -(x+2) - (y+1)i$$

$$|\vec{PC}| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2}$$

Como $|\vec{PC}| = 4$, então

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 4$$

Portanto, $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$, que é a equação procurada.

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

- registro cartesiano: $a + bi$
- conceito de módulo: $\sqrt{a^2 + b^2}$

Quadro Geométrico utilizado:

- registro pontual
- registro vetorial
- conceito de soma vetorial

Observações feitas pelos grupos III, V e VI:

- deve ser acrescentado no quadro algébrico utilizado o conceito de adição na forma algébrica.

Observação feita por nós:

- na análise da resolução não foi evidenciado o jogo de quadros envolvido.

Questão 2) - Grupo VII

Estratégia:

Considerar a definição de norma de um número complexo $z = a + bi$, quando a e b são números inteiros $(N(z) = a^2 + b^2)$.

Resolução:

$$H \begin{cases} x = a^2 + b^2, \text{ com } a, b \in \mathbb{Z} \\ y = c^2 + d^2, \text{ com } c, d \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad T\{x \cdot y = r^2 + s^2, \text{ com } r, s \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

Dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, nos quais $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, temos por hipótese que:

$$x = N(z_1) = a^2 + b^2$$

$$y = N(z_2) = c^2 + d^2$$

Como $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$, então

$$x \cdot y = N(z_1) \cdot N(z_2) = N(z_1 \cdot z_2)$$

mas,

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Logo,

$$x \cdot y = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = r^2 + s^2$$

Análise da resolução:

A resolução do problema efetuou-se dentro de um quadro algébrico.

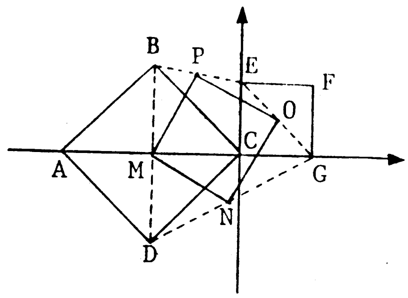
Foram utilizadas:

- expressões do tipo: a + bi (registro cartesiano)
- conceitos de conjugado e norma
- definição de multiplicação
- propriedade da norma de um complexo

Questão 3) - Grupo III

Estratégia:

Construir a figura no plano para facilitar a resolução e impor as condições do problema.



Resolução:

Consideremos

$\vec{CG} = 1$; $\vec{CE} = i$; $\vec{CF} = 1 + i$

$\vec{CB} = \rho(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2} i$

$\vec{CA} = -\rho\sqrt{2}$; $\vec{CD} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} - \frac{\rho\sqrt{2}}{2} i$

$\vec{CO} = \frac{\vec{CF}}{2} = \frac{1 + i}{2}$ e $\vec{CM} = \frac{\vec{CA}}{2} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$

Determinemos os vetores associados aos lados do quadrilátero MNOP:

I. $\vec{MN} = ?$

$$\vec{MN} + \vec{NC} + \vec{CM} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{MN} = \vec{CN} - \vec{CM} = \vec{CN} + \frac{\rho\sqrt{2}}{2}$$

mas,

$$\vec{CN} + \vec{NG} + \vec{GC} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{CN} = \vec{CG} - \vec{NG} = \vec{CG} - \frac{\vec{DG}}{2}$$

e como

$$\vec{DG} + \vec{GC} + \vec{CD} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{DG} = \vec{CG} - \vec{CD}$$

temos

$$\vec{CN} = \vec{CG} - \frac{\vec{CG} - \vec{CD}}{2} = \frac{\vec{CG} + \vec{CD}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4} i$$

Logo,

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i + \frac{\rho\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \vec{MN} = \frac{2 + \rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i$$

II. $\vec{NO} = ?$

$$\vec{NO} + \vec{OC} + \vec{CN} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{NO} = \vec{CO} - \vec{CN}$$

Logo,

$$\vec{NO} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i \Longrightarrow \vec{NO} = \frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{2 + \rho\sqrt{2}}{4}\,i$$

III. $\vec{OP} = ?$

$$\vec{OP} + \vec{PC} + \vec{CO} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{OP} = \vec{CP} - \vec{CO}$$

mas,

$$\vec{CP} + \vec{PE} + \vec{EC} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{CP} = \vec{CE} - \vec{PE} = \vec{CE} - \frac{\vec{BE}}{2}$$

e como

$$\vec{BE} + \vec{EC} + \vec{CB} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{BE} = \vec{CE} - \vec{CB}$$

temos

$$\vec{CP} = \vec{CE} - \frac{\vec{CE} - \vec{CB}}{2} = \frac{\vec{CE} + \vec{CB}}{2} = \frac{i}{2} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i$$

Logo,

$$\vec{OP} = \frac{i}{2} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \Longrightarrow \vec{OP} = -\frac{\rho\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\,i$$

IV. $\vec{PM} = ?$

$$\vec{PM} + \vec{MC} + \vec{CP} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{PM} = \vec{CM} - \vec{CP}$$

Logo,

$$\vec{PM} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2} - \frac{i}{2} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\, i \Longrightarrow \vec{PM} = -\frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\rho\sqrt{2}}{4}\, i$$

Cálculo do comprimento dos lados:

$$|\vec{MN}| = \sqrt{\left(\frac{2+\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2}; \qquad |\vec{OP}| = \sqrt{\left(-\frac{\rho\sqrt{2}+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$|\vec{NO}| = \sqrt{\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2+\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2}; \qquad |\vec{PM}| = \sqrt{\left(-\frac{\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{2+\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

Logo, $|\vec{MN}| = |\vec{NO}| = |\vec{OP}| = |\vec{PM}|$, isto é, o quadrilátero MNOP tem os quatro lados iguais.

Calculando-se $i \cdot \vec{NO}$, tem-se

$$i \cdot \vec{NO} = i\left[\frac{\rho\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{2+\rho\sqrt{2}}{4}\right) i\right] = -\frac{2+\rho\sqrt{2}}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\, i = -\vec{MN} = \vec{NM}$$

ou seja, $\vec{NO} \perp \vec{NM}$.

Calculando-se $i \cdot \vec{OP}$, tem-se

$$i \cdot \vec{OP} = i\left(-\frac{\rho\sqrt{2}+2}{4} + \frac{\rho\sqrt{2}}{4}\, i\right) = -\frac{\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\rho\sqrt{2}+2}{4} \cdot i = -\vec{NO} = \vec{ON}$$

ou seja, $\vec{OP} \perp \vec{ON}$.

Portanto, se o quadrilátero MNOP tem os quatro lados iguais e ainda $\overrightarrow{NO} \perp \overrightarrow{NM}$ e $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{ON}$, então ele é um quadrado.

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

- registros $\begin{cases} \text{cartesiano: } a + bi \\ \text{trigonométrico: } \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \end{cases}$

- conceitos $\begin{cases} \text{adição} \\ \text{subtração} \\ \text{multiplicação por } i \\ \text{módulo} \end{cases}$

Quadro Geométrico utilizado:

- registro: pontual e vetorial

- conceitos $\begin{cases} \text{soma vetorial} \\ \text{igualdade de comprimentos} \\ \text{operador de perpendicularidade } (i) \end{cases}$

Observação dos grupos II, IV, VI e X:

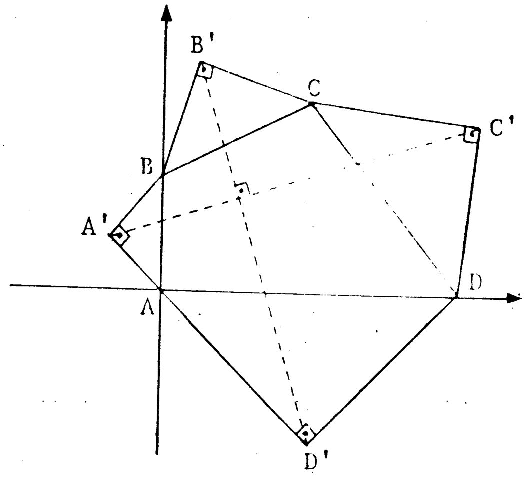
Esses grupos apenas acrescentaram que, assim como nós na análise a priori da questão, usaram os conceitos de produto escalar e produto vetorial para verificar as condições de perpendicularismo e paralelismo dos lados.

Questão 4) - Grupo V

Estratégia:

Representar a figura no plano de modo a facilitar a resolução do problema. Usar números complexos como representantes dos vetores que serão associados aos lados do quadrilátero.

Considerando-se $\overrightarrow{AD} = 1$; $\overrightarrow{AB} = ki$, com $k > 0$, e $\overrightarrow{AC} = \rho e^{i\theta}$, temos:



$\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$; $\overrightarrow{AA'} = -\frac{k}{2} + \frac{k}{2}i$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \rho e^{i\theta} - ki$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 1 - \rho e^{i\theta}$

1) Cálculo de $\overrightarrow{B'D'}$:

$$\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AD'}$$

como $\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA}$, tem-se que

$$\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD'} \qquad \text{(I)}$$

Determinemos $\overrightarrow{B'B}$

$$\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{B'C} = i \cdot \overrightarrow{B'B}$$

Logo,

$$\overrightarrow{B'B} = i \cdot \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CB} \Longrightarrow (1 - i)\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{CB} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} \cdot \overrightarrow{B'B} = ki - \rho e^{i\theta} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{B'B} = \frac{k\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} - \frac{\rho\sqrt{2}}{2} e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} =$$

$$= \frac{k\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i) - \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta +$$

$$+ i(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)\Big] =$$

$$= -\frac{k + \rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{2} + \frac{k - \rho(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{2} i$$

e temos, em (I):

$$\overrightarrow{B'D'} = -\frac{k + \rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{2} + \frac{k - \rho(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{2} \cdot i - ki + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\overrightarrow{B'D'} = -\frac{k - 1 + \rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{2} - \frac{k + 1 + \rho(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{2} \cdot i$$

Cálculo de $\overrightarrow{A'C'}$:

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC'} = \frac{k}{2} - \frac{k}{2} i + \overrightarrow{AC'}$$

como $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC'} = 1 + \overrightarrow{CD'}$ tem-se que

$$\overrightarrow{A'C'} = \frac{k}{2} - \frac{k}{2} i + 1 + \overrightarrow{DC'} \qquad \text{(II)}$$

Determinemos $\overrightarrow{DC'}$

$$\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{C'C} = -(-i \cdot \overrightarrow{C'D}) = i \cdot \overrightarrow{C'D}$$

Logo,

$$\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{DC} + i \cdot \overrightarrow{C'D} \implies \overrightarrow{DC'} + i \cdot \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{DC} \implies (1+i)\overrightarrow{DC'} = -\overrightarrow{CD} \implies$$

$$\implies \sqrt{2}e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot \overrightarrow{DC'} = -1 + \rho e^{i\theta} \implies \overrightarrow{DC'} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} +$$

$$+ \frac{\rho\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\theta + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\theta\right)\right] \implies$$

$$\implies \overrightarrow{DC'} = -\frac{1 - \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{2} + \frac{1 + \rho(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)}{2} \cdot i$$

e temos, em (II),

$$\overrightarrow{A'C'} = \frac{k}{2} - \frac{k}{2} i + 1 - \frac{1 - \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{2} + \frac{1 + \rho(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)}{2} \cdot i$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \frac{k + 1 + \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{2} + \frac{1 - k + \rho(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)}{2} \cdot i$$

Como $\operatorname{Re}(\overrightarrow{B'D'}) = \operatorname{Im}(\overrightarrow{A'C'})$ e $\operatorname{Im}(\overrightarrow{B'D'}) = -\operatorname{Re}(\overrightarrow{A'C'})$, temos

$$\overrightarrow{B'D'} = x + yi \quad \text{e} \quad \overrightarrow{A'C'} = -y + xi$$

Logo,

$$|\overrightarrow{B'D'}| = |\overrightarrow{A'C'}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (*)$$

e o produto escalar $\overrightarrow{B'D'} \circ \overrightarrow{A'C'}$ é tal que

$$\overrightarrow{B'D'} \circ \overrightarrow{A'C'} = x \cdot (-y) + y \cdot x = 0 \qquad (**)$$

e, de (*) e (**), concluiu-se que $\overline{B'D'}$ e $\overline{A'C'}$ têm o mesmo comprimento e são ortogonais.

Análise da resolução:

Quadro Algébrico utilizado:

- notações $\begin{cases} \text{exponencial: } \rho e^{i\theta} \\ \text{cartesiana: } a + bi \\ \text{trigonométrica: } \rho(\cos\theta + i\cdot \text{sen}\,\theta) \end{cases}$

- conceitos: adição, multiplicação, divisão e módulo

Quadro Geométrico utilizado:

- representações: pontual e vetorial

- conceitos: soma vetorial, igualdade de comprimentos, operador de perpendicularidade e condição de perpendicularismo.

Observação.

Não foram feitos quaisquer comentários pelos demais grupos, com respeito à resolução deste problema.

VII.3. RESULTADOS GLOBAIS

Estes resultados não foram tabulados pelo fato de que, no decorrer da semana, estivemos esclarecendo dúvidas de todos os professores e isto fez com que os grupos resolvessem os problemas de maneira bastante similar. As pequenas diferenças foram destacadas nas observações feitas após a apresentação de cada exercício.

Entretanto, convém destacar aqui alguns esclarecimentos que se fizeram necessários para o desenvolvimento da atividade proposta:

- as definições de produtos escalar e vetorial usadas para impor as condições de perpendicularismo e paralelismo, respectivamente:

Sejam os complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, representantes de dois vetores $\overrightarrow{OM}_1$ e $\overrightarrow{OM}_2$, respectivamente.

Se θ, $0 \le \theta < 2\pi$, é o ângulo entre z_1 e z_2, definem-se Produto escalar de z_1 e z_2, por:

$$z_1 \circ z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos\theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \mathrm{Re}(\overline{z}_1 \cdot z_2)$$

Produto vetorial de z_1 e z_2, por:

$$z_1 \times z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \mathrm{sen}\,\theta = x_1 y_2 - x_1 y_2 = \mathrm{Im}(\overline{z}_1 \cdot z_2)$$

Logo, se $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$, então

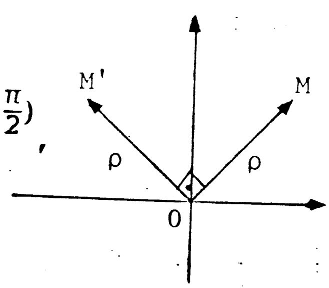
$$z_1 \perp z_2 \iff z_1 \circ z_2 = 0 \text{ (pois, } \theta = \tfrac{\pi}{2})$$

e

$$z_1 // z_2 \iff z_1 \times z_2 = 0 \text{ (pois } \theta = 0)$$

- o operador de perpendicularidade i, ou seja,

Dado $z = \rho e^{i\theta}$, tem-se



$$z \cdot i = (\rho e^{i\theta}) \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \rho e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})},$$

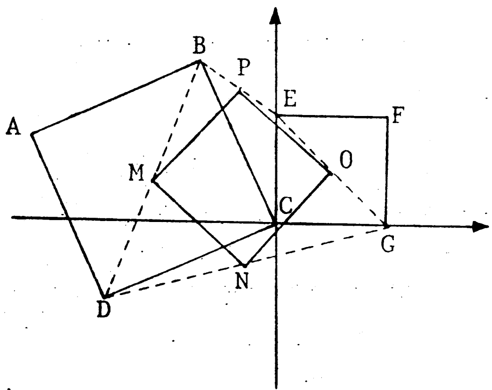
ou seja,

$$z \cdot i = z' = \overrightarrow{OM'} \text{ e } \overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{OM}$$

- a representação das figuras em posições convenientes, de modo a não comprometer a generalidade do problema e facilitar os cálculos envolvidos na resolução.

Convém aqui ressaltar que, relativamente aos problemas 3 e 4, foram sugeridas representações gráficas que permitissem uma maior facilidade na imposição das condições de resolução. Para isso, os dados dos professores foram particularizados conforme mostram as figuras por nós apresentadas, na análise a priori desta unidade e pelos professores em sua exposição oral (Questão 3: considerar a diagonal $\overline{AC}$, do quadrado ABCD, no eixo real; Questão 4: considerar $\overline{AB} \perp \overline{AD}$).

Entretanto, apresentaremos a seguir as resoluções dessas questões, de um modo mais geral:



Questão 3)

Resolução.

Sejam

$$
\begin{cases}
\vec{CG} = 1;\ \vec{CE} = i;\ \vec{CF} = 1 + i \\
\vec{CB} = \rho e^{i \cdot \alpha} = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \\
\vec{CA} = \rho\sqrt{2}e^{i(\alpha + \frac{\pi}{4})} = \rho\sqrt{2}\left[\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{4})\right] = \\
= \rho\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha + i(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha)\right] = \\
= \rho\cos\alpha - \rho\operatorname{sen}\alpha + i(\rho\operatorname{sen}\alpha + \rho\cos\alpha) \\
\vec{CD} = \rho e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \rho\left[\cos(a + \frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2})\right] = \\
= \rho\left[(-\operatorname{sen}\alpha) + i\cos\alpha\right] = -\rho\operatorname{sen}\alpha + i\rho\cos\alpha
\end{cases}
$$

e temos:

$$\overrightarrow{CO} = \frac{\overrightarrow{CF}}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA}}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{\rho \cos \alpha - \rho \operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{i(\rho \operatorname{sen} \alpha + \rho \cos \alpha)}{2}$$

Determinemos os vetores associados aos lados do quadrilátero MNOP:

$$\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN} = \vec{o} \Longrightarrow \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CN} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CO} = \vec{o} \Longrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CO} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM} = \vec{o} \Longrightarrow \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CP} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} = \vec{o} \Longrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} \qquad (4)$$

Cálculo de $\overrightarrow{CN}$:

$$\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GC} = \vec{o} \Longrightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{CG} - \frac{\overrightarrow{DG}}{2} = \frac{2\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{DG}}{2}$$

Como

$$\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} = \vec{o} \Longrightarrow \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CD}$$

temos:

$$\overrightarrow{CN} = \frac{2\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD}}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD}}{2}$$

Logo,

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1 - \rho \operatorname{sen} \alpha}{2} + i \cdot \frac{\rho \cos \alpha}{2} \qquad (I)$$

Cálculo de $\overrightarrow{CP}$:

$$\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB} - \frac{\overrightarrow{EB}}{2} = \frac{2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EB}}{2}$$

Como

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CE}$$

temos:

$$\overrightarrow{CP} = \frac{2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}}{2}$$

Logo,

$$\overrightarrow{CP} = \frac{\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) + i}{2}$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{\rho\cos\alpha}{2} + i \cdot \left(\frac{1 + \rho\operatorname{sen}\alpha}{2}\right) \qquad \text{(II)}$$

Substituindo-se (I) em (1), temos:

$$\overrightarrow{NO} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1 - \rho\operatorname{sen}\alpha}{2} - i \cdot \frac{\rho\cos\alpha}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{NO} = \frac{\rho\operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{1 - \rho\cos\alpha}{2} \cdot i$$

Substituindo-se (I) em (4), temos:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1 - \rho\operatorname{sen}\alpha}{2} + i \cdot \frac{\rho\cos\alpha}{2} - \frac{\rho\cos\alpha - \rho\operatorname{sen}\alpha}{2} -$$

$$- \frac{i(\rho\operatorname{sen}\alpha + \rho\cos\alpha)}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1 - \rho\cos\alpha}{2} - \frac{\rho\operatorname{sen}\alpha}{2} \cdot i$$

Substituindo-se (II) em (2), temos:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\rho \cos \alpha}{2} + \left(\frac{1 + \rho \operatorname{sen} \alpha}{2}\right)i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OP} = -\frac{1 - \rho \cos \alpha}{2} + \frac{\rho \operatorname{sen} \alpha}{2} \cdot i$$

Substituindo-se (II) em (3), temos:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\rho \cos \alpha - \rho \operatorname{sen} \alpha}{2} - \left(\frac{\rho \operatorname{sen} \alpha + \rho \cos \alpha}{2}\right)i - \frac{\rho \cos \alpha}{2} -$$

$$- \left(\frac{1 + \rho \operatorname{sen} \alpha}{2}\right)i \Longrightarrow \overrightarrow{PM} = -\frac{\rho \operatorname{sen} \alpha}{2} - \frac{1 - \rho \cos \alpha}{2} \cdot i$$

Fazendo-se $\frac{\rho \operatorname{sen} \alpha}{2} = a$ e $\frac{1 - \rho \cos \alpha}{2} = b$, temos

$$\overrightarrow{NO} = a + bi;\ \overrightarrow{MN} = b - ai;\ \overrightarrow{OP} = -b + ai;\ \overrightarrow{PM} = -a - bi$$

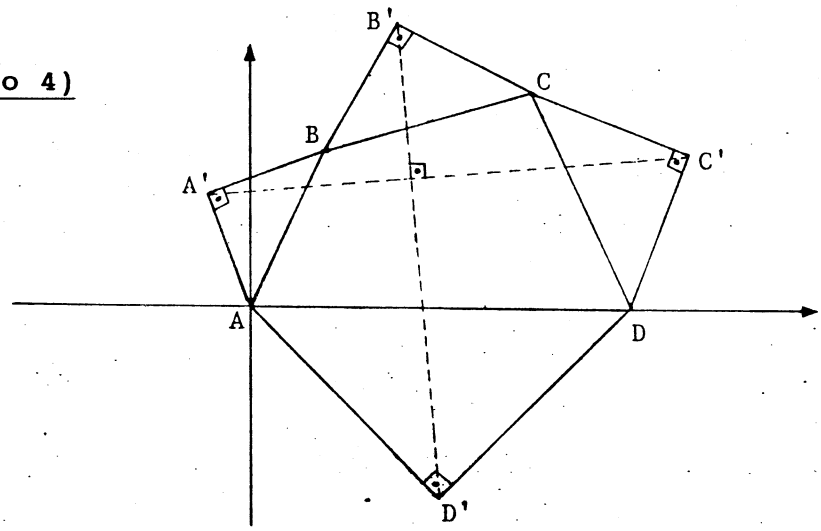
Logo, $|\overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ou seja, o quadrilátero MNOP tem os quatro lados de medidas iguais. (A)

Calculemos o produto escalar $\overrightarrow{NO} \circ \overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{NO} \circ \overrightarrow{OP} = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{NO} \perp \overrightarrow{OP} \qquad (B)$$

De (A) e (B) conclui-se que MNOP é um quadrado.

Questão 4)



Resolução:

Sejam a,b,c,d,a',b',c' e d' os afixos de A,B,C,D,A',B', C' e D', respectivamente.

Como por hipótese, os triângulos AA'B, BB'C, CC'D e DD'A são retângulos e isósceles, temos

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'B} = i \cdot \overrightarrow{A'A} \\ \overrightarrow{B'C} = i \cdot \overrightarrow{B'B} \\ \overrightarrow{C'D} = i \cdot \overrightarrow{C'C} \\ \overrightarrow{D'A} = i \cdot \overrightarrow{D'D} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b - a' = i(a - a') & (1) \\ c - b' = i(b - b') & (2) \\ d - c' = i(c - c') & (3) \\ a - d' = i(d - d') & (4) \end{cases}$$

Subtraindo-se membro a membro (1) e (3), temos:

$$(b - d) - (a' - c') = i[(a - c) - (a' - c')] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b - d) - i(a - c) = (a' - c') - i(a' - c') \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b - d) - i(a - c) = (a' - c')(1 - i) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b - d) - i(a - c) = (c' - a')(i - 1) \qquad (I)$$

Subtraindo-se membro a membro (2) e (4), temos:

$$(c - a) - (b' - d') = i[(b - d) - (b' - d')] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (c - a) - i(b - d) = (b' - d') - i(b' - d') \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (c - a) - i(b - d) = (b' - d')(1 - i) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (c - a) - i(b - d) = (d' - b')(i - 1) \qquad (II)$$

Dividindo-se membro a membro (I) por (II), obtém-se

$$\frac{(b - d) - i(a - c)}{(c - a) - i(b - d)} = \frac{c' - a'}{d' - b'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{i[(c - a) - i(b - d)]}{(c - a) - i(b - d)} = \frac{c' - a'}{d' - b'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c' - a' = i(d' - b') \Longrightarrow \overrightarrow{A'C'} = i \cdot \overrightarrow{B'D'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{A'C'}| = |\overrightarrow{B'D'}| \\ \text{e} \\ \overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{B'D'} \end{cases}$$

Considerações finais

A atividade proposta para esta aula exigiu um grande esforço de todos, já que os problemas envolviam conceitos e técnicas de resolução com as quais os professores não estavam habituados a trabalhar. Contudo, foi muito gratificante para nós, perceber que mesmo aqueles professores que, desde o início do curso, sentiam dificuldades em acompanhar os trabalhos, nesta aula, conseguiram superar-se e atingir os objetivos propostos.

C A P Í T U L O V I I I

Este capítulo é referente à análise das respostas ao questionário seguinte, aplicado ao término do curso:

1) Se você já ensina ou vai ensinar os números complexos, o curso feito vai alterar sua organização usual? E como?

2) Quais são, para você, as coisas verdadeiramente importantes na teoria dos números complexos?

3) O que foi ensinado mudou a sua visão da Matemática?

4) Que sugestões você daria para melhorar este ensino?

A análise das respostas a estas questões, nos levaram a concluir que:

- todos os professores alteraram sua postura em relação ao ensino dos números complexos, ou seja, passaram a ver a importância de se apresentar a historicidade de tal assunto como complemento da aprendizagem.

- todos entenderam a importância de se estender a utilização dos números complexos a outras áreas de estudo, tais como a Geometria Plana, a Geometria Analítica, a Trigonometria, etc., como instrumento na resolução de problemas.

- embora todos fossem unânimes em admitir a real importância de tal estudo no trabalho em sala de aula, todos consideram que as possibilidades de sua aplicação são muito restritas, dada a situação precária em que se encontra o ensino em nosso país atualmente. Contudo, todos manifestaram um grande interesse em estender o uso da epistemologia a outras áreas de estudo, a nível do 2º grau.

- como sugestões para a melhoria do ensino dos números complexos, destacamos:

  - que os números complexos deveriam ser introduzidos na primeira série do 2º grau, como representantes de vetores. Isto estimularia a aplicação desses números em outros tópicos a serem desenvolvidos ao longo do 2º grau.

  - que o desenvolvimento da teoria dos números complexos deveria ser feito paralelamente ao da trigonometria a fim de facilitar a dedução de fórmulas e resolução de problemas de um ou outro assunto.

Queremos, ao término deste trabalho, deixar algumas questões para que sejam objeto de reflexão para aqueles que se dedicam ao ensino, em particular, ao ensino da matemática:

Considerando que a formulação dos objetivos educacionais deve ser feita de modo consciente:

Como formular nossos objetivos envolvendo o que foi estudado, diante da realidade do nosso processo educacional?

Como adequar esses objetivos a nossos alunos, em função das atividades que eles venham a desempenhar?

A gratificação sentida pelos resultados obtidos ao final deste curso nos faz crer que possamos ter contribuído para que os professores envolvidos se empenhem em fazer uso da epistemologia na didática da matemática.

APÊNDICE

P.U.C - SÃO PAULO — EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

1ª AULA

INTRODUÇÃO: "UM POUCO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA"

O entrelaçamento da Álgebra, da Análise e da Geometria: Os números complexos.

Os números complexos são um objeto matemático simples, presente nos vários domínios da matemática. Escolhemos detalhar a história, que tem levantado profundos problemas epistemológicos. Com efeito, primeiro objeto de uma construção abstrata, os números imaginários colocaram aos geômetras problemas de existência e de constituição. Como justificar a sua "realidade"?

Da resposta a esta questão nasceram novos objetos algébricos, novas teorias, tanto em Álgebra como em Análise.

1. O teorema fundamental da Álgebra

Com a resolução das equações do 3º e do 4º graus, os números "impossíveis" (raízes quadradas de números negativos) tinham fornecido métodos de cálculo de natureza muito misteriosa, mas que permitiam obter resultados coerentes.

Viète (1540-1603). Exprimiu as relações ligando os coeficientes e as raízes de uma equação. Ele construiu uma equação do 5º grau tendo as cinco raízes e sabia que se podia construir do mesmo modo uma equação de grau n tendo n raízes, distintas ou iguais.

Albert Girard (1590-1633). Foi quem, primeiramente, em 1629, em "l'inventions nouvelles en l'algèbre", afirmou que toda equação de grau n tem exatamente n raízes, com condição de contar as raízes impossíveis, cada qual com sua ordem de multiplicidade. Isso era apenas uma afirmação e foi necessário esperar mais de um século para que os matemáticos sentissem a necessidade de demonstrar esse resultado.

René Descartes (1596-1662). Escreveu em 1637 em "la Geometrie": "Afinal, tanto as raízes "verdadeiras" quanto as "falsas" (isto é, positivas e negativas) não são sempre reais, mas algumas vezes, somente imaginárias..."

Notemos que o termo "imaginária" foi aqui usado pela primeira vez: Descartes o entendia no sentido de raiz "ideal", tipo de adição formal que ele efetua, como impelido por uma sede de generalização do caso em que a equação é dada sob a forma $(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = 0$, isto é, o caso onde as raízes são conhecidas a priori.

Desde sua origem, uma ambiguidade preside o aparecimento do termo "imaginária": de um lado, acepção ideal de Descartes ou mesmo de Girard e, por outro lado, os números da forma $a + b\sqrt{-1}$, com a e b reais, que interviram nas equações de pequeno grau descobertas por algebristas italianos e que se tem o hábito de chamar números imaginários. Esta ambiguidade estará presente em todas as tentativas de demonstrações do século XVIII do teorema chamado "teorema fundamental da álgebra", ou seja, a decomposição de um polinômio em fatores do 1º e 2º graus e, depois, a decomposição de um polinômio complexo de grau n em n fatores do 1º grau.

Para entender esta denominação de teorema "fundamental" da álgebra, é preciso lembrar que nada se sabia dele até meados do século XIX e que a análise das equações preocupava-se com os métodos de sua resolução explícita, métodos de aproximação e de enquadramento das raízes quando não se sabia calculá-las, regras para determinar o número de raízes reais, seu sinal, etc.. Compreende-se melhor, nestas condições, a importância de tal teorema. Além do que, dois fatos ilustram o qualitativo de "fundamental":

- a quantidade de demonstrações, as quais testemunham o interesse que lhe deram os matemáticos; entre os maiores: D'Alembert, Euler, Lagrange, Gauss, etc.;
- a variedade de métodos, de teorias, de conceitos que se desenvolveram daí e que produziu um grande desenvolvimento na evolução das pesquisas matemáticas.

As tentativas de demonstração do século XVIII

Num primeiro momento, procurou-se antes estabelecer as fórmulas gerais que dariam as raízes, antes de demonstrar sua existência. As dificuldades eram evidentemente muito grandes, já que se sabia, após Abel e Galois, que uma equação de grau ≥ 5 não era resolúvel por radicais; assim sendo, o problema foi abandonado. Mas, o sucesso da Geometria Analítica e do Cálculo Infinitesimal despertaram o interesse dos matemáticos. Com efeito, a integração das frações racionais, segundo o método de Leibniz e Bernoulli, necessita da decomposição de um polinômio em fatores do 1º e do 2º graus. D'Alembert foi o primeiro a dizer que era preciso *demonstrar* a existência desta decomposição (1746), que assim recebeu o nome de *teorema*.

Assim, D'Alembert tinha em vista um resultado da Análise e não se ocupava naquele momento da teoria das equações. Sua demonstração é do tipo analítico e se apóia sobre a consideração de curvas e séries infinitas. O procedimento é muito moderno: utilizar os métodos de um domínio da matemática para demonstrar um resultado em outro domínio; mas ele não foi aceito por seus contemporâneos.

Para Euler, o cavaleiro de Foncinex e depois Lagrange, este teorema era um teorema da Álgebra, exigindo um raciocínio tirado da própria natureza das equações. Todos três propuseram demonstrações de natureza algébrica, respectivamente, em 1749, 1759 e 1771. Todavia, era impossível dar uma demonstração puramente algébrica deste teorema e foi preciso usar a noção de "contínuo" da reta real. Esta parte da demonstração, chamada transcendente pelos matemáticos do século XVIII, é, em geral, esboçada. Ela pode reduzir-se à proposição: "Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar admite ao menos uma raiz real", que é também conhecida como uma evidência geométrica.

Gauss publicou, a partir de 1799, quatro demonstrações distintas do teorema fundamental da álgebra.

Assim, o teorema ficou conhecido como teorema fundamental da álgebra, porque ele concentrou todos os problemas que se relacionavam, com a teoria das equações; as diferentes demonstrações fazem referência a todas as pesquisas algébricas do século XVIII e se relacionavam com as mais diversas teorias. Vê-se aí aflorarem os primeiros elementos que formaram a base da teoria dos grupos (com Lagrange) e da teoria dos corpos (com Gauss).

Ele deixou de aparecer como teorema fundamental quando estas teorias se desenvolveram por si mesmas, independentemente da teoria das equações. Assim, hoje ele é substituído pela expressão: "$\mathbb{C}$ é algebricamente fechado", ressaltando bem que ele se refere a uma propriedade da estrutura de corpo dos complexos $\mathbb{C}$ e não a uma propriedade relevante do estudo de uma equação matemática. Vê-se sobre este caso particular, como uma formulação diferente de um mesmo resultado revela uma problemática diferente, uma época diferente.

2. O uso do símbolo $\sqrt{-1}$, nos séculos XVII e XVIII

A partir do décimo mês do século XVII, os geômetras utilizavam-se cada vez mais do símbolo $\sqrt{-1}$, não apenas nas identidades algébricas e nas pesquisas relativas às teorias das equações, como também nas diversas funções da análise. As expressões da forma geral:

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}}$$

que são imaginárias na aparência, mas que na verdade são iguais a números reais, são objeto de pesquisas de Leibniz. Ele era bem sucedido ao eliminar nelas os imaginários, utilizando-se dos desenvolvimentos em série.

Observação.

O exemplo mais antigo que se conhece de uma expressão análoga àquela é o de Bombelli:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

Moivre (1667-1754). Mostrou em 1738, que

$$\sqrt[n]{\cos a + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} a}$$

admite n valores, todos da forma $p + q\sqrt{-1}$, que se obtêm dividindo o arco a em n partes iguais.

As manipulações formais de séries e a substituição dos números imaginários nas expressões simbólicas tornavam-se cada vez mais da linguagem habitual. Mas, a hipótese admitida implicitamente de estender aos números complexos as operações dos números reais é fortemente questionada pela controvérsia dos logaritmos dos números imaginários. Contudo, esta controvérsia impulsionou o estudo de outras funções transcendentes de um número imaginário.

Euler, desde 1740, considerava as exponenciais da forma x^y, onde x é real e y é imaginário puro. Ele obteve a fórmula:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$$

e, em 1748, aquela que traz seu nome:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} x$$

que, para $x = \pi$, tem-se que $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$.

Euler identificou então, de um certo ponto de vista, as funções trigonométricas às funções exponenciais. Após ele, a trigonometria deixou de ser um ramo independente da matemática. Tobias Dantizg diria que a fórmula de Euler continha: "os símbolos mais importantes: união misteriosa na qual a aritmética é representada por 0 e 1, a álgebra por $\sqrt{-1}$, a geometria por π e a análise por e.

Assim, o símbolo $\sqrt{-1}$, além de sua utilidade e importância já reconhecidas em álgebra, permitiu estabelecer uma unificação entre todas as funções da análise.

O estatuto dos números imaginários está longe de ser elucidado e permite muitas ambiguidades até aqui. Entretanto, vamos acompanhar os diferentes experimentos de legitimação dos números complexos que foram propostos no início do século XIX, e como algumas definições-interpretações desses números fecundaram uma nova e poderosa teoria matemática.

3. A representação geométrica dos imaginários

J. Wallis (1616-1703). Em seu "Tratado de Álgebra", publicado em 1865, propõe interpretar as raízes imaginárias de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau. Para isso, ele deu uma construção das soluções das equações do $2^{\underline{o}}$ grau: as soluções reais estavam sobre uma reta e as imaginárias fora desta reta.

Stirling (1692-1770). Utiliza uma representação mais gráfica que geométrica, da forma $\underset{a}{\lrcorner}\!\uparrow^{b}$ para $a + b\sqrt{-1}$, mas sem considerar o ponto extremo deste gráfico. Foi preciso cerca de um século para passar deste estágio à verdadeira representação geométrica.

Recordemos em que consiste a representação geométrica:

A cada número complexo $z = a + bi$, com a e b reais, faz-se corresponder um ponto M do plano, plano este munido de dois eixos retangulares. O ponto M é obtido pela intersecção de suas coordenadas retangulares: sua abscissa $\underline{a}$ e sua ordenada $\underline{b}$. Os números reais $\underline{a}$ têm sua imagem sobre o eixo Ox e os números imaginários puros $\underline{bi}$ têm sua imagem sobre o eixo Oy. Em particular, i tem coordenadas 0 e 1.

Na representação por coordenadas polares, M é caracterizado pelo comprimento do vetor $\overrightarrow{OM}$, que se pode chamar $\rho(\rho \geq 0)$, e por uma das determinações do ângulo θ, que $\overrightarrow{OM}$ faz com $\overrightarrow{Ox}$; ρ é chamado módulo de z e θ o argumento de z. Tem-se:

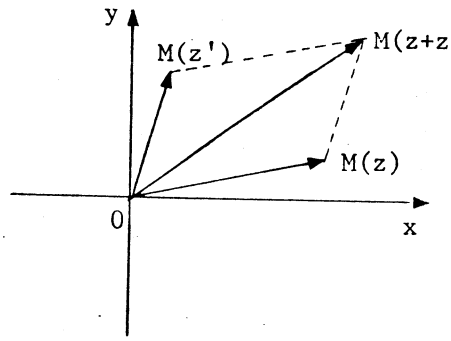
$$z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\cdot \operatorname{sen}\theta).$$

A *soma* de dois complexos z e z′ é representada pela soma vetorial dos dois vetores $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{OM}'$ correspondentes (figura 1).

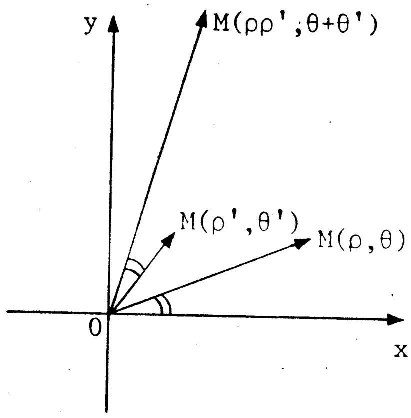
O *produto* de dois números complexos tem por módulo o produto dos módulos e por argumento a soma dos argumentos (figura 2).

Observação.

Multiplicar um número complexo z por outro complexo z' é submeter o vetor $\vec{OM}$ correspondente a z à semelhança direta de centro O, definida por ρ' e θ', isto é, ρ' é a razão da homotetia e θ' o seu ângulo de rotação. Em particular, multiplicar pelo número imaginário i, significa submeter $\vec{OM}$ a uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ e a razão da homotetia neste caso é igual a 1. Assim, o símbolo i recebeu a interpretação de um operador de perpendicularidade.



(Figura 1)



(Figura 2)

Dois caracteres marcam a descoberta da representação geométrica dos imaginários:

1) As múltiplas tentativas independentes, mas similares, e que são, em sua maior parte, feitos de matemáticos amadores, à margem da comunidade matemática;

2) A reserva com que certos matemáticos entre os maiores, acolheram estas tentativas.

Caspar Wessel – um matemático dinamarquês, apresentou em 1797 o primeiro Memorando sobre o assunto, mas ele só seria conhecido um século mais tarde.

Robert Argand – um genovês, publicou de maneira independente em 1806 um "Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas". Apenas em 1813-1814 o livro de Argand foi conhecido, por ocasião do aparecimento de um artigo de Français em "les Annales" de Gergonne. Argand reivindicaria a paternidade e uma discussão teve lugar em "les Analles", entre Français, Servois e Gergonne e, embora esta discussão fosse publicada em um jornal conhecido e lido por matemáticos, tais idéias passaram desapercebidas.

Warren, na Inglaterra, e Mourey, na França – em 1828, cada um por seu lado e sem ligação, em trabalhos semelhantes ao de Argand, reinventaram o princípio da representação sem despertar a atenção dos maiores matemáticos.

Não antes que Gauss, em 1831, e Cauchy, em 1847, tais idéias foram verdadeiramente adotadas.

Como explicar que uma descoberta tão nova e importante e que fecundaria a nova teoria das funções de variável complexa, de que Cauchy é o criador, pudesse passar tanto tempo desapercebida?

Observação.

Cauchy, que dominou a escola matemática francesa da 1ª metade do século XIX, ficou muito preocupado com a fundamentação dos imaginários. Ele adota uma representação extremamente formalista destes números. Para ele, um número imaginário é uma expressão simbólica que não tem sentido próprio, mas que está sujeita a regras fixas conforme convenções estabelecidas.

Até 1847, Cauchy não se envolvera explicitamente com a representação geométrica. Neste momento, ele leu particularmente um trabalho de Barré de Saint-Verrant que apresentava os princípios do cálculo vetorial e se convenceu que a "noção de quantidade imaginária – e um complexo é uma, de dimensão dois – compreende, como caso particular, a noção de quantidade algébrica".

4. O verdadeiro iniciador: Gauss

Nós vimos, a propósito do teorema fundamental da álgebra, que Gauss foi o primeiro matemático a ter uma idéia mais clara do assunto dos imaginários.

Parece que Gauss tinha idéia da representação geométrica desde 1799 quando, num primeiro trabalho, ele tenta uma linda demonstração de pura topologia aplicada à resolução do teorema fundamental da álgebra. Partindo de um polinômio P, de variável complexa z, ele quiz mostrar que há ao menos uma raiz z_0.

Ele escreveu $P(z) = P(x + yi) = R(x, y) + i \cdot S(x, y)$, onde R e S são polinômios de duas variáveis x e y, e observa que os pontos (x_0, y_0) do plano, tais que $x_0 + i \cdot y_0$ seja raiz de P, são as intersecções das curvas $R = 0$ e $S = 0$. Por um estudo qualitativo destas curvas, ele mostrou então que um arco contínuo de uma delas ligam os pontos de duas regiões distintas limitadas pela outra, e se conclui que as curvas se encontram. Mas ele não definiu ainda explicitamente a correspondência entre pontos do plano e números complexos.

Pelos estudos de sua correspondência e papéis póstumos, sabe-se que Gauss era sensível ao caráter pedagógico da representação geométrica e que pode-se incluí-lo entre os adeptos de um certo realismo geométrico. Gauss foi, incontestavelmente, o primeiro a perceber o papel que podia ter a representação geométrica no domínio da análise e as vantagens que os matemáticos do século XIX podiam tirar disso.

Ele faria uma exposição pública de suas idéias a partir de 1830 e, em particular, no memorando "Theoria Residuorum Biquadraticorum", de 1831. Lá ele estuda longamente os números da forma a + bi, onde a e b são inteiros relativos, que se chamam hoje de "inteiros de Gauss". Ele fez um tratamento puramente aritmético, mas sugeriu também uma figuração intuitiva por um tecido de malhas quadriculadas no plano.

Universalmente adotado ao fim de 1840, ele suscitaria o desenvolvimento prodigioso da teoria das funções de uma variável complexa, a integração complexa, etc.

5. O ponto de vista aritmético de Hamilton

A teoria geométrica dos números complexos parecia apresentar o inconveniente de subordinar todas as propriedades algébricas destes números às considerações geométricas que podiam parecer estranhas à questão.

O matemático irlandês William R.Hamilton (1805-1866), que estudou estes problemas a propósito dos fundamentos da aritmética e da álgebra, elaborou uma teoria aritmética dos números complexos em 1835. Ela consistia em considerar estes números como pares ordenados de números reais e em definir, explicitamente, a soma e o produto de tais pares por

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Os reais são identificados pelos pares (a, 0) e tem-se:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) \times (1, 0) + (b, 0) \times (0, 1)$$

$$\text{Chamam-se } \begin{cases} (1, 0)\text{: unidade primária} \\ (0, 1)\text{: unidade secundária} \end{cases}$$

e pode-se identificar então (a, b) com $a + b\sqrt{-1}$.

A propósito da equação a duas incógnitas $(x,y)^2 = (-1,0)$, que tem por solução o par (0, 1), Hamilton escreveu: "Na teoria dos números simples, o símbolo $\sqrt{-1}$ é absurdo, mas na teoria dos pares de números reais, o mesmo símbolo $\sqrt{-1}$ tem um sentido e indica uma extração possível, a saber a raiz quadrada principal do par (-1, 0). Nesta última teoria, pode-se empregar o sinal $\sqrt{-1}$, que não poderia ser usado na primeira".

Assim, Hamilton ficou satisfeito em ter *contornado* o obstáculo que constituia a representação da raiz quadrada de um número negativo e de se ter dispensado o misterioso $\sqrt{-1}$.

VOCABULÁRIO

Imaginário: Descartes, 1637

Módulo: Argand, 1806

Argumento: Cauchy, 1838

Número Complexo: Gauss, 1831

Norma de z: N(z) (quadrado do módulo): Gauss, 1831

Notação |z| para o módulo: K. Weierstrass

Notação i: Euler, 1777, retomada por Gauss

1. Atividade preliminar

Responda as seguintes questões:

1. Que métodos vocês conhecem que possibilitam resolver uma cúbica?

2. Como vocês colocam a seus alunos a importância do estudo dos números complexos?

3. Vocês acham importante a análise epistemológica no ensino da matemática?

4. Resolva os seguintes problemas:

   São dados os números complexos $v = 2 - 2i$ e $w = -\sqrt{3} + i$.

   a) Calcular $v + w$, $v - w$, $v \cdot w$ e $v \cdot w^2$;

   b) determinar o menor número natural n, tal que w^n seja um imaginário puro;

   c) determinar os pontos M_1 e M_2, de afixos v e w, respectivamente;

   d) determinar a forma trigonométrica de v e w;

   e) representar e interpretar geometricamente $v + w$ e $v \cdot w$.

2. Leitura do texto extraído do livro *"Une histoire des mathematiques"* de A. Dahan - Dalmedico/J. Peiffer.

Atividade preliminar

1) Mostrar que a resolução das equações do 3º grau se reduz à das equações da forma $x^3 + qx + r = 0$.

2) Pelo estudo das funções da forma $x \longmapsto x^3 + qx + r$, determinar o número de raízes da equação $x^3 + qx + r = 0$, segundo os valores de q e r.

P.U.C - SÃO PAULO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

3ª AULA

ALGUNS ARTIGOS DE D'ALEMBERT RELATIVOS AOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS (Extrato de L'Encyclopédie de Diderot e D'Alembert - texto do século XVIII).

Caso irredutível do 3º grau, ou simplesmente, Caso irredutível, em Análise.

É aquele no qual uma equação do 3º grau tem suas três raízes reais, distintas e incomensuráveis. Neste caso, se a equação é resolvida pelo método ordinário, a raiz real qualquer se apresenta sob uma forma que contém as quantidades imaginárias e não se tem até o presente como reduzir esta expressão a uma forma real, excluindo os imaginários que ela contém. Vejamos este assunto com algum detalhe.

Seja $x^3 + qx + r = 0$ uma equação do 3º grau, desprovida do termo do 2º grau.

Para resolvê-la, eu faço $x = y + z$ e tenho

$$x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = y^3 + 3yzx + z^3,$$

portanto, $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$.

Esta equação é comparada termo a termo com $x^3 + qx + r = 0$ e tem-se:

$$\begin{cases} -3yz = q \quad \text{ou} \quad z = -\dfrac{q}{3y}; \\ y^3 + z^3 = -r \quad \text{ou} \quad y^3 + r = \dfrac{q^3}{27y^3} \quad \text{ou} \quad y^6 + ry^3 = \dfrac{q^3}{27} \end{cases}$$

Esta equação, que se limita ao 2º grau (fazendo-se $y^3 = t$), resolvida de modo ordinário, dá

$$y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$$

Portanto, como $z^3 = -r - y^3$, tem-se

$$z^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$$

Logo,

$$x \text{ ou } y + z = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$$

Tal é a forma do valor de x

1º) É evidente que se q é positivo, r sendo negativo ou positivo, esta forma é real, já que ela contém apenas quantidades reais. Ou neste caso, como se vê no artigo "Équation", duas das raízes são imaginárias. Assim a única raiz real se encontra expressa por uma fórmula que contém apenas quantidades reais. Este caso não cai portanto no *caso irredutível*, e não apresenta qualquer dificuldade.

2º) Se q é negativo e $\frac{r^2}{4} = \frac{q^3}{27}$, então a equação tem duas raízes iguais e não se tem ainda qualquer dificuldade.

3º) Se q é negativo e $\frac{r^2}{4} > \frac{q^3}{27}$, há duas raízes imaginárias e a raiz real se encontra representada por uma fórmula toda real; o que não tem ponto de dificuldade maior.

4º) Mas, se q é negativo e $\frac{r^2}{4} < \frac{q^3}{27}$, então $-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}$ é uma quantidade negativa e, por consequência, $\sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$ é imaginária. Assim, a expressão de x limita-se então aos imaginários. Entretanto, demonstra-se em Álgebra que neste caso as três raízes são reais e distintas. Pode-se ver a prova no fim deste artigo. Como pode portanto acontecer que a raiz x se apresente sob uma forma que contém os imaginários?

M. Nicole foi o primeiro a resolver esta dificuldade (1738). Ele mostrou que a expressão de x, ainda que contenha os imaginários é com efeito real. Para prová-lo, seja

$$\sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} = b\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad -\frac{r}{2} = a,$$

e tem-se

$$x = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}.$$

Trata-se de mostrar que esta expressão, ainda que limite-se aos imaginários, representa uma quantidade real. Para isso, seja formada, entre as regras dadas no artigo "Binome", uma série que exprima o valor de

$$\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad (a + b\sqrt{-1})^{1/3}$$

e aquela de $(a - b\sqrt{-1})^{1/3}$; encontrar-se-á, após ter somado juntas estas duas séries, que todos os termos imaginários se cancelarão e não restará senão uma sequência infinita de termos compostos de quantidades todas reais. Assim, o valor de x é, efetivamente, real. A dificuldade é formar esta série; é o que não foi possível conseguir até o presente. Entretanto, M. Nicole a formou em alguns casos particulares, e como consequência eliminou, por assim dizer, o caso irredutível.

Quando uma das três raízes reais e desiguais é comensurável, então a equação não está mais no *caso irredutível*, porque um dos divisores do último termo dá a raiz comensurável.

Mas, quando a raiz é incomensurável, é preciso, para achar a expressão real da raiz, ou formar a série supramencionada, ou livrar de qualquer modo a expressão encontrada da fórmula imaginária que a altera por assim dizer. É para o que se tem trabalhado inutilmente nos últimos anos.

Esta raiz do caso irredutível, tão difícil de se achar através da Álgebra, é facilmente encontrada através da Geometria. Mas ainda que se tenha o valor linear, pouco se sabe de sua expresão algébrica.

Este inconveniente do *caso irredutível* vem do método que se tem empregado até aqui para resolver as equações do 3º grau; método imperfeito, mas o único que se dispõe até o presente. Eis em que consiste a imperfeição deste método. Supunha-se $x = y + z$, sendo y e z duas quantidades indeterminadas; em seguida obtinha-se $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$ e $x^3 + qx + r = 0$. Comparavam-se estas duas equações termo a termo e esta comparação termo a termo encerra uma suposição tácita, que conduz a uma forma irredutível sob a qual x é expressa; a rigor, tem-se $qx + r = - 3yzx - y^3 - z^3$; eis a única consequência rigorosa que se pode tirar da comparação das duas equações; mais outra, seria supor que a primeira parte de $qx + r$, isto é, qx, seja igual a $-3yzx$, primeira parte do segundo membro. Esta suposição não é um ponto absoluto nem rigorosamente necessário, não tendo sido feita senão para chegar mais facilmente aos valores de y e z, que não podem ser encontrados sem ela; além do que, como y e z são, um e outro, indeterminados, pode-se supor $-3yzx = qx$ e $-y^3 - z^3 = r$. Mas esta suposição faz que as duas quantidades y e z, ao invés de serem reais como deveriam, sejam algumas vezes imaginárias. É verdade que somando-se ambas, sua forma é real; mas o imaginário que aí se encontra sempre, e que não se pode desprezar, fornece a inútil expressão de x que se obtém.

Em outras palavras, a equação $x = y + z$ não tem mais rigor que a equação $qx + r = - 3yzx - y^3 - z^3$, ou

$$qy + qz + r = - 3yyz - 3yzz - y^3 - z^3$$

e todas as vezes que se deseja obter desta equação duas outras particulares, far-se-á uma suposição tácita que poderá ocasionar inconvenientes impossíveis de se evitar, como chegou-se até aqui, y e z são imaginários.

Seria preciso ver que, por qualquer modo, não se poderia decompor a equação supramencionada em duas outras, que dessem a y e a z uma forma real e fácil de se encontrar; mas esta operação parece muito difícil, senão impossível.

Eu havia lido nas "Memoires de l'Academie de Sciences de Prusse de 1746", que sempre se podia achar pela trissecção de um arco de circunferência, uma quantidade $c + e\sqrt{-1}$, igual à raiz cúbica de $a + b\sqrt{-1}$; e que se $c + e\sqrt{-1} = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, tem-se $\sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = c - e\sqrt{-1}$. De onde se segue que nos *casos* onde um arco de circunferência pode ser dividido geometricamente, isto é, por régua e compasso, em três partes iguais, pode-se determinar o valor algébrico de c e de e, o que poderia fornecer condições para resolver em quaisquer ocasiões, as equações do 3º grau que caíssem no *caso irredutível*.

Qualquer que seja a raiz incomensurável no caso irredutível, a expressão real desta raiz, quando encontrada, não impedirá de se recorrer às aproximações. Tem-se no artigo APROXIMATION o método geral para aproximar-se da raiz de uma equação, e nós aí temos indicado os autores que deram métodos particulares de aproximação para o caso irredutível.

Já que nós estamos no assunto das equações do 3º grau, acreditamos que não fará mal fazer aqui algumas novas observações que aí se relacionam e das quais nossos leitores poderão tirar conclusões.

Sabe-se que toda equação do 3º grau tem três raízes. É preciso portanto, para resolver de uma maneira completa uma equação do 3º grau, achar um método que permita achar ao mesmo tempo as três raízes, como se acham ao mesmo tempo as duas raízes de uma equação do 2º grau. Até que se tenha achado este método, há a impressão que a teoria das equações do 3º grau permanecerá incompleta: mas, encontraremos este método? É o que nós não podemos negar nem prever.

Examinemos agora o mais próximo método do qual nos servimos para achar as raízes de uma equação do 3º grau. Tem-se primeiro uma equação do 6º grau em y^6, que foi vista aqui anteriormente, e que tem por consequência seis raízes, e se pode facilmente provar serem todas distintas; em seguida, uma equação do 3º grau, $z^3 = -y^3 - r$; e como y^3 tem dois valores diferentes devido à equação $y^6 + ry^3 - \frac{q^3}{27} = 0$, e z está elevado ao 3º grau, resulta que esta equação deve dar também seis valores diferentes para z, três para cada valor de y^3; ou alguns dos seis valores de z estão combinados com alguns dos seis valores de y, ou ter-se-á trinta e seis valores diferentes para $z + y$; portanto x parece ter trinta e seis valores distintos. Entretanto, a equação era do 3º grau, x não deveria ter mais que três valores: como admitir aquilo?

Eu respondo primeiro que os trinta e seis valores pretendidos de $y + z$ devem se reduzir a dezoito. Com efeito, não é preciso combinar indiferentemente cada valor de z com todos os valores de y, mas apenas com todos os valores de y que correspondem ao valor suposto de y^3.

$$y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} ;$$

de onde se tira

$$z^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}} ;$$

o sinal + que precede o radical no valor de y^3, corresponde ao sinal - que precede o radical no valor de z^3; o que é evidente, já que $z^3 = -r - y^3$: portanto, para cada três valores de y que correspondem ao sinal + colocado antes do radical, há três valores de z que correspondem ao sinal - colocado antes do radical: o que faz nove valores de y + z; e, juntando-se aí os nove outros valores para o caso do sinal -, colocado antes do radical na expressão de y^3, tem-se 18 ao invés de 36, que se obtêm combinando-se indiferentemente os sinais. Mas isto não é tudo.

Quaisquer que sejam os valores de y e de z, empregados e combinados como se viu do prescrito, parecem dar um valor de y + z; é preciso ainda rejeitar aqueles nos quais o produto zy não será igual a $-\frac{q}{3}$; porque é uma das condições da solução, como vimos mais acima, que $-3zy = q$; é verdade que os dezoito valores de y e z satisfazem à condição $-27y^3z^3 = q^3$. Mas esta condição, $-27y^3z^3 = q^3$, é muito mais ampla que $-3yz = q$, ainda que pareça a mesma. Por exemplo, $u = b$ não dá senão que um valor de u, mas $u^3 = b^3$ dá três valores de u. Para prová-lo, seja $u^3 - b^3 = 0$, e dividamos por $u - b$ e temos $uu + bu + bb = 0$, o que dá

$$u = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-\frac{3bb}{4}};$$

assim, $u^3 = b^3$ resulta

$$u = b,\ u = b\cdot(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}) \quad e \quad u = b\cdot(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}).$$

Portanto, ainda que, nos dezoito valores de $y + z$, se tenha $27y^3z^3 = -q^3$, é preciso escolher aqueles onde $3yz = -q$. Isto provado, sejam estas quatro equações:

$$\text{I.} \quad y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$$

$$\text{II.} \quad z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$$

$$\text{III.} \quad y^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$$

$$\text{IV.} \quad z^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$$

E seja $a + b\sqrt{-1}$ = à raiz cúbica de $-\frac{r}{2} + \sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$; tem-se $a - b\sqrt{-1}$ = à raiz cúbica de $-\frac{r}{2} - \sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$, o que dará:

<u>Raízes da primeira equação</u>

1. $y = a + b\sqrt{-1}$

2. $y = (a + b\sqrt{-1})(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2})$

3. $y = (a + b\sqrt{-1})(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2})$

Raízes da segunda equação

4. $y = a - b\sqrt{-1}$

5. $y = (a - b\sqrt{-1})(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2})$

6. $y = (a - b\sqrt{-1})(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2})$

Raízes da terceira equação: são as mesmas da segunda.

Raízes da quarta equação: são as mesmas da primeira.

Portanto,

1º) a combinação das raízes da 3ª equação com aquelas da 4ª, dará o mesmo resultado que aquela das raízes das duas primeiras.

2º) não se poderá combinar juntos senão os valores de y e de z, e cujo produto será igual a $-\frac{q}{3}$, isto é, aa + bb; porque $a + b\sqrt{-1}$ era igual a $\sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$ e $a - b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$ e ter-se-á $aa + bb = \sqrt[3]{-\frac{q^3}{27}} = -\frac{q}{3}$. De onde se segue.

3º) poder-se-á combinar a raiz assinalada (1) com a raiz assinalada (4), o que dará $x = 2a$.

4º) poder-se-á combinar a raiz assinalada (2) com a raiz assinalada (6), o que dará $-a + b\sqrt{3}$.

5º) poder-se-á combinar a raiz assinalada (3) com a raiz assinalada (5), o que dará $-a - b\sqrt{3}$.

Eis aqui as três raízes da equação, e é visível pelas regras que estabelecemos, que todos os outros valores de y + z dariam expressões falsas da raiz x, e que todas as raízes aqui são reais.

Pode-se achar facilmente pelo mesmo método os três valores de x em qualquer outro caso como o *caso irredutível*. Por exemplo, se q é positivo, ou se q é negativo e < ou = $r^2/4$, então será necessário supor

$$\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{-\frac{q^3}{27}+\frac{r^2}{4}}} = a + b,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{-\frac{q^3}{27}+\frac{r^2}{4}}} = a - b;$$

e se achará neste caso, uma raiz real e duas imaginárias, ou uma raiz real e duas outras reais e iguais entre si. O que é inútil explicar mais em detalhe: não é necessário para convencer-se, fazer um cálculo semelhante àquele que nós fizemos para achar as três raízes no *caso irredutível*.

Atividade:

Ler o texto do artigo "Caso irredutível", tentando responder à medida que for lendo, às questões seguintes:

1) Qual é o método de resolução da equação do 3º grau proposto ao início do texto? A que expressão chegou-se para as raízes?

2) D'Alembert faz uma referência a uma demonstração de M. Nicole, mostrando que a expressão encontrada para x, ainda que seja expressa por imaginários no caso irredutível, corresponde a um número real. Tente reconstituir esta demonstração, após as indicações que figuram no texto. O que você acha? Como vocês estudariam a natureza desta expressão?

3) D'Alembert escreveu: "quando uma das três raízes reais e distintas é comensurável (racional, na linguagem moderna), então a equação não está mais no caso irredutível, porque um dos divisores do primeiro termo dá a raiz comensurável".

Reconstitua o argumento de divisibilidade usado aqui por D'Alembert (supondo que q e r são números inteiros).

4) D'Alembert escreveu em seguida: "Esta raiz do caso irredutível, tão difícil de se encontrar pela Álgebra, se encontra facilmente pela Geometria".

Mostre que a resolução da equação do 3º grau, no caso irredutível, se reduz efetivamente ao problema geométrico da trissecção do ângulo, exprimindo-se cos 3θ em função de cos θ.

5) A que D'Alembert atribui a imperfeição do método de resolução proposto?

6) Identificar as diferentes partes do raciocínio de D'Alembert visando, ao fim do texto, obter em cada caso uma expressão das três raízes da equação. Como vocês exprimiriam estas raízes na linguagem matemática atual?

4ª AULA

DE LA CHAPELLE: "TRAITÉ DES SECTIONS CONIQUES" - 1765

AS CURVAS.

23. Raiz de um grau qualquer, nem inteiro nem fracionário; isto significa que não se pode eliminar com rigor o seu radical. Tais são $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, etc, que chamamos *incomensuráveis*, isto é, que não têm nada em comum com a unidade, ou com qualquer fração da unidade; de modo que não há nenhum número, seja inteiro ou fracionário, que seja a raiz quadrada de 5, assim como já demonstrei anteriormente. Entretanto, aquilo que foi dito das quantidades das quais não se pode obter a raiz com todo rigor, eu mostrei em meus "Institutions", que se podia aproximar do infinito; e que assim tinha-se em consideração um suplemento que se adequava bem às necessidades da sociedade.

24. Encontram-se algumas vezes quantidades radicais, cuja aproximação da raiz é impossível e cuja busca seria absurda. Assim, $\sqrt{-a^2}$ não é, nem talvez seja, +a ou -a; porque +a ou -a eleva-

do ao quadrado, jamais resultaria $-a^2$. Da mesma forma, $\sqrt{-9}$ não é 3 e nem -3; já que 3X3 ou -3X-3 resultam 9 e não -9. É por isso que estes tipos de grandezas chamam-se *imaginárias*, e se considerará que uma quantidade é imaginária todas as vezes que se tem um negativo sob um radical cujo expoente for um número par; por exemplo, $\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, etc, são grandezas imaginárias; porque qualquer grandeza positiva ou negativa, multiplicada por ela mesma um número par de vezes, não pode jamais dar um produto negativo.

25. Mas o que significa um grandeza imaginária, por que admiti-la no cálculo? Quando se propõe a resolução de um problema, aquele que a tenta não sabe ainda se o que foi proposto é uma coisa possível ou absurda; ele é pois obrigado a exprimir todas as condições da questão, quaisquer que elas sejam e pode ser que elas se contradigam sem que se aperceba; e se, depois de ter comparado tudo o que podia conduzir à resolução que ele busca, ele chega a um resultado expresso imaginariamente; é certo que ele pode demonstrar que lhe fizeram uma pergunta absurda e que por consequência o problema foi resolvido. Como eu mostrei em meus "Institutions".

26. As grandezas imaginárias podem e devem entrar no cálculo; elas podem mesmo se tornar reais, destruindo-se a impossibilidade que as impede de assim o ser. -4 é uma grandeza real e muito possível, já que pode ser 4 abaixo de 0 ou de nada; tal é o estado do homem que não tendo nada, deve 100"; ele tem 100" menos que nada, já que ele pagando 100", fica ainda sem nada. Se a gente se propõe pois a extrair a raiz quadrada de -4, cuja expressão será $\sqrt{-4}$, estaríamos pedindo uma coisa absurda, e $\sqrt{-4}$ será um imaginário, que poderá tornar-se real se multiplicado por ele mesmo,

isto é, destruindo-se o absurdo que o impede de ser real; de modo que $\sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = -4$. Então, como é o radical que provoca unicamente o absurdo da expressão $\sqrt{-4}$, a simples supressão deste radical tornará real a grandeza que está sob ele. Não nos devemos chocar a seguir, se virmos que se calculam os imaginários e mesmo que eles podem se tornar reais.

27. Repare bem que há uma enorme diferença entre uma grandeza imaginária e uma grandeza igual a nada ou a zero; porque uma grandeza igual a nada não é absurda; é possível que uma quantidade seja destruída por uma outra, por outro lado, uma grandeza imaginária é uma quantidade absurda, ou que importa em contradição. Você não deve dizer que um imaginário pode ser considerado como o zero, é uma coisa pior; da mesma forma, uma grandeza igual a zero não pode ser tomada por um imaginário, pois não é absurdo que uma grandeza se torne zero.

EULER: "ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE" - 1760

CAPÍTULO XIII. AS QUANTIDADES IMPOSSÍVEIS OU IMAGINÁRIAS QUE DERIVAM DA MESMA FONTE

139

Nós já vimos anteriormente que os quadrados dos números, tanto positivos como negativos, são sempre positivos ou tomados com o sinal +; observemos que -a multiplicado por -a resulta +aa, assim como o produto de +a por +a. Isto porque, no capítulo anterior, tínhamos suposto que todos os números dos quais se pretendia extrair as raízes quadradas eram positivos.

1 4 0

Quando se chega pois na questão de extrair-se a raiz de um número negativo, pode-se ter muita dificuldade, não se tendo algum número determinável cujo quadrado seja um número negativo. Suponha pois, por exemplo, que se queira extrair a raiz de -4; isto seria procurar um número tal que, multiplicado por ele mesmo, daria -4; ora, este número procurado não é +2 e nem -2, já que o quadrado, tanto de +2 como de -2, é +4 e não -4.

1 4 1

É preciso pois concluir que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser nem um número positivo, nem um número negativo, porque também os quadrados dos números negativos tomam o sinal *mais*. Por consequência, é preciso que a raiz em questão pertença a uma espécie inteiramente particular de números; porque ela não pode estar compreendida entre os números positivos, nem entre os números negativos.

1 4 2

Ora, nós distinguimos acima que os números positivos são todos maiores que nada ou 0 e que os números negativos são todos menores que nada ou 0; de modo que, aquele que é maior que 0 se exprime pelos números positivos, e aquele que é menor que 0 se exprime pelos números negativos. Nós vimos pois que as raízes quadradas de números negativos não são nem maiores e nem menores que nada. Entretanto, pode-se dizer que elas podem ser 0; porque 0 multiplicado por 0 resulta 0 e, por consequência, não dá um número negativo.

1 4 3

Ora, já que todos os números que são possíveis de se imaginar são maiores ou menores que 0, ou o próprio 0, está claro que não se pode mesmo calcular a raiz quadrada de um número negativo através dos números positivos e é preciso portanto dizer que ela é uma quantidade impossível. É deste modo que nós somos conduzidos à idéia de números que pela sua natureza são impossíveis. Chama-se ordinariamente estes números de *quantidades imaginárias*, porque eles existem puramente na imaginação.

1 4 4

Todas as expressões como $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc., são por consequência números impossíveis ou imaginários, já que eles indicam raízes de quantidades negativas. E é de números semelhantes a estes, que se afirmam com razão que não são nada, nem mais que nada, nem menos que nada; o que principalmente nos obrigou a declará-los impossíveis.

1 4 5

Com tudo isto, entretanto, estes números têm lugar em nossa imaginação e nós não deixamos de ter uma idéia pretenciosa; já que nós sabemos que por $\sqrt{-4}$, por exemplo, entende-se um número que, multiplicado por ele mesmo, resulta -4. E também porque nada nos impede de aplicar o cálculo àqueles números imaginários e de usá-los.

1 4 6

Nossa primeira noção do assunto que nós tratamos, é que o quadrado de $\sqrt{-3}$, por exemplo, ou o produto de $\sqrt{-3}$ por $\sqrt{-3}$, é -3; que o produto de $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1}$ é -1; e que, em geral, multiplicando-se $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-a}$, obtém-se -a.

1 4 7

Agora, como -a significa o mesmo que +a multiplicado por -1 e que a raiz quadrada de um produto se obtém multiplicando as raízes dos fatores, segue que a raiz de a multiplicada por -1, ou $\sqrt{-a}$, é o mesmo que $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{-1}$. Ora, $\sqrt{a}$ é um número positivo ou real, por consequência, o que há de impossível numa quantidade imaginária, pode sempre se reduzir a $\sqrt{-1}$. Por esta razão, $\sqrt{-4}$ é o mesmo que $\sqrt{4}$ multiplicado por $\sqrt{-1}$ e o mesmo que $2\cdot\sqrt{-1}$ já que $\sqrt{4}$ é igual a 2. Pela mesma razão, $\sqrt{-9}$ se reduz a $\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$ ou a $3\cdot\sqrt{-1}$; e $\sqrt{-16}$ significa $4\cdot\sqrt{-1}$.

1 4 8

Além disso, como $\sqrt{a}$ multiplicada por $\sqrt{b}$ resulta $\sqrt{ab}$, ter-se-á $\sqrt{6}$ para o valor de $\sqrt{-2}$ multiplicada por $\sqrt{-3}$ e $\sqrt{4}$ ou 2, para o valor do produto de $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-4}$. Vê-se pois que dois imaginários, multiplicados um pelo outro, produzem um real ou possível. Mas, por outro lado, um número possível, multiplicado por um número impossível, resulta sempre um imaginário: $\sqrt{-3}$ por $\sqrt{+5}$ resulta $\sqrt{-15}$.

1 4 9

O mesmo ocorre em relação à divisão, porque $\sqrt{a}$ dividida por $\sqrt{b}$ resulta $\sqrt{\frac{a}{b}}$ e é claro que $\sqrt{-4}$ dividida por $\sqrt{-1}$ dá $\sqrt{+4}$; que $\sqrt{+3}$ dividida por $\sqrt{-3}$ dá $\sqrt{-1}$; e que 1 dividido por $\sqrt{-1}$ dá $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ ou $\sqrt{-1}$, porque 1 é igual a $\sqrt{+1}$.

1 5 0

Nós observamos anteriormente que a raiz quadrada de um número qualquer tem sempre dois valores um positivo e outro negativo; que $\sqrt{4}$, por exemplo, é igualmente +2 e -2, e que, em geral, pode-se adotar $-\sqrt{a}$ ou $+\sqrt{a}$ para a raiz quadrada de a. Esta notação tem também lugar, quando trata-se de números imaginários: a raiz quadrada de -a é igualmente $+\sqrt{-a}$ e $-\sqrt{-a}$; mas é preciso lembrar-se de relacionar os sinais + e - que estão antes do radical $\sqrt{\ }$ com o sinal que está após o símbolo $\sqrt{\ }$.

Nos resta portanto levantar a dúvida que se poderia ter utilizando-se os números dos quais estamos a falar; pois, com efeito, estes números eram impossíveis e não seria surpreendente acreditar-se que eles seriam inteiramente inúteis e somente objeto de uma vã especulação. Entretanto, isto é um engano; o cálculo dos imaginários é da maior importância; frequentemente ele aparece nos problemas, dos quais não se sabe o domínio, se eles contêm algo de real ou de possível ou não. Ou quando a solução de uma questão semelhante nos conduz aos números imaginários, estamos certos que o que se procura é impossível.

A fim de esclarecer o que nós dissemos com um exemplo, suponhamos que se proponha o problema: dividir o número 12 em duas partes tais que o produto destas partes seja 40. Resolvendo-se este problema pelos métodos ordinários, encontra-se para as partes procuradas, $6 + \sqrt{-4}$ e $6 - \sqrt{-4}$; mas estes números são imaginários: conclui-se portanto que é impossível resolver-se o problema.

Percebe-se facilmente a diferença, supondo-se que o problema fosse dividir 12 em duas partes que, multiplicadas entre si, resultassem 35; porque é evidente que estas partes seriam 7 e 5.

D'ALEMBERT: "IMAGINAIRE" - (1751-1772)

IMAGINÁRIO - Adjetivo; chama-se assim em Álgebra, as raízes pares de quantidades negativas. A razão dessa denominação é que toda potência par de uma quantidade qualquer, positiva ou negativa, tem necessariamente o sinal +, porque + por +, ou - por -, resultam igualmente +. De onde se segue que toda potência par, todo quadrado, por exemplo, que tem o sinal -, não tem de modo algum raiz possível e que assim, a raiz de tal potência é impossível ou *imaginária*. As quantidades imaginárias são opostas às quantidades reais.

Não apenas toda raiz par de uma quantidade negativa, como $\sqrt[2]{-aa}$, é imaginária, mas se aí juntarmos uma quantidade real b, o resultado será imaginário; assim, $b + \sqrt[2]{-aa}$ é imaginário, o que é evidente; porque se $b + \sqrt[2]{-aa}$ fosse igual a uma quantidade real c, ter-se-ia $\sqrt[2]{-aa} = c - b$, o que é impossível.

As quantidades compostas de real e imaginário chamam-se imaginários mistos, e as outras, imaginários simples.

Eu demonstrei primeiramente, nas "Memoires de l'Academie de Berlin", no ano de 1746, que toda quantidade imaginária qualquer, pode sempre se reduzir à forma $e + f\sqrt{-1}$, onde e e f são quantidades reais. Euler demonstrou depois esta mesma proposição, nas "Memoires de l'Academie de Berlin", em 1749; mas é fácil de ver que sua demonstração não difere de modo algum da minha. Para se convencer disto, pode-se comparar a página 173 das Memoires de Berlin de 1749, com o artigo 79 de minha dissertação sobre o assunto.

Eu demonstrei em seguida, nas mesmas Memoires de 1746, que toda raiz imaginária de uma equação qualquer podia sempre se reduzir a $e + f\sqrt{-1}$, onde e e f são quantidades reais. Euler fez, por outro lado, nas Memoires de 1749, uma demonstração desta proposição, que difere inteiramente da minha e que não me pareceu tão simples. Pode-se ver as demonstrações das duas proposições mencionadas no Traité de M. Bougainville, sobre o cálculo integral.

Um corolário desta proposição, que é demonstrado muito simplesmente nas Memoires de Berlin, 1746, é que, se $e + f\sqrt{-1}$ é uma das raízes de uma equação, $e - f\sqrt{-1}$ será uma outra; e eis porque as raízes imaginárias das equações aparecem sempre em número par.

Duas quantidades imaginárias somadas podem formar uma quantidade real, por exemplo, $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}$ é uma quantida̲de real (Ver: caso irredutível).

O estatuto dos números complexos do século XVIII

Partindo-se dos três textos seguintes:

- um extrato do "Traité des sections coniques", de De La Chapelle (1765)
- um extrato dos "Élèments d'Algèbre", de Euler (1760)
- o artigo "Imaginaire", de D'Alembert, na Encyclopédie Méthodique (1751-1772)

pretende-se analisar o estatuto dos números complexos no século XVIII.

As questões seguintes podem guiar sua leitura:

1. Nestes três textos, os números complexos são definidos? Se sim, como? Quais são as notações utilizadas para esse propósito?
2. Quais são as propriedades dos números complexos enunciadas? Demonstradas? Utilizadas implicitamente?
3. Que utilidade têm os números complexos para os autores?
4. Os três textos apresentam pontos de vista comparáveis sobre os números complexos?

P.U.C - SÃO PAULO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

5ª AULA

ENSAIO SOBRE UMA MANEIRA DE REPRESENTAR AS QUANTIDADES IMAGINÁRIAS NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: por M. Argand (1813)

Ao Redator dos "Annales" (Annales de Mathématiques)

Senhor

O artigo, de M. J. Français, que apareceu na página 61 do 4º volume dos "Annales", tem por objetivo mostrar alguns novos princípios da Geometria de Posição, cujas consequências tendem particularmente a modificar as noções admitidas até aqui sobre a natureza das quantidades imaginárias.

Ao terminar seu artigo, M. Français anuncia que encontrou a base destas novas idéias numa carta de M. Legendre, que fala sobre o assunto como de alguma coisa que lhe fora comunicada e ele mostra o desejo de que o autor destas idéias torne público seu trabalho sobre este assunto. Cremos que a vontade de M. Français foi satisfeita há muito tempo. Eu publiquei em 1806 um opúsculo sob o título de "Ensaios sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas", cujos princípios são inteiramente análogos àqueles de M. Français, como você poderá julgar pelo exemplar que eu tenho a honra de lhe enviar. M. Legendre teve, anteriormente, a gentileza de examinar meu manuscrito e de me dar seu parecer e deve estar lá, se eu não me engano, a fonte da comunicação de que fala M. Français.

O escrito ao qual nos referimos foi divulgado a uma minoria de pessoas e é muito provável que nenhum de seus leitores o conheça; e eu posso aproveitar a ocasião para lhe apresentar um extrato, presumindo que este assunto poderá lhe interessar, ao menos pela sua novidade, e fazer nascer em alguma pessoa as reflexões necessárias para aperfeiçoar e estender uma teoria da qual minha obra somente apresenta as primeiras bases.

1. Se nós considerarmos a sequência de grandezas

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots$$

poderemos conceber cada um de seus termos como tendo origem naquele que o precede, em virtude de uma operação constante para todos, e que *pode ser repetida indefinidamente.*

Na sequência inversa

$$\ldots, 4a, 3a, 2a, a, 0$$

pode-se igualmente conceber cada termo como tendo origem no precedente; mas a sequência não pode ser prolongada além do zero, pois não será possível operar sobre este último termo como sobre os precedentes.

Ora, se a designa, por exemplo, um objeto material, como "um franco", "uma grama", os termos que, na segunda sequência deveriam suceder o zero, não podem representar nada de real. Deve-se pois qualificá-los de *imaginários*.

Se a, ao contrário, designa um certo grau de peso, agindo sobre o prato A de uma balança contendo pesos em seus dois pratos, como é possível diminuir a quer retirando os pesos do prato A, quer acrescentando ao prato B, a sequência em questão poderá ser prolongada além do zero, e -a, -2a, -3a, ... serão quantidades tão reais quanto +a, +2a, +3a, ...

Esta distinção das grandezas em *reais* e *imaginárias* é mais física que analítica; além do mais ela não é completamente insólita na linguagem da Ciência. A expressão "foco imaginário" é usada em Ótica, para designar o ponto de encontro dos raios que, analiticamente falando, são negativos.

2. Quando nós comparamos, sob o ponto de vista chamado *relação geométrica*, duas quantidades de um tipo susceptível de fornecer valores negativos, a idéia desta relação é evidentemente complexa. Ela se compõe: 1º da idéia de relação numérica, dependendo de suas respectivas grandezas, consideradas absolutamente; 2º da idéia de relação de *direções* ou *sentidos* aos quais elas pertencem, relação que, neste caso, não seja talvez senão a *identidade* ou a *oposição*. Assim, quando nós dizemos +a : -b :: -ma : +mb, nós enunciamos não apenas que a : b :: ma : mb, mas afirmamos ainda que a direção da quantidade +a está, relativamente para a direção da quantidade -b, assim como a direção de -ma está relativamente

para a direção de +mb; e nós podemos mesmo exprimir esta última concepção de uma maneira absoluta, escrevendo

$$(A) \quad +1 : -1 :: -1 : +1$$

3. Seja proposto agora determinar a média proporcional entre +1 e -1, isto é, determinar a quantidade x que satisfaz a proporção $+1 : x :: x : -1$.

Não se poderá igualar x a nenhum número positivo ou negativo, de onde parece que se deve concluir que a quantidade procurada é imaginária.

Mas, uma vez que achamos acima que as quantidades negativas, que pareciam à primeira vista não poder existir senão na imaginação, adquirem uma existência real, quando nós combinamos a idéia de *grandeza absoluta* com a de *direção*, a analogia deve nos levar a procurar se não se poderia obter um resultado análogo, relativamente à quantidade proposta.

Ora, se existe uma direção $\underline{d}$, tal que a direção positiva esteja em relação a d e que esta está em relação à direção negativa, chamando-se 1_d a unidade tomada na direção $\underline{d}$, a proporção

$$(B) \quad +1 : 1_d :: 1_d : -1$$

apresentará: 1º uma proporção puramente mecânica $1 : 1 :: 1 : 1$; 2º uma proporção ou relação de direção, análoga à da proporção (A); e desde que admite-se a verdade desta última, não se poderia recusar a admitir igualmente a legitimidade da proporção (B).

4. Nós vamos ainda estabelecer aqui uma distinção física entre as quantidades reais e imaginárias. Seja a unidade à qual

se refere, como acima, um certo grau de peso, agindo sobre um dos braços de uma balança. Nós tínhamos achado que este gênero de grandeza pode ser realmente positivo ou negativo, mas não se sabia ir mais além, e não se pode de modo algum conceber um gênero de medida tal que 1_d represente qualquer coisa real. Assim, nesse caso, 1_d é uma quantidade imaginária.

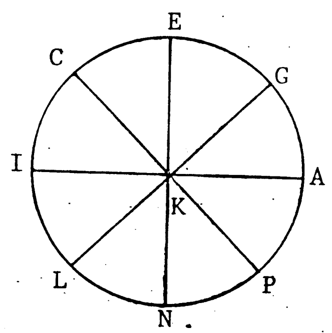
Tomemos agora como unidade positiva uma linha KA (figura 1), considerada como tendo sua direção de K para A; conforme as noções universalmente recebidas, a unidade negativa será KI, igual a KA, mas tomada num sentido oposto.

Tracemos KE perpendicular a IKA; nós teremos a relação seguinte: a direção de KA está para a direção de KE assim como esta está para a direção de KI.

A condição necessária para realizar a proporção (B) se encontrará portanto completamente satisfeita, tomando-se para d a direção de KE, e ter-se-á

$$1_d = KE,$$

quantidade tão real quanto KA e KI. Vê-se assim que a mesma condição é igualmente satisfeita por KN, oposta a KE, estas duas quantidades estão entre si:: +1 : -1. Assim deveria ser.



(Figura 1)

Da mesma forma que se determinou uma média proporcional real KE entre +1 e -1, ou entre KA e KI, poder-se-á construir as médias KG, KC, ..., entre KA e KE, KE e KI, ...

Disto, e por uma sequência de raciocínios que suprimimos, chegar-se-á à consequência geral que, se (figura 2)

$$\text{ang } AKB = \text{ang } A'K'B',$$

tem-se, abstração feita das grandezas absolutas,

$$KA : KB :: K'A' : K'B'.$$

É este o princípio fundamental da teoria a qual nós temos tentado estabelecer as primeiras bases, nos escritos que nós damos aqui um extrato. Este princípio, no fundo não tem nada de diferente daquele sobre o qual está fundamentada a concepção da relação geométrica entre duas linhas de sinais diferentes, e é nada mais que uma generalização.

(Figura 2)

5. Como, no que se seguirá, nós teremos que repetir frequentemente a frase: "linhas consideradas como traçadas numa certa direção", nós empregaremos a expressão abreviada: "linhas em direção" ou "linhas dirigidas"; e nós indicaremos por $\overline{AB}$ a linha AB dirigida de A para B, e por AB simplesmente, esta mesma linha

considerada em sua grandeza absoluta. Preferimos a palavra "direção" ao invés de "posição", porque a primeira indica, entre as duas extremidades de uma linha, uma diferença essencial em nossa teoria, o que não assinala a última. Nós poderemos reservar aquela para designar coletivamente duas direções opostas, e diremos que $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ têm a mesma posição.

6. Vamos agora examinar como as linhas dirigidas combinam-se entre si pela adição e multiplicação e construir as somas e os produtos.

A multiplicação não apresenta qualquer dificuldade. Um produto $A \times B$ não é outra coisa senão que o quarto termo da proporção $1 : A :: B : x$, tratando-se somente de aplicar às linhas dadas o princípio do número 4.

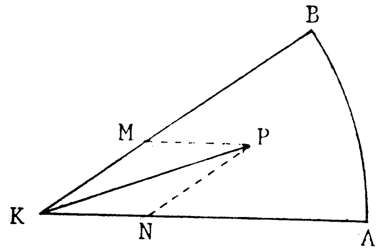
Quanto à adição, a regra que vamos dar pode ser demonstrada facilmente pelos teoremas que dão o seno e o cosseno da soma de dois arcos; mas parece que seria mais elegante tirá-la a priori dos princípios considerados. Raciocinando por analogia, pode-se observar que, quando se trata de somar duas linhas, positivas ou negativas, a, b, tem-se como regra geral, quaisquer que sejam os sinais, de traçar primeiro $\overline{AB}$ = uma das linhas, a por exemplo; de tomar o ponto de chegada B desta linha como ponto de origem da linha b; traçar em seguida $\overline{BC} = b$; e a linha $\overline{AC}$, cujos pontos de origem e chegada A, C, são respectivamente, o ponto de origem da primeira linha a e o ponto de chegada da segunda linha b, será $= a + b$.

Generalizemos este princípio, e concluiremos que sendo A, B, C, ..., F, G, H pontos quaisquer, tem-se

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{C..} + \ldots + \overline{..F} + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}$$

7. Pode-se decompor uma linha em direção dada KP (figura 3) em duas partes pertencentes às *posições* dadas KA e KB. Para isto, basta traçar, sobre KB, KA, as linhas PM, PN, paralelas a KA, KB, e teremos

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP} = \overline{KN} + \overline{NP}$$



(Figura 3)

mas, como tem-se

$$\overline{KM} = \overline{NP} \quad e \quad \overline{KN} = \overline{MP}$$

e, como por outro lado, há apenas dois modos de operar a decomposição proposta, conclui-se, em geral, que se,

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A}' + \overline{B}',$$

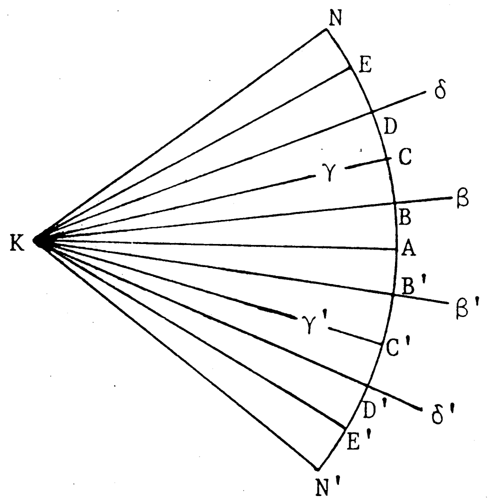
A, A′ têm a mesma direção $\underline{a}$, e B, B′ a mesma direção $\underline{b}$, $\underline{a}$ e $\underline{b}$ não pertencem à mesma posição, deve-se ter também

$$\overline{A} = \overline{A}' \quad e \quad \overline{B} = \overline{B}'$$

Esta partição acontece frequentemente, quando uma das posições é aquela de ±1 e a outra a posição perpendicular; o que retorna à separação do real e do imaginário.

8. Passemos às aplicações e estabeleçamos primeiro algumas consequências cujo emprego é mais frequente.

Sejam (figura 4) AB, BC, ..., EN, AB′, B′C′,..., E′N′, n arcos iguais, de cada lado do ponto A; $\overline{KA}$ sendo tomado para unidade; e seja $\overline{KB}$ = u; ter-se-á



(Figura 4)

$$\overline{KA} = 1; \quad \overline{KB} = u; \quad \overline{KC} = u^2; \quad \overline{KD} = u^3; \quad \overline{KN} = u^n$$

$$\overline{KA} = 1; \quad \overline{KB}' = \frac{1}{u}; \quad \overline{KC}' = \frac{1}{u^2}; \quad \overline{KD}' = \frac{1}{u^3}; \quad \overline{KN}' = \frac{1}{u^n}$$

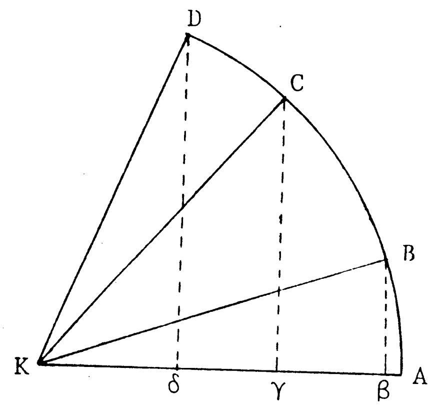
$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} = 1; \quad \frac{\overline{KB}}{\overline{KB}'} = u^2; \quad \frac{\overline{KC}}{\overline{KC}'} = u^4; \quad \frac{\overline{KD}}{\overline{KD}'} = u^6; \quad \frac{\overline{KN}}{\overline{KN}'} = u^{2n}$$

E, se tomarmos, sobre os raios correspondentes $K\beta' = K\beta$, $K\gamma' = K\gamma$, $K\delta' = K\delta$, ..., os comprimentos $K\beta$, $K\gamma$, $K\delta$, ... quaisquer, ter-se-á ainda

$$\frac{\overline{K\beta}}{\overline{K\beta}'} = u^2; \quad \frac{\overline{K\gamma}}{\overline{K\gamma}'} = u^4; \quad \frac{\overline{K\delta}}{\overline{K\delta}'} = u^6; \quad ...$$

E se sobre os raios $\overline{KA}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN}$, ..., tomados como bases, constroem-se figuras semelhantes, tais que $\bar{a}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$, ... sejam linhas homólogas destas figuras, ter-se-á

$$\text{(C)} \quad \bar{m} = \bar{a} \times \overline{KM}, \quad \bar{n} = \bar{a} \times \overline{KN}, \ ...$$



(Figura 5)

9. Sejam (figura 5) arc AB = $\overset{\frown}{CD}$ = a, arc AC = b; ter-se-á (5, 6, 7)

$$\cos(a+b) + \sqrt{-1}\cdot \text{sen}(a+b) = \overline{K\delta} + \overline{\delta D} = \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC} =$$
$$= (\overline{K\beta} + \overline{\beta B}) \times (\overline{K\gamma} + \overline{\gamma C}) = (\cos a + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } a)(\cos b + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } b) =$$
$$= (\cos a\cdot \cos b - \text{sen } a\cdot \text{sen } b) + \sqrt{-1}\,(\text{sen } a\cdot \cos b + \cos a\cdot \text{sen } b)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a\cdot \cos b - \text{sen } a\cdot \text{sen } b \\ \text{sen}(a+b) = \text{sen } a\cdot \cos b + \cos a\cdot \text{sen } b \end{cases}$$

Sejam (figura 6) $\overset{\frown}{AC} = a$, $\overset{\frown}{AB} = b$, $\overset{\frown}{BD} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{a-b}{2}$; tomemos $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$, e tracemos KD e BC interceptando-se em d; teremos:

$$(\cos a - \cos b) + \sqrt{-1}\,(\text{sen } a - \text{sen } b) =$$

$$= (\cos a + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } a) -$$

$$- (\cos b + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } b) =$$

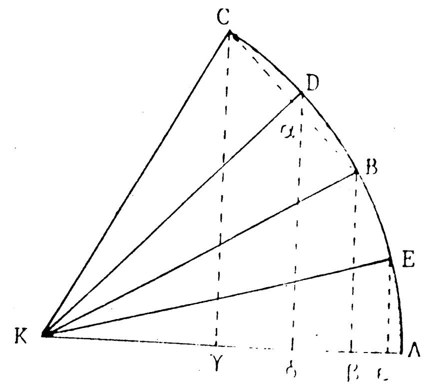
$$= (\overline{K\gamma} + \overline{\gamma C}) - (\overline{K\beta} + \overline{\beta B}) = \overline{KC} - \overline{KB} =$$

$$= \overline{KC} + \overline{BK} = \overline{BC} = 2\cdot\overline{\alpha C} = (n^{\underline{o}}\ 8,\ C) =$$

$$= 2\cdot\overline{\varepsilon E} \times \overline{KD} = 2\cdot\overline{\varepsilon E} \times (\overline{K\delta} + \overline{\delta D}) =$$

$$= 2\sqrt{-1}\cdot \text{sen } \frac{a-b}{2} \cdot \left(\cos \frac{a+b}{2} + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } \frac{a+b}{2}\right)$$

$$= -\,2 \cdot \text{sen } \frac{a-b}{2} \cdot \text{sen } \frac{a+b}{2} + 2\sqrt{-1}\cdot \text{sen } \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$



(Figura 6)

Portanto,

$$\begin{cases} \cos a - \cos b = -\,2\ \text{sen } \dfrac{a-b}{2} \cdot \text{sen } \dfrac{a+b}{2} \\ \text{sen } a - \text{sen } b = 2\ \text{sen } \dfrac{a-b}{2} \cdot \cos \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FICHA V

Atividade

Após a leitura e análise do texto de M. Argand, responda às seguintes questões:

1) Quais fatos indicam o cuidado da legitimação?

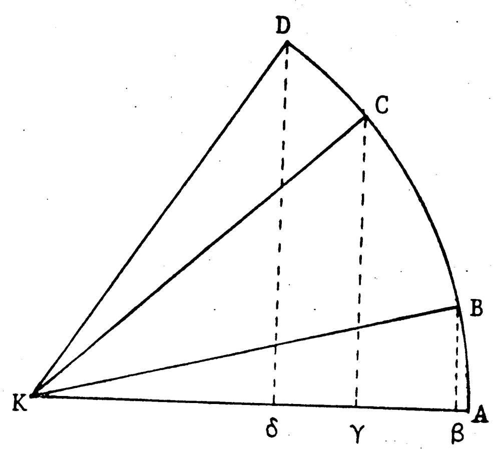
2) Reconstituir o argumento de Argand. Sobre qual(is) quadro(s) se apóia este argumento?

3) Como é interpretada a analogia com os números negativos?

4) Como são definidas as operações?

5) Na figura abaixo, são dados: $\widehat{AD} = a$, $\widehat{AC} = b$ e $\widehat{AB} = \widehat{CD} = a - b$.

Determine os valores de cos $(a - b)$ e sen $(a - b)$.



EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FICHA VI

NÚMEROS COMPLEXOS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO FORMULADOS DIRETAMENTE NESTE CONTEXTO.

Distinguiu-se a utilização de dois quadros para os números complexos e os tipos de representações associadas a cada um destes quadros. Nesta ficha, pretende-se construir um painel de tradução dos quadros algébrico e geométrico e explorar este painel para a resolução de problemas não formulados diretamente em termos de números complexos.

I. Construir uma classificação contendo, para um certo número de noções básicas nos quadros algébrico e geométrico, as expressões destas noções nas diferentes representações associadas aos números complexos. Por exemplo:

Noção: módulo de um número complexo

Expressão intrínsica: $(z\cdot\bar{z})^{1/2}$

Expressões algébricas: $\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ se } z = a + bi \\ \rho, \text{ se } z = \rho\cdot e^{i\theta} \end{cases}$

Expressões geométricas: $\begin{cases} d(0,M), \text{ se } M \text{ é o afixo de } z \\ \|\vec{v}\|, \text{ se o vetor } \vec{v} \text{ é associado a } z \end{cases}$

Em particular, far-se-á figurar traduções algébricas das transformações geométricas seguintes: translação do vetor $\vec{v}$, rotação de centro A e ângulo θ, produtos escalar e vetorial de dois vetores, etc.

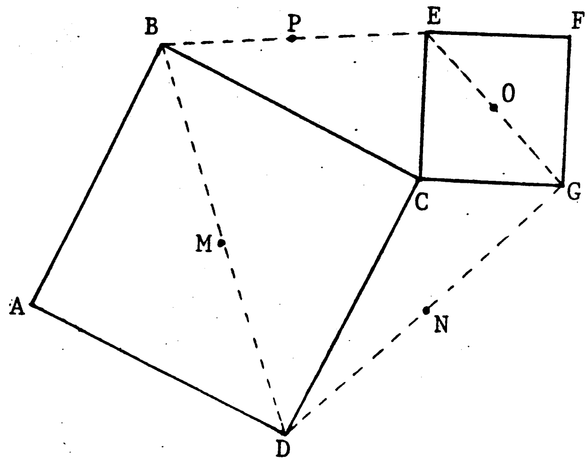
II. Explorar o que foi exposto, na resolução dos problemas seguintes:

1. Achar a equação da circunferência de centro no ponto (-2; -1) e raio 4.

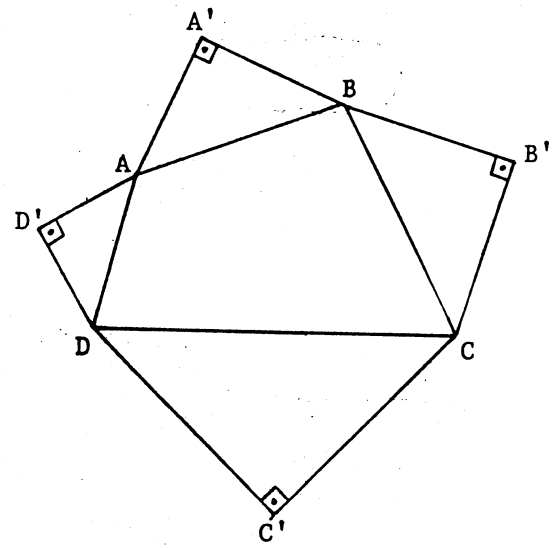
2. Mostrar que se dois inteiros são tais que cada um deles é a soma dos quadrados de dois inteiros, então o seu produto é também a soma dos quadrados de dois inteiros.

3. (Olimpíadas - Paris - 1987)

Sejam dois quadrados ABCD e CEFG tendo um vértice comum, conforme a figura seguinte, e sejam M, N, O e P os pontos médios dos lados $\overline{BD}$, $\overline{DG}$, $\overline{CE}$ e $\overline{EB}$, respectivamente. Qual é a natureza do quadrilátero MNOP?



4. Constroem-se na parte externa de um quadrilátero convexo ABCD, triângulos retângulos isósceles ABA′, BCB′, CDC′ e DAD′, conforme a figura seguinte. Mostrar que as diagonais do quadrilátero A′B′C′D′ são ortogonais e de mesmo comprimento.



Atividade Final

Responda às seguintes questões:

1. Se você já ensina ou vai ensinar os números complexos, o curso feito vai alterar sua organização atual?

2. Quais são, para você, as coisas verdadeiramente importantes na teoria dos números complexos?

3. O que foi ensinado mudou a sua visão da Matemática?

4. Que sugestões você daria para melhorar este ensino?

EXTRATOS

Quelques articles de D'ALEMBERT relatifs aux nombres imaginaires

(Extrait de l'ENCYCLOPÉDIE de Diderot et D'Alembert).

CAS IRRÉDUCTIBLE *du troisième degré*, ou simplement CAS IRRÉDUCTIBLE, *en Analyse*, c'est celui où une équation du troisième degré a ses trois racines réelles, inégales & incommensurables. Dans ce *cas*, si on résout l'équation par la méthode ordinaire, la racine quoique réelle, se présente sous une forme qui renferme des quantités imaginaires, & l'on n'a pu jusqu'à présent réduire cette expression à une forme réelle, en chassant les imaginaires qu'elle contient. *Voyez* RÉEL, IMAGINAIRE, &c. Entrons sur ce sujet dans quelque détail.

Soit $x^3 + qx + r = 0$ une équation du troisième degré, dans laquelle le second terme est évanoui. *Voyez* EVANOUISSEMENT, EQUATION & TRANSFORMATION, &c. Pour la résoudre, je fais $x = y + z$, & j'ai $x^3 = y^3 + 3yyz + 3zyy + z^3 = y^3 + 3yzx + z^3$; donc $x^3 - 3yzx - y^3 = 0$. Cette équation étant comparée terme à terme avec $x^3 + qx + r = 0$, on aura, 1.° $-3yz = q$ ou $z = -\frac{q}{3y}$; 2.° $y^3 + z^3 = -r$, ou $y^3 + r = \frac{q^3}{27y^3}$, ou $y^6 + ry^3 = \frac{q^3}{27}$.

Cette équation, qu'on ramène au second degré, (en faisant $y^3 = t$,) étant résolue à la manière ordinaire (*Voyez* EQUATION,) donne $y^3 =$

$-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}$. Donc, à cause de $z^3 = -r - y^3$, on aura $z^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}$; donc x ou $y + z = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}}$. Telle est la forme de la valeur de x. Cela posé.

1.° Il est évident que si q est positif, r étant positif ou négatif, cette forme est réelle, puisqu'elle ne contient que des quantités réelles. Or dans ce *cas*, comme on le verra à *l'article* EQUATION, deux des racines sont imaginaires. Ainsi, la seule racine réelle se trouve exprimée par une formule qui ne contient que des quantités réelles. Ce *cas* ne tombe donc point dans le *cas irréductible*, & n'a aucune difficulté.

2.° Si q est négatif, & que $\frac{r^2}{4} = \frac{q^3}{27}$, alors l'équation a deux racines égales, & il n'y a encore aucune difficulté.

3.° Si q est négatif & $\frac{r^2}{4} > \frac{q^3}{27}$, il y a deux racines imaginaires, & la racine réelle se trouve représentée par une formule toute réelle; ce qui n'a point de difficulté non plus.

4.° Mais, si q est négatif, & que $\frac{r^2}{4} < \frac{q^3}{27}$, alors $-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}$ est une quantité négative, & par conséquent $\sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}$ est imaginaire. Ainsi, l'expression de x renferme alors des imaginaires.

Cependant on démontre en Algèbre, que dans ce *cas* les trois racines sont réelles & inégales. On peut en voir la preuve à la fin de cet article. Comment donc peut-il se faire que la racine x se présente sous une forme qui contienne des imaginaires ?

M. Nicole a le premier résolu cette difficulté (*Mem academ.* 1738.) Il a fait voir que l'expression de x, quoiqu'elle contienne des imaginaires, est en effet réelle. Pour le prouver, soit $\sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)} = b\sqrt{-1}$, & $-\frac{r}{2} = a$, on aura $x = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}$. Il s'agit de montrer que cette expression, quoiqu'elle renferme des imaginaires, représente une quantité réelle. Pour cela, soit formée, suivant les règles données à l'*article* BINOME, une série qui exprime la valeur de $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, ou $\overline{a + b\sqrt{-1}}^{\frac{1}{3}}$ & celle de $(a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$; on trouvera, après avoir ajouté ensemble ces deux séries, que tous les termes imaginaires se détruiront, & qu'il ne restera qu'une suite infinie de termes composés de quantités toutes réelles. Ainsi, la valeur de x est en effet réelle. La difficulté est de sommer cette série; c'est à quoi on n'a pu parvenir jusqu'à présent. Cependant M. Nicole l'a sommée dans quelques *cas* particuliers, qu'il a par conséquent soustraits, pour ainsi dire, au *cas irréductible*. Voyez *les Mém. academ.* 1738, *& suiv.*

Lorsque l'une des trois racines réelles & inégales est commensurable, alors l'équation n'est plus dans le *cas irréductible*, parce que l'un des diviseurs du dernier terme donne la racine commensurable. *Voyez* DIVISEUR & RACINE.

Mais quand la racine est incommensurable, il faut, pour trouver l'expression réelle de la racine, ou sommer la série susdite, ou dégager de quelqu'autre maniére l'expression trouvée de la formule imaginaire qui la défigure pour ainsi dire. C'est à quoi on travaille inutilement depuis deux cens ans.

Cette racine du *cas irréductible*, si difficile à trouver par l'Algebre, se trouve aisément par la Géométrie. *Voyez* CONSTRUCTION. Mais quoiqu'on ait la valeur linnéaire, on n'en est pas plus avancé pour son expression algébrique. *Voyez* INCOMMENSURABLE.

Cet inconvénient du *cas irréductible* vient de la méthode qu'on a employée jusqu'ici pour résoudre les équations du troisiéme degré; méthode imparfaite, mais la seule qu'on ait pu trouver jusqu'à présent. Voici en quoi consiste l'imperfection de cette méthode. On suppose $x = y + z$, y & z étant deux quantités indéterminées; ensuite on a tout-à-la-fois $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$, & $x^3 + qx + r = 0$. On compare ces équations terme à terme, & cette comparaison *terme à terme* enferme une supposition tacite, qui améne une forme irréductible sous laquelle x est exprimée; à la rigueur on a $qx + r = -3yzx - y^3 - z^3$; voilà la seule conséquence *rigoureuse* qu'on puisse tirer de la comparaison des deux équations; mais outre cela, on veut encore supposer que la premiére partie de $qx + r$, c'est-à-dire qx soit égale à $-3yzx$ premiére partie du second membre. Cette supposition n'est point absolue ni rigoureusement nécessaire, on ne l'a fait que pour parvenir plus aisément à trouver la valeur de y & de z, qu'on ne pourroit pas trouver sans cela; d'ailleurs comme y & z sont l'une & l'autre indéterminées, on peut supposer $-3yzx = qx$ & $-y^3 - z^3 = r$. Mais cette supposition même fait que les deux quantités y & z, au lieu d'être réelles comme elles devroient, se trouvent chacune imaginaires. Il est vrai qu'en les ajoutant ensemble, leur somme est réelle; mais l'imaginaire qui s'y trouve toujours, & qu'on ne peut en chasser, rend inutile l'expression de x qui s'en tire.

En un mot l'équation $x = y + z$ ne donne à la

CAS

rigueur que cette équation $qx + r = -3zxy - y^3 - z^3$, ou $qy + qz + r = -3yyz - 3yzz - y^3 - z^3$ & toutes les fois que l'on voudra de cette équation en faire deux autres particuliéres, on fera une supposition tacite qui pourra entrainer des inconveniens impossibles à éviter, comme il arrive ici, où y & z se trouvent imaginaires.

Il faudroit voir si, par quelque moyen, on ne pourroit pas couper l'équation susdite en deux autres, qui donnassent à y & à z une forme réelle & facile à trouver: mais cette opération paroit devoir être fort difficile, si elle n'est pas impossible.

J'ai fait voir dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Prusse de* 1746, que l'on pouvoit toujours trouver par la trisection d'un arc de cercle, une quantité $c + e\sqrt{-1}$, égale à la racine cube de $a + b\sqrt{-1}$; & que si $c + e\sqrt{-1} = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, on a $\sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = c - e\sqrt{-1}$. *Voy.* IMAGINAIRE. D'où il s'ensuit que dans les *cas* où un arc de cercle peut être divisé géométriquement, c'est-à-dire par la régle & le compas, en trois parties égales, on peut assigner la valeur algébrique de c & de e, ce qui pourroit fournir des vues pour résoudre en quelques occasions des équations du troisiéme degré qui tomberoient dans le *cas irréductible*. Voyez *le Mémoire que j'ai cité*.

Quoi qu'il en soit, la racine étant incommensurable dans le *cas irréductible*, l'expression réelle de cette racine, quand on la trouveroit, n'empêcheroit pas de recourir aux approximations. On a donné à l'*article* APPROXIMATION la méthode générale pour approcher de la racine d'une équation, & nous y avons indiqué les auteurs qui ont donné des méthodes particuliéres d'approximation pour le *cas irréductible*. Voyez *aussi* CASCADE.

Puisque nous en sommes sur cette matiére des équations du troisiéme degré, nous croyons qu'on ne nous saura pas mauvais gré de faire ici quelques remarques nouvelles qui y ont rapport, & dont nos lecteurs pourront tirer de l'utilité.

On sait que toute équation du troisiéme degré a trois racines. Il faudroit donc, pour résoudre d'une maniére complete, une équation du troisiéme degré, trouver une méthode qui fit trouver à-la-fois les trois racines, comme on trouve à-la-fois les deux racines d'une équation du second degré. Jusqu'à ce qu'on ait trouvé cette méthode, il y a bien de l'apparence que la théorie des équations du troisiéme degré restera imparfaite: mais la trouvera-t-on, cette méthode? c'est ce que nous n'osons ni nier ni prédire.

Examinons présentement de plus près la méthode dont on se sert pour trouver les racines d'une équation du troisiéme degré. On a d'abord une équation du sixiéme degré y^6, *&c.* telle qu'on l'a vue ci-dessus, & qui a par conséquent six racines;

on peut aisément prouver être toutes inégales: on a ensuite une équation du troisième degré $z^3 = -y^3 - r$; & comme y^3 a deux valeurs différentes à cause de l'équation $y^6 + r y^3$, &c. $= 0$, & que z est élevé au troisième degré, il s'ensuit que cette équation doit donner aussi six valeurs différentes de z, trois pour chaque valeur de y^3; or chacune des six valeurs de z étant combinée avec chacune des six valeurs de y, on aura trente-six valeurs différentes pour $z + y$; donc x paroît avoir trente-six valeurs différentes. Cependant l'équation étant du troisième degré, x ne doit avoir que trois valeurs : comment accorder tout cela?

Je réponds d'abord que les trente-six valeurs prétendues de $y + z$ doivent se réduire à dix-huit. En effet, il ne faut pas combiner indifféremment chaque valeur de z avec toutes les valeurs de y, mais seulement à toutes les valeurs de y qui correspondent à la valeur qu'on a supposée à y^3. Par exemple, on a $y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}$; d'où l'on tire $z^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}$; le signe + qui précède le signe radical dans la valeur de y^3, répond au signe — qui précède le signe radical dans la valeur de z^3, & le signe — au signe +; ce qui est évident, puisque $z^3 = -r - y^3$: donc pour chacune des trois valeurs de y qui répondent au signe + placé devant le signe radical, il y a trois valeurs de z qui répondent au signe — placé devant le signe radical : ce qui fait neuf valeurs de $y + z$; & en y ajoutant les neuf autres valeurs pour le cas du signe —, placé avant le signe radical dans l'expression de y^3, cela fait 18 au lieu de 36 qu'on auroit en combinant indifféremment les signes. Mais ce n'est pas tout.

Quoique chacune des valeurs de y & de z, employées & combinées comme on vient de le prescrire, paroisse donner une valeur de $y + z$, il faut encore rejetter celles dans lesquelles le produit zy ne sera pas égal à $-\frac{q}{3}$; car c'est une des conditions de la solution, comme on l'a vu plus haut, que $-3zy = q$; il est vrai que les dix-huit valeurs de y & z satisfont à la condition que $-27y^3z^3 = q^3$. Mais cette condition $-27y^3z^3 = q^3$ est beaucoup plus étendue que la condition $-3zy = q$, quoique d'abord elle paroisse la même. Par exemple, $u = b$ ne donne qu'une valeur de u: mais $u^3 = b^3$ donne trois valeurs de u. Pour le prouver, soit $u^3 - b^3 = 0$, & divisons par $u - b$, il viendra $uu + bu + bb = 0$, ce qui donne $u = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3bb}{4}\right)}$; ainsi, $u^3 = b^3$ donne $u = b$, $u = b \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\right)$ & $u = b \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\right)$. Donc, quoique, dans les dix-huit valeurs de $y + z$, on ait $27y^3z^3 = -q^3$; il ne faut prendre que celles où $3yz = -q$. Cela posé.

Soient ces quatre équations :

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \left\{\begin{array}{l} y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}. \\ z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}. \end{array}\right. \\ \text{II.} & \\ \text{III.} & \left\{\begin{array}{l} y^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r}{4}\right)}. \\ z^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{r^2}{4}\right)}. \end{array}\right. \\ \text{IV.} & \end{array}$$

Et soit $a + b\sqrt{-1}$ = à la racine cubique de $-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}$, on aura $a - b\sqrt{-1}$ = à la racine de $-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}$, ce qui donnera :

Racines de la première équation.

1. $y = a + b\sqrt{-1}$.
2. $y = (a + b\sqrt{-1}).\left(-\frac{1+\sqrt{-1}}{2}\right)$.
3. $y = (a + b\sqrt{-1}).\left(-\frac{1-\sqrt{-1}}{2}\right)$.

Racines de la seconde.

4. $z = a - b\sqrt{-1}$.
5. $z = (a - \sqrt{-1}).\left(-\frac{1+\sqrt{-1}}{2}\right)$.
6. $z = (a - b\sqrt{-1}).\left(-\frac{1-\sqrt{-1}}{2}\right)$.

Racines de la troisième.

Sont les mêmes que de la seconde.

Racines de la quatrième.

Sont les mêmes que de la première.

Donc, 1.° la combinaison des racines de la troisième équation avec celles de la quatrième, donnera le même résultat que celle des racines des deux premières.

2.° Il ne faudra combiner ensemble que les valeurs de y & de z, & dont le produit sera $= -\frac{q}{3}$, c'est-à-dire $aa + bb$; car $a + b\sqrt{-1}$ étant $= \grave{a} \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}}$ & $a - b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}}$, on aura $aa + bb = \sqrt[3]{-\frac{q^3}{27}} = -\frac{q}{3}$. D'où il s'ensuit,

3.° Qu'il faudra combiner la racine marquée

(1) avec la racine marquée (4), ce qui donnera $y = 2a$.

4.° Qu'il faudra combiner la racine marquée (2) avec la racine marquée (6), ce qui donnera $-a + b\sqrt{3}$.

5.° Qu'il faudra combiner la racine marquée (3) avec la racine marquée (5), ce qui donnera $-a - b\sqrt{3}$.

Voilà les trois racines de l'équation, & il est visible par les régles que nous avons établies, que toutes les autres valeurs de $y + z$ donneroient des expressions fausses de la racine x, & que toutes les trois racines sont ici réelles.

On peut trouver aisément par la même méthode les trois valeurs de x dans tout autre *cas* que le *cas irréductible*. Par exemple, si q est positif, ou si q est négatif & $<$ ou $= \frac{r^2}{4}$, alors il faudra supposer

$$\sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}} = a + b,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right)}} = a - b;$$

& l'on trouvera en ce *cas* une racine réelle & deux imaginaires, ou une racine réelle & deux autres réelles, égales entr'elles. C'est ce qu'il est inutile d'expliquer plus en détail : il ne faut pour s'en convaincre, que faire un calcul semblable à celui que nous avons fait pour trouver les trois racines dans le *cas irréductible*. (O)

De La Chapelle : "Traité des Sections Coniques" 1765.

Racine d'un degré quelconque, ni en entier ni en partie; c'est-à-dire que l'on ne peut pas à la rigueur délivrer de leur Radical. Telles sont $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, &c. que l'on appelle *incommensurables*, c'est-à-dire qui n'ont aucune commune mesure avec l'unité, ou avec quelque partie de l'unité; de sorte qu'il n'y a aucun nombre, soit entier ou fraction, qui soit la Racine quarrée de 5. ainsi que je l'ai démontré au n°. 72. Algeb. des *Inst. T.* 1. Cependant, quoiqu'il y ait des quantités dont on ne puisse avoir la Racine à toute rigueur, j'ai fait voir dans mes *Institutions*, que l'on pouvoit en approcher à l'infini; & qu'ainsi l'on avoit à cet égard un supplément qui alloit bien au-delà des besoins de la société.

24. On trouve même quelquefois des quantités radicales, dont l'approximation de la Racine est impossible, & dont la recherche seroit absurde. Ainsi $\sqrt{-a^2}$ n'est ni ne peut être $+a$ ou $-a$; car $+a$ ou $-a$ élevé au quarré, ne produira jamais $-a^2$. De même $\sqrt{-9}$ n'est ni 3 ni -3; puisque 3×3 ou -3×-3 donnent 9, & non pas -9. C'est pourquoi ces sortes de grandeurs s'appellent *imaginaires*, & l'on jugera qu'une quantité est *imaginaire*, toutes les fois qu'étant négative, elle se trouvera sous un signe Radical dont l'Exposant sera un nombre pair; par exemple $\sqrt[4]{-a^4}$, $\sqrt[6]{-a^6}$, &c. sont des grandeurs *imaginaires*; parce qu'aucune grandeur positive ou négative, multipliée par elle-même en nombre pair, ne peut jamais donner un produit négatif.

25. Mais que signifie une grandeur *imaginaire*, pourquoi l'admettre dans le Calcul? Quand on propose la résolution d'un Problême, celui qui la tente ne sçait pas d'abord si on lui a proposé une chose possible ou absurde; il est donc obligé d'exprimer toutes les conditions de la question, quoiqu'il y en ait peut-être qui se contredisent sans qu'on s'en apperçoive; & si, après avoir comparé tout ce qui pouvoit le conduire à la résolution qu'il cherche, il

arrive à un résultat exprimé *imaginairement*; il est sûr, il peut démontrer qu'on lui a fait une question absurde & que par conséquent le Problême est résolu. Comme je l'ai fait voir dans mes *Instit.*

26. Les grandeurs *imaginaires* peuvent donc & doivent entrer dans le Calcul; elles peuvent même devenir *réel*[les] en détruisant l'impossibilité qui les empêchoit d'être réell[es]. -4 est une grandeur *réelle* & très-possible, puisque l'[on] peut être 4 au-dessous de 0 ou de rien; tel est l'état d'[un] homme qui n'ayant rien doit 100[tt]; il a 100[tt] moins q[ue] rien, puisqu'en lui donnant 100[tt], il seroit encore da[ns] l'état de rien. Si l'on proposoit donc d'extraire la Raci[ne] quarrée de -4, dont l'expression seroit $\sqrt{-4}$, on d[e]manderoit une chose absurde, & $\sqrt{-4}$ seroit une *im[a]ginaire*, qui pourroit devenir *réelle* en la multipliant p[ar] elle-même, c'est-à-dire, en détruisant l'absurdité qui l'em[]pêche d'être *réelle*; de sorte que $\sqrt{-4}\times\sqrt{-4} = -4$. Car, comme c'est le Radical $\sqrt{\ }$ qui fait uniquem[ent] l'absurdité de l'expression $\sqrt{-4}$, la seule suppression d[e] ce Radical rendra *réelle* la grandeur qui est dessous. On n[e] doit donc point s'étonner dans la suite, si l'on voit qu[e] des *imaginaires* se calculent, & même qu'elles deviennent *réelles*.

27. Remarquez bien qu'il y a une fort grande différenc[e] entre une grandeur *imaginaire* & une grandeur égale à rie[n] ou à zéro; parce qu'une grandeur égale à rien n'est pas ab[]surde; il est possible qu'une quantité soit détruite par un[e] autre, au lieu qu'une grandeur *imaginaire* est une quantit[é] absurde, ou qui emporte contradiction. Vous ne pourre[z] pas dire qu'une *imaginaire* puisse être considérée comm[e] zéro, c'est quelque chose de pis; de même une grandeu[r] égale à zéro ne peut pas être prise pour une *imaginaire* puisqu'il n'est pas absurde qu'une grandeur devienne zéro.

28. Moyennant les considérations précédentes, on peu[t] quelquefois simplifier ou *réduire à sa plus simple expressio[n]*

Euler: Elements d'algèbre

CHAPITRE XIII.

Des Quantités impossibles ou imaginaires, qui dérivent de la même source.

139.

Nous avons déjà vu plus haut que les quarrés des nombres, tant positifs que négatifs, sont toujours positifs ou affectés du signe $+$; ayant fait observer que $-a$ multiplié par $-a$ fait $+aa$, tout comme le produit de $+a$ par $+a$. C'est pourquoi, dans le chapitre précédent, nous avons supposé que tous les nombres dont il s'agissoit d'extraire les racines quarrées, étoient positifs.

140.

Quand il arrive donc qu'il soit question d'extraire la racine d'un nombre négatif, on ne peut que se trouver fort embarrassé, n'y ayant aucun nombre assignable dont le

quarré soit un nombre négatif. Car supposez, par exemple, qu'on voulût extraire la racine de -4, ce seroit demander un nombre tel que, multiplié par lui-même, il donnât -4; or ce nombre cherché n'est ni $+2$ ni -2, parce que le quarré, tant de $+2$ que de -2, est $+4$ & non pas -4.

141.

Il faut donc conclure que la racine quarrée d'un nombre négatif ne peut être ni un nombre positif, ni un nombre négatif, puisqu'aussi les quarrés des nombres négatifs prennent le signe *plus*. Par conséquent il faut que la racine en question appartienne à une espece tout-à-fait particuliere de nombres; puisqu'elle ne peut être comprise ni parmi les nombres positifs, ni parmi les nombres négatifs.

142.

Or nous avons remarqué plus haut que les nombres positifs sont tous plus grands

que rien ou 0, & que les nombres négatifs sont tous plus petits que rien ou 0; de façon que tout ce qui surpasse 0 s'exprime par des nombres positifs, & que tout ce qui est moindre que 0, s'exprime par des nombres négatifs. Nous voyons donc que les racines quarrées de nombres négatifs ne sont ni plus grandes ni plus petites que rien. Cependant on ne peut pas dire qu'elles soient 0; car 0 multiplié par 0 fait 0, & par conséquent ne donne pas un nombre négatif.

143.

Or puisque tous les nombres qu'il est possible de s'imaginer, sont ou plus grands ou plus petits que 0, ou sont 0 même, il est clair qu'on ne peut pas même compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres possibles, & il faut donc dire que c'est une quantité impossible. C'est de cette façon que nous sommes conduits à l'idée de nombres qui par leur nature sont

impossibles. On nomme ordinairement ces nombres des *quantités imaginaires*, parce qu'elles existent purement dans l'imagination.

144.

Toutes les expressions, comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, &c. sont par conséquent des nombres impossibles ou imaginaires, puisqu'ils indiquent des racines de quantités négatives. Et c'est de pareils nombres qu'on soutient avec raison qu'ils ne sont ni rien, ni plus que rien, ni moins que rien; ce qui fait principalement qu'on est obligé de les déclarer impossibles.

145.

Avec tout cela cependant ces nombres se présentent à l'esprit, ils ont lieu dans notre imagination, & nous ne laissons pas d'en avoir une idée suffisante; puisque nous savons que par $\sqrt{-4}$, par exemple, on entend un nombre qui, multiplié par lui-même, fait -4. C'est aussi pourquoi rien

ne nous empêche d'appliquer le calcul à ces nombres imaginaires, & de les employer.

146.

Notre premiere notion dans la matiere que nous traitons, est que le quarré de $\sqrt{-3}$, par exemple, ou le produit de $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{-3}$, est -3; que celui de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$, fait -1; & en général, qu'en multipliant $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$, ou en prenant le quarré de $\sqrt{-a}$, on obtient $-a$.

147.

Maintenant, comme $-a$ signifie autant que $+a$ multiplié par -1, & que la racine quarrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multipliée par -1, ou $\sqrt{-a}$, est autant que $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{-1}$. Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imag naire, peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raison donc, $\sqrt{-4}$ est autant que $\sqrt{4}$ multipliée par $\sqrt{-1}$, & autant que $2\sqrt{-1}$, à cause de $\sqrt{4}$ égal à 2. Par la même raison $\sqrt{-9}$ se réduit à $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, ou à $3\sqrt{-1}$; & $\sqrt{-16}$ signifie $4\sqrt{-1}$.

148.

De plus, comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$, & $\sqrt{4}$ ou 2, pour la valeur du produit de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-4}$. On voit donc que deux nombres imaginaires, multipliés l'un par l'autre, en produisent un réel ou possible.

Mais au contraire un nombre possible, multiplié par un nombre impossible, donne toujours de l'imaginaire: $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{+5}$ fait $\sqrt{-15}$.

149.

Il en est de même à l'égard de la division; car $\sqrt{a}$ divisé par $\sqrt{b}$ faisant $\sqrt{\frac{a}{b}}$,

il est clair que $\sqrt{-4}$ divisé par $\sqrt{-1}$ sera $\sqrt{+4}$ ou 2; que $\sqrt{+3}$ divisé par $\sqrt{-3}$ sera $\sqrt{-1}$; & que 1 divisé par $\sqrt{-1}$ me donne $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ ou $\sqrt{-1}$; parce que 1 est autant que $\sqrt{+1}$.

150.

Nous avons observé plus haut que la racine quarrée d'un nombre quelconque a toujours deux valeurs, l'une positive & l'autre négative; que $\sqrt{4}$, par exemple, est également $+2$ & -2, & qu'en général on peut adopter $-\sqrt{a}$ comme $+\sqrt{a}$ pour la racine quarrée de a. Cette remarque a lieu aussi, quand il s'agit de nombres imaginaires: la racine quarrée de $-a$ est également $+\sqrt{-a}$ & $-\sqrt{-a}$; mais il faut se garder de confondre les signes $+$ & $-$ qui sont devant le signe radical $\sqrt{\ }$, & le signe qui ne vient qu'après cette marque $\sqrt{\ }$.

151.

Il nous reste enfin à lever le doute qu'on pourroit avoir sur l'utilité des nombres dont nous venons de parler; car en effet ces nombres étant impossibles, il ne seroit pas étonnant qu'on les crût tout-à-fait inutiles & l'objet seulement d'une vaine spéculation. On se tromperoit cependant; le calcul des imaginaires est de la plus grande importance; souvent il se présente des questions, desquelles on ne sauroit dire sur le champ si elles renferment quelque chose de réel & de possible ou non. Or quand la solution d'une pareille question nous conduit à des nombres imaginaires, nous sommes certains que ce qu'on demande est impossible.

Afin d'éclaircir ce que nous venons de dire par un exemple, supposons qu'on propose la question: de diviser le nombre 12 en deux parties, telles que le produit de ces parties fasse 40. Si l'on résout cette

question par les regles ordinaires, on trouve pour les parties cherchées $5+\sqrt{-4}$ & $6-\sqrt{-4}$; mais ces nombres sont imaginaires: on conclut donc par cela même qu'il est impossible de résoudre la question.

On saisira facilement la différence, en supposant que la question eût été de diviser 12 en deux parties qui, multipliées ensemble, fissent 35; car il est évident que ces parties seroient 7 & 5.

D'Alembert

IMAGINAIRE, adj. on appelle ainsi, en *Algèbre*, les racines paires de quantités négatives. La raison de cette dénomination est, que toute puissance paire d'une quantité quelconque, positive ou négative, a nécessairement le signe +, parce que + par +, ou — par —, donnent également +. *Voyez* QUARRÉ, PUISSANCE, NÉGATIF & MULTIPLICATION. D'où il s'ensuit que toute puissance paire, tout quarré, par exemple, qui a le signe —, n'a point de racine possible (*voyez* RACINE), & qu'ainsi la racine d'une telle puissance est impossible ou *imaginaire*. Les quantités *imaginaires* sont opposées aux quantités *réelles*. *V.* RÉEL & EQUATION.

Non-seulement toute racine paire d'une quantité négative, comme $\sqrt[2]{-aa}$, est *imaginaire*, mais encore, si on y joint une quantité réelle b, le tout devient *imaginaire*; ainsi, $b+\sqrt[2]{-aa}$ est *imaginaire*, ce qui est évident; car, si $b+\sqrt[2]{-a}$ étoit égal à une quantité réelle c, on auroit $\sqrt[2]{-aa}=c-b$, ce qui est impossible.

Les quantités composées de réel & d'*imaginaire* s'appellent *mixtes imaginaires*, & les autres *imaginaires simples*.

J'ai démontré le premier, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1746, & même dans un ouvrage antérieur, envoyé à l'Académie de Berlin au commencement de 1746, que toute quantité *imaginaire* donnée à volonté, & de telle forme qu'on voudra, peut toujours se réduire à $e+f\sqrt{-1}$, e & f étant des quantités réelles. M. Euler a démontré depuis cette même proposition, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1749; mais il est aisé de voir que sa démonstration ne differe en aucune façon de la mienne. Pour s'en convaincre, on peut comparer la page 273 des Mémoires de Berlin de 1749, avec l'article 79 de ma Dissertation sur les vents.

J'ai démontré de plus, dans les mêmes Mémoires de 1746, que toute racine *imaginaire* d'une équation quelconque pouvoit toujours se réduire à $e+f\sqrt{-1}$, e & f étant des quantités réelles. M. Euler a donné, de son côté, dans les Mémoires de 1749, une démonstration de cette proposition, qui differe entierement de la mienne, & qui ne me paroit pas aussi simple. On peut voir les démonstrations des deux propositions dont je viens de parler, dans le Traité de M. de Bougainville, sur le calcul intégral.

Un corollaire de cette proposition, qui est démontré fort simplement dans les Mémoires de Berlin 1746, c'est que, si $e+f\sqrt{-1}$ est une des racines d'une équation, $e-f\sqrt{-1}$ en sera une autre; & voilà pourquoi les racines *imaginaires* des équations vont toujours en nombre pair. *Voyez* RACINE.

Deux quantités *imaginaires* jointes ensemble peuvent former une quantité réelle; par exemple, $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}$ est une quantité réelle. *V.* CAS IRRÉDUCTIBLE. (*O*)

II.

Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques : par M. ARGAND (*).

Au Rédacteur des *Annales*.

Monsieur,

Le Mémoire de M. J.-F. Français, qui a paru à la page 61 du IVe volume des *Annales*, a pour objet d'exposer quelques nouveaux principes de Géométrie de position, dont les conséquences tendent particulièrement à modifier les notions admises jusqu'ici sur la nature des quantités imaginaires.

En terminant son Mémoire, M. Français annonce qu'il a trouvé le fond de ces nouvelles idées dans une lettre de M. Legendre, qui en parlait comme d'une chose qui lui avait été communiquée, et il témoigne le désir que le premier auteur de ces idées mette

(*) *Annales de Mathématiques*, t. IV, p. 133-147.

au jour son travail sur ce sujet. Il y a tout lieu de croire que le vœu de M. Français est depuis longtemps rempli. J'ai publié en 1806 un opuscule sous le titre d'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*, dont les principes sont entièrement analogues à ceux de M. Français, ainsi que vous pourrez en juger par l'exemplaire que j'ai l'honneur de vous adresser (*). M. Legendre a eu, dans le temps, la bonté d'examiner mon manuscrit et de me donner ses avis, et ce doit être là, si je ne m'abuse, la source de la communication dont parle M. Français.

L'écrit dont il s'agit n'ayant été répandu qu'à très-petit nombre, il est extrêmement probable qu'aucun de vos lecteurs n'en a connaissance; et je crois pouvoir prendre cette occasion de leur en présenter un extrait, présumant que cette matière pourra les intéresser, au moins par sa nouveauté, et faire naître chez quelques-uns d'entre eux des réflexions propres à perfectionner et à étendre une théorie dont mon Ouvrage ne présente encore que les premières bases.

1. Si nous considérons la suite des grandeurs

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\quad 4a,\ldots,$$

nous pouvons concevoir chacun de ses termes comme naissant de celui qui le précède, en vertu d'une opération la même pour tous, et qui *peut être répétée indéfiniment*.

Dans la suite inverse

$$\ldots,\quad 4a,\quad 3a,\quad 2a,\quad a,\quad 0,$$

on peut également concevoir chaque terme comme provenant du précédent; mais la suite ne peut être prolongée au delà de zéro, qu'autant qu'il sera possible d'opérer sur ce dernier terme comme sur les précédents.

(*) L'Ouvrage se trouve à Paris, chez l'auteur, faubourg Saint-Marceau, rue du chemin de Gentilly, n° 12 (¹).

(¹) C'est d'après cet exemplaire, appartenant aujourd'hui à M. Chasles, qu'a été faite la présente édition.

(Note de l'Éditeur.)

Or, si a désigne, par exemple, un objet matériel, comme *un franc, un gramme*, les termes qui, dans la seconde suite, devraient suivre zéro, ne peuvent rien représenter de réel. On doit donc les qualifier d'*imaginaires*.

Si a, au contraire, désigne un certain degré de pesanteur, agissant sur le bassin A d'une balance contenant des poids dans ses deux bassins, comme il est possible de diminuer a soit en enlevant des poids au bassin A, soit en en ajoutant au bassin B, la suite en question pourra être prolongée au delà de zéro, et $-a$, $-2a$, $-3a \ldots$ seront des quantités aussi réelles que $+a$, $+2a$, $+3a, \ldots$

Cette distinction des grandeurs en *réelles* et *imaginaires* est plutôt physique qu'analytique; elle n'est pas d'ailleurs tout à fait insolite dans le langage de la Science. Le nom de *foyer imaginaire* est usité en optique, pour désigner le point de concours des rayons qui, analytiquement parlant, sont négatifs.

2. Lorsque nous comparons entre elles, sous le point de vue appelé *rapport géométrique*, deux quantités d'un genre susceptible de fournir des valeurs négatives, l'idée de ce rapport est évidemment complexe. Elle se compose : 1° de l'idée du rapport numérique, dépendant de leurs grandeurs respectives, considérées *absolument*; 2° de l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent, rapport qui, dans ce cas-ci, ne peut être que l'*identité* ou l'*opposition*. Ainsi, quand nous disons $+a : -b :: -ma : +mb$, nous énonçons non-seulement que $a : b :: ma : mb$, mais nous affirmons de plus que la direction de la quantité $+a$ est, relativement à la direction de la quantité $-b$, ce que la direction de $-ma$ est relativement à la direction de $+mb$; et nous pouvons même exprimer cette dernière conception d'une manière absolue, en écrivant

$$(A) \qquad +1 : -1 :: -1 : +1.$$

3. Soit proposé maintenant de déterminer la moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1, c'est-à-dire d'assigner la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : x :: x : -1.$$

On ne pourra égaler x à aucun nombre positif ou négatif, d'où il semble qu'on doit conclure que la quantité cherchée est imaginaire.

Mais, puisque nous avons trouvé plus haut que les quantités négatives, qui paraissaient d'abord ne pouvoir exister que dans l'imagination, acquièrent une existence réelle, lorsque nous combinons l'idée de la *grandeur absolue* avec celle de la *direction*, l'analogie doit nous porter à chercher si l'on ne pourrait pas obtenir un résultat analogue, relativement à la quantité proposée.

Or, s'il existe une direction d, telle que la direction positive soit à d ce que celle-ci est à la direction négative, en désignant par 1_d l'unité prise dans la direction d, la proportion

(B) $$+1 : 1_d :: 1_d : -1$$

présentera : 1° une proportion purement mécanique $1 : 1 :: 1 : 1$; 2° une proportion ou similitude de rapports de direction, analogue à celle de la proportion (A) ; et, puisqu'on admet la vérité de cette dernière, on ne saurait se refuser à reconnaître également la légitimité de la proportion (B).

4. Nous allons encore établir ici une distinction physique entre les quantités réelles et imaginaires. Que l'unité dont il s'agit soit, comme plus haut, un certain degré de pesanteur, agissant sur un des bras d'une balance. Nous avons trouvé que ce genre de grandeur peut réellement être positif ou négatif; mais on ne saurait aller plus loin, et on ne peut en aucune manière concevoir un genre de poids tel que 1_d qui représente quelque chose de réel. Donc, dans ce cas, 1_d est une quantité imaginaire.

Prenons maintenant pour unité positive une ligne KA (*fig.* 1), considérée comme ayant sa direction de K à A. Suivant les notions universellement reçues, l'unité négative sera KI, égale à KA, mais prise dans un sens opposé.

Tirons KE perpendiculaire à IKA; nous aurons la relation suivante :

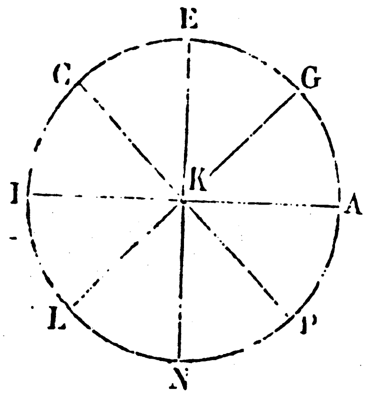
La direction de KA est à la direction de KE comme celle-ci est à la direction de KI.

La condition nécessaire pour réaliser la proportion (B) se trouvera donc complètement satisfaite, en prenant pour d la direction de KE, et on aura

$$1_a = KE,$$

quantité tout aussi réelle que KA et KI. On voit aussi que la même condition est également remplie par KN, opposée à KE,

Fig. 1.



ces deux dernières quantités étant entre elles :: + 1 : — 1, ainsi que cela doit être.

De même qu'on a assigné une moyenne proportionnelle réelle KE entre + 1 et — 1, ou entre KA et KI, on pourra construire les moyennes KC, KG,..., entre KA et KE, KE et KI,....

De là, et par une suite de raisonnements que nous supprimons, on arrivera à cette conséquence générale, que, si (*fig.* 2)

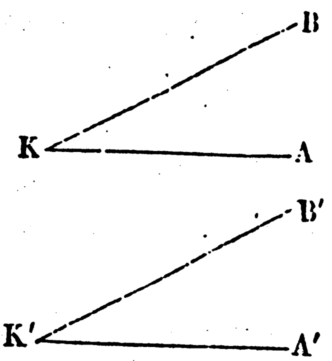
$$\text{ang. AKB} = \text{ang. A}'\text{K}'\text{B}',$$

on a, abstraction faite des grandeurs absolues,

$$\text{KA} : \text{KB} :: \text{K}'\text{A}' : \text{K}'\text{B}'.$$

C'est là le principe fondamental de la théorie dont nous avons essayé de poser les premières bases, dans l'écrit dont nous donnons ici un extrait. Ce principe n'a rien au fond de plus étrange que celui sur lequel est fondée la conception du rapport géométrique entre deux lignes de signes différents, et il n'en est proprement qu'une généralisation.

Fig. 2.



5. Comme, dans ce qui suivra, nous aurions à répéter fréquemment la phrase : *lignes considérées comme tirées dans une certaine direction*, nous emploierons l'expression abrégée : *lignes en direction* ou *lignes dirigées ;* et nous dénoterons par $\overline{AB}$ la ligne AB dirigée de A en B, et par AB simplement cette même ligne considérée dans sa grandeur absolue. Nous préférons le mot de *direction* à celui de *position*, parce que le premier indique, entre les deux extrémités de la ligne, une différence, essentielle dans notre théorie, que ne marque pas le dernier. Nous pourrons réserver celui-ci pour désigner collectivement deux directions opposées, et nous dirons que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ ont la même position.

6. Nous allons maintenant examiner comment les lignes dirigées se combinent entre elles par addition et multiplication, et en construire les sommes et les produits.

La multiplication ne présente aucune difficulté. Un produit $A \times B$ n'étant autre chose que le quatrième terme de la proportion $1 : A :: B : x$, il ne s'agit que d'appliquer aux lignes données le principe du n° 4.

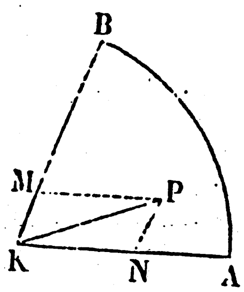
Quant à l'addition, la règle que nous allons donner peut se démontrer facilement par les théorèmes qui donnent les sinus et cosinus de la somme de deux arcs; mais il semble qu'il serait plus élégant de la tirer *a priori* des principes de la chose. En raisonnant par analogie, on peut remarquer que, lorsqu'il s'agit d'ajouter deux lignes, positives ou négatives, a, b, on a pour règle générale, quels que soient les signes, de tirer d'abord $\overline{AB} =$ l'une des lignes, a par exemple; de prendre le point d'arrivée B de cette ligne pour point de départ de la ligne b, de tirer ensuite $\overline{BC} = b$; et la ligne $\overline{AC}$, dont les points de départ et d'arrivée A, C sont respectivement le point de départ de la première ligne a et le point d'arrivée de la seconde ligne b, sera $= a + b$.

Généralisons ce principe, et nous conclurons que, A, B, C,..., F, G, H étant des points quelconques, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{C\ldots} + \ldots + \overline{\ldots F} + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}.$$

7. On peut décomposer une ligne en direction donnée $\overline{KP}$ (*fig.* 3) en deux parties appartenant à des *positions* données KA

Fig. 3.



et KB. Il suffit pour cela de tirer, sur KB, KA, les lignes PM, PN, parallèles à KA, KB; et on aura

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP} = \overline{KN} + \overline{NP};$$

mais, comme on a

$$\overline{KM} = \overline{NP} \quad \text{et} \quad \overline{KN} = \overline{MP},$$

et comme d'ailleurs il n'y a que ces deux manières d'opérer la décomposition proposée, il faut en conclure, en général, que si, ayant

$$\bar{A} + \bar{B} = \bar{A}' + \bar{B}',$$

A, A′ ont la même direction a, et B, B′ la même direction b, a et b n'appartenant pas à la même position, on doit avoir aussi

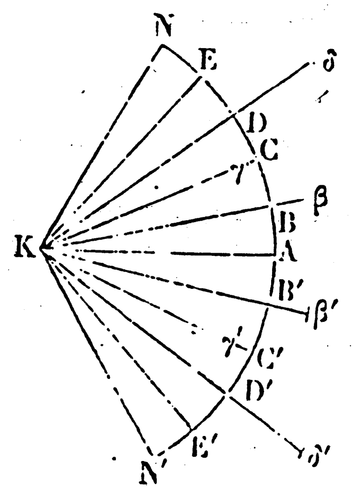
$$\bar{A} = \bar{A}' \quad \text{et} \quad \bar{B} = \bar{B}'.$$

Cette partition a fréquemment lieu, lorsque l'une des positions est celle de ± 1 et l'autre la position perpendiculaire; ce qui revient à la séparation du réel et de l'imaginaire.

8. **Passons aux applications, et établissons d'abord quelques conséquences dont l'emploi est le plus fréquent.**

Soient (*fig.* 4) AB, BC,..., EN, AB′, B′C′,..., E′N′ des arcs

Fig. 4.



égaux, au nombre de n, de chaque côté du point A; KA étant prise pour unité; et soit $\overline{KB} = u$; on aura

$$\overline{KA} = 1,\quad \overline{KB} = u,\quad \overline{KC} = u^2,\quad \overline{KD} = u^3,\ldots,\quad \overline{KN} = u^n,$$

$$\overline{KA} = 1,\quad \overline{KB'} = \frac{1}{u},\quad \overline{KC'} = \frac{1}{u^2},\quad \overline{KD'} = \frac{1}{u^3},\ldots,\quad \overline{KN'} = \frac{1}{u^n},$$

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} = 1,\quad \frac{\overline{KB}}{\overline{KB'}} = u^2,\quad \frac{\overline{KC}}{\overline{KC'}} = u^4,\quad \frac{\overline{KD}}{\overline{KD'}} = u^6,\ldots,\quad \frac{\overline{KN}}{\overline{KN'}} = u^{2n}.$$

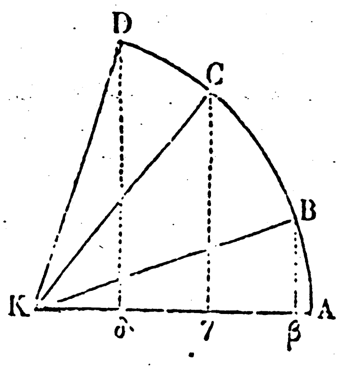
Et, si l'on prend, sur les rayons correspondants $K\beta' = K\beta$, $K\gamma' = K\gamma$, $K\delta' = K\delta,\ldots$, les longueurs $K\beta, K\gamma, K\delta,\ldots$ étant à volonté, on aura encore

$$\frac{\overline{K\beta}}{\overline{K\beta'}} = u^2,\quad \frac{\overline{K\gamma}}{\overline{K\gamma'}} = u^4,\quad \frac{\overline{K\delta}}{\overline{K\delta'}} = u^6,\ldots.$$

Si sur des rayons $\overline{KA}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN},\ldots$, pris pour bases, on construit des figures semblables, et que $\bar{a}$, $\bar{m}$, $\bar{n},\ldots$ soient des lignes homologues de ces figures, on aura

(C) $$\bar{m} = \bar{a} \times \overline{KM},\quad \bar{n} = \bar{a} \times \overline{KN},\ldots.$$

Fig. 5.



9. Soient (*fig.* 5) arc AB = CD = a, arc AC = b; on aura

(5, 6, 7)

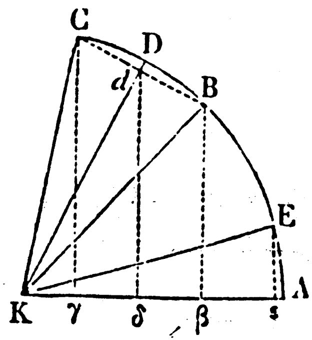
$$\cos(a+b)+\sqrt{-1}\,\sin(a+b)=\overline{K\delta}+\overline{\delta D}=\overline{KD}=\overline{KB}\times\overline{KC}$$
$$=(\overline{K\beta}+\overline{\beta B})\times(\overline{K\gamma}+\overline{\gamma C})$$
$$=\left(\cos a+\sqrt{-1}\,\sin a\right)\left(\cos b+\sqrt{-1}\,\sin b\right)$$
$$=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+\sqrt{-1}\,(\sin a\cos b+\cos a\sin b);$$

donc, en séparant,

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$$

Soient (*fig.* 6) $AC=a$, $AB=b$, $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{a-b}{2}$: prenons

Fig. 6



$AE=BD$, et tirons KD et BC se coupant en d; nous aurons

$$(\cos a-\cos b)+\sqrt{-1}\,(\sin a-\sin b)$$
$$=\left(\cos a+\sqrt{-1}\,\sin a\right)-\left(\cos b+\sqrt{-1}\,\sin b\right)$$
$$=\left(\overline{K\gamma}+\overline{\gamma C}\right)-\left(\overline{K\beta}+\overline{\beta B}\right)=\overline{KC}-\overline{KB}$$
$$=\overline{KC}+\overline{BK}=\overline{BC}=2\overline{dC}=(\text{n}^\circ\ 8,\ C)\ 2\overline{\varepsilon E}\times\overline{KD}$$
$$=2\overline{\varepsilon E}\times(\overline{K\delta}+\overline{\delta D})$$
$$=2\sqrt{-1}\,\sin\frac{a-b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{a-b}{2}\right)$$
$$=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}+2\sqrt{-1}\,\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Donc, en séparant,

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2},$$
$$\sin a-\sin b=+2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

B I B L I O G R A F I A

[1] **A. Dahan - Dalmedico/J. Peiffer**
Une histoire des mathematiques - Routes et dédales
Éditions du Seuil (1986)

[2] **Carl B. Boyer - tradução: Elza F. Gomide**
História da Matemática
Ed. Edgar Blücher Ltda. (1974)

[3] **Michéle Artigue**
Épistémologie et Didactique
Cahier de DIDIREM - Université/Paris 7 - juin 1989 - nº 3

[4] **Michéle Artigue**
Artigo: *Ingénierie didactique*
DIDIREM - Université/Paris 7

[5] **M. Artigue - V. Gautheron - E. Isambert**
Analyse non standard et enseignement
Cahier de didactique des mathématiques - nº 15
IREM - Université/Paris 7

[6] **Michel Henri**

Artigo: *Didactique des Mathématiques - Sensibilization à la didactique en vue de la formation initiale des enseignants de mathématiques* - mars/1991

Université de Franche comté - Laboratoire de mathématiques - IREM - Besançon

[7] **R. Douady**

Artigo: *De la didactique des mathématiques a l'heure actuelle*

Cahier de Didactique des Mathématiques - nº 6

IREM - Université/Paris 7

[8] **G. Arsac**

Artigo: *La transposition didactique en mathématiques*

Université Claude Bernard - Lyon 1

[9] **J. Rogalski**

Artigo: *Quelquer élèments de théorie Piagetienne et didactique des mathématiques*

Cahier de didactique des Mathématiques - nº 2

IREM - Université/Paris 7

[10] **A. Schoenfeld**

On having and using geometric knowledge. In conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics

J. Hilbert (Ed) - 1986

[11] **A. Robert et J. Robinet**

Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement

Cahier de DIRIREM - Université/Paris 7 - mars 1989 - nº 1

[12] **Bernard Charlot**

Artigo: *Études didactiques - Qu'est-ce que "faires des maths"?*

L'epistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques

IREM de Nantes (Centre du Mans)

[13] **Rousset-Bert**

Artigo: *Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations*

Université Joseph Fourier - Grenoble

[14] **Actes de la 13ª CONFERENCE INTERNATIONALE**

Psychology of Mathematics Education

Paris (France) - 9-13 juillet 1989

P.M.E. 13 - Vol. 1

Na execução deste trabalho a autora obteve o auxílio do Conselho de Ensino e Pesquisa da PUC-SP, sob a forma de bolsa, no período de 03/91 a 02/92.