PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

JÚNIOR TEODORO DA SILVA

O USO RECONSTRUTIVO DO ERRO NA APRENDIZAGEM DE SIMETRIA AXIAL: UMA ABORDAGEM A PARTIR DE ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS COM USO DE TECNOLOGIAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2010

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

JÚNIOR TEODORO DA SILVA

O USO RECONSTRUTIVO DO ERRO NA APRENDIZAGEM DE SIMETRIA AXIAL:
UMA ABORDAGEM A PARTIR DE ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS COM USO DE TECNOLOGIAS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira.***

São Paulo

2010

Banca Examinadora

____

____

____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às professoras Sandra Bitencourt, Luciene Alves e Ana Paula, colegas de magistério, pelo incentivo e apoio que deram e reiteraram antes e durante o curso. Sempre entenderam os momentos difíceis pelos quais passei, já que também passavam por situações parecidas em seus respectivos cursos. Há uma especial dedicação à minha esposa **Luci** e aos meus filhos **Gautier** e **Fábio** que, embora não tivessem percebido muito bem a importância de um programa de pós-graduação para minha vida, percebiam e compartilhavam emocionalmente meus momentos de dificuldades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a um ente o qual chamamos de Deus. Eu o sentia me protegendo e me guiando principalmente nos momentos em que as situações eram mais meândricas. Então, podia assim, conduzir o trabalho com menos entraves.
Aos professores do programa que, cada um à sua maneira, me auxiliou nessa caminhada com suas indicações para chegar ao objetivo pretendido; destaque ao professor Gerson Pastre pela enorme colaboração ao orientar para a realização da pesquisa com suas indicações para a manutenção, alteração ou mudança de vários pontos do trabalho.

SUMÁRIO.

Lista de Figuras.

Lista de Quadros.

Lista de Gráficos.

RESUMO

Este trabalho insere-se no âmbito do ensino e aprendizagem da Geometria, em particular as Transformações Geométricas com uma abordagem específica na transformação isométrica Simetria Axial. Esta proposta conduziu a uma investigação sobre os conceitos desse tipo de isometria através do uso do erro numa abordagem reconstrutiva a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias.

O desenvolvimento ocorreu em duas etapas, sendo a primeira realizada com uma sequência de atividades realizada no ambiente estático “papel e lápis” e a segunda com uma sequência de atividades construída por intermédio do *software* de geometria dinâmica Geogebra. Os erros ocorridos no ambiente estático foram considerados para uma abordagem reconstrutiva na etapa que se valeu da geometria dinâmica. Para tal ocorrência, buscou-se identificar como os livros didáticos dos 3º e 4º ciclos recebem pareceres gerais pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e como alguns livros enfatizam esse tema em seus conteúdos. Além disso, verificou-se como o tema é tratado nas escolas de acordo com autores como Almouloud (2004), Catunda (1998) e Pavanello (1993), bem como de acordo com as instruções dadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Quanto à abordagem reconstrutiva do erro, buscou-se entender a função do erro na aprendizagem de Matemática segundo Brousseau (1986), Almouloud (2007), Perrenoud (2000), Astolfi (1997), Macedo (1997) e Pinto (2000).

Na primeira etapa, os aprendizes participaram no desenvolvimento da sequência com o método da construção com régua, compasso e esquadros, indicando que nunca haviam usado esses instrumentos, limitando-se, assim, às validações empíricas. Na segunda etapa, os sujeitos apresentaram avanços quanto às construções devido aos recursos oferecidos, principalmente em relação à correção imediata e às validações e provas facilitadas pelos recursos oportunizados por uma estratégia pedagógica com uso de tecnologias, dentre as quais, o programa de geometria dinâmica Geogebra.

Palavras-chave: simetria, isometria, reflexão axial, uso do erro da aprendizagem, tecnologias no ensino de Matemática, estratégias pedagógicas com tecnologias.

ABSTRACT

This research is inserted in the scope of teaching and learning of Geometry, in particular in the Geometric Transformations with a specific approach in isometric axial symmetry transformation. This proposal led to an investigation about the concepts of this kind of isometry through the use of error in a reconstructive approach from pedagogical strategies with use of technologies.

The development occurred in two stages, being the first one done in a sequence of activities in the static environment “paper and pencil”. The second sequence was made with activities mediated by software of dynamic geometry named Geogebra. The errors that occurred in the static environment were considered for a reconstructive approach in the stage in which the dynamic geometry was used.

For such occurrence, the research tried to identify how the pedagogical books of 3rd and 4th stages of Fundamental Teaching received the general reports made by PNLD (National Program of Pedagogical Book) and how some books highlight this subject in these contents. Moreover, it was verified how this subject is handled in the schools according to authors like Almouloud (2007), Catunda et al (1998) and Pavanello (1993), as well as according to the instructions given by National Curricula Parameters. Concerned by the reconstructive approach of error, the research aimed to understand the function of error in Mathematics learning according Brousseau (1986), Almouloud (2007), Perrenoud (2000), Astolfi (1997), Macedo (1997) and Pinto (2000).

In the first stage, the learners participated in the development of the sequence with ruler, compass and square method, pointing that they never had used those tools. This fact limited the students to empirical validations. In the second stage, the students showed progress related to construction provided by the resources offered, mainly related to quick corrections, validations and proofs facilitated by resources provided by a pedagogical strategy with use of technologies among which the dynamic geometry Geogebra software.

Keywords: symmetry, isometry, axial reflection, use of error in learning, technologies in mathematics teaching, pedagogical strategies with technologies.

INTRODUÇÃO

Trajetória Pessoal

O meu interesse pelo estudo e conhecimento de geometria vem desde quando eu ouvia meu pai discutir unidades de medidas, como alqueires e metros quadrados com o agrônomo que visitava os sítios da região. Eu gostava de ouvir as explicações deles. Lembro que uma vez ele, ao ser questionado pelo seu vizinho, um agricultor de um sítio próximo, sobre o que significavam metros quadrados, disse: “quando falamos em metros quadrados, é o mesmo que imaginar um quadrado de um metro por um metro cobrindo uma área”. Deu um exemplo: afirmou que para um alqueire de terra são necessários 24200 quadrados de 1 metro por 1 metro para cobri-lo, já que um alqueire tem 24200 metros quadrados.

O tempo passou, continuei estudando, concluí o Ensino Fundamental e o Ensino Médio como Técnico em Contabilidade.

Durante 11 anos como aluno lembro de nunca ter estudado geometria com recursos e sequências adequados. Os livros que eu usava no antigo ginásio traziam um pouco de conteúdo e algumas figuras geométricas nas últimas páginas. Isso levava ao estudo desse tema de forma fragmentada e independente de qualquer outro conteúdo de Matemática.

No ano de 1985 iniciei a graduação no curso de Ciências Físicas e Biológicas. Nos dois anos de curso de licenciatura curta, estudei somente como calcular a área de alguns polígonos, ainda de forma fragmentada – o professor fornecia as fórmulas, os alunos calculavam.

Durante o curso, e mesmo depois de concluído, eu ainda não atuava em sala de aula, embora houvesse convites. Meu início no magistério, na rede pública estadual, se deu em 1994. A licenciatura curta dava habilitação para lecionar apenas para o Ensino Fundamental II.

Os livros que a escola forneceu destacavam o campo algébrico e o campo numérico, e a geometria, outra vez, aparecia somente em suas últimas páginas. Eu achava necessário ensinar geometria, pois, ainda que a mesma estivesse nas últimas páginas dos livros, a compreensão daqueles postulados era de fundamental importância para os estudantes. Além disso, de forma mais prática, como estava presente nos livros didáticos, eu acreditava que deveria ser ensinada aos alunos. A escola fornecia um calendário semanal indicando em sua matriz as aulas de Matemática. Por isso, usava duas das seis aulas semanais para trabalhar esse tema com os alunos.

Durante o programa de educação continuada (PEC) do Governo do Estado de São Paulo, em 1997, alguns professores foram convidados a participar de um curso relacionado à geometria na PUC/SP. Aceitei o convite.

No primeiro encontro, com as instruções do professor, liguei o computador, descobri que essa máquina não “morde”, digitei a senha fornecida, cliquei em “iniciar”, depois em “programas” e acessei um *software* chamado Cabri-Géomètre, do qual nunca tinha ouvido falar.

Esse encontro foi basicamente para familiarização com algumas ferramentas oferecidas pelo *software* e a representação de pontos, circunferências, retas etc.

Desde as primeiras construções, já percebi que o Cabri-Géomètre oferecia algo de diferente: as figuras poderiam fugir à lógica estática do papel. Havia a possibilidade de movimentá-las; com o *mouse*, conseguia “arrastar” o que estava representado na tela.

Nos outros encontros, recebi uma apostila com instruções e roteiros de como representar ângulos e polígonos e ainda para movimentar as figuras ou pontos (vértices) das figuras. Era perceptível o dinamismo oferecido pelo *software*. Tinha como arrastar, reduzir, ampliar e deformar as figuras. Fiquei deslumbrado com os recursos. Nesse período, percebi que o dinamismo que se pode dar às figuras ali construídas trazia possibilidades de aprender e ensinar geometria com estratégias e abordagens diferenciadas. Se eu, aluno naquele curso, encontrava facilidade de aprendizado, passei a acreditar que era possível ensinar de maneira mais significativa. Isso, claro, sem desprezar os recursos usados em meios não dinâmicos. Atualmente, creio que a mesma idéia continua valendo, principalmente porque existem diversos *softwares* de geometria dinâmica disponíveis, como o Geogebra, o Cinderella, entre outros.

No ano de 1998, voltei à sala de aula para complementação da carga horária e para obter licenciatura plena em matemática, podendo assim lecionar para o Ensino Médio.

Nesse período pude estudar os conteúdos de geometria inseridos no programa. Dentre os temas estudados, os que mais me chamavam atenção eram as transformações, como reflexão, rotação e translação, que são isometrias, pois conservam medidas, e as homotetias de centro O e razão k.

Entre as disciplinas, uma fazia referência aos currículos existentes, mais especificamente aos então recentes Parâmetros Curriculares Nacionais e aos livros didáticos, em relação ao ensino de geometria deficitário. Por sugestão da professora, comecei a ler, e posteriormente, a discutir sobre o Movimento da Matemática Moderna, durante o qual houve prioridade para o ensino da álgebra, ficando o ensino de geometria em certo detrimento.

Além disso, há vários anos eu manifestava vontade de ingressar em um programa de pós-graduação *stricto sensu*. Já sabia sobre o que escrever. Imaginava usar, em um primeiro momento, somente os recursos tradicionais (régua, compasso, esquadro e transferidor) para desenvolver o trabalho e pesquisa com os alunos e, em momento posterior, usar recursos computacionais.

Ao ingressar no programa escolhi inicialmente cursar a disciplina Auto Formação pelo uso das TICs (Tecnologias da Informação e da Comunicação). Não sabia exatamente o que seria tratado. Iniciei a disciplina fazendo inscrição em uma sala virtual, a plataforma de ensino Teleduc. Nela era possível escrever comentários sobre as aulas, ler os comentários emitidos pelos colegas de turma, enviar e receber trabalhos individuais ou em grupos, entre outros recursos. Enfim, percebi o TelEduc como tecnologia importante para realizar trabalhos que durante muito tempo somente com o lápis, a caneta, o papel, o giz e a lousa eram possíveis.

No decorrer dessa disciplina novamente tive o *software* Cabri-Géomètre disponível para realizar algumas tarefas com mais frequência, dessa vez, analisado sob o ponto de vista dos recursos tecnológicos digitais possíveis de serem usados na educação, bem como acesso e informações relativas a outros *softwares* e plataformas de ensino. Assim, a ideia da pesquisa ganhou impulso com a experiência desta iniciativa.

Eis, então, nesta pesquisa, motivada pela trajetória que descrevi, os resultados de minhas perplexidades e o produto das indagações sobre o tema maior “Geometria”, com ênfase nas estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o aprendizado de simetria axial.

Justificativa

No Brasil, as orientações emanadas dos currículos e documentos oficiais consomem um tempo exagerado para chegar aos destinatários (os professores) e são incorporadas de forma lenta aos trabalhos na sala de aula. Os trabalhos realizados por pesquisadores em educação matemática nem sempre são do conhecimento dos educadores. E, por consequência, o professor tem o livro didático como sendo sua principal instrumentação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais relatam que é importante destacar o estudo das transformações geométricas (isometrias e homotetias) no estudo do espaço e forma, possibilitando, assim, o desenvolvimento de habilidades para perceber o espaço e para realizar experiências que permitam descobrir as condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes (BRASIL, 1998, p. 51).

Nesta pesquisa, optou-se, inicialmente, por trabalhar com as transformações geométricas isométricas com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, por ser este um tema da geometria inserido em vários currículos escolares deste nível, mas pouco abordado nesse ano escolar. Dentre as transformações que tratam das isometrias, outra opção desta pesquisa foi a de utilizar apenas a simetria axial, de modo a limitar o conteúdo matemático sobre o qual se debruça, permitindo aprofundar as asserções, sem preocupação de cobrir enormes quantidades de dados e assuntos (BOGDAN e BLIKEN, 1994, p. 63).

A análise proposta por esta investigação considera a inserção da transformação “simetria axial” nos livros didáticos, como forma de abordar teoricamente os conceitos centrais da pesquisa, além de trazer outras pesquisas realizadas recentemente sobre temas afins e/ou correlatos, não esquecendo de estabelecer um panorama sobre o uso de tecnologias – e as TICs, em especial – na Educação Matemática.

Do ponto de vista do direcionamento deste trabalho, desde já se percebe a pertinência da divulgação das questões e objetivos direcionadores da investigação. É importante que a pesquisa sobre o ensino e aprendizagem das transformações geométricas seja desenvolvida de maneira a estabelecer condições reais de aprendizagem quando mediadas por recursos computacionais. Quanto à instrumentação, será usado um ambiente de geometria dinâmica, o Geogebra, pelo fato de ser gratuito e possuir uma interface amigável e prática. Outra questão é a disponibilidade do *software* na escola, apesar de problemas estruturais que ocorreram e que serão destacados mais adiante.

As questões norteadoras desta pesquisa são as seguintes:

- Em que medida a criação de uma abordagem didática que inclua a mediação tecnológica para o trabalho com simetria axial no plano para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental pode auxiliar a construção do conhecimento deste tema específico?
- De que maneira os erros e dificuldades de aprendizagem, encontrados no processo de ensino e aprendizagem de simetria axial, podem ser utilizados como elementos para uma abordagem reconstrutiva do conhecimento, tendo por base uma estratégia pedagógica com uso de TICs e de outras tecnologias?

Esta pesquisa pretende, então, como objetivo fulcral, estudar a eficiência de uma estratégia pedagógica com uso de tecnologias diversificadas, inclusive as TICs, na introdução e no desenvolvimento do tópico “simetria axial”.

Com isso, pretende-se que o tema desta investigação represente um campo promissor para o desenvolvimento do saber matemático do estudante. Para dar conta de tal comprometimento, a pesquisa aqui relatada traz a seguinte divisão:

- O capítulo um versa sobre as isometrias, com destaque para a simetria axial, bem como aborda a inserção deste tema e seus correlatos nos currículos do Ensino Fundamental;
- O capítulo dois traz uma análise de alguns livros didáticos, no intuito de verificar de que forma tratam o assunto “simetria axial” ao longo das distintas séries do Ensino Fundamental;

- O capítulo três revela a revisão bibliográfica, com análises sucintas de pesquisas recentes correlatas ao tema que aqui se desenvolve;
- O capítulo quatro alinha alguns aspectos teóricos relativos às tecnologias que foram considerados relevantes neste trabalho;
- O capítulo cinco diz respeito aos aportes metodológicos;
- O capítulo seis traz as análises realizadas em relação aos instrumentos de pesquisa aos quais os sujeitos foram submetidos;
- Por fim, são indicadas as considerações finais e recomendações resultantes do esforço de investigação.

CAPÍTULO UM

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO E O ENSINO FUNDAMENTAL

1.1. Isometrias

A isometria tem por definição que, quando aplicada a qualquer figura geométrica, conserva todas as distâncias entre seus pontos, ou seja, cada parte da figura transformada é congruente a cada parte da figura dada, qualquer que seja a transformação ocorrida em relação a um referencial: reta, ponto, vetor ou mais que um desses referenciais. Todos os movimentos que ocorrem em uma transformação isométrica são rígidos, ou seja, não admitem alterações estruturais na figura transformada em relação à original; por isso, mesmo que haja mudanças na sua direção e/ou sentido, a congruência é mantida. Ou, de acordo com Ledergerber-Ruoff, chama-se isometria, uma aplicação de P_e em P_e, que conserva distâncias, ou seja, se Ω é uma isometria, e P e Q dois pontos arbitrários, e se $\overline{P}$ = (P)Ω e = (Q)Ω, então |PQ| = | $\overline{P}\ \overline{Q}$ | (LEDERGERBER-RUOFF, 1982, p 58).

Como transformação, qualquer isometria conserva:

- a colinearidade de pontos;
- a ordem dos pontos em uma reta;
- o paralelismo de retas;
- o perpendicularismo de retas, bem como todos os ângulos formados.

As isometrias possuem algumas subdivisões:

- Reflexão em uma reta ou simetria axial;
- Reflexão por deslizamento (uma reflexão na reta e uma translação);
- Translação de um determinado objeto geométrico em certa direção e certo sentido;
- Rotação em torno de um ponto (simetria central ou pontual).

As isometrias representam um excelente instrumental para desenvolver todo o conceito de congruência: toda figura para ser isométrica deve conservar a congruência e toda figura para ser congruente deve conservar a isometria. A transformação de uma figura em outra que seja congruente pode ocorrer em relação a uma reta, em relação a mais de uma reta (paralelas ou concorrentes), em relação a um centro ou em relação a um vetor.

Sobre este tema, é importante destacar as asserções contidas nos PCNs para o Ensino Fundamental:

> o estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados), é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. (BRASIL, 1998, p. 124).

Historicamente, Euclides apresentou a prova da congruência de triângulos por meio de superposições de figuras. Porém, ele não deixa claro como realizar essa transformação e nem quanto aos movimentos realizados para uma figura coincidir com outra (COMMANDINO, 1945). Neste tópico, outro registro importante foi feito pelo geômetra alemão Felix Klein (1872), em *Erlanger Programm*, o qual

> descreveu a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações [...] obtidas a partir de translações e rotações do plano – as transformações ditas rígidas, equivalentes ao axioma não enunciado de Euclides de que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no plano (GOMIDE, 1996, p. 379).

Em termos formais, para Lima (2002, p. 140), uma isometria do plano π é uma transformação $T: \pi \rightarrow \pi$ que preserva distâncias. Mais precisamente, T é uma isometria se a distância $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$, para quaisquer pontos P, Q no plano π.

E quanto ao aspecto do uso cotidiano deste conteúdo? Se examinadas sem maior cuidado, as transformações podem ser consideradas como um tema sem qualquer relação com o dia-a-dia. Porém, se observadas mais detidamente, a ocorrência das mesmas é facilmente identificável. Muitos objetos apresentam individualmente planos de simetria de reflexão. Há representações planas de inúmeros objetos, esses planos levam a eixos de simetria. Percebe-se a simetria axial, por exemplo, em muitos deles, tais como veículos automotores, seres vivos (com formação bi-parietal), aeronaves e folhas de muitos vegetais.

De acordo com o Guia de Livros Didáticos:

> o conceito de simetria envolve três noções básicas: um conjunto de elementos; uma transformação “interna” desse conjunto em si mesmo; a existência de um subconjunto desse conjunto maior, que fica invariante quando submetido a tal transformação (BRASIL, 2009, p. 47).

Esse mesmo documento considera que os exemplos mais simples de simetria são nos casos em que o conjunto mencionado é o plano, a transformação é uma de suas isometrias e o subconjunto é uma figura simétrica em relação à isometria. Em caso mais particular, se a isometria é a reflexão na reta, diz-se que a figura possui simetria de reflexão. Ainda no conjunto mencionado, a rotação em torno de um ponto é uma isometria que gera figuras com simetria de rotação.

A partir do programa de Félix Klein, as transformações geométricas receberam as devidas formalizações. Para Klein, as homotetias e semelhanças constituem o grupo principal da geometria de Euclides, já as isometrias formam um subgrupo das semelhanças e como características das transformações geométricas (homotetias, semelhanças e isometrias) tem-se que elas não alteram as propriedades das figuras (MABUCHI, 2000, pp. 14-17; COSTA, 2005, pp. 25-29).

As próximas figuras representam transformações isométricas, colocadas neste ponto para ilustrar as asserções feitas sobre este tema até este ponto.

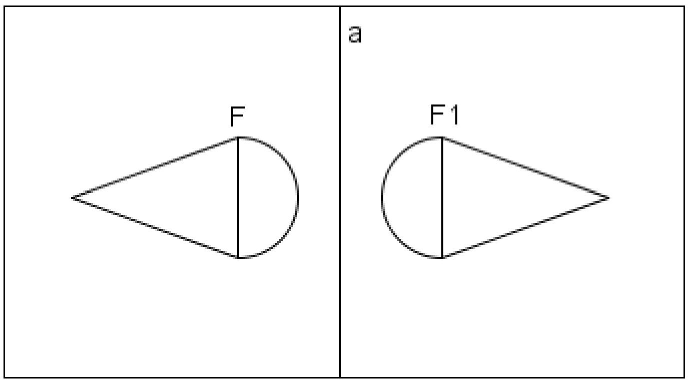


Figura 1 – Reflexão simples: uma reflexão

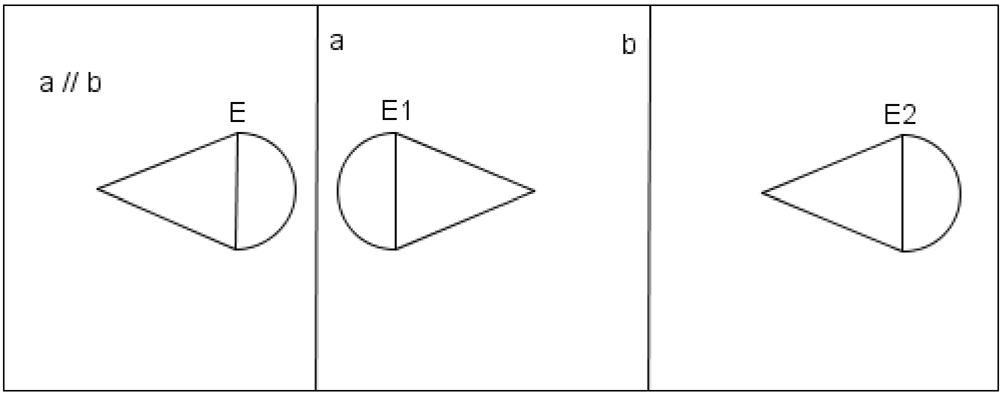


Figura 2 - Reflexões sucessivas em retas paralelas

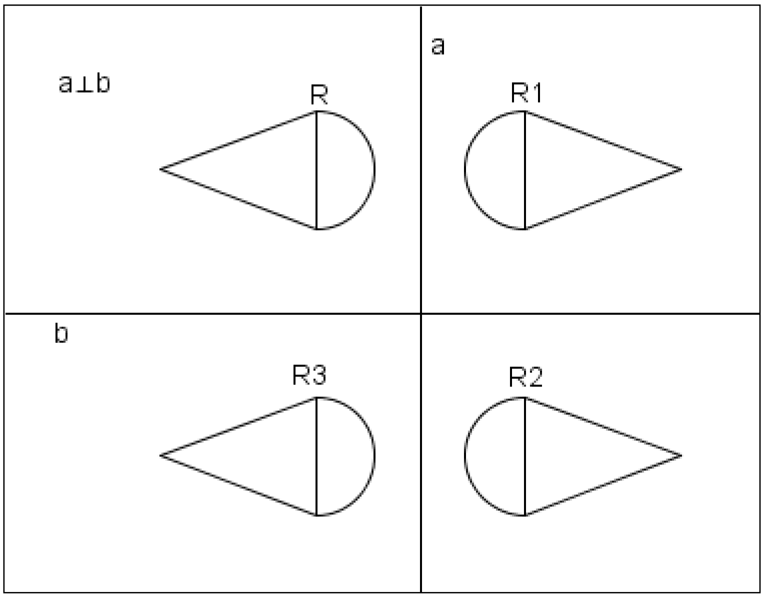


Figura 3 - Reflexões sucessivas em retas perpendiculares

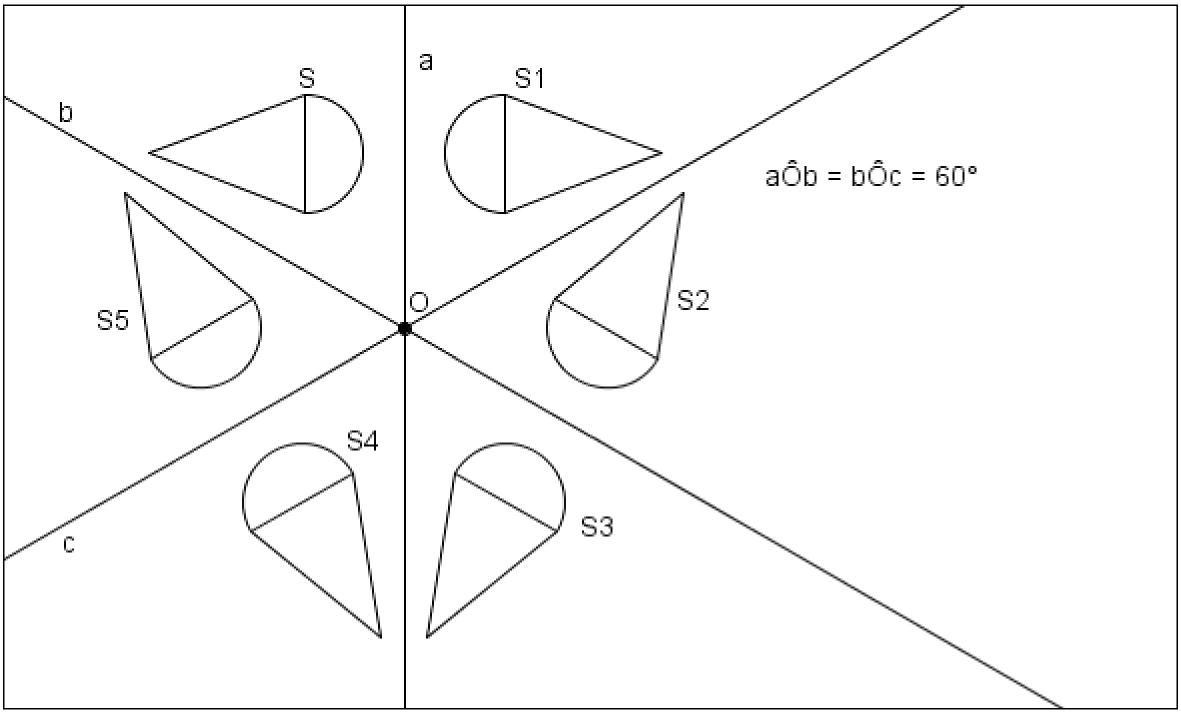


Figura 4 - Reflexões sucessivas em retas concorrentes não perpendiculares

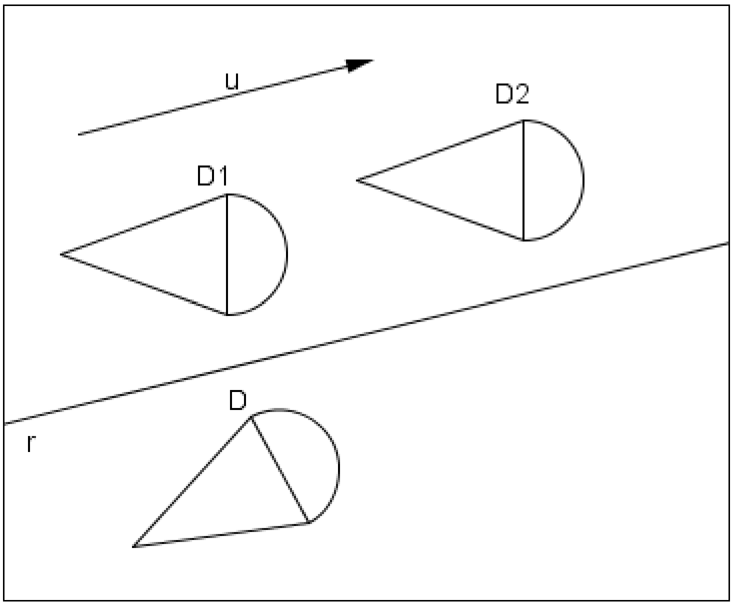


Figura 5 – Reflexão por deslizamento

Para a reflexão por deslizamento ocorrem duas transformações sucessivas, conforme indicado na figura anterior. No caso, este deslizamento ocorreu com uma reflexão na reta r e uma translação conforme o vetor u.

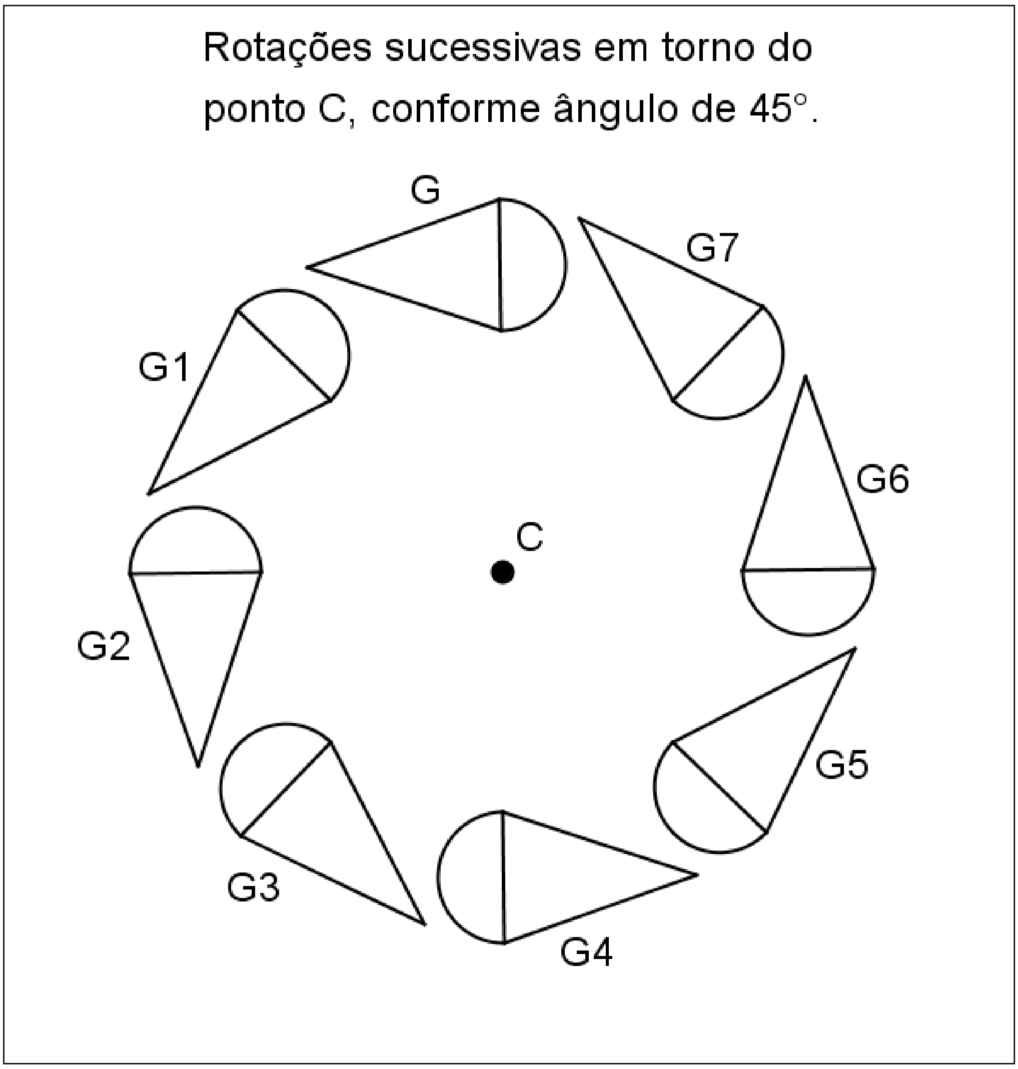


Figura 6 – Rotações sucessivas em torno de um ponto

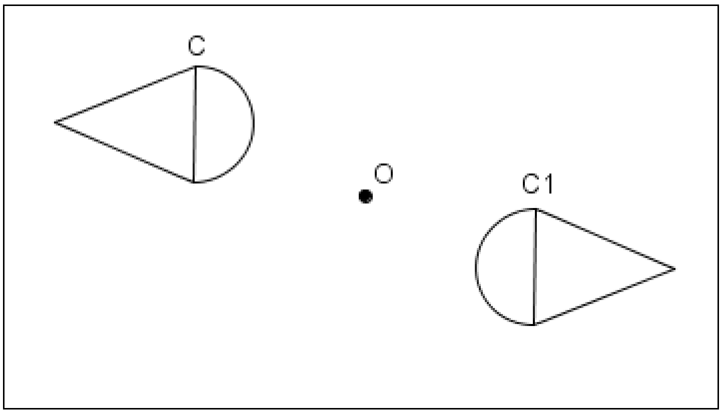


Figura 7 – Reflexão no ponto O

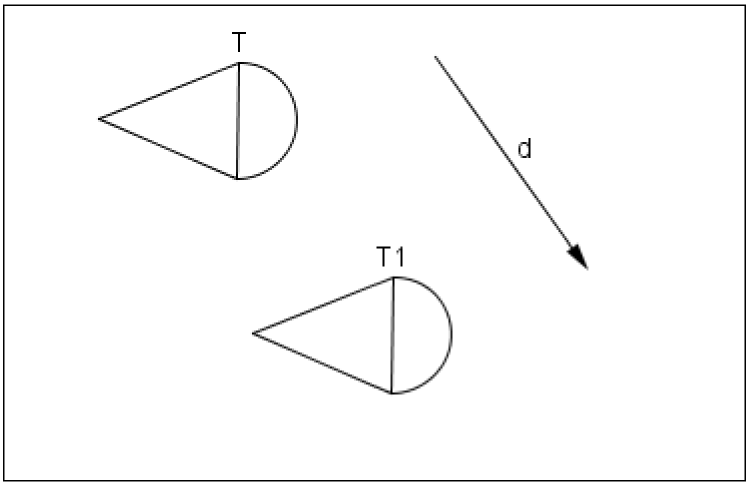


Figura 8 – Translação conforme o vetor d

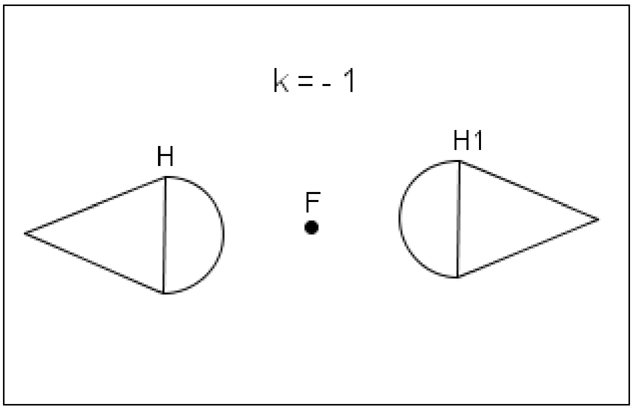


Figura 9 – Homotetia de razão k = – 1

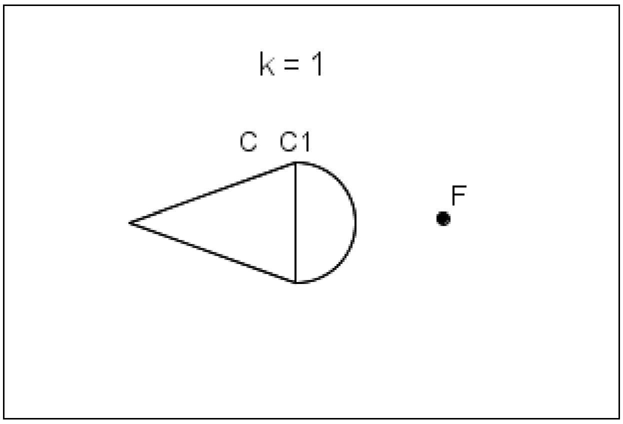


Figura 10 – Homotetia de razão k = 1

No que se refere às figuras 9 e 10, a transformação homotetia é isométrica somente em duas situações: quando seu coeficiente de transformação é k = – 1 (a reflexão é inversa em relação a um ponto) ou k = 1 (a figura reflete nela mesma, o que configura uma transformação isométrica do tipo *identidade*).

1. 2. Reflexão na Reta

A reflexão na reta, objeto desta investigação, é uma transformação também chamada de simetria axial. Ocorre quando se refletem todos os pontos de uma figura que está de um lado da reta para o outro lado dessa reta, ou, ainda, quando se refletem os pontos neles mesmos quando eles pertencem à reta. Essa reflexão conserva todas as medidas dos segmentos e ângulos, ou seja, acontece o espelhamento. De modo que do ponto original à reta e da reta à imagem existirão sempre equidistâncias (BALDIN, VILLAGRA E COELHO, 1999).

A título de exemplo, na Figura 11, a reta n é perpendicular ao segmento AA', passando pelo ponto médio de AA'. Além disso, n é bissetriz de ADA'. Assim, pode-se dizer que o triângulo A'B'C' foi obtido pela reflexão, em torno da reta n, de ABC (ou vice-versa).

A reflexão possui algumas propriedades, também apresentadas na próxima figura (idem, 1999):

- A imagem do ponto D na reta é o próprio ponto D (D ≡ D');
- O eixo n é a mediatriz de qualquer segmento com extremidades num ponto e na sua imagem;
- A imagem de uma reta é outra reta (T_n(D) = D') e o eixo de simetria é a bissetriz do ângulo formado pela reta e sua imagem;
- Uma figura sempre tem sua correspondente congruente. Observa-se que triângulo ABC ≡ triângulo A'B'C';
- A reflexão é uma transformação inversível, (T_n(A) = A', T_n(A') = A).

A reflexão inverte o sentido dos pontos não-colineares (no triângulo ABC a orientação é anti-horária, enquanto que no triângulo A'B'C' a orientação é horária).

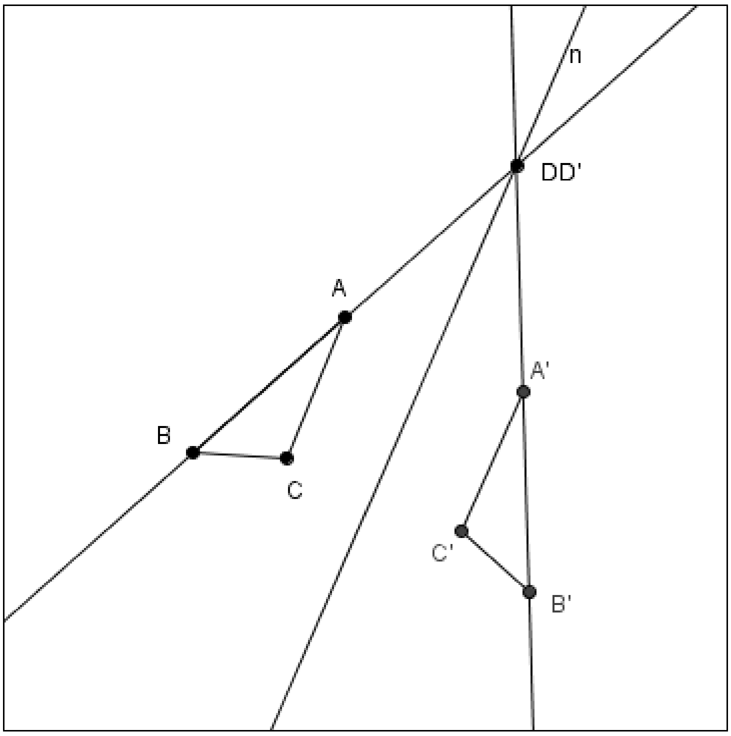


Figura 11 – Construção obtida por simetria axial (adaptado de Heally, 2002)

Lima (2002, p.140), afirma, conforme Figura 12, que o ponto P_1 chama-se simétrico do ponto P em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento PP_1.

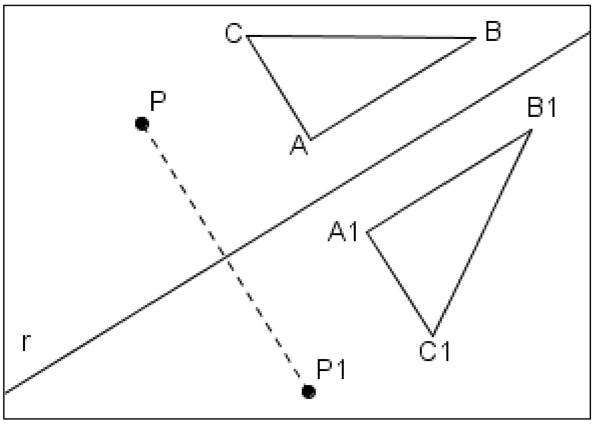


Figura 12 – Pontos simétricos (adaptado de Lima, 2002)

De forma análoga, Trompson (1985, p. 213) descreve essa transformação como sendo uma isometria em que um ponto qualquer da imagem e seu correspondente na figura original são equidistantes de uma reta chamada de eixo de simetria. Ainda, Jaime e Gutierrez (1996, p. 28), considerando a transformação S e o ponto P, chamam de simetria axial de eixo r toda transformação S do plano nele mesmo sendo que S(P) = P’ se, e somente se, o segmento PP’ é perpendicular à reta r, e as distâncias de P a r e de r a P' sejam congruentes, qualquer que seja P do plano. A reta é o eixo de simetria em relação ao qual estão todos os pontos invariantes.

Ainda para Trompson (*idem*) a reflexão em torno da reta r é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P_1 = T(P)$, simétrico de P em relação à reta r.

Há um caso particular de simetria axial: se P pertence à reta r, o simétrico de P em relação à reta r é próprio P.

Se a simetria axial ocorre em um sistema de eixos cartesianos, xOy, como na Figura 13, o simétrico de P(x, y), em relação ao eixo das ordenadas é $P_1(-x, y)$ e em relação ao eixo das abscissas é $P_2(x, -y)$.

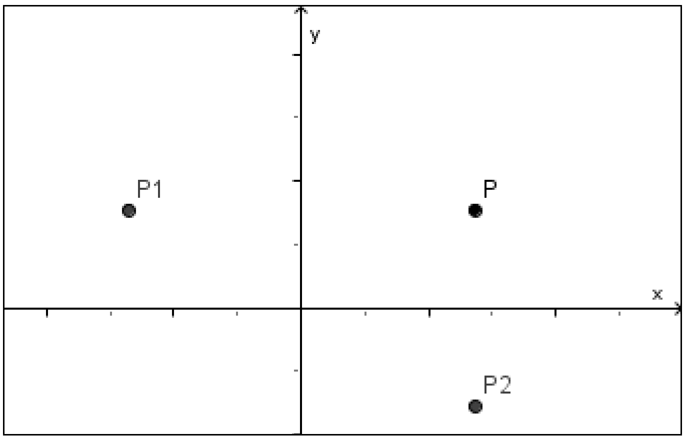


Figura 13 – Reflexão do ponto P no sistema de coordenadas

Salazar (2009, p.108) discorre sobre a definição de simetria axial, afirmando que a mesma pode ser vista da seguinte forma: dada uma reta qualquer j, contida em E, a reflexão em relação a j é a aplicação R_j: E → E que fixa todos os pontos de j e associa a cada ponto A pertencente a E que não pertence a j, o ponto A' tal que, j é a reta mediatriz do segmento AA'.

Siqueira et al (2003) assim descrevem a definição de simetria axial: "seja β uma transformação isométrica, diz-se que uma figura plana F possui simetria se β(F) = F, ou seja, se F é invariante por β, diremos aqui que β(F) representa o conjunto imagem de F pela transformação β".

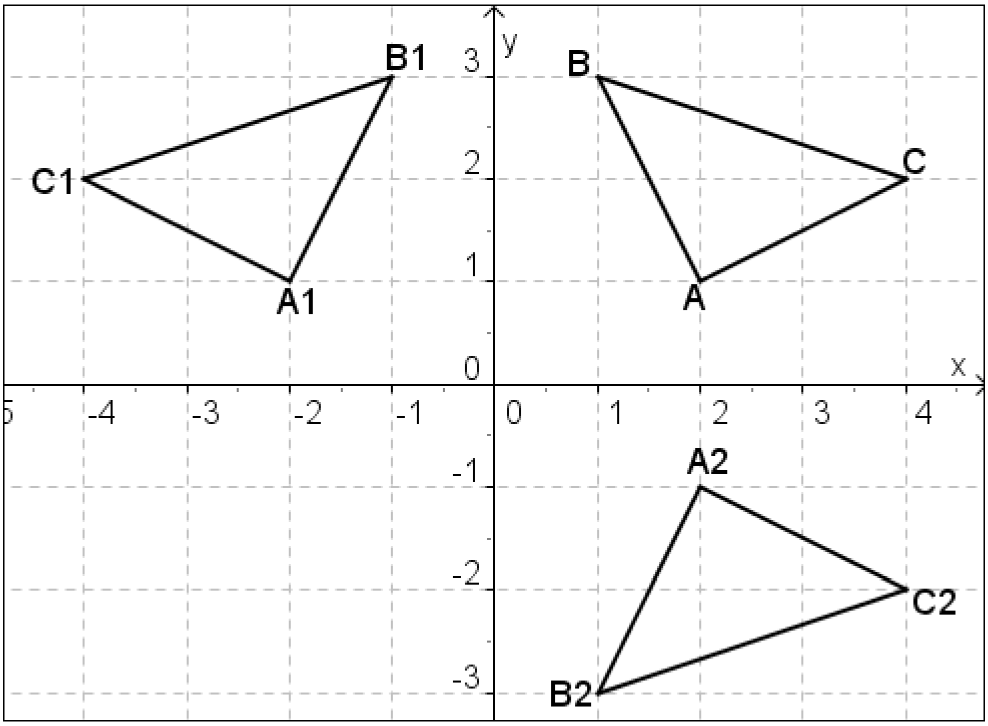


Figura 14 – Reflexões do triângulo ABC no sistema de coordenadas

As reflexões dispostas na Figura 14 confirmam que uma figura transformada inverte sua orientação. Temos, de acordo com o quadro seguinte:

Ponto	Simétrico em relação ao eixo das	
	Ordenadas	Abscissas
A(2, 1)	A1(– 2, 1)	A2(2, – 1)
B(1, 3)	B1(– 1, 3)	B2(1, – 3)
C(4,2)	C1(– 4, 2)	C2(4, – 2)

Quadro 1 – Pontos dados e suas transformações na figura 14

As medidas dos lados também são conservadas, ou seja:

- d(T(A), T(B)) = d(A1, B1) = d(A2, B2) = d(A, B) = $\sqrt{5}$;
- d(T(A), T(C)) = d(A1, C1) = d(A2, C2) = d(A, C) = $\sqrt{5}$;
- d(T(B), T(C)) = d(B1, C1) = d(B2, C2) = d(B, C) = $\sqrt{10}$.

Como as medidas dos lados dos triângulos foram conservadas, por consequência, todos os ângulos também foram conservados. Reafirma-se também a conservação do perpendicularismo, já que o ângulo CÂB é reto.

Discutidas estas questões essenciais, relativas às definições matemáticas atinentes às transformações geométricas, e à simetria axial em particular, julgou-se importante discorrer sobre o surgimento das mesmas nas propostas curriculares do Ensino Fundamental.

1. 3. As transformações no plano e o Ensino Fundamental

As transformações no plano são objeto de destaque nos documentos oficiais. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCNEF (1998):

> à primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis. (BRASIL, 1998, p.124).

O referido documento ainda sugere que a incorporação das isometrias seja realizada de maneira significativa, possibilitando ao aluno desenvolver seu pensamento geométrico como decorrência da exploração de situações que envolvem a produção e análise das figuras, identificando os elementos variantes e invariantes.

> Com relação às transformações geométricas, as atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, alem de obter um caráter mais dinâmico para este estudo (BRASIL, 1998, p. 124).

No mesmo documento, ainda sobre as transformações geométricas (BRASIL, 1998, p. 51):

> Deve-se destacar [...] a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permitam o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir, de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes.

Entretanto, o mesmo dispositivo oficial reconhece problemas com o trabalho com a Geometria de forma geral em sala de aula. Apesar disto, a importância da disciplina no âmbito do ensino de Matemática é amplamente propalada:

> [...] Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações (BRASIL, 1998, p.122)

Apesar de referirem-se a um nível de ensino distinto daquele abordado nesta pesquisa, os PCNEM+ (BRASIL, 2002, p. 123) mencionam que o ensino de Geometria no Ensino Fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos por meio da experimentação e das deduções informais sobre as propriedades relativas a ângulos, lados e as diagonais dos polígonos, e também o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para obter um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que, posteriormente, no ensino médio, haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo que possa levá-lo a analisar o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para situações que lhe são familiares. Portanto, não se trata de um amontoado de postulados e demonstrações a serem memorizados, mas de usar a Geometria em sua completude teórica e naquilo que possibilite a cotidianização de seu uso.

Ainda com referência aos PCNEF, destaca-se a organização do conteúdo para o quarto ciclo, que propõe identificar as características das figuras geométricas, podendo perceber semelhanças e diferenças entre elas, quando da realização de composições e decomposições, simetrias, ampliações e reduções (BRASIL, 1998, p. 81). Neste ciclo, a recomendação ocorre em torno da importância de o docente trabalhar com representações. Para tanto, sugere o uso de malhas, mapas, guias e diagramas.

Há, ainda, a indicação para desenvolver o conceito de congruência de figuras planas trabalhando com as transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), com a identificação das medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície) e também desenvolver a noção de semelhança de figuras planas, recorrendo às ampliações ou reduções, de maneira que seja possível identificar as medidas que sofrem modificações e as que não sofrem. (BRASIL, 1998, p. 89). Semelhantes recomendações podem ser levadas a efeito através de problemas que auxiliam o estudante a desenvolver a capacidade de argumentar e chegar às demonstrações. Os assuntos correlatos à Geometria no Ensino Fundamental, e às transformações geométricas, em particular, ainda dão ênfase à representação plana de figuras espaciais, ajudando a visualizar, a provar e a fazer conjecturas (BRASIL, 1998, p. 123).

1. 4. Dificuldades no trabalho com Geometria no Ensino Fundamental.

A definição do tema desta pesquisa também considerou problemas relacionados ao processo de ensino de geometria nos currículos nacionais. De fato, segundo Almouloud (2004, pp. 99-100), existem fatores que estão ligados à abordagem superficial e insuficiente do ensino de geometria. Para o autor, o sistema educacional brasileiro é definido de maneira que não expressa exatamente quais conteúdos ensinar e quando serão ensinados, deixando a possibilidade de trabalhar conteúdos que as escolas, em seus planejamentos, “julgam” ser mais importantes, sendo que, na maioria das vezes, a geometria fica em segundo plano.

O mesmo autor considera também que existem falhas, decorrentes da formação inadequada dos professores, no que se refere à geometria. Por outro lado, os livros didáticos, que seriam recurso ao trabalho docente em sala de aula, não dão o tratamento ideal quanto aos registros semióticos e a importância da figura para sua visualização e exploração, e, por consequência, propõem problemas que pouco valorizam o raciocínio dedutivo e demonstrações levando, na maioria das vezes, os estudantes a resolver as questões apenas no campo algébrico. O conhecimento matemático pode ser expresso dentro de um sistema de representação que possibilita variadas maneiras de representá-lo. Esses registros podem ser realizados em língua materna, em forma figural, em forma algébrica etc.

Um registro de representação é, segundo Duval (1999), um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente, como de comunicação, de objetivação e de tratamento. A atividade matemática acontece com a mobilização de vários registros de representação, sejam essas mobilizações simultâneas ou não (ALMOULOUD, 2007, pp. 71-72).

Ainda de acordo com Almouloud (*idem*) *o* que é proposto, normalmente, se limita à geometria empírica, não havendo passagem para a geometria dedutiva. Por fim, entre os problemas elencados, há também o fato de que se proporciona pouca leitura e interpretação de textos envolvendo temas de matemática.

Em Catunda et al (1998, pp. 11-12), encontram-se algumas considerações sobre o assunto. Para estes autores, a geometria ensinada, a euclidiana, tem excessos de elementos formais e regras, dando ênfase apenas às medidas, não foi renovada e continua sendo desenvolvida de maneira estática. Além disso, uma parte significativa dos professores não domina os conteúdos e por isso retiram a geometria de seus deveres de sala de aula. Os livros são estanques, à medida que apenas definem figuras e seus elementos.

De igual modo, Pavanello (1993) afirmou que o ensino de geometria no Brasil sofreu um abandono nas décadas precedentes, sendo um dos motivos de o Movimento da Matemática Moderna indicar um trabalho sob o ponto de vista das transformações. Segundo a autora, mesmo antes disso, os professores já apresentavam problemas em relação ao conhecimento no modelo tradicional. Ainda Pavanello (1993), de acordo com análises realizadas pela proposta do movimento, os problemas se tornaram ainda maiores.

Ainda a autora (1989, p. 103), analisando os currículos e programas escolares então praticados, constata que, nas séries iniciais da escolarização os conteúdos trabalhados destacavam a Aritmética, enquanto que, ao fim do Ensino Fundamental, o destaque era a Álgebra. A Geometria era, quando abordada, tratada como um tema estanque em relação aos outros. Em sua argumentação destaca que na primeira metade do século XX, os conteúdos geométricos eram ensinados no terceiro ano ginasial, atual 7ª série ou 8º ano do Ensino Fundamental. Começavam com os conceitos elementares de ponto, de reta e de plano; os primeiros postulados e axiomas; várias definições e demonstrações. Tudo isso quase sempre sob um ponto de vista de estruturas algébricas, estimulando, então, o ensino da álgebra e praticamente inviabilizando o ensino da Geometria. Isso provocava certo desinteresse aos alunos quanto ao estudo desta disciplina.

De acordo com o Guia do Livro Didático do Programa Nacional para o Livro Didático (2010, p. 31), construir conceitos errados nos anos iniciais de escolarização pode conduzir a efeitos negativos para todo o aprendizado posterior e ainda para a utilização da Matemática pelo aluno. Existem erros explícitos e, além desses, deve-se evitar as induções ao erro e as contradições internas.

De acordo com o mesmo documento, o que é indicado nas séries iniciais é uma abordagem não formal e intuitiva, o que não justifica as conceituações confusas que possam conduzir a idéias geradoras de dificuldades e obstáculos na aprendizagem posterior dos conceitos. Entre as falhas conceituais relacionadas aos conteúdos de geometria, estão:

- Tentar definir elementos primitivos da geometria (do ponto, da reta e do plano);

- Manter o conceito inadequado de perímetro como a soma dos lados de uma figura (exclui as figuras que não possuem lados);

- O não esclarecimento das grandezas (comprimento, área e volume) e não elucidação entre um sólido e sua representação em perspectiva, particularmente quando envolve medidas de grandezas nos sólidos ou a noção de simetria.

CAPÍTULO DOIS

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

2.1. As Transformações Geométricas e os Livros Didáticos

Julgou-se pertinente à análise proposta por esta investigação mencionar a inserção da transformação simetria axial nos livros didáticos, como forma de abordar teoricamente os conceitos centrais da pesquisa.

Conforme as orientações dos PCNs, emanadas em 1998, os livros didáticos publicados após esse ano e aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) apresentam dentre seus conteúdos a transformação isométrica simetria axial. A apresentação desse conteúdo costuma aparecer através da exploração dos objetos do mundo físico, obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, nos quais ocorrem tais transformações (BRASIL, 1998, pp. 51–52). Por essa razão, os livros não oferecem aos alunos análises matemáticas, uma vez que reduzem o tema a aplicações práticas.

O Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2009), 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, apresenta uma análise dos conteúdos propostos por 16 obras. Nas análises realizadas em cada obra, são postos os critérios pelos quais cada área de conhecimento é abordada. Quanto à abordagem das transformações geométricas, os pareceristas (analistas) apontam:

- Nas obras analisadas, são pouco frequentes as atividades que contribuem para algumas competências particularmente importantes, como situar-se, orientar-se e reconhecer a posição dos objetos no espaço;
- A maioria das coleções apresenta atividades de desenho usando instrumentos ou de construção de modelos concretos de objetos geométricos (planificações, maquetes, recortes, dobraduras etc). Com atividades assim, espera-se que o aluno seja levado a observar os objetos geométricos no mundo físico, podendo então, avançar de noções basicamente intuitivas para

compreender as figuras geométricas, bem como suas propriedades e classificações;

- Em muitas obras, as validações dessas propriedades são feitas com o recurso da visualização, de manipulação de materiais concretos ou de medições em desenhos, porém há precariedade em sua condução, o que pode gerar dificuldades para a construção do raciocínio dedutivo;
- Essa condução inadequada é um ponto em que a maioria das coleções caracteriza falha, pois algumas se restringem somente à geometria experimental e outras não fazem uma transição gradual da validação experimental às demonstrações geométricas, contudo algumas são bem apresentadas.

A recomendação do estudo de simetria no Ensino Fundamental já ocorre há algum tempo. Essa indicação é justificável devido à importância desse conceito no campo científico e nas demais atividades humanas. A simetria é um dos princípios fundamentais para a formulação de modelos matemáticos para os fenômenos naturais.

De acordo com o PNLD (BRASIL, 2009), a maioria das obras tem em seus conteúdos o conceito de simetria. Porém, muitas limitações são apresentadas. É observado, em muitas delas, que a simetria está mais associada a aspectos estéticos, como da natureza, das artes plásticas e da arquitetura; suas conexões a outros conceitos matemáticos ou a outras ciências não são exploradas. Dentre as limitações, outra que se deve mencionar é o grande número de atividades em que se pede para o aluno visualizar e identificar figuras simétricas de objetos tridimensionais. Nesses casos, é falado de “eixo de simetria”, sem esclarecer que esse eixo pode existir numa representação plana do objeto e que no espaço tridimensional pode existir um plano de simetria. Esta limitação se torna mais presente se a representação plana considerada é uma perspectiva do objeto espacial, na qual o possível plano de simetria corresponde a uma reta que pode ser, ou não, um eixo de simetria do desenho do objeto.

O Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional para o Livro Didático 2010 (BRASIL, 2009) apresenta a avaliação de 18 obras de alfabetização matemática (1º ano e 2º ano) e 19 obras de matemática (3º ano, 4º ano e 5º ano). Desse total, 15 integram os dois níveis avaliados.

Das coleções avaliadas, a maioria coloca transformações geométricas, simetrias e/ou homotetia, em seus conteúdos. Grande parte apresenta as isometrias e a homotetia em todos os níveis de ensino observados. Contudo, existe uma maior concentração de abordagem nos 3º, 4º e 5º anos. Apenas uma obra aborda algum tipo de transformação em todas as séries. As verificações e experimentos são feitos com materiais para serem manipulados, como malhas quadriculadas, dobraduras, desenhos, etc. Nenhuma indica o uso de instrumentos, como régua e compasso, para construção, deixando, de alguma forma, para o ciclo seguinte.

Para ampliar a compreensão sobre a abordagem da simetria axial em livros didáticos, segue breve análise de três coleções. Dessas, duas estão no Guia de Livros Didáticos do PNLD de 2008:

- **Matemática para Todos, IMENES e LELLIS, 2007 (IMENES e LELLIS, 2007);**
- **Projeto Araribá, 2006, destinado ao Programa Nacional do Livro Didático 2008, 2009 e 2010 (BRASIL, 2009).**
- **Experiências Matemáticas, Secretaria de Estado da Educação (SÃO PAULO, 1998).**

As análises serão realizadas conforme três categorias, quais sejam:

- Atividades que priorizam somente a construção;
- Como ferramenta para o estudo de outros conceitos ou propriedades;
- Como ferramenta para construção de outras figuras.

2.2. IMENES e LELLIS

No volume destinado à 5ª série apresenta a simetria axial com quatro situações diferentes: figuras que tem eixo de simetria, figuras simétricas a uma figura dada, obtenção de uma figura simétrica e uma síntese textual de uma dada situação.

Dispõe de algumas figuras para tratar do tema.

Com a representação (Figura 15), imediatamente os autores afirmam: “Há simetria nesse desenho. A linha **e** é o eixo de simetria”.

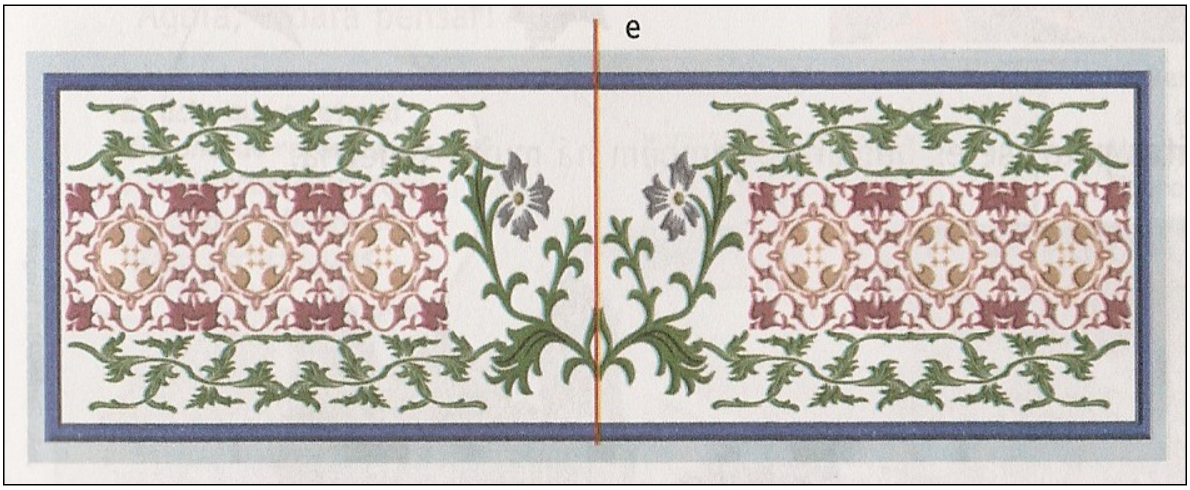


Figura 15 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2007, p. 199

Na Figura 16, ao lado esquerdo, o espelho funciona como um eixo de simetria, e ao lado direito, como se a imagem do espelho fosse real.

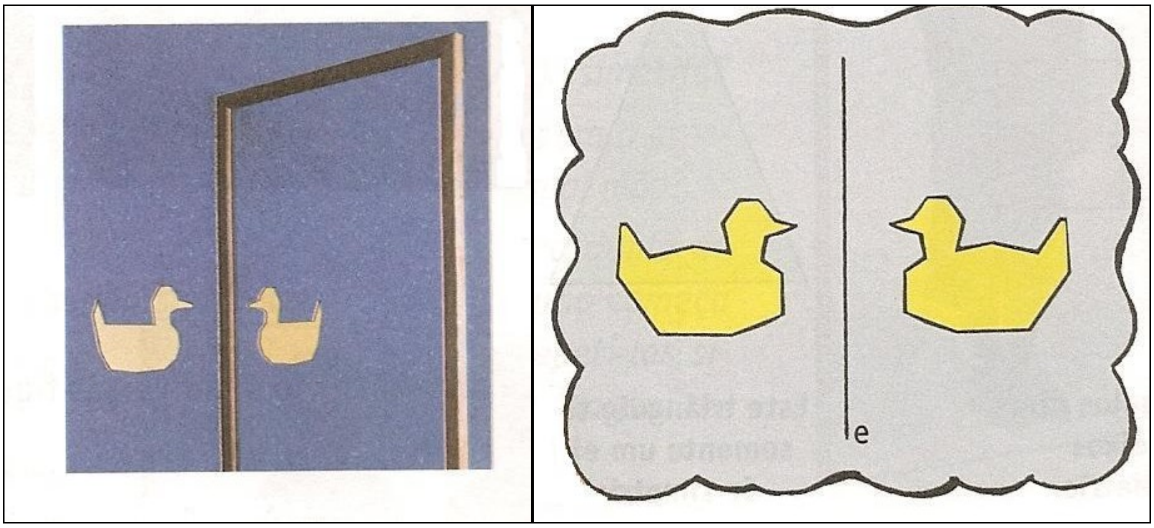


Figura 16 – IMENES e LELLIS, 2007, p. 199

O eixo de simetria é comparado a um espelho quando a simetria é abordada apenas de forma intuitiva. IMENES e LELLIS (2007) afirmam que um espelho funciona como um eixo de simetria. Bigode (2000) considera que o eixo de simetria funciona como se fosse um espelho; ainda considerando essa similaridade, Healy (2002) observou, nos resultados dos trabalhos com alunos, que a noção de simetria está associada explicitamente com imagens refletidas em um espelho.

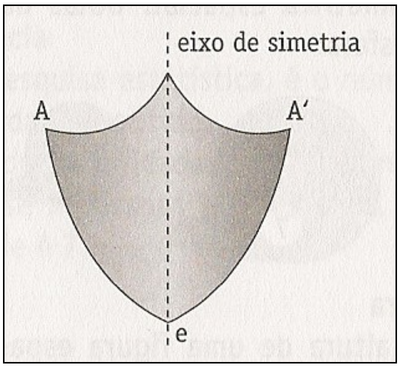


Figura 17 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2007, p. 241

Nas alegações dos autores, são simétricas duas figuras geométricas que admitem um eixo de simetria entre elas. Nesse caso dizemos que têm simetria axial. Na figura seguinte, ABC é o triângulo dado e o triângulo A'B'C' é o triângulo obtido com uma reflexão na reta **e**.

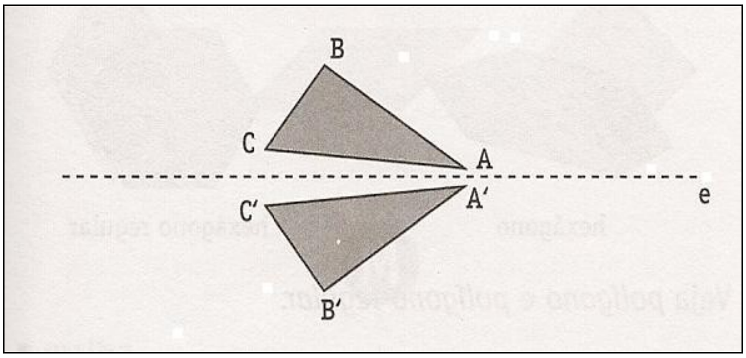


Figura 18 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2007, p. 272

Os autores reiteram que há simetria em diversas figuras geométricas, por exemplo, no retângulo, no triângulo isósceles e no quadrado.

Para obter o(s) eixo(s) de simetria propõem usar a técnica da dobradura, a qual consiste em dobrar o papel para formar o vinco. Alguns exemplos de atividades propostas pelos autores vêm em seguida.

- *<u>Atividade um</u>: Em quais situações a reta é eixo de simetria?*

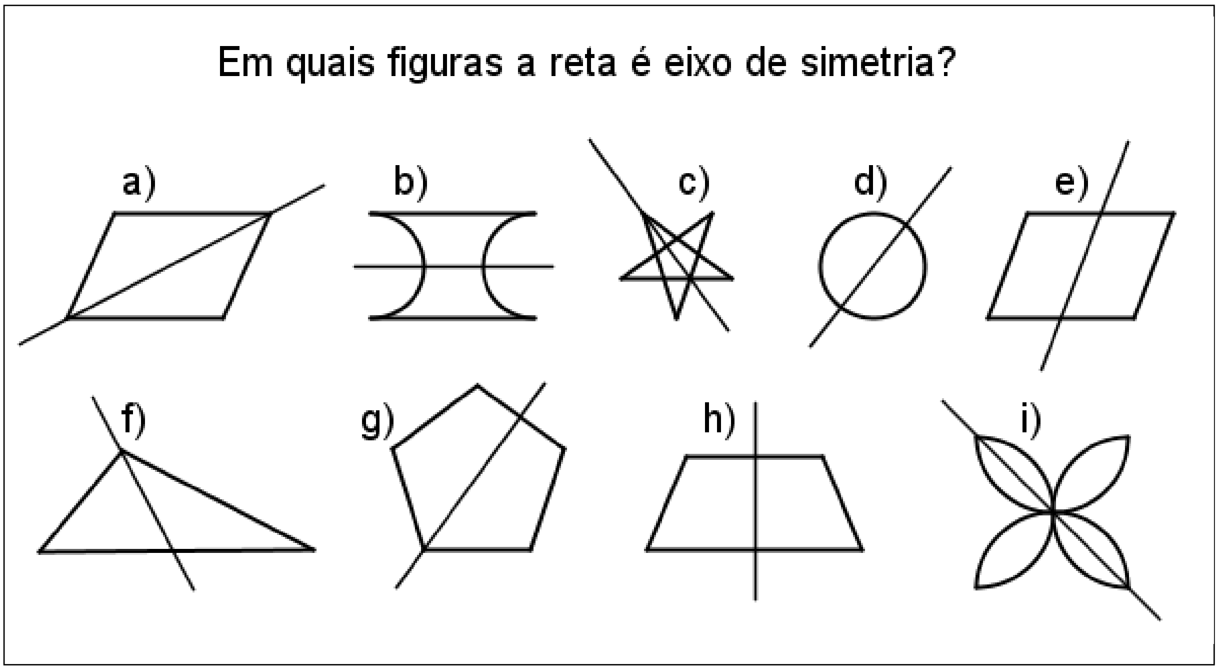


Figura 19 – Adaptado de IMENES e LELLIS, 5á série, 2007, pp. 202-203

Na figura acima, os estudantes devem identificar em quais desenhos existe um segmento que representa um eixo de simetria, de modo a distinguir casos nos quais a divisão da figura não representa um caso de simetria axial.

- *<u>Atividade dois:</u> Observe a planta da igreja de Jumièges, na França. Encontre seu eixo de simetria.*

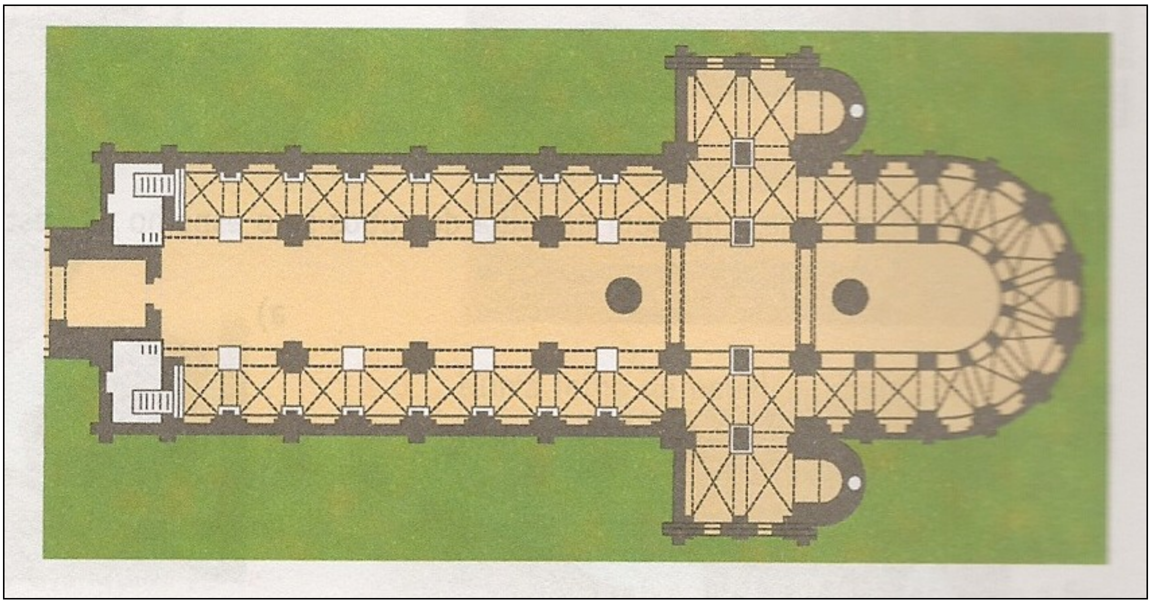


Figura 20 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2007, p. 203

Na atividade proposta na figura anterior, é necessário traçar um segmento que represente o eixo de simetria. Interessante observar que se trata de uma planta real, ou seja, um projeto de uma construção que existe de fato.

- *<u>Atividade três:</u> Numa folha de papel quadriculado, copie o desenho do barquinho e o eixo de simetria **e**. Depois desenhe a figura simétrica: a) Eixo **e** na vertical; b) Eixo **e** na horizontal;*

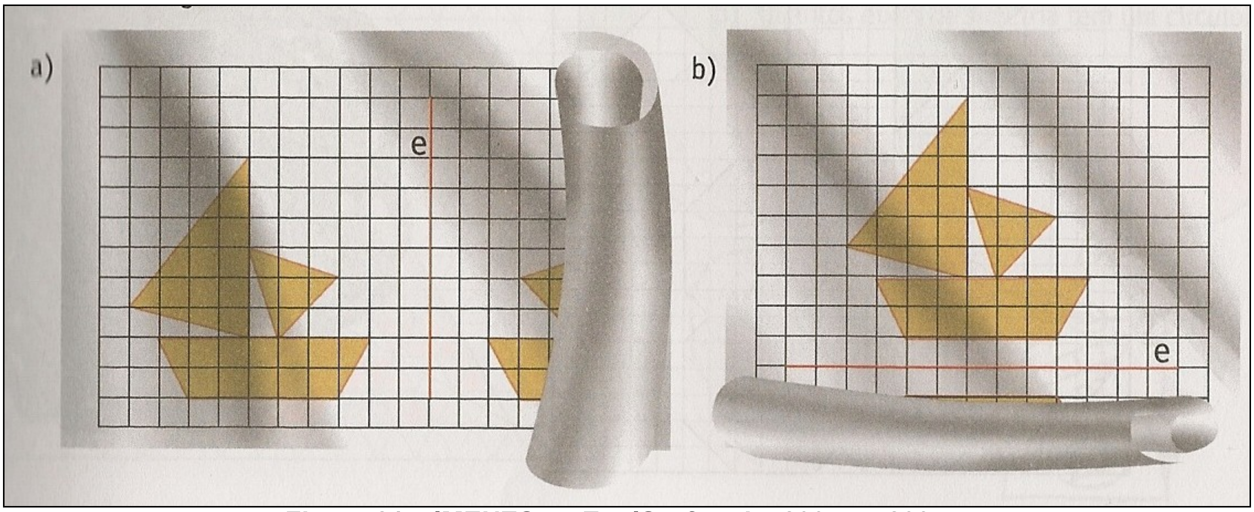


Figura 21 – IMENES e LELLIS, 5ª serie, 2007, p. 203

Na atividade proposta na Figura 21, os autores pretendem que os estudantes identifiquem dois eixos de simetria, horizontal e vertical, mostrando que é possível distinguir eixos distintos em uma mesma figura.

- *<u>Atividade quatro:</u> O desenho simétrico do barquinho já está começado. Copie todo o desenho no caderno e complete-o.*

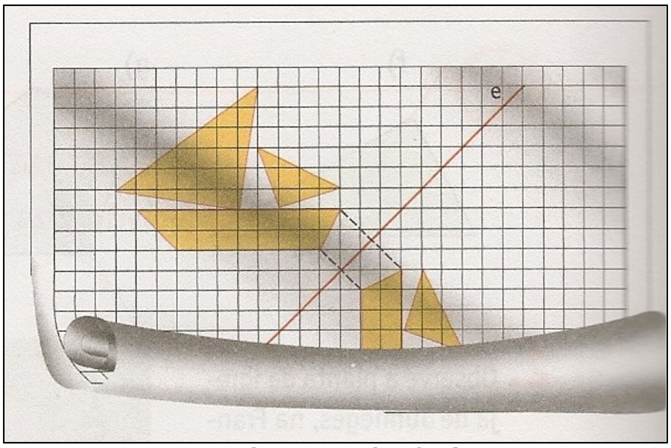


Figura 22 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2007, p. 204

- *<u>Atividade cinco:</u> Qual seria a imagem da pilha de cubos se o espelho não estivesse quebrado?*

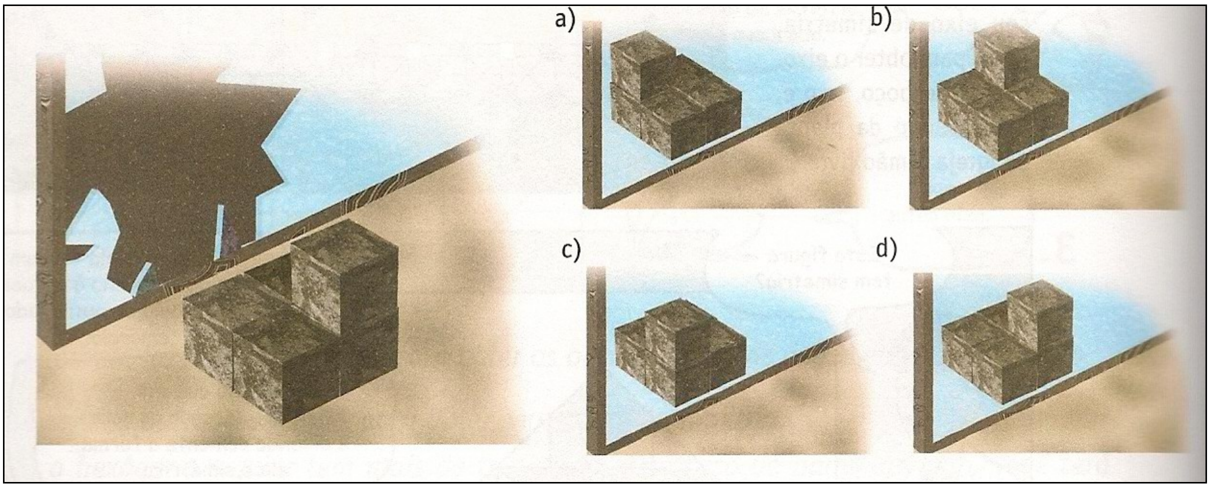


Figura 23 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2007, p. 204

Ao final dessa unidade, é apresentado um questionário relativo ao tema abordado. Propõe responder o que é simetria axial e sua existência em elementos da natureza e em polígonos. Ainda propõe usar papel e tesoura para construir figuras simétricas.

Na 6ª série a simetria axial é retomada com a mesma técnica usada anteriormente. Com a dobra do papel é possível verificar que a reta que contém uma das diagonais do losango é um eixo de simetria. O mesmo capítulo apresenta também a simetria axial originada por um giro de 180° para fora do plano, com o qual a figura se encontra, além de discutir eixos de simetria existentes nos polígonos regulares.

São disponibilizadas três técnicas: dobrar a figura ao longo da reta, verificar se a reta é mediatriz de segmentos formados por pontos em semi-planos opostos e girar em 180° a figura para fora do plano que o contém verificando se a mesma não deforma.

As atividades propostas trazem elementos como se uma reta é ou não eixo de simetria de uma figura, a construção de uma figura partindo de seus eixos de simetria e a observação de figuras que se apoiam em seu eixo de simetria.

- *<u>Atividade 26:</u> Em quais figuras a reta e é eixo de simetria? Dica: se A e B são pontos simétricos, o eixo e divide AB ao meio e é perpendicular a ele.*

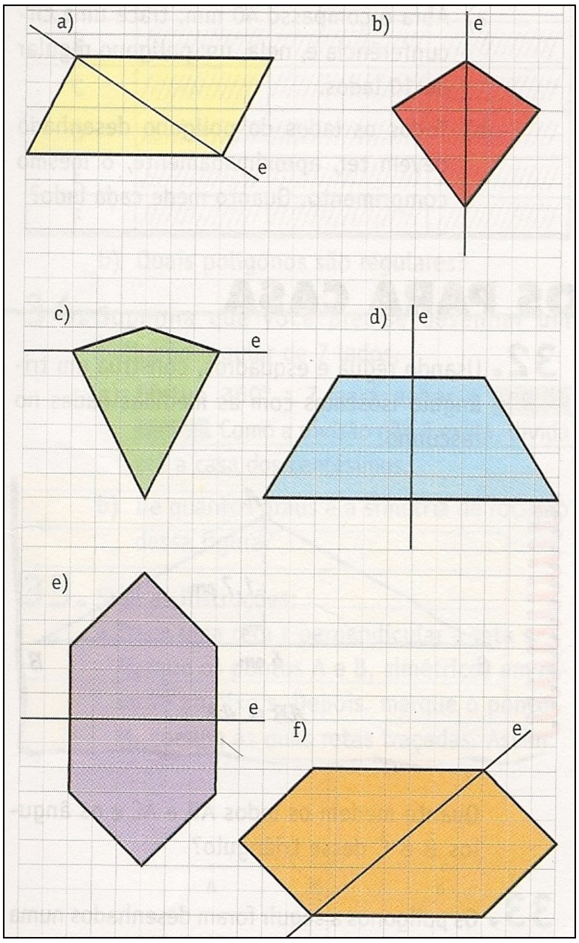


Figura 24 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2007, p.36

As atividades constantes nas Figuras 24 e 25 são referentes à sexta série e demonstram uma retomada do assunto “simetria axial”. Há uma relação das mesmas com outros temas, como, no caso da segunda figura mencionada, a medida de ângulos.

- <u>Atividade 29:</u> *Este é um triângulo com um único eixo de simetria.*

    a) o triângulo é isósceles ou escaleno?

    b) o ângulo B mede 70°. Quanto mede o ângulo C?

    c) Quanto mede o ângulo M?

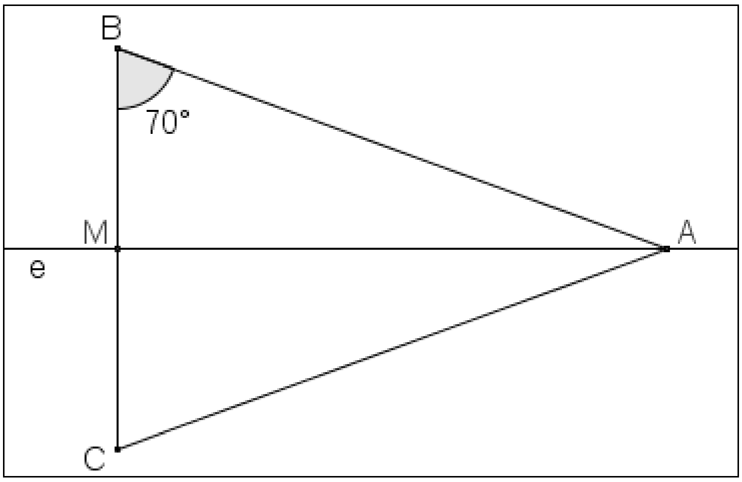


Figura 25 – Adaptado de IMENES e LELLIS, 6ª série, 2007, p. 37

Na 7ª série a simetria axial é retomada no capítulo das simetrias. É definida também no espaço, na qual usa o termo “plano de simetria” e não “eixo de simetria”, como nas unidades anteriormente analisadas. Exemplifica eixo de simetria em folhas de vegetais e insetos, utilizando um espelho.

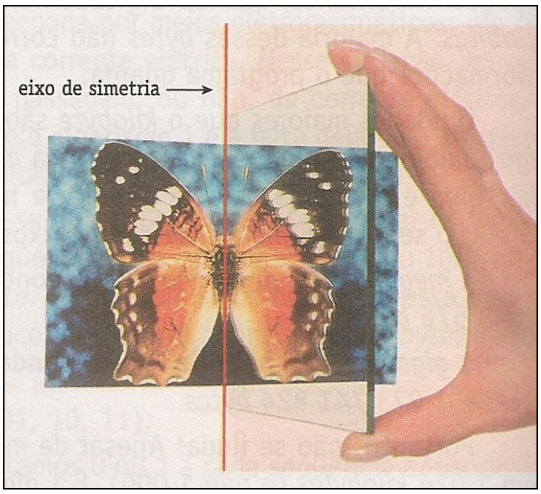


Figura 26 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2007, p. 137

Há, também, atividades propostas, junto com as outras simetrias, usando malha quadriculada, nas quais indica-se o eixo de simetria para obter a simétrica da figura dada.

- <u>Atividade 8:</u> *Em uma folha de papel quadriculado, copie cada figura e o eixo **e**. Construa a figura simétrica em relação a esse eixo.*

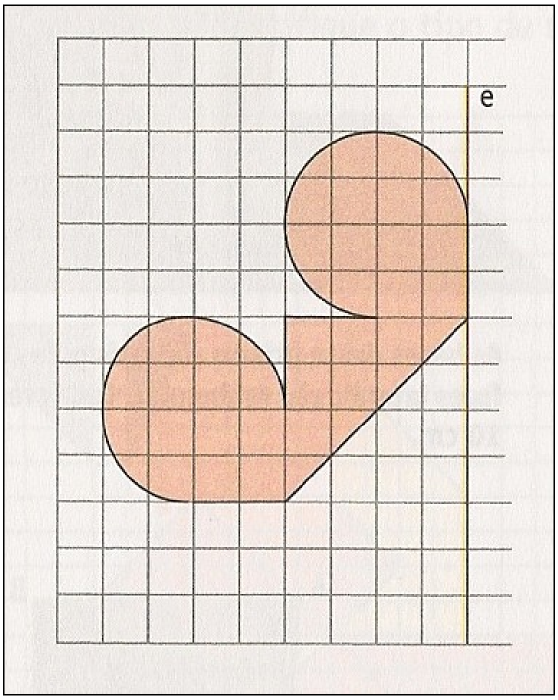


Figura 27 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2007, p. 140

Trata, ainda, da simetria axial no sistema de eixos orientados, comparando as coordenadas dadas com as obtidas.

- <u>Atividade 6:</u> *Numa folha quadriculada, copie o triângulo A e os eixos e_1 e e_2. Construa o triângulo B, simétrico de A em relação ao eixo e_1. Depois construa o triângulo C simétrico de A em relação ao eixo e_2.*

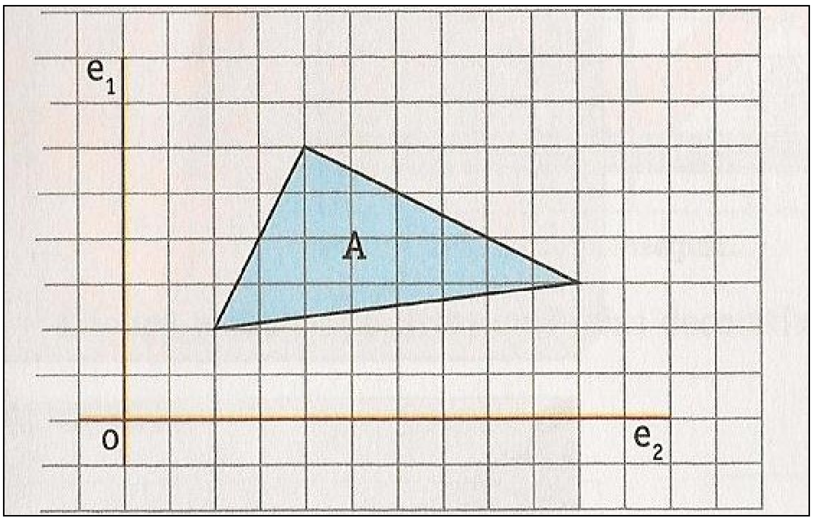


Figura 28 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2007, p. 139

Conclui a simetria axial com faixas decorativas mostrando que para, construí-las, pode ser usada a simetria axial com reflexões em sucessivas retas paralelas.

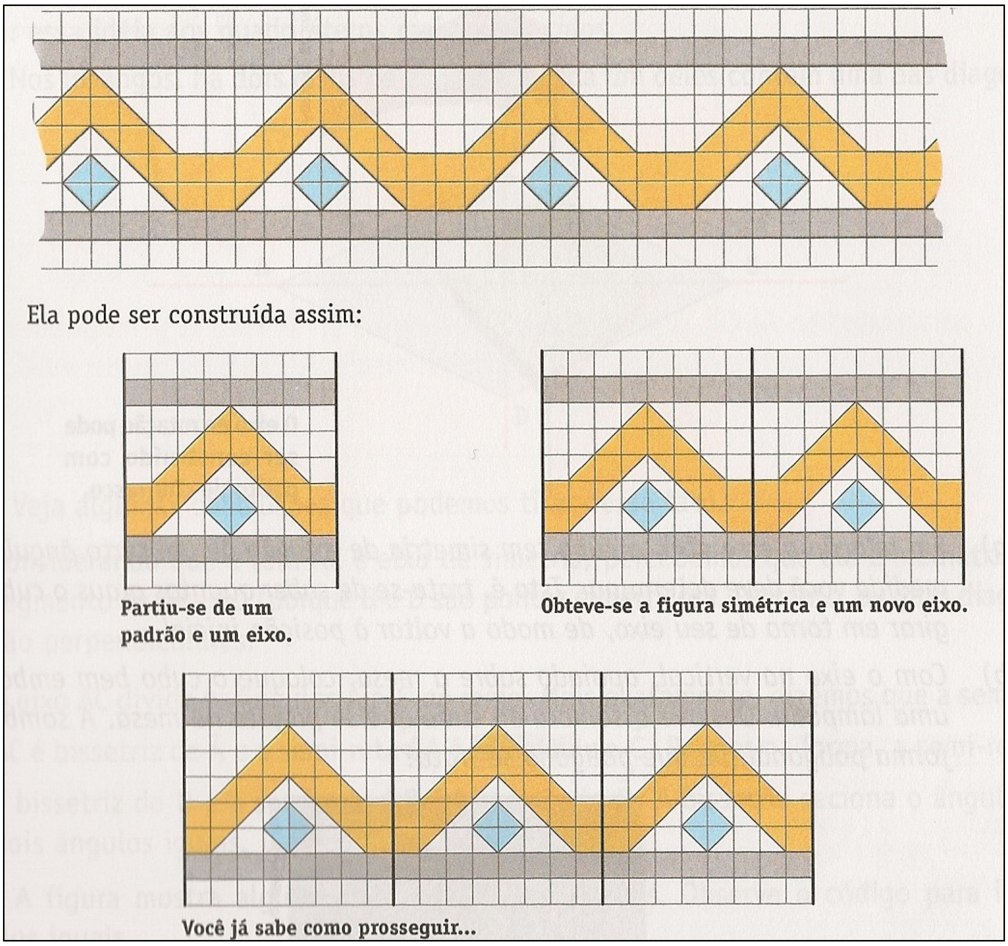


Figura 29 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2007, p. 141

Na 8ª série, a simetria axial é colocada no capítulo que faz referências às construções geométricas. É indicada como ferramenta para obter a translação, como mediatriz de cordas para obter o centro da circunferência que a contém, reitera que existe em formas espaciais e na construção de formas geométricas planas. Nessa unidade, tem um capítulo de estudos da semelhança de polígonos. Para a obtenção de semelhanças é usado a transformação homotetia como instrumento.

- *<u>Atividade 9:</u> Construção da imagem do triângulo ABC pela simetria de eixo **e**.*

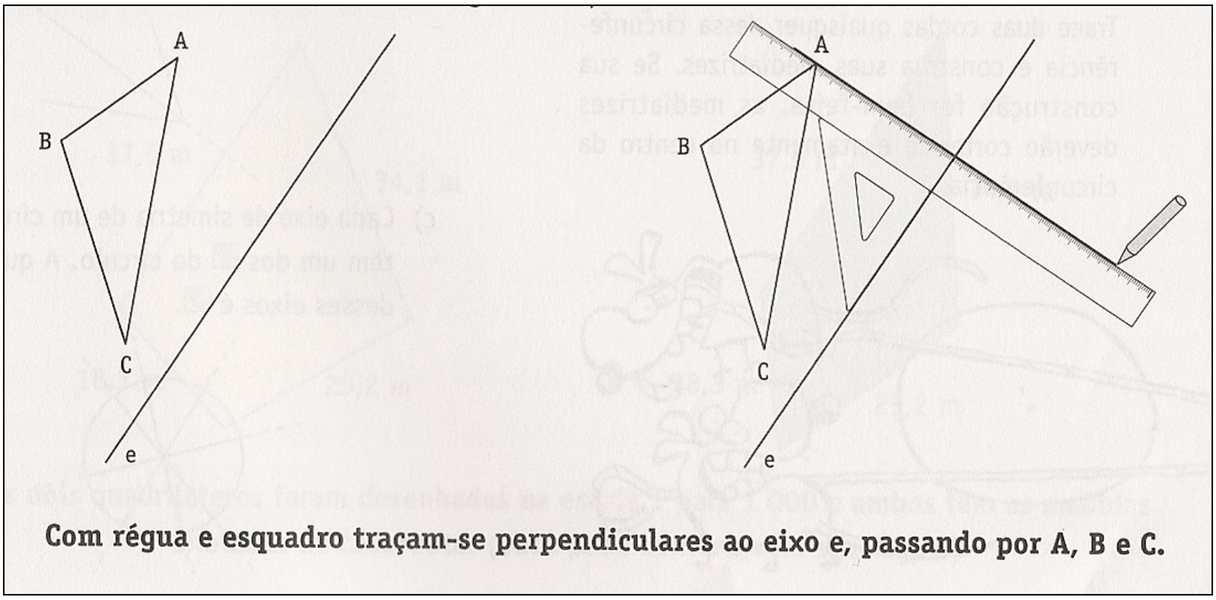


Figura 30 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2007, p. 211

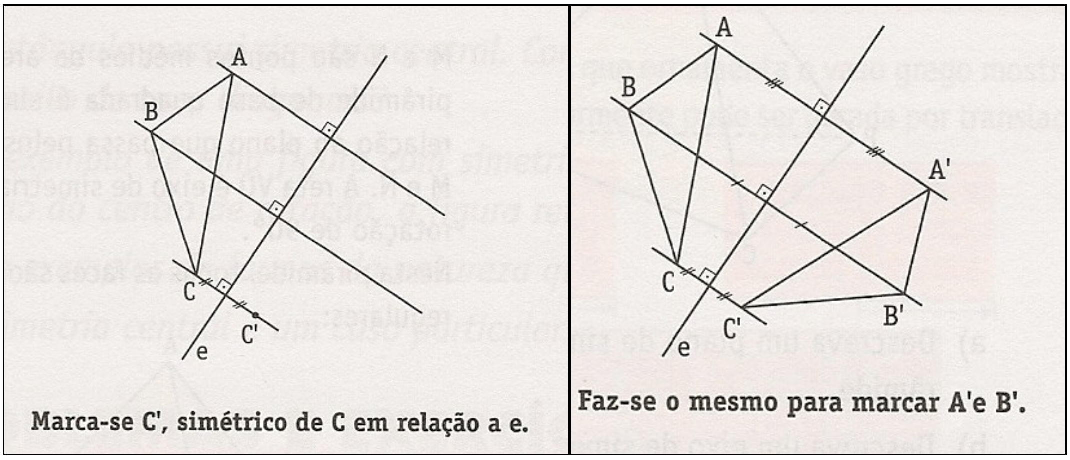


Figura 31 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2007, p. 212

2.3. Projeto Araribá.

Essa obra aborda a simetria axial somente nos volumes para a 5ª e para a 7ª séries. As atividades são propostas aos alunos explorando três situações: figuras que tem eixo de simetria, figura simétrica a uma figura dada e obtenção de uma figura simétrica.

O volume para a 5ª série apresenta o tema no capítulo de figuras geométricas e simetria. Indica a simetria axial em alguns objetos.

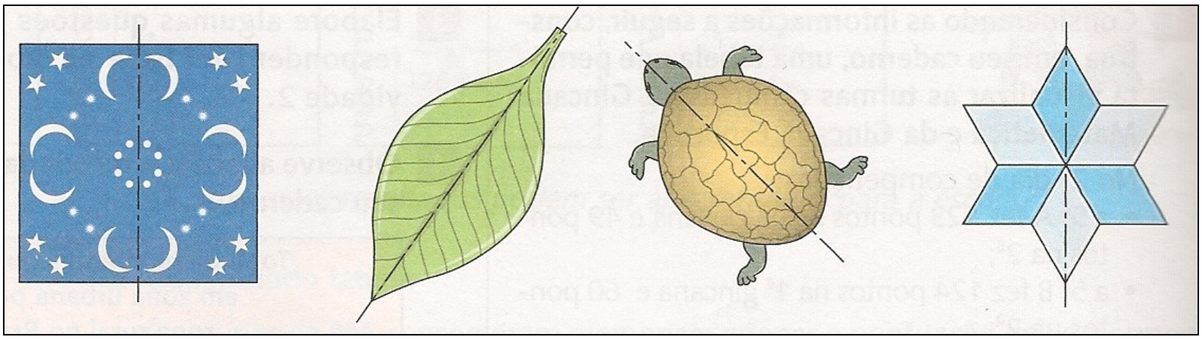


Figura 32 – Projeto Araribá, 5ª série, 2006, p. 100

Segue com as mesmas figuras apresentando uma dobra pelo eixo de simetria.

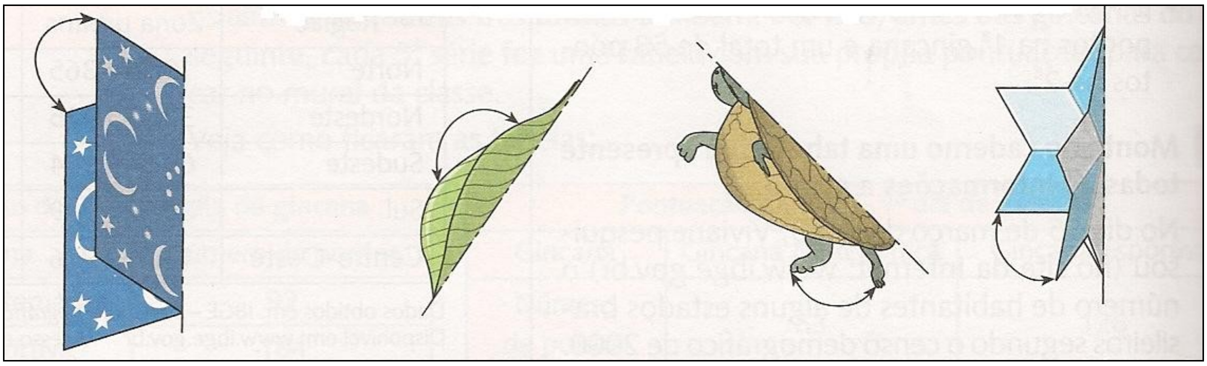


Figura 33 – Projeto Araribá, 5ª série, 2006, p. 100

Após a representação das figuras dobradas afirma que as duas partes das figuras mencionadas coincidem o que permite dizer que tais figuras são simétricas; a linha que traçada é chamada de eixo de simetria e uma figura pode ter mais que um eixo de simetria.

Continua com atividades que indicam a construção de figuras simétricas com dobraduras, desenhando em malha quadriculada ou ainda usando um espelho.

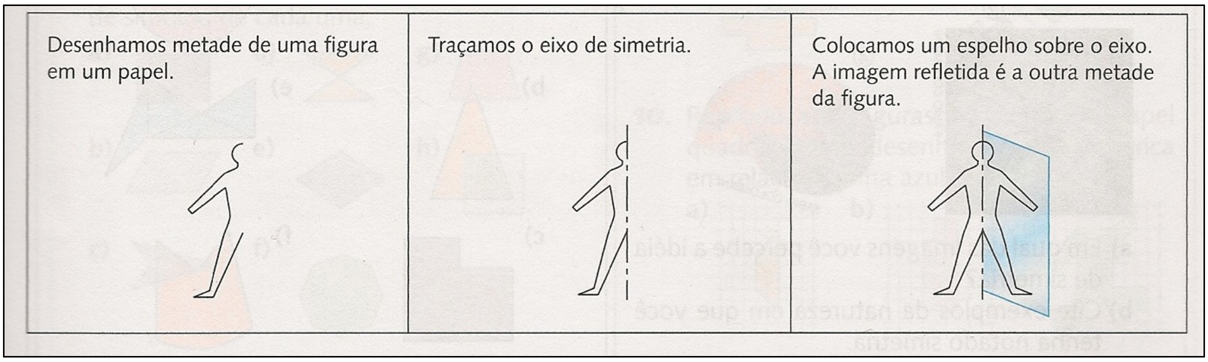


Figura 34 – Projeto Araribá, 5ª série, 2006, p. 101

As atividades têm propostas relativas à construção do eixo de simetria em figuras, completar figuras (espelho) ou obter a simétrica de uma figura dada.

- *<u>Atividade 10:</u> Reproduza as figuras seguintes em papel quadriculado e desenhe a figura simétrica em relação à linha azul.*

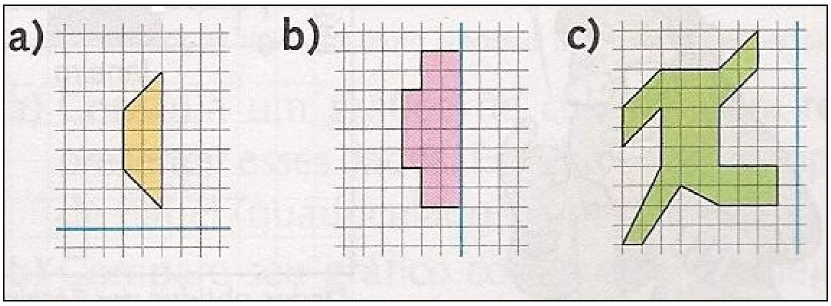


Figura 35 – Projeto Araribá, 5ª série, 2006, p. 103

Para a 7ª série, a coleção retoma a reflexão na reta no capítulo das transformações geométricas de figuras no plano. É colocada e comparada à translação e à rotação. A abordagem das isometrias é muito rápida: são colocadas apenas três atividades, de um total de doze, que tratam da reflexão na reta. Talvez aqui pudesse haver um melhor tratamento da simetria axial, pois esse capítulo já aborda as congruências.

- *<u>Atividade 3:</u> Copie a figura em um papel quadriculado. Construa a figura simétrica em relação à reta s.*

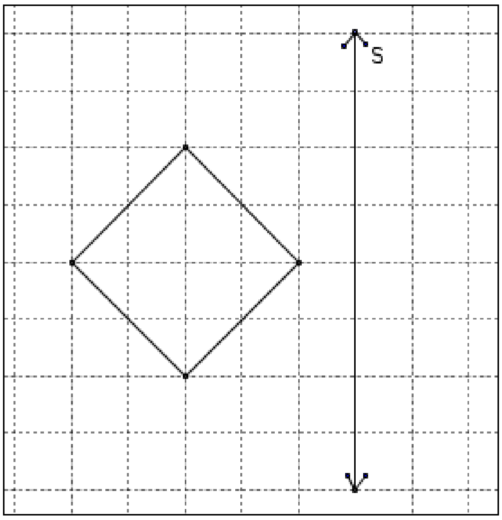


Figura 36 – Adaptado de Projeto Araribá, 7ª série, 2006, p. 125

A unidade para a 8ª série, ao abordar semelhanças, tem a transformação homotetia como instrumento de construção dos polígonos semelhantes.

2.4. Coleção Experiências Matemáticas

A abordagem da simetria axial nessa coleção ocorre nos volumes da 5ª, da 6ª e da 7ª séries. As atividades são propostas aos alunos explorando quatro situações: figuras que tem eixo de simetria, figura simétrica a uma figura dada, obtenção de uma figura simétrica e um comentário ao final de cada atividade proposta.

No volume para a 5ª série, a simetria axial é tratada na atividade 21, direcionada às simetrias. Nesta atividade, aparece o termo “inverter” para indicar a reflexão de figuras através do espelho, usando papel sem malhas ou com malhas. Também trabalha com reflexões sucessivas. Afirma que a linha que representa o espelho chama-se eixo de simetria.

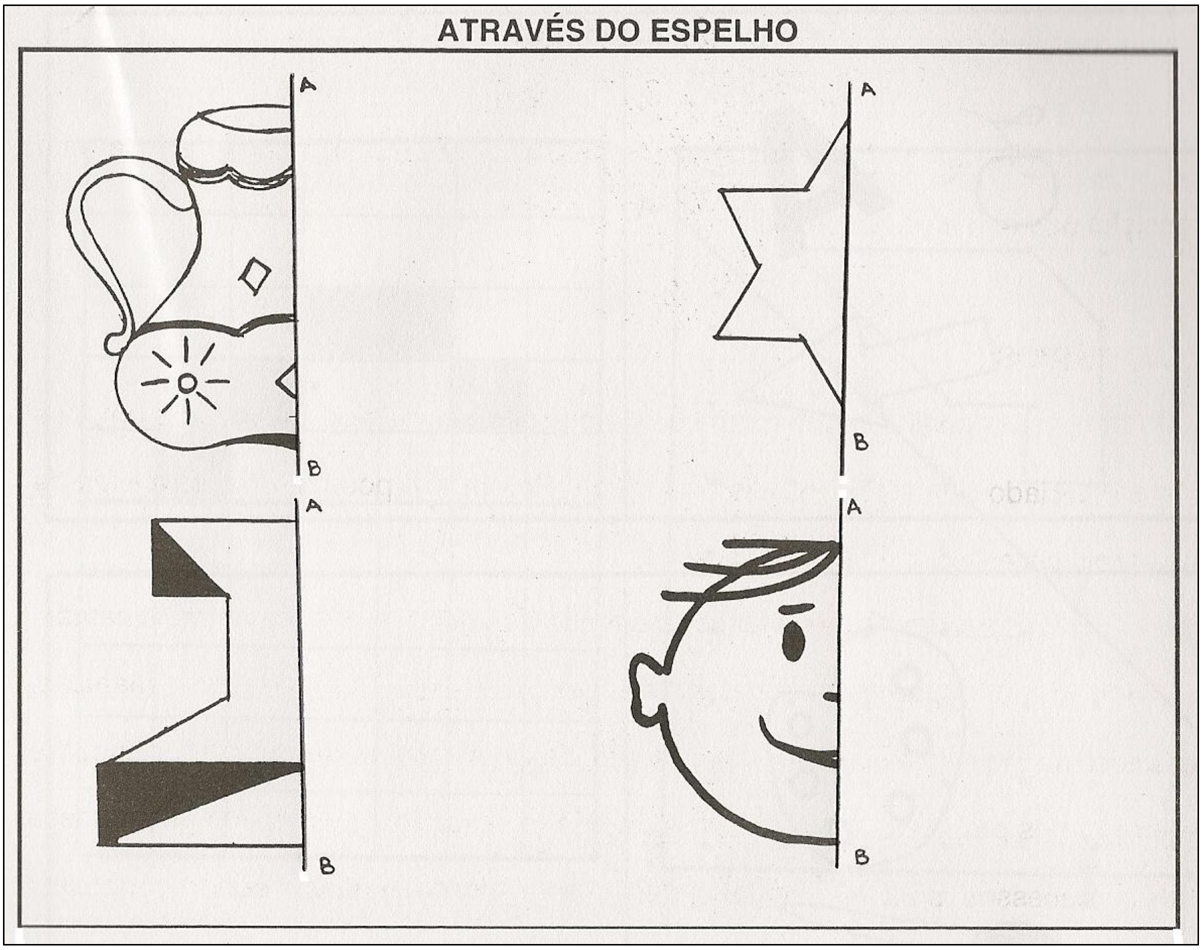


Figura 37 – Experiências Matemáticas, 5ª série, 1998, p. 211

No volume para a 6ª série a simetria axial é abordada na atividade 25, p. 267, quando estuda a mediatriz. Indica fazer construções geométricas para determinar a mediatriz de um segmento, eixo de simetria e simetria axial. Trabalha inicialmente com a construção de retas perpendiculares. Ainda usa a simetria axial como um importante instrumento para a obtenção de bissetrizes (pp. 338-344). Sugere explorar a ideia da simetria axial dobrando folha de papel para as partes coincidirem. Explora a “Rosa-dos-ventos” para representar pontos geográficos.

Uma de suas construções apresenta o seguinte enunciado: “Desenhe uma figura simétrica à figura dada, em relação à reta r, usando régua e compasso”, como pode ser visto na figura seguinte.

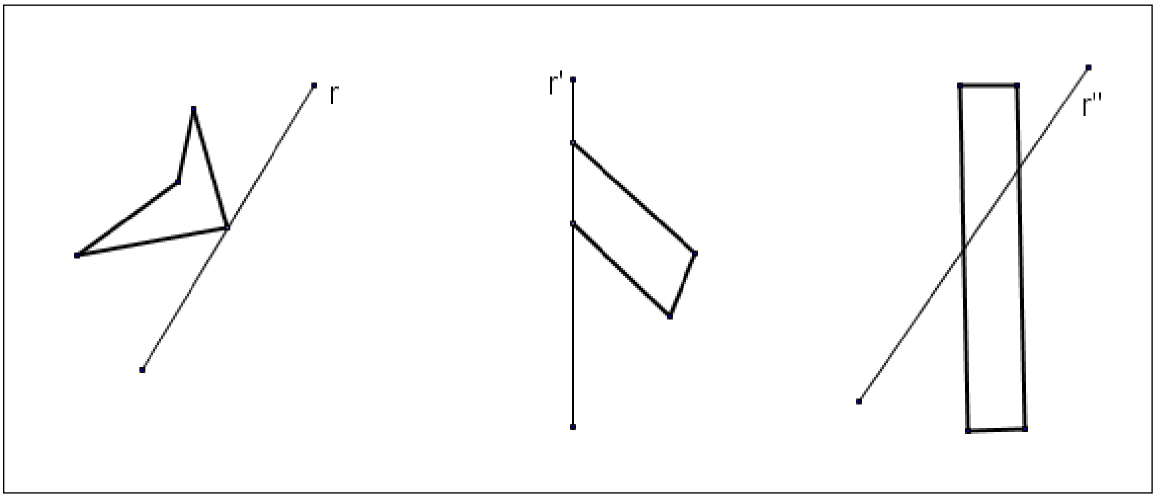


Figura 38 – Adaptada de Experiências Matemáticas, 6ª série, 1998, p. 287

No volume para a 7ª série, o tema é retomado na atividade que trata das transformações de figuras. Vem como conhecimento anterior para abordar outras simetrias. Inicia com uma única reflexão de triângulo na reta, depois reflexões sucessivas em retas paralelas para mostrar a translação e finaliza com reflexões sucessivas em retas concorrentes para mostrar a rotação. Com isso indica a reflexão na reta como sendo importante recurso para obter as outras isometrias.

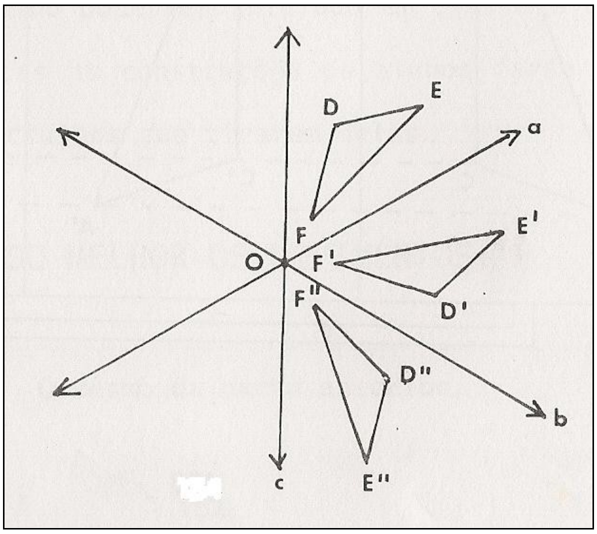


Figura 39 – Experiências Matemáticas, 7ª série, 1998, p. 154

No volume para a 8ª série (pp. 69-84), em semelhança de figuras planas, a coleção aborda a homotetia. Propõe construções a serem feitas em folhas em branco e em folhas quadriculadas. Destaque para o cálculo do coeficiente usado na transformação. Apresenta a figura de um pantógrafo, instrumento usado para transformar figuras em outras figuras semelhantes.

2.5. Síntese e comparação das análises dos livros

De acordo com as categorias de análise pré-estabelecidas tem-se que a obra *Matemática para todos* (IMENES e LELLIS, 2007), em seu primeiro volume, 5ª série, mostra figuras que têm simetrias, exemplifica a reflexão no espelho ou na reta e ainda indica como obter figuras simétricas com dobraduras. Ao final, contempla com algumas perguntas para que se tirem conclusões relativas ao tema estudado. Limita-se, porém, às construções. No volume seguinte, referente à 6ª série, a simetria axial é retomada como ferramenta na construção de polígonos regulares, bem como verificar algumas propriedades e/ou conceitos, já que propõe construir um polígono partindo de um suposto eixo de simetria. Nesse volume, então, a simetria axial é tratada como ferramenta para a construção de outros polígonos. Avança para o outro volume, 7ª série, retomando a reflexão na reta junto com outras isometrias, mostrando que é possível obter a translação e a rotação com sucessivas reflexões em retas paralelas ou concorrentes, bem como explorar os conceitos de bissetrizes e mediatrizes. Nesse volume, a simetria axial é explorada como ferramenta para o estudo de outros conceitos. Em seu último volume, para a 8ª série, é retomada como importância para obter a translação e a rotação, sendo usada, também, para conhecer algumas propriedades da circunferência. São representados alguns eixos de simetria na circunferência para deduzir que essa representação geométrica tem uma infinidade de eixos de simetria, bem como na construção de polígonos. Em outras partes do texto, afirma-se, também, que em formas espaciais há simetria. Portanto, aqui, a simetria axial é explorada como ferramenta para o estudo de outros conceitos e/ou propriedades, e, ainda, como ferramenta para a construção de polígonos.

No que se refere ao Projeto Araribá, no volume para a 5ª série, são mostradas figuras que tem simetrias e exemplificadas as reflexões no espelho, na reta ou na água, e, ainda, é indicado como obter figuras simétricas com dobraduras. Neste caso, limita-se às construções. O tema é retomado somente na 7ª série para obter a translação e a rotação. Também usa a simetria axial na obtenção de figuras congruentes. Assim, o conteúdo é explorado como ferramenta para o estudo de outros conceitos ou propriedades.

A obra Experiências Matemáticas (SEESP), no primeiro volume, 5ª série, trata da simetria axial indicando refletir figuras através do espelho, usando papel sem malhas e papel com malhas. Também trabalha com reflexões sucessivas. Afirma a seguir que a linha que representa o espelho chama-se eixo de simetria. Aqui, foi além das construções de figuras simétricas, a reflexão na reta foi explorada também como ferramenta para o estudo de outros conceitos ou propriedades. O tema é retomado na série seguinte ao construir e estudar a mediatriz. Indica obter a mediatriz de um segmento por construções geométricas e ainda representar o eixo de simetria e a própria simetria axial. Para tanto, usa inicialmente retas perpendiculares, propõe que explore mais a ideia da simetria axial dobrando uma folha de papel para as partes coincidirem. Houve um avanço considerável, não ficou somente no processo empírico somente com a construção: a simetria axial foi destacada como ferramenta para o estudo de outros conceitos ou propriedades e ainda para a construção de outras figuras. A proposta, nesse volume, 6ª série, integrou as três categorias de análise. No outro volume, da 7ª série, a simetria axial é retomada para a obtenção de reflexões sucessivas em retas paralelas ou em retas concorrentes funcionando como ferramenta para o estudo de outros conceitos ou propriedades.

Comparando o que foi proposto pelas obras, fica perceptível a ênfase na 5ª série através da apresentação de figuras que apresentam eixo de simetria e figuras simétricas duas a duas. As obras analisadas propõem, através de roteiros de construção, traçar o eixo de simetria, obter figuras simétricas de outras e também trabalhar com dobraduras. A coleção Experiências Matemáticas, nesse volume, já trata da simetria axial como ferramenta para construir outros conceitos e/ou propriedades, enquanto as demais permanecem adstritas às construções.

O trabalho realizado nesta pesquisa, cujos sujeitos são alunos da 5ª série, tomou das características apresentadas pelos livros didáticos analisados, ou seja, inspirou-se nos mesmos para ser realizado com a apresentação de figuras que têm simetria, construção de figuras simétricas e representação do(s) eixo(s) de simetria de figuras. Nos instrumentos utilizados nesta investigação constam, ao final das atividades em cada um deles, questões referentes às próprias construções e ao conteúdo abordado.

Até aqui, pode-se considerar que as indicações oficiais, como aquelas supramencionadas, contidas no PCNEF (BRASIL, 1998), apontam para o interesse e a importância do tema relacionado a esta pesquisa. Além disso, a abordagem dos livros didáticos, a qual, de acordo com Almouloud (2004), tem diversas deficiências, também já mencionadas, assim como a abordagem limitada dada aos assuntos ligados às transformações geométricas, de acordo com o mesmo autor, também sugerem que o tema ainda pode ser muito explorado. Em função disso, esta pesquisa procurou avançar, a partir das características dinâmicas do ambiente informatizado, de modo a permitir que as construções ganhassem um caráter de exploração, e que os conceitos fossem realmente construídos a partir da crítica das atividades, da reflexão em conjunto com os colegas e com o pesquisador e da comparação entre os erros cometidos entre uma fase da estratégia pedagógica utilizada e a outra, avançando na superação das dificuldades apresentadas.

CAPÍTULO TRÊS

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como base à pesquisa aqui desenvolvida, procurou-se pesquisar trabalhos recentes que, de alguma forma, se aproximassem das questões e objetivos aqui tratados. Pretendeu-se analisar algumas pesquisas que tratam da simetria axial com uma abordagem intermediada por algum *software* de geometria dinâmica, de modo a considerar a importância desse tipo de recurso para o trabalho do professor de Matemática quando da abordagem da geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Desta forma, Vaz (2004), em sua pesquisa, trabalhou com as isometrias no *software* Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração. Elaborou e aplicou uma sequência de ensino a alunos de 7ª e 8ª séries usando o *software* de geometria dinâmica para realizar os experimentos de ensino e aprendizagem de prova e demonstração de isometrias. Tratou dos aspectos indutivos e dedutivos que nem sempre são desenvolvidos com alunos dessa faixa etária. A pesquisadora destaca que o recurso tecnológico utilizado foi importante, pois auxiliou os alunos no aspecto empírico/conceitual, enquanto generalização da figura em virtude das possibilidades de arrastá-las. Salienta, ainda, que o uso das transformações geométricas na prova não consegue, de forma independente, resolver todos os problemas que foram apresentados nos estudos que usam modelos euclidianos. Com os experimentos, os alunos conseguiram elaborar provas locais, base para uma prova e validação global. A pesquisadora conclui o trabalho afirmando que a alternativa escolhida – o uso das transformações geométricas – não foi suficiente para a resolução desse problema, pois em vários momentos o foco permaneceu no campo pragmático. Porém, a geometria dinâmica fez com que os alunos observassem as construções não como simples objetos específicos, e sim como figuras gerais. Afirma, também, que os resultados obtidos indicam que o processo de aprendizagem da prova não envolve apenas o ato de deixar um campo pragmático em favor do conceitual, mas sim, de um movimento contínuo entre ambos.

Já Alves (2005) propõe a investigação dos aspectos didáticos e epistemológicos que estão envolvidos no ensino e aprendizagem de simetria axial. Desenvolveu uma sequência didática fundamentando-se em Hershkowith e Laborde (visualização em geometria com uso do Cabri) em Hölzl, referente à função arrastar do Cabri e aplicou a alunos da 6ª série. No experimento, leva em consideração as variáveis didáticas, como o eixo de reflexão, posição da figura, papel de base e propriedades da reflexão axial. Os resultados da sequência apontaram algumas dificuldades conceituais. Contudo, o *software* utilizado influenciou substancialmente na construção de figuras simétricas e ainda quanto à associação entre as figuras construídas e as propriedades da simetria e mostrou-se, também, influente no auxílio da identificação de pontos e figuras simétricas em relação a um eixo de referência.

Ainda abordando transformações geométricas, Bilac (2008) desenvolveu e aplicou, a alunos da 8ª série, uma sequência de atividades envolvendo a simetria axial e a simetria de rotação, objetivando favorecer aos discentes uma evolução no desenvolvimento das noções de transformações geométricas. Buscou ainda responder em que medida os recursos e ferramentas do *software* Cabri-Géomètre favorecem a aprendizagem das transformações geométricas abordadas. Observou as etapas destacadas por Piaget e Garcia (1983) quando defendem que, no desenvolvimento da criança, referentes às noções geométricas, podem ser identificadas fases como a intrafigural (quando a criança vê e pensa somente nas relações que ocorrem no interior da figura), interfigural (quando a criança observa várias figuras inseridas no mesmo contexto e estabelece relações entre uma figura com outras externas a ela), e a transfigural, (etapa na qual a criança se mostra capaz de produzir outra figura com a combinação de transformações).

Ainda no âmbito das TICs, Araújo (2007) investiga uma abordagem para prova em geometria, explorando como objeto de estudo as construções no ambiente Cabri-Géomètre. O experimento foi realizado baseado nas teorias de Mascheroni (a geometria do compasso), Mariotti (as construções geométricas e Cabri como um campo de experiências para a aprendizagem da prova) e Balacheff (as categorias de provas produzidas pelos aprendizes: pragmáticas e conceituais). Tal experimento foi aplicado a alunos da 7ª série. Com o recurso do ambiente de geometria dinâmica, usa suas ferramentas para resolver um mesmo problema de maneiras diferentes, enfatizando, na sequência de ensino, o movimento do aspecto indutivo para o aspecto dedutivo. De acordo com o pesquisador, os resultados obtidos apontam que o público participante pouco avançou no campo teórico. A influência se deu nos tipos de construção e na prova empírica de propriedades geométricas nas figuras, mas não na obtenção de provas conceituais.

Não abordando necessariamente transformações geométricas, mas sim a geometria em geral, Bagé (2008) indica uma proposta de noções básicas de geometria com o uso das tecnologias para professores do Ensino Fundamental I. Objetivou identificar possíveis contribuições que um curso de formação continuada, com o uso das tecnologias, traz na prática do professor no ensino de geometria nas séries iniciais. Em seu trabalho, incluiu simetrias no corpo do experimento para auxiliar na busca dessas possibilidades. A autora afirma que os professores envolvidos em sua pesquisa perceberam as condições do uso das tecnologias como apoio no desenvolvimento de conceitos geométricos.

Em síntese, Vaz (2004) estuda a reflexão, rotação e translação, como recursos no processo para prova e demonstração, tratando dos aspectos dedutivos e indutivos; Bilac (2008) aborda as simetrias, axial e rotacional, como possíveis avanços para as noções de transformações geométricas; Araújo (2007) aborda a prova com construções geométricas, enfatizando o trabalho com as simetrias, axial e rotacional, analisando, também, a transição do aspecto indutivo para o aspecto dedutivo. Alves (2005) pesquisa os aspectos didáticos e epistemológicos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de simetria axial. Esses (quatro) autores realizaram seus experimentos com alunos da 6ª à 8ª séries do Ensino Fundamental. Os trabalhos têm em comum algum tipo de simetria, além o fato de os experimentos terem sido intermediados por um *software* de geometria dinâmica. Todas as pesquisas analisadas indicam que o recurso informatizado auxilia no processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

Os resultados e análises dessas quatro obras permitem afirmar que há pontos em comum. Um deles é a importância do ensino das transformações geométricas isométricas no 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental; o outro ponto são as possibilidades do uso das TICs no desenvolvimento de conceitos geométricos.

Para contemplar as tecnologias a serviço da educação, Bagé busca em seu trabalho, identificar possíveis contribuições que um curso para professores usando tecnologias traz na prática o ensino de geometria nas séries iniciais.

A revisão realizada neste capítulo colaborou com esta investigação no sentido de identificar indícios de que os temas relacionados às simetrias já foram explorados anteriormente e revelaram ser importantes para a abordagem de uma investigação em Educação Matemática, no sentido de fazer avançar o conhecimento deste tópico em particular. Além disso, as pesquisas que utilizaram *softwares* de geometria dinâmica puderam representar iniciativas nas quais os estudantes eram beneficiados em aspectos relevantes da construção do conhecimento matemático, ainda que com limitações nas questões conceituais. Com base nestes pressupostos, resolveu-se ampliar a estratégia pedagógica com uso de tecnologias desenvolvida nesta investigação, como recomenda Oliveira (2009), de forma a incluir os chamados “recursos tradicionais”, por acreditar que os alunos têm que passar por uma fase de experimentação das ferramentas (régua, compasso e esquadros) para construir e adquirir o conceito de reflexão na reta para, depois, usar recursos de geometria dinâmica como o *software* Geogebra. A partir das possibilidades existentes em uma estratégia com semelhante recurso computacional, procurou-se trabalhar a partir de uma abordagem reconstrutiva em função dos erros apurados na primeira fase, relativa ao ambiente estático.

Pensou-se, aqui, muito em função da leitura e análise das pesquisas anteriores, e implementando um coerente planejamento didático, que os aprendizes poderiam perceber o computador não como uma máquina que transmite, mas como um recurso que media a aprendizagem – ele não ensina, mas serve de interface para uma série de experiências que colaboram, sob a orientação docente, para a construção do conhecimento. Este aspecto mais dinâmico pode fomentar uma capacidade criativa e interessante nos trabalhos, gerando discussões e trocas de idéias entre os pares. Os PCN (1998) propõem o uso de *software* de geometria dinâmica por possibilitarem a conceitualização das simetrias – nesse caso, da simetria de reflexão – possibilitada pelo uso das ferramentas disponibilizadas por esse tipo de tecnologia.

Outro aspecto comum nas pesquisas analisadas, a partir dos quais esta investigação procurou partir, foi o da consideração de que, desde que os computadores começaram a ser usados em educação, muitos *softwares* foram elaborados com interesses no aprimoramento da relação entre ensino e aprendizagem, inclusive da geometria. Essa ocorrência se dá em virtude do papel fundamental das representações gráficas nesta área da matemática (LABORDE, 1993). Esses *softwares* de geometria dinâmica facilitam não apenas a chance de desenhar rapidamente, com praticidade e precisão, como também a de movimentar e modificar as representações obtidas, alterar sua posição, forma e medidas. Dão condições para verificar as construções quando se explora o recurso “arrastar”, permitindo, por exemplo, identificar as composições que permanecem invariantes. Embora não seja o bastante, ou seja, não basta esta característica para melhorar a qualidade do processo, não se pode negar a magnitude das diferenças, se comparado ao ambiente estático.

Conforme Gravina (2001), a utilização dos ambientes de geometria dinâmica incentiva o espírito de investigação Matemática, possibilita aos alunos obterem suas próprias conjecturas, de modo a que se sintam motivados a demonstrar e comprovar suas observações, questionando suas próprias ações (GRAVINA, 2001, pp. 89-90).

Destarte, usar tecnologias para construir figuras geométricas expõe muitas possibilidades se comparadas com os métodos tradicionais de construção utilizando régua, compasso, esquadros e lápis. Isso não representa desconsiderar o uso de instrumentos não virtuais, mas de avançar a partir deles e com eles, em uma estratégia pedagógica que amplia o uso dos instrumentos, considera as limitações de cada um, e foca nas estratégias do professor e na interação entre as pessoas para superar eventuais dificuldades e erros que surjam. Nisto, esta investigação pretendeu avançar, apoiada nas análises aqui realizadas e partindo da base consolidada pelas outras pesquisas.

Na continuidade do apontamento dos aspectos teóricos desta pesquisa, importante destacar que o tratamento dado pela abordagem adotada nesta investigação considera a pertinência do emprego de uma estratégia pedagógica com uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) no processo de ensino e aprendizagem de transformações geométricas, e, mais especificamente, na transformação denominada simetria axial. Assim, julgou-se importante tratar, na sequência, das TICs e sua relevância nos processos educativos.

CAPÍTULO QUATRO

TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO – TICs

4. 1. Aspectos gerais

A palavra “tecnologia” vem do grego, da conjunção dos termos **Τεχνη** (ofício) e **λογια** (estudo). Pela origem e composição (etimologia) da palavra, pode-se afirmar que tecnologia é o conhecimento da profissão, do ofício. São os métodos, as práticas, os conhecimentos usados para melhorar, mudar, incorporar características ao que existe ou inventar algo, conforme a necessidade humana, de modo a facilitar a vida.

Ainda que as tecnologias digitais representem um fenômeno recente, as tecnologias como um todo são concepções que remontam às origens da espécie humana. De acordo com Kenski (2008, p.20), originalmente, o homem contava somente com suas capacidades naturais de seu corpo: pernas, braços, músculos e cérebro. Ao longo de sua evolução, entretanto, diversas invenções, da alavanca à roda, concorreram para ampliar as capacidades do homes: “o conceito de tecnologia engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações” (KENSKI, 2008, pp. 22 e 23).

Na concepção de Oliveira (2007, p.74), “o conceito de tecnologia abarca, então, as idéias relativas à técnica, em um contexto de aprofundamento teórico-prático que afeta o modo de vida das pessoas e a própria estrutura da sociedade em uma época”. Da mesma forma, na visão de Toschi (apud OLIVEIRA, 2007, p. 74):

> A tecnologia pressupõe conhecimento do porquê da técnica e de como seus objetivos são alcançados, e exige da sociedade onde se instala uma reformulação de suas estruturas compatível com os benefícios que traz, ou ainda, pode gerar rejeição pelos eventuais malefícios que provoca. Então, tecnologia é algo que se estuda e se aprende uma vez que é parte da cultura. Tecnologias não são apenas aparelhos, equipamentos, não são puro saber-fazer, são cultura que têm implicações éticas, políticas, econômicas, educacionais.

Autores como Kenski (2003) e Lévy (1993; 1999) admitem que a tecnologia está de tal forma imbricada na sociedade de uma dada época que não se deve efetuar separações, a não ser conceituais, entre cultura, sociedade e técnica. Castells vai mais longe, ao afirmar que “a tecnologia é a sociedade”, ou seja, “a sociedade não pode ser entendida ou representada sem suas ferramentas tecnológicas” (apud OLIVEIRA, 2007, p. 75).

Como definir, então, a tecnologia? Para procurar dar conta de semelhante tarefa, segue um quadro, com o posicionamento de alguns autores sobre o assunto.

Definição	Autor
O uso de conhecimentos científicos para especificar as vias de se fazerem as coisas de uma maneira reproduzível.	Castells, 2002, p. 49
Conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade.	Kenski, 2003, p. 18
Um ângulo de análise dos sistemas sócio-técnicos globais, um ponto de vista que enfatiza a parte material e artificial dos fenômenos humanos.	Lévy, 1999, p. 22
Envolve as idéias relativas à técnica, em um contexto de aprofundamento teórico-prático que afeta o modo de vida das pessoas e a própria estrutura da sociedade em uma época.	Oliveira, 2007, p. 74

Quadro 2 – Conceitos de Tecnologias

É possível perceber a complementaridade entre as definições do quadro anterior. E um ponto em comum, às vezes subjacente: o fato de ser possível encarar as tecnologias como suportes ao pensamento e ao fazer humano, ou seja, tecnologias da inteligência, na visão de Lévy (1993, pp. 75-77). Para o autor francês, trata-se de um conjunto de técnicas aplicadas e recursos mnemônicos (qualquer meio de ajuda artificial dado à memória), que estruturam o conhecimento humano. Estas tecnologias, na visão de Oliveira (2007) "abrangem três tempos primordiais: a oralidade primária, a escrita e a informática". No primeiro deles, a transmissão do conhecimento e da cultura se dava de modo absolutamente natural, isto é, oral; a oralidade secundária, com os símbolos aplicados à escrita, tornou possível registrar o que ocorria, o que ajudava a manter os dados, diminuindo o risco de perdê-los, de forma que a escrita passou a ser um instrumento melhorado para a transmissão e preservação do conhecimento. A informática acrescenta, ao caráter de separação de memória entre o sujeito e o conhecimento, iniciado na escrita, características de volume, compactação, conexão, interação e velocidade muito maiores (OLIVEIRA, 2007, p. 77).

Para Kenski (2008, p. 23), as tecnologias da inteligência são:

> aquelas tecnologias que não estão ligadas diretamente a equipamentos e que são muito usadas pela raça humana desde o início da civilização. A linguagem é uma construção criada pela inteligência do homem para possibilitar a comunicação entre os membros de determinado grupo social [...] a linguagem deu origem aos diferentes idiomas existentes e que são característicos da identidade de um determinado povo, de uma cultura.

O que se pretende afirmar aqui é a simbiose sociedade-tecnologia, sem a qual é quase impossível entender o mundo atual. Para Delors et al,

> a digitalização da informação operou uma revolução profunda no mundo da comunicação, caracterizada em particular, pelo aparecimento de dispositivos multimídia e por uma ampliação extraordinária das redes telemáticas. Por exemplo, a partir de 1988, a Internet duplica todos os anos o número de usuários e de redes assim como o volume de tráfego.(...) Esta revolução tecnológica constitui, evidentemente, um elemento essencial para a compreensão da nossa modernidade, na medida em que cria formas novas de socialização e, até mesmo, novas definições de identidade individual e coletiva. (apud OLIVEIRA, 2007, p. 80).

Para Kenski (2008, p.21), o uso intensivo de determinada tecnologia tem o efeito de criar alterações e condicionamentos em relação à cultura de uma dada sociedade, em um tempo qualquer. Não é mera questão de uso e popularização de artefatos. De fato, para a autora,

> a evolução tecnológica não se restringe aos novos usos de determinados equipamentos e produtos. Ela altera comportamentos. A ampliação e a banalização do uso de determinada tecnologia impõe-se à cultura existente e transformam não apenas o comportamento individual, mas o de todo o grupo social.

Na atualidade, o computador digital, em seu formato pessoal, reduzido e portável, representa uma grande convergência de tecnologias, permitindo às pessoas dinamizar e potencializar atividades relacionadas à produção de textos, à comunicação, à produção de conteúdos midiáticos na forma de sons, figuras, imagens e hipertextos. Do e-mail aos programas de comunicação instantânea, em tempo real, das listas e fóruns de discussão, os meios síncronos e assíncronos permitem um universo de interações entre pessoas através das redes informáticas, principalmente a Internet.

Nesta lógica, para Oliveira (2007, p. 81),

> na contemporaneidade, as tecnologias digitais de informação e comunicação estão presentes de forma intensa no cotidiano das pessoas. Permeiam a maior parte dos processos, de maneira condicionante, tendo a informação como elemento básico. Estruturam-se em termos lógicos na forma de redes, mantendo a possibilidade de resgate dos dados, dos processos, das articulações, sem a necessidade de refazê-los. Contam com uma crescente convergência em direção de sistemas integrados.

O uso de tecnologias digitais cotidianamente, e de TICs, em especial, cria novas dimensões para quase todas as atividades humanas: comunicação, trabalho, interações sociais e educação são apenas algumas delas. Estas intervenções com uso das TICs se dão em um contexto amplo, envolvendo pessoas e tecnologias, integradas, um espaço de convergência entre as TICs, as conexões e as pessoas: o ciberespaço (LÉVY, 1999; OLIVEIRA, 2007). Para Lemos, (apud OLIVEIRA, 2007, p. 83), o ciberespaço “é um espaço não físico ou territorial, que se compõe de um conjunto de redes de computadores através das quais todas as informações (sob as suas mais diversas formas) circulam”.

Esta imensa disponibilidade de dados pode dar a impressão de que os problemas relativos ao conhecimento estão resolvidos, mas não é assim. Crítica e reflexão são dimensões humanas, e é preciso analisar os elementos presentes nas conexões do ciberespaço – em especial, presentes em seu principal veículo, a Internet – para verificar se são de boa qualidade e se de fato ajudam na construção dos conhecimentos. Este aspecto é fundamental na educação.

4. 2. TICs na Educação

As instituições escolares não podem permanecer em descompasso com o estágio atual da sociedade, eminentemente tecnológico. Entretanto, isto não quer dizer que as TICs são as grandes soluções prontas para os problemas e dificuldades dos processos educacionais. Nas páginas anteriores, o que se procurou mostrar foi a relevância dos artefatos tecnológicos digitais na sociedade atual. De modo algum, entretanto, se procurou mostrar estes elementos como substitutos das pessoas.

A questão que se coloca, no âmbito da educação, é a de entender a relevância da idéia da produção do conhecimento, inclusive o conhecimento matemático, a partir de um coletivo de seres-humanos-com-tecnologias (BORBA, MALHEIROS e ZULATTO, 2007). De acordo com Borba (2005, p. 302), "as tecnologias oferecem possibilidades que transformam a Educação, acontecendo mesmo em relação às formas de construção do conhecimento". O autor, baseando-se nos resultados de suas pesquisas, escreve que o conhecimento é obtido por partes que se integram, seres humanos e mídias, isto é, por seres humanos e não-humanos. Neste aspecto, é que se deve pensar que papéis prevalecem para professores e alunos nos processos de ensino e aprendizagem. A questão não é da mera inserção das tecnologias nas aulas, mas de planejar esta inserção em conjunto com os mais variados recursos – também vistos como tecnológicos: lápis, papel, compasso, régua, transferidor, esquadro, entre outros – do ponto de vista de estratégias pedagógicas (OLIVEIRA, 2009).

Diversos autores discorrem sobre estas assertivas. Por exemplo, Belloni (2001, pp. 24-25), diz que se é fundamental reconhecer a importância das TICs e a necessidade urgente de criar conhecimentos e mecanismos que a integrem à educação, da mesma forma como é, também, necessário evitar o deslumbramento que leva ao uso indiscriminado da tecnologia com um fim em si, mais por seus aportes ferramentais do que por suas vantagens pedagógicas. Para esta autora, então,

> a integração dessas tecnologias de modo criativo, inteligente e distanciado, no sentido de desenvolver a autonomia e a competência do estudante e do educador enquanto usuário e não como mero receptor. A mediatização do processo de ensino/aprendizagem aproveitando ao máximo as potencialidades comunicacionais e pedagógicos dos recursos técnicos: criação de materiais e estratégias. Metodologias; formação de educadores; produção de conhecimentos (BELLONI, 2001, p. 9).

Para Belloni, ainda, a própria inserção das TICs no ambiente escolar ocorreu, em grande medida, devido à pressão social, já que a escola encontrava-se (e ainda se encontra) em franca defasagem com relação às demandas sociais e à cultura das gerações mais jovens (idem, pp. 17-18).

Os tempos modernos e as novas tecnologias não podem ser vistos como vilões ou substitutos virtuais dos professores. O papel do professor passa por uma redefinição, que o retira da condição impossível de supremo detentor do saber e fonte de transmissão de informações, para colocá-lo diante do desafio da orientação e da mediação dos processos educativos em relação aos estudantes, diante de cenários com diversas tecnologias e amplas fontes de conhecimento além da própria escola. Diante de tantas modificações e dados, é preciso que haja alguém que auxilie o aluno e medie as situações para que ele as analise criticamente, verificando o que é válido e deve ser utilizado e o que pode ser descartado, reconhecendo o que pode ser útil para facilitar a aprendizagem.

O uso das TICs na educação e no ambiente escolar é algo que está acontecendo, mesmo que lentamente, pelo menos em relação aos avanços da sociedade como um todo. Deve ocorrer com responsabilidade e planejamento para que esses recursos não se tornem para o docente só mais alguns objetos nos ambientes escolares, e sim uma maneira de desenvolver competências e habilidades que serão úteis para o cotidiano do discente. O seu uso deve proporcionar uma mudança que vise uma aprendizagem significativa e não o acúmulo de informações.

As TICs começaram a adentrar no ensino e na aprendizagem sem uma real integração às atividades de sala de aula, mas como atividades adicionais. Com certa frequência, como aula de informática, ou numa perspectiva mais inovadora, como projetos extraclasse, desenvolvidos com a orientação de professores de sala de aula e apoiados por professores responsáveis pelos laboratórios de informática. A integração real das mais variadas possibilidades tecnológicas ainda está bem distante da escola, e passa, inclusive, por uma formação continuada de professores e gestores para estas novas realidades.

Toda mudança gera receios e medos. O professor, com esse desequilíbrio, provocado com a redefinição de parte dos recursos tradicionais a partir dos recursos tecnológicos se vê entrando numa zona de insegurança. Entretanto, a adesão do professor é fundamental: para Penteado (2005, p. 285), sem o envolvimento dos docentes, não é possível pensar na inserção de TICs na escola e, sem formação continuada dos mesmos, esse envolvimento não acontece. De igual modo, a autora adverte o uso de TICs exige movimento constante, por parte do professor, para áreas desconhecidas. É preciso atuar numa zona de risco, onde a perda de controle é algo que ocorre constantemente. Além dos problemas técnicos, há as perguntas imprevisíveis dos alunos, que são a parte mais difícil na interação docente/discente (idem, p. 284).

De acordo com Kenski, (2008, p. 43), a relação entre educação e tecnologias é equivalente a uma simbiose. Para que ocorra essa integração, é preciso que conhecimentos, valores, hábitos, atitudes e comportamentos do grupo sejam ensinados e aprendidos, ou seja, que se utilize a educação para ensinar sobre as tecnologias, que estão na base da identidade do grupo, e que se faça uso delas para ensinar as bases da educação.

Segundo Valente (1999, p. 21), mesmo dispondo de uma gama imensa de possibilidades oferecidas pelos novos recursos da informática, depara-se com usos banais dessa tecnologia, indicando uma falta de articulação entre pedagógico e o técnico. Isso significa que, sem o conhecimento técnico, é impossível implantar soluções pedagógicas que aproveitem o potencial das TICs. De igual modo, sem o pedagógico, os recursos técnicos tendem a ser subutilizados ou a ser utilizados sem ganhos significativos para a educação.

4. 3. TICs na Educação Matemática.

O uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática também não é fato recente. Isto porque a visão que aqui se adota é compatível com a de Borba e Penteado (2003) e de Oliveira (2009), que ressaltam que as diversas mídias, desde as mais tradicionais, estão presentes nos processo de ensino e aprendizagem de Matemática. A questão das tecnologias digitais é apenas mais recente, mas corrobora a visão de que, desde que se utilize de interfaces e de ferramentas, a construção do conhecimento matemático pelas pessoas é feita através de um conjunto de atores, de seres humanos com tecnologias (BORBA e PENTEADO, 2003, p.12 e seguintes; OLIVEIRA, 2009, p. 4).

De fato, com relação à Educação Matemática, várias possibilidades são ampliadas com a inserção de tecnologias digitais:

> Quanto à matemática, Ponte e Canavarro (1997) mencionam a possibilidade de ampliar seu aspecto experimental com o uso de tecnologias, de modo a fomentar, entre os alunos, um impulso investigativo característico da atuação dos matemáticos. Para D´Ambrosio (1999) “a tecnologia, entendida como a convergência do saber [ciência] e do fazer [técnica], e a matemática são intrínsecas à busca solidária de sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível” (OLIVEIRA, 2008, p.298).

Esta visão também está expressa nos documentos oficiais, como, por exemplo, na LDB, em seu parágrafo 1 do artigo 36, que indica:

> Ao revelar os conhecimentos matemáticos incorporados em cada tecnologia, tornando-os conteúdos escolares legítimos e valiosos da educação matemática, estaremos contribuindo para que os educandos adquiram o domínio dos fundamentos científicos e tecnológicos que norteiam a produção moderna (BRASIL, 1998).

Ao promover atividades pedagógicas com o uso de TICs, o que se deve pretender á o aprendizado através de ação e comunicação entre alunos e professores, procurando promover autonomia para que o estudante explore e faça descobertas em Matemática. Professores e alunos mudam a forma de fazer matemática e mudam a forma de pensar matematicamente (BORBA, MALHEIROS e ZULATTO, 2007): algumas das visões dessa concepção são tais que alegam que as TICs mudam a própria matemática que se ensina, se faz e se aprende. Além de desempenharem os papéis de recurso de ensino e de aprendizagem, podem tornar-se fontes de renovação para abordar os currículos na educação matemática desde o início da escolarização até a educação continuada.

Entretanto, o uso das tecnologias e processos tecnológicos não pode ter características apenas procedimentais para simples operações, e sim, conduzir a explorações conceituais, permitindo ao aprendiz consolidar seu conhecimento matemático. Em função disso, adota-se aqui a visão de Oliveira (2009), que advoga a necessidade de trabalhar com as TICs sob o ponto de vista das estratégias pedagógicas pensadas pelo professor, sem o que tal trabalho fica comprometido. Para o autor, no âmbito da Educação Matemática:

> os artefatos tecnológicos presentes nas situações didáticas podem ter um caráter mediador, permanecendo a serviço de uma estratégia didática que têm o aprendiz como foco, que busca entender e planejar de acordo com as mais diversas propostas que lhe permitam ampliar a autonomia diante do desafio de aprender (OLIVEIRA, 2009, p.4).

Para Oliveira (2009), o termo *software* didático é apenas figurado, já que tais características não pertencem às TICs em si, mas às pessoas: “não há *software* didático, por si, assim como não há tecnologias que educam” (idem, p. 6).

O autor comenta, também, que não se pode colocar *softwares* em processos de ensino e aprendizagem de Matemática sem crítica e planejamento. Nesta concepção, é importante

> criar estratégias didáticas para os processos de ensino e aprendizagem em Matemática que contenham intervenções com (e através de) tecnologias de informação e comunicação(TICs), criticamente analisadas e aderentes ao um projeto pedagógico que tenha como prioridade a construção do conhecimento pelas pessoas (idem, p.6).

Entretanto, não é o caso de descartar os recursos vistos como tradicionais, ou seja, de pretender uma substituição. É possível integrar estes recursos todos, em função do caráter das estratégias.

> A amplitude desta estratégia permite compreender as chamadas tecnologias “tradicionais” (uso de sólidos, giz e lousa, lápis e papel, régua e compasso etc) como outras abordagens, igualmente válidas, e que podem, em dados momentos, apresentar maior pertinência, de acordo com o cenário, os sujeitos, as disponibilidades de infra-estrutura tecnológica, entre outros elementos (idem, ibidem).

No âmbito da Geometria, é possível utilizar recursos presentes nos chamados Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD). Tais ambientes são programas que permitem várias manipulações e construções relativas às figuras e relações geométricas, o que dificilmente seria possível usando as ferramentas mais tradicionais. Para Amorim (2003, p. 60), a expressão usada para justificar a forma de se trabalhar a Geometria e também propriedades com dinamismo e interatividade usando um *software* “[...] é a chamada Geometria Dinâmica, descrita como a Geometria relacionada aos movimentos de figuras em ambientes computacionais utilizados para o ensino [...]” (AMORIM, 2003, p. 60).

Entre as vantagens dos *softwares* com essas características, uma que se destaca é que eles auxiliam na obtenção de novas representações dos objetos geométricos, o que, de alguma forma, “concretiza” a figura formal (GUIMARÃES, BELFORT e BELLEMAIN, 2003, p. 6).

Os programas interativos destinados ao ensino e aprendizagem da Geometria surgiram na década de 1990, devido às facilidades apresentadas com o aumento da capacidade de memória e velocidade de processamento das informações dos computadores e à popularização do uso *mouse* como interligação entre o usuário e a representação gráfica apresentada no monitor.

Os PCNEF (BRASIL, 1998, p.124) orientam que as atividades envolvendo as transformações de figuras no plano merecem destaque nos terceiro e quarto ciclos, já que permitem desenvolver conceitos geométricos de uma forma significativa. Já indicava, mais de dez anos atrás, o uso de recursos tecnológicos, indicando que “existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras” (idem, ibidem).

Além disso, Gravina, (2001) aponta as vantagens do uso dos Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), dizendo:

> Os ambientes de Geometria Dinâmica também incentivam o espírito de investigação Matemática, sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos do pensamento. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam os resultados de suas ações/operações, conjecturam e testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica (GRAVINA, 2001, pp. 89-90).

Os programas disponíveis no mercado, alguns com mais recursos do ponto de vista das construções geométricas e propriedades, outros nem tanto, geralmente, possibilitam a representação e a construção a partir das propriedades geométricas.

Entre os vários programas existentes, gratuitos ou não, mencionamos o Cabri-Géomètre (BAULAC, BELLEMAIN & LABORDE, 1990), The Geometer Sketchpad (JACKIW, 1992), The Geometric super Supposer (YERUSHALMI & SCHWARTZ, 1993), GEOLOG (HOLLAND, 1993), Euklid (MECHLING, 1994), Thales (KADUNZ & KAUTSCHISCH, 1994), o Geogebra (MARKUS HOHENWARTER, 2002), o Wingeon (RICHARD PARRIS, 2005), o Geoplan (CALEB GATTEGNO) e o Tabulae (UFRJ).

4. 4. O Geogebra

Nesta pesquisa, as intervenções foram levadas a efeito com o uso do *software* Geogebra. Este *software* foi desenvolvido no ano de 2002, pelo austríaco Markus Hohenwarter, professor e pesquisador na área de Informática Aplicada à Educação Matemática da Universidade de Salzburg. O nome é uma composição de geometria e álgebra (GEOmetria e álGEBRA). Segundo Hohenwarter (2007), essa ferramenta reúne o cálculo, a álgebra e a geometria. Tem, por um lado, condições de realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas com funções que podem ser modificadas; por outro lado, equações podem ser representadas algebricamente e geometricamente, uma vez que também possui sistema de coordenadas cartesianas. Segundo o autor mencionado, com isso, é possível manipular variáveis relacionadas a números, a vetores e a pontos. Quanto ao cálculo, propriamente dito, possibilita obter funções diferenciais e integrais. Outra vantagem (comercial) é ser um *software* livre, gratuito, de fácil uso e muito intuitivo. Permite fazer o que um *software* exclusivo de geometria dinâmica faz. Ressalta-se que é um programa que vai além da geometria dinâmica e é classificado como um *software* de matemática dinâmica. Em particular, se pode constatar o seguinte fato: é que ele mostra tanto a representação geométrica, como um *software* de geometria dinâmica, quanto mostra a representação algébrica. Apresenta as equações de retas, de cônicas e qualquer objeto que esteja em sua janela de visualização. Dá a possibilidade, pelo uso de seus recursos, de explorar diversos conceitos, desde os mais simples até os mais complexos.

Segundo Hohenwarter (2007), o Geogebra disponibiliza "áreas de trabalho" chamadas de janelas, sendo:

- Janela de geometria, onde são mostradas as construções geométricas. Com o *mouse,* é possível acessar recursos necessários para a construção pretendida, além de poder arrastar as figuras para verificação de propriedades afins existentes nos objetos;
- Janela de entrada, onde se inserem equações;
- Janela algébrica, onde são mostrados o nome, o comprimento, a área, entre outros elementos das construções realizadas na janela geométrica. Permite a plotagem de gráficos de funções determinadas a partir de sua expressão algébrica.

Em particular, a janela algébrica dispõe de quadros para a apresentação de objetos:

- Livres (independentes): mostra cada ponto já nomeado e suas respectivas coordenadas cartesianas;
- Dependentes: mostra os pontos dependentes nomeados e suas coordenadas, mostra o comprimento de segmentos, áreas de polígonos,

medidas de ângulos, equações de retas, equações das cônicas construídas na janela geométrica.

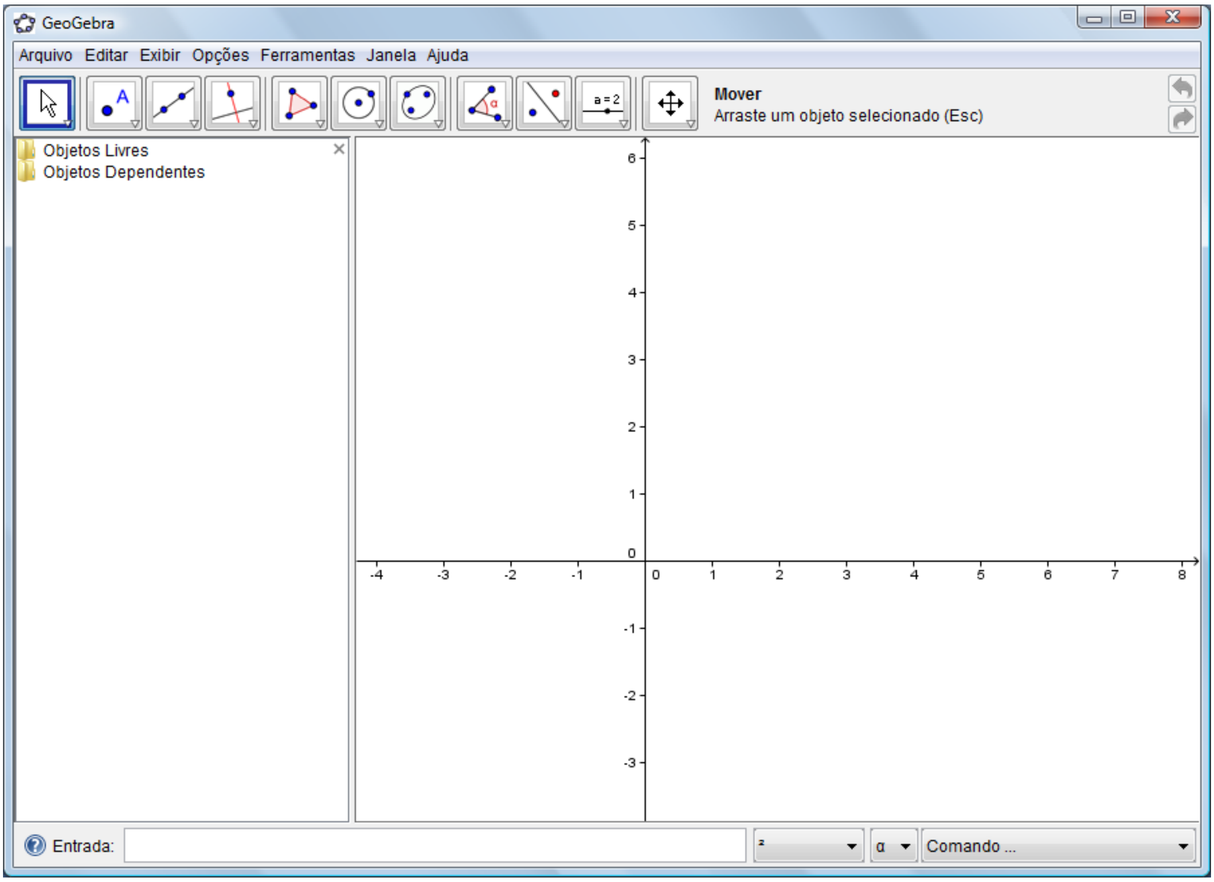


Figura 40 – Tela inicial do *software* Geogebra

Ainda para Hohenwarter (2007), o Geogebra pode ser utilizado em sala de aula nas escolas que reúnem geometria, álgebra e cálculo. Pode fazer as construções que se queira e alterá-las quantas vezes se deseje. Por necessidade ou por preferência, podem-se inserir diretamente as equações e as coordenadas. Oferece recursos para tratar das mudanças para os números, para os vetores e para os pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos como raízes ou extremos. Como essas duas frentes são oferecidas por esse *software*, pode-se, então, afirmar que uma expressão na janela algébrica corresponde a um objeto na janela geométrica e vice-versa.

A figura 41 mostra, na janela algébrica, os objetos livres (pontos A e B e suas coordenadas cartesianas) e os objetos dependentes (equação da circunferência) e, na janela geométrica, a circunferência (objeto independente), com origem no ponto

A(1, 2) passando pelo ponto B(3, 1). É possível movimentar o objeto independente, com isso a representação na janela algébrica indica novos parâmetros.

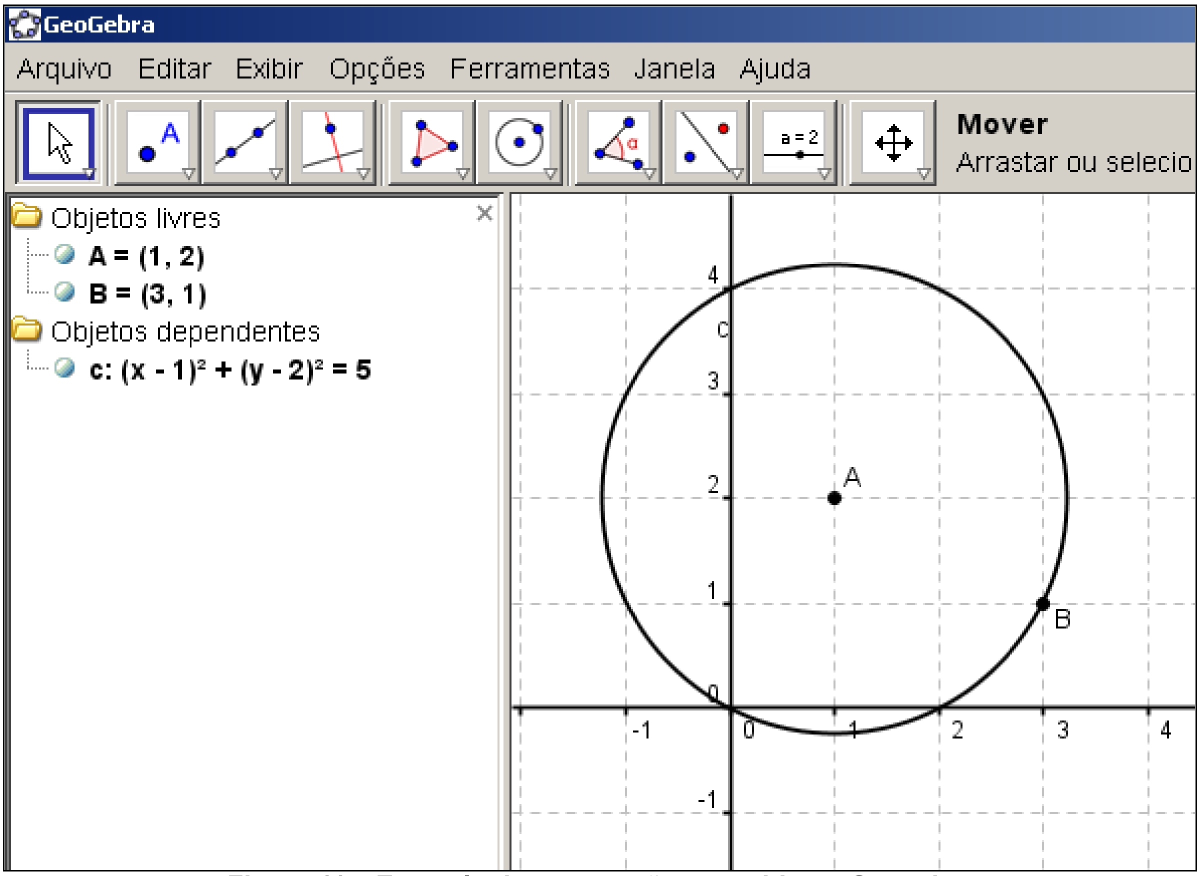


Figura 41 – Exemplo de construção no ambiente Geogebra

Na figura 42, a mesma equação é exposta em objetos livres, embora dependa da representação na janela geométrica. A circunferência na janela geométrica depende da equação indicada na janela de entrada. Porém é possível movimentar essa circunferência de modo que sua equação indique novos parâmetros.

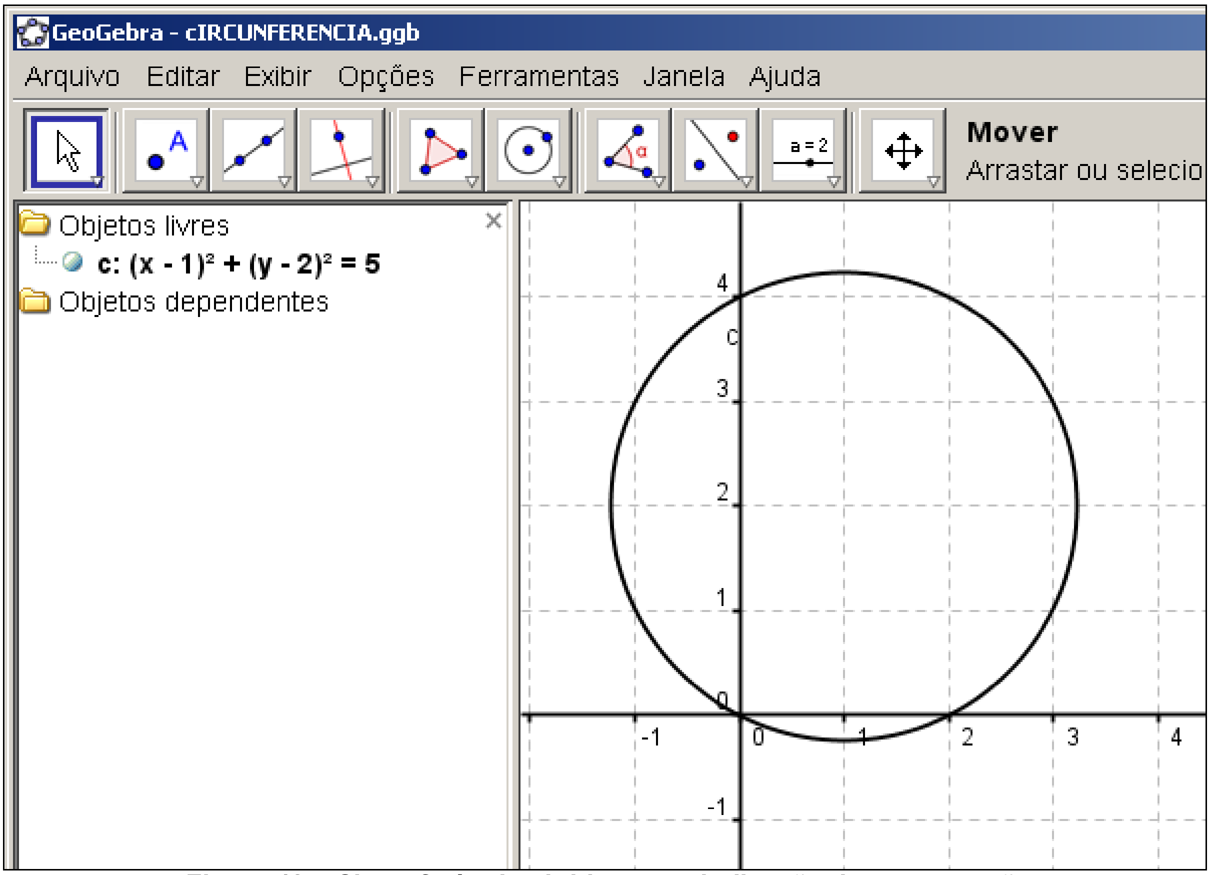


Figura 42 – Circunferência obtida com a indicação da sua equação

As três figuras seguintes indicam opções de escolha para as construções solicitadas na sequência de atividades proposta.

Figura 43 – Círculo definido pelo centro e um de seus pontos

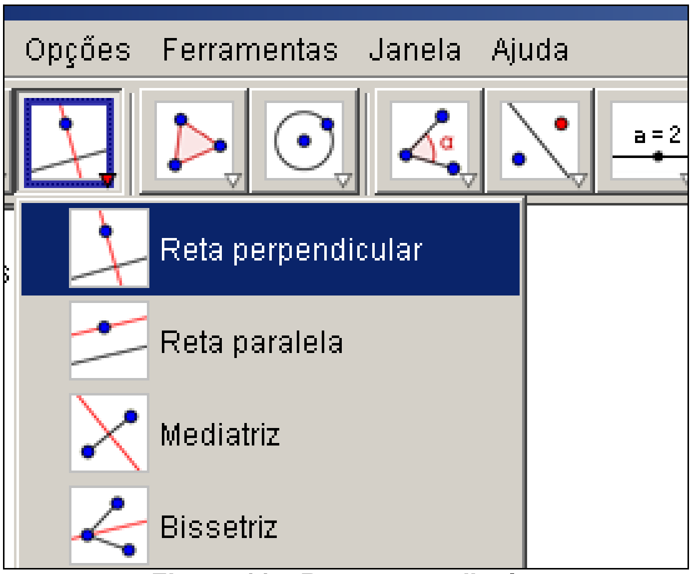


Figura 44 – Reta perpendicular

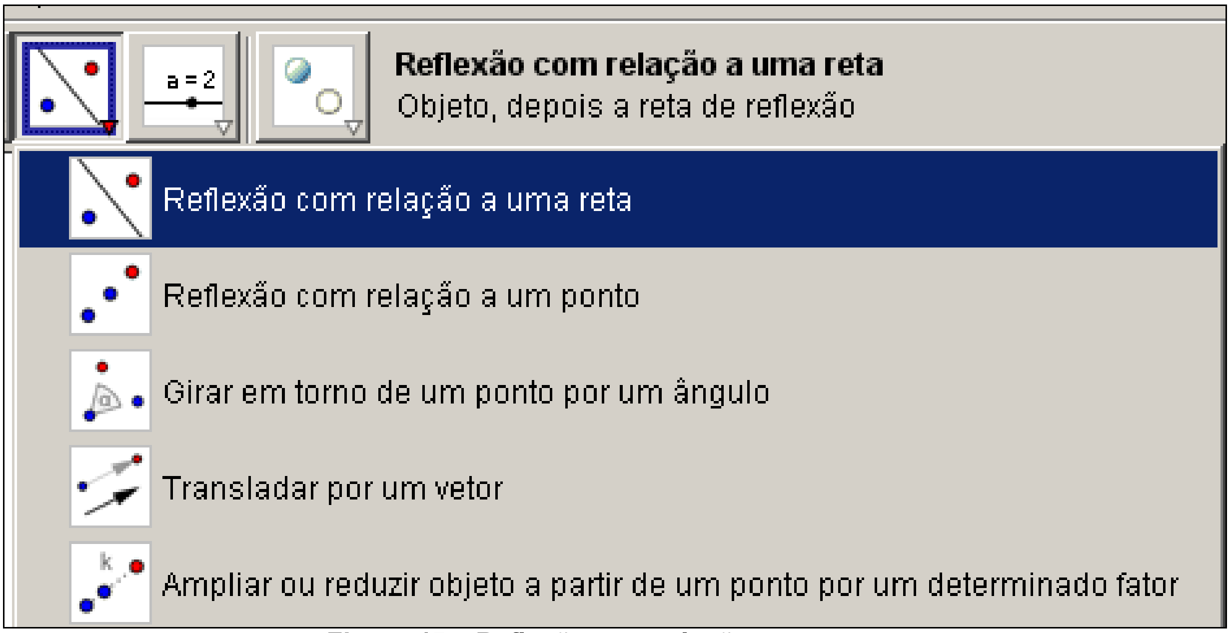


Figura 45 – Reflexão com relação a uma reta

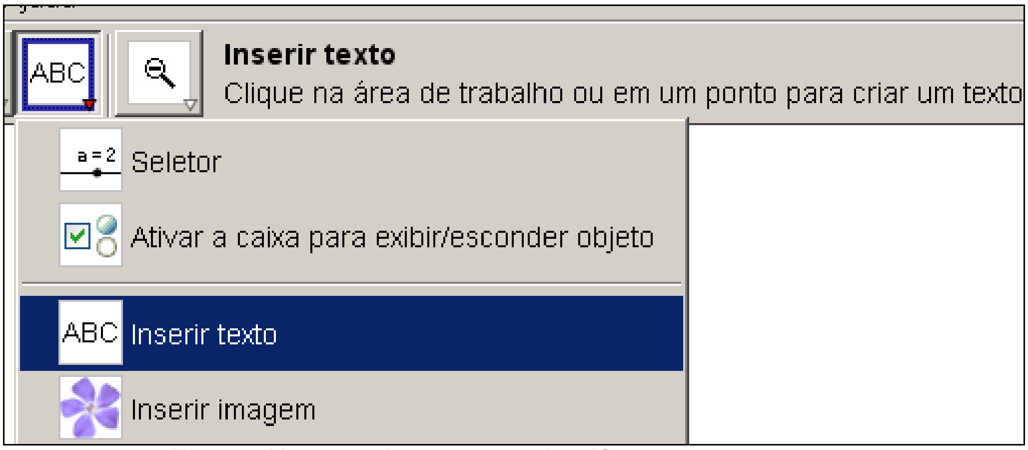


Figura 46 – Inserir texto para justificar as construções

Atividade III

- Crie quatro retas perpendiculares à reta a passando por A, B, C e D, respectivamente.
- Represente quatro circunferências com seus centros em a, passando por A, B, C e D, respectivamente.
- Identifique os pontos de intersecção da reta com as circunferências. Sendo: A e F em uma circunferância, B e G em outra circunferência, C e H em outra circunferência e, D e I na outra circunferência.

Agora você pode obter o polígono FGHI.

Chame de J, K, L, M aos pontos de intersecção das retas perpendiculares com a reta a. Agora, meça os segmentos AJ e JF, BK e KG, DL e LI, CM e MH.

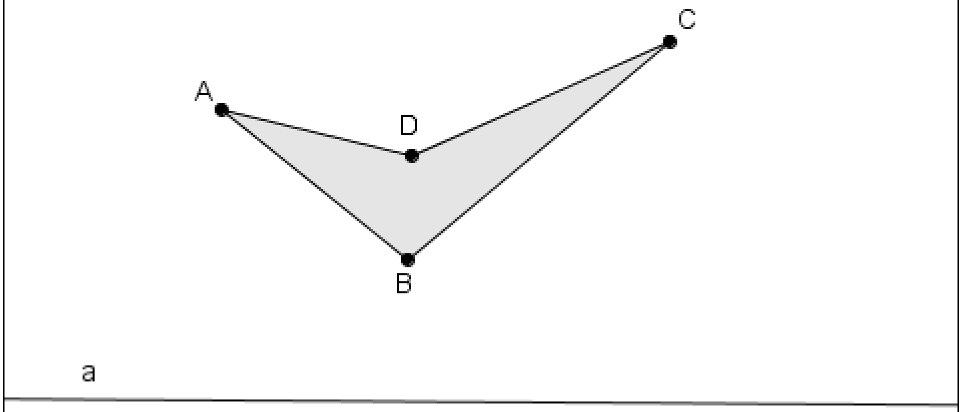


Figura 47 – Roteiro para construir a isométrica de ABCD

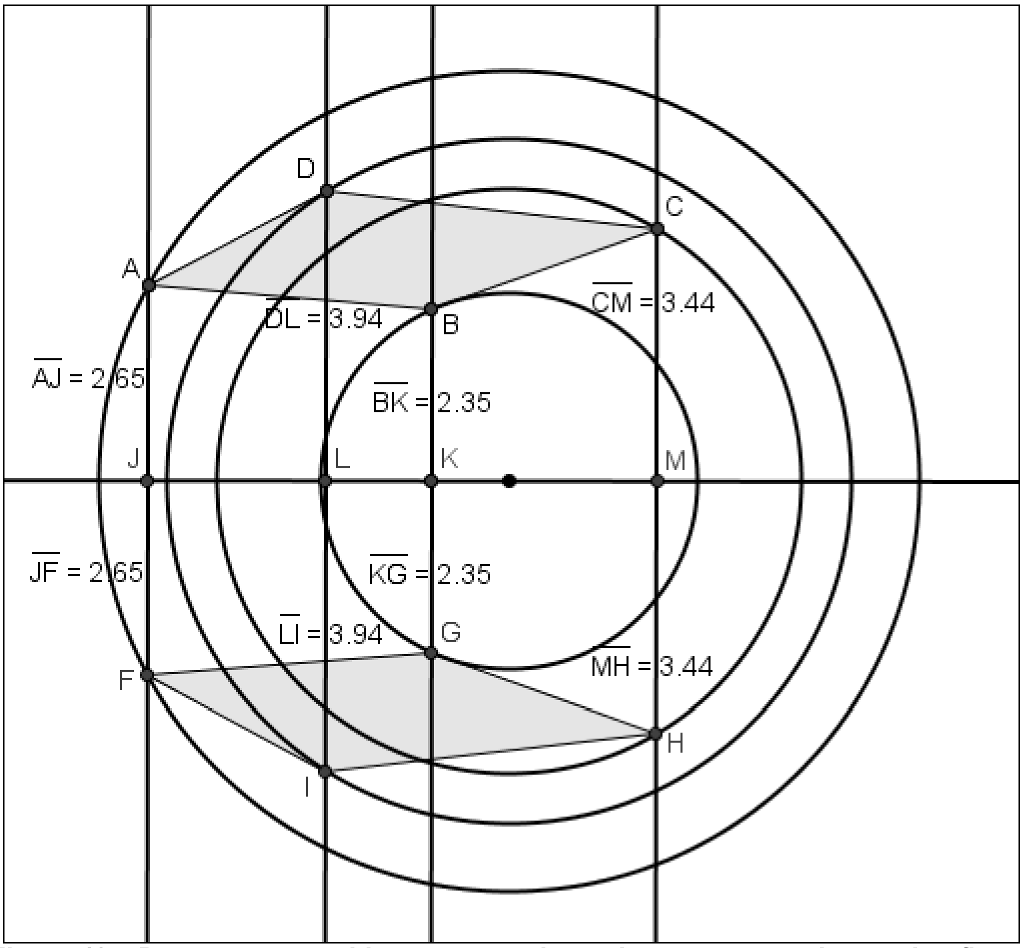


Figura 48 – Protocolo resolvido por e uma dupla de alunos, sem despoluir a figura

CAPÍTULO CINCO

ASPECTOS METODOLÓGICOS

5.1 Do Ambiente Estático ao Ambiente Dinâmico

No ano escolar dos sujeitos desta pesquisa, 5ª série/6º ano, os alunos ainda estão se familiarizando com a existência de instrumentos como compasso, transferidor, esquadros, ou seja, praticamente apenas iniciando a usar e manipular. As propostas oficiais brasileiras de ensino para o 1º e 2º ciclos não enfatizam o uso de qualquer instrumento quando abordam as transformações, pelo menos não diretamente. Os livros que apresentam as isometrias e as homotetias nas séries iniciais indicam, em geral, que sejam trabalhadas com a dobradura de folhas de papel e em malhas quadriculadas, havendo só um trabalho de manipulação em relação aos materiais. Portanto, o uso de instrumentos tecnológicos acaba ficando para o 3º ciclo do Ensino Fundamental. É preciso lembrar que, no âmbito desta pesquisa, entende-se por tecnologias todos os tipos de instrumentos que podem ser usados em uma estratégia pedagógica para subsidiar o processo de ensino e aprendizagem, conforme indicam Oliveira (2009) e Borba e Penteado (2003).

Tome-se como exemplo aqui a obra “Experiências Matemáticas”, da 5ª à 8ª séries (1998), a qual propõe um trabalho com a simetria axial manipulando materiais como espelhos e papéis transparentes e transitando de forma gradativa da manipulação de materiais concretos ao uso de régua e compasso. Quando o aluno manipula espelhos e papéis transparentes já pode começar a observar algumas propriedades e conceituar a simetria em relação a uma reta. Em outro momento, usando régua e compasso nas construções tem condições de transpor os obstáculos com os quais teve contato, como a posição do eixo de simetria e as equidistâncias em relação ao eixo. Ocorre também o uso de outros instrumentos, esquadros e transferidores, que auxiliam na obtenção de retas perpendiculares.

Esta investigação se vale, portanto, dos postulados de Oliveira (2009), relativos às *estratégias pedagógicas com uso de tecnologias* na Educação

Matemática. De acordo com esta proposta, as TICs não são mais importantes ou produzem resultados melhores, por elas mesmas, ou apenas por se tratarem de tecnologias mais atuais, nos processos de ensino e aprendizagem. Para este autor, assim como para Kenski (2007), cabe ao professor, no papel de orientador, selecionar as tecnologias mais adequadas para cada momento de sua abordagem didática. Semelhantes estratégias buscam mobilizar o interesse dos estudantes, incentivar a autonomia na aprendizagem e valorizar o papel do professor, em cenários de interações intensivas e com as tecnologias como mediadoras. Por isso, todas as etapas deste estudo têm igual relevância, seja aquela em que foram usados lápis, papel, régua e compasso, como a outra, que se valeu do *software* Geogebra. Na etapa do "ambiente estático", com "tecnologias tradicionais", considerou-se a importância do manuseio de instrumentos de desenho para construções com a finalidade de apoiar uma melhor compreensão de conceitos geométricos básicos. Nesta investigação, o avanço desde este cenário para o de natureza dinâmica, com tecnologias digitais, foi planejado para ocorrer a partir de uma abordagem reconstrutiva, verificando os erros cometidos no processo e utilizando-os como elementos que permitiriam entender a intenção do aluno e seu nível de compreensão do tema matemático em estudo (PERRENOUD, 2000; ALMOULOUD, 2007; BROUSSEAU, 2001). A partir daí, no ambiente dinâmico, as experimentações poderiam ocorrer de forma mais farta, com o lastro teórico desenvolvido ou recuperado pela etapa anterior, de forma a procurar incorporar as tecnologias digitais na prática dos alunos (BORBA e PENTEADO, 2003; 2008).

Esta estratégia com uso das tecnologias pode ser mediada pelo docente de modo que o estudante possa explorar propriedades e relações geométricas indutivamente, formular, comprovar, justificar e, ainda, investigar processos matemáticos com as regularidades, formulações, testes, justificativas, provas, conjecturas e validação de suas provas – com isso as atividades podem ter um caráter investigativo (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2003, p. 21). O professor e o aluno podem compartilhar uma dimensão instrumental quando a aprendizagem ocorre por experimento.

Desta forma, o uso pode revelar um autêntico ambiente de pesquisa, podendo compreender a sequência de como se aborda algum conteúdo e os resultados a serem obtidos. Um resultado perceptível ocorre quando o aluno se vê protagonista atuante da sua aprendizagem, ao construir qualquer objeto de sua investigação e fazer suas próprias descobertas, pois neste tipo de abordagem, não apenas o professor tem a tarefa de ensinar, mas a mesma é compartilhada entre todas as pessoas (OLIVEIRA, 2009).

5.2 Sujeitos e cenário da pesquisa

Os sujeitos da pesquisa são alunos de uma classe de sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual localizada na Grande São Paulo, na cidade de Guarulhos. No total, entre as diversas sessões realizadas, foram 30 estudantes.

Esta escola fica em uma região periférica na qual há problemas graves de infra-estrutura urbana, como deficiência na iluminação pública, falta de água potável, e de tratamento de esgoto e riscos à segurança. O prédio que abriga a escola tem 16 anos de construção e uso, é composto por dezenas de salas que sofrem constantemente com vandalismo e furto. Dessas, 26 são salas de aula que funcionam em três períodos para alunos das séries iniciais até o último ano do ensino médio do ensino regular e da educação para jovens e adultos (EJA). Tem atualmente cerca de 3200 alunos matriculados. Tais estudantes são, na sua maioria, moradores do bairro e das favelas que o circundam.

5.3 Metodologia

5.3.1 Pesquisa qualitativa

Nesta investigação, foi feita a opção pela pesquisa qualitativa, na modalidade de análise de conteúdo. Isto porque o delineamento deste trabalho encontra proximidades com a descrição de Oliveira (2009, p.27) sobre esta abordagem:

> As questões que surgiam e que causavam o impulso em direção da busca de sentidos e elucidações tinham caráter particular, não podiam ser generalizadas em torno de quantidades sempre aplicáveis e de percentuais infalíveis, pedindo, antes, descrições que apontassem na busca das respostas direcionadas pelo problema e pelas hipóteses substantivas.

Também está sendo considerada, sobre a pesquisa qualitativa, a opinião de a Borba (2004, p.3), que assevera:

> Dessa forma, quando falo de pesquisa qualitativa, estou falando de uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento. Como já dizia Paulo Freire: a escolha da pergunta de pesquisa já é em si um ato embebido de subjetividade.

Entretanto, não serão desconsiderados os dados de caráter quantitativo que surgiram no decorrer da investigação. Neste aspecto, para Oliveira (2007, p.28), “pode-se dizer que as abordagens, quantitativa e qualitativa, tendem à complementaridade”. Da mesma forma, é possível afirmar que “o conjunto de dados quantitativos e qualitativos (...) não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia” (MINAYO, 1994 apud OLIVEIRA, 2007, p.28).

Para Ludke e André (1986, p.12), o foco deste tipo de pesquisas é voltado mais ao processo do que ao produto. Para as autoras, “o interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas”.

A análise dos dados foi realizada em conjunto com o movimento de coleta dos mesmos, descrito na próxima seção. Esta opção é explicada por Oliveira (2007, p. 34), ao asseverar que

> Apesar de ser mais sistemática e formal após a coleta de dados, o trabalho de análise permeia todo o estudo, o que, em uma abordagem qualitativa, é extremamente importante, já que o objeto, as hipóteses, as categorias não permanecem engessadas, mas submetem-se às variações constantes em quaisquer elementos presentes no tecido social em foco. Da mesma forma, Bogdan e Bliken lembram que a tarefa de análise pode ser concomitante em relação à coleta de dados, sendo esta a abordagem mais frequentemente utilizada pelos pesquisadores qualitativos.

Esclarecidas as opções metodológicas, em termos teóricos, resta explicitar as fases e instrumentos que foram usados para a coleta e análise de dados, de forma consolidada.

5.3.2 Fases e instrumentos

O presente trabalho ocorreu em duas fases. Na primeira, os sujeitos da pesquisa foram submetidos a um instrumento[1] que não previa o uso de um ambiente de geometria dinâmica (AGD) para resolução de questões relativas à simetria axial. Com sequências de atividades elaboradas e propostas, pretendeu-se recolher subsídios relativos ao processo de construção do conhecimento sobre o tema por parte dos alunos, bem como as estratégias relativas ao aproveitamento dos erros em uma abordagem reconstrutiva (PERRENOUD, 2000).

Na teoria das situações didáticas, Brousseau (1987) traz uma nova significação relativa ao erro, que considera que os conhecimentos construídos pelos alunos são locais, por isso podem, em algum momento, gerar dificuldades ou erros quanto se constituírem ferramentas para novos conhecimentos. Com essa consideração o autor, baseando-se em Bachelard (2003), introduz a noção de obstáculo epistemológico, tentando olhar os erros de outra maneira, buscando compreendê-los e explicitá-los como integrantes do processo de aprendizagem tendo suas influências e consequências.

Para Almouloud (2007, p. 131), em uma concepção construtivista, o erro é fundamental na aprendizagem. Há situações, inclusive, em que o erro é necessário à aprendizagem, pois revela um saber em constituição. O autor menciona que pesquisas nesse sentido indicam que o erro respalda-se na noção de obstáculos, desenvolvida por Bachelard (2003) e na teoria de equilibração de Piaget (apud Oliveira, 2007).

Em relação à aprendizagem pretendida, e considerando o uso reconstrutivo do erro (PERRENOUD, 2000, p. 30), aprender não é tão-somente memorizar, absorver informações, e sim reestruturar as condições de compreensão do mundo. Essa reestruturação só ocorre com um trabalho cognitivo representativo.

---

[1] Ver Anexo 1, p.142.

O autor afirma que uma situação-problema representativa é aquela que transpõe obstáculos em virtude de uma aprendizagem nova. Astolfi (1997) propõe que o erro não deve ser considerado apenas por ele mesmo, mas como um meio para ensinar, à medida que aponta como o aprendiz pensa. O pesquisador tem, inicialmente, que “valorizar” o erro como etapa do investimento cognitivo de compreensão, não se limitar a consolidá-lo ou simplesmente corrigi-lo, para que aprendiz consiga percebê-lo, identificar sua origem e transpor o obstáculo que gerou o mesmo.

O erro, no processo de aprendizagem, em momento algum pode ser desconsiderado:

> ... quando se considera o processo, ignorar o “erro” é supor que se pode acertar sempre ‘na primeira vez’; é eliminá-lo como parte, às vezes inevitável, da construção de um conhecimento, seja de crianças, seja de adultos. Como processo, ‘errar’ é construtivo (MACEDO, 1997, p. 29).

Se o erro de aprendizagem ocorrer, não deve receber punição. É preciso reconhecer que (e como) o aprendiz mobilizou conhecimentos anteriores, agiu sobre esses, aplicou algum conceito, que julgava ser o correto, até chegar ao resultado. Tem-se que investigar o que o levou a esse resultado e se conceitos precisam ser revistos. É importante entender que o erro integra o processo que constitui o acerto, ou seja, integra a construção da aprendizagem.

Por este ponto de vista, o erro tem sua importância tanto quanto o acerto. Há necessidade de uma nova frente em avaliar resultados de uma atividade matemática. Para Pinto (2000), essa nova frente tem seu início quando o educador passa a refletir sobre o que significam os erros e os acertos dos alunos, preocupando-se em compreender os diferentes processos que cada aluno utiliza para a obtenção dos conhecimentos quando agem diante os resultados obtidos, e busca, assim, a regulação das aprendizagens (PINTO, 2000, p.123).

Na segunda etapa, então, os mesmos estudantes trabalharam com outro instrumento que foi proporcionado à resolução em um AGD, o Geogebra. Este instrumento foi preparado em função dos erros encontrados na primeira abordagem. Em conjunto com o instrumento anterior, o que se pretende é verificar de que maneira o conhecimento é consolidado pelos estudantes, podendo comparar os dois momentos, ainda que análises relativas aos erros e seu aproveitamento em um momento seguinte tenham lugar. Assim, pode-se afirmar que as categorias de análise são os erros cometidos pelos estudantes na consecução das atividades e sua reconstrução, na consolidação da aprendizagem, dentro de uma estratégia didática com uso de tecnologias.

CAPÍTULO SEIS

COLETA, ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

6.1 Teoria das Situações

Para verificar quais conhecimentos seriam mobilizados pelos estudantes nesta investigação, e também, quais seriam as potenciais dificuldades de aprendizagem existentes, foi elaborado o instrumento constante do Anexo 1, como parte da metodologia utilizada nesta pesquisa.

O instrumento mencionado tem como cerne a proposição de atividades relativas às transformações isométricas, mais especificamente ligadas à simetria axial. Para análise das respostas fornecidas pelos estudantes, bem como de suas características do ponto de vista pedagógico, elegeu-se, em adição às propostas teóricas de Perrenoud (2000) e de Oliveira (2009), a Teoria das Situações Didáticas.

A Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau (1987), foi baseada no princípio de que cada conhecimento ou saber pode ser obtido por uma situação, entendida como uma ação entre duas ou mais pessoas. Para que essas situações tenham solução há necessidade que os alunos mobilizem o conhecimento inerente. Assim, o professor não antecipa a transmissão do conhecimento ou correções (se existirem) até que os alunos consigam chegar à prova e a validar. Para o autor supramencionado, o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana.

O objetivo fulcral da teoria das situações é a situação didática, definida como

> o conjunto de interações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978 apud ALMOULOUD, 2007, p. 33).

Ainda de acordo com Almouloud (2007), no âmbito das situações didáticas, é importante considerar as situações adidáticas, nas quais a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi engendrada pelo professor para proporcionar ao aluno condições favoráveis à apropriação do novo saber que se intenciona ensinar.

As situações adidáticas se caracterizam:

- Pela escolha do problema matemático que possa fazer o aluno ter iniciativa própria para agir, falar, refletir e evoluir; com isso ele tem possibilidades de adquirir novos conhecimentos que sejam completamente justificados pela lógica interna da situação e ainda que possam ser construídos sem recorrer às razões didáticas;
- Pelo professor que assume personagem de mediador, criando condições para o aluno ser o responsável pela construção de seus conhecimentos a partir do que a ele foi proposto.

Uma situação didática é caracterizada pelo *milieu* (meio), o qual é organizado a partir das escolhas das *varáveis didáticas*, que são aquelas que estão à disposição do professor e são capazes, conforme as mudanças de valores, de provocar modificações nas estratégias.

Assim, o objetivo dessa teoria é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, que constantemente levam o aluno à modificação de um conjunto de comportamentos. Essa modificação se dá pela obtenção de certo conjunto de conhecimentos, da existência de uma aprendizagem significativa.

Na teoria de Brousseau (1987), o processo de aprendizagem ocorre conforme quatro fases distintas, contudo interligadas, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o mesmo. Essas fases são:

a) **Ação:** a melhor solução a um problema colocado é o conhecimento visado, de forma que os aprendizes possam agir sobre ela, que não seja única e puramente experimental e permita que os estudantes tenham condições para ‘julgar’ o resultado, ou seja, tomar decisões, colocando seus saberes em prática para resolver o que lhes foi proposto. Nessa fase, é adquirido um conhecimento não formulado;

b) **Formulação:** eles (os aprendizes) devem entender o modelo e estratégias usadas. Precisam formular, de forma verbal e/ou escrita, transformando o conhecimento implícito em conhecimento explícito;

c) **Validação:** as estratégias são demonstradas para seus pares, pois a validação empírica realizada nas fases anteriores não é suficiente. É preciso justificar porque o modelo criado é válido, bem como sua pertinência, uma vez que os estudantes podem solicitar explicações complementares ou refutar as que não compreendem ou as que discordam;

d) **Institucionalização:** essa fase está a cargo do professor e deve ocorrer no momento correto. Se ocorrer muito cedo, a construção do significado é prejudicada, gerando uma aprendizagem inadequada e produzindo dificuldades para o professor e para os aprendizes; se ocorrer tardiamente pode reforçar interpretações inexatas, atrasar e dificultar a aprendizagem. Nesse momento, no qual aparece o que foi validado anteriormente pelos aprendizes, o professor fixa convencionalmente e explicitadamente o estatuto cognitivo do saber.

A primeira etapa do experimento apresenta uma sequência de atividades que tratam do tema abordado, a simetria axial, em ambiente estático, com ferramentas convencionais. Procura-se identificar o que os alunos conhecem sobre esse tipo de isometria e também sobre o método de construção usando a régua, compasso e esquadros. Esse método de construção não aparece explicitamente nos currículos e livros do 1º e 2º ciclos da escola básica. Essa indicação é colocada a partir do 3º ciclo (5ª e 6ª séries), justamente aquele dos sujeitos desta pesquisa.

Na outra etapa do experimento, a sequência de atividades foi elaborada para ser resolvida pelos estudantes com intermediação de tecnologias digitais, mais especificamente com o *software* de geometria dinâmica Geogebra. Esperou-se com isso, de acordo com o que foi enunciado aqui anteriormente, que os sujeitos explorassem os recursos oferecidos com construções, medições, testes, verificações, conjecturas e validações, podendo, com isso, ter as possibilidades de aprendizagem facilitadas por esses meios. As dificuldades, evidenciadas da outra etapa, são abordadas novamente e tratadas na lógica do ambiente computacional, o que permitiu, também, comparar os novos resultados com os anteriores.

6.2 Fase um: instrumento estático

Essa sequência de atividades foi aplicada em uma sessão de duas horas-aula, com o tempo de 100 minutos, tendo como espaço físico o próprio ambiente sala de aula dos alunos.

Foi permitido o uso de recursos como lápis, régua e compasso; ainda, dobrar a folha, provocando um vinco sobre o eixo de simetria, já que se trata de reflexão de figuras sobre uma reta.

Essa turma é composta por 40 alunos. Em virtude da não frequência de alguns, desse experimento participaram 30 alunos, em um total de 16 fichas, sendo que 14 foram respondidas em dupla e 2 foram respondidas individualmente.

Não foi estipulado previamente um tempo para resolução, porém foi anotado, em minutos, o tempo gasto para responder cada ficha. Da ficha que consumiu o menor tempo até a ficha que consumiu o maior houve uma diferença considerável: os alunos gastaram desde um tempo mínimo de 15 minutos até um tempo máximo de 67 minutos.

6.2.1 Primeira questão

A ocorrência dos erros, bem como a maneira como são analisadas as resoluções dos estudantes, merecem uma explicação, ao mesmo tempo em que se completa à teoria de referência. É o que segue nos próximos parágrafos, e refere-se tanto a esta questão quanto às demais.

A ficha de atividades começava com a seguinte proposta: *Imagine como funciona um espelho em sua casa. Existe uma relação entre você (sua imagem real) e a imagem refletida no espelho. Qual é esta relação? Pense um pouco e depois tente resolver as questões seguintes.*

A primeira questão da atividade trazia o seguinte enunciado**:** *se a 'reta' representada na vertical fosse um espelho, onde ficaria a imagem de cada ponto? Represente essas imagens, chamando a imagem de A de A' e a imagem de B de B'.*

Esse experimento teve como objetivo obter dois pontos com a transformação reflexão em relação a uma semirreta. Esperava-se que os pontos A e B tivessem suas respectivas imagens A' e B' do outro lado da reta e também mantivessem as distâncias em relação ao ponto dado e o eixo.

Deviam ser mobilizados conhecimentos sobre reflexão, pois nas séries iniciais os sujeitos já haviam estudado esses conceitos.

Para chegar aos resultados pretendidos era esperado, já que foi permitido, usar o compasso, os esquadros ou a régua. Há também a possibilidade da estratégia de dobrar a folha provocando um vinco que coincide com o eixo para copiar os pontos dados.

Poderiam surgir dificuldades na leitura e interpretação do enunciado e na coordenação para fixar os instrumentos na posição correta.

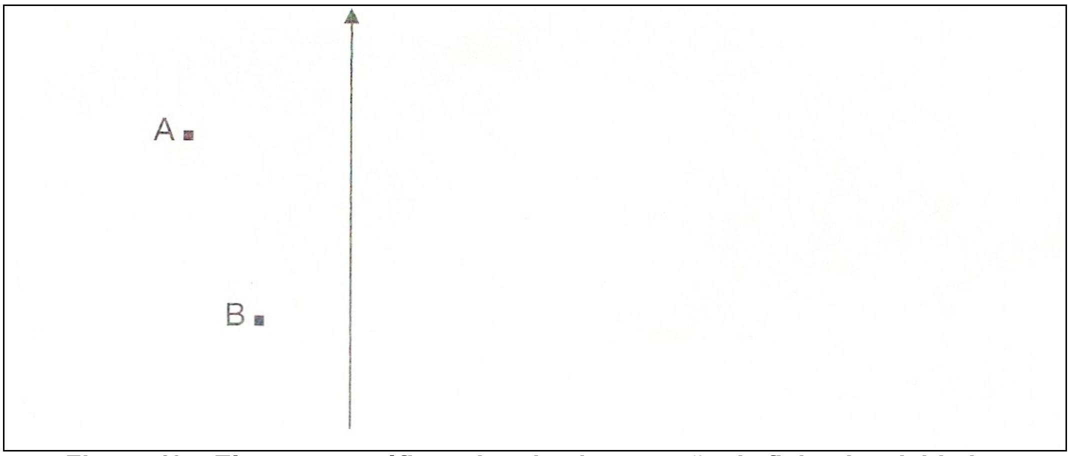


Figura 49 – Elementos gráficos da primeira questão da ficha de atividades

Nessa questão as variáveis didáticas envolvidas são a posição do eixo, o eixo comparado com um espelho, a posição da figura na folha, a distância entre o ponto dado e o eixo.

Alguns alunos perguntavam para os outros se as distâncias entre eles e um espelho e entre o espelho e sua imagem eram iguais e, se eram, como poderiam ser medidas. Intuitivamente chegaram à conclusão afirmando que seria impossível medir a distância do espelho à imagem, mas as distâncias são mesmo iguais. Estes alunos resolveram a questão corretamente. Já outros alunos afirmaram que, se não tem como medir, não se pode afirmar que são iguais, e, se não são iguais, as figuras não deveriam ter as mesmas distâncias da reta. Destes, vários apresentaram erros na distância.

Para chegar às respostas, em cinco fichas os alunos recorreram ao uso do compasso para transportar (refletir) pontos do outro lado do eixo; nove fichas foram respondidas usando apenas o lápis, recorrendo apenas à ideia da imagem em um espelho e em duas fichas não ocorreu nenhum resultado relacionado à reflexão. Em três fichas os alunos refletiram até a letra B que nomeava um dos pontos, pois entenderam a letra como sendo uma figura.

Para esta análise, foram considerados critérios para classificar os resultados, em *acerto total* (acertar tanto na distância quanto na reflexão dos pontos); *acerto parcial* (acertar na reflexão, mas errar na distância entre os pontos ou dos pontos em relação ao eixo de simetria), ou, ainda, *erro total* (errar tanto na reflexão quanto na distância).

Com base nestes critérios, foram apurados os resultados mostrados no Gráfico 1.

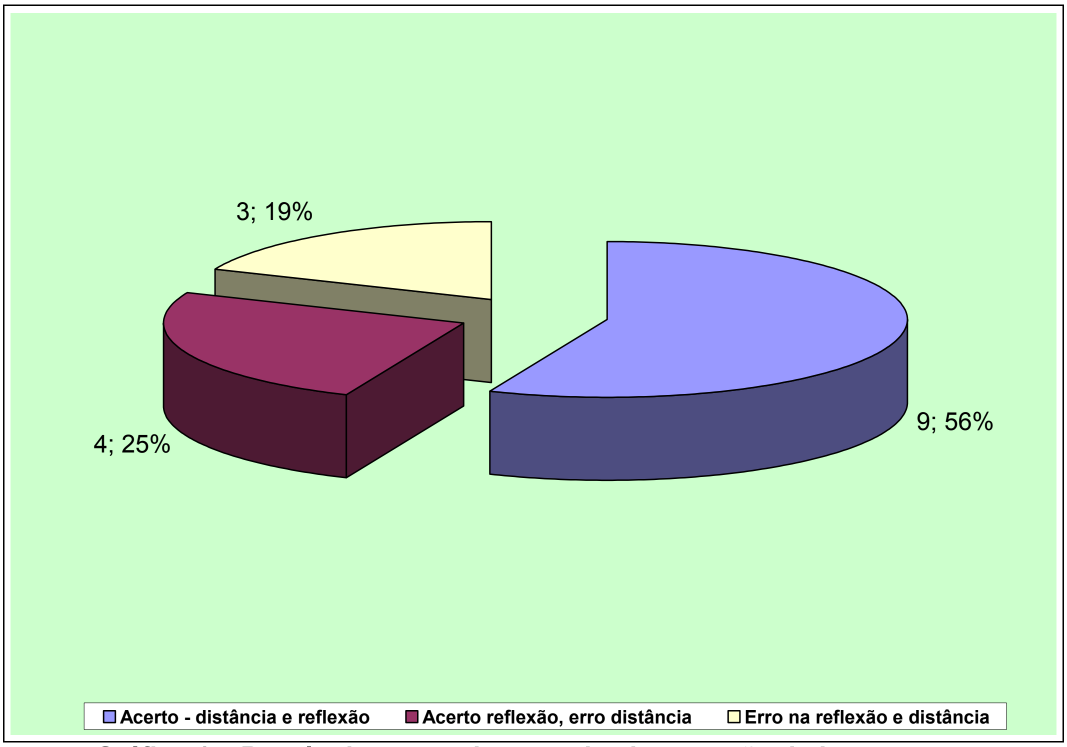


Gráfico 1 – Resultados apurados na primeira questão do instrumento

Para maior clareza dos critérios considerados, as figuras seguintes trazem exemplos de cada uma das categorias locais de análise.

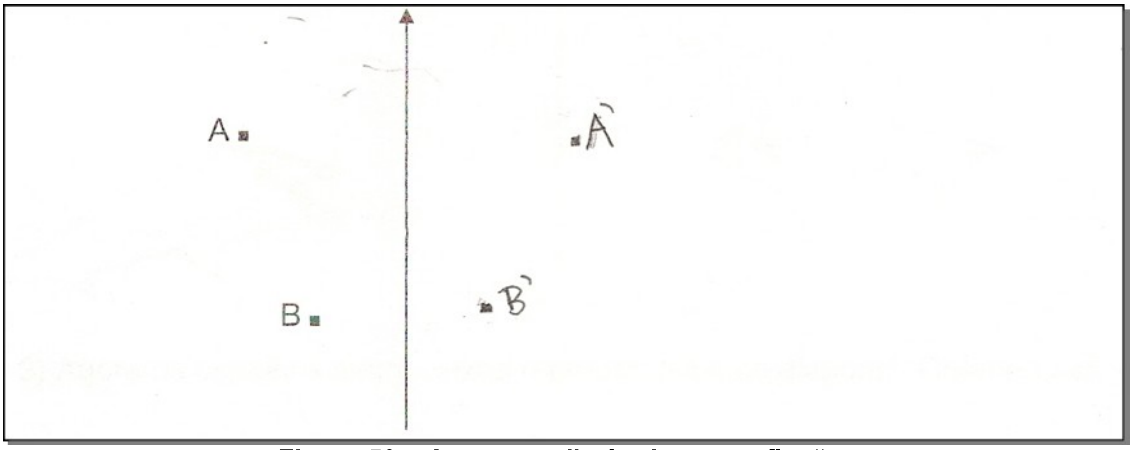


Figura 50 – Acerto na distância e na reflexão

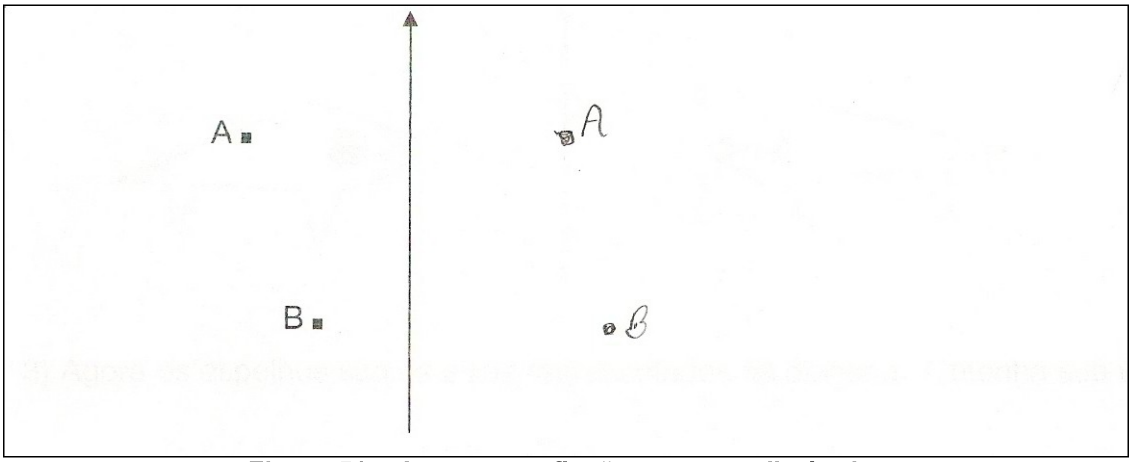


Figura 51 – Acerto na reflexão e erro na distância

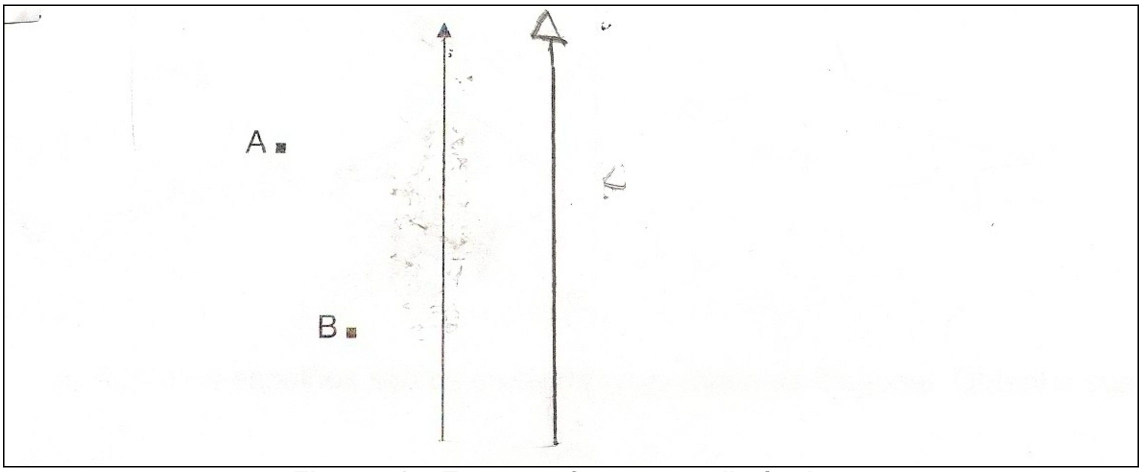


Figura 52 – Erro na reflexão e na distância

Essa atividade foi colocada destacando a possibilidade de representar, por reflexão, os pontos do outro lado da reta. Mas, não foi proposto nenhum objetivo de ensino, de acordo com os critérios adotados nesta pesquisa. De acordo com (BROUSSEAU, 1986, apud ALMOULOUD, 2007, p. 33):

> Uma situação que não revela ao aprendiz a intenção de ensinar, porém imaginada, planejada e construída pelo professor e, ainda proporcionando, ao aluno, condições favoráveis para a apropriação de um novo saber é chamada de situação adidática. Situação essa que é parte integrante da situação didática.

O percentual de acertos apurado na primeira questão mostra que as variáveis didáticas nela envolvidas não geraram grandes obstáculos e nem grandes mudanças nas estratégias de resolução para uma parte do grupo. Aqui, os erros apurados podem ser atribuídos, em princípio, a não familiarização com conteúdos de geometria. As variáveis reconhecidas (a posição do eixo, o eixo comparado com um espelho, a posição da figura na folha, a distância entre o ponto dado e o eixo) deviam ser consideradas para se ter uma boa noção de reflexão na reta. Não ocorreram interações fundamentais entre alguns alunos e os conhecimentos prévios que os mesmos deveriam mobilizar para realizar a atividade, o que facilitaria a resolução. Isto pode ser constatado na observação da ocorrência de erros entre alunos que realizaram a atividade sem refletir ou dialogar com outros alunos sobre a mesma e sem procurar referências anteriores que os ajudariam.

6.2.2 Segunda questão

A segunda questão do instrumento tinha o seguinte enunciado: *Imagine que o segmento representado na vertical seja um espelho. Represente as imagens dessas figuras ‘do outro lado’ do espelho.*

Nesse experimento, o objetivo era o de obter as transformações, por reflexão, de quatro figuras do outro lado de um eixo. Dos segmentos sobre os quais refletiriam as figuras, um estava sobre uma malha quadriculada (Figura 53) e o outro não tinha malha para usar como referência (Figura 57).

Esperava-se que a malha quadriculada fosse um referencial para realizar a reflexão, usando o lado dos ‘quadradinhos’ como medidas para chegar à equidistância da figura dada e sua imagem em relação ao eixo de simetria.

Para obter a construção da figura simétrica havia a tendência que os aprendizes contassem os quadradinhos equidistantes do eixo e usassem apenas o lápis e a régua para traçar os lados das figuras.

Os aprendizes poderiam apresentar dificuldades na leitura e interpretação do enunciado, por não saberem que o eixo funciona para a reflexão das figuras dadas, no manuseio dos instrumentos, no entendimento da malha como sendo uma figura e, se a estratégia fosse a contagem de quadradinhos da malha, errar na contagem.

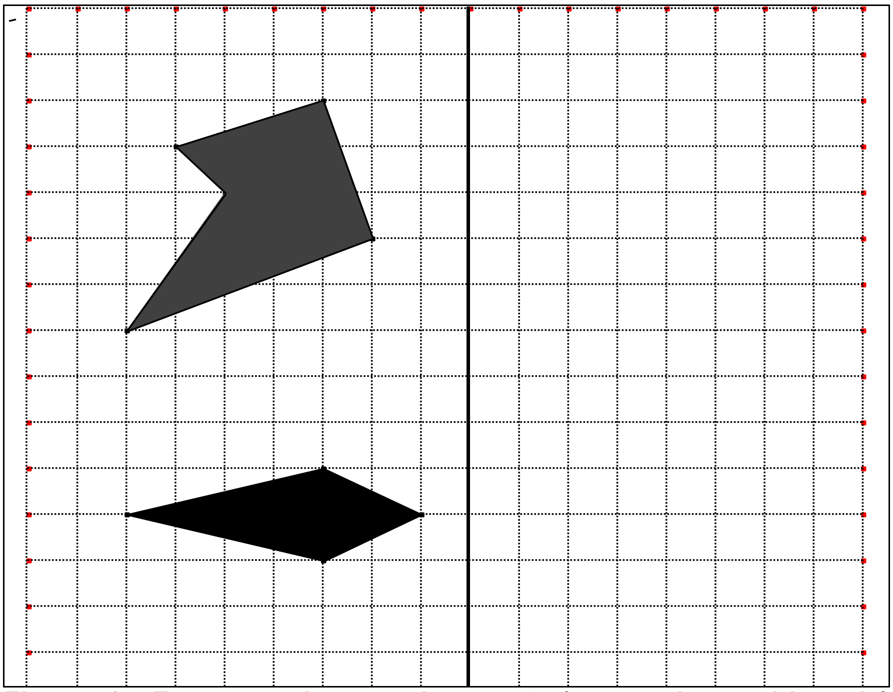


Figura 53 – Elementos da segunda questão (com malha quadriculada)

Nessa questão as variáveis didáticas envolvidas eram a malha quadriculada, a posição do eixo na malha, o eixo comparado com um espelho, a posição das figuras na folha, a posição das figuras em relação ao eixo, as distâncias entre cada figura dada e o eixo.

Durante a resolução, alguns alunos comentaram que esta era mais fácil que a anterior, pois os quadradinhos ajudariam. Segundo eles, bastava só contar os quadradinhos para saber a distância entre cada canto (vértice) da figura e a imagem que seria construída. Nesta lógica, para finalizar, tinham que “ligar” (unir por segmentos), todos os cantos da figura. Essa estratégia foi usada pela maior parte dos alunos.

A variável *posição do eixo na malha* gerou dificuldades para alguns aprendizes chegarem à construção ideal quando a estratégia era contar os quadradinhos para depois usar o lápis e a régua. Alguns contaram os quadradinhos e compararam as distâncias a partir do eixo, assim localizavam os pontos (vértices) equidistantes, de modo que a imagem ficava correta; outros contavam quadradinhos a partir do eixo e também em relação às laterais da malha, de maneira que a imagem ficava incorreta, não mantendo a congruência entre as figuras e sim das distâncias na malha externas às figuras. Os que compararam o eixo a um espelho e os que vincularam a solução primordialmente ao eixo de simetria não apresentaram dificuldades.

Para esta análise, foram considerados critérios para classificar os resultados, em *acerto total* (acertar tanto na proporção quanto na reflexão); *acerto parcial* (acertar na reflexão, mas errar na proporção), ou, ainda, *erro total* (errar tanto na errar tanto na reflexão quanto na proporção). Com base nestes critérios, foram apurados os resultados mostrados no Gráfico 2.

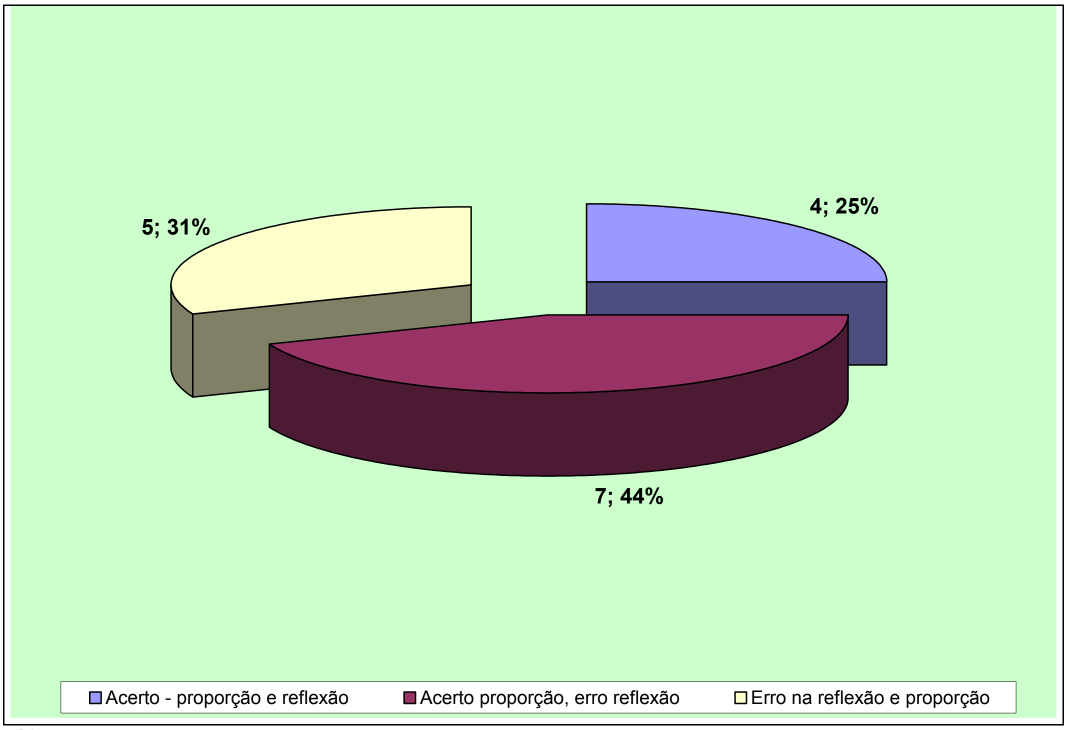


Gráfico 2 – Resultados apurados na primeira parte da segunda questão do instrumento

Para maior clareza dos critérios considerados, as figuras seguintes trazem exemplos de cada uma das categorias locais de análise.

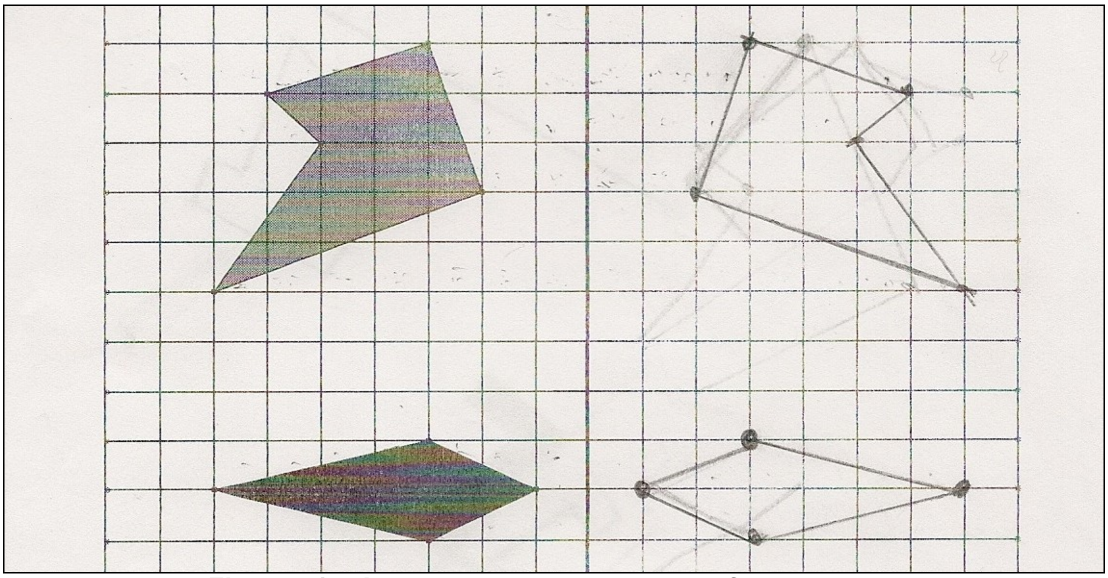


Figura 54 – Acertos na proporção e na reflexão

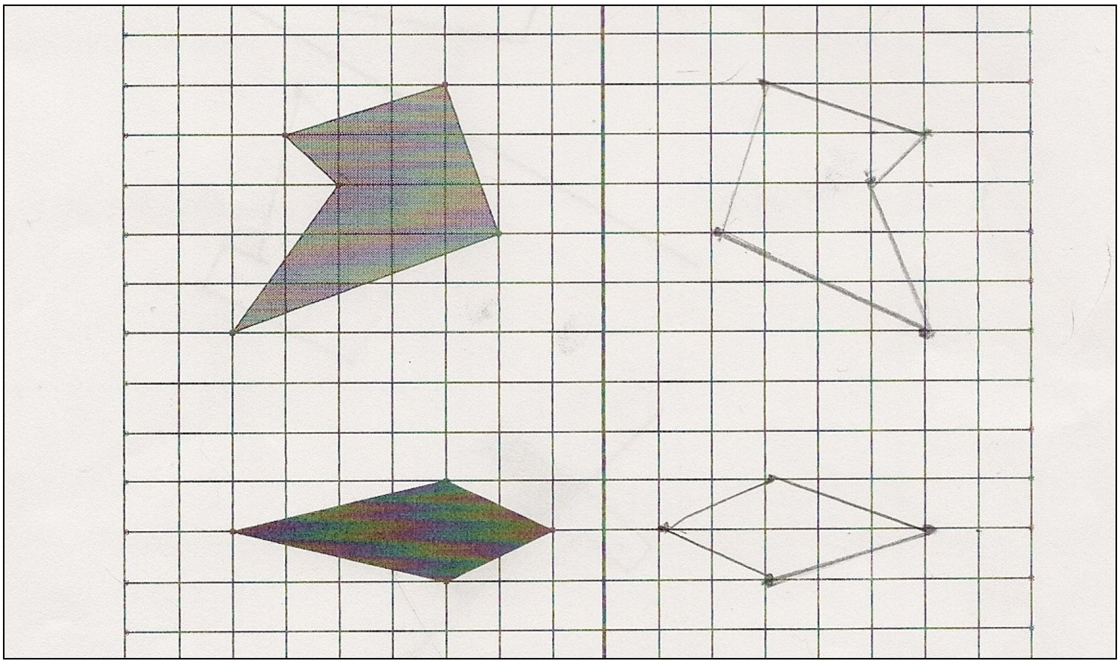


Figura 55 – Acerto na reflexão, erros na proporção

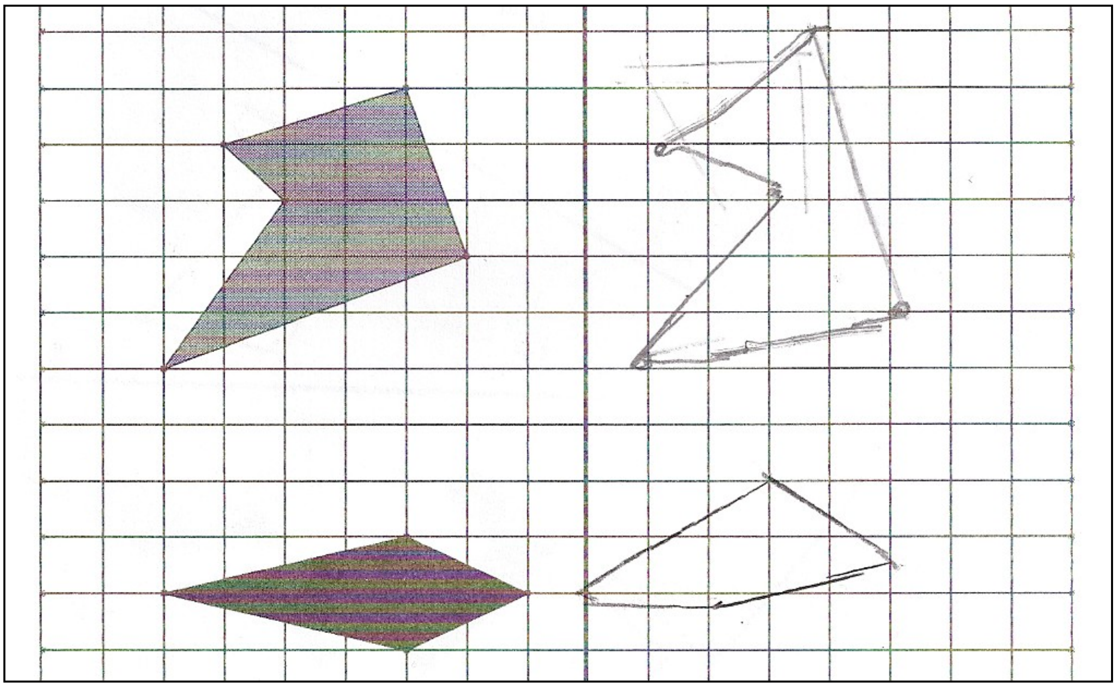


Figura 56 – Erro na reflexão e na proporção

O que se pode apurar é que, considerando o uso reconstrutivo do erro, existia a necessidade de destacar os aspectos da proporcionalidade em relação à malha na intervenção didática com as TICs, de modo que fosse possível chegar aos resultados pretendidos, colocando novamente situações com essa natureza. Para a segunda categoria de análise aqui considerada, a malha poderia ser simétrica e para a terceira, era necessário retomar o conceito, desenvolvendo, inicialmente, a situação com uso de outras estratégias, o que foi efetivamente realizado no segundo instrumento.

A abordagem sem a malha quadriculada objetiva obter a reflexão, como na primeira parte, com o método da construção por uso de instrumentos ou vincar a folha para “copiar” a figura simétrica. Esperava-se que os sujeitos já começassem a explicar, mesmo que informalmente, suas estratégias de construção.

Deviam ser mobilizados os conhecimentos de simetria no espelho, pois já havia sido experimentado e abordado em sala de aula, bem como o conceito de reflexão na reta.

As possíveis dificuldades poderiam ser relacionadas ao uso de compasso e régua, à comparação do eixo de simetria ao espelho (usar apenas o lápis), por não ter a malha como referência ou por realizar a reflexão da direita para a esquerda (habitualmente, em livros e apostilas de referência, é sempre ao contrário).

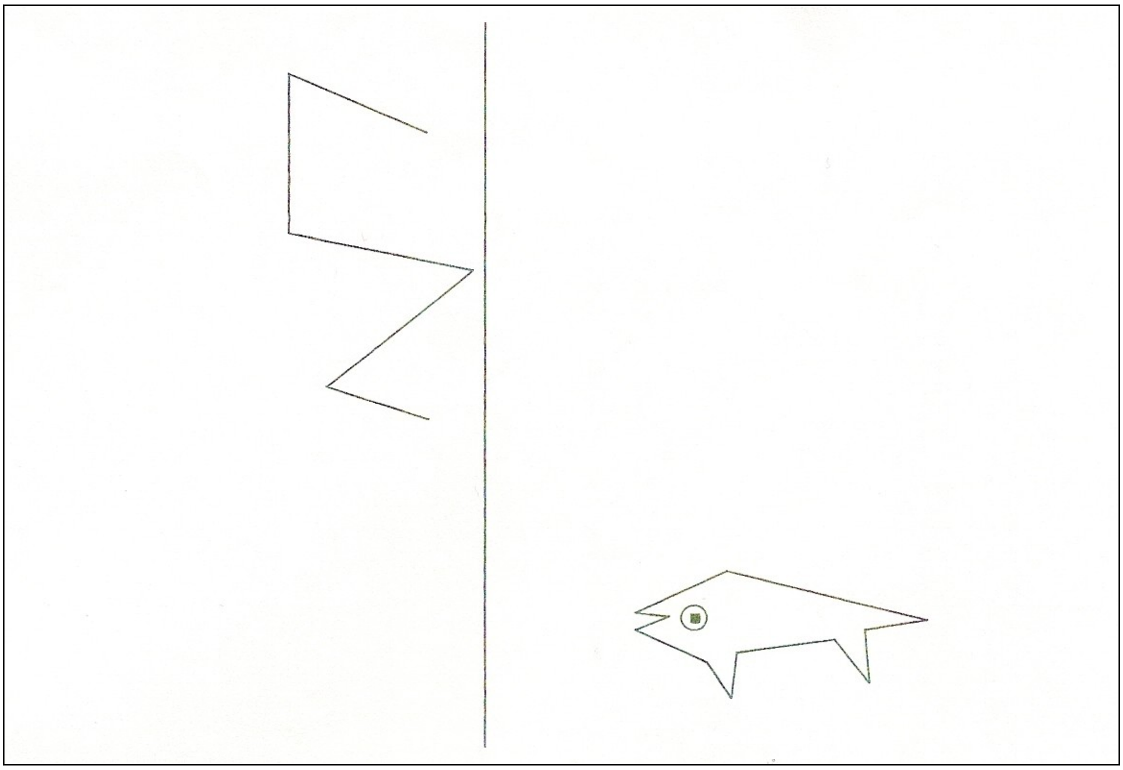


Figura 57 – Proposta da segunda parte da segunda questão (sem malha quadriculada)

Esta questão também envolve algumas variáveis didáticas, como o próprio desenho, a ausência de malha quadriculada, a posição do eixo, a comparação do eixo a um espelho, a posição das figuras na folha, a posição das figuras em relação ao eixo, as distâncias entre cada figura e o eixo.

O uso de instrumentos diferentes pode demandar estratégias diferentes. Não foi definido que instrumento ou recurso seria usado, o que poderia permitir aos aprendizes chegar ao que se pretendia usando recursos diferentes. A facilidade ou dificuldade tem relação com suas escolhas. Dobrar uma folha é fácil para um, nem tanto para outro. Quanto ao manuseio do compasso foram apresentadas algumas dificuldades – por não terem algum tipo de prendedor, a folha ficava deslizando sobre a mesa. Esta dificuldade foi superada por eles ao usarem seus cadernos como base para apoiar as fichas de atividades.

Como já mencionado, para análise da segunda parte da segunda questão, foram considerados os mesmos critérios de análise da figura sobre a malha quadriculada. Com base nestes critérios, foram apurados os resultados expressos no Gráfico 3.

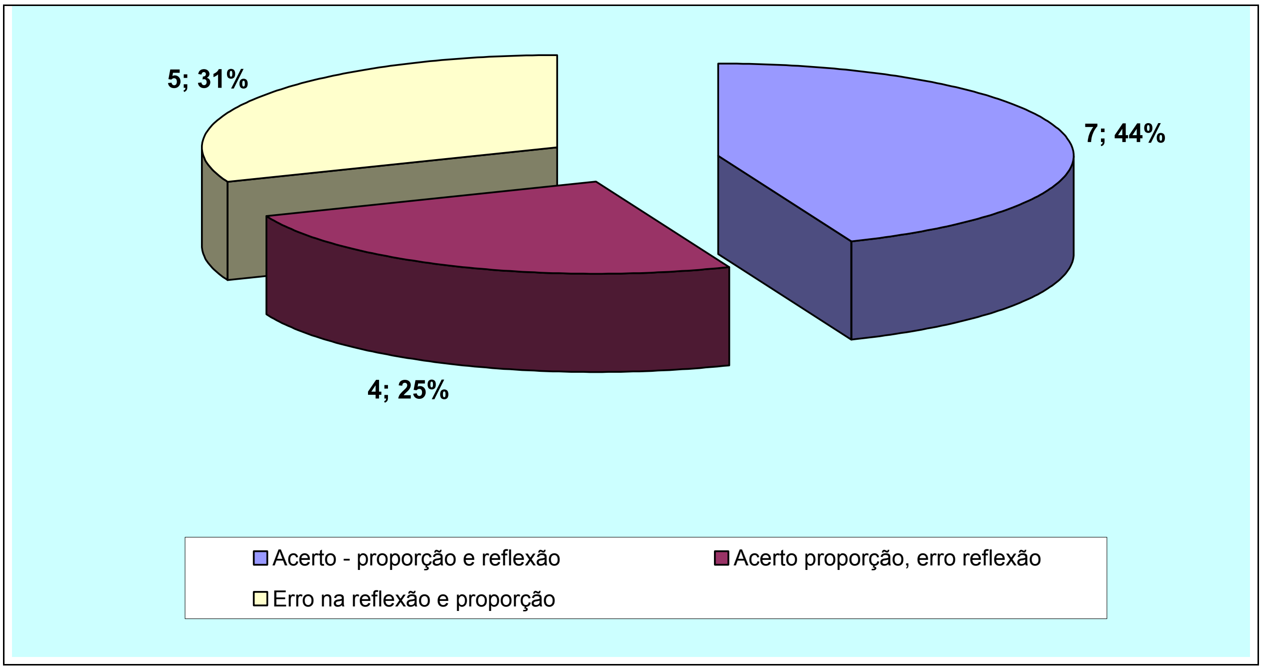


Gráfico 3 – Resultados apurados na segunda parte da segunda questão do instrumento

Para maior clareza dos critérios considerados, as figuras seguintes trazem exemplos de cada uma das categorias locais de análise.

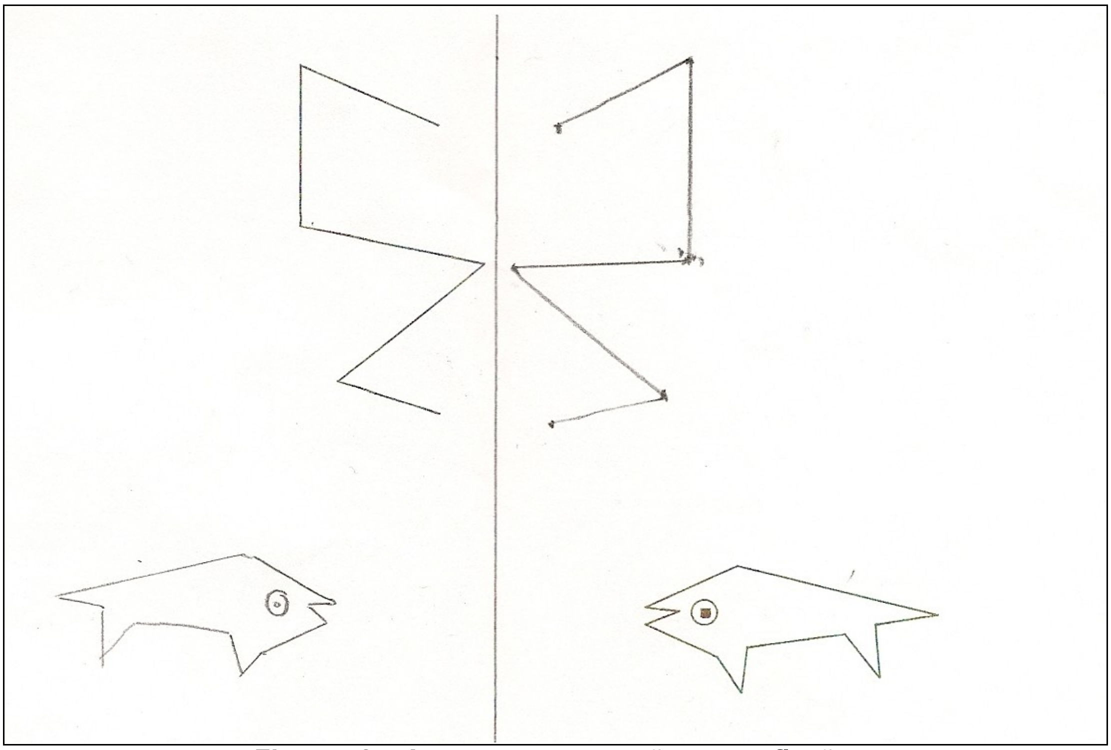


Figura 58 – Acertos na proporção e na reflexão

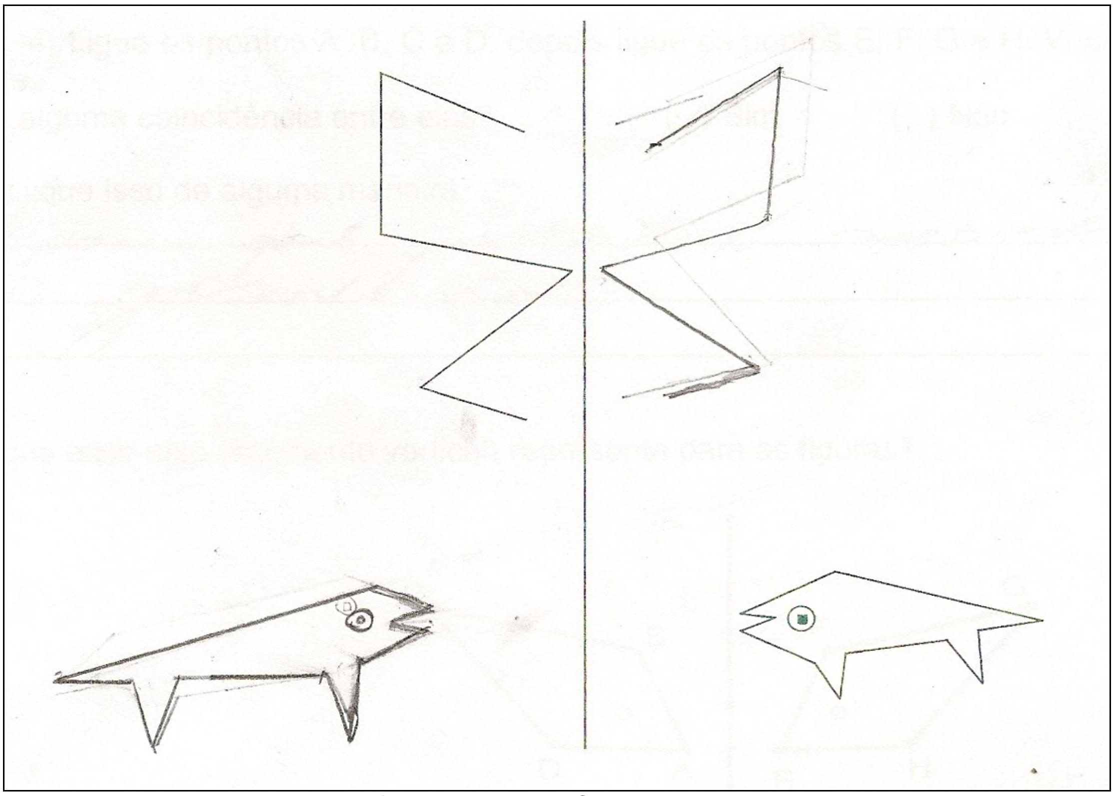


Figura 59 – Acerto na reflexão, erro na proporção

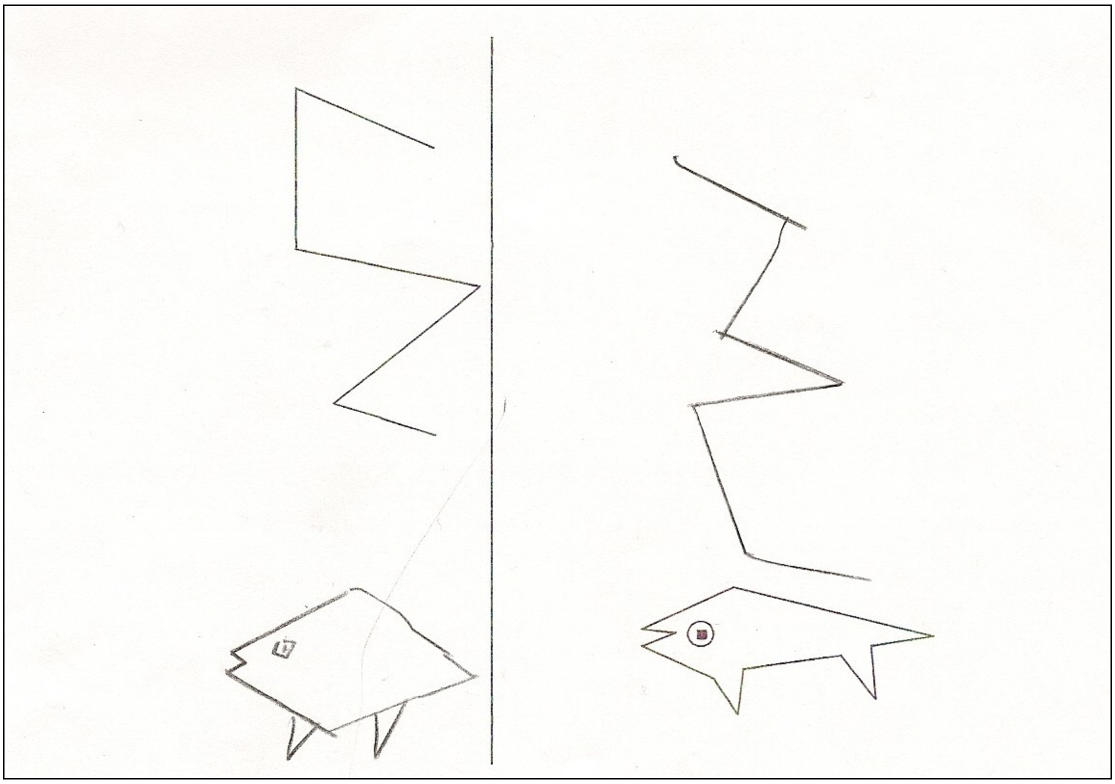


Figura 60 – Erro na reflexão e na proporção

Para resolver essa questão, um grupo de alunos usou o compasso e a régua, outro grupo trabalhou somente com a idéia do espelho, de modo a refletir a figura usando apenas o lápis e um terceiro grupo dobrou a folha formando um vinco sobre o eixo de simetria – assim, com as partes da folha sobrepostas, os estudantes executaram a cópia da figura dada, chegando ao objetivo pretendido. Durante a atividade foram ouvidos comentários de como se poderia obter a outra figura, e que teriam mais que uma opção. No caso, quem comentava indicava o que estava usando, afirmando que o recurso usado era o melhor. Interessante apontar que quem usou régua e compasso começou a verificar a sobreposição das figuras simétricas vincando a folha.

O que se pode observar, de modo contrário ao esperado, é que o número de acertos totais ocorridos nesta parte da questão foi significativamente maior do que na anterior, que usava a malha quadriculada. É possível que a diferença entre as distintas partes da malha, em relação ao eixo de simetria, tenha concorrido para esta diferença. Em função disso, então, na intervenção didática com uso de TICs, este aspecto foi sobejamente considerado.

6.2.3 Terceira questão

A terceira questão do instrumento trazia o enunciado da seguinte maneira: *Agora, os espelhos são os eixos representados na diagonal. Obtenha suas imagens.*

Nessa atividade, sem a malha quadriculada, esperava-se que obtivessem as imagens das figuras dadas, com o método da construção por uso de instrumentos ou vincar a folha para retratar as figuras indicadas e também que continuassem a explicar as estratégias de resolução e que fizessem verificações dos resultados. Para o uso da régua e do compasso deveriam rotacionar a folha para adequá-la às mãos, já que os eixos estão oblíquos.

Deviam ser mobilizados os conhecimentos de simetria no espelho e também a autonomia para verificar e conjecturar.

As dificuldades apuradas aqui estão relacionadas ao uso de compasso e régua, à comparação do eixo de simetria ao espelho (no caso de usar apenas o lápis), por não ter a malha como referência e também pelo eixo estar representado obliquamente em relação à folha.

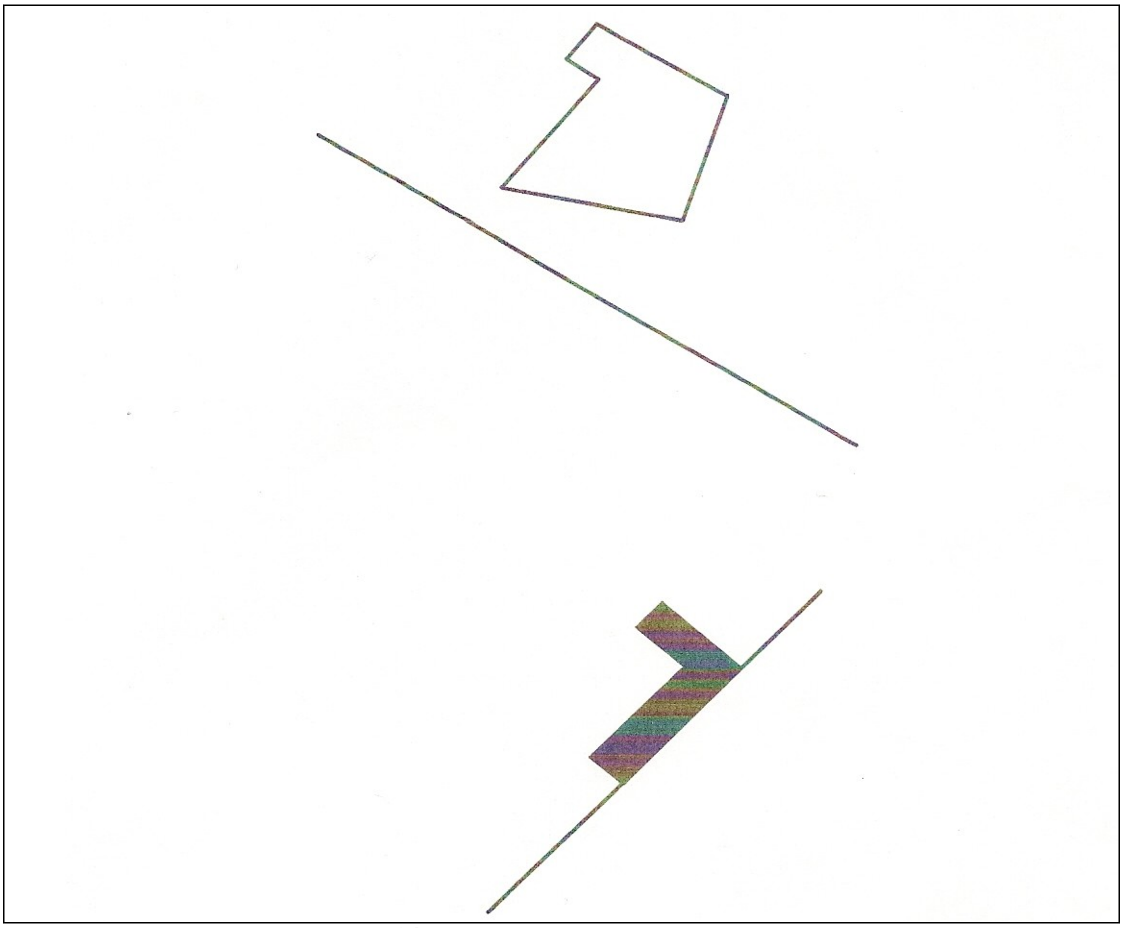


Figura 61 – Proposta da terceira questão

As variáveis didáticas aqui envolvidas são a própria característica do desenho, a ausência da malha quadriculada, a posição das figuras na folha, a posição das figuras em relação ao eixo (colada ou afastada) e a posição do próprio eixo.

Para esta análise, foram considerados critérios para classificar os resultados, em *acerto total* (acertar tanto na proporção quanto na reflexão), *acerto parcial* (acertar na reflexão, mas errar na proporção), ou, ainda *erro total* (errar tanto na reflexão quanto na proporção). Com base nestes critérios, foram apurados os resultados expressos no Gráfico 4.

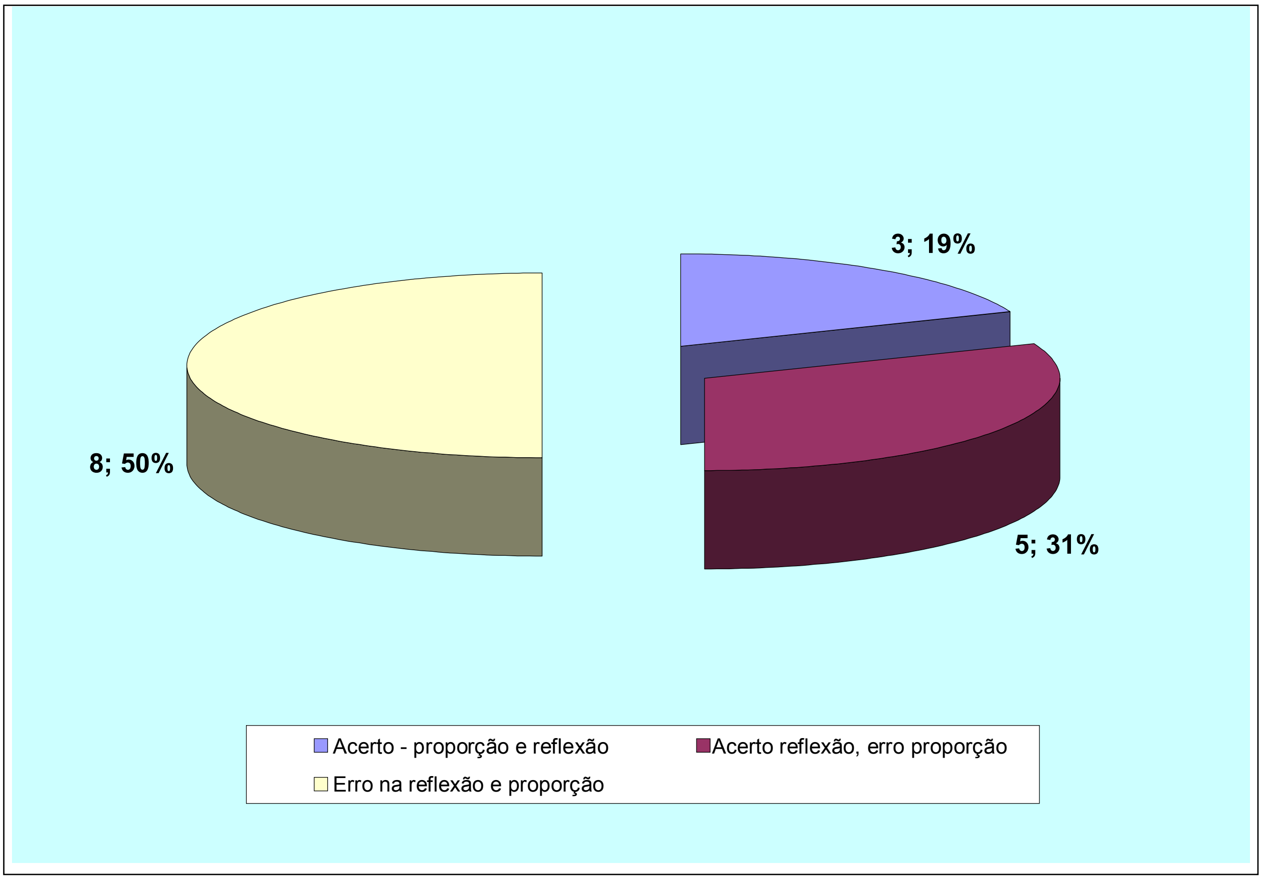


Gráfico 4 – Resultados apurados na terceira questão do instrumento

Para maior clareza dos critérios considerados, as figuras seguintes trazem exemplos de cada uma das categorias locais de análise.

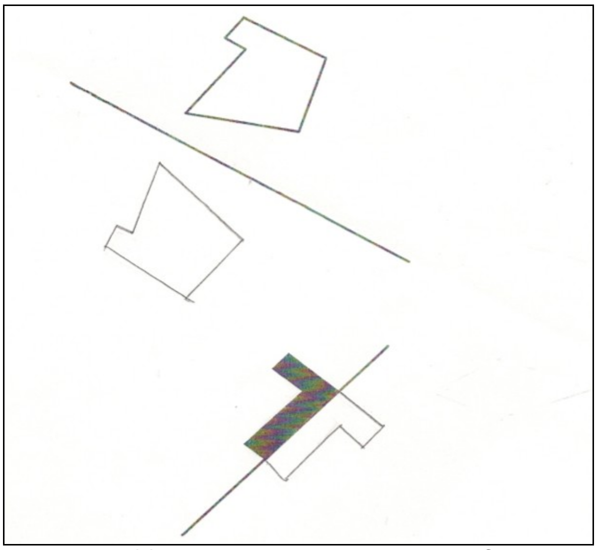


Figura 62 – Acertos proporção e reflexão

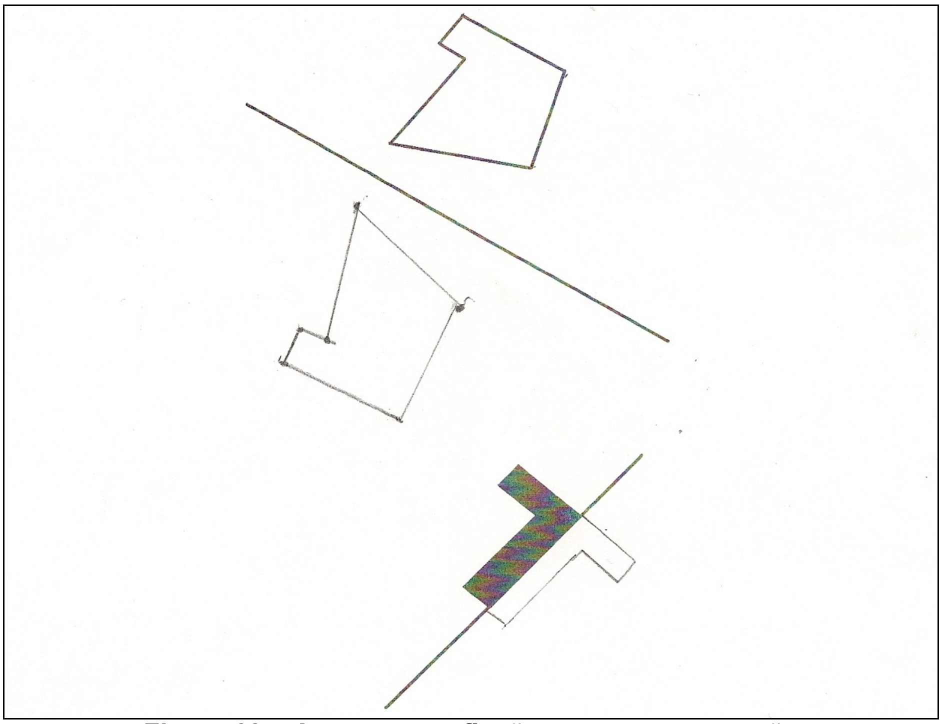


Figura 63 – Acertos na reflexão, erros na proporção

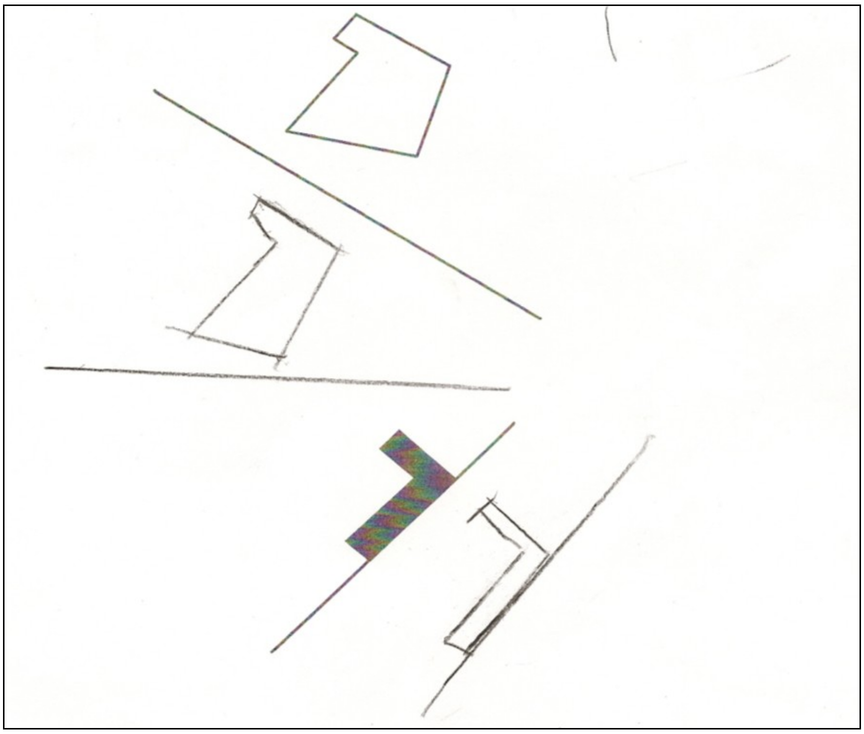


Figura 64 – Erros reflexão e proporção

A execução da tarefa ocorreu de maneira bem diferente do previsto, poucos rotacionaram a folha para usar a régua e o compasso ou a vincaram sobre os eixos. A maioria apresentou algum tipo de dificuldade, chegando a resolver a atividade fora de sua cadeira adequando uma postura à ficha de atividades ou também, um aluno segurava a ficha para o outro construir. Reclamaram dizendo que o espelho estava “torto”, por isso estava muito difícil desenhar a imagem. A explicação das estratégias usadas e a verificação com a sobreposição praticamente não ocorreram. Os erros correspondem à metade das respostas apresentadas. Pelas observações ocorridas durante a aula podemos afirmar que o baixo número de acertos se deve ao eixo de simetria estar representado obliquamente.

Aqui, julgou-se caber uma reflexão teórica adicional. Segundo Jaime e Gutiérrez (1996), os erros relacionados à reflexão, comumente cometidos pelos estudantes, têm origem na formação errônea dos conceitos; decorrem da falta de equidistâncias de pontos simétricos relativos ao eixo e também na ausência da perpendicularidade entre o segmento formado pelos dois pontos e o eixo de simetria (JAIME e GUTIÉRREZ, 1996, pp. 61 – 62). De fato, a experiência confirmou estas considerações.

6.2.4 Quarta questão

A quarta questão trazia o seguinte enunciado: *Ligue os pontos A, B, C e D; depois, ligue os pontos E, F, G e H. Você obteve duas figuras. a) Há alguma coincidência entre elas? b) Explique.*

Essa questão tinha como objetivo que os aprendizes obtivessem duas figuras simétricas entre si, bem como descrevessem o que havia de comum entre as duas.

Para a construção, deveriam seguir o roteiro indicado e usar a régua para traçar os segmentos pedidos até obter as construções pedidas.

Para a observação e explicação, deveriam mobilizar os conceitos de simetria axial.

Era esperado que os alunos não apresentassem erros na construção e na percepção das coincidências, mas que os mesmos ocorressem quando da explicação em registrar (escrever) o que, até então, só haviam expressado oralmente.

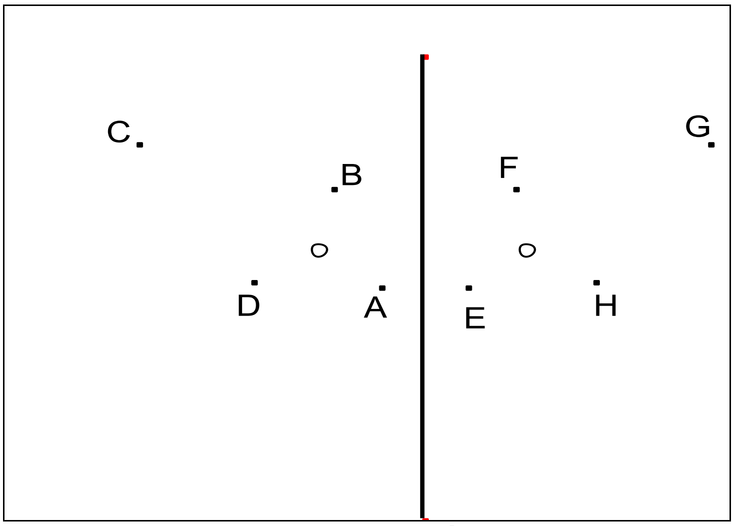


Figura 65 – Desenho relativo à quarta questão

Há algumas variáveis envolvidas nessa questão que são os pontos representados e nomeados, a malha não quadriculada, o eixo de simetria, as respectivas equidistâncias entre os pontos dados.

No item construção, todos os alunos acertaram. Quanto às respostas dos itens seguintes, todos eles perceberam a simetria e a invariância entre os elementos e cada figura. Compararam essa construção com as anteriores, afirmando que a primeira construção não ficou muito boa, outras ficaram melhores. Concluíram que uma delas ficou muito ruim: aquela em que o “espelho” estava inclinado. Surgiram, em seguida, boas explicações, mesmo que não formais. Escreveram, com diferentes palavras e formas de expressão, que os pontos são simétricos em relação ao eixo, porque o eixo funciona como um espelho; tudo o que acontece de um lado da reta, acontece do outro só que está virado para o outro lado; de um lado está caído para a direita, por isso do outro lado está caído para a esquerda; se dobrar a folha no espelho, uma figura encaixa na outra.

Eles perceberam que houve melhoras na construção e nas justificativas à medida que desenvolviam as atividades. Entretanto, havia três duplas que não conseguiam falar e nem explicar, porém não mais apresentavam erros na construção.

As respostas apuradas estão representadas no Gráfico 5.

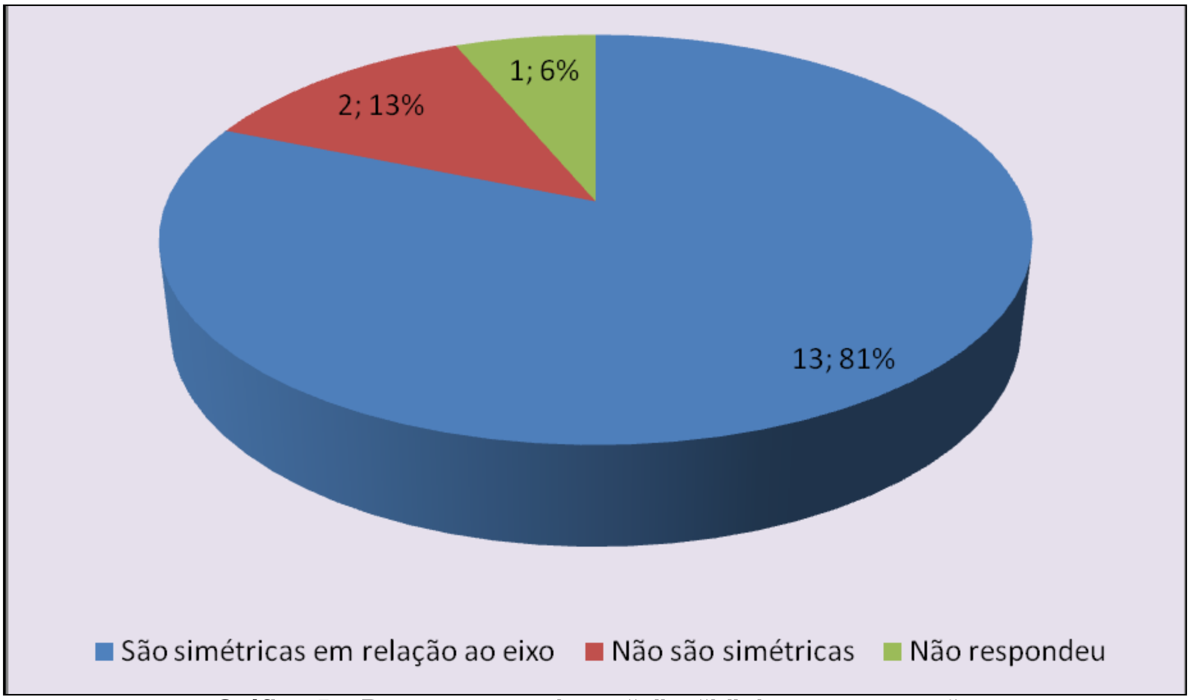


Gráfico 5 – Respostas aos itens “a” e “b” da quarta questão

O item “c” desta mesma questão tinha a seguinte pergunta: *c) O que esse eixo (segmento vertical) representa para as figuras?*

As respostas obtidas estão representadas no Gráfico 6.

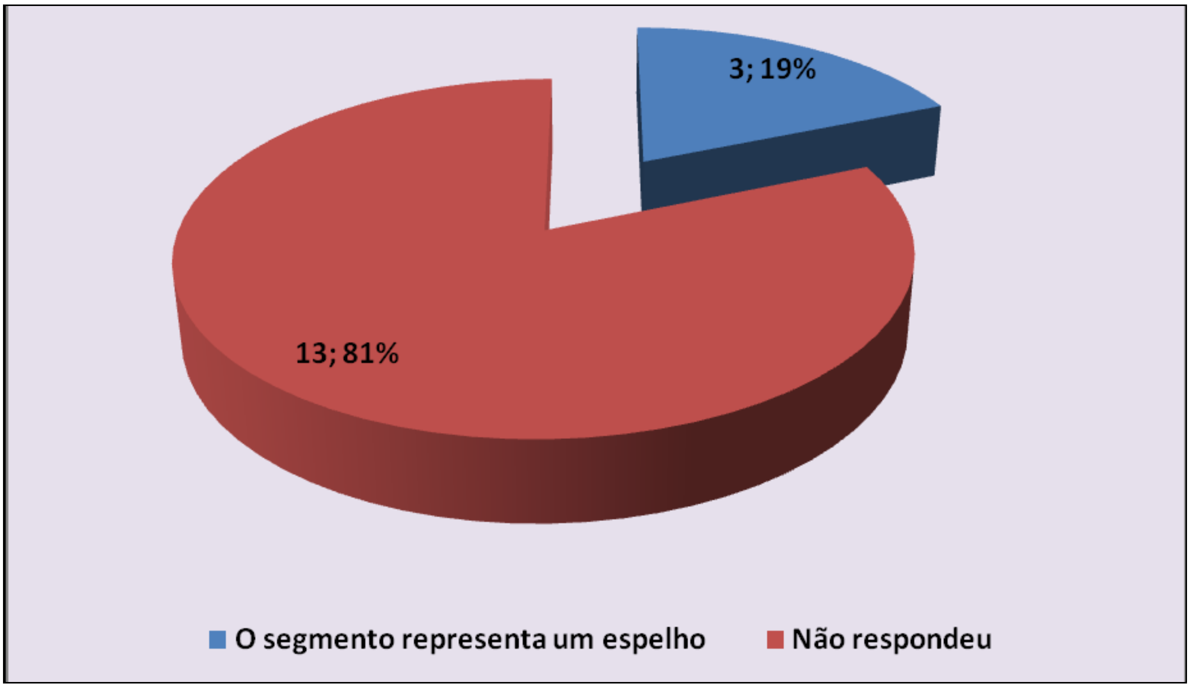


Gráfico 6 – Respostas ao item “c” da quarta questão

Muitos alunos deixaram de responder este item, apesar de terem realizado comentários a este respeito. Isto pode ser relacionado com alguma falta de compreensão do enunciado, ou porque nesta pergunta, a lógica estava invertida: no lugar de perguntar tendo as figuras como referência, tomou-se o eixo de simetria. As poucas respostas obtidas indicam que a comparação do eixo de simetria ao espelho é o conceito que foi obtido até então.

6.2.5 Quinta questão

A quinta e última questão do instrumento da fase um desta investigação trazia as seguintes interrogações: *Você já havia desenvolvido alguma atividade assim?* A questão trazia, ainda, dois subitens**:** *a) O que você aprendeu com a atividade?* e *b) O que mudaria se o espelho (eixo de simetria) estivesse na horizontal (nos locais onde estava na vertical ou na posição oblíqua)?*

É importante assinalar que os índices de erro obtidos nas questões anteriores indicam que o conhecimento geométrico relativo a um conteúdo já apresentado à maioria dos participantes da pesquisa não estava consolidado, o que pode indicar problemas relativos à abordagem e/ou estratégias utilizadas para trabalhar com esta frente de saberes.

As respostas estão representadas no Gráfico 7.

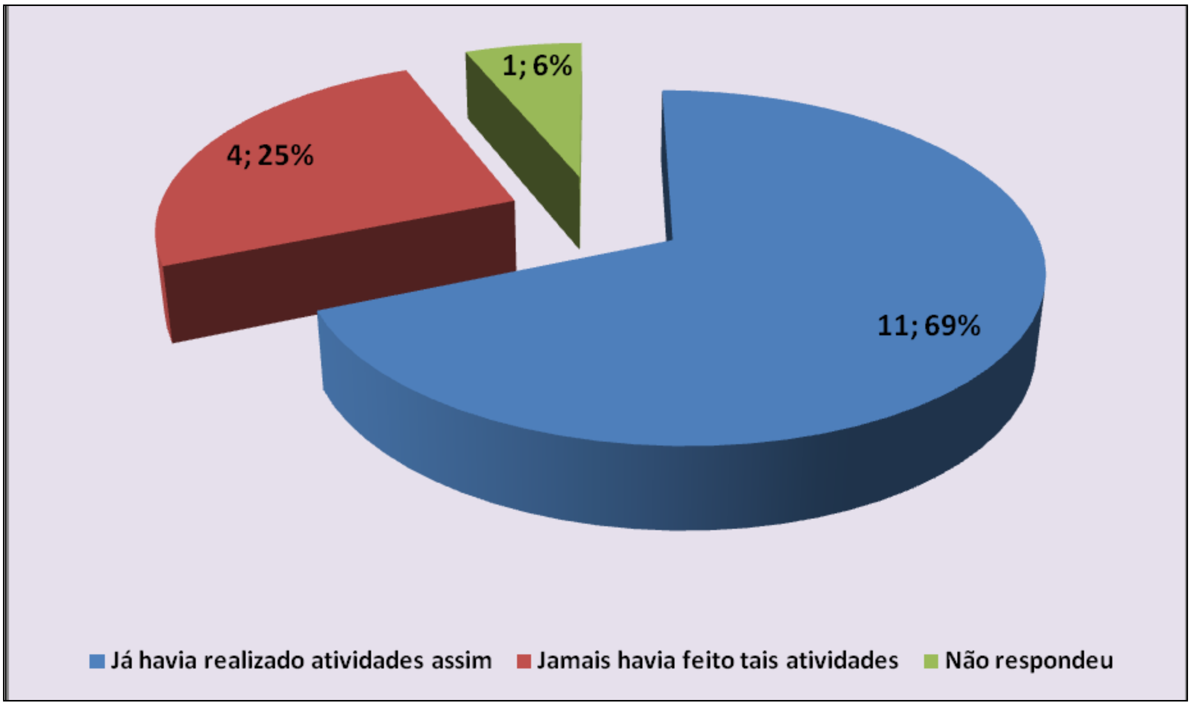


Gráfico 7 – Respostas à primeira parte da quinta questão

Com relação ao subitem “a” da quinta questão, cinco respondentes indicaram ter aprendido algo relativo à transformação geométrica denominada reflexão, onze respostas indicaram que haviam aprendido a manipular instrumentos como régua-compasso-lápis para a construção de figuras. Apesar de as questões direcionarem sempre o foco do processo para elementos ligados à simetria axial, permitiram que os estudantes mantivessem sua atenção em elementos distintos, revelando a necessidade de um redirecionamento quanto aos objetivos de aprendizagem e à estratégia didática, de modo a tornar o processo de construção do conhecimento relativo à simetria axial mais significativo.

Durante essa etapa alguns alunos resolveram as atividades apresentando erros na construção, na justificativa e principalmente nos conceitos. Parte desses apagava e refazia ou reescrevia e eliminava a ocorrência ou parte dela, outros mantinham do jeito que estava não agindo no sentido de refazer a tarefa. As respostas indicaram que houve uma melhora importante nos processos de construção, com verificação e prova empírica, não avançando o suficiente para validações e provas conceituais.

Neste ponto, atendendo às dúvidas suscitadas pelas atividades, o pesquisador fez explanações sobre os conceitos de simetria axial, eixo de simetria, figuras simétricas, entre outros elementos relacionados. As questões surgiram espontaneamente, e estavam ligadas à estratégia empregada no trabalho com simetria axial com os sujeitos da pesquisa.

De posse destes dados, foi possível planejar os elementos relativos à fase dois, que compreende a continuidade da estratégia adotada inicialmente aqui, com a inclusão de TICs, mais especificamente com uma abordagem usando o *software* Geogebra.

6.2.6 Fase dois: instrumento dinâmico

Essa sequência de atividades foi elaborada com uma estratégia pedagógica para ser aplicada com intermediação do ambiente computacional. Para sua realização os alunos deveriam já saber usar o computador, porém havia a possibilidade de alguns alunos nunca o terem usado ou de o fazerem com pouca frequencia. Para constatar este fato, passamos uma lista com duas alternativas, “sim ou não”, para que eles respondessem. Obtive a resposta de que 18 dos 30 alunos presentes no dia já faziam uso do computador em sua casa e/ou *lan house*.

As questões foram elaboradas em atenção às dificuldades e erros cometidos nas atividades anteriores, procurando proporcionar oportunidades para que os sujeitos refletissem sobre os conceitos ligados à simetria axial e construíssem corretamente o conhecimento correspondente.

Por problemas estruturais, citados anteriormente, tínhamos apenas dois computadores para realizar o experimento, por isso trabalhamos com apenas duas duplas de cada vez. O trabalho, em um laboratório de informática, com todos os alunos presentes, seria desenvolvido em um tempo médio de 150 minutos. Nessas condições, trabalhando com duas duplas de cada vez, quando as máquinas estavam disponíveis, gastamos oito períodos de aula.

Para que aquela parte dos alunos que não usava computadores habitualmente se familiarizasse com a máquina e todos eles com o *software*, as duplas se formaram de maneira que pelo menos um aluno já fizesse uso do computador. Dessa forma quem não sabia foi auxiliado por alguém que já sabia. Quanto ao *software*, instruídos a clicar no ícone Geogebra, rapidamente o fizeram. Alguns optaram em representar, construir, descobrir, testar, apagar e reconstruir; outros partiram direto para as construções, obedecendo ao roteiro indicado em cada questão. Quando erravam, apagavam e retomavam a construção. No geral, não apresentaram grandes dificuldades, foram explorando quando faziam construções, nomeavam, mediam segmentos, mediam ângulos etc, até o ponto de fazerem a seleção das ferramentas que usariam para as atividades.

O tempo utilizado pelos alunos para resolução variou de no mínimo de 110 minutos até um tempo máximo de 200 minutos. Nesta etapa havia muito mais elementos (retas, segmentos, pontos, nomeações, medições) para serem representados que na etapa anterior, na qual tempo variou entre 15 e 67 minutos.

Como é um novo recurso para abordar o tema em questão, havia inicialmente algumas expectativas de erros e dificuldades. Primeiro com relação ao domínio e manuseio dos recursos e ferramentas a serem usados. Do ponto de vista didático há chances de apresentarem dificuldade em relação às apreensões.

Em termos teóricos, de acordo com Almouloud (2005, pp. 126-127), Duval destaca quatro maneiras de apreender uma figura, que são:

- **Apreensão discursiva**: relacionada com registros em língua natural, é a leitura e interpretação dos elementos da figura;
- **Apreensão sequencial**: relacionada à construção das figuras e com as propriedades envolvidas; é um apoio às tarefas de construção para reproduzir uma figura;
- **Apreensão perceptiva**: tem relação com as primeiras abordagens e interpretação das formas geométricas apresentadas pelas figuras;
- **Apreensão operatória**: relacionada à transformação ou modificação de uma figura em outras para perceber a existência de elementos que conduzem a obtenção da solução de um problema ou de uma prova.

De acordo com Duval (1988), falar de registros é expor o problema da aprendizagem e dar ao professor um cabedal que pode ajudá-lo a tornar fácil a compreensão da Matemática.

6.2.7 Primeira questão no AGD

Com relação a este instrumento, e usando o recurso arrastar com o *mouse*, é esperado que os aprendizes façam verificações e provem empiricamente a simetria do tipo reflexão na reta, quando houver.

Para poderem realizar essa prova eles mobilizarão os conceitos de equidistâncias e de eixo de simetria.

Havia, inicialmente, a possibilidade de apresentarem dificuldades quanto à apreensão perceptiva. Mesmo a questão tendo sido apresentada por construções, ao observar e movimentar as figuras (tratamento figural) havia a possibilidade de que eles não estabelecessem qualquer correspondência de simetria axial entre as figuras, não verificassem que as distâncias entre as figuras e as retas alteram, embora permaneçam, aos pares, sempre equivalentes, e, ao movimentar um dos triângulos, não estabelecessem nenhuma comparação com o outro.

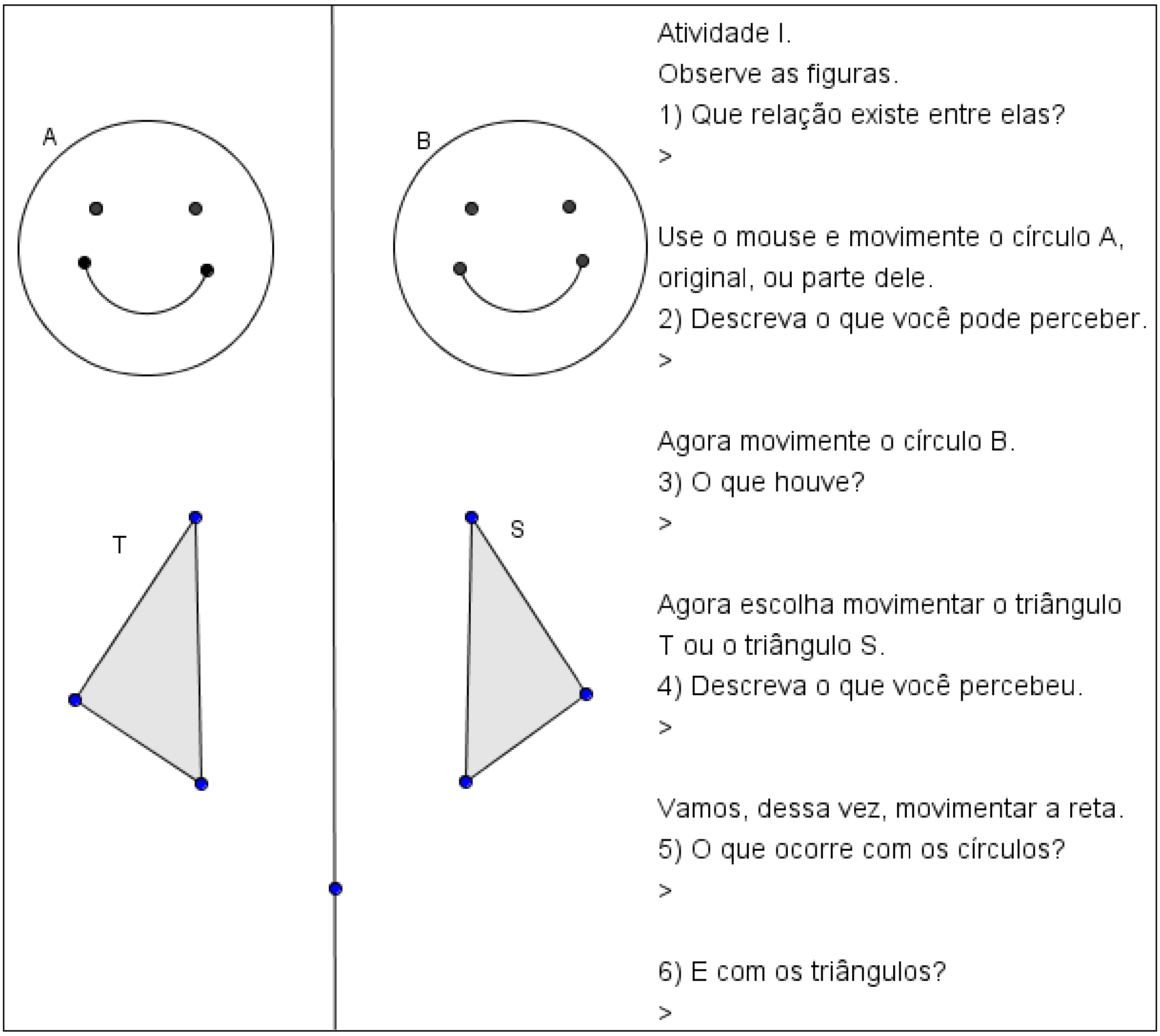


Figura 66 – Atividade I proposta no AGD

Essa atividade tem algumas variáveis didáticas identificáveis que são o eixo de simetria, as figuras no monitor, as figuras em relação ao eixo e o enunciado.

Ação	Resposta esperada
Observação	São iguais
Movimentar o círculo A	São iguais ou são a reflexão um do outro
Movimentar o círculo B	Não se movimenta
Movimentar um dos triângulos	Não são a reflexão um do outro
Movimentar a reta	Os círculos são simétricos e os triângulos não

Quadro 3 – Respostas esperadas para a atividade 1 no AGD

Essa atividade foi respondida por 15 duplas. Ainda apresentaram algumas dificuldades em usar o AGD. Embora, com certa tranquilidade, retomaram a liberdade para procurar as ferramentas que usariam, como liberar o texto para escreverem suas respostas, usar o *mouse* (clicar no lado direito ou no lado esquerdo), procurar nos ícones o nome igual ao pedido para o referido tratamento, movimentar a figura, o ponto ou a reta. Os termos usados nos *softwares* nem sempre são os mesmos das situações propostas no ambiente papel e lápis – isso gerou discussões entre os componentes de cada dupla. Reafirmaram que só encontrariam os recursos se explorassem e testassem na linha de “janelinhas”, na parte superior do monitor.

Para a descrição das relações entre as figuras, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 8.

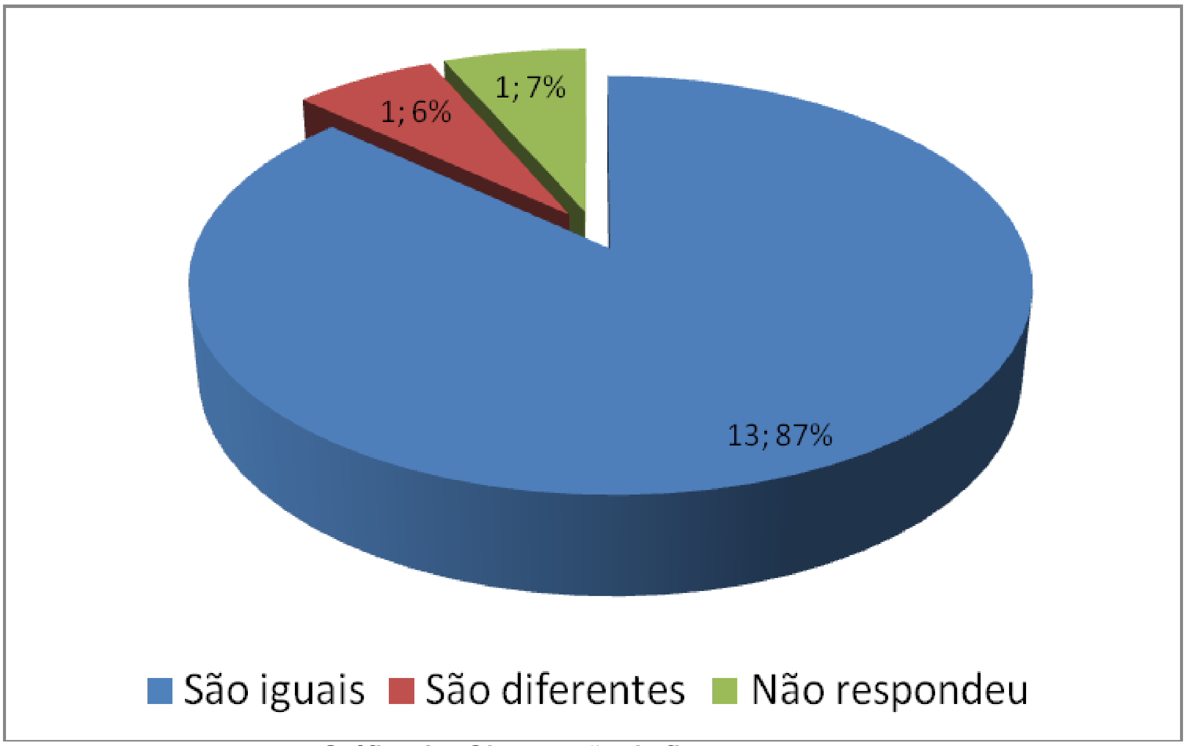


Gráfico 8 – Observação da figura e respostas

Em relação à questão que solicitava movimentar o círculo A e descrever o que percebeu, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 9.

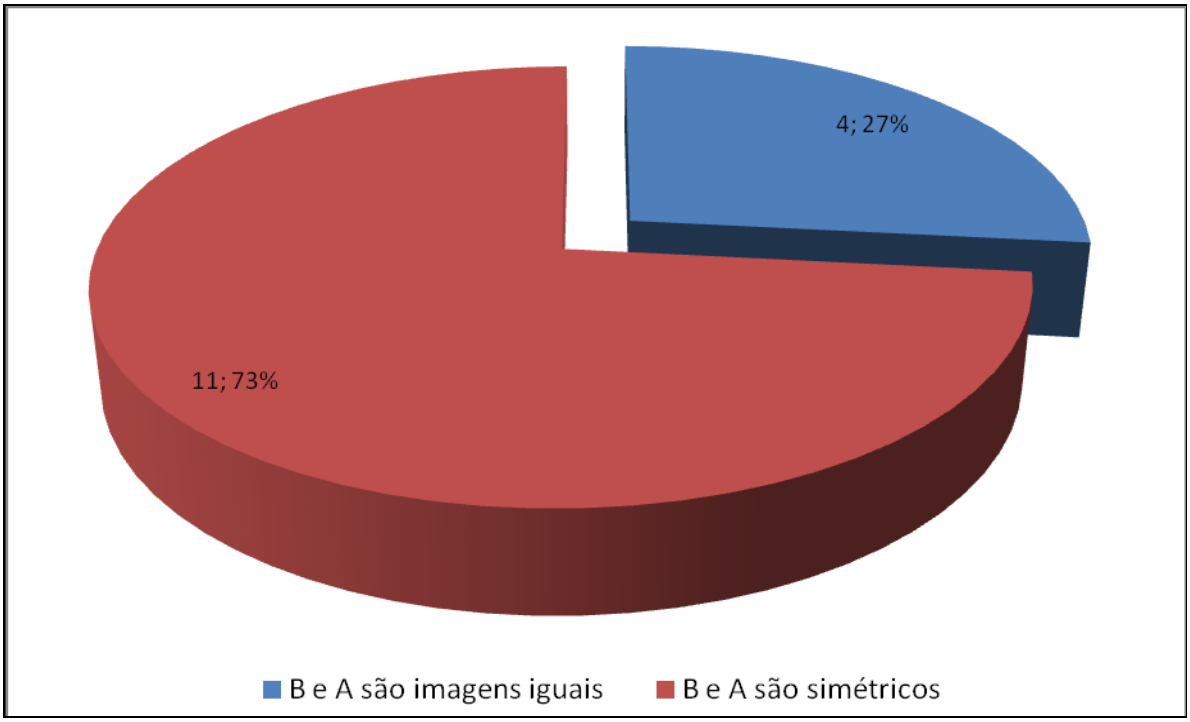


Gráfico 9 – Descrição quando o círculo B foi movimentado

Para a questão que solicitava movimentar o círculo B e descrever o que percebeu, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 10.

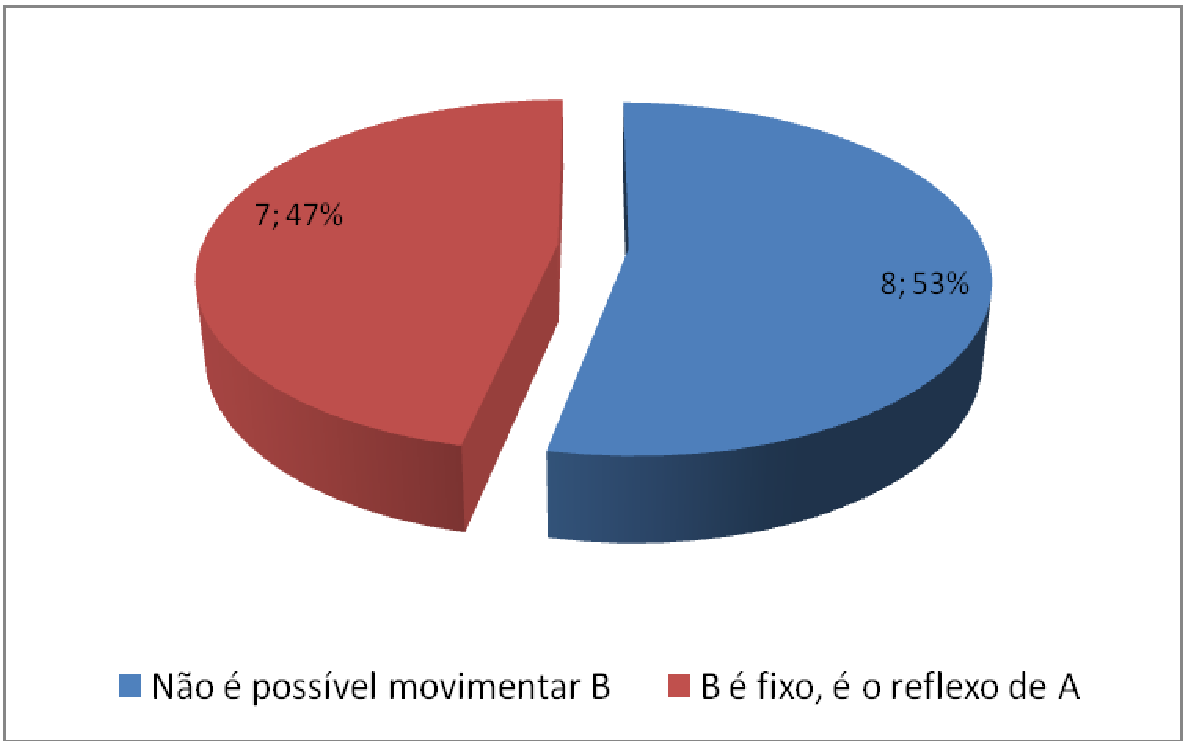


Gráfico 10 – Movimentar o círculo B

No que diz respeito à questão que solicitava movimentar um dos triângulos e descrever o que percebeu, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 11.

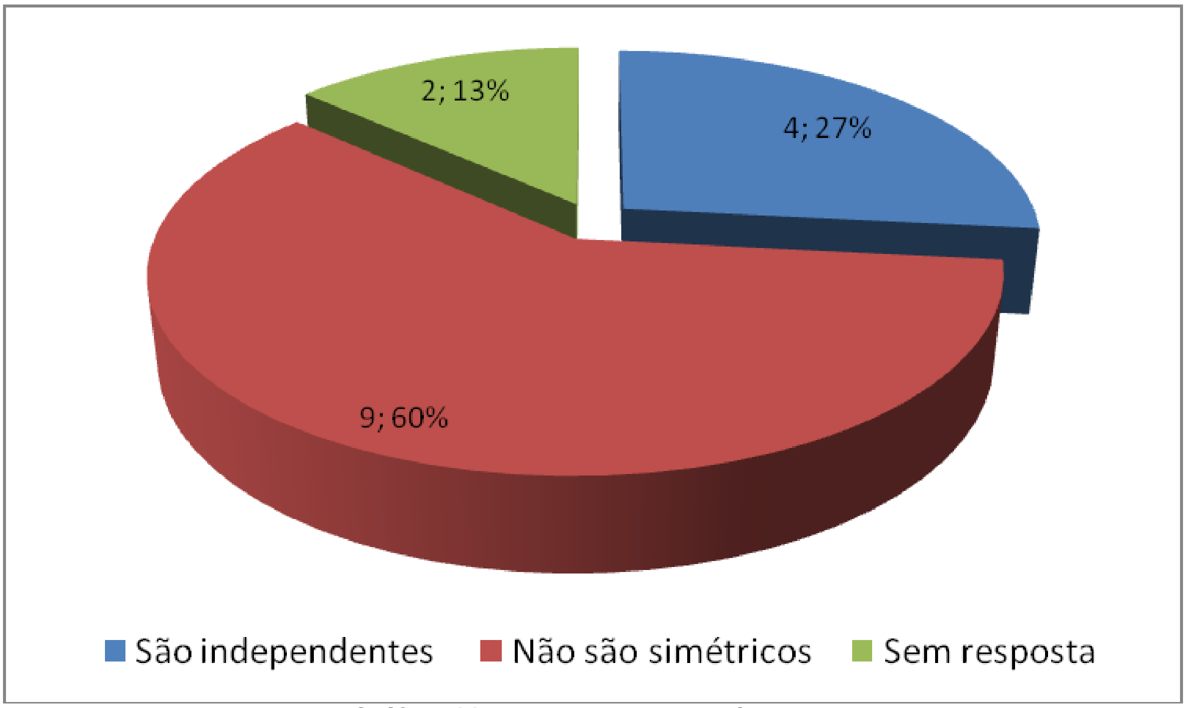


Gráfico 11 – Movimentar os triângulos

Quanto ao item que solicitava movimentar a reta e descrever o que acontece com os círculos, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 12.

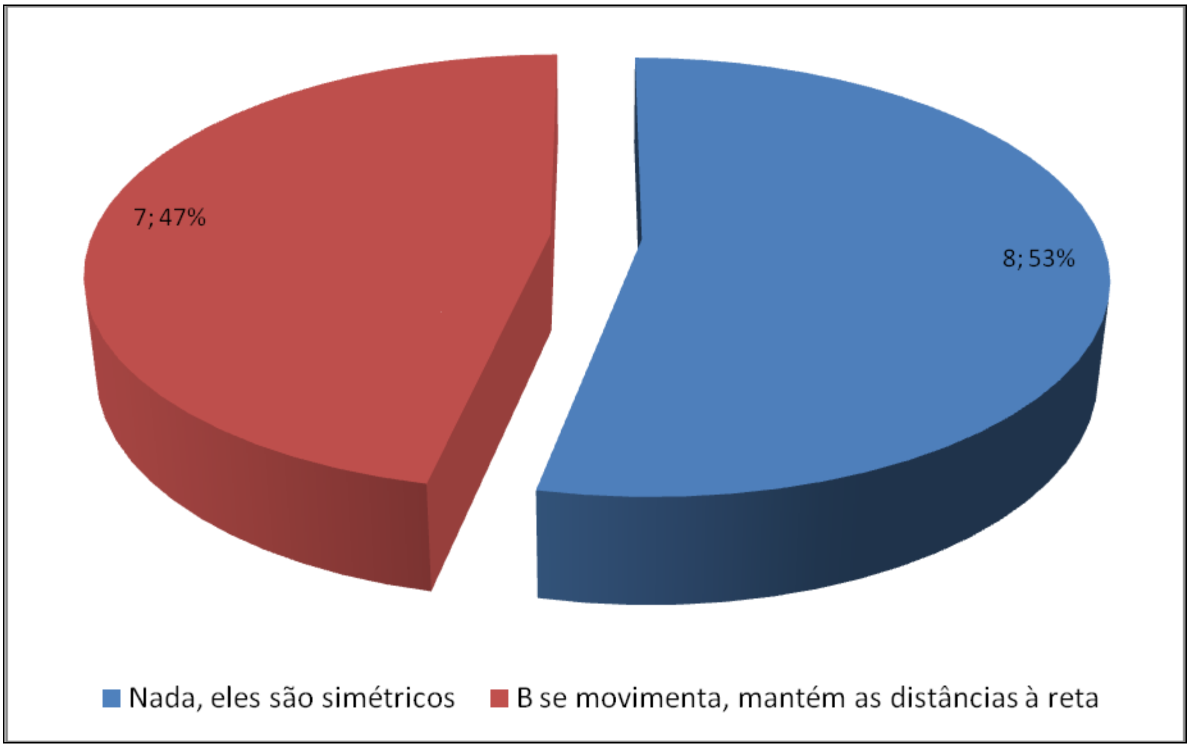


Gráfico 12 – Os círculos e o movimento da reta

Na questão que recomendava movimentar a reta e descrever o que acontece com os triângulos, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 13.

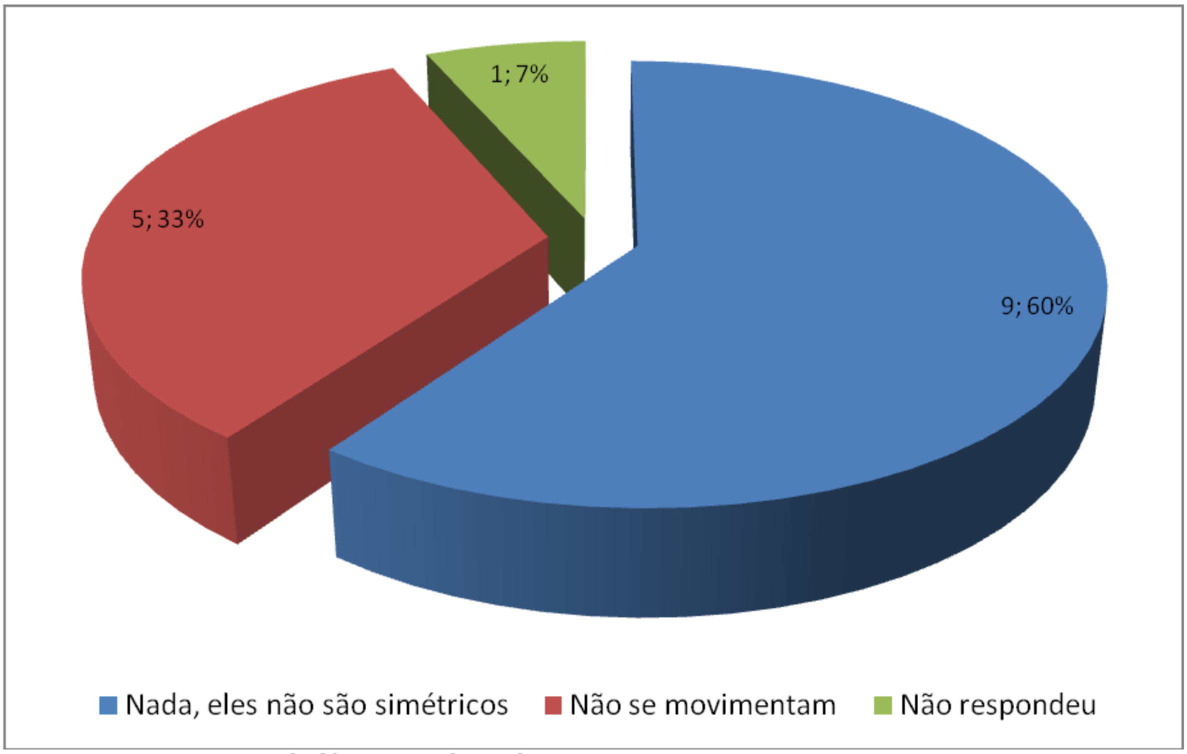


Gráfico 13 – Os triângulos e o movimento da reta

Com relação aos itens desta questão, com exceção de algumas duplas que deixaram de responder, as demais respostas não podem ser consideradas erradas. O que pode ser constatado é que algumas duplas limitaram-se à apreensão discursiva, reduzindo seus comentários às características das figuras em jogo, sem conseguir, inclusive, avançar para a questão da simetria que estava sendo destacada. Outras duplas, porém, avançaram para outros aspectos, mobilizando conhecimentos evidenciados no instrumento anterior, o que possibilitou demonstrarem características da apreensão sequencial e perceptiva.

6.2.8 Segunda questão no AGD

Nessa atividade as duplas já haviam superado quase todos os problemas referentes ao uso do AGD. Nesse período, trabalhavam com mais habilidade na relação entre a geometria e a interface disponível para a atividade.

Na questão aqui analisada, espera-se que respondam que os segmentos continuam simétricos, mesmo quando aumentam ou diminuem de tamanho e que a segunda situação é a mesma que a primeira.

Para chegar à construção desejada, deveriam seguir o roteiro e poderiam recorrer ao uso das ferramentas oferecidas pelo *software*. Era esperado que mobilizassem conceitos de reta, reta perpendicular, segmento e circunferência. Os possíveis erros, aqui, levariam à correção e consequente retomada na construção.

Era esperado que os sujeitos pudessem apresentar dificuldades quanto à apreensão discursiva, na conversão de registros de representação (do linguístico para o figural), por não entenderem alguns termos ou palavras que não lhes são familiares, tanto na geometria quanto na língua materna.

Atividade II
Construir e verificar.
a) Represente a reta r.
b) Represente a reta s perpendicular à reta r no ponto P.
c) Obtenha uma circunferência com centro em r, passando por s.
d) Marque as intersecções Q e R da circunferência com a reta s.
e) Crie os segmentos PQ e PR. Meça-os.
Movimente a reta s e observe as medidas de PQ e PR.
Escreva o que você percebe quanto às medidas.
>

Represente o ponto S Sobre a reta r e crie os segmentos SQ e SR. Meça-os.
Quanto às medidas, pode-se afirmar que é a mesma situação que as medidas anteriores?
>

Figura 67 – Atividade II proposta no AGD

Podem-se identificar nessa atividade algumas variáveis didáticas que são o enunciado e o roteiro nele contido, indicando representações e nomeações seguidas do ato de movimentar.

Os aprendizes seguiram o roteiro, usaram as ferramentas disponibilizadas e chegaram à construção desejada. Durante a resolução, várias duplas comentavam que é muito mais fácil trabalhar com o computador que trabalhar com o compasso, lápis e régua para “desenhar” no caderno.

Em relação esta atividade, a construção esperada é aquela que se encontra na próxima figura. As retas poderiam também ser oblíquas.

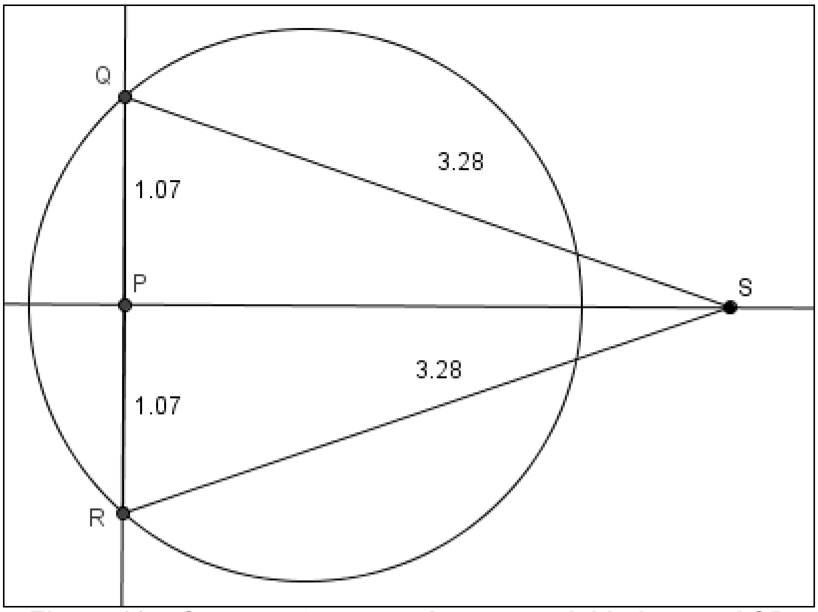


Figura 68 – Construção esperada para a atividade II no AGD

Quanto à construção solicitada, as respostas apuradas para esta atividade estão no gráfico seguinte, quanto à quantidade de acertos e erros.

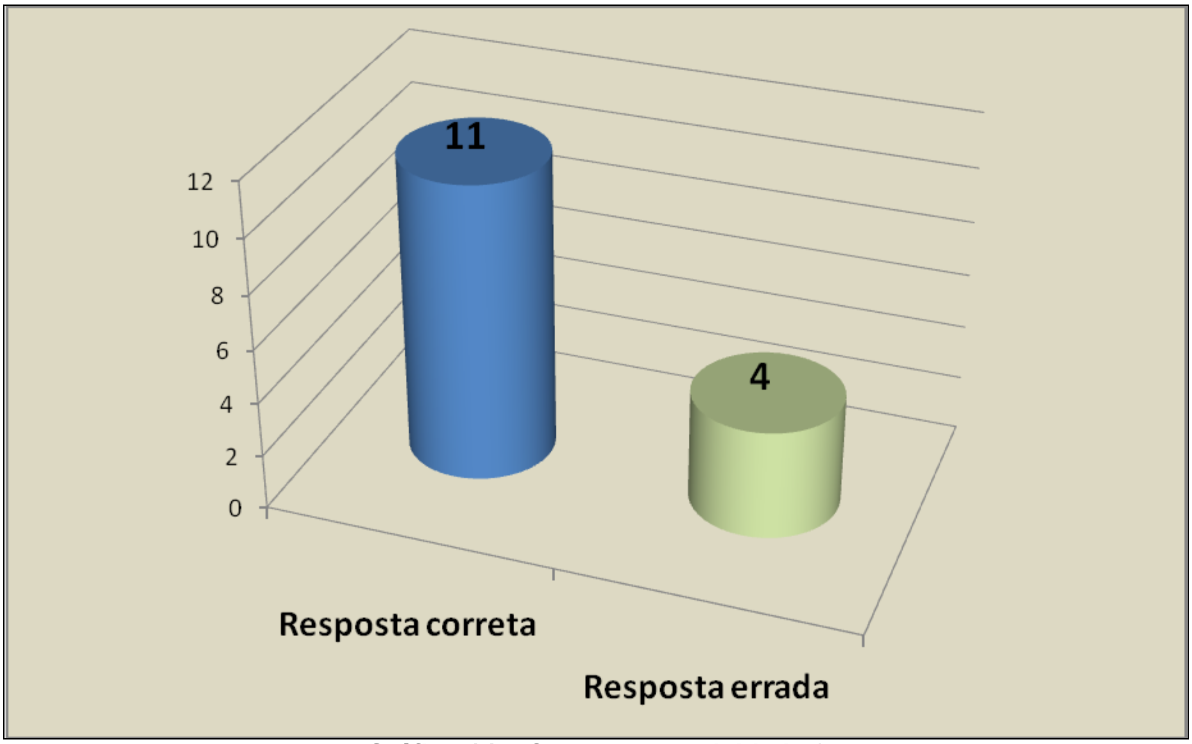


Gráfico 14 – Construção, atividade 2

Outra parte da atividade solicitava justificar as medidas do par de segmentos, PQ e PR. Os resultados apurados, quanto ao desempenho dos sujeitos, que estão representados no gráfico seguinte.

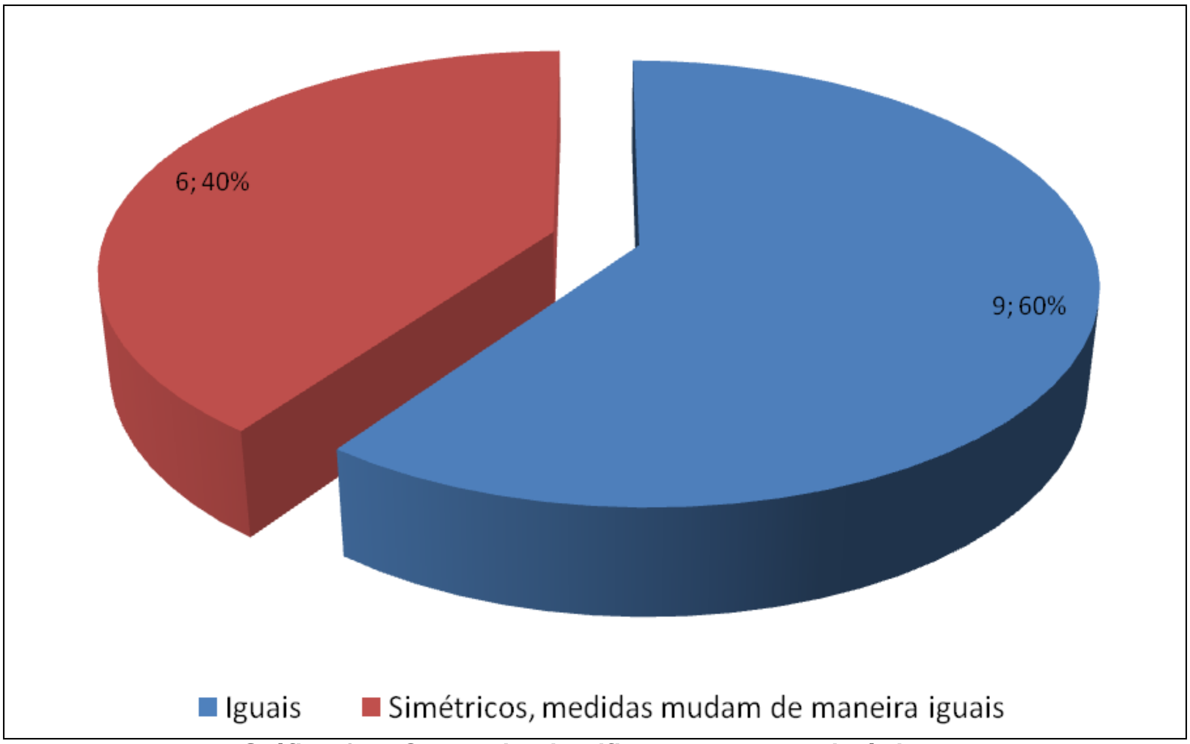


Gráfico 15 – Construir e justificar segmentos simétricos

Quanto à justificativa solicitada na atividade, os resultados apurados são os exibidos no Gráfico 16.

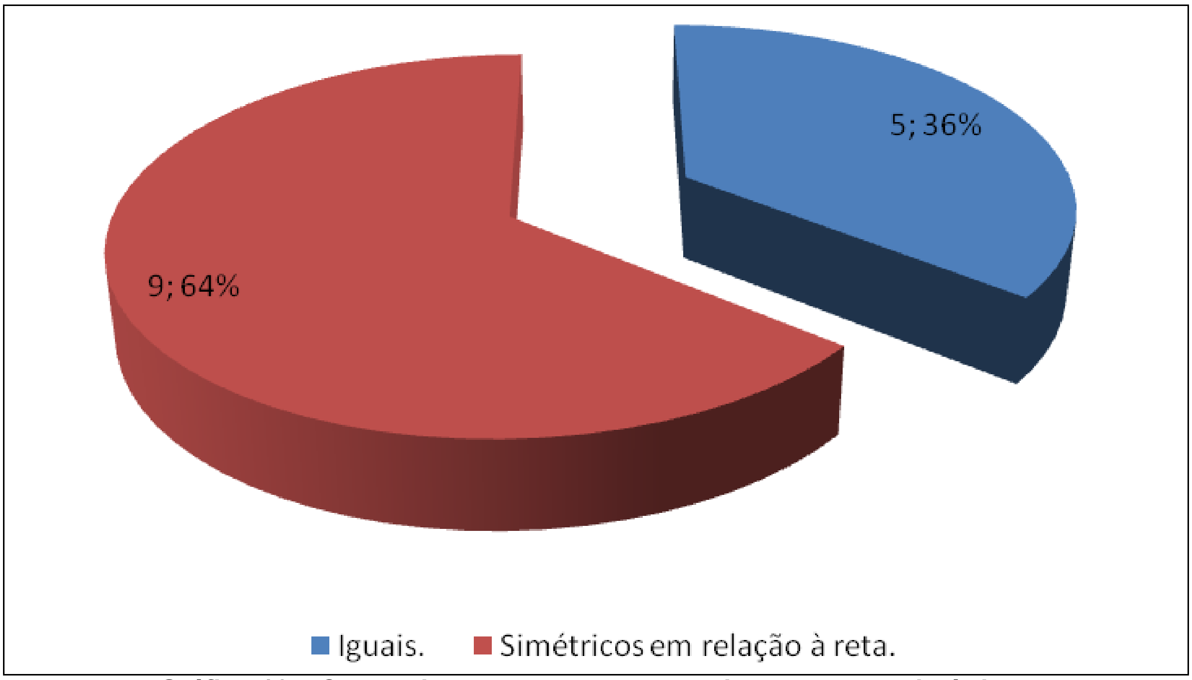


Gráfico 16 – Construir e comparar os pares de segmentos simétricos

Em relação à segunda atividade no Geogebra, foi possível verificar que a maior parte dos alunos conseguiu completar corretamente a construção, bem como justificar de forma coerente a simetria dos segmentos e em relação à reta. Algumas respostas, que usaram coerentemente o termo “simetria” revelaram que os sujeitos conseguiram avançar até o nível da apreensão operatória, a medida que foram capazes de atinar com a existência de subsídios teóricos capazes de auxiliar na obtenção da solução de um problema ou de uma prova, ainda que empírica.

6.2.9 Terceira questão no AGD

Nesta questão, era esperado que os sujeitos percebessem os invariantes que existem em uma relação entre figuras simétricas. Assim, a expectativa era a de, ao arrastar a figura ou parte dela, com o *mouse*, que os estudantes testassem, verificassem e validassem o conceito de simetria na reta, fazendo uma associação de importância entre as figuras simétricas e o eixo de simetria. Desta forma, com as observações, era esperado que chegassem à prova empírica de que os polígonos e os segmentos são simétricos em relação à reta **a**.

Para chegar à construção desejada, os alunos deveriam seguir o roteiro indicado e usar as ferramentas oferecidas pelo *software*. Além disso, os sujeitos necessitariam mobilizar conceitos anteriormente construídos, como reta, reta perpendicular, segmento e circunferência.

Poderiam surgir dificuldades relativas à apreensão sequencial durante a construção e quanto à apreensão operatória. A partir da figura já representada, os estudantes poderiam se apropriar de estratégias tidas como corretas, mas cuja solução não é aquela que a atividade solicita, o que poderia conduzir à compreensão errada.

A construção esperada é aquela apresentada na próxima figura. As retas podem também poderiam ser oblíquas em relação ao limites da atividade.

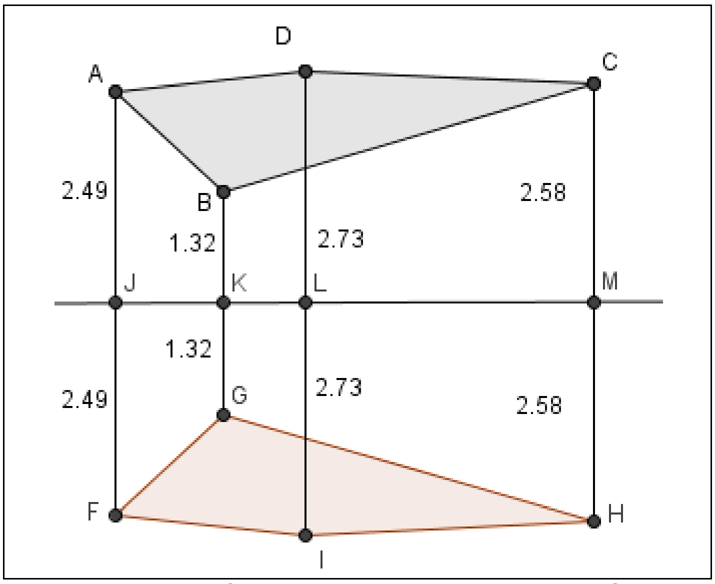
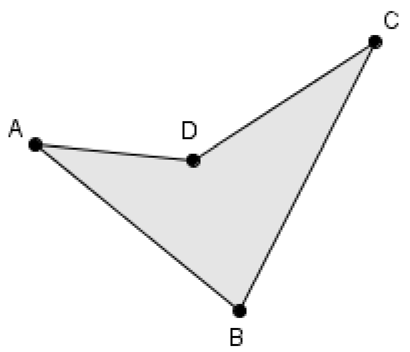


Figura 69 – Construção esperada com o AGD



Atividade III

- Crie quatro retas perpendiculares à reta a passando por A, B, C e D, respectivamente.
- Represente quatro circunferências com seus centros em a, passando por A, B, C e D, respectivamente.
- Identifique os pontos de intersecção da reta com as circunferências. Sendo: A e F em uma circunferância, B e G em outra circunferência, C e H em outra circunferência e, D e I na outra circunferência.

Agora você pode obter o polígono FGHI.
Qual é a função da reta para as figuras?
>

Chame de J, K, L, M aos pontos de intersecção das retas perpendiculares com a reta a. Agora, meça os segmentos AJ e JF, BK e KG, DL e LI, CM e MH. O que é possível concluir?
>

Você percebe alguma relação entre esta atividade e a que você fez no papel quadriculado?
>

Figura 70 – Atividade III proposta no AGD

Nessa atividade existem algumas variáveis didáticas identificadas, que são o enunciado, o roteiro para a construção e a movimentação da figura após sua construção. Foi respondida por 13 duplas. Todas seguiram o roteiro indicado e obtiveram a construção correta.

Com relação ao questionamento feito a respeito da função da reta, foram apurados os resultados exibidos no gráfico 17.

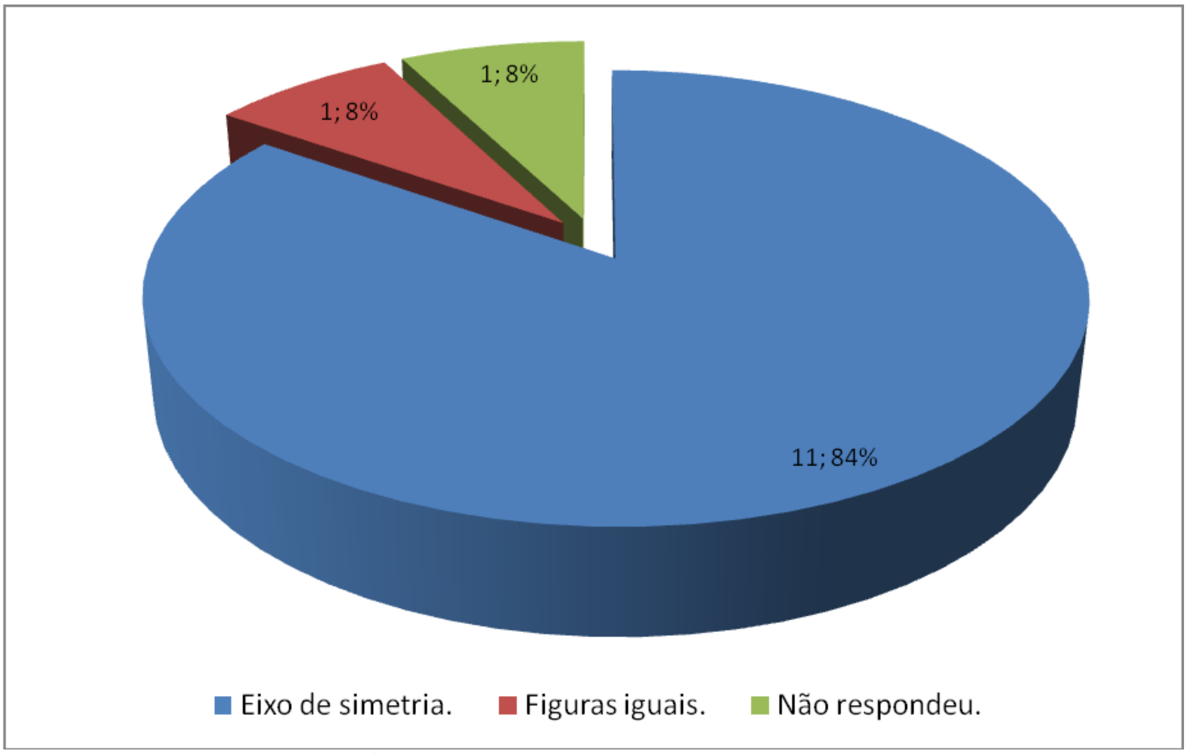


Gráfico 17 – Função da reta para a figura

Com relação à parte da atividade que solicitava a comparação entre os segmentos obtidos, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 18.

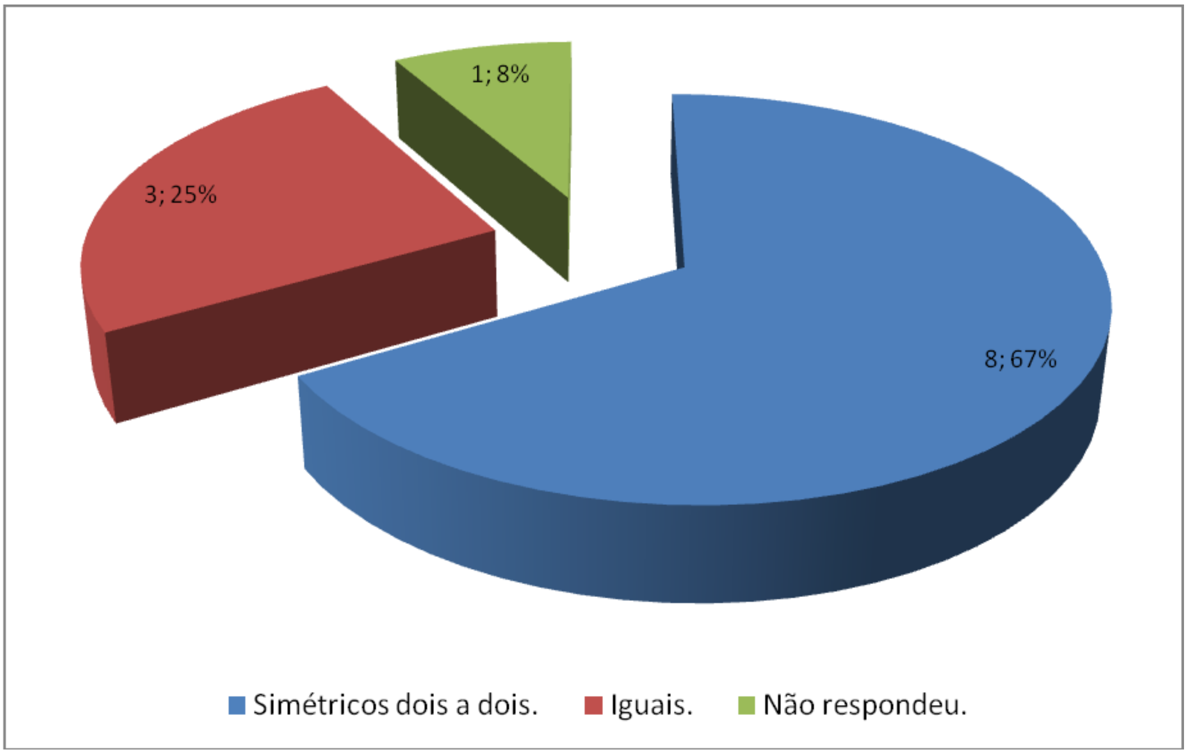


Gráfico 18 – Comparar os 4 pares de segmentos

No que diz respeito à percepção dos sujeitos da pesquisa sobre a relação entre as atividades no papel quadriculado e as atividades no ambiente computacional, apuraram-se os resultados que estão representados no Gráfico 19.

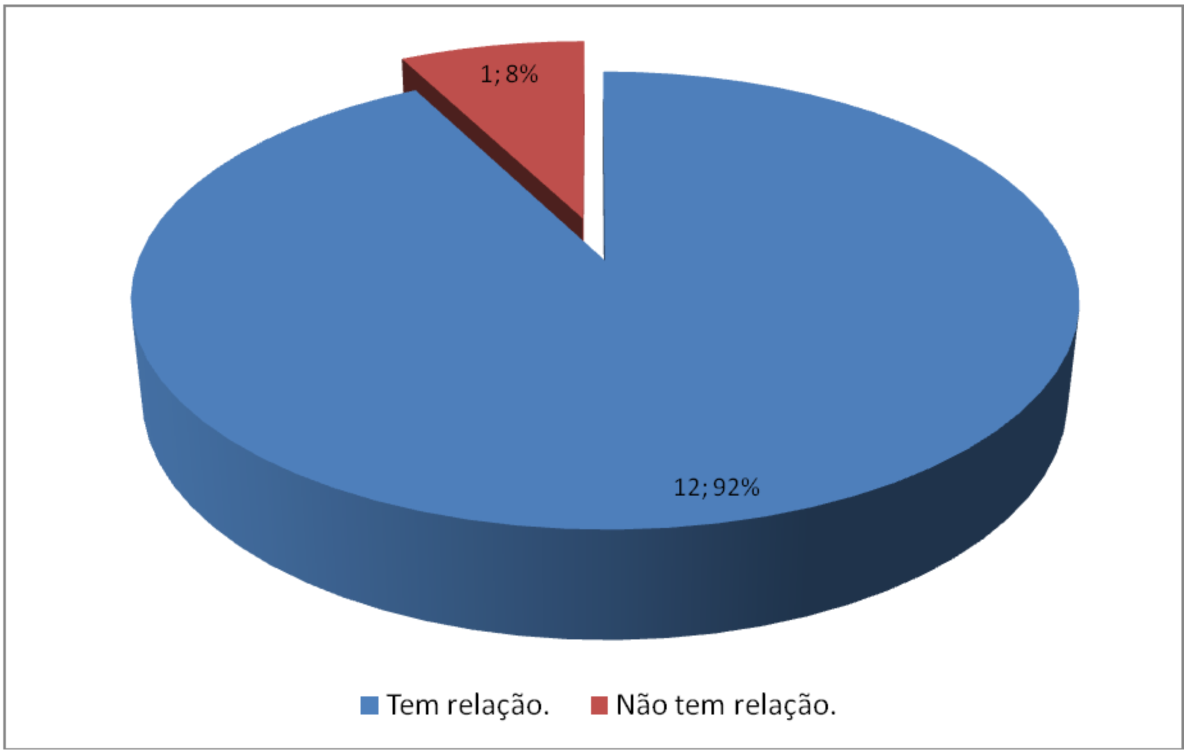


Gráfico 19 – Relação entre a atividade no AGD e no papel

A última pergunta da atividade trazia um questionamento relativo à comparação dos recursos no ambiente dinâmico com o ambiente estático. Uma dupla não apresentou resposta; das 12 respostas obtidas, 10 afirmaram que a geometria no computador dá condições para medir, comparar e verificar as medidas obtidas e, também, quando ocorre um erro qualquer na construção, torna-se bastante fácil de corrigir.

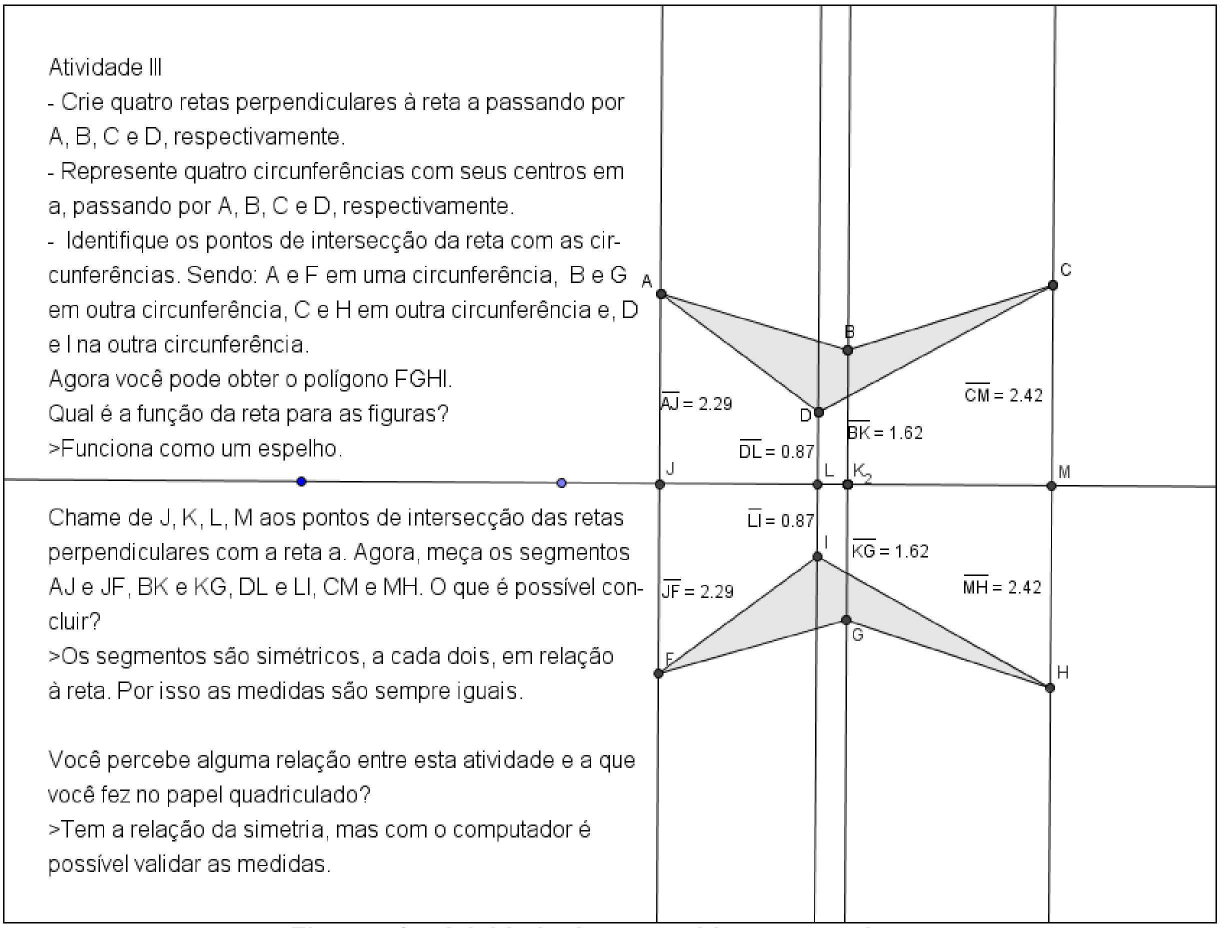


Figura 71 – Atividade desenvolvida por uma dupla

Nas interações ocorridas entre os componentes das duplas durante as atividades, os aprendizes comentavam que a atividade era de geometria, sim, mas não qualquer atividade de geometria: essas figuras tinham que ser “uma o reflexo da outra”, “só seriam simétricas se as distâncias das figuras até a reta fossem iguais, pois a reta sempre vai ser o espelho”. Percebeu-se, assim, que, paulatinamente, os estudantes iam se apropriando dos termos corretos e aumentavam o domínio sobre o assunto “simetria axial”. A maioria dos estudantes, então, conseguiu transitar pelos níveis de apreensão figural indicados por Duval (1988). Além disso, diante de cada uma das atividades, os sujeitos, em sua maioria, foram capazes de enveredar por uma alternativa de solução, tendo como base os conhecimentos adquiridos até aquele ponto, considerando a experiência em ambos os ambientes, estático e dinâmico. No AGD, quando necessário, retomavam a resolução. Trocavam informações, de forma que um aluno compartilhava informações com o outro, de modo a continuar desenvolvendo o experimento. Quando achavam que já haviam terminado sabiam que seria possível e com facilidade validar sua construção e também sua descrição, confrontar o registro figural com “o registro discursivo” e vice-versa.

Após a resolução realizada foi usado uma aula, 50 minutos, para que eles expusessem oralmente as atividades. A maior parte dos alunos comentou das vantagens do AGD. Eles destacaram as possibilidades de movimentação e verificação das construções, principalmente quando tinham que realizar comparações entre segmentos ou figuras. Houve também comentários quanto às palavras novas que eles não conheciam, porém significavam o que conheciam agora, como “arrastar e movimentar”, “manter e conservar”, “eixo de simetria e espelho”, “simétrico em relação à reta e reflexão”, “intersecção e ponto onde as retas se encontram”.

Durante essa aula de debates e comparações, foi possível institucionalizar o objeto matemático em estudo (BROUSSEAU, 1987). Para Almouloud (2007, p. 40) institucionalização é definida como a situação na qual o professor expõe convencional e explicitamente o estatuto cognitivo do saber.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como proposta investigar o uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial, com uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para alunos com faixa etária de 11 anos matriculados na 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental.

Inicialmente, foi feita uma busca nos documentos oficiais, com intuito de verificar o que é proposto no que tange às transformações geométricas. Prosseguiu-se em obras que relatam o tratamento dado ao ensino de geometria nas escolas e nos livros didáticos, como esse tema é inserido em seus conteúdos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) indicam que o trabalho envolvendo as transformações geométricas (isometrias e homotetias) deve começar no Ensino Fundamental, mas não classifica em qual série começar e o que abordar. Foram analisados livros destinados aos 3º e 4º ciclos. A busca prosseguiu até o PNLD (BRASIL, 2009). Os livros indicados neste documento apresentaram em seus conteúdos as transformações geométricas. Nas séries iniciais é dado destaque à reflexão com uma abordagem cujas estratégias usadas são a comparação de figuras, a dobradura do papel para sobreposição e algumas construções usando apenas o lápis. Não mencionam o uso de instrumentos como a régua e o compasso. Para as séries finais, retoma-se a simetria axial no 5º ano, com indicações ao uso de instrumentos para a construção, avançam gradativamente nos volumes dos anos/séries subsequentes para a translação, a simetria pontual, a rotação e até as homotetias. Não se verificou a abordagem da simetria por deslizamento.

As indicações dos documentos oficiais e as inserções nos livros didáticos são positivas, porém são apenas teorias. A literatura analisada aqui contém, por exemplo, os trabalhos de Pavanello (1993), Catunda et al (1998) e Almouloud (2007). Tais trabalhos apontam a precariedade através da qual a geometria em geral é colocada na prática docente em nossas escolas. Essa precariedade ocorre por vários motivos mencionados nesses trabalhos e analisados aqui: problemas na formação dos professores, desconhecimento dos conteúdos de geometria, excesso de formalizações entre outros.

Os trabalhos de pesquisa consultados revelaram a importância da intermediação das TICs para tratar das transformações e das construções geométricas, já que facilitam a validação e prova dos resultados. Com isso, confirmam as indicações de seu uso mencionadas pelos PCNs.

A questão de pesquisa buscou responder até que ponto a criação de uma abordagem didática que inclua a mediação tecnológica para o trabalho com simetria axial no plano para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental pode auxiliar a construção do conhecimento deste tema específico e de que maneira os erros e dificuldades de aprendizagem, encontrados no processo de ensino e aprendizagem de simetria axial, podem ser utilizados como elementos para uma abordagem reconstrutiva do conhecimento, tendo por base uma estratégia pedagógica com uso de TICs e de outras tecnologias.

As sequências de atividades foram elaboradas e desenvolvidas em duas etapas distintas, mas os resultados apresentados não foram tratados distintamente. O trabalho didático levado a efeito nesta pesquisa considerou o uso de estratégias pedagógicas com o uso de tecnologias, conforme a proposição de Oliveira (2009). Ao longo das atividades propostas, ficou claro – e isto ressalta das análises – que as diversas tecnologias utilizadas nos distintos momentos da pesquisa tiveram caráter complementar. Os conceitos relativos à simetria axial começaram a ser apresentados (alguns) ou recuperados (outros) da estrutura cognitiva dos estudantes a partir das atividades com uso de ferramentas e interfaces tradicionais, como lápis, papel e compasso. Neste ambiente, surgiram algumas dificuldades que puderam ser mapeadas e seguem, à guisa de síntese:

- *Manipulação de ferramentas*: para Borba e Penteado (2003) e para Oliveira (2009), os instrumentos tradicionais também são tecnologias, logo, implicam em técnicas específicas e necessitam, para melhor aproveitamento, de fluência no uso. As dificuldades aqui relatadas representam autênticos obstáculos à correta consecução das tarefas e, por consequência, à consolidação dos conceitos de simetria axial pelos estudantes;
- *Mobilização de conhecimentos prévios*: boa parte dos sujeitos não conseguiu recuperar conceitos já estudados e que deveriam fazer parte de sua estrutura de conhecimentos. De certa forma, a primeira atividade concorreu para resgatar conceitos e trabalhar inicialmente alguns pressupostos necessários à compreensão do tema em estudo.

> Quando isto foi feito, apareceram os erros, encarados como ocorrências aproveitáveis à aprendizagem e utilizados em seu aspecto reconstrutivo, quando da apresentação do segundo instrumento. Os comentários dos estudantes mostraram que, ao conseguir tomar as tarefas que tinham diante de si, consolidaram conceitos antes difusos ou mesmo não entendidos. Os erros não foram, portanto, certificados em ânimo de permanência, como definitivos, mas analisados em utilizados ao longo da estratégia, de forma reconstrutiva (PERRENOUD, 2000; BROUSSEAU, 2001; OLIVEIRA, 2009).

Sob outro aspecto, o enfoque da teoria das situações didáticas (BROUSSEAU, 2001; ALMOULOUD, 2007) os sujeitos da pesquisa puderam buscar, ao longo de toda a estratégia, a melhor solução para as atividades propostas, tendo por base o conhecimento visado, interagindo com ele, de forma a ir além do aspecto meramente empírico, o que lhes permitiu emitir julgamentos sobre os resultados alcançados (*ação*). Em função da complementaridade dos elementos usados na estratégia pedagógica, os estudantes puderam compreender e formular, ora verbalmente, ora através da escrita, diversos elementos que permitiram transformar o conhecimento implícito em conhecimento explícito (*formulação*). Na discussão em duplas com o AGD e nos discursos dirigidos ao pesquisador, os alunos puderam superar a validação empírica obtida anteriormente, refinando a formulação, discutindo e refutando conjecturas, de modo a consolidar as idéias adquiridas (*validação*). Finalmente, foi possível eleger o momento correto para formalizar o saber adquirido, reforçando e reposicionando seu *status* de saber matemático (*institucionalização*).

Além disso, ao usarem instrumentos concretos, os alunos se mostraram mais participativos e interessados, talvez por saírem das rotineiras aulas expositivas. Porém, isso não garantiu isenção de erros. A realização de construções e as dúvidas ocorridas permitem afirmar, em conjunto com os argumentos da estratégia supramencionada, que o método de construção por instrumentos no ambiente estático deve ser realizado primeiro para depois permitir a continuidade em direção das construções no ambiente informatizado.

A comparação entre resultados obtidos no caderno e no computador apresentou novos significados para os alunos quanto ao uso da régua, do compasso e de outros instrumentos. Perceberam que não se limitam a um simples treinamento para memorização e posterior repetição, quanto ao conhecimento, nem tiveram qualquer indicação sobre o abandono das tecnologias ditas tradicionais, mas da redefinição das mesmas, em um contexto que admite a incorporação de mídias, de tecnologias digitais (OLIVEIRA, 2009; BORBA e PENTEADO, 2003).

Resta indicar que não foi possível recuperar os eventuais erros que ocorreram no AGD em continuidade da estratégia de uso reconstrutivo, pois demandaria uma terceira fase, não comportada por esta investigação. Deixa-se aqui tal cometimento como sugestão para pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. E. B. **Proinfo:** Informática e Formação de Professores**,** volume 2,. Secretaria da Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2000.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Editora UFPR, Curitiba, Paraná, Brasil, 2007.

ALVES, D. S. **Simetria Axial:** uma sequência didática para alunos da 6ª série com o uso de software de geometria dinâmica. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005.

AMORIM, J. A. **A educação matemática, a internet e a exclusão digital no Brasil.** Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 10, n. 14, p. 58-65, ago. 2003.

ARAÚJO, A. J. **Simetria de Rotação:** uma sequência didática com o Cabri-Géomètre. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2000.

ARAÚJO, I. B. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e cabri-géomètre.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2007.

ARAÚJO, V.M.R.H. **Informação:** instrumento de dominação e de submissão Revista Ciência da Informação, volume 20, nº 1, Brasília, Brasil, 1991.

ASTOLFI, J.P. **L' érreur**: un outil pour enseigné.ESF Édicteur, Paris, 1997.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 2003.

BAGÉ, I. B. **Proposta para a prática do professor do ensino fundamental I de noções básicas de Geometria com o uso de Tecnologias.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2008.

BALDIN, Y. Y; VILLAGRA, G.A.L; COELHO, L.S. **Um estudo geométrico de classificação de isometrias do plano com Cabri-Géomètre II.** Cabri World 1999. Disponível em http://www.cabri.com.br/pesquisas/c99_anais/pa/pa_yurikobaldin.htm. Busca em 03/2010.

BELLONI, M. L. **O que é mídia-educação,** Autores Associados, 2001. – (Coleção polêmicas do nosso tempo; 78. – Campinas, SP.

BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. 2ª edição. Cortez Editora, São Paulo, São Paulo, Brasil, 2005.

BIGODE, A. J. L.; **Matemática Hoje é feita assim**, 7ª série. Editora FTD. São Paulo, 2000.

BILAC, C. U, **Possibilidades de Aprendizagem das Transformações Geométricas com o uso do Cabri-Géomètre.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2008.

BOGDAN, R. C. BLIKEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Porto, Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S. e ZULATTO, R. B. A. **Educação a Distância online**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 2ª edição. Ed. Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 1996.

BRASIL, MEC-Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o ensino médio**: Matemática. Vol. 2. Brasília 2002.

BRASIL, MEC-Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: 1998.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Orgs). **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, n.7.2, p.33-115, 1987.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, R. G. do Sul, Brasil, 1989.

CARVALHO, I. C. L.; KANISKI, A. L. **A sociedade do conhecimento e o acesso à informação:** para que e para quem?. Revista Ciência da Informação, volume 29, nº 3, Brasília, Brasil, 2000.

CASTELLS, M. **A Galáxia da Internet:** reflexos sobre a internet, os negócios e a sociedade. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, Ed., 2003.

____________ **A Sociedade em Rede,** 1942, Trad. MAJER, R. V., 6ª ed. São Paulo, SP, Ed. Paz e Terra, 1999.

CATUNDA, O.; DANTAS, M. M. S.; NOGUEIRA, E. C.; SOUZA, N. C. P.; GUIMARÃES, E. C. **As Transformações Geométricas e o Ensino de Geometria.** Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil, 1998.

COMMANDINO, F. **Euclides – Elementos da Geometria.** Adicionados e ilustrados por Roberto Simson, 2ª edição. Edições Cultura. São Paulo, 1945.

COSTA, C. O. A. **A Perspectiva no Olhar:** ciência e arte do renascimento. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2004.

DUVAL, R. Approche cognitive des problèmes de geométrie en termes de congruence. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 1, p. 57-74. 1988.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues, Editora Unicamp, Campinas, São Paulo, Brasil, 1995.

GRAVINA, M. A. **Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** Tese (Doutorado em Informática na Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

________________**The Proof in Geometry:** essayz in a dynamical environment. Contribuition to: Paolo Boero, G. Harel, C. Maher, M Miyzaki (organizers). Proof in Proving in Mathematics Education. ICME9 TSG 12. Tokio/Makurari, Japan, 2000.

________________**Geometria dinâmica:** uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte: SBC, 1996. 1 CDROM.

BRASIL. Guia de livros didáticos. **Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2010**: Alfabetização Matemática e Matemática**.** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2009.

_______________________________, PNLD 2008: **Matemática.** Anos finais do Ensino Fundamental. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2007.

GUIMARÃES, L. C.; BELFORT, E.; BELLEMAIN, F. **Geometria:** uma volta ao futuro via tecnologia? In: Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática, 2., 2003, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

HEALY, L. (S.) **Interative design and comparison of learning systems reflection in two dimensions.** PhD thesis University of London, Inglaterra, 2002.

HOHENWARTER, M. **Geogebra: informações**. 2007. Disponível em http://www.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf. Busca em 03/2010.

IMENES, L. M, LELLIS, M. **Matemática para todos**: 5ª série, 3º ciclo. Ed. Scipione. São Paulo, 2002.

IMENES, L. M, LELLIS, M. **Matemática para todos**: 6ª série, 3º ciclo. Ed. Scipione. São Paulo, 2002.

IMENES, L. M, LELLIS, M. **Matemática para todos**: 7ª série, 4º ciclo. Ed. Scipione. São Paulo, 2002.

IMENES, L. M, LELLIS, M. **Matemática para todos**: 8ª série, 4º ciclo. Ed. Scipione. São Paulo, 2002.

JAIME, A. P.; GUTIÉRREZ, A. R. **El grupo de las isometrias del plano.** Madri: Editorial Síntesis, 1996.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias:** o novo ritmo da informação. 3ª edição. Editora Papirus, Campinas, São Paulo, Brasil, 2008.

___________ **Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância.** 2ª edição. Editora Papirus, Campinas, São Paulo, Brasil, 2004.

KERCKHOVE, D. **A pele da cultura:** uma investigação sobre a nova realidade eletrônica. Lisboa: Relógio D'Água Editores, 1997.

LEDERGERBER-RUOFF, E. B. **Isometrias e ornamentos do Plano Euclidiano.** São Paulo: Atual, 1982.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência,** 1956, Tradução COSTA, C. I. Editora 34, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. Col. Paulo Cézar Carvalho, 4ª edição. SBM. Rio de janeiro, 2002.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas, EPU, São Paulo, 1986.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas:** a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação do professor. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2000.

MACEDO, L., **4 cores, senha e dominó. Oficina de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica**, 2ª edição, São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

NEVES, R. S. P. **A formação de conceitos geométricos no contexto dos projetos de trabalho mediada pelo Cabri-Géomètre.** In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Porto. Anais... Porto, Portugal: Faculdade de Ciências, 2005. 1. CD-ROM.

OLIVEIRA, G. P. **Estratégias didáticas em Educação Matemática:** as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília: SBEM, 2009. 1 CD-ROM.

_____________ **Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações:** o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais. *Educação Matemática Pesquisa*. n.10, v.2, 2008.

_____________ **Avaliação em cursos on-line colaborativos:** uma abordagem multidimensional. *Tese de doutorado – Educação*. São Paulo: USP, 2007.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil:** causa e consequências. Zetetiké, v. 1, n.1, p. 7-17, 1993.

PENTEADO, M. G. **Redes de Trabalho**: Expansão das Possibilidades da Informática na Educação Matemática da Escola Básica, em Borba e Bicudo. Cortez Editora, São Paulo, 2005.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Editora Artmed, 2000.

PINTO, N. B., **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Coleção:** Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PROJETO ARARIBÁ: **matemática/obra coletiva**. Org. Juliane Matsubara Barroso, 1ª edição, editora Moderna, 4 volumes para alunos de 5ª a 8ª séries. São Paulo, 2006.

SALAZAR, J. V. F, **Gênese Instrumental na interação com:** um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2009.

SANTOS, J. A. **Formação continuada de professores em geometria por meio de uma plataforma de educação a distância:** uma experiência com professores do ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2007.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas**: 5ª série. São Paulo: SE/CENP, 1998.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas**: 6ª série. São Paulo: SE/CENP, 1998.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas**: 7ª série. São Paulo: SE/CENP, 1998.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas**: 8ª série. São Paulo: SE/CENP, 1998.

SILVA, M. **Educação Online.** 2ª edição. Edições Loyola, São Paulo, São Paulo, Brasil, 2006.

SIQUEIRA, J. E. M.; LIMA, P.F.; GITIRONA, V. **Explorando a simetria de reflexão:** uma sequência didática no Cabri-Géomètre. Disponível em http://www.dmat.ufpr.br/~mro/extensao/v_epem/anais/cc03.pdf. Acesso em: 25 de outubro de 2009.

TROMPSON, P. W. **Experience, problem solving, and learning mathematics:** Considerations in developing mathematic curricula. In E. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 183-243, 1985.

VALENTE. J. A. **Informática na Educação:** uma questão técnica ou pedagógica. In: Pátio, revista pedagógica, ano 03, nº 09. Artmed, Porto Alegre, R. G. do Sul, Brasil, 1999.

VAZ, R. L. **O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2004.

Anexo 1

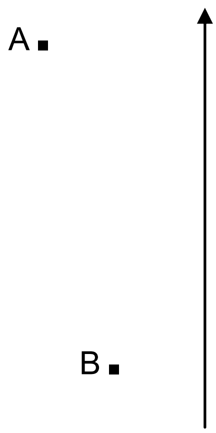
Nome: ____ n°:____ série: **5ª**

Nome: ____ n°:____

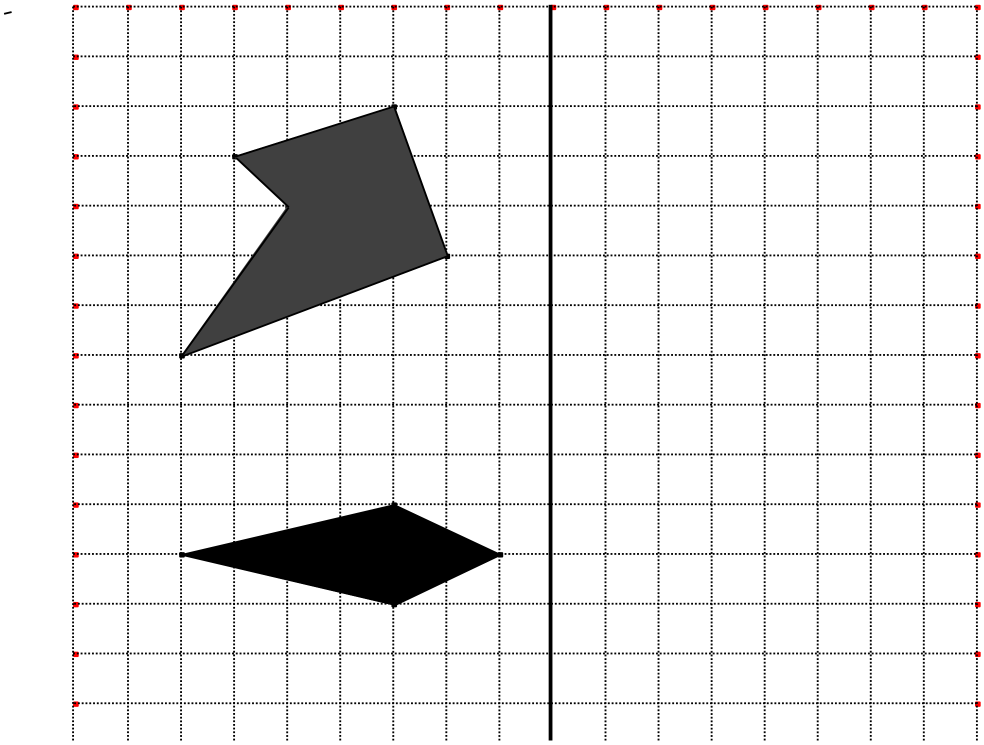
Atividade de Geometria.

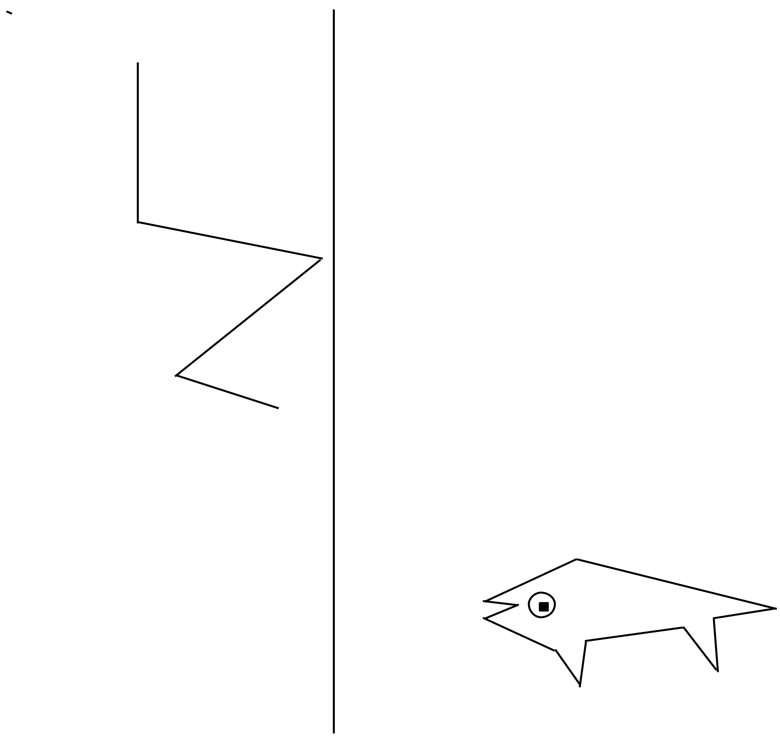
Imagine como funciona um espelho em sua casa. Existe uma relação entre você (sua imagem real) e a imagem refletida no espelho. Qual é esta relação? Pense um pouco e depois tente resolver as questões seguintes.

1) Se a reta representada na vertical fosse um espelho, onde ficaria a imagem de cada ponto? Represente essas imagens, chamando a imagem de A de A' e a imagem de B de B'.

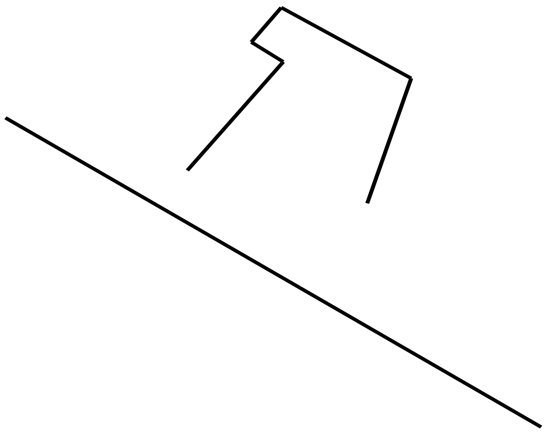


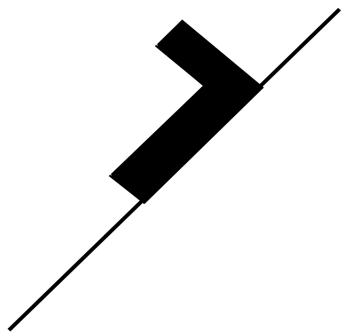
2) Imagine que o segmento representado na vertical seja um espelho, represente a imagem dessas figuras "do outro lado" do espelho.





3) Agora os espelhos são os eixos representados na diagonal. Obtenha sua imagem.



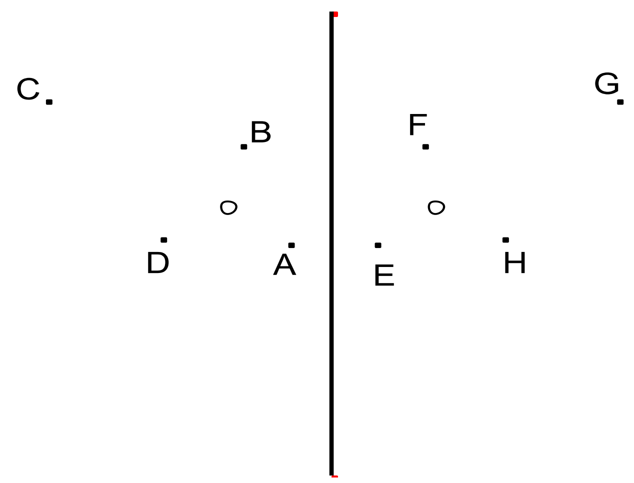


4) Ligue os pontos A, B, C e D, depois ligue os pontos E, F, G e H. Você obteve duas figuras.

a) Há alguma coincidência entre elas? ( ) Sim ( ) Não

b) Explique.

c) O que esse eixo (segmento vertical) representa para as figuras?



O que você pode dizer da figura EFGH em relação a figura ABCD?

Comentários.

5)Você já havia desenvolvido alguma atividade assim? ( ) Sim ( ) Não.

a) O que aprendeu?

____

____

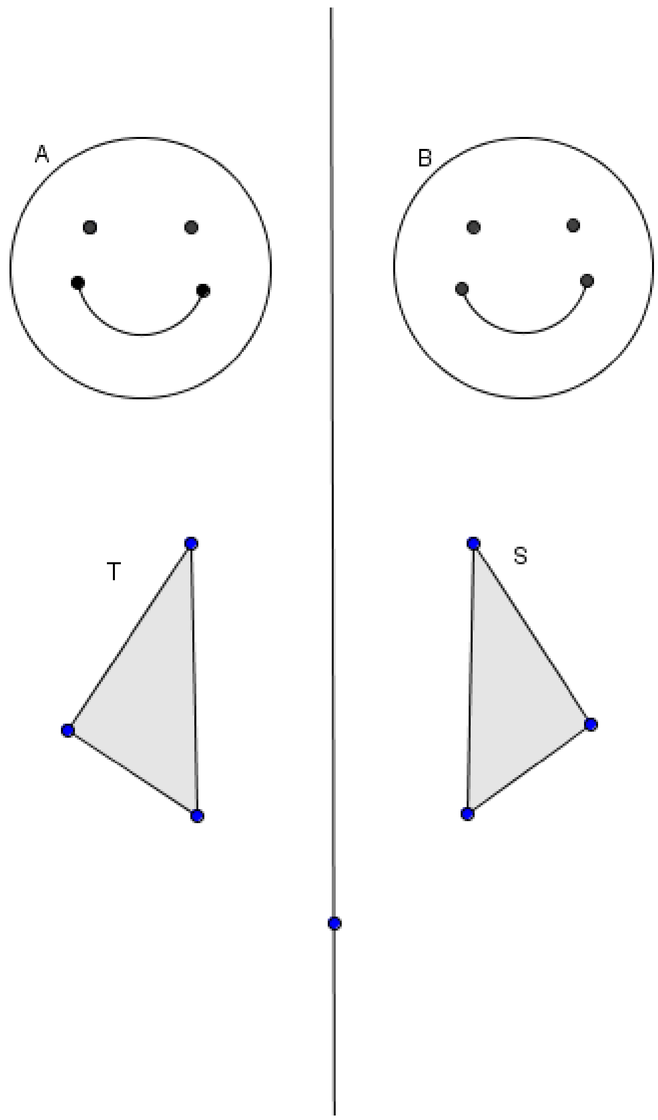
Ao transportar uma figura de um lado para o outro lado da reta suas medidas e formas são mantidas. Esse transporte ou movimento recebe o nome de reflexão. Como as figuras são iguais, podemos dizer que a figura EFGH é a simétrica da figura ABCD em relação a reta.

b) O que mudaria se o espelho (eixo de simetria) estivesse na horizontal?

____

Anexo 2

Atividades de Geometria com uso do *software* Geogebra



Atividade I.
Observe as figuras.
1) Que relação existe entre elas?
>

Use o mouse e movimente o círculo A, original, ou parte dele.
2) Descreva o que você pode perceber.
>

Agora movimente o círculo B.
3) O que houve?
>

Agora escolha movimentar o triângulo T ou o triângulo S.
4) Descreva o que você percebeu.
>

Vamos, dessa vez, movimentar a reta.
5) O que ocorre com os círculos?
>

6) E com os triângulos?
>

Atividade II

Construir e verificar.

a) Represente a reta r.

b) Represente a reta s perpendicular à reta r no ponto P.

c) Obtenha uma circunferência com centro em r, passando por s.

d) Marque as intersecções Q e R da circunferência com a reta s.

e) Crie os segmentos PQ e PR. Meça-os.

Movimente a reta s e observe as medidas de PQ e PR.

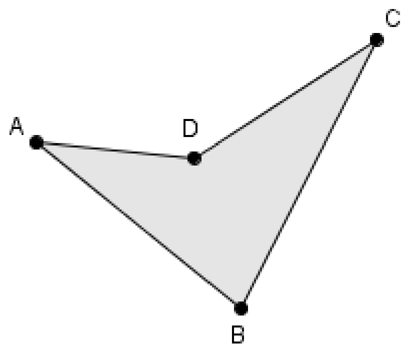
Escreva o que você percebe quanto às medidas.

>

Represente o ponto S Sobre a reta r e crie os segmentos SQ e SR. Meça-os.

Quanto às medidas, pode-se afirmar que é a mesma situação que as medidas anteriores?

>



Atividade III

- Crie quatro retas perpendiculares à reta a passando por A, B, C e D, respectivamente.
- Represente quatro circunferências com seus centros em a, passando por A, B, C e D, respectivamente.
- Identifique os pontos de intersecção da reta com as circunferências. Sendo: A e F em uma circunferância, B e G em outra circunferência, C e H em outra circunferência e, D e I na outra circunferência.

Agora você pode obter o polígono FGHI.
Qual é a função da reta para as figuras?
>

Chame de J, K, L, M aos pontos de intersecção das retas perpendiculares com a reta a. Agora, meça os segmentos AJ e JF, BK e KG, DL e LI, CM e MH. O que é possível concluir?
>

Você percebe alguma relação entre esta atividade e a que você fez no papel quadriculado?
>