PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

OTÁVIO YOSHIO YAMANAKA

Estudo das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

OTÁVIO YOSHIO YAMANAKA

Estudo das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do(a)* ***Prof(a). Dr(a). Sandra Maria Pinto Magina****.*

SÃO PAULO

2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

A meu pai (em memória) por mais uma conquista de seu filho.

À minha base familiar pelo incentivo e apoio, para que este trabalho fosse efetivado.

Em especial, a minha mãe, razão de minha vida, sem o qual nada poderia ser feito.

E a todos que, de forma direta ou indireta me ajudaram neste trabalho, meu carinho.

AGRADECIMENTOS

Com este trabalho concluo mais uma etapa de meu caminho profissional e acadêmico, muitos foram os acontecimentos vividos, muitos episódios marcaram esta trajetória, muitas alegrias e vários momentos difíceis. Assim meus agradecimentos não vão apenas às pessoas que estiveram diretamente ligadas ao mestrado, mas para àqueles que se fizeram presentes em minha vida ao longo desse caminho, que se consolida a partir desta obra.

<u>Ao que transcende à este Mundo.</u>

Primeiramente e acima de tudo à **Deus**, fonte de força, fé, esperança e amor por me conceder a graça de ter trilhado este caminho.

<u>Aos que possibilitaram a realização deste trabalho:</u>

À equipe gestora e ao corpo docente da E.E. Joaquim Nabuco, aos alunos do 6º Semestre – Turma B – do curso de Licenciatura Plena em Pedagogia, das Faculdades Integradas Tereza Martin, pois sem eles esta pesquisa não se efetivaria.

Não posso deixar de ressaltar meus sinceros agradecimentos à Secretaria de Estado da Educação, por intermédio do Projeto Bolsa Mestrado, por ter financiado esta pesquisa.

<u>Ao mundo acadêmico:</u>

À minha orientadora e amiga, Profª. Drª. Sandra Maria Pinto Magina, por tudo o que aprendi nestes anos, por suas infinitas correções, suas idéias que muito colaboraram para que chegássemos ao término deste trabalho.

Aos participantes do Grupo REPARE em Educação Matemática, por todas as ressalvas, correções e sugestões na escrita deste trabalho e devo ressaltar que, o fundamental no grupo foi a interação proporcionada pelos mestrandos e doutorandos, que não apenas ajudaram a desenvolver este trabalho, mais do que isto ampliaram meu horizonte de conhecimentos, aos queridos amigos, agradeço de coração.

A minha turma de mestrado, cuja união e persistência sempre me motivaram, em especial, aos amigos: Francisco, Graziele, Cristiane e Fábio.

A todos os professores do programa, em especial, a Professora Drª. Silvia Dias de Alcântara Machado, por suas preciosas considerações e por ter fornecido um artigo que originou esta dissertação.

Aos Professores: Alécio Damico e Marisa da Silva Dias, pela participação na Banca Examinadora e, também pelas importantes sugestões fornecidas no Exame de Qualificação.

<u>Aos Amigos:</u>

Abílio Mota, meu “Chefe” e “Professor”, em quem descobri, além de um excelente colega, um amigo generoso, é daquelas pessoas que só o olhar já nos faz sentir uma grande força e imenso apoio.

A Cássio Donato, há mais de 15 anos, pelo carinho e cumplicidade e também pelo apoio recebido em todas as horas que precisei e pela amizade verdadeira, durante todos esses anos de convivência.

A Maria de Fátima Lopes, por todo o apoio recebido na realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

Aos amigos da Diretoria de Ensino – Região Centro, pela confiança depositada em mim e, sobretudo pela amizade verdadeira, durante esses anos de convivência.

Em especial, Ideilson, Rita e Inês, fiéis escudeiros, pela amizade sincera e verdadeira, com quem partilhei sentimentos e pensamentos tão importantes nestes últimos tempos.

<u>À Família:</u>

A minha mãe e meu pai, que sempre colocaram o estudo em primeiro lugar na vida dos filhos; que viveram cada conquista nossa como uma realização pessoal e acima de tudo, souberam aceitar e respeitar as escolhas que fizemos para nossa vida, mesmo aquelas que, no íntimo, eles discordavam.

Aos meus irmãos queridos: Nelson e Lucy, pelo amor e dedicação à família, em especial, pelo apoio nos momentos mais difíceis, meu muito obrigado.

A minha tia Reiko, a quem não tenho palavras para expressar a imensa gratidão que sinto por ela, sempre ao lado da família em qualquer momento, meu muito obrigado.

O autor.

Das Utopias

"Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
a mágica presença das estrelas!"

Mário Quintana – Espelho Mágico

RESUMO

Este estudo teve por objetivo investigar a maneira pela qual o professor concebe uma transição entre os conceitos aritméticos desenvolvidos para uma introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental e também quais são as ações que este desencadeará para que tal transição ou passagem seja efetuada. Neste sentido, foram pesquisadas as concepções dos professores quanto à elaboração de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, bem como as competências relacionadas à resolução de certos problemas e sua representação algébrica com base em uma equação linear simples. Para tal, a fundamentação teórica utilizada foi a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, focando especificamente os Campos Conceituais Aditivos e Multiplicativos, e também as idéias de Ponte (1992) e de Tall e Vinner (1981). O enfoque metodológico da pesquisa apresenta uma abordagem quanti-qualitativa, valendo-se de instrumentos estatísticos para retratar os dados analisados. Quanto ao objetivo é descritiva com um delineamento diagnóstico, tendo como instrumento desse diagnóstico foram utilizados dois questionários. Esses questionários compreenderam três partes distintas, a saber, (1) Perfil, (2) Concepções e (3) Competências. A análise dos resultados obtidos foi realizada quantitativa e qualitativamente e seguindo a mesma ordem em que foram compostos estes instrumentos. Os resultados mostraram que os sujeitos concebem problemas relacionados às situações prototípicas e às primeiras extensões de problemas de estruturas aditivas relacionadas às classes de Composição e Transformação de duas medidas. Para as estruturas multiplicativas foram elaborados problemas basicamente de estruturas quaternárias. Em relação às competências, os sujeitos estão mais familiarizados e têm maior desenvoltura quanto ao trato das representações aritméticas, possuindo uma competência em relação ao enfoque algébrico que se pode classificar como competência elementar.

Palavras-Chave: Generalização Algébrica; Raciocínio Aritmético; Relações Funcionais; Campos Conceituais; Concepções; Competências

ABSTRACT

The purpose of this study was to investigate the way the teacher conceives a transition between the developed arithmetical concepts to an introduction of algebraic representation in the first grades of Elementary School and also which are the actions that he or she will unleash in order for this transition or passage to happen. So, the teacher's conceptions were researched as for the problem elaboration of additive and multiplicative structures, as well as competences related to the solving of certain problem and its algebraic representation as basis in a simple linear equation. For such, the theoretical foundation used was the Conceptual Fields Theory from Gerard Vernaud, focusing specifically on the Additive and Multiplicative Conceptual Fields, and also the ideas from Ponte (1992) and Tall & Vinner (1981). The research methodological approach is qualitative, making use of statistical instruments to show the data analyzed. As for the purpose it is descriptive with diagnostic outlining, having as a diagnosing tool an inquiry. For the data survey, two kinds of inquiries, being one for the teachers working in the first grades of Elementary School and other for students of the teaching credential course in Pedagogy. These inquiries correspond to three different parts, being, (1) Profile, (2) Conceptions and (3) Competences. The analysis of the obtained result was done quantitative and qualitatively and following the same order in which the tools were composed. The results showed that the teachers conceive problems related to additive structures to groups of Composition and Transformation of two measures. For the multiplicative structures the problems were elaborated basically of quaternary structures. In relation to the competences, the subjects are more familiar and have more familiarity when dealing with arithmetical representations, having a complex competence in relation to the algebraic focus that might be classified as an elementary competence.

Keywords: Algebraic generalization; Arithmetical Reasoning; Functional Relations; Conceptual fields; Conceptions; Competences.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Lista de figuras		**PG.**
Figura 1	Recorte – Resolução do problema 1, por um aluno das séries iniciais.	29
Figura 2	Recorte – Resolução do problema 2, por um aluno das séries iniciais.	30
Figura 3	Recorte – Resolução do problema 4, por um aluno das séries iniciais	31
Figura 4	Recorte – Resolução do problema 4, por um aluno das séries iniciais.	31
Figura 5	Recorte – Resposta dada por professor para a questão 8 – Instrumento Diagnóstico.	111
Figura 6	Recorte – Resposta dada por professor para a questão 8 – Instrumento Diagnóstico.	111
Figura 7	Recorte – Resposta dada por professor para a questão 8 – Instrumento Diagnóstico.	112
Figura 8	Recorte – Resposta dada por professor para a questão 8 – Instrumento Diagnóstico.	112
Figura 9	Recorte – Problema classificado como inconsistente	121
Figura 10	Recorte – Problema classificado como inconsistente	121
Figura 11	Recorte – Problema classificado como inconsistente	121
Figura 12	Recorte – Exemplo de resolução incorreta do problema 7 – Instrumento Diagnóstico	130
Figura 13	Recorte – Exemplo de resolução correta do problema 7 – Instrumento Diagnóstico	130
Figura 14	Recorte – Exemplo de resolução correta do problema 7 – Instrumento Diagnóstico	131
Figura 15	Recorte – Exemplo de resolução correta do problema 7 – Instrumento Diagnóstico	131
Figura 16	Recorte – Enfoque algébrico para o problema 7 por um professor	131
Figura 17	Recorte – Enfoque algébrico para o problema 7 por um professor	132
Figura 18	Recorte – Enfoque algébrico para o problema 7 por um professor	132
Figura 19	Recorte – Enfoque algébrico para o problema 7 por professor	133
Figura 20	Recorte – Enfoque algébrico para o problema 7 por professor	133

Lista de Quadros

		PG.
Quadro 1	Relação entre o conceito de esquema e invariantes operatórios com a Teoria dos Campos Conceituais	35
Quadro 2	Exemplo de cálculo relacional	42
Quadro 3	Diagrama – Composição de duas medidas	43
Quadro 4	Diagrama – Transformação de duas medidas	44
Quadro 5	Diagrama – Comparação	44
Quadro 6	Problema 1 – Composição de duas medidas	45
Quadro 7	Problema 2 a – Transformação de duas medidas	45
Quadro 8	Problema 2 b – Transformação de duas medidas	46
Quadro 9	Exemplo de problema de 1ª extensão de problemas de combinação	47
Quadro 10	Exemplo 1 – 1ª Extensão dos problemas de transformação	48
Quadro 11	Exemplo 2 – 1ª Extensão dos problemas de transformação	48
Quadro 12	Exemplo 1 – 2ª Extensão – Problemas de Comparação	49
Quadro 13	Exemplo 2 - 2ª Extensão – Problemas de Comparação	49
Quadro 14	Exemplo 1 – 3ª Extensão – Problemas de Comparação	50
Quadro 15	Exemplo 2 – 3ª Extensão – Problemas de Comparação	50
Quadro 16	Exemplo 1 – 4ª Extensão – Problemas de Transformações	51
Quadro 17	Exemplo 2 – 4ª Extensão – Problemas de Transformações	51
Quadro 18	Exemplo 1 – 4ª Extensão – Problemas de Comparação	52
Quadro 19	Exemplo 2 – 4ª Extensão – Problemas de Comparação	53
Quadro 20	Diagrama – Composições Sucessivas	54
Quadro 21	Exemplo 1 – Problemas de Composições Sucessivas	54
Quadro 22	Exemplo 2 – Problemas de Composições Sucessivas	55
Quadro 23	Diagrama – Transformação de Combinações	55
Quadro 24	Exemplo 1 – Problema de Transformação de Combinação	55
Quadro 25	Exemplo 2 – Problema de Transformação de Combinação	56

Quadro 26	Diagrama – Multiplicação	58
Quadro 27	Exemplo 1 – Problemas de Multiplicação	58
Quadro 28	Exemplo 2 – Problemas de Multiplicação	59
Quadro 29	Diagrama – Divisão como partição	60
Quadro 30	Exemplo – Problema de divisão como partição	60
Quadro 31	Diagrama – Divisão como Quotição	61
Quadro 32	Exemplo – Problema de Divisão como Quotição	61
Quadro 33	Diagrama – Quarta Proporcional	62
Quadro 34	Exemplo – Quarta Proporcional	63
Quadro 35	Exemplo – Problema de Proporções Múltiplas	64
Quadro 36	Exemplo 1 – Produto de Medidas	65
Quadro 37	Exemplo 2 – Combinatória	65
Quadro 38	Exemplo 3 – Configuração Retangular	66
Quadro 39	Exemplo 1 – Comparação Multiplicativa	66
Quadro 40	Exemplo 2 – Comparação Multiplicativa	66
Quadro 41	Comparativo entre Esquema e Conceito, segundo Vergnaud (1987)	84
Quadro 42	Recorte – Questões 1 a 4 do instrumento diagnóstico, referente ao perfil do professor	94
Quadro 43	Recorte – Questões 5 e 6 do instrumento diagnóstico, referente ao perfil do professor	95
Quadro 44	Recorte – Questões 7 a 9 do instrumento diagnóstico, referente ao perfil do professor	95
Quadro 45	Recorte – Questões do instrumento diagnóstico relativo ao perfil do aluno	96
Quadro 46	Recorte – Questões do instrumento diagnóstico relativo ao perfil do aluno	97
Quadro 47	Recorte – Questões do instrumento diagnóstico relativo, às concepções	98
Quadro 48	Recorte – Questões do instrumento diagnóstico relativo, às competências	
Quadro 49	Quantidade de professores por série	112
Quadro 50	Tabela e Gráfico de distribuição de frequências da classificação dos problemas de estruturas aditivas	119
Quadro 51	Tabela e Gráfico de distribuição de frequências da classificação dos problemas de estruturas multiplicativas	123
Quadro 52	Resumo das representações algébricas, a partir da resolução de problemas de	132

Lista de gráficos e tabelas

Lista de gráficos e tabelas		PG.
Gráfico 1	Distribuição dos professores de acordo com o nível de instrução	106
Gráfico 2	Distribuição dos professores, conforme sua formação	107
Gráfico 3	Comparativo entre formação específica e outros cursos, professores	107
Gráfico 4	Rede de ensino onde o professor atua	108
Gráfico 5	Tempo de experiência docente	109
Gráfico 6	Quantidade de aulas destinadas ao ensino da Matemática	110
Gráfico 7	Gosto pela Matemática	110
Gráfico 8	Conteúdo preferido	111
Gráfico 9	Séries preferidas	112
Gráfico 10	Formação – Alunos	114
Gráfico 11	Experiência docente – Alunos	115
Gráfico 12	Tempo de trabalho docente – Alunos	115
Gráfico 13	Série em que ministra aulas – Alunos	116
Gráfico 14	Rede de ensino em que atua – Alunos	116
Gráfico 15	Quantidade de aulas destinadas ao ensino da Matemática – Alunos	117
Gráfico 16	Gosto pela Matemática – Alunos	117
Gráfico 17	Porcentagem de acertos – problemas de estruturas aditivas	128
Gráfico 18	Porcentagem de acertos – problemas de estruturas multiplicativas	130
Tabela 1	Distribuição de frequência da classificação de problemas aditivos	124
Tabela 2	Distribuição de frequência da classificação de problemas multiplicativos	128

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO..18

1 Concepção e Competência 18

2 Aritmética e Atividade Algébrica 19

3 A passagem entre a aritmética e a álgebra.....................................21

4 Síntese da dissertação 21

INTRODUÇÃO 23

1 MOTIVAÇÃO E RELEVÂNCIA DA PESQUISA 23

2 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA: A INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA 26

2.1 A Conferência: “Álgebra: Uma passagem para um futuro tecnológico” 26

2.2 Early Algebra (Álgebra Inicial)...28

2.3 Os estudos do grupo Schliemann et al. 31

3 OBJETIVO E QUESTÃO DE PESQUISA...36

CAPÍTULO I: ASPECTOS TEÓRICOS...37

1.1 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS...38

1.1.1 Conceito de Esquema 40

1.1.2 Invariantes Operatórios 42

1.1.3 Campo Conceitual Aditivo (Estruturas Aditivas)................................45

1.1.3.1 As relações aditivas de base...47

1.1.3.2 Protótipos 49

1.1.3.3 Extensões..51

1.1.3.4 Outras situações prototípicas...57

1.1.4 Campo Conceitual Multiplicativo (Estruturas Multiplicativas) 60

1.1.4.1 Relações Quaternárias..61

1.1.4.2 Relações Ternárias 67

1.1.5 Álgebra e as estruturas aditivas e multiplicativas...................................72

1.1.5.1 Estruturas aditivas...73

1.1.5.2 Estruturas multiplicativas..75

1.1.5.3 Escrita Algébrica 77

1.1.6 O Campo Conceitual Algébrico 78
1.1.5 Álgebra e as estruturas aditivas e multiplicativas 72
1.2 OS ESUDOS SOBRE A INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA 80
1.2.1 Rômulo Lins e James Kaput 80
1.2.2 Jorge Tarcísio da Rocha Falcão 81
1.2.3 Carolyn Kieran 83
1.3 AS PESQUISAS SOBRE O DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO E ARITMÉTICO 80
1.3.1 Marília Barros de Oliveira 84
1.3.2 Leila Muniz Santos 85
1.3.3 Ubiratan Barros Arrais 86
1.4 CONCEPÇÕES, COMPETÊNCIAS E CONCEITOS 87
1.4.1 Concepção e Competência, segundo Gerard Vergnaud 87
1.4.2 Concepção e Competência, segundo João Pedro da Ponte 88
1.4.3 Conceito Imagem e Conceito Definição 89
CAPÍTULO II: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 91
2.1 DISCUSSÃO TEÓRICO METODOLÓGICA 91
2.2 A PESQUISA DE CAMPO 94
2.2.1 O universo de estudo e sujeitos da pesquisa 94
2.2.2 A coleta de dados 96
2.2.3 Os instrumentos diagnósticos 97
2.2.3.1 O perfil 97
2.2.3.2 As concepções 102
2.2.3.2 As competências 103
CAPÍTULO III: ANÁLISE DOS RESULTADOS 108
3.1 PERFIL 108
3.1.1 Perfil - Professores 108
3.1.2 Perfil - Alunos 117
3.2 CONCEPÇÕES 121
3.2.1 As concepções relativas às estruturas aditivas 121
3.2.2 As concepções relativas às estruturas multiplicativas 126
3.3 COMPETÊNCIAS 129
3.3.1 Problemas de Estruturas Aditivas 130
3.3.2 Problemas de Estruturas Multiplicativas 130

CAPÍTULO IV: CONSIDERAÇÕES FINAIS 138

4.1 SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS 139
4.2 RESPONDENDO À QUESTÃO DE PESQUISA 142
4.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS 143

CAPÍTULO V: REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 145

ANEXOS 149

Anexo 1: Equivalência entre os sistemas norte americanos, britânicos e brasileiros de educação 149
Anexo 2: Quadro resumo das relações aditivas de base 150
Anexo 3a: Termo de consentimento - professor 151
Anexo 3b: Termo de consentimento - aluno 152
Anexo 4a: Instrumento Diagnóstico – Perfil - Professor 153
Anexo 4b: Instrumento Diagnóstico – Concepção - Professor 154
Anexo 4c: Instrumento Diagnóstico – Competência - Professor 156
Anexo 4d: Instrumento Diagnóstico – Perfil - Aluno 157
Anexo 4e: Instrumento Diagnóstico – Concepção - Aluno 158
Anexo 4f: Instrumento Diagnóstico – Competência - Aluno 159
Anexo 5: Avaliação – Juiz 1 – Problemas de Estruturas Multiplicativas - Professores 161
Anexo 6: Avaliação – Juiz 2 – Problemas de Estruturas Multiplicativas - Professores 163
Anexo 7: Avaliação – Juiz 3 – Problemas de Estruturas Multiplicativas - Professores 165
Anexo 8: Avaliação – Juiz 1 – Problemas de Estruturas Aditivas - Professores 167
Anexo 9: Avaliação – Juiz – Problemas de Estruturas Aditivas - Professores 169
Anexo 10: Avaliação – Juiz – Problemas de Estruturas Aditivas - Professores 171
Anexo 11: Avaliação – Problemas de Estruturas Aditivas - Alunos...................... 173
Anexo 12: Avaliação – Problemas de Estruturas Multiplicativas - Alunos 173

APRESENTAÇÃO[1]

A pesquisa a ser apresentada nos próximos capítulos compõe um estudo 18diagnóstico fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (1996, 1998) que trata especificamente das concepções e competências que são acionadas na transição ou na passagem entre a aritmética e a álgebra, por professores e futuros professores, relativos aos problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.

Antes de dar prosseguimento às discussões teóricas, a seguir delinearei uma breve discussão dos principais termos que serão tratados no decorrer desta pesquisa.

1. Concepção e Competência:

Ao me referir sobre concepção, adotarei as idéias de Vergnaud (1987) e Ponte (1992).

Ponte (1992) trata a concepção com base na visão cognitivista, de tal forma que atua como uma espécie de filtro; de um lado formando e estruturando o sentido que é dado a certo conceito e, por outro, funciona como elemento bloqueador relacionado a novas situações. Desta forma limita as novas possibilidades de atuação. A concepção serve como cenário para a organização de conceitos.

De acordo com Ponte (1992), as concepções são formadas simultaneamente em dois contextos, o individual e o social,

> As concepções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros). Assim as nossas concepções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que nos habituamos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes. (PONTE, 1992, p. 186)

1- Esta monografia está conforme as novas regras do acordo ortográfico.

Ponte (1992) entende a competência de modo abrangente, como a capacidade objetiva de um indivíduo de resolver problemas e realizar atos definidos.

Em Ponte (1992) há uma abordagem sobre a competência, apoiada nos elementos constitutivos do saber matemático, nas quais existem quatro níveis de competências desse saber: as competências elementares, as intermediárias, as avançadas ou de níveis superiores e os saberes de ordem geral.

O autor classifica esses níveis da seguinte maneira: as competências elementares implicam processos de simples memorização e execução; as intermediárias implicam processos com certo grau de complexidade, porém não exigem muita criatividade; as competências complexas implicam uma capacidade significativa de lidar com situações novas e os saberes de ordem geral que implicam os saberes com influência nos próprios saberes e concepções, ou seja, os metassaberes assim, os três primeiros níveis representam uma progressão em termos de complexidades, o quarto tem um papel regulador.

Para Vergnaud (1987), a concepção e a competência andam lado a lado, de tal forma que as concepções representam as expressões simbólicas relativas ao pensamento do sujeito, e as competências desenvolvem-se baseadas nas ações do sujeito a partir de uma dada situação. Desta forma, a competência é ligada ao saber-fazer, isto, é ao desempenho do sujeito e não é necessariamente visível, ou seja, não é explícita, pois uma pessoa não precisa saber especificamente o conceito relacionado a uma ação para fazer ou resolver o que a ação propõe, assim, a competência leva a uma habilidade que é a ação real.

2. Aritmética e Atividade Algébrica

Neste estudo, a aritmética é compreendida como a ciência dos números, a que estuda as técnicas e regras das operações numéricas: soma, subtração, multiplicação e divisão. Tal contexto, segundo Lins e Gimenez (2000), vem desde a Antiguidade até a Idade Média e concentra-se em dois pontos de vista: o da manipulação e o formalismo aritmético. Mas os autores destacam que a aritmética não só engloba estas duas visões, existem outras reflexões importantes a serem repensadas no ensino da aritmética, tais como:

- O reconhecimento da valorização de se analisar e justificar as relações significativas dos elementos aritméticos, com uso de outras representações, como o de barras coloridas, e, também, o emprego de outras experiências, como por exemplo, o ábaco, material dourado, etc. O trabalho com materiais manipulativos leva a produção de diferentes tipos de justificativas.
- Reconhecer a possibilidade de generalização desde cedo, por exemplo, o trabalho de reconhecer padrões numéricos.

Dentre as reflexões citadas por Lins e Gimenez (2000), adotarei uma delas, que direciona o objeto de estudo de minha pesquisa. Tal reflexão aponta no sentido de que não se pode pensar no ensino da aritmética, baseada única e exclusivamente em métodos algorítmicos, sem a proposição de problemas.

No que tange à atividade algébrica, destacarei três tendências, a “letrista”, a da álgebra como aritmética generalizada e a tendência relacionada ao Campo Conceitual Algébrico de Gerard Vergnaud.

A tendência “letrista” é pautada na seguinte sequência: técnica (algoritmo) / seguida da prática (exercícios). Segundo Lins e Gimenez (2000), tal tendência não se baseia em nenhuma reflexão de qualquer natureza ou profundidade e está ligada apenas à tradição do ensino.

Já a tendência que relaciona a atividade algébrica como aritmética generalizada, tem como ideia central a que a atividade algébrica se caracteriza pela expressão da generalidade. Isto nos reporta ao trabalho com problemas de generalização de padrões geométricos ou numéricos, de tal forma que por meio de uma sequência de números ou formas geométricas encontra-se uma representação por intermédio de expressões algébricas.

Quanto a tendência que se refere ao Campo Conceitual Algébrico[2] Lins e Gimenez (2000) destacam que o modelo é normativo, pois determina alguns aspectos da apropriação da álgebra e, também, estabelece etapas para a resolução de problemas.

Esta tendência é a que mais se aproxima dos objetivos para a atividade algébrica desta pesquisa, consiste em formalizar os problemas por meio de suas escritas simbólicas algébricas em forma de equação linear simples.

2- O assunto Campo Conceitual Algébrico, será objeto de estudo no capítulo referente à Fundamentação Teórica.

3. A passagem entre a aritmética e a álgebra

No trabalho docente, existem situações em que um assunto abordado oferece condições para se introduzir outro assunto. Nesse caso, entre o término de um e a introdução de outro, verifica-se uma transição ou passagem, de tal forma que os conceitos utilizados em um assunto serão refinados para serem empregados na introdução do outro.

Nesta pesquisa, a passagem consiste em transitar do raciocínio aritmético usado em certo problema, para uma linguagem simbólica, em especial a linguagem simbólica da álgebra.

Após estas considerações iniciais apresento a seguir a síntese da dissertação, destacando os principais tópicos que serão tratados em cada capítulo.

4. Síntese da Dissertação

Na Introdução – apresento os motivos e a justificativa que me levaram a realizar esta pesquisa apresentarei também o objetivo da pesquisa e por fim, a questão de pesquisa a que me propus a responder.

O Capítulo I – Aspectos Teóricos – apresenta a base teórica deste trabalho, que dará subsídios para a análise das respostas constantes no instrumento diagnóstico e fundamentar a conclusão da pesquisa. O trabalho estará concentrado nos estudos de Vergnaud (1990) sobre os Campos Conceituais, detalhando as estruturas aditivas e multiplicativas e, também nos estudos relacionados ao Campo Conceitual Algébrico. As pesquisas correlatas versarão sobre pesquisadores do Ensino de Matemática como: Jorge Tarcísio da Rocha Falcão, Rômulo Lins, Carolyn Kieran, João Pedro da Ponte , David Tall e Shlomo Vinner .

O Capítulo II – Aspectos Metodológicos - Descreverá os aspectos metodológicos que orientaram o desenvolvimento desta pesquisa. Neste capítulo apresentarei os aspectos teórico-metodologicos, o universo e os sujeitos da pesquisa e os instrumentos diagnósticos.

No Capítulo III – Análise – Encaminharei a análise dos resultados obtidos na coleta de dados, embasados nas teorias de Tall e Vinner (1988), Vergnaud (1990) e Ponte (1992) relatados no capítulo 2.

A presente análise terá uma abordagem qualitativa, servindo-se de dados estatísticos e transitará sobre as três partes descritas no instrumento diagnóstico que são: o perfil, a concepção e a competência dos professores participantes do estudo.

Finalmente no Capítulo IV – Conclusão – Apresentarei as considerações finais do trabalho, momento em que retomarei a trajetória do estudo, apresentarei o sumário dos principais resultados analisados, reapresentarei a questão de pesquisa enunciada na Introdução para, com base nos resultados, respondê-la e, por fim, mas não menos importante, ancorado nas reflexões deste estudo apresentarei sugestões para as futuras pesquisas relacionadas ao tema pesquisado.

INTRODUÇÃO

1. MOTIVAÇÃO E RELEVÂNCIA DA PESQUISA

A motivação inicial para a realização deste estudo, que se propõe refletir, sobre a passagem da aritmética para a álgebra, provém da minha vivência educativa, que posso dividi-la em dois momentos:

1. A prática docente em sala de aula. Como professor de Matemática do Ensino Fundamental, Ciclo II (5ª a 8ª séries) e Ensino Médio da Rede Pública Estadual, tive a oportunidade de fazer a introdução dos conceitos básicos da álgebra, na 6ª série do Ensino Fundamental. Nesse momento detectava algumas dificuldades dos alunos no entendimento da utilização da linguagem simbólica para generalizar os procedimentos matemáticos. Estas dificuldades seriam ainda maiores quando na resolução de problemas eles descartavam a utilização de um símbolo, isto é, uma letra para a resolução de um problema. Pareciam acreditar que o uso da aritmética era a condição única e suficiente para resolver o problema e, desta forma, faziam várias tentativas aritméticas para encontrar a solução.
2. A prática docente, como formador. Nos últimos anos tenho assumido na Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE/SP) a função de suporte pedagógico e capacitação de professores, pois até este momento estou designado como: Professor Coordenador de Oficina Pedagógica, da disciplina de Matemática, em uma Diretoria de Ensino, situada na cidade de São Paulo. Nas linhas seguintes destacarei um trabalho que foi demandado pela SEE e desenvolvido pela Oficina Pedagógica, sob minha responsabilidade. Trata-se do projeto: Matemática nas Séries Iniciais, realizado em 2006.

Dentre as várias atividades desse projeto, um assunto que ganhou atenção especial, mesmo não fazendo parte do planejamento inicial, foi a discussão da introdução à álgebra nas séries iniciais, ainda que realizando um estudo que visava única e exclusivamente à formulação de exercícios e discussão da resolução, que versavam sobre generalização de padrões geométricos.

As indagações referentes ao ensino da álgebra, descritas acima, permaneceram em aberto, apesar de algumas vagas tentativas de pesquisa sobre o assunto. Desta forma com o intuito de ampliar os horizontes de pesquisa, ingressei no Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática, modalidade Mestrado Acadêmico e, a partir de então, passei a estudar, por meio das disciplinas do curso, os principais autores da Educação Matemática que pesquisam e discutem o tema e suas fundamentações teóricas.

A pesquisa começou a tomar corpo, quando cursei a disciplina Didática II, ministrada pela Profª. Drª. Silvia Dias Alcântara Machado. Um dos objetivos desse curso era a elaboração de um artigo[3]. Como a professora já sabia de meu interesse pela aritmética e pelo interesse para trabalhar com as séries iniciais do Ensino Fundamental, este inclusive foi o tema de meu projeto de pesquisa, assim, incumbiu-me de ler o artigo referente ao grupo de pesquisa Early Algebra, no sentido de buscar a eventual relação entre este estudo e meu interesse de pesquisa.

Paralelamente ao trabalho realizado para a disciplina acima, iniciei no âmbito da orientação, leitura de artigos que discutiam sobre aritmética, álgebra e a passagem de uma para outra. As reflexões baseadas nessas leituras iniciais justificam o desenvolvimento de minha pesquisa e, de alguma forma, passam a esclarecer as indagações existentes em mim.

Em seu trabalho, Kieran (1992) entende que a álgebra pode ser considerada como a formulação e a manipulação de formulações gerais sobre números e que a experiência anterior com a aritmética é importante em sua capacidade de dar sentido à algebra.

da Rocha Falcão (1993), afirma que o ensino da álgebra não está somente relacionado com a manipulação de símbolos. O conhecimento algébrico é importantíssimo na resolução de problemas matemáticos, pois promove condições favoráveis para este fim e só uso de estratégias que pertencem ao campo da aritmética, se mostram insuficientes.

---

3 - Este artigo tem como título: Um Estudo da “Early Algebra” sob a Luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, escrito em parceria com a Profª. Drª. Sandra Maria Pinto Magina, e apresentado no IX Encontro Paulista de Educação Matemática – EPEM – Bauru, 2008, que será apresentada no decorrer deste capítulo.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a álgebra é um conteúdo que desenvolve a capacidade de abstração e generalização sendo uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998a). Por esse motivo, é importante que os professores realizem um trabalho e proponham situações em que o aluno seja capaz de construir noções algébricas por meio de atividades significativas e que tenham relações com seu cotidiano. (BRASIL:1998b).

Vergnaud (1987), ao escrever sobre aritmética e álgebra:

> A álgebra constitui para os estudantes uma ruptura epistemológica importante com a aritmética. Esta ruptura merece uma análise detalhada, porque muitos alunos não entram facilmente no jogo das manipulações simbólicas e desviam-se então das matemáticas [...] (VERGNAUD, 1987, p. 259.)

Lins & Kaput (2004), delineiam duas características a respeito do pensamento algébrico:

> Todavia, temos que concordar provisoriamente com duas características do *pensamento algébrico*. Primeiro, envolve atos de generalização deliberada e expressão da generalidade. Segundo, envolve geralmente um esforço separado, raciocínio baseado em formas de generalizações, incluindo ações sintático-estruturadas dirigidas. Esta é a caracterização das amplas classes de pensamento algébrico que nos ajuda a discutir as formas de pensamento algébrico apropriadas para as crianças e as condições que podem promover-las[4]. (LINS & KAPUT**,** 2004, p. 48)

Desta forma, optei por um estudo diagnóstico que investigasse as concepções e competências advindas dos educadores das séries iniciais referentes à representação simbólica da álgebra com base nos problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, de maneira que estudasse a passagem da linguagem aritmética para a linguagem simbólica da aritmética.

---

4 - Tradução livre do trecho: "Nonetheless, we have been able to agree provisionally on two key characteristics of *algebraic thinking.* First, it involves acts of deliberate generalization and expression of generality. Second, it involves, usually as separate endeavor, reasoning based on the forms of syntactically –structured generalizations, including syntactically and semantically guided actions**"**

2. JUSTIFICATIVA DA PESQUISA: A INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA.

Como afirmei na seção anterior, a motivação de meu estudo surgiu baseada na leitura sobre a implantação de um projeto que se propõe estudar sobre a possibilidade de se introduzir a álgebra nas séries iniciais do sistema educacional norte americano, denominado: "Early Algebra". Concomitante a leitura desse projeto, também conheci os estudos do grupo composto por Schliemann et al. (1998), que tiveram forte influência na elaboração de minha pesquisa. Assim, dedicarei as próximas seções a descrever os estudos desses dois grupos, iniciando pelo Early Algebra. Antes de descrever sobre esse projeto, faz se necessário detalhar os motivos que levaram esse grupo de pesquisadores a idealizarem e realizarem a Conferência: "Álgebra: Uma Passagem para um Futuro Tecnológico[5]**.**

2.1. A Conferência: "Álgebra: Uma passagem para um futuro tecnológico[6].

Esta conferência surgiu em resposta a uma petição do Congresso Norte Americano, para a National Academy of Science, (NAS), em 2006, que solicitava a determinação de dez ações principais ("top 10 actions"), a serem tomadas para elevar o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, de modo que os Estados Unidos da América pudessem competir com êxito na comunidade global do século XXI. Ao final da conferência foram feitas várias recomendações e, entre elas, estava o fortalecimento do conhecimento profissional de 250.000 professores em atividade, particularmente àqueles que ensinam Matemática e Ciências para as séries K-12, que compreende toda educação básica Norte

5 - Tradução livre para: Algebra: Gateway to a Technological Future

6 - Os tópicos 1.2.1 e 1.2.2, fazem parte do artigo: Um Estudo da "Early Algebra" sob a Luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, escrito em parceria com a Profª. Drª. Sandra Maria Pinto Magina, e apresentado no IX Encontro Paulista de Educação Matemática – EPEM – Bauru, (2008).

Americana e abrange o Kindergarten (Jardim da Infância) cuja faixa etária compreende a partir de 4 anos de idade aos 5 anos de idade, Elementary School (1ª até 5ª série), a faixa etária compreende crianças com 6 anos até 11 anos de idade e High School (6ª até 12ª série) cuja faixa etária vai de 12 até 17 anos de idade. O documento propunha como subsídio, a elaboração do “Material curricular para as séries K-12” entre outros, incluindo recomendações para que os estudantes alcançassem níveis específicos em álgebra.

Neste contexto, a Mathematical Association of America, (M.A.A), financiada pela NAS, convocou para uma Conferência representantes da comunidade de Matemática e de Educação Matemática, com o intuito de examinar o que se vem pesquisado sobre o ensino de álgebra e, também, verificar os princípios comuns que podem servir como modelo para sua consequente melhora, direcionando pesquisas futuras.

A conferência aconteceu em novembro de 2006, quando aproximadamente 50 participantes foram divididos em cinco grupos de trabalho que corresponderam a cinco diversos níveis de instrução da álgebra:

Grupo 1 – Early Algebra (Álgebra Inicial);
Grupo 2 – Introductory Algebra (Álgebra Introdutória);
Grupo 3 – Intermediate Algebra (Álgebra Intermediária);
Grupo 4 – Algebra for Teachers (Álgebra para Professores);
Grupo 5 – College Algebra (Álgebra para Faculdade).

Cada um dos cinco grupos produziu um relatório, no qual podemos destacar as seguintes características:

- Os primeiros três grupos fizeram a suposição geral de que os estudantes serão introduzidos nas ideias algébricas já em graus elementares. Depois passam para o curso da álgebra introdutória formal na escola secundária (talvez depois de um ano de geometria). Por fim, por um curso de álgebra intermediária, visando à preparação para a Matemática ensinada na Universidade. O objetivo, então, da álgebra nesses três níveis é não só suprir todos com a álgebra necessária para vencer em qualquer carreira, mas também preparar um número crescente de estudantes para as carreiras de ciências e tecnologia (KATZ, 2007).

- O grupo de trabalho sobre a Álgebra para os Futuros Professores trata da educação daqueles que irão trabalhar nos primeiros três níveis de instrução. Já o grupo de trabalho de álgebra na faculdade, dirige suas recomendações para uma instrução proveitosa que atinja um grande número de estudantes desde o ensino básico, passando por aqueles que nunca aprenderam álgebra na escola secundária, mesmo que tenham sido expostos a ela. As pesquisas mostram que, em geral, esses estudantes não entram nas carreiras cientificas ou técnicas. No entanto, esses estudantes também necessitam de habilidades em álgebra para que consigam ter sucesso em qualquer carreira que eles adentrem. (KATZ, 2007).

Ainda, segundo Katz (2007), os trabalhos realizados pelos cinco grupos apontaram recomendações explícitas para a pesquisa e ação, agrupadas nos seguintes modos:

1. Pesquisa para determinar as ideias centrais de um currículo de álgebra para o século XXI em cada nível de instrução.
2. Pesquisa sobre a compreensão da natureza do pensamento algébrico dos estudantes e de como eles reagem aos diferentes tipos de instrução.
3. Desenvolvimento profissional intensivo para assegurar que a equipe de ensino possa comunicar as ideias descritas nos itens 1. e 2.
4. Esforços colaborativos entre todos os membros da noosfera – responsáveis, incluindo professores, matemáticos, administradores, oficiais públicos e pais, para assegurar que as três recomendações prévias possam ser implantadas.

Na seção seguinte, apresentarei um resumo dos estudos realizados pelo grupo de trabalho Early Algebra.

2.2. Early Algebra (Álgebra Inicial).

Segundo Blanton et al (2007), a Matemática nas séries elementares vem se baseando na aritmética e na fluência calculatória, seguindo-se uma abordagem procedimental. Esta abordagem, porém não tem mostrado sucessos em termos de realizações estudantis.

Atualmente, a preparação requer uma abordagem diferente, que é o desencadeamento de idéias pautadas no aprofundamento das estruturas matemáticas básicas ou que estão implícitas nas experiências escolares dos alunos (ROMBERG & KAPUT, 1999 apud BLANTON et al., 2007).

Esse trabalho requer um exame dos tópicos matemáticos desde o Pre – K (que corresponde a nossa Creche) até o nível K8 (que corresponde dos 6º aos 8º anos do EF brasileiro)[7], que são os anos verdadeiramente básicos para a álgebra, assegurando que os blocos da construção da álgebra nesses tópicos sejam enfatizados em todos os níveis.

Segundo Kaput (2007), apud BLANTON et al. (2007), os objetivos pretendidos com a Early Algebra compreendem: (1) generalização, ou identificação, expressando e justificando estruturas, propriedades e relações matemáticas e (2) raciocínio e ações baseadas em formas de generalizações.

Embora as características acima citadas façam referência a uma determinada área da Matemática, elas são críticas às demais áreas desta ciência. Assim, o foco da pesquisa em *Early Algebra* é delineado da seguinte maneira: (1) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada) e (2) generalização de padrões numéricos ou geométricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional). (BLANTON et al, 2007).

Blanton et al, complementam esse foco de pesquisa, enfatizando que:

> Adicionalmente - e igualmente importante - a álgebra inicial não é um re-empacotamento de habilidades e procedimentos algébricos, como tipicamente ensinados em cursos de “pré–álgebra” dos middle grades para os elementary grades. Enquanto crianças nos elementary grades podem desenvolver algumas habilidades nas manipulações simbólicas, o objetivo é, ao contrario, que eles aprendam a raciocinar algebricamente e que comecem a adquirir a linguagem simbólica, algébrica para expressarem e justificarem suas idéias[8]**,**(BLANTON et al., 2007, p.7, tradução de MACHADO, S.D.A. 2008, para o texto original: Early Algebra)

---

7 - Encontram-se nos anexos desta dissertação uma tabela que mostra a equivalência dos sistemas norte-americano e brasileiro de educação.

8 - Tradução livre do trecho: Additionally and equally important early algebra is not a re-packaging of algebra skills and procedures, typically taught as a ‘pre-algebra’ course in the middle grades, for elementary grades. While children in elementary grades may develop some skill at symbolic manipulation, the goal is instead that they learn to reason algebraically and that they begin to acquire a symbolic, ‘algebraic’ language for expressing and justifying their ideas.

De acordo com o National Research Council (Conselho Nacional de Pesquisa/EUA), a Álgebra Inicial compreende cinco elementos das proficiências em Matemática, que são: compreensão conceitual ligadas a concepção das idéias, fluência procedimental, competência estratégica e raciocínio adaptativo, ligadas à competências e disposição produtiva que são as habilidades. (KILPATRICK et al., 2001, apud BLANTON et al., 2007).

Assim, ao desenvolver a fluência procedimental, elas também desenvolvem as habilidades aritméticas, isto é as crianças precisam da habilidade aritmética para encontrar relações funcionais ou explorar cálculos que lhes permitam desenvolver as generalizações sobre as operações e consecutivamente enriquecem a compreensão das crianças sobre as operações básicas.

Podemos considerar que a *Early Algebra* está baseada em problemas, pois desenvolvem a competência estratégica e a capacidade de raciocínio adaptativo das crianças cujo objetivo não é desenvolver habilidades isoladas ou procedimentos, mas explorar situações que exerçam influência nos conhecimentos dos alunos sobre habilidades e procedimentos, como explicam Blanton et al (2007, p.8):

> Em particular as crianças desenvolvem uma linguagem algébrica com raízes profundas em suas expressões da linguagem natural para descrever generalizações[9].(BLANTON, et al, 2007,p.8, tradução de YAMANAKA, O.Y. 2008, do texto original: Early Algebra)

As pesquisas do grupo Early Algebra têm verificado que a criança pode:

- Descrever, simbolizar e justificar propriedades aritméticas e relações;
- Desenvolver uma visão relacional e algébrica da igualdade;
- Usar ferramentas representacionais apropriadas na 1ª série, que apoiarão a exploração de relações funcionais nos dados;
- Identificar e simbolizar relações funcionais;

---

9 - Tradução livre do trecho: In particular, children develop an increasingly formal, ‘algebraic’ language system rooted with meaning in their natural language expressions for describing generalizations.

- Progredir, com base na construção de argumentos empíricos para construir justificativas, usando problemas contextualizados e aprendendo a raciocinar com generalizações para construir argumentos gerais.

Dentre os tópicos acima citados, uma atenção especial será dada ao primeiro item, pois se trata do objeto de estudo desta pesquisa.

Desta forma, Blanton et al (2007), concluem que a pesquisa em Álgebra Inicial fornece importantes provas de que existem diferentes tipos de conhecimentos algébricos os quais as crianças podem formular. Afirmam, que, como em qualquer aprendizagem, o conhecimento que as crianças acumulam de uma "conversação algébrica" variará a cada instante e a compreensão dos tipos de conhecimentos que elas deduzem dessa conversa, suas trajetórias e seus momentos críticos, são passos importantes para identificar a natureza universal do conhecimento algébrico.

Este estudo é importante para fundamentar e justificar minha pesquisa, pois apresenta as razões da possibilidade da introdução da representação algébrica nas séries iniciais, mesmo com o foco no trabalho com crianças, apresenta reflexões importantes, para que o professor possa pensar nessa introdução, que se soma ao seguinte pressuposto: a aprendizagem das crianças está intimamente relacionada aos saberes de seus professores.

2.3 Os Estudos do Grupo Schliemann et al.

Nas linhas seguintes, apresento um relato, a partir da pesquisa: Resolvendo Problemas de Álgebra Antes da Instrução da Álgebra[10], realizada por Analúcia D. Schliemann, David W. Carraher, Bárbara M. Brizuela e Wendy Jones e publicada no ano de 1998.

Os autores apontam que existe um grande vazio entre a instrução da aritmética e da álgebra que pesquisadores da educação matemática, como: Jorge Tarcísio da Rocha Falcão, Carolyn Kieran, Eugênio Filloy e Teresa Rojano, Gerard Vergnaud, dentre outros, fundamentam que estudantes encontram grandes dificuldades no aprendizado da álgebra. Um dos fatores para tal dificuldade está ligado ao fato de que a instrução algébrica só se inicia quando os

10 - Tradução livre de: Solving Algebra Problems Before Algebra Instruction.

estudantes estão na faixa etária dos 12 anos de idade. Essa instrução é efetuada de maneira direta com foco na extração e representação das relações matemáticas, esquecendo-se dos conhecimentos aritméticos adquiridos, não existindo uma transição entre as concepções e competências adquiridas na instrução da aritmética da escola elementar (séries iniciais) para a introdução da álgebra nas séries posteriores.

Desta forma, a pesquisa em questão apresenta dois estudos, a fim de verificar as maneiras pelas quais os estudantes na faixa etária dos 7 anos de idade entendem e representam as relações básicas da álgebra, antes da instrução da álgebra propriamente dita.

O primeiro estudo examina a compreensão de uma das propriedades lógicas básicas para a manipulação das equações, a saber, dada uma igualdade, se transformações aditivas idênticas forem realizadas em cada termo, a igualdade permanecerá.

O segundo estudo examina a maneira pela qual os estudantes tentam resolver problemas que requerem o uso de notação e regras algébricas.

A seguir apresento o desenvolvimento dos dois estudos, mostrando a justificativa, metodologia aplicada e os resultados obtidos em cada um.

O estudo 1 tem por título: Reconhecendo a invariância apesar da transformação[11], que está fundamentado na seguinte afirmação: “quando movemos um elemento de um dos termos de uma expressão numérica para outro, temos que mudar também seu sinal.”

A partir da fundamentação mostrada acima os autores, fazem o seguinte questionamento para este estudo: os alunos percebem que adicionando ou subtraindo quantidades iguais em cada termo da expressão, não destruirão a igualdade[12]?

E, ainda, por que os alunos não percebem essa regra lógica aparentemente simples? São incapazes de entendê-la? Ou será que entendem e não conseguem ver sua relevância para os casos que estão estudando?[13]

---

11 - Tradução livre para: Recognizing Invariance Despite Change
12 - Tradução livre para: Do students realize that adding or subtracting equal unknows from each expression Will not destroy the equality?
13 - Tradução livre para: Why do students so often not take into account such na apparently simple logical rule? Are they unable to understand it? Or do they understand it but fail to see its relevance to the cases at hand?

A partir destes questionamentos, os pesquisadores prepararam uma intervenção que procura investigar a maneira pela qual os estudantes na faixa etária dos 8 anos de idade entendem a seguinte propriedade: se adicionarmos ou subtrairmos quantidades iguais de cada termo de uma dada igualdade os termos (montantes de cada lado) permanecem equivalentes e que, se montantes distintos forem adicionados ou subtraídos, os termos (montantes de cada lado), também serão diferentes.

Participaram da pesquisa 19 alunos da 3ª série, de uma mesma turma que estudam em uma escola pública situada no subúrbio de Boston. Cada aluno participava de uma entrevista e respondia oito problemas. Na entrevista, o pesquisador narrava ou pedia que a criança lesse um problema em que duas pessoas tinham quantidades iguais de objetos e, a partir daí, foram dadas quantidades iguais ou diferentes para serem adicionadas ou subtraídas das quantias previamente dadas, por fim, o pesquisador questionava a criança se as duas continuavam ou não com a mesma quantia.

Os oito problemas apresentados foram divididos em dois grupos, sendo quatro problemas com informações numéricas para as quantidades e os outros quatro indicavam se as quantidades eram iguais ou diferentes, porém não especificam números.

A seguir, apresento dois exemplos de problemas, com sua respectiva interpretação efetuada por alunos.

1. . BOBBY E SARA ESTÃO DISPUTANDO UMA PARTIDA DE BOLINHAS DE GUDE. BOB RETIROU DE SEU BOLSO ESQUERDO 4 BOLINHAS DE GUDE E COLOCA-AS NO CHÃO. BOB ENCONTRA MAIS QUATRO BOLAS DE GUDE EM SEU BOLSO DIREITO E, TAMBÉM OS COLOCA NO CHÃO. SARA TIRA 8 BOLAS DE GUDE DE SEU RECIPIENTE E COLOCA-AS NO CHÃO. SARA VERIFICA QUE TEM MAIS DUAS NO RECIPIENTE E COLOCA-AS NO CHÃO. BOBY ENCONTRA MAIS DUAS E TAMBÉM COLOCA-AS NO CHÃO VOCÊ ACHA QUE BOBY TEM A MESMA QUANTIDADE DE BOLAS DE GUDE QUE SARA? OU ACHA QUE UM TEM MAIS BOLAS DE GUDES QUE O OUTRO.

Estrutura do problema (não mostrado ao estudante)

$$4 + 4 = 8$$

$$4 + 4 + (2) = 8 + (2)$$

Resolução apresentada por uma aluna:

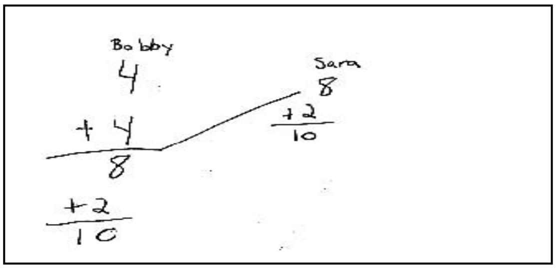


Figura 1: Recorte – Resolução Problema 1

2. CHARLIE E RENÉE GOSTAM DE COMER COOKIES. CADA UM TINHA UMA QUANTIA IGUAL DE COOKIES. CHARLIE COLOCOU OS SEUS EM UMA CESTA. RENÉE COLOCOU OS SEUS UNIFORMEMENTE EM DUAS CESTAS. EM SEGUIDA, OUTRO LOTE SAIU DO FORNO. CHARLIE E RENÉE REPARTIRAM A QUANTIA QUE SAIU DO FORNO, MAS, DESTA VEZ, COLOCARAM EM UM SACO PARA MANTÊ-LOS FRESCOS E COMER MAIS TARDE. A IRMÃ DE CHARLIE CHEGOU À COZINHA E PEDIU ALGUNS COOKIES. CHARLIE DEU-LHE SUA CESTA DE BISCOITOS E RENÉE TAMBÉM LHE DEU UMA DE SUAS CESTAS. VOCÊ ACHA QUE DEPOIS DELES TEREM COMPARTILHADO SEUS COOKIES, CHARLIE TINHA O MESMO NÚMERO DE COOKIES QUE RENÉE? OU VOCÊ ACHA QUE UM TINHA MAIS COOKIES QUE OUTRO.

Estrutura do problema (não mostrado ao estudante)

$$x + z = y + y + z$$

$$x + z + (-x) = y + y + z + (-x)$$

Resolução apresentada por uma aluna:

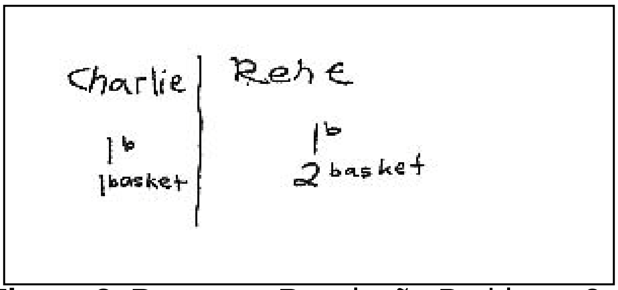


Figura 2: Recorte – Resolução Problema 2

O estudo 2 teve como objetivo examinar as formas de resolução de problemas que requerem o uso de notação algébrica e regras algébricas e tem como título: “Mas quanto, quantos”: O Paradoxo inerente na representação de Incógnitas[14]**.**

Dos vários questionamentos da qual este estudo se compromete a responder, uma delas vai ao encontro com a representação algébrica: Que tipo de representação algébrica as crianças usam espontaneamente?

14 Tradução livre de: “But How Much, How Many?”: The Paradox Inherent in Representing Unknowns

Para este estudo os sujeitos da pesquisa foram os mesmos mencionados anteriormente, e na entrevista, responderam a seis problemas divididos em dois grupos. No primeiro grupo, respondiam a quatro problemas em que a incógnita estava presente em um dos termos da equação e no outro grupo de dois problemas as incógnitas estavam presentes em ambos os termos da equação.

A seguir, apresento dois exemplos de problemas, apresentando em um deles a resolução dos estudantes.

3. Mike e Rob criam peixes ornamentais, Mike tem 8 peixes azuis e alguns vermelhos. Rob tem somente peixes vermelhos, ele tem três vezes mais peixes vermelhos que Mike. No total Mike tem a mesma quantia de peixes que Rob. Quantos peixes vermelhos Mike não têm?

Estrutura do problema (não mostrado ao estudante)

$$8 + x = 3x$$

Algumas representações efetuadas por estudantes para este problema:

Figura 3: Recorte - Resolução Problema 4

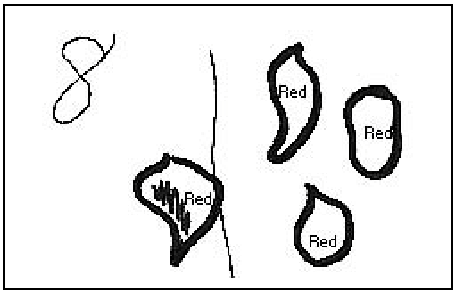


Figura 4: Recorte - Resolução Problema 4

Nas linhas a seguir, apresentarei o modo pelo qual foi elaborada a resolução do problema, representada na Figura 3.

Enquanto o entrevistador efetuava a leitura do problema, a aluna tomava nota, organizando os dados em duas colunas. Quando ele pediu para representar as quantidades, ela representou oito peixes como oito contas, e “alguns peixes” por um desenho de um peixe e “três vezes tanto peixe” por um peixe com três linhas sobre ele. E ela concluiu que Mike teria três peixes vermelhos, perguntada se isto igualaria as quantias, ela somou oito mais três e comparou com o resultado de três vezes três afirmando que três não era a resposta certa. Em seguida, ela tentou com cinco e finalmente, com quatro, chegando ao resultado que igualaria as duas quantidades.

A partir deste estudo, os autores sugerem que os alunos da faixa etária de 8 anos podem desenvolver um consistente sistema notacional para representar os elementos e as relações em problemas que envolvem quantidades numéricas ou não numéricas. Neste processo eles fazem uso de círculos ou traços para representar quantidades, derivando conclusões por meio das relações implícitas nos problemas e pode representar uma transição significativa entre quantidades mensuráveis e quantidades desconhecidas.

Este estudo reitera a justificativa de minha pesquisa de que é possível a introdução da álgebra nas séries iniciais e apresenta outras reflexões para que o professor possa pensar nessa introdução.

3 OBJETIVO E QUESTÃO DE PESQUISA

Ao ter como ponto de partida, as reflexões apontadas até este momento, esta pesquisa busca investigar a maneira pela qual o professor concebe uma transição entre os conceitos aritméticos desenvolvidos para uma introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental e, também, quais são as ações que este desencadeará para que tal transição ou passagem seja efetuada.

Não se trata aqui de propor alternativas para implantação desta passagem, mas sim indicar apenas as concepções e competências dos professores relacionadas à introdução da álgebra.

Assim, esta pesquisa contribui para o debate sobre em que momento já é possível pensar na introdução da álgebra aos alunos do Ensino Fundamental.

Desta forma, a questão de pesquisa a que me propus responder, passa, portanto, a ser:

QUAIS SÃO AS CONCEPÇÕES E COMPETÊNCIAS DOS PROFESSORES E FUTUROS PROFESSORES DAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE A UTILIZAÇÃO DAS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS, COMO ELEMENTOS PROPICIADORES DA INTRODUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS?

O caminho traçado para atingir o objetivo e a questão de pesquisa propostos foi anunciado na apresentação desta dissertação. Assim, no próximo capítulo procederei a discussão de alguns aspectos teóricos que subsidiarão a construção do presente estudo e sua consequente interpretação.

CAPÍTULO I

ASPECTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentarei a fundamentação teórica, de minha dissertação. Aqui serão discutidos os aspectos da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990, 1994) e, também, os estudos efetuados por esse autor a respeito do conhecimento algébrico, que serão fundamentais para o desenvolvimento e análise de minha pesquisa

Complementando minha fundamentação teórica, no que tange ao estudo das concepções e competências dos professores, dedicarei um tópico específico neste capítulo, a partir das pesquisas de Gerard Vergnaud (1987) e João Pedro da Ponte (1992). Apresentarei por fim, um dos estudos realizados por David Tall e Shlomo Vinner (1981) sobre Conceito Imagem e Conceito Definição. Este tópico a ser desenvolvido é de suma importância para se realizar a análise dos dados coletados, pois fundamentado neste estudo poderei detectar quais são as competências e habilidades dos professores quanto a introdução da introdução da representação algébrica nas séries iniciais.

Já nas pesquisas correlatas, iniciarei por uma releitura de da Rocha Falcão (1993; 1994), que realizou vários trabalhos referentes à representação de problemas, utilizando a linguagem e conhecimento algébricos. Na sequência, também, serão discutidos os trabalhos de Kieran (1992, 1994) e Lins & Kaput (2004), ambos com foco no ensino da álgebra. O capítulo encerrar-se-á com uma revisão bibliográfica, em que constam as dissertações de mestrado e doutorado que versam sobre a aritmética e pensamento algébrico.

Iniciarei a discussão sobre os trabalhos de Vergnaud (1990), expondo seus principais resultados e levantando aspectos que serão úteis ao desenvolvimento e análise deste trabalho.

1.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gerard Vergnaud, está inserida em um contexto pós-construtivista[15] pois parte do princípio que o conhecimento ocorre na troca, na interação do sujeito com a situação em que está sendo apresentada. Portanto, a aquisição do conhecimento verifica-se, em geral, por meio de situações e problemas já conhecidos, aplicados a uma nova situação.

Isto conduz a ideia de que a aquisição de conhecimentos tem características locais e um domínio de validade restrito.

Desta forma, Vergnaud (1994), afirma que:

> A Teoria dos Campos Conceituais enfatiza que a aquisição do conhecimento é formada por situações e os problemas já conhecidos que o conhecimento tem muitas características locais. Todos os conceitos têm um domínio de validade restrito, que variam de acordo com a experiência e o desenvolvimento cognitivo[16]. (VERGNAUD, 1994, p. 42, tradução livre de YAMANAKA, O.Y. (2009) do texto original: Multiplicative Conceptual Field: What and Why?)

Vergnaud (1994), refere que conhecimento está organizado em campos de conceito ou simplesmente campos conceituais. Este é um grande conjunto de situações nas quais sua análise e tratamentos requerem vários conceitos, procedimentos e situações simbólicas interligadas entre si. Por sua vez cada conceito desse campo por sua vez é formado a partir da terna (S, I, R), sendo:

S: o conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência), neste conjunto estão inseridas as diversas atividades que darão sentido ao

---

15 - Estou considerando como "pós-construtivistas", os autores cujas teorias vieram após Piaget e Vygotsky e que foram influenciados por eles. Os pós-construtivistas consideram, para além do que consideraram Piaget e Vygotsky, outros fatores como variáveis na formação e desenvolvimento de conceitos, tais como a motivação, afetividade, aprendizagem, a situação em que se encontra inserido o aprendiz, etc. Igualmente retomam idéias de Piaget e Vygotsky e as reinterpretam, levando o conhecimento cognitivo dos processos de desenvolvimento e de ensino-aprendizagem mais adiante, Vergnaud, aluno de doutoramento de Piaget, é um destes autores.

16 - Tradução livre do trecho: The conceptual field theory also stresses that the acquisition of knowledge is shaped by the situations and problems first mastered and that knowledge has therefore many local features. All concepts have a restricted domain of validity, which varies with experience and cognitive development.

conceito como: jogos, as situações do cotidiano do aluno, materiais pedagógicos (blocos lógicos, material dourado, entre outros), etc.

I: o conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que são reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações, por exemplo, as propriedades aritméticas, as estruturas aditivas e multiplicativas.

R: o conjunto de formas linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (os significantes), pertencem a este conjunto, por exemplo, os algoritmos, os esquemas, a linguagem materna, etc.

Em termos psicológicos, Magina et al. (2001) explicam que S é a realidade, e a dupla (I,R), identifica a representação que pode ser considerada por dois aspectos interativos do pensamento: o significado (I) e o significante (R).

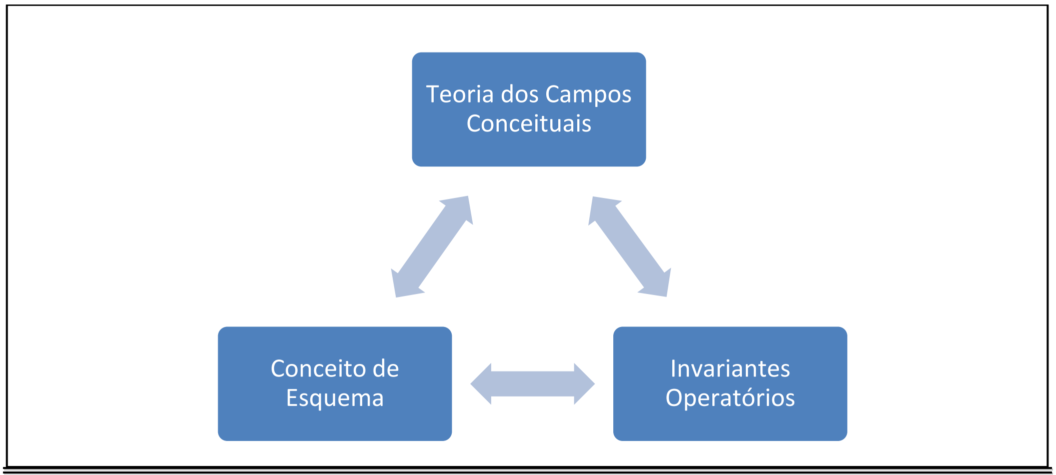
Retornando ao pós-construtivismo, a Teoria dos Campos Conceituais, toma como principal contribuição o conceito de mediação, em dois sentidos, por intermédio dos sistemas simbólicos, dentro dos quais está incluída a linguagem, e pelo trabalho do professor junto a seus alunos.

Em continuidade ao estudo aqui proposto, é necessário proceder com a discussão de alguns conceitos chaves da teoria de Gerard Vergnaud que estão no cerne da Teoria dos Campos Conceituais, que são: os esquemas e os invariantes operatórios.

Segue abaixo um quadro que mostra a relação destes conceitos com a Teoria dos Campos Conceituais.

Quadro 1: Relação entre o conceito de esquema e invariantes operatórios com a Teoria dos Campos Conceituais

.



1.1.1 Conceito de Esquema:

Para Vergnaud (1996) quando se pretende discutir o ensino e aprendizagem, um conceito não pode ser reduzido somente ao que ele define Desta forma, é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido. Ele ressalta as maneiras pelas quais se avaliam as ações do sujeito a frente de uma dada situação, nas quais se destacam:

1- classes de situações para as quais o sujeito dispõe, em seu repertório, num dado momento de seu desenvolvimento e, em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
2- classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o quer ao êxito ou ao fracasso.

No primeiro caso, observa-se que existem condutas organizadas por meio da invariância das ações, ou seja, elas são automatizadas, no segundo caso, percebe-se o desencadeamento de diversas condutas, e que, para se atingir o objetivo, estas são assimiladas e acomodadas; tal processo é acompanhado por descobertas. Encontramos aqui a ideia piagetiana de que os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas, isto é, na assimilação e na acomodação.

Desta forma, Vergnaud (1996), define "esquema" como: *organização invariante*[17] *da conduta para uma dada classe de situações*. Para o pesquisador são nos esquemas que se deve procurar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória.

Ainda, o que é invariante é a organização da conduta em si, ou seja, "um esquema não é um estereótipo, e um mesmo esquema pode gerar conduções

---

17 - Segundo Magina et al. (2001) os invariantes são componentes essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos (feitos pelo aluno). Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nessa, eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas.

relativamente diferentes em função das situações singulares às quais é conduzido a dirigir" (VERGNAUD, 1996, p.183).

Podemos dizer que os esquemas são considerados, como uma organização invariante do comportamento gestual ou do pensamento do sujeito frente a problemas práticos ou teóricos.

Neste sentido, é possível dizer que as competências matemáticas são sustentadas por esquemas. Para elucidar esta questão, reporto-me a uma análise feita por Vergnaud (1996), sobre o esquema da enumeração de uma pequena coleção de objetos discretos por uma criança de 5 anos: por mais que varie a forma de contar, por exemplo, lápis sobre a mesa, crianças no pátio, flores em jarro, etc. não deixa de haver uma organização invariante essencial para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e gestos dos dedos e das mãos, verbalização correta da série numérica, identificação do último elemento da série como quantidade do conjunto enumerado. Esse exemplo explicita de forma clara o que é invariante na organização das ações do sujeito frente à situação.

Então, é possível fazer a seguinte pergunta: Do que são constituídos os esquemas?

Segundo Vergnaud et al. (1998), para se entender e analisar os processos de resolução de problemas é necessário analisar os diversos componentes de um esquema que podem ser combinados e recombinados, tais componentes são caracterizados conforme as características abaixo mencionadas.

1- metas e antecipações (um esquema dirige-se sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; podem também esperar certos efeitos ou certos eventos);
2- regras de ação do tipo "se ... então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação;
3- invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que

constituem a base, implícita ou explícita que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas;

4- possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação.

Assim, a proposta de Vergnaud é que se identifique, valorize e estude as ações dos estudantes no momento em que eles estão resolvendo problemas, pois é nesse momento que os conceitos e conhecimentos traduzidos em forma de invariantes implícitos, isto é quando aparecem os esquemas de ação do sujeito, formando assim os elementos constitutivos dos esquemas desses alunos.

Ele ainda afirma que o esquema é “uma espécie de modo finalizado pela intenção do sujeito e estruturado pelos meios que este emprega para alcançar seu objetivo”, conforme citam Vergnaud e Laborde (1994, p. 68).

Na sequência será desenvolvido um estudo sobre outro conceito importante da Teoria dos Campos Conceituais, que trata dos Invariantes Operatórios.

1.1.2. Invariantes Operatórios

Segundo Vergnaud (1996), um esquema é composto por regras de ações e antecipações, que geram uma sequência de ações visando a atingir determinado objetivo. Este, nem sempre é reconhecido, se é composto essencialmente por invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) e por inferências. Componentes que são indispensáveis à prática do esquema em cada situação, pois permitem gerar diversas sequências de ações e de tomadas de informação, em função dos valores das variáveis da situação.

O autor afirma que os invariantes operatórios são considerados a peça principal de um sistema cognitivo, isto é, são componentes essenciais do esquema e determinam as diferenças entre os diversos esquemas utilizados pelo sujeito frente a uma classe de situações.

Dada esta importância, é fundamental uma explicação mais detalhada dos invariantes operatórios na qual Vergnaud (1996) faz a distinção entre três tipos de invariantes; os do tipo proposição, função proposicional e argumento, que serão caracterizados a seguir:

Invariantes tipo proposição: invariantes desse tipo são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos em certo domínio. Os teoremas-em-ação são invariantes desse tipo, geralmente implícitos e designam as propriedades tomadas e utilizadas pelo aluno em situação de solução de problemas sem que ele seja capaz de explicá-las e/ou justificá-las.

Magina et. al definem os Teoremas-em-ação, da seguinte forma:

> Os teoremas-em-ação são definidos como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou sequência de operações para resolver um problema. Os teoremas-em-ação não são teoremas no sentido convencional do termo porque a maioria deles não são explícitos. Eles estão subjacentes ao comportamento dos alunos, aparecem de modo intuitivo na ação do aluno e seu âmbito de validade é normalmente menor que o âmbito dos teoremas. (MAGINA et. al, 2001, p. 16.)

Como exemplo, Vergnaud (1996), mostra que crianças entre 5 e 7 anos, descobrem que não é necessário voltar a contar tudo para encontrar o cardinaldepois de ter contado A e B, pode-se exprimir este conhecimento por meio do teorema-em-ação:

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{card } (A) + \text{card } (B) \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

Invariantes do tipo função proposional: esses tipos de invariantes não são necessariamente verdadeiros ou falsos, mas são indispensáveis para as proposições. Conceitos em ação são invariantes desse tipo, pois eles são relevantes ou não, para identificar e selecionar informação. Contudo, cabe explicitar que a relevância ou irrelevância são diferentes de verdade ou falsidade: não há significado em dizer que os conceitos do triângulo ou número, ou simetria, ou transformações são eles mesmos verdadeiros ou falsos; mas sim que esses conceitos matemáticos são relevantes ou não para caracterizar a representação e ação em tarefas matemáticas.

Para Vergnaud e Laborde (1994), a função dos conceitos-em-ação é antes de tudo de selecionar, ou seja, reter da situação apresentada, o que é necessário e suficiente para alcançar o objetivo.

Exemplo de função proposicional: funções com um argumento (P(x) é a função proposicional ".... é azul", como R_2 (x,y) a relação "... está a direita de ...", R_3 (x,y,z) a relação ".... está entre .... e ....." ou a lei de composição "a soma de .... e ..... é .....".

Em outras palavras, os conceitos de cardinal e de coleção são aqueles de estado inicial, de transformação e de relação quantificadas, são indispensáveis para a conceituação das estruturas aditivas. Raramente, esses tipos de conceitos são explicitados pelos alunos, no entanto, eles os constroem na ação. O tipo lógico dos conceitos-em-ação é diferente daquele dos teoremas-em-ação, pois, o primeiro é do tipo função proposicional (verdadeiro ou falso) e o segundo, é do tipo proposição (está entre, é maior que, etc.). Há, portanto, uma relação dialética entre função proposicional e proposição, razão pelas quais os conceitos-em-ação e os teoremas- em-ação desenvolvem-se em interação.

Há uma relação dialética entre conceitos em ação e teoremas em ação, uma vez que os conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Mas seria um erro confundi-los, pois os conceitos em ação são ingredientes necessários das proposições. Mas conceitos não são teoremas, pois não permitem derivações (inferências ou computações); derivações requerem proposições.
Proposições podem ser verdadeiras ou falsas; conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes. Ainda assim não existem proposições sem conceitos.

Reciprocamente, não há conceitos sem proposições, pois é a necessidade de derivar ações das representações do mundo e de ter concepções verdadeiras (ou pelo menos adequadas) do mundo que tornam necessários os conceitos. Um modelo computável do conhecimento intuitivo deve compreender conceitos em ação e teoremas em ação como ingredientes essenciais dos esquemas.
Invariantes do tipo argumento: em Matemática, os argumentos podem ser objetos materiais (a cadeira está à direita da mesa), personagens (Maria é mais alta que Joana), números (5 + 2 = 7), relações ("menor que", é uma relação assimétrica, Maria é menor que Joana), e mesmo proposições (" 4 é um divisor de 12" é a recíproca de "12 é múltiplo de 4").

Nessa questão, reside justamente a importância do papel do professor na teoria vergnaudiana, pois cabe a ele não só a responsabilidade de escolher uma variedade de situações que dão significado ou sentido aos conceitos matemáticos, como também de propor aos alunos que expressem, por meio da linguagem, os teoremas em ação e os conceitos em ação para poder transformá-los em verdadeiros teoremas e conceitos matemáticos.

Após estas considerações teóricas a respeito dos invariantes operatórios, iniciarei o estudo do campo conceitual aditivo (estruturas aditivas) e do campo conceitual multiplicativo (estruturas multiplicativas).

1.1.3 O Campo Conceitual Aditivo (Estruturas Aditivas)

O Campo Conceitual Aditivo, segundo Vergnaud (1996) é constituído pelo conjunto de situações cuja abordagem implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas permite considerar essas situações como tarefas matemáticas.

Cada um desses conceitos tem uma teoria matemática, na qual ele está inserido, expressos por meio de teoremas proposições, propriedades, axiomas e etc.

Um dos axiomas básicos do Campo Conceitual Aditivo refere-se à:

$$\text{Card } (AUB) = \text{card } (A) + \text{card } (B) \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

Que pode ser descrito da seguinte maneira: O todo é igual a soma das partes. Nunes et. al (2005), afirma que este axioma resume a essência do raciocínio aditivo:

> [...] Se queremos saber o valor do todo, somamos as partes; se queremos saber o valor de uma parte subtraímos a outra parte do todo; se queremos comparar duas quantidades, analisamos que parte da maior quantidade sobra se retirarmos dela uma quantia equivalente a outra parte. (NUNES, et al. 2005, p; 84)

No que se refere à operacionalização das quantidades, ou seja, o cálculo, Vergnaud (1996) distingue dois tipos de cálculo, o cálculo numérico e o relacional. O cálculo numérico é utilizado em situações usuais de adição, subtração, multiplicação e divisão, etc..

O cálculo relacional diz respeito às operações do pensamento necessárias, para que haja o tratamento das relações contidas dentro de cada situação, pode-se dizer que estas operações do pensamento compreendem os teoremas-em-ação.

Magina et. al. (2001), exemplificam o cálculo relacional, como mostra o quadro abaixo:

Quadro 2. Exemplo de cálculo relacional

Problema	**Diagrama e Cálculo Relacional**	**Cálculo Numérico**
Carlos tinha 7 reais e ganhou de sua avó 4 reais. Quanto ele tem agora?	+4 7 → □ Aplicar uma transformação positiva direta ao estado inicial	ADIÇÃO 7 + 4 = 11

Para representar o cálculo relacional, Vergnaud (1991) propõe os seguintes símbolos:

□ Medida ou grandeza, geralmente representada por um número natural.

○ Transformação ou relação, representados por números relativos que designam, por exemplo, o ganho ou perda.

→ ↑ As setas são utilizadas para representar o sentido, por exemplo, do estado inicial para o estado final, nas relações de transformação, do referido para o referente nas relações de comparação.

{ ⏟ As chaves são utilizadas para representar as composições de elementos de mesma natureza.

+ e – Esses sinais, associados às medidas e relações representam ganhos (+) e perdas (-)

Em Vergnaud (1996), encontra-se a justificativa de se usar a simbologia mostrada acima, pois ajuda na resolução de problemas quando os dados são numerosos e, também, quando existem várias etapas de resolução; além disso, tal simbologia tem o propósito de identificar de forma mais clara os objetos matemáticos decisivos para a conceitualização.

De tal forma que, quando se dá a combinação desses símbolos, surgem os "Diagramas de Vergnaud". A seguir o estudo mostrará o uso destes diagramas, para classificar os problemas relacionados às estruturas aditivas.

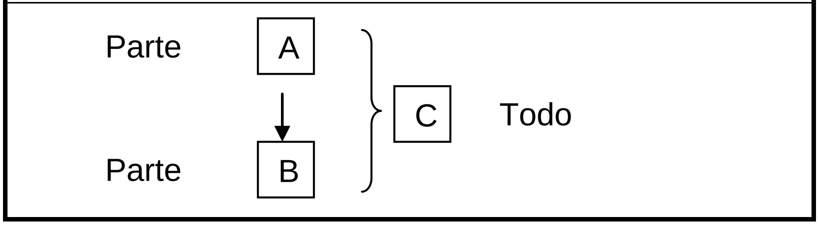
1.1.3.1. As Relações Aditivas de Base:

Segundo Magina et al. (2001) as estruturas aditivas são divididas em três grupos básicos de problemas que são classificados de acordo com a dificuldade raciocínio requerido para resolvê-los e que podem ser classificados como: problemas de composição, de transformação e de comparação.

1- Classe dos problemas de composição: são problemas que envolvem a situação: parte-todo, desta forma verificam-se duas possibilidades, que são: juntar uma parte com outra para obter o todo, ou subtrair uma parte do todo para obter a outra parte.
2- O diagrama de Vergnaud, que retrata a situação de composição é apresentado a seguir.

Quadro 3: Diagrama – Composição de Duas Medidas.

Modelo de Diagrama[18] para Problemas de Composição de Duas Medidas

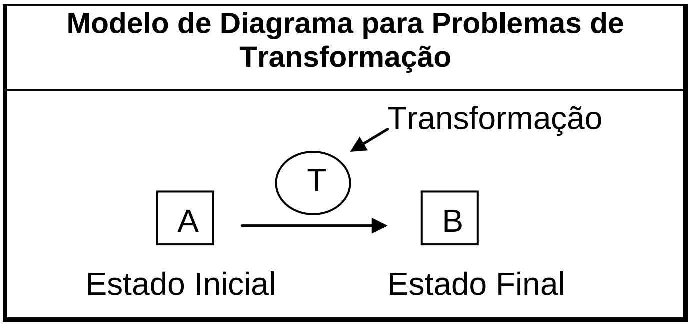


[18] Os modelos de diagramas que serão apresentados para todos os raciocínios, foram inspirados em Magina et. al (2001)

3- <u>Classe dos problemas de transformação:</u> Esta classe de problemas envolve uma transformação em uma sequência temporal, que está sempre envolvida no estado inicial, ou seja, no estado inicial tem-se uma quantidade que se transforma (com ganho/perda; acréscimo/decréscimo; etc.), chegando a um estado final com uma outra quantidade.

A seguir representa-se o diagrama de Vergnaud, na qual retrata esta classe.

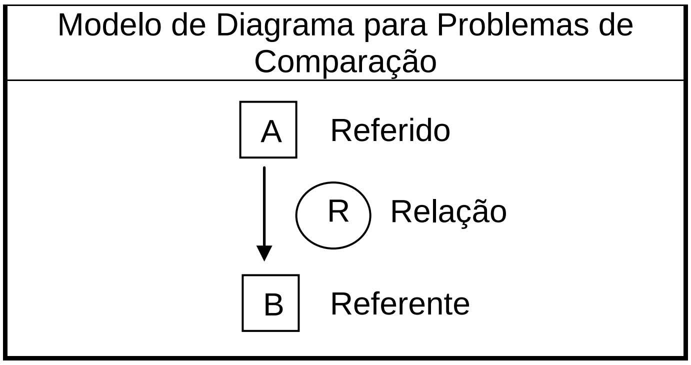
Quadro 4: Diagrama - Transformação



4- <u>Classe dos problemas de comparação:</u> Esta classe se refere aos problemas que comparam duas quantidades, uma denominada de referente e a outra de referido, a partir de uma relação entre as quantidades.

O diagrama de Vergnaud, referente a esta classe é representado da seguinte maneira:

Quadro 5: Diagrama - Comparação



A partir desta apresentação dos diagramas de Vergnaud, os tópicos a seguir serão destinados a exemplificação através de problemas destas estruturas.

1.1.3.2 Protótipos.

Magina et al. (2001) entendem como protótipo, as situações em que a maioria das crianças, com menos de 6 anos, não apresenta dificuldade para resolver, ou seja o raciocínio, usado nessa situação é intuitivo, pois foi formado espontaneamente, sem que elas saibam, e seguirá com ela como modelo protótipo, pelo resto da vida.

Sabendo disto, na sequência apresentarei exemplos de situações prototípicas das relações aditivas de base, relativas às classes de composição e transformação.

<u>Exemplo 1: Problema relativo à classe de Composição de duas medidas</u>

Quadro 6: Problema 1 – Composição de duas medidas

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Em um jardim encontramos rosas e cravos, contaram-se 10 rosas e 12 cravos, qual é o total de rosas e cravos desse jardim	PROTÓTIPO 1 10 12 x	ADIÇÃO 10 + 12 = 22	x = 10 +12

No problema anterior, as duas partes são dadas, uma delas é composta pela quantidade de rosas (10), e a outra parte é composta pela quantidade de cravos (12) e solicita-se o todo que é quantidade de rosas e cravos do jardim. (22).

Exemplo 2a: Problema relativo à classe de Transformação de duas medidas

Quadro 7. Problema 2 a – Transformação de duas medidas

Problema	**Diagrama e Cálculo Relacional**	**Cálculo Numérico**	**Equação**
Em certo momento de um campeonato, uma equipe possuía 20 pontos, ao vencer um jogo acumulou 3 pontos. Qual é a pontuação desta equipe neste campeonato?	PROTÓTIPO 2a $\underset{\text{Inicial}}{\boxed{20}} \xrightarrow{+3} \underset{\text{final}}{\boxed{x}}$	ADIÇÃO 20 + 3 = 23	x = 20 + 3

No problema anterior, são dados: o estado inicial (Ei) (20 pontos) e a transformação (T) positiva (acumulou 3 pontos), e solicita-se o estado final (Ef).

Exemplo 2b: Problema relativo à classe de Transformação de duas medidas

Neste problema, são dados o estado inicial (Ei) (30 melancias) a transformação (T) negativa (venda de 6 melancias) e solicita-se o estoque de melancias.

Quadro 8 – Problema 2 b – Transformação de duas medidas

Problema	**Diagrama e Cálculo Relacional**	**Cálculo Numérico**	**Equação**
Paulo tem uma banca de frutas, no início do dia ele tinha 30 melancias e vendeu 6 durante o dia. Qual é o estoque de melancias de Paulo?	PROTÓTIPO 2b $\boxed{30} \xrightarrow{-6} \boxed{x}$	SUBTRAÇÃO 30 - 6 = 24	x = 30 - 6

A partir dos exemplos anteriormente descritos constata-se facilmente, o raciocínio a ser utilizado, e é, por isso, que recebem o nome de protótipos.

Desta forma, verifica-se a presença de protótipos nas situações de composições e transformações; porém, na situação de comparação não se encontram protótipos, pois se comparam duas quantidades, isto é, estipula-se a diferença entre dois grupos.

A partir das situações prototípicas, todos os outros tipos de problemas configuram-se como extensões das estruturas aditivas, pois não ocorrem de maneira espontânea. O tópico a seguir irá tratar deste assunto.

1.1.3.3 Extensões[19]

As extensões tratam das variações das relações aditivas de base, elas não se referem a uma hierarquia de dificuldades visando a alcançar certo nível de desenvolvimento cognitivo. Elas possibilitam a ampliação das possibilidades de raciocínio e, consequentemente, aprimoram a representação e o tratamento das relações contidas dentro de cada situação.

As classes de extensões encontradas são quatro, a ordenação dessas classes é realizada, segundo a apropriação das crianças em cada situação problema, (MAGINA et al., 2001).

1ª Extensão.

A 1ª extensão refere-se às classes de problemas de combinação e transformação, nas quais se destacam-se as seguintes características:

Problemas de Combinação:

Neste caso, a extensão refere-se aos problemas desta classe nas quais se conhecem uma das partes e o todo e pergunta-se sobre a outra parte, por exemplo:

---

19 - Originalmente, Vergnaud não trata sobre: protótipos e extensões das relações aditivas, tal estudo é apresentado em Magina et. al.(2001), para facilitar o estudo das estruturas aditivas.

Quadro 9: Exemplo da 1ª extensão de problemas de combinação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Em um jardim foram contadas 22 flores entre cravos e rosas, destas flores 12 eram cravos. Quantas rosas existiam no jardim?	$\left.\begin{array}{c}\boxed{x}\\ \downarrow \\ \boxed{12}\end{array}\right\}\boxed{22}$	SUBTRAÇÃO 22 - 12 = 10	x + 12 = 22

Problemas de Transformação:

A 1ª extensão refere-se aos problemas em que são dados o estado inicial e o final e pergunta-se sobre o que ocorreu entre esses estados, ou seja, a transformação ocorrida entre os estados, inicial e final.

A seguir são apresentados exemplos de problemas que retratam esta situação:

Quadro 10: Exemplo 1 – 1ª Extensão dos Problemas de Transformação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Luzia tinha 4 figurinhas, participou de um jogo de bafo e no final do jogo ficou com 10 figurinhas. O que aconteceu no jogo?	$\underset{\text{Inicial}}{\boxed{4}} \xrightarrow{+x} \underset{\text{Final}}{\boxed{10}}$ Final > Inicial	SUBTRAÇÃO 10 - 4 = 6	4 + x = 10

Quadro 11: Exemplo 2 - 1ª Extensão dos Problemas de Transformação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
A quantidade de alunos de uma classe no início do ano era de 40 alunos, ao final do ano 35. O que ocorreu com a quantidade de alunos durante o ano?	$\underset{\text{Inicial}}{\boxed{40}} \xrightarrow{-x} \underset{\text{Final}}{\boxed{35}}$ Inicial > Final	SUBTRAÇÃO 40 - 35 = 5	40 – x = 35

Nos dois exemplos acima, encontram-se dois casos distintos de transformações, no primeiro exemplo, a transformação é positiva, pois há um incremento das quantidades entre o estado inicial e o final (Final > Inicial), justificando a representação +x, para a transformação, já no segundo exemplo, a transformação é negativa, ou seja, a quantidade de elementos do estado inicial é maior que o estado final, havendo, assim, um decréscimo entre as quantidades iniciais e finais que justifica a representação: –x, para a transformação.

Nota-se, também, que em ambos os casos a operação utilizada para se realizar o cálculo numérico foi a subtração, pois estamos tratando de duas medidas que estão ocorrendo em certo momento.

Desta forma, a transformação será dada em termos de quantidade, subtraindo-se a quantidade que se tem no estado final do evento pela quantidade que se tinha no estado inicial do evento, ou seja, T = F – I, (T= Transformação, F= Estado Final, I= Estado Inicial)

Assim sendo, a transformação será positiva (T>0) quando: F > I e negativa (T<0), quando: I > F.

Na seção anterior, apresentei os modelos de problemas que fazem referência a 1ª extensão dos problemas de estrutura aditiva. A seguir apresentarei os problemas relativos à 2ª extensão dos problemas de estrutura aditiva.

<u>2ª Extensão.</u>

Nesta extensão se encontram os problemas de comparação, em que "referente" e "relação" são dados e pergunta-se sobre o "referido". Os dois exemplos abaixo ilustram a 2ª extensão.

Quadro 12: Exemplo 1 – 2ª Extensão – Problemas de Comparação

Problema	**Diagrama e Cálculo Relacional**	**Cálculo Numérico**	**Equação**
Maria tem 4 bonecas, Julia sua irmã tem 3 bonecas a mais. Quantas bonecas Maria têm a mais do que Julia?	x Referido +3 4 Referente	ADIÇÃO 4 + 3 =7	x = 4+3

Quadro 13: Exemplo 2 - 2ª Extensão – Problemas de Comparação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Paulo tem 8 bolas de gudes. Jaime têm 5 a menos. Quantas bolas de gude têm Jaime	$\boxed{x}$ Referido ↑ -5 $\boxed{8}$ Referente	SUBTRAÇÃO 8 – 5 = 3	x = 8 - 5

3ª Extensão.

Esta extensão também trata apenas dos problemas que envolvem situações de comparação. Mas aqui o que se desconhece, é a relação entre o referente e o referido. Seguem-se os exemplos que ilustram a extensão.

Quadro 14: Exemplo 1 – 3ª Extensão – Problemas de Comparação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
João tem 7 figurinhas, Carlos tem 4. Quantas figurinhas João têm a mais que Carlos?	$\boxed{4}$ Referido ↑ +x $\boxed{7}$ Referente:	SUBTRAÇÃO 7 - 4 = 3	x = 7 - 4

Quadro 15: Exemplo 2 – 3ª Extensão – Problemas de Comparação.

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Ana tem 7 reais. Maria tem 4 reais. Quantos reais Maria tem a menos que Ana?	$\boxed{7}$ Referido ↑ -x $\boxed{4}$ Referente:	SUBTRAÇÃO 7 - 4 = 3	x = 7 - 4

Para o entendimento dos dois exemplos, inicialmente, devem ser identificados quem é o referente e o referido e, a relação existente entre eles.

O referente sempre estará descrito por meio de palavras como “a mais”, “a menos” e outras; e a relação, pela comparação das quantidades do referente para o referido. Assim, no primeiro caso, pergunta-se quanto o referente tem a mais que o referido. Desta forma, representa-se a relação por + x, e no segundo caso, a situação inverte-se, pergunta-se quanto o referente tem a menos que o referido, e a relação é representada por –x.

Em ambos os casos, os problemas referem-se à diferença entre duas quantidades e possuem estratégias diferentes para a resolução do problema; no primeiro caso, basta subtrair o valor do referente pelo referido, no segundo caso podemos ir complementando o valor do referente até chegar ao valor do referido.

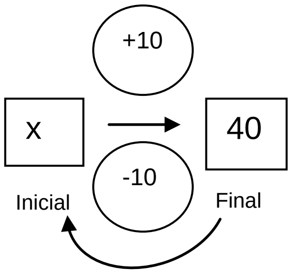
<u>4ª Extensão.</u>

Neste tópico, a última extensão a ser desenvolvida, diz respeito, tanto a problemas que envolvem transformação e comparação. Nesta extensão, os problemas em que se requerem dos estudantes um raciocínio mais sofisticado dentre o grupo dos problemas básicos da estrutura aditiva.

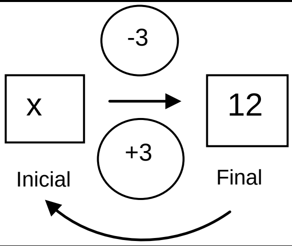
<u>Problemas de Transformação:</u>

Para a 4ª extensão dos problemas de transformação estão elencados os problemas em que são dados o estado final e a transformação e se pede o estado inicial, de acordo com os exemplos:

Quadro 16: Exemplo 1 – 4ª Extensão – Problemas de Transformação.

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Paulo comprou 10 quilos de arroz para sua casa e verificou que ficou com 40 quilos de arroz. Qual era o seu estoque inicial?		SUBTRAÇÃO 40 – 10 = 30	x + 10 = 40

Quadro 17: Exemplo 2 – 4ª Extensão – Problemas de Transformação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Numa urna já existiam algumas bolas, foram retiradas 3 bolas e agora existem 12. Quantas bolas existiam na urna anteriormente?		ADIÇÃO 12 + 3 = 15	x - 3 = 12

Para a resolução destes problemas foi, necessária a utilização do seguinte teorema:

$F = T\ (I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$, sendo I= Estado Inicial, F= Estado Final e T= Transformação, ou seja: se o estado final é a transformação do estado inicial, isto implica que o estado inicial é igual à transformação inversa do estado final, que é equivalente a:

(Estado Inicial) = T^{-1} (Estado Final).

Pelo fato de exigirem o uso de uma operação inversa os problemas deste tipo, são os mais difíceis da classe de transformação, isto se verifica nos exemplos acima.

Problemas de Comparação.

Na 4ª extensão dos problemas de comparação, encontra-se a seguinte situação: são dados o referido e a relação e se pede o referente.

Segundo Magina et al. (2001), os problemas desta extensão são considerados difíceis, porque se pensa normalmente no referente e a partir dele, achamos o referido, e nesta situação, ocorre o inverso, conforme os exemplos a seguir:

Quadro 18: Exemplo 1 – 4ª Extensão – Problemas de Comparação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Antonio tem 5 carrinhos e Carlos têm 4 carrinhos a mais que Antonio. Quantos carrinhos têm Carlos?	$\boxed{5}$ Referido ↑ +4 $\boxed{x}$ Referente	ADIÇÃO 5 + 4 = 9	x = 5 + 4

.

Quadro 19: Exemplo 2 – 4ª Extensão – Problemas de Comparação.

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Carla têm 5 bonecas a menos que as 8 bonecas de Marta. Qual é a quantidade de bonecas de Carla?	$\boxed{8}$ Referido ↑ -5 $\boxed{x}$ Referente	SUBTRAÇÃO 8 - 5 = 3	x = 8 - 5

Nota-se que no primeiro exemplo, Antonio é o referido, já que o valor de Carlos está relacionado em termos de quantos a mais que Antonio e, desta forma, passa ser o referente.

Com a apresentação da 4ª extensão, encerro o tópico destinado ao estudo das relações aditivas de base, nos anexos deste estudo existe um quadro resumo das relações aditivas de base.

Até este momento foram apresentadas seis situações, envolvendo os problemas de transformações e, também, seis situações com problemas de comparação e, ainda, duas situações com problemas de comparação.

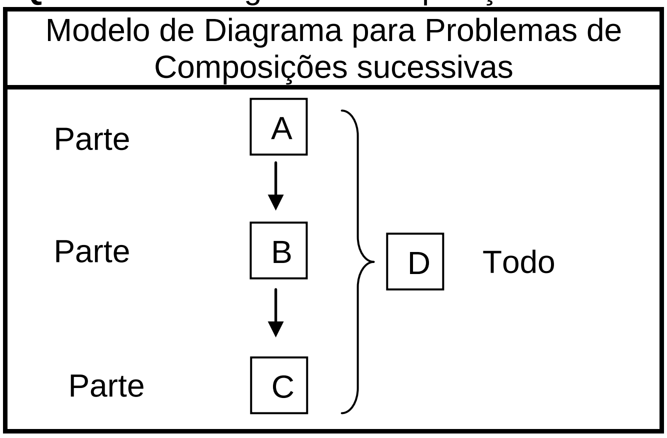
Existem outras estruturas descritas por Vergnaud, como as composições sucessivas, a transformação de uma composição, a composição de transformações, a transformação de uma relação e a composição de uma relação.O tópico a seguir, desenvolverá o estudo referente às composições sucessivas e a transformação de composições.

1.1.3.4 Outras situações prototípicas

1. Composições Sucessivas

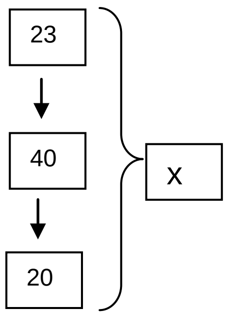
No tópico referente à classe de problemas de composição foram descritas situações que configuram a presença de duas partes para compor um todo, porém existem situações em que se apresentam mais de duas partes para compor o todo. Tal situação enquadra-se na classe de problemas de composições sucessivas, cujo diagrama pode ser representado da seguinte maneira:

Quadro 20: Diagrama- Composições Sucessivas



Nesta situação, cada composição se constitui num raciocínio prototípico, pois a ação exigida para cada uma das composições consiste em juntar ou retirar partes de um todo. O exemplo abaixo retratará tal situação:

Quadro 21: Exemplo 1 – Problema de Composições Sucessivas

Problema	**Diagrama e Cálculo Relacional**	**Cálculo Numérico**	**Equação**
Juca coleciona miniaturas de veículos automotores. Em sua coleção estão presentes: 23 carros de passeios, 40 caminhões e 20 ônibus. Qual é o total de miniaturas da coleção?		ADIÇÃO 23 + 40 + 20 = 83	x = 23+40+20

Nesta classe de problemas, encontram-se também situações semelhantes à 1ª extensão da classe de composições de duas medidas, na qual são dadas uma das partes e o todo e pergunta-se sobre a outra parte, como mostra o exemplo a seguir:

Quadro 22: Exemplo 2 – Problema de Composições Sucessivas

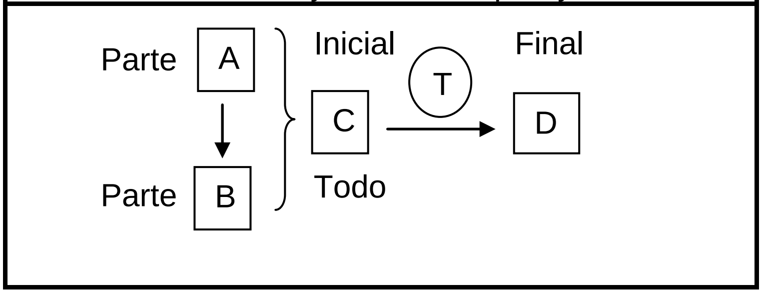
Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Juca quer guardar suas 83 miniaturas em 3 caixas, na primeira caixa guardará 25 miniaturas, na segunda 25. Quantas miniaturas terá que colocar na terceira caixa?	$\left.\begin{matrix}\boxed{25}\\ \downarrow\\ \boxed{25}\\ \downarrow\\ \boxed{x}\end{matrix}\right\}\boxed{83}$	SUBTRAÇÃO 83 – 50 = 33	x = 83 – 50

.**<u>2. Transformação de composição.</u>**

Nesta classe de problemas, há uma situação que envolve tanto transformação como composição. A situação, também, configura-se em uma situação prototípica, em que somando as partes obtém-se o todo, conforme mostra o diagrama a seguir.

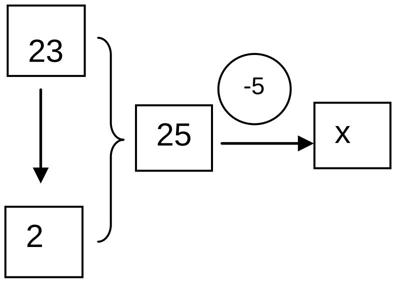
Quadro 23: Diagrama – Transformação de Composição

Modelo de Diagrama para Problemas de Transformações de Composições

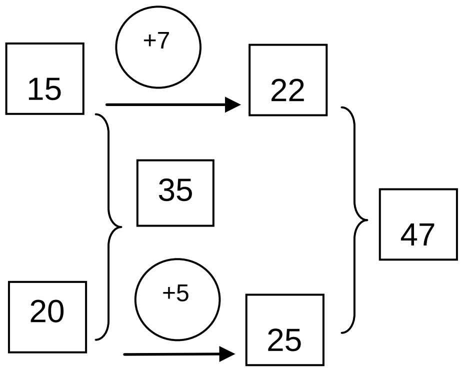


Exemplos:

Quadro 24: Exemplo 1 – Problema de Transformação de Composição

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
Marta tinha 23 livros, comprou mais dois livros e doou 5 de seus livros. Com quantos livros Marta ficou no final?		(23 + 2) – 5 = 20

Quadro 25: Exemplo 2 – Problema de Transformação de Composição

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
Na minha coleção de selos havia 15 selos brasileiros e 20 selos franceses. Ganhei de meu pai 7 selos brasileiros e 5 franceses. quantos selos existem agora na coleção?		ADIÇÃO (15+7) + (20+5)= 47

Aqui se encerra o estudo referente ao Campo Conceitual das Estruturas aditivas, no tópico a seguir, desenvolverei o estudo relativo ao Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

1.1.4 O Campo Conceitual Multiplicativo (Estruturas Multiplicativas)

O Campo Conceitual Multiplicativo é o conjunto das diversas situações problema, cujo tratamento implica uma ou várias operações de multiplicação e divisão. Desta maneira, distinguem-se neste campo conceitual duas grandes categorias de relações multiplicativas: as relações quaternárias e as relações ternárias.

As relações quaternárias, segundo Vergnaud (1991), são as mais utilizadas na escola primária, quando se introduz a multiplicação e fazem parte da formação da grande maioria dos problemas de tipo multiplicativo. Como o próprio diz, elas se relacionam entre si por meio de quatro quantidades, sendo as duas primeiras medidas de certo tipo que se relacionam com duas de outro tipo de medidas. Pertencem à classe das relações quaternárias os problemas de isomorfismos de medidas, ou seja, os problemas de multiplicação, a divisão como partição, a divisão como quotição e a quarta proporcional.

Já as relações ternárias, consistem nas relações entre três quantidades, de tal forma que uma é o produto das outras duas, ou seja, o produto de medidas, tanto no plano numérico como no plano dimensional. Neste contexto, estão inseridos os problemas que dizem respeito ao produto cartesiano, proporções múltiplas e comparação multiplicativa.

A partir desta introdução, prosseguirei o estudo das estruturas multiplicativas apresentando a seguir o estudo das relações quaternárias.

1.1.4.1 Relações Quaternárias.

Vergnaud (1996) afirma que a análise dos problemas de estruturas multiplicativas é profundamente diferente que a análise dos problemas de estruturas aditivas. As relações de base implicadas nos problemas de estruturas multiplicativas não são ternárias, são quaternárias, pois envolvem proporções simples de duas variáveis uma relativamente a outra, ou seja, sugere a representação a seguir:

A	B
C	D

Que podemos escrever na proporção: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ e que pode ser expressa também como igualdade de produtos A · B = C · D ou C · D = B · A

Esta relação permite gerar quatro classes de problemas diferentes de isomorfismos de medidas, cujos diagramas e seus respectivos exemplos serão apresentados a seguir.

1 Multiplicação ou Relação um para muitos

Quadro 26: Diagrama – Multiplicação

Modelo de Diagrama para Problemas de Multiplicação	
1	A
B	□

A e B representam números que devem ser multiplicados e □ representa o elemento desconhecido. O número 1 é o elemento neutro da multiplicação, sempre estará presente nos diagramas dos problemas desta classe para compor as relações.

Então a relação representada no diagrama, pode ser escrita da seguinte maneira:

$\square \cdot 1 = B \cdot A \Rightarrow \square = B \cdot A$, que representa uma multiplicação de um número B por número A.

A seguir apresento alguns exemplos desta classe de problemas de estrutura multiplicativa.

Quadro 27: Exemplo 1 – Problemas de Multiplicação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Tenho 3 pacotes de bombons, com 10 bombons cada. Quantos bombons eu tenho no momento?	Pacotes | Bombons 1 → 10 3 → x	MULTIPLICAÇÃO $3 \cdot 10 = 30$	$x = 3 \cdot 10$

Análise Dimensional:

Sejam as seguintes equações de dimensões, formada pela igualdade das seguintes proporções:

$$\frac{x \text{ bombons}}{10 \text{ bombons}} = \frac{3 \text{ pacotes}}{1 \text{ pacote}}$$

Multiplicando ambos os termos da igualdade por 10 bombons, temos:

$$\frac{x \text{ bombons}}{10 \text{ bombons}} \,.\, 10 \text{ bombons} = \frac{3 \text{ pacotes}}{1 \text{ pacote}} \,.\, 10 \text{ bombons}$$

Chega-se à seguinte equação:

$$x \text{ bombons} = 3 \text{ pacotes} \,.\, \frac{10 \text{ bombons}}{1 \text{ pacote}} = 3 \text{ pacotes} \,.\, 10 \frac{\text{bombons}}{\text{pacote}}$$

Onde se conclui que:

$$x \text{ bombons} = 3 \,.\, 10 \text{ bombons.}$$

Quadro 28: Exemplo 2 – Problemas de multiplicação

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Carlos quer comprar 4 carrinhos de brinquedo, cada carrinho custa R$ 10,00. Quanto ele pagará por esses carrinhos?	Carrinhos | Valor (R$) $1 \rightarrow 10$ $4 \rightarrow x$	MULTIPLICAÇÃO $4 \cdot 10 = 40$	$x = 4 \cdot 10$

Análise dimensional:

$$\text{Taxa} = \frac{\text{reais}}{\text{carrinho}}$$

Equações de dimensões:

$$\frac{x \text{ Reais}}{10 \text{ Reais}} = \frac{4 \text{ carrinhos}}{1 \text{ carrinho}}$$

Multiplicando ambos os termos da igualdade por “10 reais”:

$$\frac{x \text{ reais}}{10 \text{ reais}} \,.\, 10 \text{ reais} = \frac{4 \text{ carrinhos}}{1 \text{ carrinho}} \,.\, 10 \text{ reais}$$

$$x \text{ reais} = 4 \text{ carrinhos} \,.\, \frac{10 \text{ reais}}{1 \text{ carrinho}} = 4 \text{ carrinhos} \,.\, 10 \frac{\text{reais}}{\text{carrinho}} = 4 \,.\, 10 \text{ reais}$$

2 Divisão como partição

Aqui são conhecidos o número total de elementos de um conjunto que deverá ser distribuído em partes iguais predeterminadas e calcula-se a quantidade de elementos de cada uma dessas partes.

Quadro 29: Diagrama – Divisão como Partição

Modelo de Diagrama para Problemas de Divisão como Partição	
$\boxed{1}$	$\boxed{}$
$\boxed{B}$	$\boxed{C}$

A relação descrita no diagrama representado anteriormente pode ser escrita da seguinte forma:

$$\square \cdot B = 1 \cdot C \Rightarrow \square = \frac{C}{B}$$

Quadro 30: Exemplo – Problema de Divisão como Partição

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Pela compra de 4 carrinhos. Carlos gastou R$ 40,00. Quanto ele gastou em cada carrinho?	Carrinhos | Valor (R$) 1 → x 4 → 40	DIVISÃO 40 :4 = 10	x = 40 : 4

Análise dimensional:

$$\text{Taxa}=\frac{\text{real}}{\text{carrinho}}$$

Equações dimensionais:

$$\frac{\text{x reais}}{\text{40 reais}}=\frac{\text{1 carrinho}}{\text{4 carrinhos}}$$

Multiplicando ambos os termos da igualdade por “40 reais”

$$\frac{\text{x reais}}{\text{40 reais}}\ .\ \text{40 reais} = \frac{\text{1 carrinho}}{\text{4 carrinhos}}\ .\ \text{40 reais=}$$

.

$$x \text{ reais} = 1 \text{ carrinho} \cdot \frac{40}{4} \frac{\text{reais}}{\text{carrinho}} = \frac{40}{4} \text{ reais}$$

3 Divisão como quotição

Nessa classe de problemas o conjunto conhecido deverá ser particionado, por meio de um valor predeterminado.

Quadro 31: Diagrama – Divisão como Quotição

Modelo de Diagrama para Problemas de Divisão como Quotição	
$\boxed{1}$	$\boxed{A}$
$\boxed{}$	$\boxed{C}$

Representação:

$$\square \cdot A = 1 \cdot C \Rightarrow \square = \frac{C}{A}$$

A seguir apresento um exemplo de problema que retrata esta situação.

Quadro 32: Exemplo – Divisão como Quotição

Problema	**Diagrama e Cálculo Relacional**	**Cálculo Numérico**	**Equação**
Pedro tem R$ 30,00 e quer comprar alguns pacotes de bombons que custam R$ 6,00 cada pacote. Qual é a quantidade de pacotes que Pedro irá comprar?	Pacotes | Valor (R$) $1 \rightarrow 6$ $x \rightarrow 30$	DIVISÃO 30 : 6 = 5	x = 30 : 6

Análise dimensional:

$$\text{Taxa} = \frac{\text{pacote}}{\text{real}}$$

Equações dimensionais:

$$\frac{x \text{ pacotes}}{1 \text{ pacote}} = \frac{30 \text{ reais}}{6 \text{ reais}}$$

Multiplicando ambos os termos da equação por “1 pacote”:

$$\frac{x \text{ pacotes}}{1 \text{ pacote}} \,.\, 1 \text{ pacote} = \frac{30 \text{ reais}}{6 \text{ reais}} \,.\, 1 \text{ pacote} =$$

$$= x \text{ pacotes} = \frac{1}{6} \, \frac{\text{pacotes}}{\text{reais}} \,.\, 30 \text{ reais} = \frac{1}{6} \text{ pacotes} \,.\, 30 = \frac{30}{6} \text{ pacotes}$$

4. Quarta Proporcional.

Neste tipo de problema são definidas, três grandezas, de tal forma que a quarta grandeza será os valores a ser determinado como mostram os dados do quadro a seguir.

Quadro 33: Diagrama – Quarta Proporcional

Modelo de Diagrama para Problemas de Divisão como Quotição	
A	B
C	$\square$

Representação:

$$\square \cdot A = B \cdot C \Rightarrow \square = \frac{B \,.C}{A}$$

A seguir apresento um problema que exemplifica esta situação:

Quadro 34: Exemplo – 4ª Proporcional

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Ana gasta 20 ovos para fazer 4 bolos. De quantos ovos ela precisará para fazer 5 bolos?	$\begin{array}{c\|c} \text{Bolos} & \text{Ovos} \\ 4 \longrightarrow & 20 \\ 5 \longrightarrow & x \end{array}$	$\frac{5\ .\ 20}{4} = 25$	$4x = 5\ .\ 20$ $x = \frac{100}{4}$

Análise dimensional:

$$\text{Taxa} = \frac{\text{Ovo}}{\text{bolo}}$$

Equações dimensionais:

$$\frac{x \text{ ovos}}{20 \text{ ovos}} = \frac{5 \text{ bolos}}{4 \text{ bolos}}$$

Multiplicando-se ambos os termos da equação por 4 funcionários:

$$\frac{x \text{ ovos}}{20 \text{ ovos}}\ .\ 20 \text{ ovos} = \frac{5 \text{ bolos}}{4 \text{ bolos}}\ .\ 20 \text{ ovos} =$$

$$= x \text{ ovos} = \frac{5 \text{ bolos}}{4 \text{ ovos}}\ .\ 20 \text{ ovos} =$$

$$= 20 \text{ ovos}\ .\ \frac{5}{4} = \frac{20\ .\ 5}{4} \text{ ovos} = 25 \text{ ovos}$$

1.1.4.2 Relações Ternárias

Conforme já foi relatado, as principais características das relações ternárias são os produtos de medidas, ou seja, são estruturas que consistem em uma composição de duas medidas, tendo como resultado uma terceira medida. Tais estruturas descrevem vários problemas relativos à área (configuração retangular), combinações entre elementos, produto cartesiano e outras variações dentro dessas estruturas.

Estas estruturas produzem uma terceira grandeza baseadas em outras duas grandezas, as relações ternárias não podem ser representadas em diagramas mostrados no estudo das propriedades isomórficas, conforme já apresentados.

A classe dos produtos de medidas é composta pelas seguintes categorias:

I. Categoria das proporções múltiplas;

II. Categoria dos produtos cartesianos – bilinearidade;

III. Comparação multiplicativa;

Nas linhas seguintes, ilustro estas categorizações por meio de exemplos.

I. Categoria das proporções múltiplas

Nos problemas de proporcionalidade múltipla, existem dois domínios de medidas (ou mais), chamadas aqui de "Taxa", de tal forma que há uma associação destas, para formar uma "Taxa final".

Quadro 35: Exemplo – Problema de Proporções Múltiplas

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional		
	Leite	Ovos	Farinha
Uma dada receita foi descrita da seguinte maneira: para cada copo de leite são necessários 3 ovos, e para cada ovo são necessários 2 xícaras de farinha. Pretende-se fazer esta receita com 2 copos de leite, quantas xícaras de farinha serão necessárias?	1	$\xrightarrow{\text{Taxa=3}}$ 3	
		1	$\xrightarrow{\text{Taxa=2}}$ 2
	2	$\xrightarrow{\text{Taxa=3}}$ 6	$\xrightarrow{\text{Taxa=2}}$ x=12

No exemplo anterior, observa-se que a proporção de copos de leite para cada ovo é de 1 para 3, ou seja, a taxa é 3 e a proporção entre o número de ovos para cada copo de farinha é de 1 para 2 e a taxa é 2. Neste caso, a taxa final será o produto entre estas duas taxas, ou seja, $T_f = T_1 \cdot T_2$, isto é: $T_f = 3 \cdot 2 = 6$.

Desta forma, para dois copos de leite, precisaremos de 12 ovos, para se realizar esta receita.

II. Bilinearidade

Nos problemas desta categoria, são encontrados dois números de mesma medida para se localizar uma terceira medida, que é um produto cartesiano ou não das outras duas medidas, conforme os exemplos a seguir:

Produto de duas medidas:

Quadro 36: Exemplo 1 – Produto de medidas

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Diagrama e Cálculo Relacional</th></tr>
<tr><td>Um parque de diversões cobra R$ 2,00 para brincar em qualquer brinquedo por 1 hora. Maria quer levar seus três filhos para brincar no parque por quatro horas. Quanto ela pagará?</td><td>
<table>
<tr><th>Crianças</th><th>Horas</th><th>Valor</th></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>Taxa= 2
$\longrightarrow$ 2</td></tr>
<tr><td>3 $\longrightarrow$</td><td>4</td><td>x = 12 · 2 = 24</td></tr>
</table>
Par (Criança · Horas)=
3 · 4 = 12</td></tr>
</table>

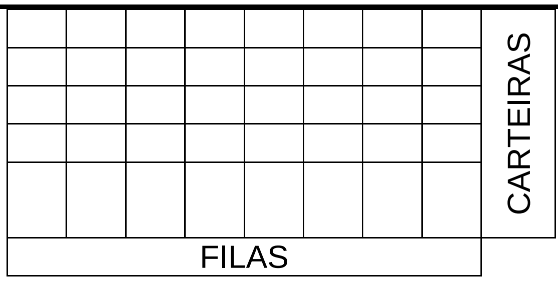
Formação de Pares ou combinatória:

Quadro 37: Exemplo 2 - Combinatória

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Resolução</th></tr>
<tr><td>Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinha ou copinho. Existem quatro variedades de sabores: menta, baunilha, chocolate ou morango. De quantas maneiras diferentes podemos montar um sorvete de uma bola?</td><td>Designarei por R= {a,b}, os recipientes, (sendo a= casquinha e b= copinho) e S= {c, d, e, f} os sabores, (c= menta, d=baunilha, e= chocolate, f= morango). Os pares ordenados são obtidos através do produto cartesiano R x S, da seguinte maneira:
<table>
<tr><td></td><td></td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr>
<tr><td>R</td><td>a</td><td>(a,c)</td><td>(a,d)</td><td>(a,e)</td><td>(a,f)</td></tr>
<tr><td></td><td>b</td><td>(b,c)</td><td>(b,d)</td><td>(b,e)</td><td>(b,f)</td></tr>
</table>
Par (Recipiente x Sabor)= 4 · 2 = 8</td></tr>
</table>

<u>Configuração Retangular.</u>

Quadro 38: Exemplo 3 – Configuração Retangular

Problema	Resolução
Em uma sala de aula em formato retangular, existem 8 filas de carteiras, com 5 carteiras cada. Quantas carteiras a sala possui?	 Par (horizontal x vertical): 8 . 5 = 40

<u>III. Comparação Multiplicativa.</u>

Nesta categoria, encontramos só um espaço de medida, de tal forma que as comparações entre estas medidas possam ser efetuadas.

Exemplos:

Quadro 39: Exemplo 1 – Comparação Multiplicativa

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Comprei uma boneca por R$ 21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola	21 Referido x Relação 3 Referente	DIVISÃO 21 : 3 = 7	x = 21 : 3

.

Quadro 40: Exemplo 2 – Comparação Multiplicativa

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico	Equação
Comprei uma bola por R$ 3,00 e comprei uma boneca 7 vezes mais cara que a bola. Quanto custou a bola?	x Referido 7 Relação 3 Referente	MULTIPLICAÇÃO 7 · 3 = 21	x = 7 · 3

Com a apresentação das relações multiplicativas, encerro o capítulo referente ao estudo dos campos conceituais aditivo e multiplicativo e com o desenvolvimento deste assunto fica clara a inter-relação entre os conceitos de esquema e invariantes operatórios propostos por Vergnaud.

O conceito de esquema aliado aos invariantes operatórios constitui os pontos centrais da Teoria dos Campos Conceituais. Nesta teoria, o conceito de esquema refere-se a organização estrutural das ações do sujeito frente a uma dada classe de situações e possui duas características distintas. A primeira, dá o sentido organizador do esquema, pois é ele quem organiza e dá sentido às ações; a outra, caracteriza a dinâmica do esquema como assimilador e antecipador, pois ele pode mudar sua significação e transformar-se no decurso das ações.

Vergnaud apud Brun (1996) complementa as duas características do conceito de esquema e os invariantes operatórios mencionados acima, da seguinte forma:

> A Teoria dos Campos Conceituais valoriza estas duas características do esquema: por um lado tem em conta aspectos estruturais do esquema, analisando-os em termos de invariantes operatórios, do ponto de vista dos próprios saberes constituídos (ponto central da teoria); é pelo menos este o sentido que eu atribuo às noções de conceito-em-ação e de teorema-em-ação. (BRUN, 1996, p. 23).

A união entre o desenvolvimento dos esquemas de ação do sujeito e os invariantes operatórios culmina com a formação do conceito, e este é relacionado diretamente à resolução de problemas.

Neste capítulo, apresentamos várias situações-problemas referentes às estruturas aditivas e multiplicativas, com o intuito de apresentar as diversas representações desses problemas dentro de cada esquema de ação.

Novamente destaco o motivo deste estudo nesta pesquisa, pois servirá como modelo, a ser usado na análise dos tipos de problemas que foram realizados pelos professores que constaram no instrumento diagnóstico.

A seguir, apresento um estudo sobre a relação algébrica entre as estruturas aditivas e multiplicativas.

1.1.5 Álgebra e as estruturas aditivas e multiplicativas

Nesta seção faço uma síntese dos estudos realizados por Vergnaud (1988 e 1997), sobre a relação existente entre o Campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas com a álgebra.

Vergnaud et al. (1988) consideram que a passagem da aritmética à álgebra, aos estudantes constitui uma ruptura epistemológica, pois muitos não conseguem manipular corretamente a linguagem simbólica da álgebra, e, na resolução aritmética de um problema em linguagem natural, fazem o uso da busca dos dados em uma ordem conveniente e, assim, confia-se na continuidade dos procedimentos de tratamentos relativamente automáticos para encontrar a solução desejada.

O autor entende que a introdução dos conceitos algébricos deveria compreender os seguintes aspectos:

- Proposição de problemas aritméticos simples e sua resolução pela álgebra;
- Regras elementares de tratamentos e transformações das equações;
- Primeira explicitação dos conceitos de função e de variáveis;

No âmbito desta pesquisa, estarei abordando o primeiro aspecto, que é o objetivo da pesquisa quanto à representação algébrica.

Na sequência, será desenvolvido o estudo, pautando-se no tópico escolhido.

Para Vergnaud (1997a), a compreensão da álgebra é influenciada pela aritmética e, também esta compreensão pode ajudar no entendimento da aritmética. Um dos fatores que colaboram para esta compreensão é a questão do enfoque algébrico nas séries iniciais, a partir da resolução de problemas comuns da aritmética com sua representação algébrica por meio de equações.

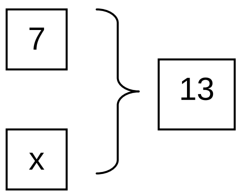
1.1.5.1 Estruturas Aditivas:

A seguir, apresento alguns problemas comuns da aritmética, cuja representação algébrica recai em uma equação do tipo: a + x = b ou x + a = b e sua resolução é representada por: x = b – a.

1. Existem 13 crianças na festa de aniversário de Maria. sete são meninos. Quantas são as meninas?

Equação: $(7 + x = 13) \Rightarrow (x = 13 - 7)$

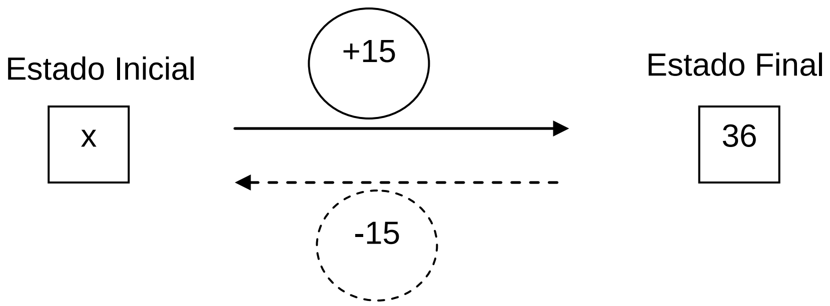
Na equação, o sinal de subtração representa o complemento da operação na relação parte - todo.



2 a. Roberto acaba de ganhar 15 figurinhas, jogando com Rosa, agora tem 36 figurinhas. Quantas figurinhas tinha antes do jogo?

Equação: $x + 15 = 36 \Rightarrow x = 36 - 15$

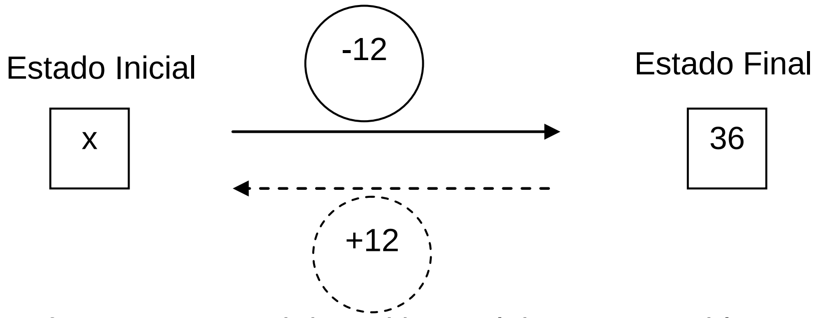
Na equação, o sinal de subtração representa a inversão da transformação direta.



2 b. Verifica-se o mesmo tipo de inversão quando Roberto perde 12 figurinhas ao jogar com Rosa.

Equação: $x - 12 = 36 \Rightarrow x = 36 + 12$

Na equação, o sinal de subtração representa a inversão da transformação direta.



Desta forma, Vergnaud (1997b) conclui que os problemas 2.a e 2.b são simétricos, e esta simetria deve-se ao fato da inversão da transformação direta em cada caso.

A situação é válida somente para a relação estado – transformação – estado, não tendo sentido para a relação parte – parte – todo, (problemas 2.a e 2.b).

Em Vergnaud (1997b), encontram-se algumas considerações sobre as transformações unárias (operações) e composições binárias, levantando a seguinte questão:

> Se a composição binária é o único modelo usado para ensinar a adição na escola elementar, que é inevitavelmente associado com a relação parte – parte - todo. Porém as crianças desenvolvem paralelamente, uma concepção alternativa de adição como o incremento de uma determinada quantidade: este caso corresponde à transformação unária (ou operação), não como combinação binária. Similarmente, a subtração é concebida primeiramente como decréscimo de uma determinada quantidade, e por conseqüência como uma transformação e não como combinação. (VERGNAUD, 1997b, p.3.)

Nos problemas citados anteriormente, o sinal de subtração assume os seguintes significados:

- Busca de um complemento (problema 1)
- Aplicação de um decréscimo (problema 2.b)
- Inversão de um acréscimo (problema 2.a)

Da mesma forma, os diferentes casos de multiplicação e divisão podem ser identificados, é o que tratará a seção seguinte.

1.1.5.2 Estruturas Multiplicativas

Vergnaud (1997b) afirma que, a maioria dos problemas de multiplicação e divisão, refere-se a situações em que duas variáveis são proporcionais, porém acarretam sentidos ou operacionalizações diferentes, conforme os exemplos a seguir:

1. Jane quer comprar 4 bolos. Eles custam R$ 6,00 cada. Qual a quantia que Jane irá gastar?

Esquema correspondente:

Bolo	Valor (R$)
1 →	6
4 →	x

Neste caso, pode-se pensar no seguinte teorema–em–ação: “multiplique o número de bolos pelo valor de um bolo”, ou seja, x = 4.6, e sua representação será expressa da seguinte maneira: f(x) = k.x.

A representação f(x) = k.x pode ser interpretada como f(4) = 4. f(1) (o valor dos 4 bolos é igual a 4 vezes o preço de um bolo), que é um caso especial de uma função linear, ou seja, a propriedade isomórfica:

f(1+1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1).

Conforme o desenvolvimento acima, a grandeza “6 reais” é multiplicada pelo escalar 4 (número sem dimensão), que corresponde à seguinte repetição: 6 reais + 6 reais + 6 reais + 6 reais.

A análise dimensional desta situação mostra que o produto dos fatores 4 e 6 corresponde à multiplicação de 4 bolos pela taxa 6, que é o quociente de dimensões: “6 reais” por bolo, ou seja,

$$4 \text{ bolos} \times \frac{6 \text{ reais}}{1 \text{ bolo}} = 24 \text{ reais}$$

A partir desta análise, não é possível pensar na multiplicação de 4 bolos por 6, como a adição de 4 bolos seis vezes, pois esta iteração resultaria em bolos e não em reais e em termos de análise dimensional não teria sentido nenhum, pois a taxa: 6 reais por bolo é fixa.

Outra situação:

2. O Sr. Paulo quer comprar 4 doces para cada um de seus 6 netos. Quantos doces ele precisará?

Esquema correspondente:

Netos	Doces
1 →	4
6 →	x

Neste problema encontra-se uma situação, diferente da anterior, mesmo que tratem do produto entre as parcelas 4 e 6.

Neste problema o teorema-em-ação implícito seria: “multiplique o número de netos pelo número de doces por neto”, e a propriedade isomórfica da função linear, será representada da seguinte maneira:

$f(6) = 6. f(1) = f(1+1+1+1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1).$

Pode-se, também, pensar neste caso a multiplicação de 6 por 4, que corresponde ao coeficiente entre as duas variáveis:

$f(6) = k . 6$ onde $k=4$

A análise dimensional para esta situação é dada da seguinte maneira:

$$6 \text{ netos} . \frac{4 \text{ doces}}{1 \text{ neto}} = x \text{ doces}$$

Neste problema, tanto a multiplicação de 6 por 4 e de 4 por 6, resultam na quantidade de doces, portanto, aqui se aplica a propriedade comutativa da multiplicação.

Nos dois problemas apresentados anteriormente, verifica-se que existe uma diferença em termos de relação entre dimensões. No primeiro problema, a dimensão refere-se a uma taxa ou quociente entre duas grandezas, ou seja, a quantidade de real por bolo que multiplicada pela quantidade de bolos resulta em quantidade de bolos. Desta forma, não é possível se pensar na comutatividade entre a quantidade de bolos e o valor por bolo.

Já no segundo exemplo, nota-se a presença de uma constante que é a quantidade de doces que cada neto irá receber, multiplicada pela quantidade de doces, resulta em quantidade de doces. Desta forma, as multiplicações: $4 \cdot 6$ e $6 \cdot 4$, têm como produto a quantidade de bolos e, consequentemente, valida a propriedade comutativa da multiplicação, ou seja, $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$.

Segundo Vergnaud (1997b), diferente da introdução da representação algébrica nas estruturas aditivas, o que parece ser um procedimento natural da representação aritmética nas estruturas multiplicativas, mais explicações devem ser apresentadas aos estudantes, para que entendam a profunda estrutura das proporções simples e múltiplas.

1.1.5.3 Escrita Algébrica.

Nos parágrafos abaixo, são descritas as considerações de Vergnaud et al. (1988) a respeito do tratamento das transformações das equações.

Desse modo, o primeiro fator refere-se ao significado do sinal de igualdade, segundo Vergnaud et al. (1988) que conserva o sentido do anúncio de um resultado obtido pelo cálculo aritmético, por exemplo, a solução de um problema que aceita a seguinte operação aritmética: 23 + 32 = 54

Já na álgebra, o sinal de igualdade conduz a outros significados:

- Sentença verdadeira, sob a condição de uma escolha adequada dos valores da incógnita:

$$5 + 3(x+6)= 7x - 17$$

- Igualdade de funções:

$$5 + 3 (x+6) = 3x + 23$$

No primeiro caso, só a equivalência das equações é apresentada; assim, é encontrado o valor da incógnita ou o número representado por x, a fim de que os membros da equação seguem equivalentes.

Já no segundo caso, após o desenvolvimento das operações solicitadas na expressão algébrica situada à direita do sinal de igualdade, observa-se que esta é equivalente à expressão algébrica localizada à esquerda do sinal de igualdade.

Para Vergnaud et al. (1988) a primeira leitura que os alunos fazem da álgebra baseia-se nas consequências de igualdades, de tal forma que cada igualdade seja deduzida da anterior por uma regra simples que, ao mesmo tempo, permite conservar a igualdade e aproximar-se de uma fórmula do tipo:

x= expressão puramente numérica.

Para o autor, esta sequência merecia ser considerada como tal, pois desempenha um papel fundamental na álgebra e introduz ao raciocínio do termo da escrita.

Na continuidade dos estudos, este raciocínio torna-se importante quando se aplica a resolução de equações do tipo: ax + b = c, em que, são reconhecidas algumas formas invariantes, por exemplo:

3.x + 4 = 28	45 = 2.t + 13
3.x + 4 – 4 = 28 – 4	45 – 13 = 2.t + 13 - 13
3.x = 24	32 = 2.t
3.x /3 = 24 / 3	32/2 = 2.t/2
x = 8	16 = t

O processo acima não teria importância se não fosse acompanhado da ideia de algoritmo de resolução que é a escolha das operações intermediárias, ou seja, o uso da seguinte propriedade: o resultado de uma equação não se altera quando se, adicionam, subtraem, multiplicam-se ou dividem-se os membros de uma igualdade por um mesmo número diferente de zero (Princípio da equivalência) .

Assim, tal procedimento resume-se em um algoritmo de resolução de equações que Vergnaud et al. (1988), denominam de "*Script Algoritmo",* de tal forma que se constitui em um algoritmo cuja escrita, o *script*, é um conjunto de regras que permitem diante de qualquer classe de problemas, achar uma solução (se existir uma) em um número finito de passos, ou determinar que tal solução existe.

Dando sequência ao estudo referente à álgebra e aos Campos Conceituais, finalizo este tópico realizando um estudo sobre o campo conceitual algébrico, conforme segue.

1.1.6 O Campo Conceitual Algébrico.

Rocha Falcão (1997), considera que a apropriação da álgebra torna-se uma tarefa cognitiva árdua, pois sua aprendizagem recobre um campo conceitual extenso, no qual a apropriação de uma nova ferramenta de resolução de problemas é consequência da aquisição de novos objetos matemáticos.

Este campo recorre aos seguintes aspectos:

1. reconhecimento de determinadas funções da álgebra, por meio de representação de modelos e resolução de problemas, cuja solução aritmética seja inviável;
2. formalizar problemas pela escrita do problema em forma de equação, extraindo as variáveis e incógnitas, bem como as relações pertinentes ao problema;
3. conhecimento dos objetos algébricos como: funções, fórmulas, equações, variáveis e incógnitas; e
4. Conhecer o que fazer, após a obtenção da equação, mobilizando algumas regras para solucionar o problema.

No campo conceitual algébrico, a tarefa de resolução de problemas compreende as seguintes etapas:

1. mapeamento do problema: compreende a primeira representação mental que envolve a identificação das categorias de resolução do problema.
2. escrita algébrica: é a transposição dos dados e relações identificadas na etapa 1. anterior à linguagem natural para um sistema formal. Não se trata aqui de uma transposição pura e simples, mas uma passagem linear de uma linguagem a outra. Esta transposição exige um reconhecimento prévio das relações matemáticas entre a incógnita e os demais dados do problema para que se possa resolvê-lo.
3. procedimento de resolução: o objeto matemático é confrontado com algoritmos e as relações para se encontrar a solução.
4. retomada do sentido: nesta etapa, retorna-se ao contexto específico do problema, utilizando-se da linguagem natural para um confronto entre os dados obtidos na etapa anterior e o contexto do problema.

Os aspectos do Campo Conceitual Algébrico a serem destacados nesta pesquisa se referem-se ao reconhecimento de determinadas funções da álgebra pela resolução de problemas; e a formalização de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas pela escrita formal por meio de equações.

A seguir, apresentarei os estudos de outros pesquisadores a respeito da introdução algébrica.

1.2. OS ESTUDOS SOBRE A INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA

1.2.1 Rômulo Lins e James Kaput.

Lins & Kaput (2004) apontam a existência de duas compreensões sobre o significado da Álgebra inicial, a primeira, diz respeito à tradição de seu ensino que só ocorre quando os estudantes têm aproximadamente 12 ou 13 anos de idade.

No entanto, estudos recentes apontam que a introdução do início precoce dos estudantes ocorre aos 7 anos de idade . Os autores citados ressaltam que essa introdução está focada no desenvolvimento do pensamento algébrico. Mas, para tal, exigem mudanças do ponto de vista sobre o que é aprendizagem e como integrar os novos estudos referentes à álgebra inicial. Assim, consideram como uma mudança a longo prazo, pois a educação algébrica ainda não começou a incorporar alguns aspectos particulares da atividade algébrica nas séries iniciais (como, fórmulas e notação literal, bem como expressões com indicações de operações) que se constituem em aspectos relevantes para o domínio do formalismo das estruturas tradicionais.

Em Lins & Kaput (2004), existe uma visão geral da relação entre a aritmética e a álgebra na tradição escolar. Assim, uma das questões destacadas refere-se à caracterização dada para a álgebra como aritmética generalizada.

Primeiramente, os autores citam um período, anterior à reforma da nova matemática, de 1960, que a álgebra seja apresentada como ferramenta para solução de alguns problemas aritméticos e justificavam que a álgebra (escolar) é abstrata, e a aritmética é mais concreta, Davis apud Lins & Kaput (2004), não aceita esta alegação, e aponta a complexidade de certas operações aritméticas comparadas à essência aritmética, como o processo de resolução de equações lineares.

Os autores citados apresentam a justificativa, referindo-se a Petito (1979), para explicar o fato de que a álgebra não seja precedida pela aritmética:

> Como a álgebra requer um pensamento formal, enquanto a aritmética não, e como o pensamento formal corresponderia a uma fase de desenvolvimento posterior, a álgebra deve vir mais tarde que a aritmética. (PETITO, 1979, apud LINS & KAPUT, 2004, p. 5).

Segundo Lins & Kaput (2004), a escolha da álgebra como generalização aritmética, deve-se ao fato de separar a álgebra escolar da álgebra abstrata. Na álgebra escolar tradicional, letras sempre estão para números, porém, na álgebra abstrata letras podem estar associadas aos elementos de qualquer conjunto cujas operações têm formatos definidos. Neste sentido, os autores citam o estudo de Küchermann (1978; 1984) que aponta para uma investigação da compreensão da aritmética generalizada nas crianças. Esta investigação reportou-se à ligação entre os diferentes usos de letras na generalização aritmética e os níveis de desenvolvimento intelectual de Piaget.

Outro fator a ser discutido na introdução da álgebra nas séries elementares relaciona-se ao pensamento algébrico, trazendo uma reflexão sobre os aspectos que poderiam ou deveriam ser desenvolvidos para antecipação do ensino de álgebra nestas séries.

Para tal, apresento nas linhas seguintes, uma síntese dos trabalhos efetuados por da Rocha Falcão (1993, 1994, 1997).

1.2.2. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão

Para o autor, a caracterização epistemológica da álgebra é entendida como um conjunto de conceitos e procedimentos (algoritmos) matemáticos que permitem a representação prévia e a resolução de um determinado tipo de problema, no qual os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes.

Desta forma, a álgebra apresenta uma dupla caracterização. A primeira refere-se a seu uso como objeto, isto é opera em si mesma com suas leis e objetos próprios e como ferramenta matemática a serviço, dos diversos campos conceituais matemáticos.

Ainda, para o autor, a álgebra como ferramenta é utilizada na transposição de informações da linguagem natural, para a linguagem simbólico-formal da matemática.

Nos procedimentos de resolução de problemas, faz se uma transposição dos dados e representações em linguagem natural para um sistema simbólico formal, ou seja, a escrita do problema em forma de equação.

Em da Rocha Falcão (1997) encontra-se a seguinte afirmação a respeito da passagem entre a aritmética à álgebra:

> A passagem da aritmética à álgebra deve ser situada num contexto que abra espaço para os aspectos de *ruptura*, sem dúvida fundamentais, mas que não descuide dos aspectos de continuidade. Há efetivamente ruptura, no sentido epistemológico do termo, nessa passagem: torna-se necessário mudar a abordagem do problema, que passa a requerer uma formalização (colocação em equação) prévia ao cálculo propriamente dito. (ROCHA FALCÃO,1997, p. 90).

Rocha Falcão (2003), parte do princípio que a álgebra não pode ser vista apenas como aritmética generalizada, pois a álgebra tem suas propriedades intrínsecas como campo conceitual específico.

Para as séries iniciais, os principais aspectos a serem destacados deste campo conceitual têm duas funções; a primeira refere-se à representação de fenômenos, contemplando as seguintes etapas; modelização (descrição dos fenômenos), função (detalhamento simbólico), generalização (passagem do simbólico para explicitação de leis gerais); e a segunda, no auxílio à resolução de problemas matemáticos (algoritmos, prioridades de operações e princípio da equivalência entre equações).

O autor destaca os elementos básicos do campo conceitual algébrico, segundo duas caracterizações: a primeira como ferramenta representacional e menciona os números, as medidas, as incógnitas e variáveis,as regras de atribuição de símbolos e ao, significados do sinal de igual.

A segunda caracterização diz respeito às ferramentas de resoluções de problemas, como: algoritmos, regras sintáticas, prioridades de operações e princípio da equivalência entre equações.

Rocha Falcão (1997), sugere que o ensino introdutório da álgebra, não se restrinja apenas ao treinamento da utilização de algoritmos a partir de equações prontas. Uma das formas de se evitar o uso desta metodologia seria a escrita de um dado problema em forma de equação.

1.2.3 Carolyn Kieran

Segundo Kieran (1994), a aprendizagem antecipada da álgebra, geralmente, implica no conhecimento e utilização de seus seguintes conteúdos: variáveis, expressões algébricas e solução de uma equação. As dificuldades das crianças estão centradas, especialmente nos seguintes tópicos: o significado das letras, a mudança para um sistema de convenção diferente dos usados em aritmética.

Para Kieran (1992), existe uma análise histórica do desenvolvimento algébrico que descreve os conteúdos da álgebra e suas exigências psicológicas que estes conteúdos requerem dos alunos. A autora sugere que se enfatizem atividades que propiciem o desenvolvimento da álgebra como ferramenta e tornem claras as transições entre ferramenta e objeto, além de discutir a aprendizagem de funções e variáveis.

Usiskin, apud Kieran (1994), aponta quatro pontos de vista do conceito de variável; o primeiro, refere-se ao uso da álgebra como generalização aritmética. Neste contexto, as variáveis são vistas como generalizadoras de padrões, e as habilidades algébricas estão centradas em traduzir e generalizar as relações entre os números.

O segundo ponto de vista trata dos procedimentos de resolução de certas classes de problemas. Neste sentido, as variáveis podem ser vistas como incógnitas e as habilidades algébricas implicam simplificar e resolver equações.

Observa-se também o estudo das relações entre as quantidades, neste sentido, variáveis são argumentos ou parâmetros.

Por ultimo, o quarto ponto de vista faz referência ao uso da álgebra como estudo de estruturas, como anéis, domínios, espaços vetoriais, etc. Neste caso as variáveis são objetos arbitrários em uma estrutura relacionada por certas características.

Kieran (1997) discute principalmente a aprendizagem de funções e suas variáveis como parâmetros, ligados ao ensino da álgebra como generalizadora da aritmética.

Nesta seção apresentei os estudos de alguns dos pesquisadores da Educação Matemática sobre a introdução algébrica. A seguir mostrarei as pesquisas que trataram sobre o desenvolvimento algébrico e aritmético.

1.3 AS PESQUISAS SOBRE O DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO E ARITMÉTICO.

Para o desenvolvimento desta seção, destaquei três pesquisas, cujo foco seria o desenvolvimento algébrico, busquei de alguma forma pesquisas que tratassem do mesmo assunto desenvolvido nesta dissertação, ou seja, a introdução da álgebra nas séries iniciais, porém as três pesquisas aqui apresentadas, possuem um público-alvo diferente, ou seja, 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.

Nas linhas seguintes apresentarei as pesquisas de: Oliveira (2004), Santos (2005), Arrais (2006)

1.3.1 Marília Barros de Oliveira

A pesquisa de Oliveira (2004) envolveu alunos de 6ª série, do ensino fundamental, de uma escola da rede municipal de São Paulo, baseou-se nos seguintes aspectos teóricos: Modelo dos Campos Semânticos, (LINS, 1993), Teoria dos Campos Conceituais (VERGANUD, 1997, 1998) e Registros de Representação Semiótica, (Duval, 2003).

A autora investigou a constituição de significados relativos à passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica, para tal assumiu a hipótese de que o jogo codificação-decodificação de situações problema auxilia na constituição de significados na linguagem algébrica.

Este jogo compreendeu duas etapas; na primeira, uma dupla de alunos recebe a incumbência de codificar um problema aritmético entregando para outra dupla, em um segundo momento, outra dupla decodifica O problema e utiliza na resolução de um problema semelhante, porém, com dados numéricos diferentes.

Segundo a autora, o objetivo maior do jogo seria a percepção por parte do aluno que, com a utilização do código criado, a resolução do problema ocorre de maneira mais rápida, de tal forma que o aluno só substitui os valores numéricos no código e realiza as operações indicadas, poupando, assim, o tempo de reflexão sobre qual seria a operação a ser utilizada.

A metodologia utilizada na pesquisa diagnóstica teve caráter experimental e foi aplicada em duas turmas de 6as Séries que constituíram o GE (Grupo Experimental) e o Grupo de Controle (GC).

A autora concluiu que, se de um lado, o jogo não atinge as expectativas referentes à construção da linguagem algébrica; por outro lado, o ensino formal apresentado está muito longe de atingir o resultado esperado.

Quanto ao uso do jogo, a autora destaca que ele por si só não dá conta da constituição de significados para a linguagem algébrica; mas quando se combina com a formalização escolar, a ideia do jogo produz resultados significativos à introdução algébrica.

1.3.2 Leila Muniz Santos

A pesquisa de Santos (2005) investigou as concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra, à luz das concepções de Usiskin e com as abordagens para ensino da álgebra sugeridas por Berdnaz, Kieran e Lee.

A autora optou por uma pesquisa descritiva, analisando os dados de forma quali-quantitativa, cujos sujeitos eram compostos de 28 professores de Ensino Fundamental e Médio.

A autora supõe as possíveis abordagens utilizadas pelo professor no ensino da álgebra:

- A álgebra como aritmética generalizada;
- Como procedimentos;
- Como relações entre grandezas;
- Como estrutura algébrica;
- Como duas ou três das concepções anteriores
- Como concebeu Usiskin, contemplando as quatro concepções: aritmética generalizada, procedimentos, relações entre grandezas e estrutura algébrica.

A autora conclui que todos professores têm como concepção do ensino da álgebra a aritmética generalizada (28 professores), e abordam a álgebra como generalização das leis que regem os números, poucos professores concebem a álgebra como estudo de relações entre as grandezas, isto é abordam a álgebra como introdução do conceito de variável e função.

1.3.3 Ubiratan Barros Arrais

A pesquisa de Arrais (2006) procurou identificar e analisar as crenças, concepções e competências que os professores 1ª a 4ª séries têm ao trabalharem com as expressões algébricas.

A fundamentação teórica utilizada neste trabalho baseou-se nos estudos da Teoria dos Campos Conceituais, referente às estruturas aditivas e multiplicativas e as idéias de Nóvoa e Ponte.

A análise dos dados desta pesquisa baseou-se em um instrumento diagnóstico aplicado a 70 professores de quatro escolas do Ensino Fundamental da rede municipal de ensino de São Bernardo do Campo.

Com base nesta análise, o autor concluiu que o professor não concebe a expressão aritmética, como um modelo matemático que representa uma situação-problema e que o vê, como um aglomerado de cálculos com fim em si mesmo quanto à competência, o autor detectou que alguns professores sentem dificuldades para trabalhar com situações que envolvem o campo conceitual das estruturas aditivas mistas e, para estes professores, ainda não houve uma expansão das estruturas aditivas e tão pouco das multiplicativas.

Após a apresentação das sínteses das pesquisas realizadas sobre o desenvolvimento algébrico e aritmético, prosseguirei no desenvolvimento dos aspectos teóricos desta pesquisa. A seguir apresento um estudo sobre concepções e competências, baseado em João Pedro da Ponte e Gerard Vergnaud e, também, sobre o Conceito Imagem e Conceito Objeto, apoiado nas pesquisas de David Tall e Shlomo Vinner, encerrando assim este capítulo.

1.4 CONCEPÇÕES, COMPETÊNCIAS E CONCEITOS.

1.4.1 Concepção e Competência, segundo Gerard Vergnaud.

Para Vergnaud (1988), a competência e o conceito de esquema estão intimamente ligados, pois o esquema é uma organização invariante da ação em certa situação e, também, organiza os invariantes necessários para atuar nesta situação de maneira implícita.

Desta forma, Vergnaud (1988), afirma que as competências podem ser analisadas como uma combinação de esquemas, que podem ser aplicados em diversas variáveis envolvidas em certo conjunto de situações e que podem gerar uma variedade de ações. Portanto, elas se desenvolvem a partir da ação do sujeito inserido em dada situação.

O conceito de teorema-em-ação é essencial para o entendimento de como a situação de resolução de problemas tem seu fundamento na representação conceitual ou quase conceitual da realidade.

Magina et tal. (2001) estabelecem que as competências matemáticas podem ser analisadas segundo três aspectos: (a) análise do acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta; (b) análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro, porque sua resolução foi mais econômica ou mais rápida e, ainda, a mais elegante; e (c) análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver um problema dentro de uma situação particular.

Vergnaud (1988), afirma que as concepções não podem ser analisadas como esquemas, estes, geralmente, são implícitos, e os conceitos podem ser verbalizados, pode-se dizer que as concepções estão presentes nas expressões simbólicas do sujeito.

O autor mostra por meio do quadro a seguir as diferenças entre esquema e conceito, conforme segue:

Quadro 41. Comparativo entre Esquema e Conceito, segundo Vergnaud (1988)

ESQUEMA	**CONCEITO**
Totalidade dinâmica	Elementos distintos combináveis
Invariantes implícitas (ou intuitivas)	Invariantes explícitas
Age somente no nível de significado	Age em ambos os níveis: significado e significação.
Teorema-em-Ação	Teoremas.

1.4.2. Concepção e Competência segundo, João Pedro da Ponte.

Ponte (1992) cita que as concepções condicionam a forma de abordagem das tarefas, muitas vezes orientam as abordagens que estão longe de ser as mais adequadas e que as atitudes, as expectativas e o entendimento de uma dada situação estão intimamente ligados à concepção que levam à formação do conhecimento. Neste sentido as concepções podem ser vistas como organizadoras dos conceitos.

Em se tratando de conhecimentos, Ponte (1992), destaca quatro tipos de conhecimentos, que estão intimamente relacionados: (a) o descritivo, que envolve conceitos e imagens; (b) o proposicional ou argumentativo, que trata das cadeias de raciocínio; (c) o ativo e processual, o saber fazer, as regras de ação, e (d) o controle, que se refere à metacognição e a reflexão.

O autor destaca que as concepções influenciam as práticas, no sentido de apontar as direções e fundamentam as decisões etc., As práticas são condicionadas por uma multiplicidade de fatores que levam a geração de concepções que sejam compatíveis às práticas que possam ser úteis para enquadrá-las conceitualmente.

Em se tratando de conhecimento matemático, o autor destaca quatro características fundamentais: a formalização, segundo uma lógica bem definida, a verificabilidade que permite estabelecer consensos sobre a validade de cada resultado, a universalidade, isto é, seu caráter trans-cultural e a possibilidade de se aplicar aos mais diversos fenômenos e situações e, por fim a generatividade, ou seja, a possibilidade de levar à descoberta de coisas novas.

Esses conhecimentos matemáticos formam o saber matemático e são constituídos por intermédio de competências. A partir disso, Ponte (1992) distingue quatro competências desse saber, de acordo com sua função e os níveis de complexidade, distribuídos da seguinte forma: as competências elementares, intermediárias, complexas e os saberes de ordem geral.

Nas competências elementares, estão inseridos os processos de simples memorização e execução, nas intermediárias os processos com certo grau de complexidade, mas, que não exigem muita criatividade, as competências complexas exigem uma capacidade significativa de lidar com situações novas e os saberes de ordem geral incluem os saberes com influência nos próprios saberes, os meta-saberes.

1.4.3 Conceito Imagem e Conceito Definição.

As noções de Conceito Imagem e Conceito Definição têm como principais pesquisadores David Tall e Shlomo Vinner.

Tall e Vinner (1981) argumentam que muitos dos conceitos não se definem formalmente, aprendemos a reconhecer estes conceitos pela experiência e em seu uso em contextos apropriados. A estes conceitos, são associados símbolos ou nomes que permitam sua representação mental.

Desta forma, os autores usam o termo: Conceito Imagem para descrever a estrutura cognitiva total, que é associada ao conceito, incluindo todos os quadros mentais, as propriedades associadas e os processos de representação.

Para cada conceito uma parte do conceito imagem é evocado, ou seja, ele é individual para cada situação. Em alguns indivíduos, este conceito pode estar vazio, ou quase inexistente. Em outros casos, eles podem ou não se relacionar coerentemente com outras partes de um conceito imagem. (Tall e Vinner, 1981)

Isto ocorre de acordo com a forma de ensino em que o estudante é submetido, pode-se ensiná-lo a responder uma questão com a definição formal do conceito, tendo o mesmo um conceito imagem inapropriado daquele conceito. O fato pode acontecer quando um determinado conceito é definido pelo professor de maneira formal, ou seja, não sendo desenvolvido em seus aspectos mais amplos. Nesta situação, o conceito imagem desenvolve-se dentro de noções mais restritas, e o conceito definição permanece inativo na estrutura cognitiva dos estudantes.

Segundo Dias (2002), o conceito definição é a especificação do conceito em forma de palavra e pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal, sem que ele e a definição de conceito tenham necessariamente significados coincidentes e, ainda, o conceito definição pode ser uma descrição do conceito imagem.

Tall e Vinner (1981) ressaltam que a aprendizagem do conceito definição pode acontecer de maneira rotineira ou de forma significativa, havendo uma relação de maior ou menor intensidade com a definição do conceito científico e ainda considerar que o conceito definição seja uma reconstrução pessoal de uma definição formal, sem a necessidade de ambos terem significados coincidentes.

A seguir, apresento o capítulo referente aos procedimentos metodológicos, nele retratarei as bases teórico-metodológicas que deram suporte à análise desta dissertação, bem como o universo do estudo e o instrumento diagnóstico.

CAPÍTULO II

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O objetivo do presente capítulo é apresentar o procedimento metodológico utilizado na pesquisa que desenvolverei. Iniciarei pela discussão sobre a opção teórico-metodológica adotada. Na sequência, abordarei a pesquisa de campo, quando serão descritos o universo do estudo, os sujeitos participantes da pesquisa, o procedimento da coleta dos dados e, por fim, o instrumento utilizado.

2.1 DISCUSSÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Após o desenvolvimento da base teórica que forneceu os subsídios necessários para se efetuar a análise e a posterior conclusão fundamentada nas teorias da Educação Matemática, a seção tem o objetivo de apresentar uma discussão teórico-metodológica a ser utilizada na coleta e análise de dados deste trabalho. Na sequência, apresentarei alguns aspectos teóricos da metodologia da pesquisa que fundamentaram este trabalho.

Antes de iniciar a fundamentação teórico-metodológica, retomo aqui o objetivo e a questão do estudo, pois foi a partir deles que os procedimentos metodológicos foram traçados:

- O objetivo do estudo foi *Investigar a maneira pela qual o professor concebe uma transição entre os conceitos aritméticos desenvolvidos para uma introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental.* Com ele em mente construí a seguinte questão de pesquisa: *Quais são as concepções e competências dos professores e futuros professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, sobre a utilização das estruturas aditivas e multiplicativas, como elementos propiciadores da introdução de problemas algébricos?*

Para responder a esta questão, optei por uma metodologia de pesquisa de abordagem quanti-qualitativa, pois as características referentes ao estudo que se pretende desenvolver apontaram esta abordagem, particularmente como adequada.

No que tange aos aspectos qualitativos da pesquisa, segundo Lüdke e André (1986), a abordagem qualitativa preocupa-se mais com o processo, que se torna muito importante na obtenção de dados de um determinado grupo estudado, pois os dados não ocorrem em um ato mecânico de registro, e sim no processo de interação, reflexão e atribuição de sentidos entre o grupo estudado e o pesquisador, possibilitando um melhor conhecimento do objeto de estudo.

Reforçando este ponto de vista, Chizzotti caracteriza a abordagem qualitativa da seguinte maneira:

> A abordagem qualitativa parte do fundamento de que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, uma interdependência viva entre o sujeito e o objeto, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade. O conhecimento não se reduz a um rol de dados isolados, conectados por uma teoria explicativa; o sujeito observador é parte integrante do processo de conhecimento e interpreta os fenômenos, atribuindo-lhes um significado. (CHIZZOTTI, 1991, p. 79)

Nessa direção, Bogdan e Biklen (1994) destacam cinco características de uma pesquisa com abordagem qualitativa:

1- A pesquisa qualitativa tem como fonte de dados o ambiente natural e o pesquisador como instrumento-chave;
2- A pesquisa qualitativa é descritiva;
3- Os pesquisadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4- Os pesquisadores qualitativos tendem a analisar seus resultados de forma indutiva[20]; e
5- O pesquisador interessa-se em compreender o significado que os participantes atribuem a seus questionamentos.

---

[20] Indução: Processo mental que parte de um dado particular suficientemente constado e infere a estes verdades gerais ou universais não constadas nas partes iniciais.

A respeito da atuação do pesquisador numa pesquisa qualitativa, os autores concluem que:

> O processo de condução da pesquisa qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os pesquisadores e os respectivos sujeitos, dados estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra. (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 51).

Assim, neste tipo de estudo, o pesquisador dialoga com seus sujeitos de pesquisa sem, contudo, interferir na reflexão que estes têm do estudo apresentado.

Portanto, a análise referente à coleta de dados desta pesquisa seguirá uma abordagem qualitativa. A seguir, delinearei a escolha do método de pesquisa, segundo o objetivo do estudo:

Como relatado anteriormente, esta pesquisa tem o objetivo de realizar um estudo diagnóstico, ou seja, descrever quais são as competências e concepções relativas à introdução da representação algébrica. Desta forma, fiz a opção por uma pesquisa descritiva.

Segundo Gil (2007), a pesquisa descritiva observa, registra, correlaciona e descreve fatos ou fenômenos de uma determinada realidade sem manipulá-los. Caracteriza-se pela seleção de amostras aleatórias de grandes ou pequenas populações sujeitas à pesquisa, visando a obter conhecimentos empíricos atuais, que levam à possibilidade de generalização da pesquisa realizada.

O pesquisador citado destaca que estas características são importantes para o estabelecimento do marco conceitual da pesquisa, porém, para confrontar a visão teórica com os dados coletados verifica-se a necessidade do estabelecimento de um modelo conceitual e operativo da pesquisa, que o autor chama de delineamento, definindo-o da seguinte maneira:

> O delineamento refere-se ao planejamento da pesquisa em sua dimensão mais ampla, que envolve tanto a diagramação quanto a previsão de análise e interpretação de coleta de dados. Entre outros aspectos, o delineamento considera o ambiente em que são coletados os dados e as formas de controle das variáveis envolvidas. (GIL, 2007, p. 43)

Desta maneira, pode-se classificar o delineamento da pesquisa como diagnóstico, e o instrumento a ser utilizado para se efetuar a análise de dados foi um questionário.

Uma parte desse instrumento avalia a competência do professor ao resolver problemas. Essa competência foi analisada do ponto de vista do desempenho, isto é, os acertos (e os erros). Estes foram quantificados e apresentados em forma de gráficos e tabelas, para dar suporte as inferências feitas a partir deles. Isto implica dizer que, parte dos dados foram olhados quantitativamente.

Portanto, esta pesquisa obedeceu ao seguinte enfoque metodológico:

Pesquisa de abordagem quanti-qualitativa, valendo-se de instrumentos estatísticos para retratar os dados analisados. Quanto ao objetivo, é descritiva com um delineamento diagnóstico, tendo como instrumento desse diagnóstico um questionário.

A seguir, apresentarei como se configurou a coleta de dados, bem como a escolha do universo de pesquisa, seus sujeitos e o instrumento diagnóstico.

2.2 A PESQUISA DE CAMPO

Esta seção abordará as questões de ordem prática do estudo, relatará as opções na escolha do universo do estudo, focando, especialmente, nos sujeitos participantes do estudo. Além de descrever como se deu a coleta de dados e apresentará em detalhes o instrumento diagnóstico que foi utilizado na coleta de dados.

2.2.1. O universo de estudo e sujeitos da pesquisa.

O universo de estudo escolhido foram os professores que ministram aulas nas séries iniciais do Ensino Fundamental e alunos do último semestre do curso de Licenciatura Plena em Pedagogia.

Esta escolha deu-se em razão da especificidade do assunto a ser analisado, pois são professores em atividade, tanto pela experiência no magistério como seus conhecimentos que podem gerar dados a respeito das concepções e competências para introdução da representação algébrica. Quanto aos alunos do curso de Pedagogia, procurei investigar quais as possíveis inferências que eles já concebem para tal introdução.

A amostra inserida no universo de estudo constou de 23 professores que ministram aulas em séries distintas, distribuídas entre as séries iniciais do Ensino Fundamental e 17 alunos do 6º Semestre do curso de Licenciatura Plena em Pedagogia.

Os 23 professores pertencem a uma mesma unidade escolar da Rede Pública Estadual, situada no Município de São Paulo, especificamente, na região norte que atende cerca de 700 alunos distribuídos entre os períodos da manhã e tarde, atendendo somente alunos de 1ª a 4ª série. Dentre os recursos existentes na unidade escolar, destacam-se a existência de uma sala de recursos, que atende alunos portadores de necessidades especiais, ou seja, alunos com deficiência visual e auditiva, uma sala ambiente de informática e um anfiteatro.

O motivo da escolha desta unidade escolar foi o fácil acesso a que o corpo gestor desta unidade apresentou para o desenvolvimento da pesquisa, pois tanto a Diretora como a Coordenadora Pedagógica não apresentaram impedimentos para que tal pesquisa ocorresse. Assim, tratou-se de uma amostra “por conveniência”.

Quanto à escolha da instituição de ensino superior, deu-se pelo motivo de estar na mesma região geográfica onde resido, ou seja, a região norte do Município de São Paulo, facilitando, assim, o acesso a ela. Novamente, evidencia-se que a escolha dos sujeitos da pesquisa tem um caráter pragmático e não aleatório.

Nesta instituição não obtive nenhum impedimento para o encaminhamento da pesquisa, e a Coordenadora da área de Educação foi bem solícita quanto à execução do estudo.

2.2.2 A coleta de dados

A coleta de dados realizada na unidade escolar desenvolveu-se ao longo de três encontros destinados ao HTPC [21] dos professores, que tem duração de 2 horas cada.

Os encontros foram divididos da seguinte maneira, no primeiro, destaquei o motivo da visita, explicando que a atividade era de suma importância para o desenvolvimento de minha pesquisa. Após a apresentação, em linhas gerais da pesquisa perguntei se os professores presentes à reunião poderiam responder a um instrumento diagnóstico[22]. Na medida que iam concordando participar, entregava-lhes o Termo de Consentimento[23], para ser assinado por eles, a partir do qual entrega-lhes a primeira parte do estudo, contendo os itens relacionados ao perfil do professor. Já no segundo encontro, foi solicitado aos professores que elaborassem problemas de estruturas aditivas e multiplicativas. Finalmente no terceiro encontro, os professores receberam a terceira parte do questionário, que versava sobre a resolução de problemas propostos, no qual era pedido que eles os resolvessem de duas maneiras: aritmeticamente e por meio de um enfoque algébrico.

Para os alunos de Pedagogia, foram disponibilizadas pela Coordenação de área, seis aulas, distribuídas ao longo de 3 dias. Assim, duas aulas foram usadas, o que permitiu que o tempo e a duração para a aplicação do instrumento nesses alunos assemelhassem-se bastante com o dos professores. Os procedimentos de aplicação do questionário para estes encontros também foram os mesmos que os adotados aos professores.

---

21 - HTPC significa Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo, com a finalidade de: articular os diversos segmentos da escola para a implementação do Projeto Político e Pedagógico da escola, (re) planejar e avaliar as atividades de sala de aula, tendo em vista as diretrizes comuns que a escola pretende imprimir ao processo de ensino-aprendizagem e fortalecer a unidade escolar como instância privilegiada do aperfeiçoamento de seu projeto pedagógico.

22 Este item será apresentado no corpo deste capítulo e o modelo se encontra nos anexos desta dissertação.

23 O modelo do Termo de Consentimento encontra-se nos Anexos desta dissertação.

Para este estudo, o grupo composto pelos professores foi nomeado de ***G1***, e o grupo formado pelos alunos, ***G2.*** Para efeito de análise, saliento que podiam ser criados subgrupos dentro desses já nomeados, conforme a necessidade do andamento da análise.

Assim, a coleta dos dados foi realizada coletivamente em cada um dos grupos, com os sujeitos respondendo ao instrumento diagnóstico individualmente. Em outras palavras, embora as explicações dadas aos sujeitos sobre o instrumento tenha sido coletiva, estes responderam-no individualmente, o que permitiu respeitar o tempo de cada um dos participantes.

O próximo tópico desta seção tratará do instrumento que possibilitou a coleta de dados, qual seja o instrumento diagnóstico.

2.2.3 Os instrumentos diagnósticos.

Para esta pesquisa, foram concebidos dois instrumentos diagnósticos, um para os professores em serviço e outro aos alunos do curso de Pedagogia. Tais instrumentos foram constituídos de três seções. Na primeira seção, verificou-se o perfil do sujeito pesquisado; na segunda averiguou-se a maneira como o sujeito concebe a montagem de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas e, na terceira, o estabelecimento de algumas competências que o professor possui ao resolver problemas.

As duas últimas partes destes instrumentos eram comuns, tanto ao professor como ao aluno, diferindo apenas na seção relativa ao perfil, pois eram dois públicos com caracterizações distintas.

A seguir detalharei as três seções que compuseram o instrumento diagnóstico.

2.2.3.1 O Perfil

Professores

As questões referentes ao perfil dos professores servirão para embasamentos em possíveis triangularizações de dados referentes à análise de dados. Isto é, para averiguar a correlação entre o desenvolvimento profissional desses professores e suas competências e concepções para lidar com problemas referentes às estruturas aditivas e multiplicativas. Que permitirá uma caracterização do corpo docente da unidade escolar.

Esta parte do questionário referente ao perfil do professor foi desenvolvida apoiada em oito questões que descrevo a seguir.

Quadro 42: Recorte: Questões 1 a 4 do Instrumento Diagnóstico, referente ao perfil Professor

Nome:____

1ª **Parte: Perfil do Professor:**

1. Seu nível de instrução é: ☐ Ensino Médio ☐ Superior Incompleto ☐ Superior Completo

2. Você cursou: ☐ Magistério ☐ Pedagogia ☐ Outro curso, qual____________________

3. Em qual (is) rede (s) você ministra aulas? ☐ Estadual ☐ Municipal ☐ Particular

4. Há quanto tempo você leciona? ☐1 a 5 anos ☐6 a 10 anos ☐11 a 15 anos ☐mais de 15 anos

- O “Nome” objetivou garantir a identificação do formulário no momento em que estava sendo executada a coleta de dados. Isto porque como o instrumento tinha três partes e cada uma delas seria respondida em dias distintos, fazia-se necessário identificar o sujeito em cada uma dessas partes.
- Com as questões 1 e 2, conheci a formação que o professor tinha. A importância dessas questões seria averiguar se a formação teria um papel preponderante na prática docente do professor e, também, se esta formação poderia ser um fator determinante no que diz respeito à sua competência.

- A questão 3 permitia avaliar, de um lado, a carga de trabalho a que o professor está sendo submetido e, do outro lado, as experiências que o professor carrega de uma rede para outra.
- A questão 4 teve por objetivo, novamente, possibilitar que se faça uma análise “cruzada”, com as questões das partes 2 e 3 do instrumento, a fim de verificar se a experiência docente estava fazendo diferença nas concepções e competências desse professor ou se apenas não estava acrescentando algo a sua prática docente.

Quadro 43: Recorte: Questões 5 e 6 do Instrumento Diagnóstico, relativo ao perfil do Professor.

5. Quantas aulas semanais você normalmente disponibiliza para ensinar matemática?
Considere que em seu dia letivo você dispõe de duas aulas: uma que acontece antes do intervalo e a outra após o intervalo. Assim é possível pensar que você dispõe de 10 aulas semanais, isto é você pode trabalhar a disciplina diariamente, porém não ocupando todo o dia letivo.
Outro exemplo seria de afirmar que dedica 5 aulas semanais para a Matemática, isto é trabalhar diariamente a Matemática, mas não ocupando todo o dia letivo, e ainda, você poderia afirmar que reserva 2 dias inteiros da semana para o ensino da Matemática, mas não ocupando todo o dia letivo, e ainda, você poderia afirmar que reserva 2 dias inteiros da semana para o ensino da Matemática, desta forma você pode afirmar que dedica 4 aulas semanais para o ensino da Matemática.

☐ 1 aula ☐ 2 aulas ☐ 3 aulas ☐ 4 aulas ☐ 5 aulas ☐ mais que 5 aulas

6. Em sua trajetória estudantil, qual era o seu gosto pela matemática?

☐Detesto ☐Gosto Pouco ☐Gosto mais ou menos ☐ Gosto muito ☐Adoro

- A questão 5 possibilitava investigar o interesse do professor pela matéria, a partir do número de aulas que ele destina à Matemática.
- A questão 6 tinha o objetivo de saber se o gosto da disciplina está relacionado à sua prática docente.

Quadro 44: Recorte: Questões 7 a 9 do Instrumento Diagnóstico, relativo ao perfil do professor.

7. Qual (is) dos conteúdos abaixo você se sente mais seguro (a) para ensinar para seus alunos?

☐Números e formas e Sistema Métrico Decimal ☐Tratamento da Informação

☐Espaço e Forma (Geometria) ☐Operações com números naturais ☐Grandezas e medidas

☐Nenhum ☐Outro, qual?______________________

8. Em que série prefere ministrar aula? ☐1ª ☐2ª ☐3ª ☐4ª ☐todas ☐nenhuma

Aponte, pelo menos 2 motivos para sua escolha:____

____

____

9. Neste ano letivo, em que série você ministra aula? ☐1ª ☐2ª ☐3ª ☐4ª

- o objetivo da questão 7 implicava saber em qual(is) conteúdo(s) matemático(s) o docente sentia mais facilidade e segurança no ensino. As opções oferecidas seguiram os blocos de conteúdos propostos pelos PCN, contudo o professor dispunha de um espaço para indicar outro bloco e/ou conteúdo específico, caso desejasse.
- a questão 8 pretendeu verificar se a preferência por determinada série seria motivada pela permanência nesta série por muito tempo, pelo conhecimento do conteúdo da série ou, ainda, pela facilidade de se trabalhar em uma determinada faixa etária.
- A questão 9 objetivava a localização da série que o professor trabalhava.

Desta forma, esta parte do questionário foi concebida para que permitisse a caracterização do perfil de cada professor pesquisado, visando à busca de elementos de análise referentes às suas competências e concepções.

A seguir, apresento os itens relacionados ao perfil dos alunos.

<u>Alunos</u>

As questões relativas ao perfil dos alunos do curso de Pedagogia serviram também para embasar a análise de dados e caracterizar os alunos da turma.

Para esta seção, foram elaboradas seis questões, descritas a seguir:

Quadro 45: Recorte: Questões do Instrumento Diagnóstico, relativo ao perfil do aluno

Nome[1]: ______________________________

1ª Parte: Perfil

1) Formação.

- Ensino Médio Regular
- Ensino Médio Técnico
- Magistério
- Educação de Jovens e Adultos (Suplência)

2) Ministra aulas?

- Sim
- Estadual
- Municipal
- Particular
- Não

3) Há quanto tempo você leciona ?

- Menos de 1 ano
- De 1 a 2 anos
- De 3 a 5 anos
- De 6 a 10 anos
- Mais de 10 anos

Quadro 46: Recorte: Questões do instrumento diagnóstico, relativo ao perfil do aluno

4) Neste ano letivo, em que série ministra aulas ?

- 1ª Série
- 2ª Série
- 3ª Série
- 4ª Série

5) Qual é o número de aulas que você disponibiliza para a Matemática?

- 3 aulas
- 5 aulas
- 7 aulas
- 10 aulas

6) Em sua trajetória estudantil, qual é o interesse pela Matemática?

- Pouco
- Mediano
- Muito

- O “Nome” objetivava garantir a identificação do formulário no momento em que estava sendo executada a coleta de dados.

- A questão 1 averiguava se a formação seria um diferencial referente aos conhecimentos matemáticos adquiridos e, também, se a formação poderia ser um fator determinante no que diz respeito a sua competência.
- As questões 2, 3, 4 e 5 verificavam se o aluno já possui certa prática docente e se esta prática acarreta certo diferencial nos dados a serem analisados referentes à concepções e habilidades.
- A questão 6 tinha o objetivo de saber se o gosto da disciplina está relacionado às suas competências e habilidades em Matemática.

Desta forma esta parte do questionário foi concebida para que permitisse a caracterização do perfil de cada aluno pesquisado, visando à busca de elementos de análise referentes às suas competências e concepções.

A seguir, mostro a segunda parte do instrumento diagnóstico que trata das concepções, tal seguimento é comum ao para o professor como ao aluno.

2.2.3.2 As Concepções

Para averiguar as concepções que os professores e os alunos do curso de Pedagogia têm a respeito das estruturas aditivas, foi solicitado que elaborassem seis problemas, sendo três de estruturas aditivas e três problemas de estruturas multiplicativas, para que se pudesse efetuar um estudo a partir das classes de problemas descritos por Vergnaud, vistos no Capítulo II.

O conjunto de questões foi apresentado aos sujeitos da seguinte maneira:

Quadro 47: Recorte: Questões do instrumento diagnóstico, relativo às concepções.

Elabore 3 (três), problemas de Estruturas Aditivas (Adição e/ou Subtração) e outros 3 (três) de Estruturas Multiplicativas (Multiplicação e/ou Divisão). Após cada problema que você elaborou, faça comentários sobre ele do tipo:

a) quais conceitos estão inseridos, envolvidos, nesse problema que você elaborou.
b) você acha que ele é fácil ou difícil? Ele é apropriado para ser trabalhado em que série?
c) no que você acha que o problema vai contribuir para a aprendizagem de seus alunos?

As concepções foram analisadas com base nas respostas dadas pelos sujeitos da pesquisa aos itens descritos no enunciado da questão, e o objetivo de cada item mencionado relacionou-se às seguintes questões:

- Item a) o sujeito realmente faz uso de diferentes estruturas ou só se utiliza de problemas protótipos, como descritos no desenvolvimento do Capítulo II.
- Item b) o sujeito ao fazer uso apenas de problemas protótipos, provavelmente considerará o problema fácil, se tiver elaborado problemas classificados como mais complexos que considerará como difícil e/ou não apropriado para a série em que leciona.
- Item c) o sujeito associa os problemas que elabora à aprendizagem de seus alunos. Neste caso, espera-se que o professor afirme que o problema elaborado ajude o aluno a entender o conceito a que se refere a questão.

A seguir, apresento a terceira parte do instrumento diagnóstico que possibilita verificar as competências dos sujeitos desta pesquisa.

2.2.3.3 As Competências

Para investigar as competências dos sujeitos envolvidos na pesquisa, quanto ao trabalho com problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, solicitou-se que cada sujeito resolvesse seis problemas; assim, três versavam sobre as estruturas aditivas e três sobre as estruturas multiplicativas, que foram apresentados aos professores da seguinte maneira:

A seguir, apresento a seção do instrumento diagnóstico que trata a respeito deste assunto.

Resolva cada um dos problemas de duas formas: a) forma convencional (aritmeticamente) e b) com um enfoque algébrico (utilizando uma incógnita)

Problema 1: Em uma festa de aniversário haviam 12 crianças 7 eram meninos, quantas meninas haviam na festa?	**a) Enfoque aritmético**	**b) Enfoque algébrico**

Problema 2: Mário ganhou apenas 20 figurinhas, jogando com Marta. Tem agora 45 figurinhas. Quantas figurinhas ele tinha antes de jogar?	**a) Enfoque aritmético**	**b) Enfoque algébrico**

Problema 3: Karina tem 13 anos, sua irmã Karen tem 8 anos. Quantos anos Karen é mais nova que Karina?	**a) Enfoque aritmético**	**b) Enfoque algébrico**

Problema 4: Carlos tinha 32 bolinhas de gude antes jogar com Roberto. Agora ele tem 17 bolinhas de gude. O que ocorreu durante o jogo?	**a) Enfoque aritmético**	**b) Enfoque algébrico**
Problema 5: Joana quer comprar 4 bolos. Cada bolo custa R$ 10,00. Quanto ela irá pagar pelos bolos?	**a) Enfoque aritmético**	**b) Enfoque algébrico**
Problema 6: Marcos quer presentear seus seis netos com bombons, ele pretende dar 3 bombons a cada um. Quantos bombons ele terá que comprar?	**a) Enfoque aritmético**	**b) Enfoque algébrico**
Problema 7: Um pedreiro quer comprar 0,50 tonelada de cascalho. O preço é de R$ 273,00 por tonelada. Que operação devemos fazer para calcular a despesa?	**a) Enfoque aritmético**	**b) Enfoque algébrico**

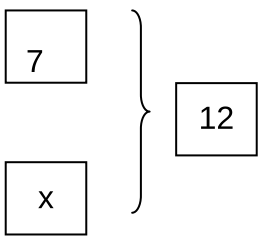
Após a resolução dos problemas propostos os professores, respondiam última parte do questionário, que continha as seguintes questões.

Quadro 48: Recorte: Questões do instrumento diagnóstico relativo às competências

Nas linhas abaixo, escreva: a) um comentário <u>pessoal e verdadeiro</u> sobre a sua facilidade, ou dificuldade, em usar a representação algébrica na resolução dos problemas, b) a <u>sua opinião</u> sobre a viabilidade de introduzir a álgebra nas séries iniciais, quando trabalhamos os problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.

<u>**Expectativas quanto à resolução dos problemas:**</u>

Problema 1: Trata de uma estrutura aditiva, que se classifica dentro da 1ª extensão dos problemas de composição de duas medidas em uma terceira, representado pelo diagrama de Vergnaud da seguinte maneira:

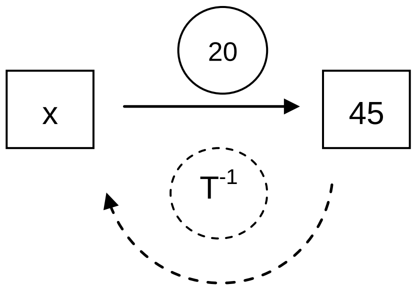


Este problema visa a compreensão da relação parte-parte-todo, em que não se conhece uma das partes, e o enfoque aritmético apresenta-se a partir da seguinte expressão: 12 – 7 = 5. Quanto ao enfoque algébrico, espera-se que o professor represente simbolicamente os dados do problema da seguinte maneira: 7 + x = 12.

Além da representação algébrica mostrada acima, há outras duas formas de representação para este problema:

x = 12 – 7 e □ + 7 = 12

Problema 2: Pertencente também às estruturas aditivas, classificado na 4ª extensão dos problemas de transformações de duas medidas, de tal forma que não se conhece o estado inicial desta transformação, que é representada pelo seguinte diagrama de Vergnaud.

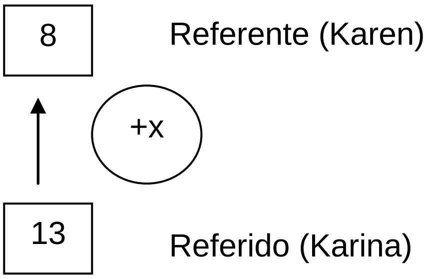


Com este problema, procurei verificar se o professor compreende a transformação inversa (T^{-1}), representando-a aritmeticamente da seguinte forma: 45 – 20 = 25, e a representação algébrica da seguinte maneira: x + 20 = 45

Outras formas podem ocorrer, tais como:

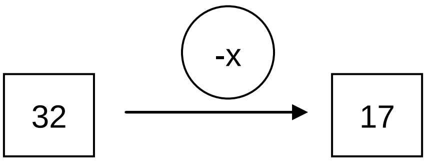
x= 45 – 20 e □ + 20 = 45

Problema 3: Trata-se também de um problema de estrutura aditiva pertencente a 4ª extensão da classe de problemas de comparação de relações estáticas em que não se conhece a relação entre o referido e o referente, cujo diagrama de Vergnaud é representado da seguinte maneira:



Espera-se que o professor visualize uma diferença entre duas medidas; neste caso, a diferença entre as idades de Karina e Karen e represente aritmeticamente como: 13 – 8 = 5 e algébricamente: 13 = 8 + x , 13 – x = 8, x = 13 – 8.

Problema 4: Problema de estrutura aditiva pertencente a 1ª extensão classe dos problemas de transformação de duas medidas, em que não se conhece a transformação que houve entre os dois estados, e trata-se de uma transformação negativa, pois a quantidade de pontos no estado inicial do problema é maior que a de pontos no estado final que é representado pelo diagrama de Vergnaud, a seguir.



Espera-se que o professor represente aritmeticamente o problema da seguinte forma: 32 – 17 = 15 e algebricamente: 32 – x = 17, 32 = 17 + x ou x = 32 – 17.

Problema 5: Problema de estrutura multiplicativa pertencente à classe dos problemas de multiplicação, representado pelo seguinte diagrama de Vergnaud:

Bolo	Custo
1	10
4	x

Com este problema procurei detectar como o professor representa a multiplicação aritmeticamente pela repetição de parcelas (10 + 10 + 10 + 10) ou 4 .$\times$ 10, e algebricamente da seguinte maneira: $x = 4 \cdot 10$

Problema 6: Problema de estrutura multiplicativa pertencente à classe dos problemas de multiplicação, representado pelo seguinte diagrama de Vergnaud:

Netos	Bombons
1	3
6	x

Com este problema procurei detectar se o professor representa a multiplicação pela repetição de parcelas (6 + 6 + 6) ou (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3), ou ainda, efetuar simplesmente a multiplicação 6 .$\times$ 3 ou 3 $\times$ 6, e algebricamente da seguinte maneira: $x = 6 \cdot 3$.

Problema 7: Problema de estrutura multiplicativa, pertencente à classe de problemas de divisão como quotição, representado pelo seguinte diagrama de Vergnaud:

Cascalho	Gasto
1 ton →	273,00
0,50 ton →	x

A operação correta a ser representada para este problema seria a multiplicação: 273 $\times$0,5 ou a divisão: 273 $\div$2 , e algebricamente: $x = 273 \cdot 0{,}5$ ou $x : 0{,}5 = 273$

Após ter descrito em detalhes a metodologia utilizada pelo estudo, no Capítulo III procederei a análise das respostas dos sujeitos ao instrumento diagnóstico.

Capítulo III

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo tem como objetivo analisar os dados obtidos pela aplicação dos instrumentos diagnósticos, que investigam as concepções e competências referentes à passagem da aritmética para a representação algébrica dos sujeitos participantes do estudo

No capítulo anterior, apresentei os aspectos teóricos e metodológicos que nortearam a análise qualitativa dos dados, tal análise foi fundamentada nos aspectos teóricos apresentados no Capítulo II desta dissertação.

A análise dos dados transitará pelas três partes já descritas no capítulo anterior: o perfil, a concepção e competência, compreendidas entre os dois grupos: G1: Professores e G2: Alunos.

Desta forma, iniciarei a análise pelo perfil dos professores e em seguida o perfil dos alunos.

3.1 PERFIL

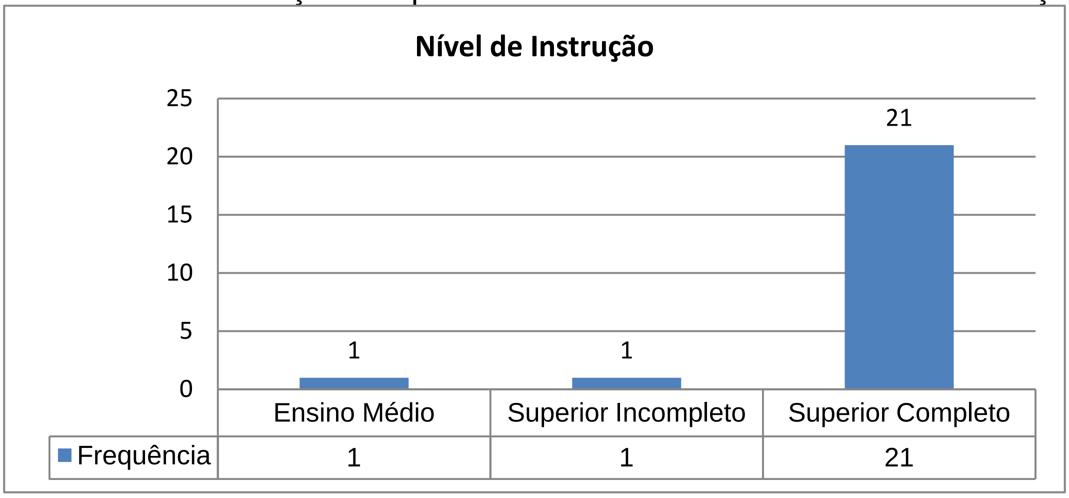
Este item corresponde a primeira parte do instrumento diagnóstico, que investigou alguns fatores que podem ajudar na constituição das concepções e competências dos sujeitos, por meio de informações referentes à formação, tempo de serviço, número de aulas disponibilizadas, entre outros fatores, que serão pormenorizados nos tópicos a seguir.

3.1.1 Perfil – Professores

1 Nível de Instrução:

O primeiro item dos dados referente ao perfil do professor, trata da formação do professor, na qual se perguntou o último nível de instrução do professor. Os dados coletados, a partir dos 23 sujeitos participantes, mostraram que um possuía só a formação no Ensino Médio (Magistério); um possuía formação incompleta em curso superior e 21 possuíam curso universitário, como mostram os dados do gráfico a seguir:

Gráfico 1 – Distribuição dos professores de acordo com o nível de instrução

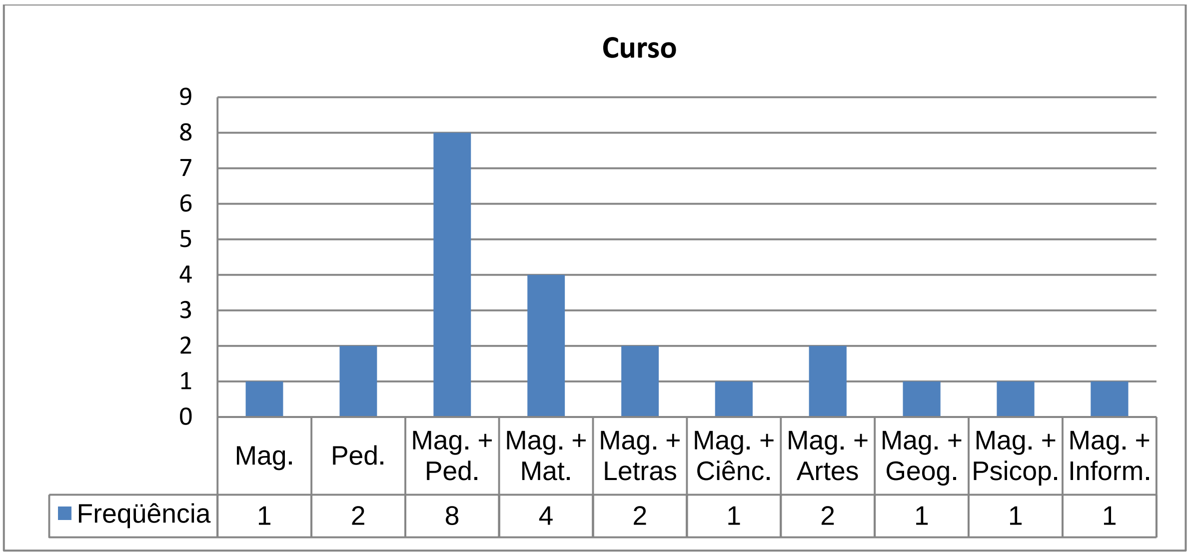


Ao apresentar estes dados, interessou-me conhecer se a formação acadêmica influi em suas concepções e competências; a priori, verifica-se que estes sujeitos já possuem algumas concepções oriundas dos saberes adquiridos nas diversas disciplinas cursadas em seus cursos de graduação. O próximo tópico que trata da formação acadêmica e versará sobre esta formação destes professores.

2 Formação Acadêmica:

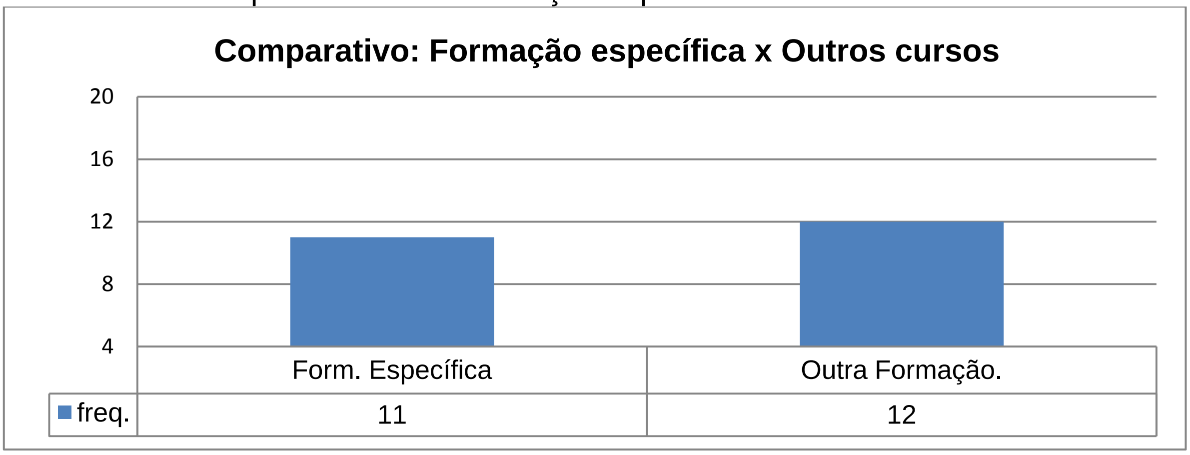
Para especificar a formação do professor, o segundo item referente ao perfil, identificou sua formação acadêmica. Como este diagnóstico foi aplicado para professores das séries iniciais, coloquei apenas os itens Magistério, Pedagogia e outros cursos, na certeza que os dados estariam concentrados nos cursos que habilitam para o ensino nas séries iniciais, ou seja, o curso de Magistério ou Pedagogia, porém a representação gráfica a seguir não retrata essa posição.

Gráfico 2: Distribuição dos professores, conforme sua formação.



A partir da análise destes dados, verifica-se que praticamente existe uma equivalência entre os somatórios das frequências dos cursos de Magistério, Pedagogia e “Magistério + Pedagogia” que totalizam 11 e soma dos outros cursos que totalizam 12, representadas a partir do gráfico abaixo:

Gráfico 3 – Comparativo entre: formação específica e outros cursos

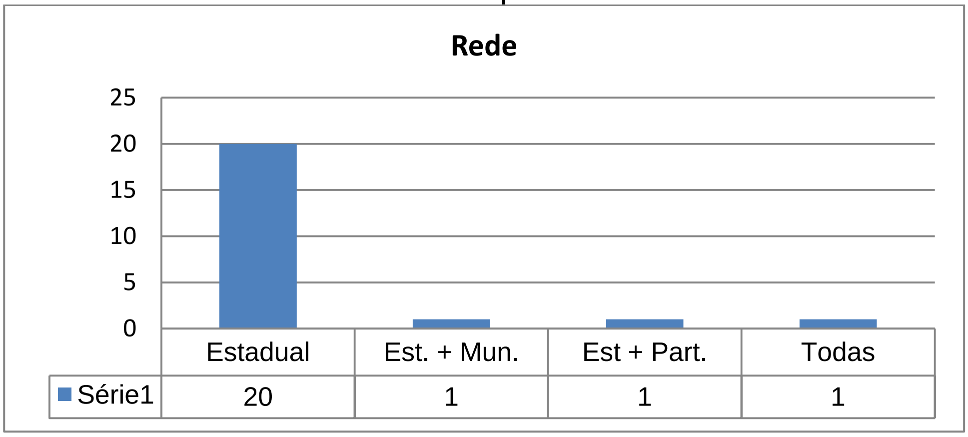


Estes dados, mostram que os professores buscam alternativas, referentes à sua vida profissional, atuando em outros segmentos, como por exemplo, o trabalho docente no segundo ciclo (5ª a 8ª Séries) e Ensino Médio, pois existem professores licenciados em Matemática, Ciências Biológicas, Artes, Geografia e Letras.

3 Rede de ensino em que ministra aulas:

O terceiro item referente ao perfil permitiu detectar se o professor trabalhava em mais de uma rede, ou seja, se acumulava cargos. Os dados coletados referentes a este item mostraram que, nesta unidade escolar, os professores trabalham somente em uma rede de ensino, especificamente na rede estadual, como mostram os dados do gráfico a seguir:

Gráfico 4: Rede de Ensino onde o professor atua



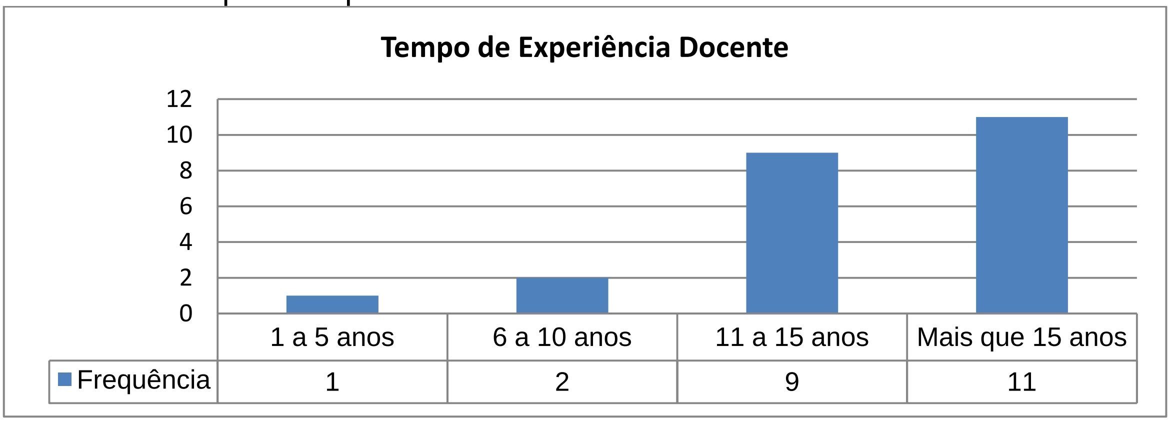
O objetivo do levantamento de dados a respeito da rede de ensino onde o professor atua, referia-se à dupla jornada do professor, ou seja, a atuação em duas redes de ensino sejam elas na rede estadual, municipal ou particular, que podem interferir em sua prática docente, pois estes profissionais, meramente, são operários, da educação, com a simples função de ministrar aulas, ou seja, não dispõem de um tempo necessário para um planejamento correto de cada aula.

Os dados retratados a partir do Gráfico 4 mostraram que tal problemática não se configura na população pesquisada do universo de pesquisa. Desta forma, analisarei se este fator influi nas concepções e competências, advindas do trabalho docente.

4 Tempo de experiência docente:

No que diz respeito ao tempo de experiência docente, este grupo destacou-se com professores que estão há mais de 11 anos no magistério, totalizando 20 dos 23 pesquisados, como mostram os dados do gráfico a seguir:

Gráfico 5: Tempo de experiência docente



Estes dados foram confrontados com os referentes à competência ou prática docente do professor, pois podem significar, por exemplo, que o tempo de experiência docente não significa experiência construída, pelo fato desse professor pode adotar a mesma prática docente durante o período trabalhado.

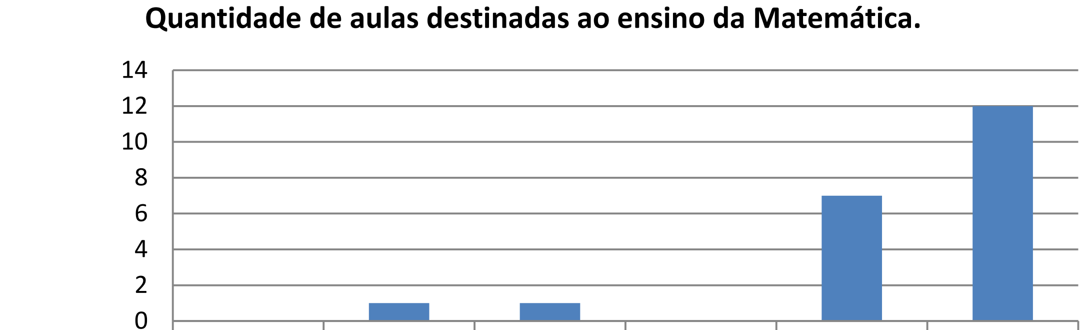
Segundo Ponte (1992), a prática docente é condicionada por uma multiplicidade de fatores que geram concepções compatíveis às práticas e que podem ser úteis para enquadrá-las conceitualmente.

5 Quantidade de aulas destinadas ao ensino da Matemática:

Este item reportou-se em verificar como professor faz o planejamento diário dos diversos conteúdos referentes ao ensino nas séries iniciais, e, destes conteúdos, qual é a quantidade de aulas destinadas ao ensino de Matemática.

Os dados coletados indicam que um grande número de professores, 12 dos 23 pesquisados, destinam mais que 5 aulas ao ensino da Matemática, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 6: Quantidade de aulas destinadas ao ensino de Matemática



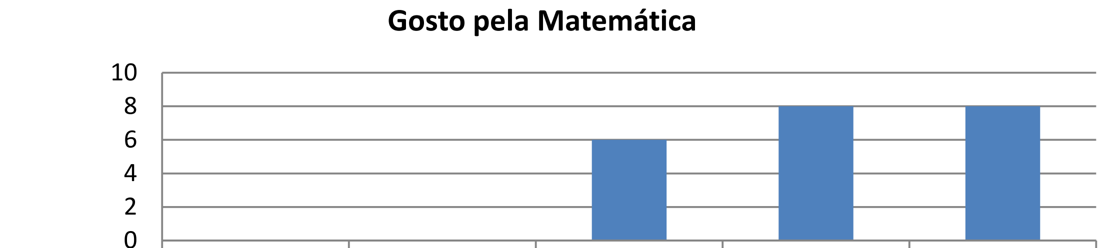
	1 aula	2 aulas	3 aulas	4 aulas	5 aulas	mais que 5
Frequência	0	1	1	0	7	12

Estes dados mostram que os professores estão conscientes da importância do ensino da Matemática, resta saber como este ensino vem sendo contextualizado em suas aulas. Para responder a tal problemática apresentarei, no corpo desta análise, o estudo referente às concepções, a partir dos problemas de estruturas aditivas e multiplicativas elaborados pelos próprios professores, que se trata de sinal indicador de como trabalham a Matemática em suas aulas.

6 Gosto pela Matemática:

Com o intuito de verificar a veracidade da crença em que professores das séries iniciais não se dão bem com a Matemática e também se este gosto irá influir nas aulas de Matemática, foi solicitado a eles que apontassem uma destas opções: Detesto, Gosto Pouco, Gosto mais ou menos, Gosto muito ou adoro, a tabulação para estes itens, encontra-se no gráfico a seguir.

Gráfico 7: Gosto pela Matemática



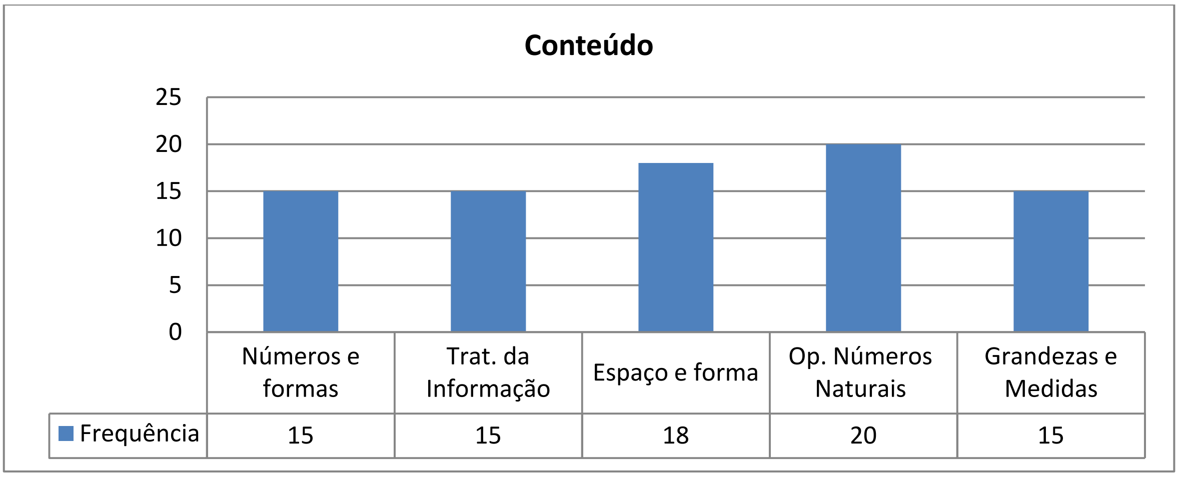
	Detesto	Gosto Pouco	Gosto mais ou menos	Gosto muito	Adoro
Frequência	0	0	6	8	8

Verifica-se que o interesse pela Matemática desse grupo de professores varia de médio (gosto mais ou menos) até o pleno interesse (Adoro), resta averiguar se este interesse reflete em sua prática docente no ensino da Matemática.

7 Conteúdo que sente mais segurança para ensinar:

Este item verificou qual (is) o(s) conteúdo(s) o professor está mais seguro e habituado a ensinar a seus alunos. Os resultados indicaram um equilíbrio entre os conteúdos a serem ministrados, porém, o conteúdo em que se sentem mais seguros, refere-se às operações com números naturais, para 20 professores dos 23 pesquisados. O fato indica o predomínio da algoritmização de processos ainda presentes no ensino das séries iniciais; outro conteúdo apontado é a geometria. Os dados relativos a este item estão representados nos dados do gráfico a seguir:

Gráfico 8: Conteúdo Preferido



As justificativas dadas pelos professores pesquisados fizeram alusão a:

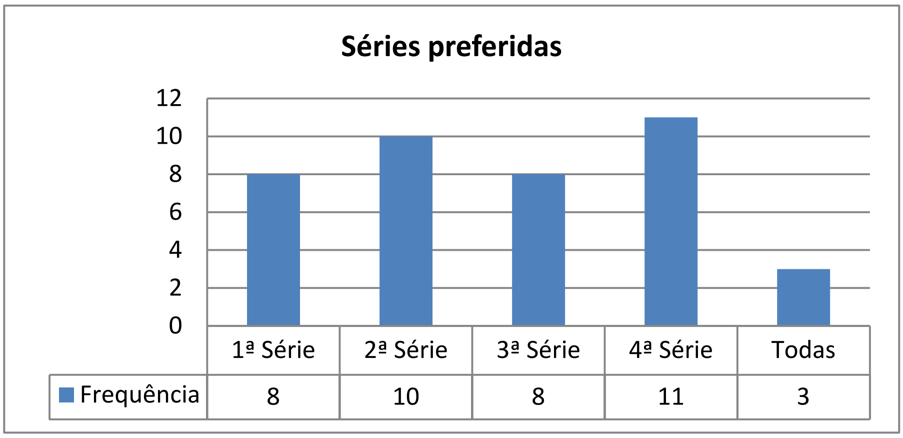
- Estes conteúdos fazem parte do cotidiano do aluno;
- O Professor adquire o conhecimento a partir da experiência docente;
- A segurança é adquirida pelo estudo do conteúdo a ser abordado e um planejamento minucioso das aulas;
- A segurança é adquirida por meio de um bom curso de formação;
- Sente grande facilidade de assimilar os conteúdos matemáticos; e

- Facilidade para trabalhar com a Matemática.

8 Série preferida para ministrar aulas:

Este item verificava a preferência do professor por uma determinada série e buscou saber também os motivos dessa preferência, e o seguinte levantamento indicou, conforme os dados do gráfico a seguir:

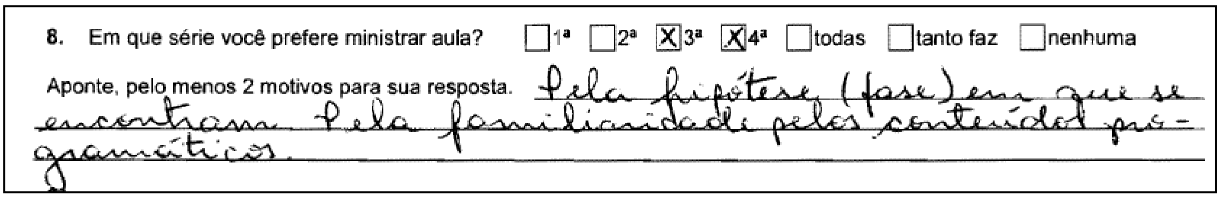
Gráfico 9: Séries Preferidas



Houve um certo equilíbrio entre as preferências dos professores sobre as séries, porém destacaram-se como preferência as 2ª e 4ª séries. Os motivos da preferência por estas séries foram apontados, conforme as seguintes justificativas:

- Pela maturidade e compreensão dos alunos dessa faixa etária;
- Familiaridade com os conteúdos das séries;
- Os alunos dessa faixa assimilam com mais facilidade os conteúdos.

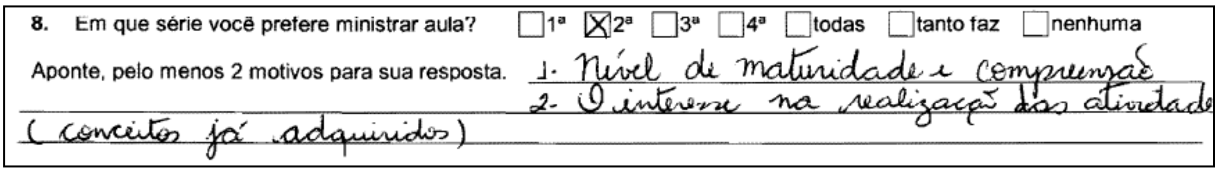
A seguir, apresento alguns recortes das justificativas dos professores a respeito da questão.



8. Em que série você prefere ministrar aula? ☐1ª ☐2ª ☒3ª ☒4ª ☐todas ☐tanto faz ☐nenhuma

Aponte, pelo menos 2 motivos para sua resposta. Pela hipótese (fase) em que se encontram. Pela familiaridade pelos conteúdos pro-gramáticos.

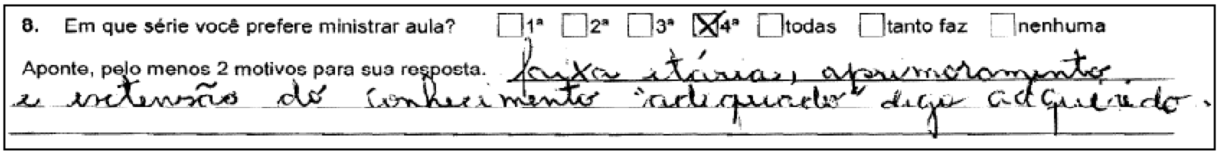
Figura 5: Recorte – Questão 8



8. Em que série você prefere ministrar aula? ☐1ª ☒2ª ☐3ª ☐4ª ☐todas ☐tanto faz ☐nenhuma

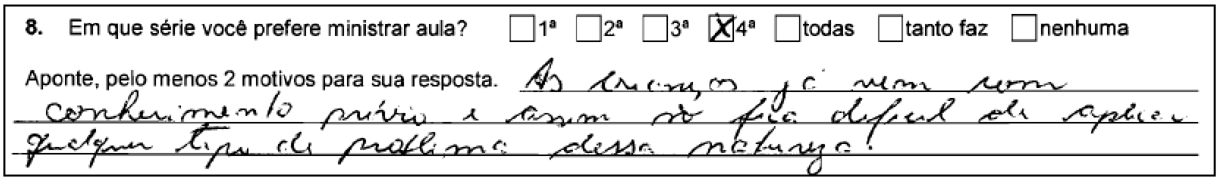
Aponte, pelo menos 2 motivos para sua resposta. 1. Nível de maturidade e compreensão 2. O interesse na realização das atividades (conceitos já adquiridos)

Figura 6: Recorte – Questão 8


8. Em que série você prefere ministrar aula? ☐1ª ☐2ª ☐3ª ☒4ª ☐todas ☐tanto faz ☐nenhuma

Aponte, pelo menos 2 motivos para sua resposta. faixa etárias, aprimoramento e extensão do conhecimento "adquirido" digo adquirido.

Figura 7: Recorte – Questão 8


8. Em que série você prefere ministrar aula? ☐1ª ☐2ª ☐3ª ☒4ª ☐todas ☐tanto faz ☐nenhuma

Aponte, pelo menos 2 motivos para sua resposta. As crianças já vem com conhecimento prévio e assim só fica difícil de aplicar qualquer tipo de problema dessa natureza.

Figura 8: Recorte – Questão 8

<u>9. Série em que ministra aula.</u>

Os 23 professores que participaram da pesquisa estão distribuídos entre as séries da seguinte maneira:

Quadro 49: Quantidade de Professores por série

Séries	Quantidade
1ª	6
2ª	6
3ª	5
4ª	6

A seguinte caracterização, pode ser tratada baseada nos perfis analisados até o momento.

O grupo (G1) é constituído predominantemente de professores com formação universitária completa, que não está ligada apenas ao curso de Pedagogia; existem professores com formação em outras áreas da licenciatura, como em áreas de Matemática, Geografia, Artes e outros (vide Gráfico 5.1 e 5.2).

No que tange à experiência em sala de aula, o grupo é composto em grande parte por professores que atuam no ensino em um período superior a 11 anos e que destinam, em média, 10 aulas de Matemática semanais, e, em suas aulas, dão preferência para ensinar as operações com números naturais, cujas séries preferidas compreendem as 2ª e 4ª séries.

Referente ao gosto pela Matemática, ele varia de médio até os que gostam muito da matéria, finalmente, este grupo de professores em sua grande maioria não possui dupla jornada.

A seguir, apresentarei a análise dos dados referentes aos perfis dos alunos do curso de Pedagogia coletados com base no instrumento diagnóstico.

3.1.2 Perfil – Alunos

1. Formação

O primeiro item faz o levantamento da formação desse aluno, segundo os segmentos: Ensino Médio Regular, Magistério, Ensino Médio Técnico e Educação de Jovens e Adultos[24] (EJA).

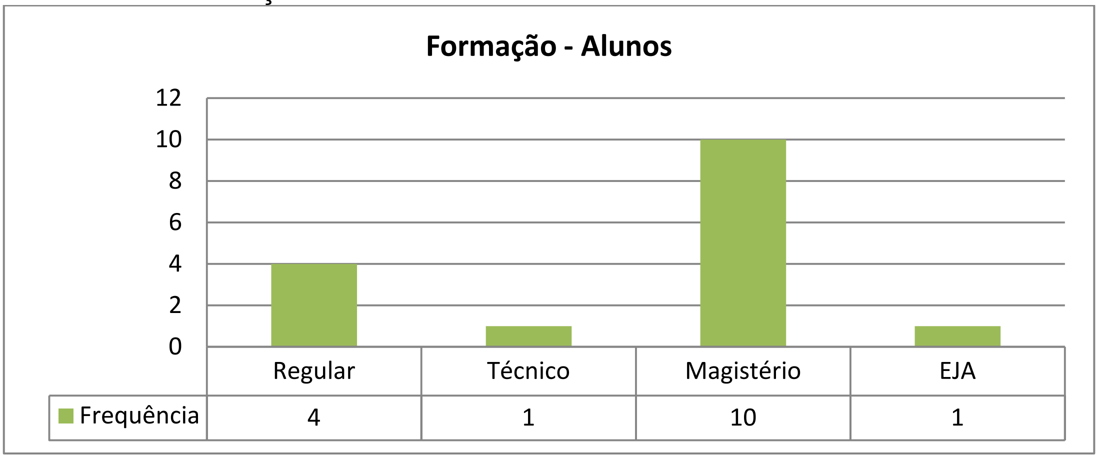
A partir dos dados coletados, constatou-se que a grande maioria desses alunos é oriunda de cursos de Magistério (10 dos 16 pesquisados) e que porventura, optaram por fazer, um curso de Licenciatura Plena em Pedagogia, para darem prosseguimento a suas carreiras, em conformidade com Lei Federal nº 9394 (LDB) de 20 de dezembro de 1996, e no Artigo 62 da Lei encontra-se a seguinte indicação:

> A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em ensino médio, na modalidade Normal. (BRASIL, 1996)

O gráfico a seguir representa os dados coletados:

[24] Suplência.

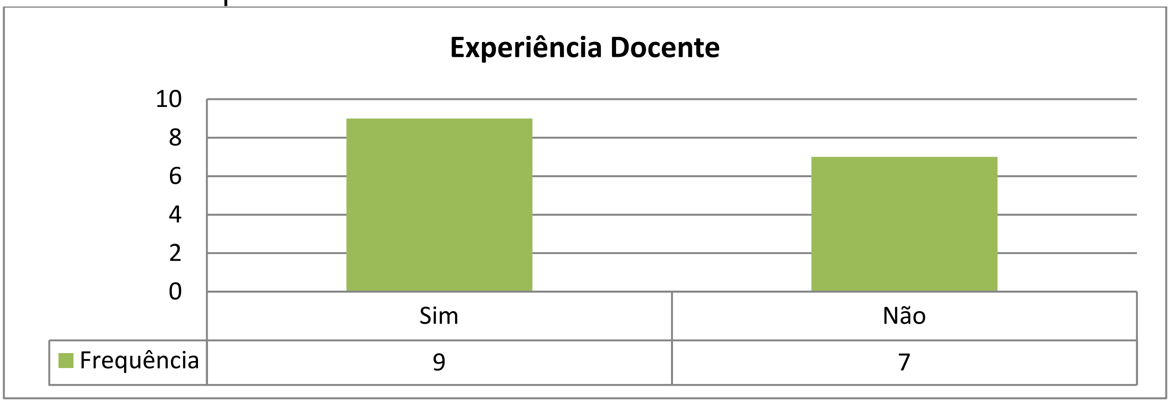
Gráfico10: Formação – Alunos



2 Experiência Docente

Como uma grande parte desses alunos já possui o curso de Magistério, uma parte considerável já ministra aulas, ou seja, nove alunos dos 16 pesquisados, como se verifica nos dados do gráfico a seguir:

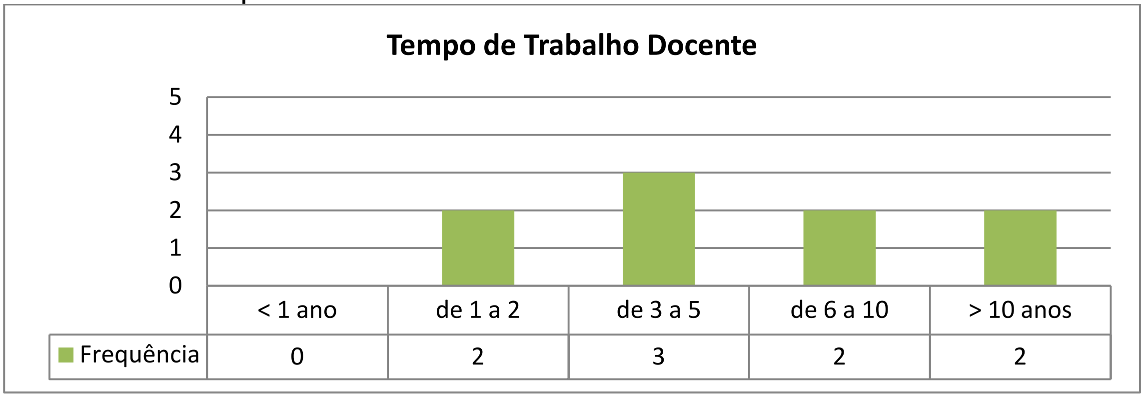
Gráfico 11: Experiência Docente – Alunos



3. Tempo de Trabalho Docente

Dos nove alunos que já são professores, observou-se que já possuem um tempo de trabalho considerável em sala de aula, e os dados coletados mostraram que o intervalo do tempo de trabalho docente variou entre 2 anos e mais que 10 anos, como mostram os dados do gráfico abaixo:

Gráfico 12: Tempo de Trabalho Docente – Alunos

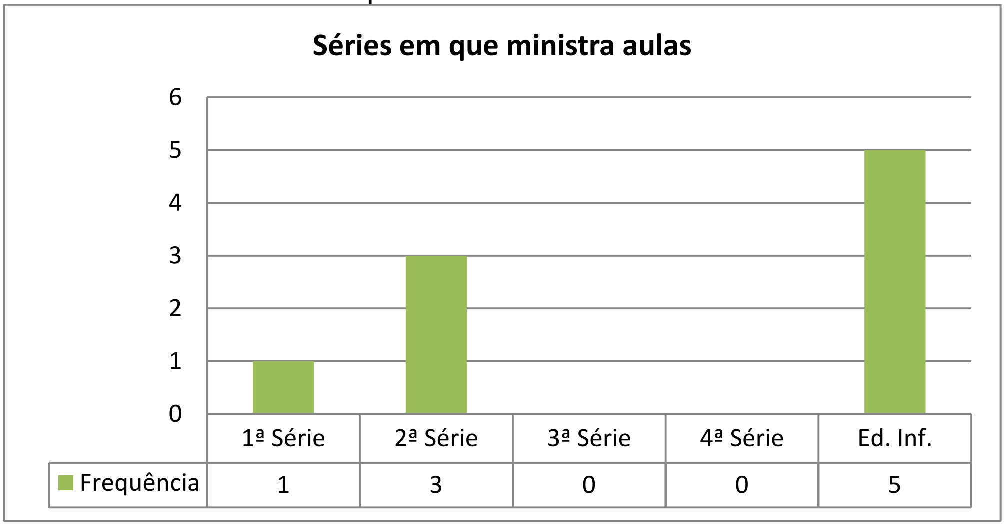


Por se tratar de docentes que estão um período considerável em sala de aula, estarei adotando o mesmo foco da análise referente à concepção e competências adotadas para o Grupo 1 (dos professores).

4 Série em que ministra aulas

Com relação às séries em que ministram aulas, houve uma predominância no trabalho com a Educação Infantil, ou seja, na pré-escola, como mostram os dados do gráfico a seguir

Gráfico 4.13 – Série em que ministra aulas – Alunos

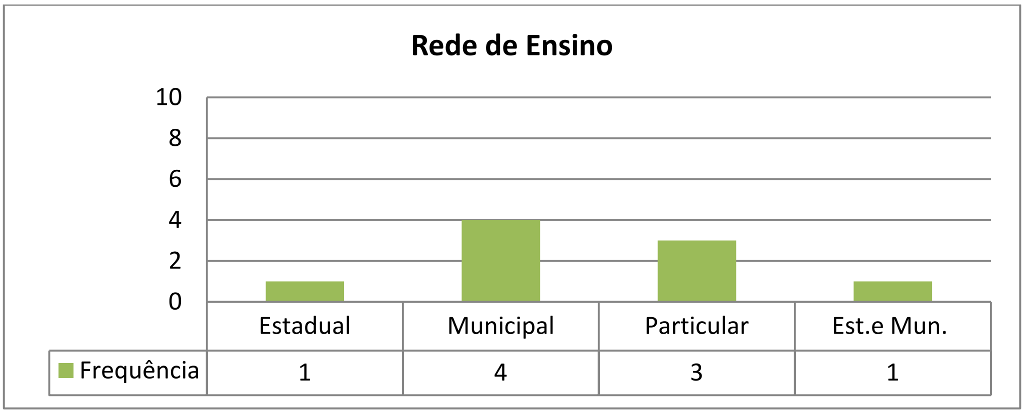


A predominância não está ligada ao fato de muitos desses professores atuarem na rede municipal e, também na rede particular (como mostram os dados do gráfico a seguir), pois esta modalidade de ensino só é oferecida nestas redes, cabendo a rede estadual oferecer o ensino de 1ª a 4ª séries.

5 Rede de ensino que ministra aulas

O gráfico a seguir apresenta a distribuição destes alunos, de acordo com a rede de ensino.

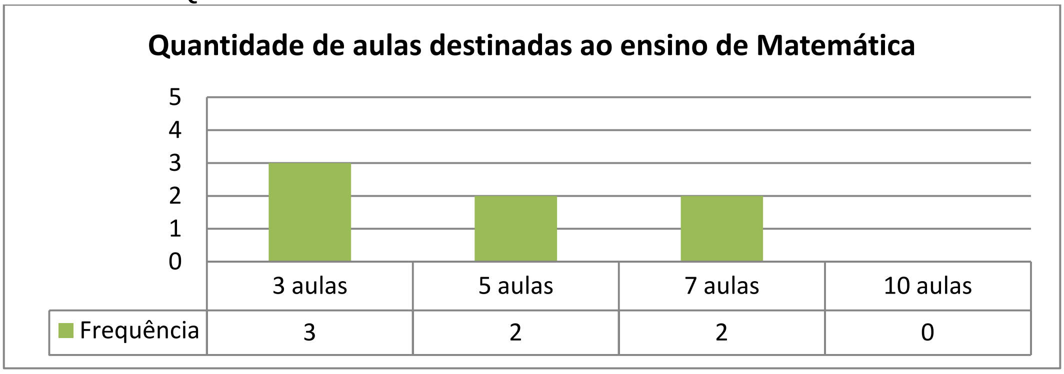
Gráfico 14 – Rede de Ensino – Alunos



Nesta amostragem é possível observar que a dupla jornada do professor esta presente, talvez isso se configure em um “mal-necessário”, para a educação, cerceando o bom trabalho docente. Neste caso, em específico, resta indagar qual será a qualidade do trabalho docente desse aluno e, também, como será seu aproveitamento nos estudos realizados em seu curso de graduação.

6. Quantidade de aulas destinadas ao ensino da Matemática:

Gráfico 15: Quantidade de aulas destinadas ao ensino da Matemática – Alunos

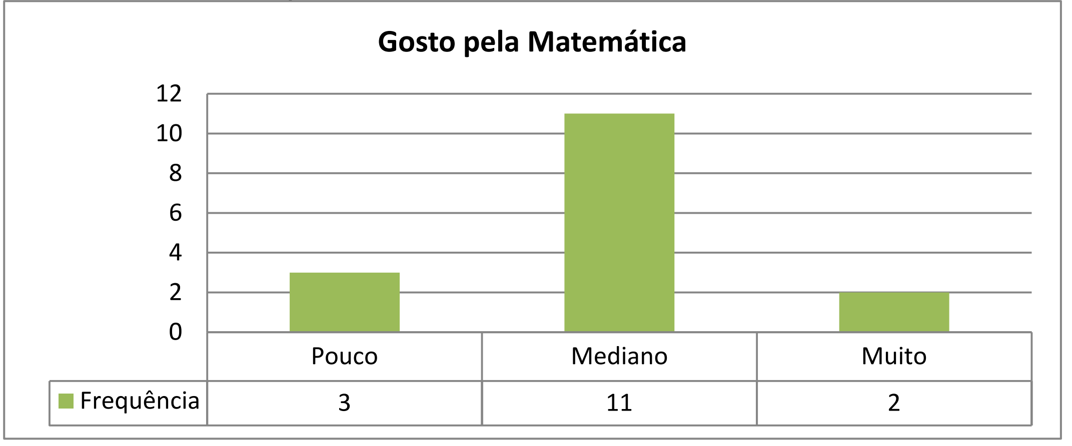


Verifica-se um interesse em nível médio quanto ao número de aulas destinadas ao ensino da Matemática, em razão de que a maioria desses professores atuar na Educação Infantil, visto que não existem parâmetros para configurar tal ensino e, nesta fase, as prioridades são outras.

7 Gosto pela Matemática:

Para o grupo de alunos, o interesse pela Matemática foi mediano, conforme mostra o gráfico abaixo:

Gráfico 16 – Gosto pela Matemática – Alunos



Estes dados reforçam a ideia de que os estudantes que optam pelo curso de Licenciatura em Pedagogia, não têm muita identificação com a Matemática. Resta conhecer se esse gosto influi na prática docente, ou seja, nas competências, também, quanto a seus saberes relacionados à Matemática.

Na sequência, apresento a análise referente às concepções dos professores e alunos, cujos dados serão analisados a partir da elaboração de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas pelos sujeitos da pesquisa.

3.2 AS CONCEPÇÕES

A análise referente às concepções fundamentou-se nas classes de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, propostas por Vergnaud (1996), cujo conteúdo foi desenvolvido no Capítulo II desta dissertação.

Primeiro, apresentarei a análise referente aos problemas de estruturas aditivas, elaborados pelos sujeitos da pesquisa para, em seguida, analisar os problemas referentes às estruturas multiplicativas.

3.2.1 As concepções referentes às Estruturas Aditivas

O processo de categorização dos problemas de estruturas aditivas elaborados pelos professores e alunos, contou com a participação de três juízes, a saber, o próprio pesquisador, uma doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, cuja tese ora em desenvolvimento tem como sustentação teórica o campo conceitual das estruturas aditivas e pela orientadora desta dissertação, que possui vários trabalhos utilizando esta teoria.

É importante relembrar que foi solicitado a cada participante do estudo (professores e alunos) a elaboração de três problemas de estrutura aditiva e três de estrutura multiplicativa, que foram transcritos baseados no instrumento diagnóstico, tal qual foram elaborados e constam do anexo desta dissertação. A seguir, analisarei os problemas relacionados à primeira estrutura.

Inicialmente, apresentarei minhas expectativas quanto à categorização dos tipos de problemas elaborados pelos sujeitos. Assim, espero que os Professores, por terem bem mais experiência em sala de aula que os alunos de Pedagogia, tenham elaborado problemas mais diversificados.

As expectativas quanto ao que foi produzido na elaboração dos problemas de estrutura aditiva referiam-se a:

1. Que, pelo menos, em um grupo de três problemas, dois, ou seja, dois terços dos problemas estejam categorizados dentro da classificação de problemas prototípicos e/ou 1ª extensão. Isto se deve ao fato de que tais situações são as mais lembradas, quando se trata de problemas de adição e subtração. Além disso, segundo a classificação de problemas propostos por Vergnaud e discutidos por Magina et al (2001), as cinco classes de problemas (protótipo, 1ª, 2ª, 3ª e 4ª extensões) envolvem oito situações diferentes, dessas oito, duas são prototípicas, seja do tipo transformação, seja composição.
2. que, pelo menos, um dos três problemas elaborados explore uma das outras extensões. Isso significa que apareçam quase 12% de problemas de cada uma das extensões restantes.
3. Que, aproximadamente, 60 % de todos os problemas estejam dentro da classificação de problemas prototípicos e/ou 1ª extensão. Esta expectativa

levou em consideração não apenas o motivo alegado no item 1 acima, mas também pelo fato de que metade dos professores ministra aulas nas 1ª e 2ª séries.

Esta expectativa é válida para os dois grupos. Nos dados do Quadro 50 a seguir observa-se a distribuição das classificações dos problemas com base em sua frequência absoluta e relativa.

Quadro 50: Tabela e Gráfico de distribuição de frequências da classificação dos problemas de estruturas aditivas

Classificação dos problemas Aditivos			
	Profs.	Alunos	Total
Prot.	34	29	63
1ª Ext.	10	9	19
2ª Ext.	4	2	6
3ª Ext.	3	3	6
4ª Ext.	0	1	1
Misto	1	0	1
Incons.	11	0	11
Branco	6	7	13
TOTAL	69	51	120

Tabela: distribuição da classificação dos problemas elaborados, em freqüência.

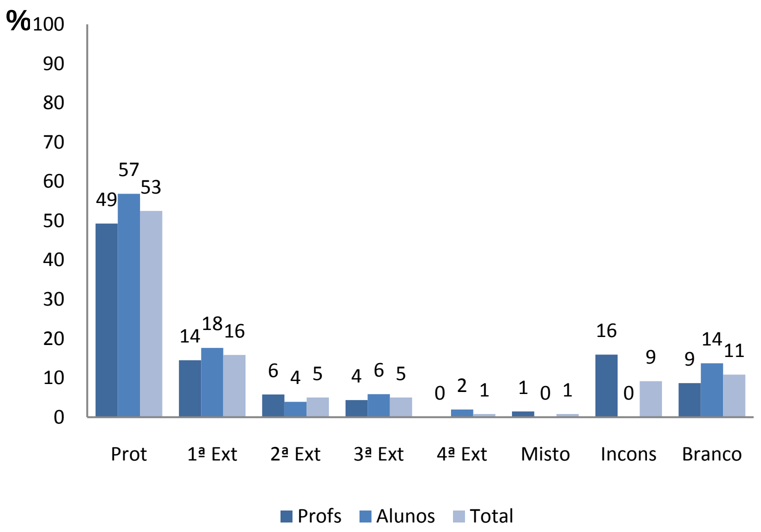


Gráfico: distribuição da classificação dos problemas elaborados, em porcentagem

Ao analisar cada uma das classificações dos problemas e suas frequências, nota-se que em termos de concepções para a elaboração a dos problemas, o grupo dos alunos está praticamente no mesmo patamar que o grupo dos professores, isto indica que especificamente, o fator tempo de experiência docente (vide Gráfico 5) não influiu significativamente.

Verifica-se, também que o fator tempo de experiência não implicou diretamente na diversidade dos problemas elaborados pelos professores, pois a quantidade de problemas elaborados referentes à 2ª, 3ª e 4ª extensões ficou na margem de 11% que de fato mostra a prevalência das situações prototípicas descritas anteriormente.

Os dados da tabela a seguir detalham a classificação dos problemas, em frequência absoluta, conforme foram elaborados.

Tabela 1: Distribuição da classificação dos problemas de estruturas aditivas

Classes	Professores	Alunos	Total
Composição protótipo	15	15	30
Composição 1ª ext.	6	9	15
Transformação protótipo	16	11	27
Transformação 1ª ext.	4	0	4
Transformação 4ª ext.	0	0	0
Comparação 2ª ext.	4	2	6
Comparação 3ª ext.	3	3	6
Comparação 4ª ext.	0	1	1
Composições sucessivas	0	0	0
Composição de Transformações	3	3	6
Estruturas Mistas	1	0	1
Inconsistências	11	0	11
Branco	6	7	13
TOTAL	69	51	120

Pela Tabela 1, pode-se observar que os problemas elaborados pelos sujeitos desta pesquisa, estão condensados nas situações prototípicas e nas primeiras extensões, tanto aos professores, como aos alunos.

Isto mostra que as expectativas quanto à elaboração dos problemas, discutidas anteriormente, nestas categorias foram estabelecidas corretamente, pois o somatório das frequências para as situações protótipo e primeiras extensões, para o grupo dos professores, totaliza 44 problemas e no universo de 69 problemas elaborados, representando 63% dos problemas elaborados.

Para os alunos, os somatórios das freqüências absolutas para as situações protótipo e primeiras extensões totalizam 38 problemas, obtendo-se uma frequência relativa de 74% dos problemas elaborados pelos alunos.

A partir desses dados cabe conjecturar, que tanto professores e alunos não estão acostumados a elaborar problemas, pois estes somente resolvem e aplicam os que já estão previamente propostos, porventura alterando somente alguns dados numéricos.

A quantidade de situações-problemas classificada como inconsistentes, é um dado que chama a atenção, pois foi detectada com base na elaboração dos problemas do grupo dos professores. Estes foram classificados como tal, por possuírem erros de escrita, conjugação verbal e ausência de dados para posterior resolução.

A seguir, apresento alguns problemas classificados como inconsistentes.

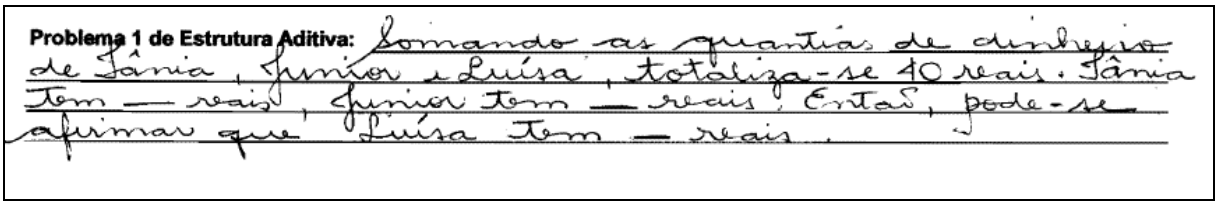

Problema 1 de Estrutura Aditiva: Somando as quantias de dinheiro de Tânia, Junior e Luísa, totaliza-se 40 reais. Tânia tem — reais, Junior tem — reais, Então, pode-se afirmar que Luísa tem — reais.

Figura 9: Recorte – Problema classificado como inconsistente – Exemplo 1.

Neste problema, verifica-se que podem existir várias situações para se compor o total. Desta forma, se fossem informadas as quantias de Tânia e Junior, o problema poderia ser incluído na classe das composições de 1ª extensão.

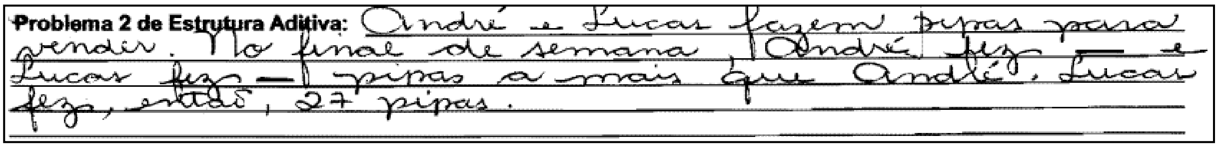

Problema 2 de Estrutura Aditiva: André e Lucas fazem pipas para vender. No final de semana, André fez — e Lucas fez — pipas a mais que André. Lucas fez, então, 27 pipas.

Figura 10 – Recorte – Problema classificado como inconsistente – Exemplo 2.

Para este problema, também observa-se a ausência de alguns dados para sua resolução, pois existem soluções distintas para cada valor informado, caso fosse informada a quantidade de pipas de André, este problema seria classificado como: Comparação de 3ª extensão.

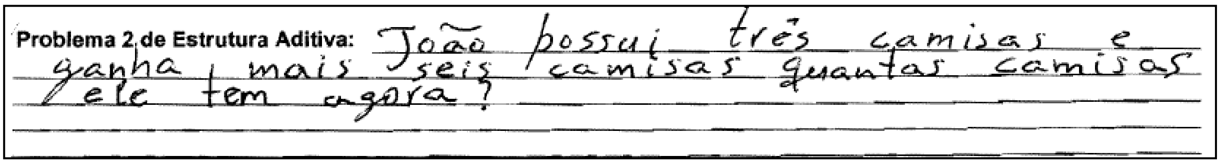

Problema 2 de Estrutura Aditiva: João possui três camisas e ganha mais seis camisas quantas camisas ele tem agora?

Figura 11: Recorte – Problema classificado como inconsistente – Exemplo 3.

Ao corrigir a escrita, alterando os tempos verbais, o problema seria classificado como: Transformação Protótipo.

Embora tenha-se percebido essas falhas, por sinal erros de ortografia ou de conjugação verbal, conforme mostram, existe por parte dos professores um conhecimento quanto às estruturas aditivas, visto que elaboraram os problemas dentro de uma classificação dessas estruturas.

O questionamento acima descrito reporta-se aos estudos de Tall e Vinner (1981), que utilizam o termo Conceito Imagem para descrever a estrutura cognitiva total, que é associada ao conceito, incluindo todos os quadros mentais, as propriedades associadas e os processos de representações. Desta forma, eles tem bem definido o Conceito Imagem, associado ao conhecimento das estruturas aditivas.

No entanto, o mesmo não pode ser dito para o Conceito Definição, Dias (2002) afirma que o Conceito Definição é a especificação do conceito em forma de palavras e pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal, sem que ele e a definição de conceito tenham necessariamente significados coincidentes e ainda o conceito definição pode ser uma descrição do conceito imagem.

Desta forma, considerando os problemas descritos anteriormente, eles não conseguiram representar corretamente o conceito imagem (as estruturas aditivas) desses problemas, ou seja, expressar corretamente em linguagem escrita a estrutura a que o problema pertence.

3.2.2. As concepções referentes às Estruturas Multiplicativas.

O processo de categorização das estruturas multiplicativas também contou com a participação de três juízes, a saber, o pesquisador e os doutorandos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, cujos estudos têm como sustentação o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Da mesma forma como as expectativas foram estabelecidas quanto à categorização dos problemas de estruturas aditivas, farei o mesmo à categorização dos problemas de estruturas multiplicativas que se referem aos seguintes fatores:

1- Dos três problemas elaborados, pelo menos, dois terços (2/3) pertencem a uma das seguintes categorias: multiplicação, divisão por partição e comparação multiplicativa. Estas podem aparecer com mais frequência, por se tratarem de situações em que facilmente são lembradas quando se tratam de problemas de estruturas multiplicativas, embora não existam situações prototípicas nas estruturas multiplicativas.
2- Aproximadamente, 60% de todos os problemas devem estar dentro das categorias mencionadas acima.
3- As outras categorias (Divisão por quotas, 4ª proporcional, Proporções Múltiplas, Combinatória e Configuração retangular correspondam a um terço do total de problemas elaborados.
4- Com o intuito de sintetizar os dados, apresentarei a seguir uma tabela que separa as classificações em dois grupos; assim o primeiro grupo será denominado, grupo das relações quaternárias (Multiplicação, Divisão por Partes, Divisão por Quotas e Quarta Proporcional) e o segundo como grupo das relações ternárias (Proporções Múltiplas, Combinatória, Produto Cartesiano e Comparação Multiplicativa), propostas por Vergnaud (1991; 1996), ao estudo das estruturas multiplicativas. Os dados representados na tabela, são em frequência absoluta e no gráfico em frequência relativa (%), conforme a elaboração dos problemas.

Quadro 51: Tabela e gráfico da distribuição de frequências das categorias de problemas de estruturas multiplicativas.

Problemas de Estruturas Multiplicativas			
Categoria	Prof.	Aluno	Total
Quaternárias	35	39	74
Ternárias	24	11	35
Inconsist	3	0	3
Branco	7	1	8
TOTAL	69	51	120

Tabela: distribuição da classificação dos problemas elaborados, em freqüência absoluta.

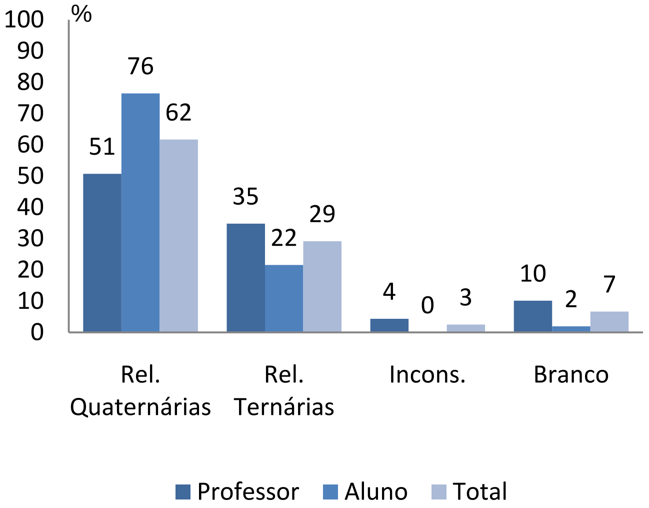


Gráfico: distribuição da classificação dos problemas elaborados, em porcentagem

A partir dos dados apresentados acima, encontram-se dois resultados distintos. O primeiro, refere-se ao fato de que os problemas das relações quaternárias e ternárias foram melhores distribuídos pelos professores, do que os elaborados pelos alunos, pois estes se concentram basicamente nas relações quaternárias. Isto ocorreu porque os professores possuem mais experiência em sala de aula que os alunos de Pedagogia para que elaborem problemas mais diversificados

O segundo fato, analisando o grupo dos professores e de alunos de forma geral, vem garantir a afirmação que só se elaboram problemas que são lembrados com mais facilidade, pois os dados mostram que existe uma maior concentração de problemas nas relações quaternárias do que nas relações ternárias.

Cabe ressaltar que, dentro das relações ternárias, temos a classe de problemas denominada Proporções Múltiplas. A meu ver, é a situação mais complexa dos problemas de estrutura multiplicativa. Nesta pesquisa, nem os professores, nem os alunos elaboraram problemas desta classe de problemas.

A seguir os dados da tabela abaixo mostram a distribuição de frequências, com o detalhamento da distribuição dos dados a partir da classificação dos problemas de estrutura multiplicativa propostos por Vergnaud e elaborados pelos professores e alunos.

Tabela 2– Distribuição de frequências da classificação dos problemas de estruturas multiplicativas.

Classes	Professores	Alunos	Total
Multiplicação	20	13	**33**
Divisão por partes	8	17	**25**
Divisão por quotas	2	6	8
4ª Proporcional	5	3	8
Proporções Múltiplas	0	0	0
Combinatória	4	2	6
Configuração Retangular	4	4	8
Comparação Multiplicativa	16	5	**21**
Inconsistências	3	0	3
Brancos	7	1	8
TOTAL	69	51	120

Nas estruturas multiplicativas, tanto professores como alunos ao elaborarem situações-problema lembram-se apenas de situações mais corriqueiras do campo multiplicativo, ou seja, a soma de parcelas repetidas, aqui denominadas por multiplicação ou relação um a um, a subtração de parcelas repetidas, denominada como divisão por partes e também quando se compara duas medidas (duas vezes a mais, o dobro, o triplo, etc.), no caso a comparação multiplicativa.

Ao analisar as frequências obtidas, observa-se que os professores deram preferência à multiplicação em detrimento à divisão; e o contrário aconteceu com os alunos eles deram mais preferência à divisão que a multiplicação. Todos os problemas de estruturas multiplicativas elaborados pelos professores e suas respectivas classificações estão disponíveis nos anexos desta dissertação.

No âmbito desta pesquisa, não cabe verificar se os professores trabalham com problemas desse tipo com seus alunos, porém ao elaborarem problemas para esta pesquisa, mostraram que eles foram retirados, baseados em um repertório de problemas que eles guardam em suas memórias. Desta forma, se eles não se lembram, indica que não trabalham.

Com estas observações, encerro a análise das concepções dos professores referentes às estruturas aditivas e multiplicativas. O próximo tópico tratará a respeito das competências dos professores e alunos para introdução da representação algébrica em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.

3.3 AS COMPETÊNCIAS.

As competências serão analisadas baseadas em dois pontos de vista: o primeiro verifica se os sujeitos da pesquisa resolvem corretamente os problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, usando suas respectivas operações aritméticas; o segundo, verifica se representa corretamente o significado do problema no enfoque algébrico.

Cabe lembrar que no capítulo referente aos procedimentos metodológicos, no tópico referente às competências (2.2.3.3), estão detalhadas as expectativas quanto à resolução dos problemas e tomando como base estas expectativas, efetuei a correção dos problemas que foram resolvidos pelos professores e alunos.

As expectativas quanto ao que será produzido na resolução de problemas se referem-se à:

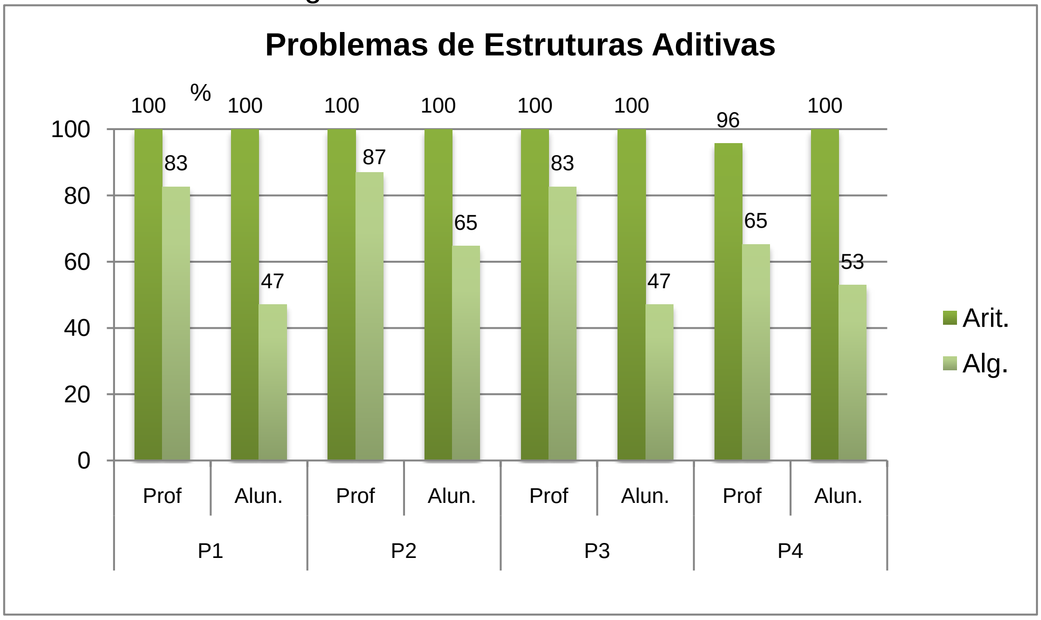
1- que os acertos a respeito da resolução aritmética sejam superiores aos acertos obtidos na representação algébrica, pois normalmente a resolução dos problemas aditivos e multiplicativos resume-se no tratamento aritmético, ou seja por meio de suas operações numéricas e não na algoritmização ou no tratamento algébrico;
2- que os professores tenham um desempenho superior aos alunos, isto se deve ao fato da experiência em sala de aula e também, pela diversidade de séries em que ministram aulas, pois os alunos que ministram aulas, trabalham em séries da educação infantil (pré-escola).
3- que haverá certa predominância de acertos quanto à resolução aritmética dos problemas de estruturas aditivas do que aos de estruturas multiplicativas.

A análise das competências dos professores e alunos será desenvolvida a partir de dois tópicos: o primeiro refere-se ao estudo dos resultados obtidos baseados na resolução dos problemas de estruturas aditivas; e o segundo, a partir dos problemas de estruturas multiplicativas, nos dois enfoques o aritmético e o algébrico.

3.3.1 Problemas de Estruturas Aditivas.

O gráfico a seguir mostra a distribuição da porcentagem de acertos obtidos pelos professores e alunos, a partir da resolução dos problemas nos dois enfoques aritméticos e algébricos.

Gráfico 17: Porcentagem de acertos – Problemas de Estruturas Aditivas



1. Enfoque Aritmético.

Com base nos dados mostrados no gráfico, tanto professores como alunos não apresentaram dificuldades para resolver aritmeticamente os problemas propostos, pois pertencem a classes de problemas a que estão mais familiarizados para resolvê-los. Os quatro problemas propostos pertencem às seguintes classes de problemas:

- P1 – 1ª Extensão – Composição de duas medidas;
- P2 – 4ª Extensão – Transformação de duas medidas;
- P3 – 4ª Extensão – Comparação de duas medidas;
- P4 – 1ª Extensão – Transformações de duas medidas.

Convém relatar aqui que, na análise relativa à elaboração de problemas, tais classes de problemas mencionadas não constaram entre os mais elaborados, vide Tabela 1: Distribuição da classificação dos problemas de estruturas aditivas. Desta forma, no âmbito deste estudo pode-se afirmar que os sujeitos desta pesquisa elaboram problemas de estruturas aditivas mais simples e conseguem resolver os de outras estruturas mais complexas em relação às situações prototípicas.

2 Enfoque algébrico

A configuração dos resultados apresentados no gráfico, quanto à representação algébrica era esperada, pois como já foi mencionado, tanto os professores como os alunos não estão acostumados a resolver problemas baseados em um enfoque algébrico.

Observa-se também que há uma diferença entre os rendimentos de professores e alunos relativos ao enfoque algébrico, isto mostra que os professores possuem certa familiaridade quanto ao trato das questões algébricas.

A seguir apresento um resumo dos tipos de representações utilizadas pelos professores e alunos, de cada problema.

Quadro 52: Resumo das representações algébricas, a partir da resolução de problemas de estruturas aditivas

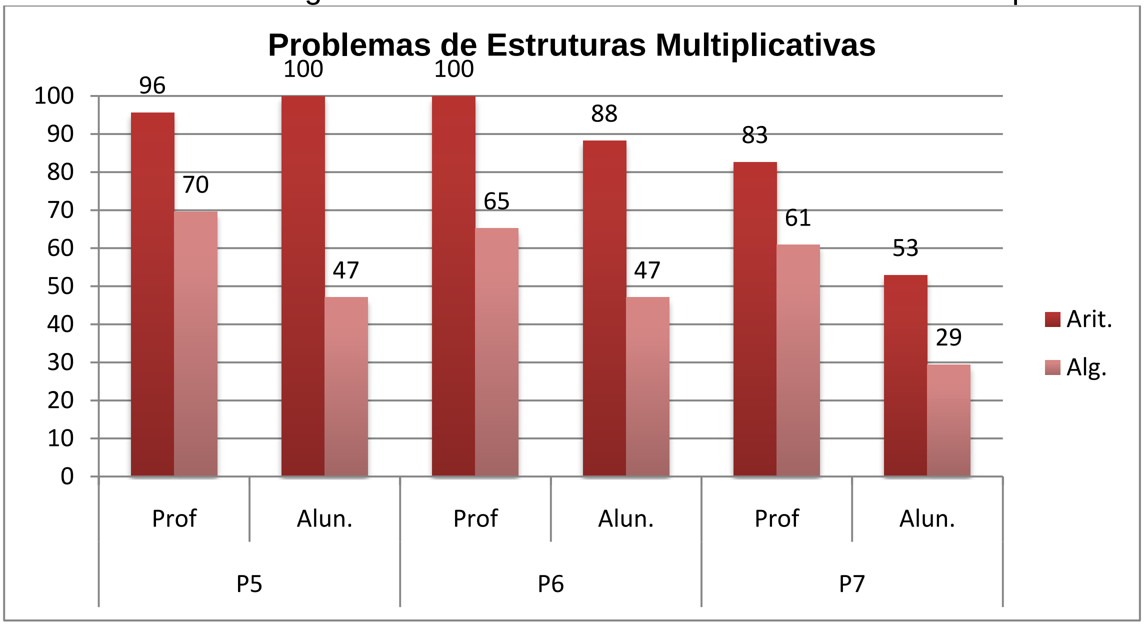
1 – Em uma festa de aniversário haviam 12 crianças 7 eram meninos, quantas meninas haviam na festa?	2- Mário ganhou apenas 20 figurinhas jogando com Marta. Tem agora 45 figurinhas. Quantas figurinhas ele tinha antes de jogar?	3- Karina tem 13 anos e sua irmã Karen tem 8 anos. Quantos anos Karen é mais nova que Karina?	4- Carlos tinha 32 bolinhas de gude antes de jogar com Roberto. Agora ele tem 17 bolinhas de gude. O que ocorreu durante o jogo.
12 = 7 + x; x+7=12; x= 12 - 7	x + 20 = 45; 45 = 20 + x ; x = 45 – 20.	x + 8 = 13; x= 13 - 8	17 + x = 32, 32 – x = 17, x= 32 - 17

Dentre as soluções apresentadas pelos professores e alunos, é comum a representação algébrica, como a síntese da operação apresentada, por exemplo, no problema 1, a operação usada é uma subtração (12 – 7), e a representação algébrica x = 12 – 7, isto acontece aos demais problemas.

3.3.2. Problemas de Estruturas Multiplicativas.

O gráfico abaixo mostra a distribuição da porcentagem de acertos obtidos por professores e alunos a partir da resolução dos problemas nos dois enfoques aritméticos e algébricos.

Gráfico 18: Porcentagem de acertos – Problemas de Estruturas Multiplicativas



Os dados do gráfico acima mostram que o grupo dos professores saiu-se melhor na resolução dos problemas do que o grupo dos alunos. Nota-se, ainda, que houve uma diferença nos desempenhos, tanto dos professores como dos alunos, no que diz respeito à resolução dos problemas no enfoque aritmético e algébrico, em favor do primeiro enfoque.

A seguir, discutirei o desempenho dos sujeitos em cada um destes enfoques.

1 Enfoque Aritmético.

Os problemas de estrutura multiplicativa pertencem às classes mais simples, ou seja, são de relações quaternárias, e os problemas 5 e 6 pertencem à classe das multiplicações, o problema 7, à classe das divisões por quotição. Verifica-se que os alunos encontraram mais dificuldades para resolver este problema, como é retratado nos dados do gráfico.

Nas linhas seguintes, apresento alguns recortes das resoluções efetuadas por professores e alunos para o problema 7: Um pedreiro quer comprar 0,5 ton. de cascalho. O preço do cascalho é de R$ 273,00 por tonelada. Que operação devemos fazer para calcular a despesa?

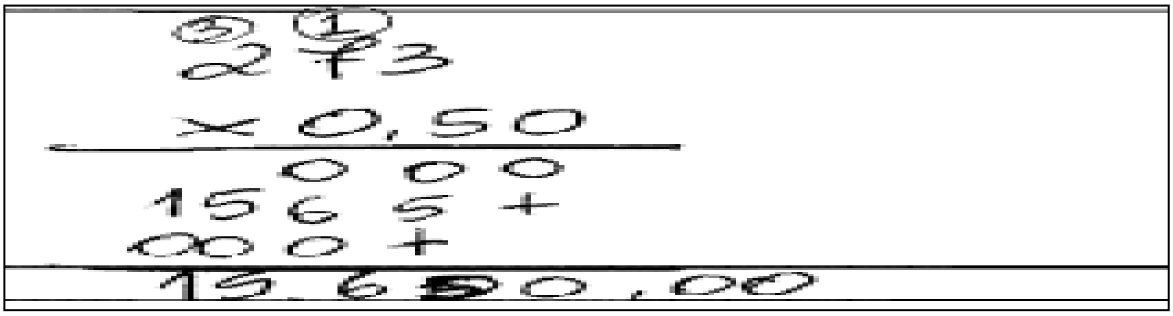


Figura 12: Recorte - Exemplo de resolução incorreta do problema 7, por um professor

Para o problema 7, há duas resoluções corretas; a primeira trata do produto de 273 por 0,5 e a outra seria o quociente de 273 por 2. No caso apresentado na Figura 12, utilizou-se uma das operações corretas, porém o resultado está incorreto.

Outra resolução para o problema:

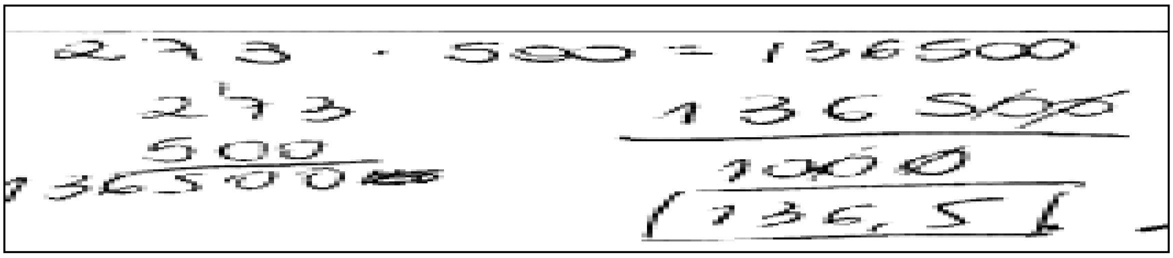


Figura 13: Recorte – Exemplo de resolução correta do problema 7, por um aluno

Neste caso, o aluno procedeu da seguinte maneira:

- Primeiro, transformou 0,5 toneladas por 500 kg;
- Multiplicou por 273, chegando a 136.500 kg · reais;

- Como se está pedindo o valor da despesa, dividiu o valor encontrado por 1.000, ou seja, uma tonelada, de tal forma que chegou ao valor R$ 136,50.

Especificamente para o problema 7, a operação mais utilizada para se calcular a despesa foi a divisão por 2, isto é, a opção para resolver o problema foi transformar 0,5 em ½ e, assim, evitar a multiplicação de 273 por 0,5.

A ação adotada tanto por professores como por alunos denota a preferência dessas pessoas para trabalhar com números naturais, em detrimento dos decimais. Mas mostra, também que eles são capazes de realizar tal transformação, pelo menos, no que tange à metade (0,5 ou ½).

Outros recortes de resoluções, que seguem a mesma situação retratada acima:

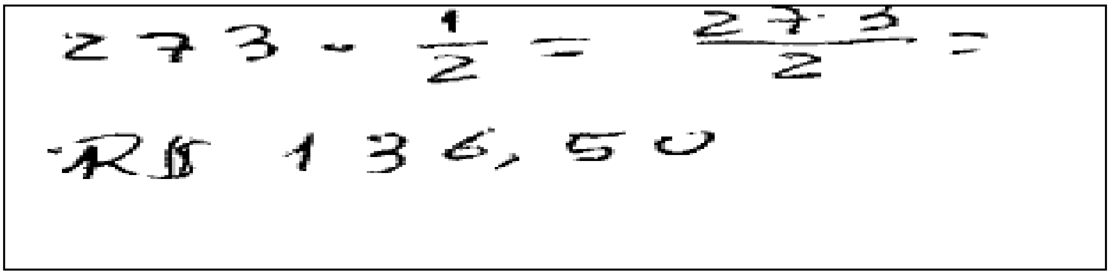


Figura 14: Recorte – Exemplo de resolução do problema 7 por um professor.

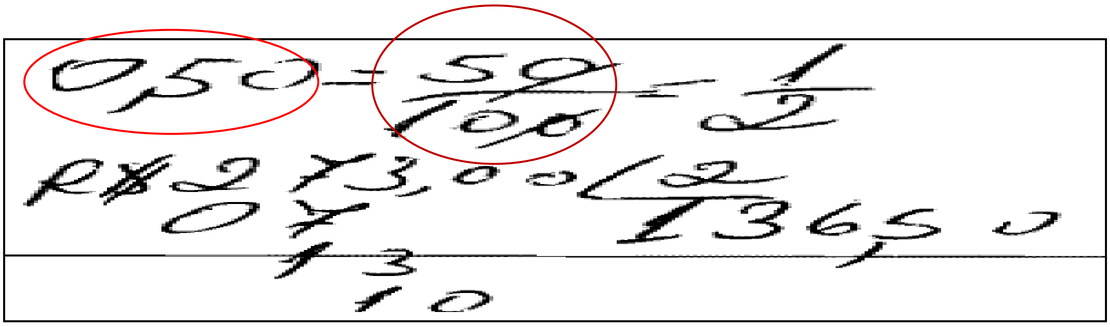


Figura 15: Recorte – Exemplo de resolução do problema 7 por um professor

Para este caso, existe um erro referente à transformação do número decimal 0,5 em fração, observa-se que o professor considerou as duas casas decimais de “0,50” e transformou-o em “50/100”, mas o correto seria representar 5/10, porém a resolução apresentada foi considerada como correta, pois tanto 50/100 como 5/10 têm ½ , como fração equivalente.

2 Enfoque Algébrico

Para os problemas de estruturas multiplicativas, os sujeitos preocuparam-se em apresentar o enfoque algébrico por meio da representação do cálculo aritmético utilizando letras ou símbolos, que muitas vezes não caracterizavam o raciocínio do problema.

A seguir, apresento algumas representações que foram expressas de forma incorreta para o problema 7.

$$\square \div 2 = 136,50$$
$$\square = 136,50 \times 2$$
$$\square = 273,00$$

Figura 16: Recorte – Enfoque algébrico para o problema 7, por um professor

Na resolução representada na Figura 16, a professora calculou o valor de 1 tonelada de cascalho que já era um dado do problema, que solicitava o valor de 0,5 tonelada. Para este caso, ela utilizou o resultado obtido no cálculo aritmético (136,50) e o considerou como um dado do problema.

R$ 273,00 : R$ 0,50 = R$ 273,00 | R$ 0,50 23 R$ 54,60 30 00 X	R$ 273,00 : R$ 0,50 = $\boxed{?}$ $\boxed{?}$ = R$ 54,60 X

Figura 17: Recorte – Enfoque algébrico incorreto para o problema 7 por um professor

Para o caso retratado na figura 17, ao calcular erroneamente a divisão de R$ 273,00 por 0,5, o professor utilizou o cálculo aritmético, para representar o enfoque algébrico deste problema.

$$x \times \frac{1}{2} = 273,00$$
$$x = 273,00 : 2$$
$$x = 136,50$$

Figura 18: Recorte – Enfoque algébrico incorreto para o problema 7 por um professor

Neste caso, o erro consistiu, na passagem da 1ª linha da equação para a segunda; pelo princípio da equivalência de equações o correto seria dividir por ½ , que chegaríamos a 273 . 2 = 546.

Detalhando esta resolução:

$$x\ .\ \frac{1}{2} = 273 \Rightarrow \frac{x}{2} \div \frac{1}{2} = 273 \div \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} \cdot 2 = 273 \cdot 2 \Rightarrow x = 546$$

Para se chegar ao resultado desejado, a equação deveria ser representada da seguinte maneira:

$$x \div \frac{1}{2} = 273 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 273 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{273}{2} \Rightarrow x = 136{,}50$$

No caso dos enfoques algébricos que satisfazem o raciocínio do problema 7, estes se resumem nas seguintes representações:

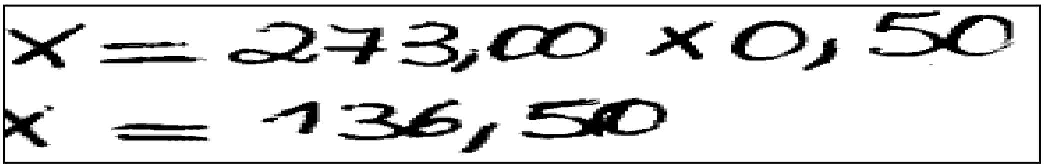


Figura 19: Recorte – Enfoque algébrico correto para o problema 7 por um professor

Figura 20: Recorte – Enfoque algébrico correto para o problema7 por um professor

No caso dos problemas de estruturas multiplicativas, os sujeitos desta pesquisa, só conseguiram fornecer um enfoque algébrico com base no enfoque aritmético, ou seja, apresentaram o cálculo aritmético em forma de equação como enfoque algébrico, o que não é incorreto, pois eles seguiam o que se pediu na atividade, porém, meu intuito com esta atividade era verificar se eles possuíam dois pontos de vista distintos: o aritmético e o algébrico.

O fato põe em evidência as afirmações de Ponte (1992) que distingue as quatro competências do saber matemático, a saber, as competências elementares, intermediárias, as avançadas e as complexas.

Nas competências elementares estão inseridas os processos de simples memorização e execução, nas intermediárias estão os processos com certo grau de complexidade, mas que não exigem muita criatividade, as competências complexas exigem uma capacidade significativa de lidar com situações novas e os saberes de ordem geral incluem os saberes com influência nos próprios saberes, os metas-saberes.

Desta forma, verifica-se que os sujeitos, segundo Ponte (1992), possuem uma competência elementar, quanto à representação algébrica de problemas com estruturas aditivas e multiplicativas.

Apresentadas estas últimas considerações, encerro aqui este capítulo que tratou a respeito da análise das questões dos instrumentos diagnósticos. O próximo capítulo trará as considerações finais deste trabalho e a resposta à questão de pesquisa.

CAPÍTULO IV

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve por objetivo Investigar como o professor concebe uma transição entre os conceitos aritméticos desenvolvidos para uma introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Assim, pretendeu-se identificar e analisar as diferentes concepções referentes à elaboração de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas e verificar a(s) competência(s) relacionada(s) à introdução da representação algébrica utilizando problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.

Tendo em mente tal objetivo, iniciei esta dissertação apresentando o interesse por este estudo, e sua justificativa, e em seguida, apresentei a problemática e a questão de pesquisa que estão retratados na Introdução.

A base teórica principal deste estudo está fundamentada nos estudos de Vergnaud (1982, 1990, 2001), que me permitiu olhar para as situações que envolvem as classificações dos problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, tanto aritmeticamente como algébricamente, que foram discutidas em detalhe no Capítulo I

Sustentadas nas idéias teóricas, bem como nas pesquisas relacionadas ao estudo, no Capítulo II, definiu-se a metodologia da pesquisa, que consistiu da aplicação de um instrumento diagnóstico.Tal instrumento foi composto de três seções distintas, a saber: perfil, concepções e competências. Ele foi aplicado para dois grupos: o G1, formado pelos professores em serviço e o G2, formado pelos alunos de Licenciatura Plena em Pedagogia. Do ponto de vista teórico-metodológico, o estudo realizado pode ser classificado como uma pesquisa do tipo descritiva, em que o pesquisador descreve, registra, analisa e correlaciona fatos ou fenômenos (do mundo físico e, principalmente do mundo humano) sem contudo ter qualquer interferência direta nele, tampouco qualquer ação de manipulá-los, controlando eventuais variáveis dependentes ou independentes.

O passo seguinte à realização do estudo foi a análise dos dados coletados a partir dos instrumentos diagnósticos (Capítulo III). Esta análise forneceu informações suficientes para que se possa responder a questão de pesquisa em que tratarei neste capítulo. Para tanto apresentarei na próxima seção (4.1) uma síntese dos resultados obtidos na análise, para assim retornar à questão de pesquisa com o intuito de respondê-la (seção 4.2).

Por fim concluirei esta dissertação apresentando algumas sugestões para futuros trabalhos, as quais surgiram como frutos de minhas reflexões a partir do capítulo de análise dos resultados e que se consolidaram ao longo da elaboração desse capítulo sobre as considerações finais de meu estudo.

4.1 SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS.

No capítulo anterior procedi com a análise dos dados coletados, o que implicou em muitos tratamentos e cruzamentos de informações. Nesta seção apresentarei uma síntese dessa análise. Para tanto dividirei esta seção em três partes: o perfil, concepções e competências.

Perfil – Professores:

Este grupo é formado principalmente por professores que possuem formação superior, a maioria em Pedagogia. Contudo havia professores formados em outras áreas, como: Matemática, Letras, Geografia, Psicopedagogia.

No que tange à experiência em sala de aula, o grupo compôs-se em grande parte de professores experientes, que atuam no ensino em um período superior há 11 anos e que destinam em média dez aulas de Matemática por semana. Nas aulas, dão preferência para ensinar as operações com números naturais; as séries preferidas compreendem as 2ª e 4ª séries.

Perfil – Alunos:

A maioria dos alunos do curso de Licenciatura em Pedagogia é proveniente do curso de Magistério, muitos deles já estão atuando em sala de aula, principalmente nas séries de educação infantil (creche), e prestando serviço na rede Municipal de ensino.

Como esperado, a experiência desses alunos no magistério, é bem menor do que a do grupo dos professores, (variou entre 3 a 5 anos). O número de aulas por semana dedicado ao ensino da Matemática é igualmente menor (destinam em média de 3 a 5 aulas por semana), o que parece estar relacionado tanto com o nível em que atuam (pré-escola), quanto pela importância dada à disciplina.

Concepções.

Com o propósito de verificar as concepções relativas quanto à elaboração de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, foi solicitado aos sujeitos desta pesquisa que elaborassem livremente três problemas de estrutura aditiva e três problemas de estrutura multiplicativa, que foram categorizados a partir das classes de problemas propostos por Vergnaud (1991). As concepções relativas à elaboração de problemas de estruturas aditivas dos professores consistiram basicamente em situações prototípicas e em problemas relacionados à 1ª extensão das situações de composição e transformação.

Em relação à produção dos alunos estes, também elaboraram problemas com ênfase nas situações prototípicas e de 1ª extensão. Porém, diferentemente dos professores, os problemas de 1ª extensão elaborados por esse grupo limitou-se às situações de composição. Assim, nota-se que o grupo dos professores apresentou maior variação (nas situações e nos níveis de complexidade) de problemas do que o grupo dos alunos. Por outro lado, apenas o grupo de professores elaborou problemas inconsistentes, e foram muitos (mais que 10%) os problemas classificados nessa categoria.

Quanto a produção de problemas com estruturas multiplicativas a partir de professores e alunos, também se verifica que eles concebem problemas das situações mais simples e corriqueiras, ou seja, as relações quaternárias do campo multiplicativo, vide Quadro 48

Verifica-se também neste quadro, que os sujeitos, não propuseram nenhum problema que envolvesse a situação de proporções múltiplas, mostrando que também nos problemas de estruturas multiplicativas eles se restringiram a elaborar problemas que envolviam raciocínio menos complexo.

Cabe ressaltar aqui, que a elaboração de três problemas de cada estrutura, não constitui um campo vasto para se efetuar uma pesquisa mais profunda para o estudo das concepções, porém serve como indicador de tendência. E essa tendência pode ser o ponto de partida para uma investigação com um número maior de sujeitos e também de problemas a serem elaborados.

Na sequência, apontarei os principais resultados obtidos na análise referente a competência, na qual se verificaram os acertos e erros quanto a resolução aritmética e a apresentação de um enfoque algébrico para os problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.

Competências

As competências foram analisadas a partir da resolução de sete problemas, sendo que quatro problemas versaram sobre o campo aditivo e três problemas sobre o campo multiplicativo.

Os resultados indicam que a competência no trato das questões aritméticas é bem superior que a competência relacionada à representação algébrica.

De maneira geral, os sujeitos, entendem que o enfoque algébrico é uma síntese da resolução aritmética, só que em forma de representações por letras ou por algum símbolo da operação que exprima o raciocínio aritmético, e não de um algoritmo que representa qualquer situação semelhante ao do problema.

Desta forma, baseados nos estudos de Ponte (1991), pode-se dizer que estes sujeitos possuem uma competência elementar a respeito das competências relacionadas à representação algébrica.

No tópico a seguir, finalmente responderei à questão de pesquisa que me comprometi a responder no decorrer desta dissertação e, por último, apresentarei algumas sugestões de pesquisas em que se pode-se dar continuidade a este trabalho.

4.2 RESPONDENDO À QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa desta dissertação foi elaborada da seguinte forma:

"*Quais são as concepções e competências dos professores e futuros professores das séries Iniciais do Ensino Fundamental, sobre a utilização das estruturas aditivas e multiplicativas, como elementos propiciadores da introdução de problemas algébricos?"*

A partir dos estudos efetuados no transcorrer desta pesquisa e, principalmente, dos resultados obtidos na análise do instrumento diagnóstico, encaminha-se a seguinte resposta que atende a questão de pesquisa:

Os sujeitos deste estudo concebem problemas relacionados às situações prototípicas e também às primeiras extensões de problemas de estruturas aditivas relacionadas às classes de Composição e Transformação de duas medidas. Já para problemas de estruturas multiplicativas elaboram problemas basicamente de relações quaternárias.

Em relação às competências, os sujeitos estão mais familiarizados e têm maior desenvoltura quanto ao trato das representações aritméticas, possuindo uma competência em relação ao enfoque algébrico que se pode classificar como competência elementar (Ponte 1992). Tal conclusão é válida para os dois grupos pesquisados.

Finalmente, apesar dos resultados obtidos, não tão satisfatórios quanto eu previa, nesta pesquisa, em relação à representação algébrica, os sujeitos acharam válida a ideia de trabalhar a introdução algébrica por meio dos problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.

4.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS.

Este trabalho pode ser considerado como um estudo introdutório da representação algébrica por meio das investigações sobre as concepções e competências de professor e futuro professor ao lidar com problemas de estruturas aditivas e multiplicativas. Assim, como costuma acontecer quando se chega na conclusão de um estudo científico, algumas idéias, fruto de nossas reflexões, vem-nos a mente como boas possibilidades de realizações de pesquisa.

A primeira dela volta-se para a população dos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental estudando a apropriação da representação algébrica. Nesse caso seria muito interessante um estudo que investigasse sobre o comportamento destes estudantes frente a situações de resoluções de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas. Nesse caso, nossa sugestão é a realização de uma sequência de Ensino, a qual utilizasse outras duas representações a algébrica e o cálculo relacional (Diagramas de Vergnaud). Tal estudo poderia atender a seguinte questão de pesquisa: Qual é a contribuição de uma intervenção de ensino, baseadas nas representações algébricas e de cálculo relacional, na melhoria da qualidade do raciocínio matemático?

A metodologia a ser aplicada neste estudo seria baseada em uma intervenção de ensino, a partir de entrevistas realizadas com alunos, baseados nos estudos do grupo Schliemann et al (1998), vistas nesta dissertação.

Uma segunda sugestão para pesquisa que gostaria ainda de fazer, volta-se para o professor. Neste estudo realizamos uma pesquisa descritiva, em que nossa interferência foi a menor possível. Dessa vez propomos um estudo que atue sobre o saber desse profissional, de modo a investigar esses saberes e as fontes de conhecimento para a docência, através de um estudo detalhado da Teoria dos Campos Conceituais. Tal estudo poderia atender a seguinte questão de pesquisa: Quais são os processos didáticos elaborados por docentes das séries iniciais do Ensino Fundamental ao proporem uma sequência de ensino, baseada na Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud?

A metodologia que poderia ser aplicada no estudo proposto, consiste na pesquisa-ação, pois ela implica na participação direta do pesquisador. Desta forma, a pesquisa-ação requer o compromisso do pesquisador com a população pesquisada a fim de buscar coletivamente alternativas para resolução de problemas ou de uma situação de modo participativo.

Este estudo poderia ser fundamentado nas idéias de um dos seguintes pesquisadores: Lee S. Shulman, João Pedro da Ponte, Donald Schön e Maurice Tardiff, cujas pesquisas são ligadas à formação profissional e saberes docentes.

CAPÍTULO V

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARRAIS, U. B. **EXPRESSÕES ARITMÉTICAS: Crenças, Concepções e Competências no entendimento do Professor Polivalente**. 2006. 156f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

BLANTON, L. M.; SCHIFTER, D.; ING V.; LOFGREN, P.; WILLIS, C; DAVIS, F.; CONFREY, J. **Early Algebra**, in Algebra: Gateway to a Technological Future, Columbia/USA, The Mathematical Association of America, 2007, p. 14-18.

BOGDAN. R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos**, 1994, Porto Editora LDA, Porto, Portugal.

BRASIL, MEC/SEF. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Brasilia, DF, 1996

________________ **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos PCN**. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998a.

_________________:**Matemática.** Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998b.

BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas,** Lisboa/PT, Instituto Piaget, 1996.

CARRAHER, D. V.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M. **Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education**, in Journal of Research in Mathematical Education, março 2006, vol. 37, 2ª Ed., pg 87 – 115, disponível em http://my.nctm.org/eresources/archive.asp?journal_id=1, acesso em: 22/05/2008.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais,** 5 ed, Cortez Editora, São Paulo,SP, 1991

DA ROCHA FALCÃO, J. T. **A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas**. In: SCHILLIEMAN, A.D, CARRAHER, D.W., SPINILLO, A.G., MEIRA, L.L, & da ROCHA FALCÃO, J.T. (orgs) Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

_______________________ **Representação do problema, escritas de fórmulas e tutoria na passagem da aritmética à álgebra.** In CEMA. V.2. São Paulo: PUC/SP, 1994. p. 19-55

_______________________**Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como Começar?** In Boletim GEPEM / nº 42 – Fev/Jul. 2003, p. 27-36

DIAS, M. S. **Reta Real – Conceito Imagem e Conceito Definição.** 2002. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2002.

FIORENTINI. D.; LORENZATO. S. **Investigação em Educação Matemática – Percursos teóricos e metodológicos**, 2006, Editora Autores Associados, Campinas, SP.

GIL, A. C. **Como elaborar um projeto de pesquisa**, 1998, São Paulo, SP, Editora Atlas S/A

KAPUT, J.J; BLANTON, L.M**. Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable a Massive Escale**. Annual Meeting of AERA, Montreal-Canada, 1999.

KATZ. V.J. **Algebra: Gateway to a Technological Future**, 2007, Mathematical Association of America, disponível em http://www.maa.org/algebra-report/Algebra-Gateway-Tech.Future.pdf, acesso: 07/02/2008.

KIERAN C. **The leaning and teaching of school algebra,** in Handbook of school algebra In Grows, D. A. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, 1992. p. 390-419

________**The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective**, in Research issues in the learning and teaching of algebra. Virginia, EUA: Laurence Erbaum, 1994.

________ **Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of Algebra and functions.** In: NUNES, T.; BRYANT, P. (edited). Learning and teaching mathematics – an international perspective. Psycology Press Ltd. 1997. p.133-158

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** 2000, Editora Papirus, Campinas, SP.

LINS, R. C.; KAPUT, J. **The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field,** in The Future of the Teaching and Learning of Algebra, The 12th ICMI Study, STACEY K.; CHICK H.; KENDAL K. (editors). Kluwer Academic Publishers. 2004. p. 47-70.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAGINA, S.M.P.; CAMPOS, T.M.M.; GITIRANA, V; NUNES, T. **Repensando adição e subtração**. São Paulo: PROEM, 2001

NUNES, T; CAMPOS, T.M.M; MAGINA, S.M.P.; BRYANT, P. **Educação Matemática: Números e Operações Numéricas.** 4 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

OLIVEIRA, M. B. **Construindo significados para a linguagem algébrica com o auxilio do jogo codificação-decodificação.** 2004. 142f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PONTE, J. P. **Concepções dos Professores de Matemática e Processo de Formação,** in Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, BROWN M. et al. 1992. p. 185-235.

SANTOS, L. M. **Concepções do Professor de Matemática sobre o Ensino de Álgebra.** 2005. 105f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SCHLIEMANN, A.D; CARRAHER, D. W; BRIZUELA, B. M. **Solving Algebra Problems Before Algebra Instruction.** Medford, MA, 1998, disponível em: http://www.earlyalgebra.terc.edu/our_papers/2000/Schliemann_et_all_1998.pdf, acesso em 22/05/2008

TALL, J.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity,** in Educational Studies in Mathematics, 1981, v.12, pp 151 – 169.

VERGNAUD, G. **Problem Solving and Concept Development in the Learning of Mathematics**, E.A.R.L.I – Second Meeting, Tübingen, September 1987

____________ **El Niño, las Matemáticas y la Realidad**, México: Editorial Trilhas, 1991.

____________ **Multiplicative Conceptual Field: What and Why?** in HAREL, I.G.; CONFREY, J. (Eds.), The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics, State University of New York Press, 1994

____________ **A Teoria dos Campos Conceptuais**: in Didáctica das Matemáticas, Brun, J (Dir), Lisboa: Instituto Piaget, 1996, 280 p., Cap. 3, 155-191

____________ **The nature of mathematical concepts**, in Learning and Teaching Mathematics, Nunes, T. and Bryant, P. (Eds.). Londres: Psycology Press, 1997a.

____________ **Algebra, additive and multiplicative structures. Is there any coherence at the early secondary level?** In ERCME (European Research Conference on Mathematical Education). Podebrady, pp. 33-45, 1997b

____________ **A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education**, in Journal of Mathematical Behavior, 17, vol. 2, pp 167 – 181, 1998.

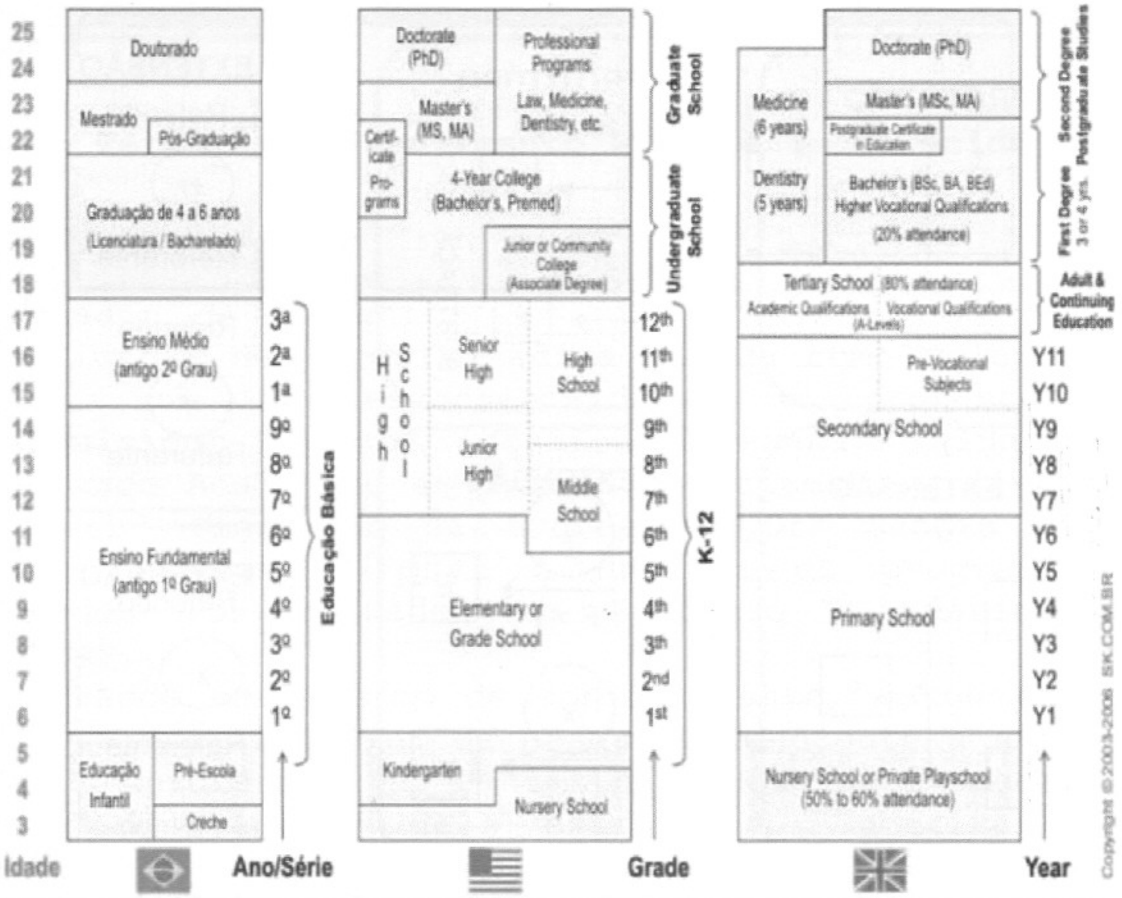
VERGNAUD, G; CORTÉS, A; FAVRE-ARTIGUE, N. **Introduction de l'Algebre Aupres de Debutants Faibles Problemes Epistemologiques et Didatiques** in Didactique et Acquisitions des Concept Scientifiques, VERGNAUD, G; BRUSSEAU, G. (Ed). Grenoble, La Pensée Savage. 1988

VERGNAUD, G; LABORDE, C. **El aprendizage y la enseñanza de la Matemática: teoría e conceptos fundamentales,** in VERGNAUD, G (org). Aprendizajes y didácticas: que hay de Nuevo? Buenos Aires: Edicial, 1994

ANEXOS

ANEXO 1

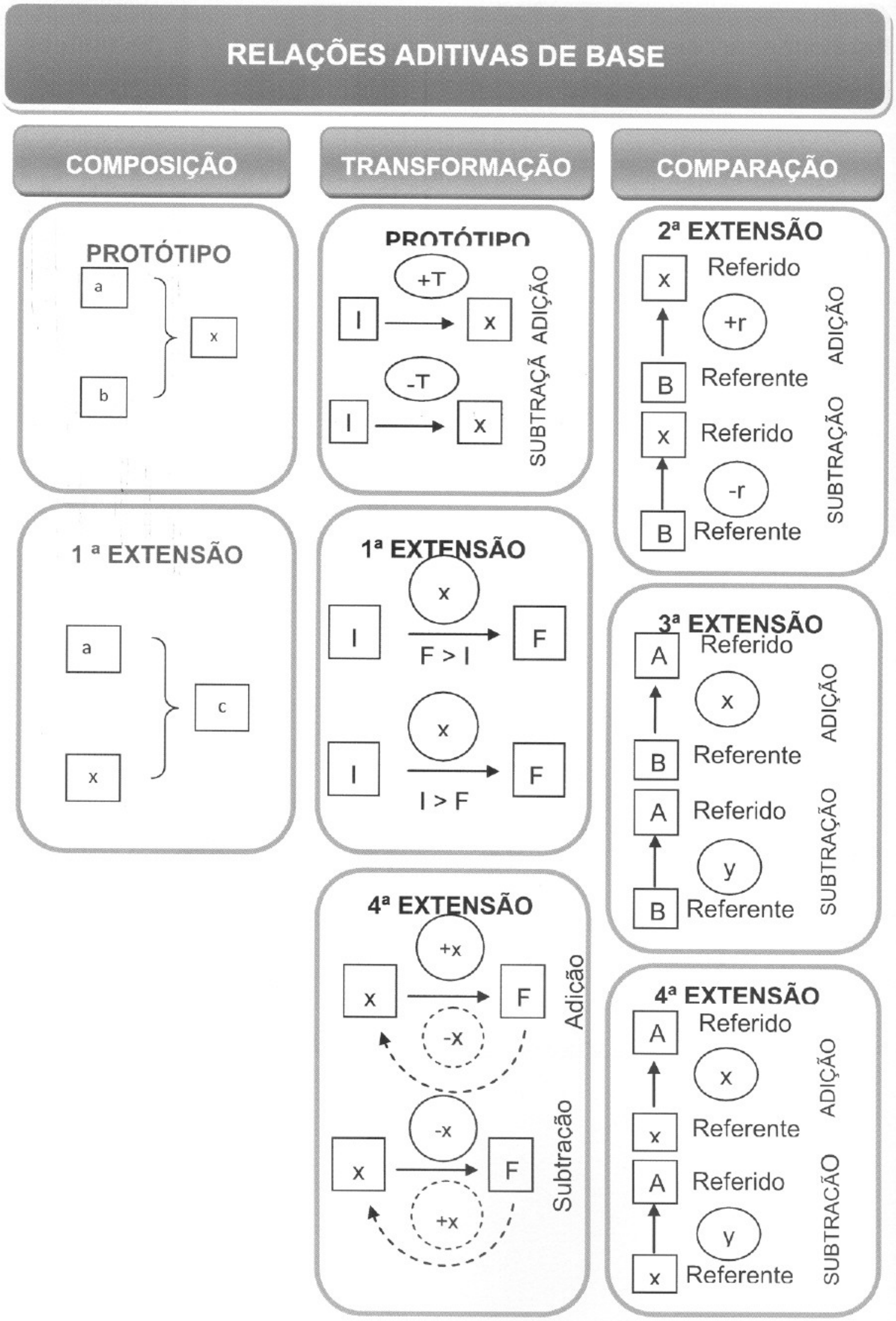
Equivalência entre os sistemas norte americanos, britânicos e brasileiros de educação.



Fonte: http://www.sk.com.br/sk-edsys.html - acesso em 17/06/2008

ANEXO 2

Quadro resumo das relações aditivas de base



ANEXO 3a

Termo de Consentimento - Professor

Pesquisa: "Estudo das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental"

- Mestrado Acadêmico em Educação Matemática - PUC - SP

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____,
portador do RG n°: ______________________________, a participar da pesquisa acima citada como voluntário (a), sob a responsabilidade do professor e pesquisador Otávio Yoshio Yamanaka, aluno do Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática da PUC - SP sob orientação da Professora Drª Sandra Maria Pinto Magina, a qual é docente do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

Assinando este termo de consentimento, estou ciente de que, participarei da pesquisa, mediante a entrega ao professor, de um texto, constando formulações de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas com a finalidade única de ser utilizado como instrumento diagnóstico, cujas análises serão utilizadas no corpo da dissertação do referido professor, e que todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e a orientadora terão conhecimento dos dados.

Assinatura: ____________________________________

São Paulo, ____ de ______________ de 2008.

ANEXO 3b

Termo de Consentimento – Aluno

Pesquisa: Pesquisa: "Estudo das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do Ensino Fundamental"

Sob a Luz da Teoria Cognitivista de Gerard Vergnaud. - Mestrado Acadêmico em Educação Matemática - PUC - SP

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____, portador do RG nº: ___________________________________, do 6º Semestre, Turma _____a participar da pesquisa acima citada como voluntário (a), sob a responsabilidade do professor e pesquisador Otávio Yoshio Yamanaka, aluno do Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática da PUC - SP sob orientação da Professora Drª Sandra Maria Pinto Magina, a qual é docente do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

Assinando este termo de consentimento, estou ciente de que, participarei da pesquisa, mediante a entrega ao professor, de um texto, constando formulações de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas com a finalidade única de ser utilizado como instrumento diagnóstico, cujas análises serão utilizadas no corpo da dissertação do referido professor, e que todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o pesquisador e a orientadora terão conhecimento dos dados.

Assinatura: ______________________________________

São Paulo, ____ de ______________ de 2008.

ANEXO 4a

Referente ao Professor

Instrumento diagnóstico: perfil

1ª Parte: Perfil do Professor:

1. Seu nível de instrução é: ☐ Ensino Médio ☐ Superior Incompleto ☐ Superior Completo

2. Você cursou: ☐ Magistério ☐ Pedagogia ☐ Outro curso, qual____________________

3. Em qual (is) rede (s) você ministra aulas? ☐ Estadual ☐ Municipal ☐ Particular

4. Há quanto tempo você leciona? ☐1 a 5 anos ☐6 a 10 anos ☐11 a 15 anos ☐mais de 15 anos

5. Quantas aulas semanais você normalmente disponibiliza para ensinar matemática?
Considere que em seu dia letivo você dispõe de <u>duas aulas</u>: uma que acontece antes do intervalo e a outra após o intervalo. Assim é possível pensar que você dispõe de 10 aulas semanais, isto é você pode trabalhar a disciplina diariamente, porém não ocupando todo o dia letivo.
Outro exemplo seria de afirmar que dedica 5 aulas semanais para a Matemática, isto é trabalhar diariamente a Matemática, mas não ocupando todo o dia letivo, e ainda, você poderia afirmar que reserva 2 dias inteiros da semana para o ensino da Matemática, mas não ocupando todo o dia letivo, e ainda, você poderia afirmar que reserva 2 dias inteiros da semana para o ensino da Matemática, desta forma você pode afirmar que dedica 4 aulas semanais para o ensino da Matemática.
☐ 1 aula ☐ 2 aulas ☐ 3 aulas ☐ 4 aulas ☐ 5 aulas ☐ mais que 5 aulas

6. Em sua trajetória estudantil, qual era o seu gosto pela matemática?
☐Detesto ☐Gosto Pouco ☐Gosto mais ou menos ☐ Gosto muito ☐Adoro

7. Qual (is) dos conteúdos abaixo você se sente mais seguro (a) para ensinar para seus alunos?
☐Números e formas e Sistema Métrico Decimal ☐Tratamento da Informação
☐Espaço e Forma (Geometria) ☐Operações com números naturais ☐Grandezas e medidas
☐Nenhum ☐Outro, qual?______________________

8. Em que série prefere ministrar aula? ☐1ª ☐2ª ☐3ª ☐4ª ☐todas ☐nenhuma
Aponte, pelo menos 2 motivos para sua escolha:____
____
____

9. Neste ano letivo, em que série você ministra aula? ☐1ª ☐2ª ☐3ª ☐4ª

ANEXO 4b

Referente ao Professor

Instrumento diagnóstico: concepção

2ª Parte: Elaboração de Problemas

Elabore 3 (três), problemas de Estruturas Aditivas (Adição e/ou Subtração) e outros 3 (três) de Estruturas Multiplicativas (Multiplicação e/ou Divisão). Após cada problema que você elaborou, faça comentários sobre ele do tipo:

a) quais conceitos estão inseridos, envolvidos, nesse problema que você elaborou.

b) você acha que ele é fácil ou difícil? Ele é apropriado para ser trabalhado em que série?

c) no que você acha que o problema vai contribuir para a aprendizagem de seus alunos?

Problema 1 de Estrutura Aditiva:____

____

____

____

Comentário sobre o problema:____

____

____

____

Problema 2 de Estrutura Aditiva:____

____

____

____

Comentário sobre o problema:____

____

____

____

Problema 3 de Estrutura Aditiva:____

____

____

____

Comentário sobre o problema:____

____

____

____

Problema 1 de Estrutura Multiplicativa:

Comentário sobre o problema:

Problema 2 de Estrutura Multiplicativa:

Comentário sobre o problema:

Problema 3 de Estrutura Multiplicativa:

Comentário sobre o problema:

ANEXO 4c

Referente ao Professor

Instrumento diagnóstico: competência

3ª Parte: Resolução de problemas

Nas linhas seguintes, apresento alguns problemas, que versam sobre estruturas aditivas e multiplicativas.

Resolva cada um dos problemas de duas formas: a) forma convencional (aritmeticamente) e b) com um enfoque algébrico (utilizando uma incógnita).

PROBLEMA 1: EM UMA FESTA DE ANIVERSÁRIO HAVIAM 12 CRIANÇAS 7 ERAM MENINOS, QUANTAS MENINAS HAVIAM NA FESTA?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 2: MÁRIO GANHOU APENAS 20 FIGURINHAS, JOGANDO COM MARTA. TEM AGORA 45 FIGURINHAS. QUANTAS FIGURINHAS ELE TINHA ANTES DE JOGAR?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 3: KARINA TEM 13 ANOS, SUA IRMÃ KAREN TEM 8 ANOS. QUANTOS ANOS KAREN É MAIS NOVA QUE KARINA?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 4: CARLOS TINHA 32 BOLINHAS DE GUDE ANTES JOGAR COM ROBERTO. AGORA ELE TEM 17 BOLINHAS DE GUDE. O QUE OCORREU DURANTE O JOGO?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 5: JOANA QUER COMPRAR 4 BOLOS. CADA BOLO CUSTA R$ 10,00. QUANTO ELA IRÁ PAGAR PELOS BOLOS?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 6: MARCOS QUER PRESENTEAR SEUS SEIS NETOS COM BOMBONS, ELE PRETENDE DAR 3 BOMBONS A CADA UM. QUANTOS BOMBONS ELE TERÁ QUE COMPRAR?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 7: UM PEDREIRO QUER COMPRAR 0,50 TONELADA DE CASCALHO. O PREÇO É DE R$ 273,00 POR TONELADA. QUE OPERAÇÃO DEVEMOS FAZER PARA CALCULAR A DESPESA?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

ANEXO 4d

Referente ao aluno

Instrumento diagnóstico: perfil

1) Formação.

- [ ] Ensino Médio Regular
- [ ] Ensino Médio Técnico
- [ ] Magistério
- [ ] Educação de Jovens e Adultos (Suplência)

2) Ministra aulas?

- [ ] Sim [ ] Estadual [ ] Municipal [ ] Particular
- [ ] Não

3) Há quanto tempo você leciona ?

- [ ] Menos de 1 ano
- [ ] De 1 a 2 anos
- [ ] De 3 a 5 anos
- [ ] De 6 a 10 anos
- [ ] Mais de 10 anos

ANEXO 4e

Referente ao Aluno

Instrumento diagnóstico: concepção

2ª Parte: Elaboração de Problemas

Elabore 3 (três), problemas de Estruturas Aditivas (Adição e/ou Subtração) e outros 3 (três) de Estruturas Multiplicativas (Multiplicação e/ou Divisão). Após cada problema que você elaborou, faça comentários sobre ele do tipo:

a) quais conceitos estão inseridos, envolvidos, nesse problema que você elaborou.

b) você acha que ele é fácil ou difícil? Ele é apropriado para ser trabalhado em que série?

c) no que você acha que o problema vai contribuir para a aprendizagem de seus alunos?

Problema 1 de Estrutura Aditiva:

Comentário sobre o problema:

Problema 2 de Estrutura Aditiva:

Comentário sobre o problema:

Problema 3 de Estrutura Aditiva:

Comentário sobre o problema:

Problema 1 de Estrutura Multiplicativa:

Comentário sobre o problema:

Problema 2 de Estrutura Multiplicativa:

Comentário sobre o problema:

Problema 3 de Estrutura Multiplicativa:

Comentário sobre o problema:

ANEXO 4f

Referente ao Aluno

Instrumento diagnóstico: competência

3ª Parte: Resolução de problemas

Nas linhas seguintes, apresento alguns problemas, que versam sobre estruturas aditivas e multiplicativas.

Resolva cada um dos problemas de duas formas: a) forma convencional (aritmeticamente) e b) com um enfoque algébrico (utilizando uma incógnita).

PROBLEMA 1: EM UMA FESTA DE ANIVERSÁRIO HAVIAM 12 CRIANÇAS 7 ERAM MENINOS, QUANTAS MENINAS HAVIAM NA FESTA?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 2: MÁRIO GANHOU APENAS 20 FIGURINHAS, JOGANDO COM MARTA. TEM AGORA 45 FIGURINHAS. QUANTAS FIGURINHAS ELE TINHA ANTES DE JOGAR?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 3: KARINA TEM 13 ANOS, SUA IRMÃ KAREN TEM 8 ANOS. QUANTOS ANOS KAREN É MAIS NOVA QUE KARINA?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 4: CARLOS TINHA 32 BOLINHAS DE GUDE ANTES JOGAR COM ROBERTO. AGORA ELE TEM 17 BOLINHAS DE GUDE. O QUE OCORREU DURANTE O JOGO?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 5: JOANA QUER COMPRAR 4 BOLOS. CADA BOLO CUSTA R$ 10,00. QUANTO ELA IRÁ PAGAR PELOS BOLOS?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 6: MARCOS QUER PRESENTEAR SEUS SEIS NETOS COM BOMBONS, ELE PRETENDE DAR 3 BOMBONS A CADA UM. QUANTOS BOMBONS ELE TERÁ QUE COMPRAR?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

PROBLEMA 7: UM PEDREIRO QUER COMPRAR 0,50 TONELADA DE CASCALHO. O PREÇO É DE R$ 273,00 POR TONELADA. QUE OPERAÇÃO DEVEMOS FAZER PARA CALCULAR A DESPESA?	a) Enfoque aritmético	b) Enfoque algébrico

ANEXO 5

Avaliação dos juízes aos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa
A classificação do juiz para o problema elaborado pelos sujeitos está escrito em vermelho

Problemas de estruturas multiplicativas

Juiz 1:
Formação: Mestre em Educação Matemática,
doutorando em Educação Matemática

Pedro tem R$ 5,00 e Lia tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Lia?	Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes?	Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?
Comparação multiplicativa	Multiplicação	Combinatória

Comprei 4 caixas de ovos. Em cada caixa há 1 dúzia de ovos. Quantos ovos comprei?	Uma semana tem 7 dias. Quantos dias há em 4 semanas.	Carlos tem 6 pipas. Seu irmão tem o dobro. Quantas pipas tem seu irmão. Quantas pipas eles tem juntos?
Multiplicação	Quarta proporcional	Comparação Multiplicativa

Numa sala de aula as carteiras estão organizadas em 5 fileiras iguais. Em cada fileira há 7 carteiras. Quantas carteiras há na sala?	Na estante da sala tem 8 livros. Pedro colocou 4 vezes a quantidade de livros que havia. Qual a quantidade de livros que há agora?	Comprei uma pasta bem bonita para guardar minhas provas e paguei por ela 8 reais. Para guardar as atividades dos anos anteriores preciso ainda comprar outras 4 pastas. Quanto irei gastar?
Configuração Retangular	Comparação multiplicativa	Multiplicação

Um cérbero tem três cabeças. Cada vez que uma de suas cabeças está doendo ele tem que tomar três comprimidos. Hoje as suas três cabeças tiveram dor. Quantos comprimidos Cérbero tomou?	Faltam 28 dias para o aniversário de João. Quantas semanas faltam para o aniversário dele?	Pedro tem 4 camisetas e 2 calções para jogar futebol. De quantas maneiras diferentes ele pode compor suas peças, para se vestir para um jogo?
Quarta proporcional	Divisão quota	Combinatória

Se um livro custa R$ 17,00. Quanto custará dez livros?	Um aparelho de som custa R$ 600,00, quanto custa doze aparelhos de som?	Ao comprar um relógio de pulso, paguei R$ 120,00. Se comprasse 12 relógios pagaria?
Multiplicação	Mutiplicação	Multiplicação

Fui a feira e comprei 3 dúzias de laranjas, 2 dúzias de bananas e 1 dúzia de limão. Quantas frutas comprei ao todo?	Marli tem 7 fitas rosas e o dobro disto de fita azul. Quantas fitas azuis Marli tem?	Eu tenho 20 anos, minha mãe tem o triplo de minha idade. Quantos anos minha mãe tem?
ADIÇAO	Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa

Julia jogou dado 3 vezes e cada vez que jogou caiu no 4. Quantos pontos Julia fez?	Ana tem 20 balas quer repartir com as 4 amigas no recreio. Quantas balas ela vai dar para cada amiga?	Antonio quer comprar 5 jogos de vídeo-game. Cada jogo custa R$ 20,00. Quanto ele irá gastar?
Multiplicação	Divisão por partição	Multiplicação

Pedro foi a uma loja e comprou três camisas, um sapato e duas calças. Observe a tabela de preços: camisa R$ 20,50; sapato R$ 40,39; Calça R$ 31,29. Qual foi o valor da compra realizada por Pedro?	O aluno terá que calcular a área de seu quarto	
Multiplicação e ADIÇAO	Configuração retangular .	

Houve uma festa na escola e tinha 42 refrigerantes, João trouxe o triplo quantos refrigerantes tinha na festa?	Mamãe comprou uma dúzia de ovos para fazer um bolo. Ela dobrou a receita. Quantos ovos ela precisou colocar a mais?	Marcos ganhou R$ 30,00 (trinta reais) do seu pai. E seu irmão ganhou o dobro. Quanto seu irmão ganhou?
Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa

Tenho 5 caixas de lápis com 8	Luis comprou 3 camisas custando	(x)José tem 4 caixas com 13

lápis cada. Quantos lápis possui?	R$ 15,00. Quanto Luiz gastou?	bombons em cada uma. Ele quer dar 10 bombons para seus vizinhos. Quantos bombons ele tinha? Quantos restaram?
Multiplicação	Multiplicação	Multiplicação-Divisão por quota

Um cachorro tem 4 patas. Quantas patas teremos ao todo se tivermos 5 cachorros juntos.	João tem uma estante com 5 prateleiras. Ele guardou 6 livros em cada prateleira. Quantos livros ele guardou no total?	Paulo tem 7 carrinhos e 2 motos. Quantas rodas teremos no total?
Quarta proporcional	Multiplicação	Multiplicação e adição

Eu comi 3 pedaços de pizza meu irmão comeu o dobro. Quantos pedaços de pizzas meu irmão comeu?	Minha mãe tem hoje o triplo da minha idade, eu tenho 12 anos. Quantos anos minha mãe tem?	Tenho 36 balas e quero dividir entre meus 3 primos. Quantas balas cada um ganhará?
Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa	Divisão por partição

Na festa de aniversário de Carolaine, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo 14 crianças compareceram a festa. Quantos refrigerantes havia?	Um salão tem 5 fileiras com 4 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão.	Maria tem 14 canetas e sua amiga Paula tem 3 vezes o que Maria tem. Quantas canetas Paula tem?
Mutiplicação	Configuração retangular	Comparação Multiplicativa

Julia tem 15 dúzias de flores para distribuir em 5 vasos. Quantas flores ficaram em cada vaso?	Numa sorveteria tem 6 sabores de sorvete, e coberturas de chocolate e de morango. Quantas combinações é possível fazer se eu escolher um sabor e uma cobertura.	Eduardo tem 36 reais e seu amigo Luis tem três vezes mais. Quantos reais Luiz tem?
Divisão por partição	Combinatória	Comparação Multiplicativa

Márcia tem 12 flores e quer distribuí-las em 3 vasos. Quantas flores ela vai colocar nos vasos?	Tenho 12 rodas para montar bicicletas. Quantas bicicletas vou montar?	Numa festinha cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo 8 crianças foram a festa. Quantos refrigerantes havia?
Divisão por partição	Divisão por quota	Multiplicação

Pedro tem 8 anos e João tem o triplo da idade de Pedro. Quantos anos tem João?	Papai comprou uma televisão de tela plana em 12 prestações de R$ 125,00 cada uma. Qual o valor da televisão?	(x)Mamãe comprou uma bicicleta por R$ 250,00. Deu R$ 100,00 de entrada e parcelou o restante em 5 prestações. Qual era o valor de cada prestação.
Comparação Multiplicativa	Multiplicação	Subtração e Divisão por partição

(x)Abri uma caixa de bombons. Vi que havia 5 fileiras com 6 bombons em cada uma. Quantos bombons havia na caixa?	Uma professora de Educação Física pediu para que os alunos formassem 3 equipes para jogar queimada. Havia 36 alunos. Quantos alunos ficaram em cada equipe?	(x) Marcos e Antonio juntam figurinhas. Marcos conseguiu formar 4 montinhos com 6 figurinhas em cada um. Antonio conseguiu formar 3 montinhos. Quem tem mais montinhos?
Configuração retangular	Divisão por partição	Subtração e comparação

Comprei um vestido em uma loja e paguei em 3 vezes com parcelas de 12,00 cada uma. Quanto paguei pelo vestido?	Tenho duas blusas e 3 saias. Quantas combinações serão possíveis serem feitas?	Tenho R$ 100,00 e quero comprar um livro em quatro parcelas fixas. Quanto pagarei por cada parcela.
Multiplicação	Combinatória	Divisão por partição

(x)Dona Marta comprou 15 dúzias de ovos. Quantos ovos ela comprou?	Para fazer uma camisa são usados 8 botões. Se forem feitas 4 dessas camisas, quantos botões serão necessários?	(x)Uma sorveteria vende 620 sorvetes por dia. Quantos sorvetes vai vender em 15 dias?
Não necessita cálculo: ela comprou 15 dúzias de ovos.	Quarta proporcional	Multiplicação

Carlos tinha em sua coleção de	Se em uma casinha podem ficar 2	Catarina tem 6 lápis coloridos e

bolinhas 52 azuis e o dobro de bolinhas verdes. Quantas bolinhas verdes Carlos tem?	coelhos, de quantos coelhos preciso para distribuir em 6 casinhas? Quarta proporcional	sua amiga Lucia tem 4 vezes o que Catarina tem. Quantos lápis Lúcia tem? Comparação multiplicativa.
Comparação Multiplicativa	Quarta proporcional	Comparação Multiplicativa

Joana tem 2 duzias de flores para atribuir em 2 vasos. Quantas flores ficará em cada vaso?	Thiago tem um livro com 20 páginas ele leu 3 livros iguais. Quantas páginas ele leu?	(x)Rick tem 26 reais e seu irmão tem 3 vezes a mais que ele. Quantos reais Rick tem? Comparação multiplicativa
Divisão por partição	Multiplicação	Comparação Multiplicativa

ANEXO 6

Avaliação dos juízes aos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa

A classificação do juiz para o problema elaborado pelos sujeitos está escrito em vermelho

Problemas de estruturas multiplicativas

Juiz 2:

Formação: Mestre em Educação Matemática,
Doutorando em Educação Matemática

Pedro tem R$ 5,00 e Lia tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Lia?	Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes?	Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?
Comparação multiplicativa	Quarta Proporcional	Combinatória

Comprei 4 caixas de ovos. Em cada caixa há 1 dúzia de ovos. Quantos ovos comprei?	Uma semana tem 7 dias. Quantos dias há em 4 semanas.	Carlos tem 6 pipas. Seu irmão tem o dobro. Quantas pipas tem seu irmão. Quantas pipas eles tem juntos?
Quarta Proporciona	Quarta proporcional	Comparação Multiplicativa

Numa sala de aula as carteiras estão organizadas em 5 fileiras iguais. Em cada fileira há 7 carteiras. Quantas carteiras há na sala?	Na estante da sala tem 8 livros. Pedro colocou 4 vezes a quantidade de livros que havia. Qual a quantidade de livros que há agora?	Comprei uma pasta bem bonita para guardar minhas provas e paguei por ela 8 reais. Para guardar as atividades dos anos anteriores preciso ainda comprar outras 4 pastas. Quanto irei gastar?
Configuração Retangular	Comparação multiplicativa	Quarta proporcional

Um cérbero tem três cabeças. Cada vez que uma de suas cabeças está doendo ele tem que tomar três comprimidos. Hoje as suas três cabeças tiveram dor. Quantos comprimidos Cérbero tomou?	Faltam 28 dias para o aniversário de João. Quantas semanas faltam para o aniversário dele?	Pedro tem 4 camisetas e 2 calções para jogar futebol. De quantas maneiras diferentes ele pode compor suas peças, para se vestir para um jogo?
Quarta proporcional	Divisão quota	Combinatória

Se um livro custa R$ 17,00. Quanto custará dez livros?	Um aparelho de som custa R$ 600,00, quanto custa doze aparelhos de som?	Ao comprar um relógio de pulso, paguei R$ 120,00. Se comprasse 12 relógios pagaria?
Multiplicação	Quarta Proporcional	Quarta Proporcional

Fui a feira e comprei 3 dúzias de laranjas, 2 dúzias de bananas e 1 dúzia de limão. Quantas frutas comprei ao todo?	Marli tem 7 fitas rosas e o dobro disto de fita azul. Quantas fitas azuis Marli tem?	Eu tenho 20 anos, minha mãe tem o triplo de minha idade. Quantos anos minha mãe tem?
ADIÇAO	Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa

Julia jogou dado 3 vezes e cada vez que jogou caiu no 4. Quantos pontos Julia fez?	Ana tem 20 balas quer repartir com as 4 amigas no recreio. Quantas balas ela vai dar para cada amiga?	Antonio quer comprar 5 jogos de vídeo-game. Cada jogo custa R$ 20,00. Quanto ele irá gastar?
Multiplicação	Divisão por partição	Quarta Proporcional

Pedro foi a uma loja e comprou três camisas, um sapato e duas calças. Observe a tabela de preços: camisa R$ 20,50; sapato R$ 40,39; Calça R$ 31,29. Qual foi o valor da compra realizada por Pedro?	O aluno terá que calcular a área de seu quarto	
Multiplicação e ADIÇAO	Configuração retangular .	

Houve uma festa na escola e tinha 42 refrigerantes, João trouxe o triplo quantos refrigerantes tinha na festa?	Mamãe comprou uma dúzia de ovos para fazer um bolo. Ela dobrou a receita. Quantos ovos ela precisou colocar a mais?	Marcos ganhou R$ 30,00 (trinta reais) do seu pai. E seu irmão ganhou o dobro. Quanto seu irmão ganhou?
Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa

Tenho 5 caixas de lápis com 8 lápis cada. Quantos lápis possui?	Luis comprou 3 camisas custando R$ 15,00. Quanto Luiz gastou?	(x)José tem 4 caixas com 13 bombons em cada uma. Ele quer dar 10 bombons para seus vizinhos. Quantos bombons ele tinha? Quantos restaram?
Multiplicação	Multiplicação	Multiplicação-Divisão por quota

Um cachorro tem 4 patas. Quantas patas teremos ao todo se tivermos 5 cachorros juntos.	João tem uma estante com 5 prateleiras. Ele guardou 6 livros em cada prateleira. Quantos livros ele guardou no total?	Paulo tem 7 carrinhos e 2 motos. Quantas rodas teremos no total?
Quarta proporcional	Multiplicação	Multiplicação e adição

Eu comi 3 pedaços de pizza meu irmão comeu o dobro. Quantos pedaços de pizzas meu irmão comeu?	Minha mãe tem hoje o triplo da minha idade, eu tenho 12 anos. Quantos anos minha mãe tem?	Tenho 36 balas e quero dividir entre meus 3 primos. Quantas balas cada um ganhará?
Comparação Multiplicativa	Comparação Multiplicativa	Divisão por partição

Na festa de aniversário de Carolaine, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo 14 crianças compareceram a festa. Quantos refrigerantes havia?	Um salão tem 5 fileiras com 4 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão.	Maria tem 14 canetas e sua amiga Paula tem 3 vezes o que Maria tem. Quantas canetas Paula tem?
Mutiplicação	Configuração retangular	Comparação Multiplicativa

Julia tem 15 dúzias de flores para distribuir em 5 vasos. Quantas flores ficaram em cada vaso?	Numa sorveteria tem 6 sabores de sorvete, e coberturas de chocolate e de morango. Quantas combinações é possível fazer se eu escolher um sabor e uma cobertura.	Eduardo tem 36 reais e seu amigo Luis tem três vezes mais. Quantos reais Luiz tem?
Divisão por partição	Combinatória	Comparação Multiplicativa

Márcia tem 12 flores e quer distribuí-las em 3 vasos. Quantas flores ela vai colocar nos vasos?	Tenho 12 rodas para montar bicicletas. Quantas bicicletas vou montar?	Numa festinha cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo 8 crianças foram a festa. Quantos refrigerantes havia?
Divisão por partição	Divisão por quota	Multiplicação

Pedro tem 8 anos e João tem o triplo da idade de Pedro. Quantos anos tem João?	Papai comprou uma televisão de tela plana em 12 prestações de R$ 125,00 cada uma. Qual o valor da televisão?	(x)Mamãe comprou uma bicicleta por R$ 250,00. Deu R$ 100,00 de entrada e parcelou o restante em 5 prestações. Qual era o valor de cada prestação.
Comparação Multiplicativa	Multiplicação	Subtração e Divisão por partição

(x)Abri uma caixa de bombons. Vi que havia 5 fileiras com 6 bombons em cada uma. Quantos bombons havia na caixa?	Uma professora de Educação Física pediu para que os alunos formassem 3 equipes para jogar queimada. Havia 36 alunos. Quantos alunos ficaram em cada equipe?	(x) Marcos e Antonio juntam figurinhas. Marcos conseguiu formar 4 montinhos com 6 figurinhas em cada um. Antonio conseguiu formar 3 montinhos. Quem tem mais montinhos?
Configuração retangular	Divisão por partição	Subtração e comparação

Comprei um vestido em uma loja e paguei em 3 vezes com parcelas de 12,00 cada uma. Quanto paguei pelo vestido?	Tenho duas blusas e 3 saias. Quantas combinações serão possíveis serem feitas?	Tenho R$ 100,00 e quero comprar um livro em quatro parcelas fixas. Quanto pagarei por cada parcela.
Multiplicação	Combinatória	Divisão por partição

(x)Dona Marta comprou 15 dúzias de ovos. Quantos ovos ela comprou?	Para fazer uma camisa são usados 8 botões. Se forem feitas 4 dessas camisas, quantos botões serão necessários?	(x)Uma sorveteria vende 620 sorvetes por dia. Quantos sorvetes vai vender em 15 dias?
Não necessita cálculo: ela comprou 15 dúzias de ovos.	Quarta proporcional	Multiplicação

Carlos tinha em sua coleção de bolinhas 52 azuis e o dobro de bolinhas verdes. Quantas bolinhas verdes Carlos tem?	Se em uma casinha podem ficar 2 coelhos, de quantos coelhos preciso para distribuir em 6 casinhas? Quarta proporcional	Catarina tem 6 lápis coloridos e sua amiga Lucia tem 4 vezes o que Catarina tem. Quantos lápis Lúcia tem? Comparação multiplicativa.
Comparação Multiplicativa	Quarta proporcional	Comparação Multiplicativa

Joana tem 2 duzias de flores para atribuir em 2 vasos. Quantas flores ficará em cada vaso?	Thiago tem um livro com 20 páginas ele leu 3 livros iguais. Quantas páginas ele leu?	(x)Rick tem 26 reais e seu irmão tem 3 vezes a mais que ele. Quantos reais Rick tem? Comparação multiplicativa
Divisão por partição	Multiplicação	Comparação Multiplicativa

ANEXO 7

Avaliação dos juízes aos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa

Problemas de estruturas multiplicativas

Juiz 3: Pesquisador

Pedro tem R$ 5,00 e Lia tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Lia? Comparação multiplicativa	Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes? Multiplicação – Relação um para muitos	(x)Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes? Combinatória ou Produto Cartesiano
Comprei 4 caixas de ovos. Em cada caixa há 1 dúzia de ovos. Quantos ovos comprei? Multiplicação – Relação um para muitos	Uma semana tem 7 dias. Quantos dias há em 4 semanas. Multiplicação – Relação um para muitos	Carlos tem 6 pipas. Seu irmão tem o dobro. Quantas pipas tem seu irmão. Quantas pipas eles tem juntos? Comparação multiplicativa
Numa sala de aula as carteiras estão organizadas em 5 fileiras iguais. Em cada fileira há 7 carteiras. Quantas carteiras há na sala? Configuração retangular.	Na estante da sala tem 8 livros. Pedro colocou 4 vezes a quantidade de livros que havia. Qual a quantidade de livros que há agora? Comparação multiplicativa	Comprei uma pasta bem bonita para guardar minhas provas e paguei por ela 8 reais. Para guardar as atividades dos anos anteriores preciso ainda comprar outras 4 pastas. Quanto irei gastar? Multiplicação – Relação um para muitos
Um cérbero tem três cabeças. Cada vez que uma de suas cabeças está doendo ele tem que tomar três comprimidos. Hoje as suas três cabeças tiveram dor. Quantos comprimidos Cérbero tomou? Multiplicação – Relação um para muitos	Faltam 28 dias para o aniversário de João. Quantas sémanas faltam para o aniversário dele? Divisão por partição.	Pedro tem 4 camisetas e 2 calções para jogar futebol. De quantas maneiras diferentes ele pode compor suas peças, para se vestir para um jogo? Combinatória ou produto cartesiano
Se um livro custa R$ 17,00. Quanto custará dez livros? Multiplicação – Relação um para muitos	Um aparelho de som custa R$ 600,00, quanto custa doze aparelhos de som? Multiplicação – Relação um para muitos	Ao comprar um relógio de pulso, paguei R$ 120,00. Se comprasse 12 relógios pagaria? Multiplicação – Relação um para muitos
(x)Fui a feira e comprei 3 dúzias de laranjas, 2 dúzias de bananas e 1 dúzia de limão. Quantas frutas comprei ao todo? Multiplicação – Relação um para muitos	Marli tem 7 fitas rosas e o dobro disto de fita azul. Quantas fitas azuis Marli tem? Comparação multiplicativa	Eu tenho 20 anos, minha mãe tem o triplo de minha idade. Quantos anos minha mãe tem? Comparação multiplicativa
Julia jogou dado 3 vezes e cada vez que jogou caiu no 4. Quantos pontos Julia fez? Produto Cartesiano	Ana tem 20 balas quer repartir com as 4 amigas no recreio. Quantas balas ela vai dar para cada amiga? Divisão por quotição	Antonio quer comprar 5 jogos de vídeo-game. Cada jogo custa R$ 20,00. Quanto ele irá gastar? Multiplicação – Relação um para muitos.
(x)Pedro foi a uma loja e comprou três camisas, um sapato e duas calças. Observe a tabela de preços: camisa R$ 20,50; sapato R$ 40,39; Calça R$ 31,29. Qual foi	O aluno terá que calcular a área de seu quarto Configuração retangular.	

o valor da compra realizada por Pedro? Multiplicação – Relação um para muitos		
Houve uma festa na escola e tinha 42 refrigerantes, João trouxe o triplo quantos refrigerantes tinha na festa? Comparação multiplicativa	Mamãe comprou uma dúzia de ovos para fazer um bolo. Ela dobrou a receita. Quantos ovos ela precisou colocar a mais? Comparação multiplicativa	Marcos ganhou R$ 30,00 (trinta reais) do seu pai. E seu irmão ganhou o dobro. Quanto seu irmão ganhou?
Tenho 5 caixas de lápis com 8 lápis cada. Quantos lápis possui? Multiplicação – Relação um para muitos	Luis comprou 3 camisas custando R$ 15,00. Quanto Luiz gastou? Multiplicação – Relação um para muitos	(x)José tem 4 caixas com 13 bombons em cada uma. Ele quer dar 10 bombons para seus vizinhos. Quantos bombons ele tinha? Quantos restaram? Multiplicação – Relação um para muitos.
Um cachorro tem 4 patas. Quantas patas teremos ao todo se tivermos 5 cachorros juntos. Multiplicação – Relação um para muitos	João tem uma estante com 5 prateleiras. Ele guardou 6 livros em cada prateleira. Quantos livros ele guardou no total? Produto Cartesiano	Paulo tem 7 carrinhos e 2 motos. Quantas rodas teremos no total? Multiplicação – Relação um para muitos.
Eu comi 3 pedaços de pizza meu irmão comeu o dobro. Quantos pedaços de pizzas meu irmão comeu? Comparação multiplicativa	Minha mãe tem hoje o triplo da minha idade, eu tenho 12 anos. Quantos anos minha mãe tem? Comparação multiplicativa	Tenho 36 balas e quero dividir entre meus 3 primos. Quantas balas cada um ganhará? Divisão por partes
Na festa de aniversário de Carolaine, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo 14 crianças compareceram a festa. Quantos refrigerantes havia? Multiplicação – Relação um para muitos	Um salão tem 5 fileiras com 4 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão. Configuração retangular.	Maria tem 14 canetas e sua amiga Paula tem 3 vezes o que Maria tem. Quantas canetas Paula tem? Comparação multiplicativa
Julia tem 15 dúzias de flores para distribuir em 5 vasos. Quantas flores ficaram em cada vaso? Divisão por partição	Numa sorveteria tem 6 sabores de sorvete, e coberturas de chocolate e de morango. Quantas combinações é possível fazer se eu escolher um sabor e uma cobertura. Combinatória ou produto cartesiano	Eduardo tem 36 reais e seu amigo Luis tem três vezes mais. Quantos reais Luiz tem? Comparação Multiplicativa
Márcia tem 12 flores e quer distribuí-las em 3 vasos. Quantas flores ela vai colocar nos vasos? Divisão por partes	Tenho 12 rodas para montar bicicletas. Quantas bicicletas vou montar? Divisão por quotição	Numa festinha cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo 8 crianças foram a festa. Quantos refrigerantes havia? Multiplicação – Relação um para muitos.
Pedro tem 8 anos e João tem o triplo da idade de Pedro. Quantos anos tem João? Comparação multiplicativa	Papai comprou uma televisão de tela plana em 12 prestações de R$ 125,00 cada uma. Qual o valor da televisão? Multiplicação – Relação um para muitos	(x)Mamãe comprou uma bicicleta por R$ 250,00. Deu R$ 100,00 de entrada e parcelou o restante em 5 prestações. Qual era o valor de cada prestação.
(x)Abri uma caixa de bombons. Vi que havia 5 fileiras com 6 bombons em cada uma. Quantos bombons havia na caixa? Configuração retangular	Uma professora de Educação Física pediu para que os alunos formassem 3 equipes para jogar queimada. Havia 36 alunos. Quantos alunos ficaram em cada equipe? Divisão por partição	(x) Marcos e Antonio juntam figurinhas. Marcos conseguiu formar 4 montinhos com 6 figurinhas em cada um. Antonio conseguiu formar 3 montinhos. Quem tem mais montinhos? Multiplicação – Relação um para muitos.
Comprei um vestido em uma loja e paguei em 3 vezes com parcelas de 12,00 cada uma. Quanto paguei pelo vestido? Multiplicação – Relação um para muitos	Tenho duas blusas e 3 saias. Quantas combinações serão possíveis serem feitas? Combinatória – Produto cartesiano	Tenho R$ 100,00 e quero comprar um livro em quatro parcelas fixas. Quanto pagarei por cada parcela. Divisão por partição
(x)Dona Marta comprou 15 dúzias de ovos. Quantos ovos ela comprou? Multiplicação – Relação um para muitos	Para fazer uma camisa são usados 8 botões. Se forem feitas 4 dessas camisas, quantos botões serão necessários? Multiplicação – Relação um para muitos	(x)Uma sorveteria vende 620 sorvetes por dia. Quantos sorvetes vai vender em 15 dias? Quarta proporcional

Carlos tinha em sua coleção de bolinhas 52 azuis e o dobro de bolinhas verdes. Quantas bolinhas verdes Carlos tem? Comparação multiplicativa	Se em uma casinha podem ficar 2 coelhos, de quantos coelhos preciso para distribuir em 6 casinhas? Quarta proporcional	Catarina tem 6 lápis coloridos e sua amiga Lucia tem 4 vezes o que Catarina tem. Quantos lápis Lúcia tem? Comparação multiplicativa.
Joana tem 2 duzias de flores para atribuir em 2 vasos. Quantas flores ficará em cada vaso? Divisão por partição	Thiago tem um livro com 20 páginas ele leu 3 livros iguais. Quantas páginas ele leu? Multiplicação – Relação um para muitos	(x)Rick tem 26 reais e seu irmão tem 3 vezes a mais que ele. Quantos reais Rick tem? Comparação multiplicativa

ANEXO 8

Avaliação dos juízes aos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa
Problemas de estruturas Aditivas

Juiz 1: Formação: Doutora em Educação Matemática

Rui tem 35 anos e seu irmão tem 18 anos. Qual a diferença entre eles? Quem é o mais velho? Comparação 3ª extensão	Uma peça de fita tem 100 metros. Foram vendidos 82 metros. Quantos metros sobraram? Transformação protótipo	Papai colheu 4 dezenas de laranjas e 2 dezenas de abacates. Quantas frutas papai colheu? Composição protótipo
(x)Somando as quantias de dinheiro de Tânia, Junior e Luísa, totalizam-se 40 reais. Tânia tem ____ reais, Junior tem ____ reais. Então, pode – se afirmar que Luísa tem ____ reais. Composições sucessivas.	(x)André e Lucas fazem pipas para vender. No final de semana, André fez ____ e Lucas fez ___pipas a mais que André. Lucas fez então 27 pipas. Comparação 4ª extensão	(x)Se eu der alguns reais para Paula, ela ficará com 60 reais. Qual o dinheiro que ela tinha? Composição 1ª extensão
Mariana tinha 5 bonecas. Sua avó lhe deu 4 bonecas. Quantas bonecas ela tem agora? Composição Protótipo	Numa festa estavam 20 meninos e nenhum menina. Depois chegaram 19 meninos. Quantas crianças foram a essa festa? Composição Protótipo	Tiago tem 13 figurinhas perdeu 31. Com quantas figurinhas ficou Tiago? Inconsistente. Uma tentativa de Transformação Protótipo
Se uma professora possui três canetas e 4 lapiseiras. Quantos objetos essa professora possui? Composição Protótipo	João possui três camisas e ganha mais seis camisas. Quantas camisas ele tem? Transformação Protótipo	Antonio comprou dois pares de sapatos e ganhou três pares no seu aniversário. Quantos pares de sapatos ele tem agora. Transformação protótipo
Vou fazer uma festa e preciso comprar os salgados e doces, então comprarei 200 coxinhas, 100 kibes e 200 bolinhos de queijo e na parte dos doces 300 brigadeiros, 200 beijinhos e 50 cajuzinhos. Quantos doces e salgados vou comprar? Composições sucessivas	Em uma sala há meninos e meninas, sabendo que 12 são meninos e 22 meninas. Quantos alunos terei na sala? Composição Protótipo	Uma escola terá 5 classes de 1ª série, 4 classes de 2ª série e 2 classes de 3ª série. Quantas classes terá esta escola? Composição Protótipo.
Maria ganhou lápis preto coloridos: 2 azuis, 1 verde, 3 amarelos e 2 rosas. Quantos lápis preto coloridos ela ganhou? Composições sucessivas	João tem oito bolinhas de gude, jogou com Pedro e ganhou nas duas partidas três bolinhas. Quantas bolinhas tem João agora? Transformação Protótipo	Eduardo tem cinco chocolates deu para sua irmã 2. Com quantos chocolates ele ficou? Transformação Protótipo
(x)Pedro foi a uma loja e comprou três camisas, um sapato e duas calças. Observe a tabela de preços: camisa R$ 20,50; sapato R$ 40,39, Calça R$ 31,29. Qual foi o valor da compra realizada por Pedro? Composições sucessivas	Podemos usar a mesma situação do problema 1 e acrescentar a seguinte pergunta. Pedro pagou a compra com duas notas de R$ 100,00. Qual foi o troco? Composição Protótipo	O aluno terá de medir o perímetro de seu quarto. Composições sucessivas
João tem 50 laranjas e seu irmão mais 15. Quantas laranjas tem ao todo? Composição protótipo	Maria tinha 36 bolinhos deu 18 para sua prima. Quantos bolinhos Maria ficou? Transformação Protótipo	Pedro tinha 43 carrinhos. Emprestou 19 para seu irmão. Ficou com ____carrinhos

Ana ganhou 12 balas e João 13. Quantas balas haviam no pacote? Composição protótipo	Zeca tinha 32 selos, ganhou mais 10. Com quantos selos Zeca ficou? Transformação Protótipo	Carlos comprou 15 livros e depois mais 3. Ele resolveu dar 5 livros para seus primos. Quantos livros ele tinha e com quantos livros ele ficou? Composição de transformações
(x)Das 35 balas que Luiza tem, 15 são de mel e as restantes são de hortelã. Você acha que ela tem mais balas de mel ou hortelã? Quantas são as de hortelã? Composição 1ª Extensão	(x)Em 2007 eu tinha 26 bolas de árvore de Natal. Neste ano de 2008, resolvi que precisaria ao todo 40 bolas para enfeitar minha árvore. Quantas bolas preciso comprar? Transformação Protótipo	Lucas faz coleção de adesivos. Ele possui 2 dezenas de adesivos de carros, 16 adesivos de Homem-Aranha e 27 adesivos de times de futebol. Quantos adesivos Lucas tem ao todo? Protótipo
Meu pai tem hoje 34 anos. Quantos anos ele terá daqui a 6 anos? Transformação Protótipo	Tenho 20 bombons ganhei de minha tia mais 12. Com quantos bombons eu fiquei? Transformação Protótipo	Tenho um bolo com 12 pedaços, dei 3 para meus colegas. Quantos pedaços ainda tenho? Transformação Protótipo.
Mariana tinha 38 reais que havia ganho de sua mãe. No seu aniversário ganhou mais 55 reais de sua avó. Com quantos reais Mariana ficou? Composição Protótipo	Jessica tinha 17 figurinhas, ganhou 19 no jogo com seu primo Alberto. Com quantas figurinhas ele ficou? Transformação Protótipo	Em uma classe de 28 alunos, há alguns meninos e 13 meninas. Quantos são os meninos? Composição 1ª Extensão
Julio tem 15 figurinhas no seu caderno. Ganhou algumas e agora tem 33. Quantas figurinhas Julio ganhou? Transformação – 1ª Extensão	Lucia tem 25 reais e sua irmã 17 reais a mais que ela. Quantos reais a irmã de Lúcia tem? Comparação - 2ª Extensão	Em uma sala de Aula estão matriculados 35 alunos. Se 18 são meninos, quantas são as meninas? Composição – 1ª Extensão
(x)João começou o jogo com algumas bolinhas de gude. Na 1ª rodada ganhou 12 e na 2ª jogada perdeu 5. Terminou o jogo com 26 bolinhas de gude. Quantas bolinhas João tinha no começo do jogo? Composição de Transformações	Num passeio ao zoológico, foram 300 alunos da escola. 230 eram meninas. Quantos eram os meninos? Composição – 1ª extensão	Mamãe foi a uma feira com R$ 100,00. Comprou uma camiseta por R$ 12,00, uma calça por R$ 35,00 e uma bota por R$ 22,00. Quanto mamãe gastou e quanto recebeu de troco? Composições sucessivas.
Marcelo ganhou de seus tios 56 figurinhas para colocar em seu álbum. Ele já colou 2 dezenas. Quantas figurinhas ainda faltam para ele colar? Composição 1ª extensão	Em uma granja havia uma centena de galinhas e meia centena de galos. Quantas aves haviam nesta granja? Composição Protótipo	Na banca de um feirante havia 85 laranjas e abacaxis. No final da tarde ele vendeu 32 frutas. Qual o total de frutas antes da venda? Quantas frutas sobraram após a venda? Transformação – 1ª extensão
João foi ao supermercado e gastou R$ 20,00, foi a padaria e gastou 38,00. Quanto João gastou ao todo? Composição Protótipo	Maria pesa 32 kg e Suzana pesa 35 kg. Qual a diferença de pesos entre elas? Comparação – 3ª extensão	Se eu encher uma jarra com 20 litros de suco e depois retirar 10 litros, quantos litros de suco ficará a jarra? Transformação protótipo
Uma fábrica de bicicletas fabricou 735 bicicletas. No mês passado. Deveria ter fabricado 1.000. Quantas ficaram faltando? Comparação – 3ª extensão	Pedro gastou 17 reais comprando rosas para a mãe. Ainda ficou com 13 reais. Quantos reais ele tinha? Transformação 4ª extensão	Norberto tinha 1.250 selos em sua coleção. Comprou mais 385 selos e ganhou 217 selos de alguns amigos. Com quantos selos ele ficou? Composições de Transformações
Num aquário há 13 peixinhos vermelhos e 9 amarelos. Quantos peixinhos há no aquário? Composição Protótipo	Carla tinha em sua coleção 38 selos. Conseguiu mais alguns e ficou com 45. Quantos selos Carla conseguiu? Transformação 1ª Extensão	Se Paulo tem 17 anos e João tem 5 anos a mais que Paulo. Quantos anos tem João? Comparação 4ª extensão
Marcos tem 13 adesivos no seu caderno ganhou alguns e agora tem 33. Quantos ele ganhou a mais? Transformação Protótipo	Carlos tem 22,00 reais e sua irmã 17,00 reais a mais que ele. Quantos reais a irmã de Carlos tem? Comparação 2ª extensão	Em uma escola tem um time de vôlei com 36 alunos, 18 são meninas. Quantos são os meninos? Composição Protótipo

Em um aquário há 3 peixinhos azuis e vermelhos. No total são 8 peixinhos. Quantos peixinhos azuis há no aquário? Composição 1ª extensão.	Ana tem 14 anos, sua irmã tem 4 anos. Quantos anos Ana tem acima de sua irmã? Composição – 3ª Extensão	João possui 8 figurinhas agora tem 13 depois da jogada com seu amigo. Quantas ele ganhou? Transformação 3ª extensão

ANEXO 9

Avaliação dos juízes aos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa

Problemas de estruturas Aditivas

Juiz 3: Formação: Mestre em Educação Matemática
Doutoranda em Educação Matemática.

Rui tem 35 anos e seu irmão tem 18 anos. Qual a diferença entre eles? Quem é o mais velho? Comparação 3ª extensão	Uma peça de fita tem 100 metros. Foram vendidos 82 metros. Quantos metros sobraram? Transformação protótipo	Papai colheu 4 dezenas de laranjas e 2 dezenas de abacates. Quantas frutas papai colheu? Composição protótipo
(x)Somando as quantias de dinheiro de Tânia, Junior e Luísa, totalizam-se 40 reais. Tânia tem ____ reais, Junior tem ____ reais. Então, pode – se afirmar que Luísa tem ____ reais. Inconsistente.	(x)André e Lucas fazem pipas para vender. No final de semana, André fez ____ e Lucas fez ___pipas a mais que André. Lucas fez então 27 pipas. Comparação 4ª extensão	(x)Se eu der alguns reais para Paula, ela ficará com 60 reais. Qual o dinheiro que ela tinha? Inconsistente
Mariana tinha 5 bonecas. Sua avó lhe deu 4 bonecas. Quantas bonecas ela tem agora? Composição Protótipo	Numa festa estavam 20 meninos e nenhum menina. Depois chegaram 19 meninos. Quantas crianças foram a essa festa? Composição Protótipo	Tiago tem 13 figurinhas perdeu 31. Com quantas figurinhas ficou Tiago? Inconsistente. Uma tentativa de Transformação Protótipo
Se uma professora possui três canetas e 4 lapiseiras. Quantos objetos essa professora possui? Composição Protótipo	João possui três camisas e ganha mais seis camisas. Quantas camisas ele tem? Transformação Protótipo	Antonio comprou dois pares de sapatos e ganhou três pares no seu aniversário. Quantos pares de sapatos ele tem agora. Transformação protótipo
Vou fazer uma festa e preciso comprar os salgados e doces, então comprarei 200 coxinhas, 100 kibes e 200 bolinhos de queijo e na parte dos doces 300 brigadeiros, 200 beijinhos e 50 cajuzinhos. Quantos doces e salgados vou comprar? Composições sucessivas	Em uma sala há meninos e meninas, sabendo que 12 são meninos e 22 meninas. Quantos alunos terei na sala? Composição Protótipo	Uma escola terá 5 classes de 1ª série, 4 classes de 2ª série e 2 classes de 3ª série. Quantas classes terá esta escola? Composição Protótipo.
Maria ganhou lápis preto coloridos: 2 azuis, 1 verde, 3 amarelos e 2 rosas. Quantos lápis preto coloridos ela ganhou? Composições sucessivas	João tem oito bolinhas de gude, jogou com Pedro e ganhou nas duas partidas três bolinhas. Quantas bolinhas tem João agora? Inconsistente	Eduardo tem cinco chocolates deu para sua irmã 2. Com quantos chocolates ele ficou? Inconsistente
(x)Pedro foi a uma loja e comprou três camisas, um sapato e duas calças. Observe a tabela de preços: camisa R$ 20,50; sapato R$ 40,39, Calça R$ 31,29. Qual foi o valor da compra realizada por Pedro? Composições sucessivas	Podemos usar a mesma situação do problema 1 e acrescentar a seguinte pergunta. Pedro pagou a compra com duas notas de R$ 100,00. Qual foi o troco? Composição Protótipo	O aluno terá de medir o perímetro de seu quarto. Composições sucessivas
João tem 50 laranjas e seu irmão mais 15. Quantas laranjas tem ao todo? Composição protótipo	Maria tinha 36 bolinhos deu 18 para sua prima. Quantos bolinhos Maria ficou? Transformação Protótipo	Pedro tinha 43 carrinhos. Emprestou 19 para seu irmão. Ficou com ____carrinhos Transformação Protótipo
Ana ganhou 12 balas e João 13. Quantas balas haviam no pacote? Composição protótipo	Zeca tinha 32 selos, ganhou mais 10. Com quantos selos Zeca ficou? Transformação Protótipo	Carlos comprou 15 livros e depois mais 3. Ele resolveu dar 5 livros para seus primos. Quantos livros ele tinha e com quantos livros ele ficou? Composição de transformações

(x)Das 35 balas que Luiza tem, 15 são de mel e as restantes são de hortelã. Você acha que ela tem mais balas de mel ou hortelã? Quantas são as de hortelã? Composição 1ª Extensão	(x)Em 2007 eu tinha 26 bolas de árvore de Natal. Neste ano de 2008, resolvi que precisaria ao todo 40 bolas para enfeitar minha árvore. Quantas bolas preciso comprar? Transformação Protótipo	Lucas faz coleção de adesivos. Ele possui 2 dezenas de adesivos de carros, 16 adesivos de Homem-Aranha e 27 adesivos de times de futebol. Quantos adesivos Lucas tem ao todo? Protótipo
Meu pai tem hoje 34 anos. Quantos anos ele terá daqui a 6 anos? Transformação Protótipo	Tenho 20 bombons ganhei de minha tia mais 12. Com quantos bombons eu fiquei? Transformação Protótipo	Tenho um bolo com 12 pedaços, dei 3 para meus colegas. Quantos pedaços ainda tenho? Transformação Protótipo.
Mariana tinha 38 reais que havia ganho de sua mãe. No seu aniversário ganhou mais 55 reais de sua avó. Com quantos reais Mariana ficou? Composição Protótipo	Jessica tinha 17 figurinhas, ganhou 19 no jogo com seu primo Alberto. Com quantas figurinhas ele ficou? Transformação Protótipo	Em uma classe de 28 alunos, há alguns meninos e 13 meninas. Quantos são os meninos? Composição 1ª Extensão
Julio tem 15 figurinhas no seu caderno. Ganhou algumas e agora tem 33. Quantas figurinhas Julio ganhou? Transformação – 1ª Extensão	Lucia tem 25 reais e sua irmã 17 reais a mais que ela. Quantos reais a irmã de Lúcia tem? Comparação - 2ª Extensão	Em uma sala de Aula estão matriculados 35 alunos. Se 18 são meninos, quantas são as meninas? Composição – 1ª Extensão
(x)João começou o jogo com algumas bolinhas de gude. Na 1ª rodada ganhou 12 e na 2ª jogada perdeu 5. Terminou o jogo com 26 bolinhas de gude. Quantas bolinhas João tinha no começo do jogo? Composição de Transformações	Num passeio ao zoológico, foram 300 alunos da escola. 230 eram meninas. Quantos eram os meninos? Composição – 1ª extensão	Mamãe foi a uma feira com R$ 100,00. Comprou uma camiseta por R$ 12,00, uma calça por R$ 35,00 e uma bota por R$ 22,00. Quanto mamãe gastou e quanto recebeu de troco? Composições sucessivas.
Marcelo ganhou de seus tios 56 figurinhas para colocar em seu álbum. Ele já colou 2 dezenas. Quantas figurinhas ainda faltam para ele colar? Composição 1ª extensão	Em uma granja havia uma centena de galinhas e meia centena de galos. Quantas aves haviam nesta granja? Composição Protótipo	Na banca de um feirante havia 85 laranjas e abacaxis. No final da tarde ele vendeu 32 frutas. Qual o total de frutas antes da venda? Quantas frutas sobraram após a venda? Transformação – 1ª extensão
João foi ao supermercado e gastou R$ 20,00, foi a padaria e gastou 38,00. Quanto João gastou ao todo? Composição Protótipo	Maria pesa 32 kg e Suzana pesa 35 kg. Qual a diferença de pesos entre elas? Comparação – 3ª extensão	Se eu encher uma jarra com 20 litros de suco e depois retirar 10 litros, quantos litros de suco ficará a jarra? Transformação protótipo

Uma fábrica de bicicletas fabricou 735 bicicletas. No mês passado. Deveria ter fabricado 1.000. Quantas ficaram faltando? Comparação – 3ª extensão	Pedro gastou 17 reais comprando rosas para a mãe. Ainda ficou com 13 reais. Quantos reais ele tinha? Transformação 4ª extensão	Norberto tinha 1.250 selos em sua coleção. Comprou mais 385 selos e ganhou 217 selos de alguns amigos. Com quantos selos ele ficou? Composições de Transformações
Num aquário há 13 peixinhos vermelhos e 9 amarelos. Quantos peixinhos há no aquário? Composição Protótipo	Carla tinha em sua coleção 38 selos. Conseguiu mais alguns e ficou com 45. Quantos selos Carla conseguiu? Transformação 1ª Extensão	Se Paulo tem 17 anos e João tem 5 anos a mais que Paulo. Quantos anos tem João? Comparação 4ª extensão
Marcos tem 13 adesivos no seu caderno ganhou alguns e agora tem 33. Quantos ele ganhou a mais? Transformação Protótipo	Carlos tem 22,00 reais e sua irmã 17,00 reais a mais que ele. Quantos reais a irmã de Carlos tem? Comparação 2ª extensão	Em uma escola tem um time de vôlei com 36 alunos, 18 são meninas. Quantos são os meninos? Composição Protótipo
Em um aquário há 3 peixinhos azuis e vermelhos. No total são 8 peixinhos. Quantos peixinhos azuis há no aquário? Composição 1ª extensão.	Ana tem 14 anos, sua irmã tem 4 anos. Quantos anos Ana tem acima de sua irmã? Composição – 3ª Extensão	João possui 8 figurinhas agora tem 13 depois da jogada com seu amigo. Quantas ele ganhou? Transformação 3ª extensão

ANEXO 10

Avaliação dos juízes aos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa

Problemas de estruturas Aditivas

Juiz 3: Pesquisador

Rui tem 35 anos e seu irmão tem 18 anos. Qual a diferença entre eles? Quem é o mais velho? Comparação 3ª extensão	Uma peça de fita tem 100 metros. Foram vendidos 82 metros. Quantos metros sobraram? Transformação protótipo	Papai colheu 4 dezenas de laranjas e 2 dezenas de abacates. Quantas frutas papai colheu? Composição protótipo
(x)Somando as quantias de dinheiro de Tânia, Junior e Luísa, totalizam-se 40 reais. Tânia tem ____ reais, Junior tem ____ reais. Então, pode – se afirmar que Luísa tem ____ reais. Inconsistente.	(x)André e Lucas fazem pipas para vender. No final de semana, André fez ____ e Lucas fez ___pipas a mais que André. Lucas fez então 27 pipas. Comparação 4ª extensão	(x)Se eu der alguns reais para Paula, ela ficará com 60 reais. Qual o dinheiro que ela tinha? Inconsistente
Mariana tinha 5 bonecas. Sua avó lhe deu 4 bonecas. Quantas bonecas ela tem agora? Composição Protótipo	Numa festa estavam 20 meninos e nenhum menina. Depois chegaram 19 meninos. Quantas crianças foram a essa festa? Composição Protótipo	Tiago tem 13 figurinhas perdeu 31. Com quantas figurinhas ficou Tiago? Inconsistente. Uma tentativa de Transformação Protótipo
Se uma professora possui três canetas e 4 lapiseiras. Quantos objetos essa professora possui? Composição Protótipo	João possui três camisas e ganha mais seis camisas. Quantas camisas ele tem? Transformação Protótipo	Antonio comprou dois pares de sapatos e ganhou três pares no seu aniversário. Quantos pares de sapatos ele tem agora. Transformação protótipo
Vou fazer uma festa e preciso comprar os salgados e doces, então comprarei 200 coxinhas, 100 kibes e 200 bolinhos de queijo e na parte dos doces 300 brigadeiros, 200 beijinhos e 50 cajuzinhos. Quantos doces e salgados vou comprar? Composições sucessivas	Em uma sala há meninos e meninas, sabendo que 12 são meninos e 22 meninas. Quantos alunos terei na sala? Composição Protótipo	Uma escola terá 5 classes de 1ª série, 4 classes de 2ª série e 2 classes de 3ª série. Quantas classes terá esta escola? Composição Protótipo.
Maria ganhou lápis preto coloridos: 2 azuis, 1 verde, 3 amarelos e 2 rosas. Quantos lápis preto coloridos ela ganhou? Composições sucessivas	João tem oito bolinhas de gude, jogou com Pedro e ganhou nas duas partidas três bolinhas. Quantas bolinhas tem João agora? Inconsistente	Eduardo tem cinco chocolátes deu para sua irmã 2. Com quantos chocolates ele ficou? Inconsistente
(x)Pedro foi a uma loja e comprou três camisas, um sapato e duas calças. Observe a tabela de preços: camisa R$ 20,50; sapato R$ 40,39, Calça R$ 31,29. Qual foi o valor da compra realizada por Pedro? Composições sucessivas	Podemos usar a mesma situação do problema 1 e acrescentar a seguinte pergunta. Pedro pagou a compra com duas notas de R$ 100,00. Qual foi o troco? Composição Protótipo	O aluno terá de medir o perímetro de seu quarto. Composições sucessivas
João tem 50 laranjas e seu irmão mais 15. Quantas laranjas tem ao todo? Composição protótipo	Maria tinha 36 bolinhos deu 18 para sua prima. Quantos bolinhos Maria ficou? Transformação Protótipo	Pedro tinha 43 carrinhos. Emprestou 19 para seu irmão. Ficou com ____carrinhos Transformação Protótipo
Ana ganhou 12 balas e João 13. Quantas balas haviam no pacote? Composição protótipo	Zeca tinha 32 selos, ganhou mais 10. Com quantos selos Zeca ficou? Transformação Protótipo	Carlos comprou 15 livros e depois mais 3. Ele resolveu dar 5 livros para seus primos. Quantos livros ele tinha e com quantos livros ele ficou? Composição de transformações
(x)Das 35 balas que Luiza tem, 15 são de mel e as restantes são de hortelã. Você acha que ela tem mais balas de mel ou hortelã? Quantas são as de hortelã? Composição 1ª Extensão	(x)Em 2007 eu tinha 26 bolas de árvore de Natal. Neste ano de 2008, resolvi que precisaria ao todo 40 bolas para enfeitar minha árvore. Quantas bolas preciso comprar? Transformação Protótipo	Lucas faz coleção de adesivos. Ele possui 2 dezenas de adesivos de carros, 16 adesivos de Homem-Aranha e 27 adesivos de times de futebol. Quantos adesivos Lucas tem ao todo? Protótipo

Meu pai tem hoje 34 anos. Quantos anos ele terá daqui a 6 anos? Transformação Protótipo	Tenho 20 bombons ganhei de minha tia mais 12. Com quantos bombons eu fiquei? Transformação Protótipo	Tenho um bolo com 12 pedaços, dei 3 para meus colegas. Quantos pedaços ainda tenho? Transformação Protótipo.
Mariana tinha 38 reais que havia ganho de sua mãe. No seu aniversário ganhou mais 55 reais de sua avó. Com quantos reais Mariana ficou? Composição Protótipo	Jessica tinha 17 figurinhas, ganhou 19 no jogo com seu primo Alberto. Com quantas figurinhas ele ficou? Transformação Protótipo	Em uma classe de 28 alunos, há alguns meninos e 13 meninas. Quantos são os meninos? Composição 1ª Extensão
Julio tem 15 figurinhas no seu caderno. Ganhou algumas e agora tem 33. Quantas figurinhas Julio ganhou? Transformação – 1ª Extensão	Lucia tem 25 reais e sua irmã 17 reais a mais que ela. Quantos reais a irmã de Lúcia tem? Comparação - 2ª Extensão	Em uma sala de Aula estão matriculados 35 alunos. Se 18 são meninos, quantas são as meninas? Composição – 1ª Extensão
(x)João começou o jogo com algumas bolinhas de gude. Na 1ª rodada ganhou 12 e na 2ª jogada perdeu 5. Terminou o jogo com 26 bolinhas de gude. Quantas bolinhas João tinha no começo do jogo? Composição de Transformações	Num passeio ao zoológico, foram 300 alunos da escola. 230 eram meninas. Quantos eram os meninos? Composição – 1ª extensão	Mamãe foi a uma feira com R$ 100,00. Comprou uma camiseta por R$ 12,00, uma calça por R$ 35,00 e uma bota por R$ 22,00. Quanto mamãe gastou e quanto recebeu de troco? Composições sucessivas.
Marcelo ganhou de seus tios 56 figurinhas para colocar em seu álbum. Ele já colou 2 dezenas. Quantas figurinhas ainda faltam para ele colar? Composição 1ª extensão	Em uma granja havia uma centena de galinhas e meia centena de galos. Quantas aves haviam nesta granja? Composição Protótipo	Na banca de um feirante havia 85 laranjas e abacaxis. No final da tarde ele vendeu 32 frutas. Qual o total de frutas antes da venda? Quantas frutas sobraram após a venda? Transformação – 1ª extensão
João foi ao supermercado e gastou R$ 20,00, foi a padaria e gastou 38,00. Quanto João gastou ao todo? Composição Protótipo	Maria pesa 32 kg e Suzana pesa 35 kg. Qual a diferença de pesos entre elas? Comparação – 3ª extensão	Se eu encher uma jarra com 20 litros de suco e depois retirar 10 litros, quantos litros de suco ficará a jarra? Transformação protótipo
Uma fábrica de bicicletas fabricou 735 bicicletas. No mês passado. Deveria ter fabricado 1.000. Quantas ficaram faltando? Comparação – 3ª extensão	Pedro gastou 17 reais comprando rosas para a mãe. Ainda ficou com 13 reais. Quantos reais ele tinha? Transformação 4ª extensão	Norberto tinha 1.250 selos em sua coleção. Comprou mais 385 selos e ganhou 217 selos de alguns amigos. Com quantos selos ele ficou? Composições de Transformações
Num aquário há 13 peixinhos vermelhos e 9 amarelos. Quantos peixinhos há no aquário? Composição Protótipo	Carla tinha em sua coleção 38 selos. Conseguiu mais alguns e ficou com 45. Quantos selos Carla conseguiu? Transformação 1ª Extensão	Se Paulo tem 17 anos e João tem 5 anos a mais que Paulo. Quantos anos tem João? Comparação 4ª extensão
Marcos tem 13 adesivos no seu caderno ganhou alguns e agora tem 33. Quantos ele ganhou a mais? Transformação Protótipo	Carlos tem 22,00 reais e sua irmã 17,00 reais a mais que ele. Quantos reais a irmã de Carlos tem? Comparação 2ª extensão	Em uma escola tem um time de vôlei com 36 alunos, 18 são meninas. Quantos são os meninos? Composição Protótipo
Em um aquário há 3 peixinhos azuis e vermelhos. No total são 8 peixinhos. Quantos peixinhos azuis há no aquário? Composição 1ª extensão.	Ana tem 14 anos, sua irmã tem 4 anos. Quantos anos Ana tem acima de sua irmã? Composição – 3ª Extensão	João possui 8 figurinhas agora tem 13 depois da jogada com seu amigo. Quantas ele ganhou? Transformação 3ª extensão

ANEXO 11

Avaliação dos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa
Problemas de estruturas Aditivas

Juiz: Pesquisador

PROBLEMAS DE ESTRUTURAS ADITIVAS - ALUNOS		
(A1)Helena tem uma papelaria. No início do período escolar ela comprou 3.425 cadernos do tipo espiral e 5.235 cadernos do tipo brochura. Qual é o total de cadernos comprados por Helena?	Paulinho tem 78 bolas. Dessas, 34 são coloridas. Quantas bolas não são coloridas?	Ana tem 172 centímetros de altura. Paula tem 156 centímetros de altura. Qual é a diferença entre a altura de Ana e a de Paula?
Composição Protótipo	Composição 1ª Extensão	Comparação 3ª Extensão
(A2)Em uma caixa de madeira havia 2 dezenas de bolinhas, Mateus colocou mais 1 dezena e Laurinha 5 unidades. Quantas bolinhas têm no total dentro da caixa?	Marcos foi ao shopping Center para passear. Chegando lá gastou R$ 5,00 com a entrada do cinema e R$ 7,00 com pipoca e refrigerante. Quanto ele gastou neste passeio?	Fui à feira com R$ 10,00. Comprei dois pastéis por R$ 5,00 e um suco por R$ 2,00. Quanto me restou?
Composição Protótipo	Composição Protótipo	Transformação de Composições
(A3)João foi ao supermercado comprar balas. Comprou 5 balas e ao encontrar-se com Pedro que também havia comprado 5 balas, resolveram juntá-las. Com quantas balas eles ficaram?	João comeu 2 balas das 5 que havia comprado. Quantas balas sobraram?	Maria gastou R$ 149,00 para comprar uma fita de vídeo por R$ 68,00 e um livro. Qual é o preço do livro, se recebeu R$ 12,00 de troco?
Composição Protótipo	Transformação Protótipo	Transformações de Composições
(A4)Kelvin tem 145 figurinhas em sua coleção, Victor tem 20 a mais. Quantas figurinhas tem Victor?	Paulo já leu 85 páginas de um livro com 197 páginas. Quantas páginas faltam para ele terminar de ler esse livro?	Duas classes de segunda série participam de uma Olimpíada de Matemática. Uma das classes tem 34 alunos e a outra, 43. Quantos alunos de segunda série participam dessa Olimpíada?
Comparação 2ª Extensão	Composição 1ª Ext.	Composição Protótipo
(A5)Gustavo tem uma coleção de carrinhos com 10 carros e ganhou de presente de aniversário mais 5 carrinhos. Com quantos carrinhos ficou?	Marcos começou um jogo com 31 bolinhas de gude. Na primeira partida ganhou 19 e ao terminar a segunda partida estava com 40 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?	Paulo tem algumas balas, Marina tem 18 balas a mais do que ele. Sabendo que Paulo tem 36 balas. Quantas balas têm Marina?
Transformação Protótipo	Transformação Protótipo	Comparação 4ª Ext.
(A6)Na fazenda do vovô há 242 pintinhos, 104 patinhos e 202 coelhinhos. Quantos bichinhos têm na fazenda do vovô?	Luís tem 216 figurinhas. Henrique tem 78 figurinhas a mais que Luís. Quantas figurinhas têm Henrique?	João ganhou de seu pai uma coleção com 24 carrinhos e perdeu 5 carrinhos da sua coleção. Quantos carrinhos restaram da coleção de João?
Composição Protótipo	Comparação 2ª Extensão	Transformação Protótipo
(A7)Cida trabalha numa fábrica de doces. Ela faz pacote de balas colocando em cada pacote as seguintes quantias: 10 balas sabor morango, 8 balas sabor abacaxi, 12 balas sabor laranja, 8 balas sabor limão. Quantas balas há, no total, em cada pacote?	Dos vinte pastéis que Cida colocou na mesa, nove já foram consumidos. Quantos ainda restam?	
Composição Protótipo	Composição 1ª Ext.	
(A8) Renata ganhou um livro de histórias. Já leu 135 páginas do livro e ainda faltam 86 para terminar. Quantas páginas têm o livro?	Solange tem 48 bolas de gude. Miguel tem 18 bolinhas de gude. Quantas bolas Solange têm a mais que Miguel?	Em um pasto havia 789 bois. Foram vendidos 507. Quantos bois há agora no pasto?
Composição 1ª Ext.	Comparação 3ª Ext.	Transformação protótipo
(A9) Luis tinha 8 bolinhas de gude,	Antonio compareceu a 15 aulas de	Paulo tinha 5 pipas. Ganhou 3 de

em um jogo ganhou de Gustavo 15. Com quantas ele ficou?	judô, sabendo que durante o curso teve 22 aulas, em quantas ele faltou?	seu pai. Ao empinar perdeu 2. Em quantas pipas Paulo aumentou?
Composição Protótipo	Composição 1ª Ext.	Transformação Protótipo

(A10)Osmar e o pai compraram três dúzias de ovos de codorna e uma dúzia de ovos de galinha. Quantos ovos compraram ao todo?	Ao sair de uma estação, um trem levava 356 passageiros. Na estação seguinte, desceram 142 passageiros. Se nenhum passageiro subiu no trem nessa estação, quantos passageiros seguiram a viagem?	
Composição Protótipo	Transformação Protótipo	

(A11)Marina comprou 3 livros. Dois livros custaram 9 reais cada um e o outro custou 5 reais. Quanto ele pagou pelos 3 livros?	Quando Oswaldo abriu a papelaria, pela manhã, havia 56 cadernos na prateleira. Durante o dia vendeu 13. Ao fechar a loja. Quantos cadernos havia na prateleira?	
Composição Protótipo	Transformação Protótipo	

(A12)Marcos mora perto da escola onde estuda, e por isso faz o trajeto a pé. De sua casa até a escola são 600 metros de distância. Quantos metros Marcos anda por dia neste trajeto?	Participaram das festividades em homenagem a Nossa Senhora dos Navegantes 8500 turistas. Desses, 3200 eram turistas estrangeiros. Quantos turistas eram brasileiros?	Tenho nove bolinhas nas cores azuis e verdes. Quatro delas são azuis. Quantas são verdes?
Composição Protótipo	Composição 1ª Extensão	Composição 1ª Extensão

(A13)Na lagoa havia 9 patinhos. Chegaram mais 5. Quantos patinhos estão na lagoa?	Mário tinha 9 figurinhas. Deu 3 figurinhas ao amigo. Com quantas figurinhas Mário ficou?	Mamãe recolheu 9 ovos no galinheiro. Usou 2. Quantos ovos restaram?
Composição Protótipo	Transformação Protótipo	Composição 1ª Extensão

(A14)Luís tinha R$ 300,00 em caixa e pagou no concerto da bicicleta R$ 250,00, passou no sacolão gastou R$ 8,00 em três quilos de cenoura, e R$ 7,50 em quatro quilos de batata e R$ 4,00 em três abacaxis. Quanto que Luís gastou nessa compra?	João possui 10 quilos de sal, resolveu dar para o colega 4 quilos. Com quantos quilos de sal ele ficou?	
Transformação de composições	Transformação Protótipo	

(A15)Vinicius tem 5 carrinhos e João Pedro 3. Quantos carrinhos têm os dois juntos?	Hellen tem 4 camisetas e Juliana tem 3 a mais que ela. Quantas camisetas tem Juliana?	
Composição Protótipo	Comparação 3ª Ext.	

(A16)Na cesta de frutas tem 6 bananas e 5 laranjas. Quantas frutas tem na cesta?	Numa contagem de alunos em uma sala de aula, verificou-se que há 18 meninas. Qual a quantidade de meninos na sala sabendo-se que o total é de 40 alunos?	
Composição Protótipo	Composição 1ª Extensão	

(A17)Mariana tinha em sua coleção de cartões 97 cartões, ganhou de sua mãe mais 39, com quantos cartões ela ficou?	Filipe tinha 12 bolinhas e deu 7 para seu irmão. Com quantas bolinhas Filipe ficou?	Na garagem de um prédio há vagas para 20 carros. Já estão estacionados 15 carros. Quantas vagas ainda estão vazias?
Composição Protótipo	Transformação Protótipo	Composição 1ª Extensão

ANEXO 12

Avaliação dos problemas elaborados pelos sujeitos da pesquisa

Problemas de estruturas Multiplicativas

Juiz: Pesquisador

PROBLEMAS DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS - ALUNOS		
(A1) A quantia de 72 reais deverá ser repartida igualmente entre 3 pessoas. Qual a quantia que cada pessoa vai receber?	Uma escola ganhou de uma editora 624 livros de literatura. A direção da escola decide distribuí-los igualmente entre 4 classes. Quantos livros cada classe vai receber?	Para se fazer uma mureta foram usados 1650 tijolos. Quantos tijolos seriam usados para levantar 3 muretas iguais a essa?
Divisão por partição	Divisão por partição	Quarta proporcional

(A2) Ganhei 3 caixas de lápis de cor contendo 12 lápis em cada caixa. Quantos lápis no total?	Nas olimpíadas de Pequim o Brasil ganhou 5 medalhas de ouro, a China ganhou 4 vezes mais. Quantas medalhas a China ganhou?	No meu aniversário ganhei uma caixa com 12 bombons. Precisei dividir com minhas primas Paula e Lúcia em partes iguais. Com quanto bombons ficamos?
Multiplicação	Comparação multiplicativa	Divisão por partição

(A3) Pedro comprou 3 pacotes de figurinhas, cada pacote continha 4 figurinhas. Quantas figurinhas Pedro comprou?	Victor no seu primeiro dia de aula ganhou 3 caixas de lápis de cor, contendo cada caixa 12 lápis. Com quantos lápis Victor ficou no total?	João tem 15 bolinhas de gude e quer dividir para seus 3 melhores amigos. Quantas bolinhas cada um vai receber?
Multiplicação	Multiplicação	Divisão por partição

(A4) Certo avião a jato pode transportar até 112 pessoas. Quantas pessoas poderão ser transportadas em 3 viagens com lotação máxima?	As carteiras de uma sala de aula estão arrumadas em 9 fileiras. Cada fileira tem 5 cadeiras. Quantas carteiras existem nessa sala?	Pedro tem 42 ovos e embalagens para meia dúzia de ovos. De quantas embalagens ele vai precisar?
Multiplicação	Configuração retangular	Divisão por quotição

(A5) Na aula de natação Paulo conseguiu nadar 45 metros. Carlos nadou o dobro. Quantos metros nadou Carlos?	Marta gastou R$ 24,00 em 3 pacotes de chocolate. Quanto custou cada pacote de chocolate?	Na platéia do Teatro tem 50 lugares divididos em 5 cadeiras em cada fileira. Quantas fileiras há no teatro?
Comparação multiplicativa	Divisão por quotição	Divisão por quotição

(A6) Em um álbum há 32 fotografias. Quantas fotografias há em 3 álbuns iguais a esse?	Um número é 9 e o outro é o seu dobro. Qual é o outro número?	Carolina tem 68 livros para colocar em quantidades iguais, em 4 prateleiras. Quantos livros colocará em cada prateleira?
Multiplicação	Comparação multiplicativa	Divisão por partição

(A7) Tenho seis caixas com doze lápis em cada uma. Quantos são os lápis no total?	Num baile há 7 mulheres e 8 homens. Quantos pares diferentes podem se formar para a dança?	Um remédio é vendido em cartelas com 48 comprimidos. O médico receitou a José 3 comprimidos ao dia. Quantos dias de tratamento José conseguirá comprando uma cartela?
Multiplicação	Prod. Cartesiano- Comb.	Divisão por quotição

(A8) Para vestir um palhaço temos 5 perucas e 12 trajes. De quantas maneiras distintas possa-se vestir um palhaço?	Um prédio tem 7 andares. Em cada andar há 9 apartamentos. Quantos apartamentos há no prédio?	Eu tenho um pacote com 340 balas de mel. Quantos saquinhos com 5 balas cada um posso fazer?
Prod. Cart. Combinatória	Multiplicação	Divisão por quotição

(A8) Paulo irá comprar 5 caixas de bolacha, cada uma custa R$ 7,00. Quanto ele pagará pelas 5 caixas?	Tenho 18 bombons e quero repartir entre três pessoas, quantos bombons cada pessoa vai receber?	Em uma escola há 1.800 alunos e metade destes alunos foram sorteados para um passeio. Quantos alunos vão ao passeio da escola?
Multiplicação	Divisão por partição	Divisão por partição

(A9) Everton coleciona cartuchos de videogame. Ele resolveu guardar seus 30 cartuchos em 6 caixas. Quantos cartuchos guardará em cada caixa?	Doroti tem 15 fotos de seu último passeio e quer colocá-las em um álbum em que cabem 5 fotos por página. Quantas páginas do álbum ficarão completas?	Vovó colheu 48 flores. Resolveu arrumá-las em 6 vasos colocando em cada um o mesmo número de flores. Quantas flores colocou em cada vaso?
Divisão por partição	Divisão por partição	Divisão por quota

(A10) José tem 9 caixas de bolinhas de gude. Cada caixa tem 8 bolinhas. Quantas bolinhas de gude José tem?	Fui a livraria e comprei 7 livros, que custaram 84 reais. Quanto custou cada livro?	Paulo tem 5 carrinhos e Pedro tem o dobro. Quantos carrinhos Pedro tem?
Multiplicação	Divisão por partição	Comparação multiplicativa

(A11) Numa confraternização, foram consumidos 5 engradados de refrigerantes. Em cada engradado cabiam 6 refrigerantes. Quantos refrigerantes foram consumidos?	Minha tia mora perto de um parque onde faz caminhada. Todos os dias ela dá 2 voltas ao redor do parque que tem 2000 metros. Quantos metros minha tia anda em uma semana?	No zoológico da cidade existem 25 zebras. Elas foram divididas em 5 jaulas. Quantas zebras ficaram em cada jaula?
Multiplicação	Quarta proporcional	Divisão por partição

(A12) No teatro que Mariana foi tinham 8 fileiras com 5 cadeiras. No total quantos lugares tinham?	Tiago comprou 2 pacotes de figurinhas, na qual cada pacote tinha 5 figurinhas. No total com quantas figurinhas ele ficou?	Joana tem 2 bonecas e Carla tem o triplo. Quantas bonecas Carla tem?
Configuração retangular	Multiplicação	Comparação multiplicativa

(A13) No ônibus cabem 34 pessoas. Quantas pessoas cabem em dois ônibus iguais a este?	Uma turma de amigos foram a lanchonete e pediram 50 pasteizinhos de carne. Estando eles em 5 quantos pastéis cada um recebeu?	Cristina tem 140 livros para distribuir igualmente, em 4 estantes. Quantos livros ela vai colocar em cada estante?
Multiplicação	Divisão por partição	Divisão por partição

(A14) Numa sala de aula há 4 filas de carteiras, com 6 carteiras cada fila. Quantas carteiras há na sala de aula?	Carlinhos comprou 5 pacotes de revistinhas. Em cada pacote há 2 revistinhas. Quantas revistinhas Carlinhos comprou?	No carrinho de sorvete de João há 16 picolés. Ele quer distribuílos igualmente entre 4 crianças. Quantos picolés dará a cada criança?
Configuração retangular	Multiplicação	Divisão por partição

(A15) Gilson ganhou 3 caixas de chocolate em cada caixa há 5 chocolates, quantos chocolates há em cada caixa?	Thiago ganhou 16 bolinhas e dividiu com Jenyffer, com quantas bolinhas ele ficou?	Fábio guardou 18 bolas em 2 caixas, metade em cada caixa, quantas bolas estão em cada caixa?
Inconsistente	Divisão por partes	Divisão por partes

(A16) Luiz ganhou dois sacos de bombons, cada saco tem 6 bombons. Quantos bombons Luiz tem?	Carlos e Lúcia calcularam o total de carteiras na sala de aula. A sala de aula de Lúcia tem 6 fileiras com 5 carteiras em cada uma. Quantas são as carteiras no total.	Mamãe comprou 3 vestidos. O valor da compra foi 69,00 reais. Mamãe dividiu a sua compra em 3 prestações no seu cartão de crédito. Qual foi o valor de cada prestação?
Multiplicação	Configuração retangular	Divisão por partes

(A16) Vovó gasta 4 ovos para fazer um bolo. Ela precisa fazer 5 bolos. Quantos ovos irá usar?	Júlia mora em um prédio de 16 andares e cada andar tem 4 apartamentos. Lívia mora em um prédio com 12 andares e cada andar tem 6 apartamentos. Quantos apartamentos tem em cada prédio.	Uma florista tem 20 rosas para fazer arranjos. Como quer colocar 5 rosas em cada arranjo, quantos arranjos ela conseguirá fazer?
Quarta proporcional	Multiplicação	Divisão por quotição.