PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Carlos Francisco Borges

TRANSIÇÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO PARA O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO: UMA SEQUÊNCIA PARA ENSINO

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

CARLOS FRANCISCO BORGES

TRANSIÇÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO PARA O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO: UMA SEQUÊNCIA PARA ENSINO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.**

São Paulo
2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ Local e Data: ______________

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais Leocádio e Luzia que sempre me deram apoio para estudar e às minhas filhas e esposa.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado todas as condições de realizar este sonho.

À minha orientadora, Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva (Zezé), que muito contribuiu e apoiou para que esse trabalho se concretizasse.

À banca examinadora Professoras Doutoras Bárbara Lutaif Bianchini e Luzia Aparecida Palaro, pelas orientações e sugestões que muito contribuíram para o avanço deste trabalho.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em especial, aos que me deram aula, Cileda, Célia Carolino, Celina, Vicenzo, Benedito, Sonia Pitta e Sandra Magina, que muito nos auxiliaram com suas aulas.

À Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, por nos ter concedido bolsa de estudo.

Ao supervisor Felipe, responsável pelo Programa Bolsa Mestrado da Diretoria de Ensino de Caieiras.

Ao diretor Aparecido Roberto Tonellotti (in memoriam), amigo, companheiro, que nos encorajou a realizar este trabalho.

Aos amigos de curso que sempre estavam ao nosso lado nos momentos mais difíceis (Romeu, Corina, Silvana, Siane, Leandro, Mariucha, Claudia Sérgio e Fábio).

À direção, corpo docente e funcionários da escola estadual professor Rogério Levorin, em especial, ao diretor professor Valmir, vice-diretor professor Alexandre e professores Renato, Cilene, Aulus e Douglas. Os dois primeiros por nos cederem o espaço e o material necessário para a aplicação da sequência de ensino e os demais por nos auxiliarem como observadores.

Aos alunos que se dispuseram a participar do trabalho, Rômulo, Katarina, Kécelin, Jéssica, Paloma, João, Euclides, Daniel, Lucas e Maíra.

A minha esposa Sônia, minhas filhas Karen, Kezia e Kemily pela paciência e por terem me compreendido nos momentos que não lhes dei a atenção que mereciam.

RESUMO

Esse trabalho teve por objetivo contribuir com o ensino de trigonometria, em especial, na transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Foi elaborada uma sequência com 12 atividades, das quais dez foram criadas com a preocupação de conduzir o aluno a compreender as razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico utilizando, o *software* de geometria dinâmica Geogebra. Uma atividade foi criada com o intuito de trabalhar com a definição de radianos e a conversão da unidade de arcos (radianos) para unidade de ângulos (graus) e, por fim, uma atividade que tinha por objetivo construir um dispositivo para ser utilizado em sala de aula quando não fosse possível utilizar a calculadora, ou o computador. As atividades foram aplicadas para oito alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da cidade de Francisco Morato, Grande São Paulo. Para tal foram usados quatro encontros para realizar a aplicação; os alunos fizeram as atividades em duplas e fora do horário de aula. A Teoria das Situações Didáticas e alguns pressupostos da Engenharia Didática foram usados na elaboração, análise, aplicação e coleta de dados da sequência de ensino. A experimentação aponta que os alunos não mobilizaram alguns conhecimentos prévios necessários e apresentam algumas dificuldades para exporem suas observações por escrito. Mas também mostrou que houve avanços na aprendizagem dos alunos, pois ao executarem as atividades utilizando a geometria dinâmica, mostraram interesse e concentração.

Palavras-Chave: Trigonometria. Triângulo Retângulo. Círculo Trigonométrico. Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

The purpose of this essay was to contribute to Trigonometry teaching, specially, to the transition of the trigonometric reasons in the rectangle triangle for the trigonometric circle. A sequence was elaborated with 12 activities, from which ten were created worrying about guiding the student to understand the trigonometric reasons of the rectangle triangle to the trigonometric circle using the dynamic geometry software Geogebra. An activity was made with the objective of working with the radian definition and the conversion of the unit circle (radians) to the angle unit (degrees) and, at last, an activity which had as purpose to create a tool to be used in the classroom when it was not possible to use the calculator, or the computer. The activities were applied to 12th graders in a school from the city of Francisco Morato, Great São Paulo. For such, 4 meetings were used to do the application; the students did the activities in pairs and were not done during the lessons. The Theory of the Didactic Situations and other basis of the Didactic Engineering were used in the elaboration, analysis, application and data survey of the teaching sequence. The experimentation pointed that the students did not make use of some necessary previous knowledge and presented some difficulties to expose their written observations. However, it also showed that there was improvement in the students' learning, because while doing the activities using the dynamic geometry, they showed interest and focus.

Keywords: Trigonometry; Rectangle triangle; Trigonometric Circle; Dynamic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO[1]

O interesse por pesquisar a respeito de Trigonometria começou ao fazer um minicurso no Encontro Nacional de Educação Matemática (IX ENEM) realizado em Belo Horizonte em 2007.

No ano seguinte, comecei a participar do grupo de estudos PEA-MAT (Pensamento Matemático) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Em uma reunião do grupo, o professor coordenador explicava sobre como formular uma questão de pesquisa e deu um exemplo de “quais são os problemas que podem ocorrer na aprendizagem dos alunos na transição do seno como razão entre os lados de um triângulo para o seno de um número real em um ciclo trigonométrico”. Assim, a partir dessa reunião, começamos a buscar nos livros de História da Matemática a evolução da Trigonometria para tentar entender como foi essa evolução. Pesquisamos em propostas curriculares, como tratam e sugerem o ensino de trigonometria e durante os encontros ouvimos sugestões de colegas que nos auxiliaram a direcionar nosso trabalho.

Pesquisamos em trabalhos correlatos e artigos sobre trigonometria como outros pesquisadores abordaram o tema em suas pesquisas e a partir desses estudos elaboramos uma sequência de ensino com 12 atividades; dez atividades foram pensando em levar o aluno a compreender a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico utilizando o *software* de geometria dinâmica Geogebra, uma atividade teve o objetivo de ensinar a definição de radianos e a conversão de unidades de arcos para unidades de ângulos e vice-versa, por fim, uma atividade com o objetivo de construir um dispositivo para ser utilizado em sala de aula quando não for possível usar o computador.

Para fundamentar o trabalho, Utilizamos a Teoria das Situações Didáticas e alguns pressupostos da Engenharia Didática que serviram na elaboração, na análise, na aplicação e na coleta de dados da sequência de ensino.

---

[1] Esta dissertação está conforme as regras do acordo ortográfico

O trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro, apontamos alguns aspectos históricos da evolução da trigonometria e apresentamos nossa revisão bibliográfica. Verificamos como o ensino de trigonometria é tratado em documentos curriculares oficiais e apresentamos o *software* de geometria dinâmica que usamos em nossa sequência de ensino.

No segundo capítulo delimitamos o problema e nossa questão de pesquisa com as hipóteses para respondê-la, o referencial teórico e os procedimentos metodológicos.

No terceiro capítulo, descrevemos a escola onde foi realizada a pesquisa, os sujeitos e como esta foi feita. Também apresentamos a sequência ensino com suas respectivas análises *a priori* e *a posteriori.* Por fim, apresentamos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1

ESTUDOS INICIAIS

Este capítulo tem o objetivo de apontar alguns aspectos históricos da evolução da trigonometria, apresentar nossa revisão bibliográfica, verificar como o ensino de trigonometria é tratado em documentos curriculares oficiais e apresentar o *software* de geometria dinâmica que utilizaremos em nosso trabalho.

1.1 Breve estudo histórico da Trigonometria

De acordo com Kennedy (1992), os primórdios do desenvolvimento da trigonometria perderam-se no tempo, restando algumas sequências numéricas que relacionam comprimentos de sombras com horas do dia em documentos deixados por algumas civilizações antigas. De acordo com Boyer (1974), existe uma tábula do período babilônio antigo (1900 a 1600 a.C.) chamada de Plimpton 322, em que uma de suas colunas representa valores para o quadrado da secante.

Um importante documento que nos traz um pouco do conhecimento matemático dos antigos egípcios é o papiro de Rhind que, segundo Boyer (1974), foi escrito por um escriba chamado Ahmes, por volta de 1650 a.C e apresenta vários problemas. Dentre eles, o problema 56 contém rudimentos de trigonometria. De acordo com Boyer (1996), na construção de pirâmides era importante uma inclinação constante de suas faces e pode ter sido essa preocupação que levou os egípcios antigos a introduzirem um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo.

O problema 56 fornece as dimensões de uma pirâmide de base quadrada e pede o *seqt*[2] (inclinação da face da pirâmide). Por exemplo, conforme Kennedy (1992, p. 41), se o lado da base de uma pirâmide tem 360 cúbitos[3] e a altura da pirâmide 250 cúbitos, calcula-se a medida x que é a metade do lado da base da pirâmide e divide-se este resultado por y, que é a medida da altura da pirâmide como mostra a Figura 1. Multiplica-se este resultado por 7 que é a quantidade de mãos que tem um cúbito aí temos que:

$$seqt = \frac{\left(\frac{360}{2}\right)}{250\,cúbitos} \times 7mãos = 5\frac{1}{25}\ \text{mãos por cúbito}.$$

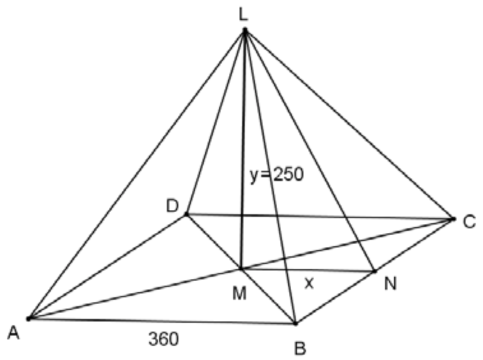


Figura 1. Representação de uma pirâmide
Fonte: adaptado de COSTA, (1997, p. 9)

Nesse caso, o seqt é exatamente 7 vezes o valor da cotangente do ângulo MNL, que é igual a 0,72.

De acordo com Boyer (1974), na Grécia por volta de 180–125 a.C. foi compilada por Hiparco de Niceia a primeira tabela trigonométrica, por isso, Hiparco ganhou direito de ser chamado “o pai da trigonometria”. Esse matemático e astrônomo grego foi uma figura da transição entre a astronomia babilônica para a obra de Ptolomeu. Como quase nenhum dos escritos de Hiparco chegou até nós, o que sabemos sobre suas realizações são de fontes indiretas.

Segundo Eves (2004), uma tábua de cordas que, posteriormente, foi creditada a Cláudio Ptolomeu e fornece os comprimentos dos ângulos centrais de

---

[2] Seqt - “afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura”, (BOYER, 1996, p. 13).
[3] “Cúbito: distância do cotovelo à ponta do dedo médio”, (MACHADO, 1998, p. 17).

um círculo dado de 1/2° a 180°, com incremento de 1/2° foi possivelmente baseada na de Hiparco. Assim o autor descreve como construí-la:

> Divide-se o raio do círculo em 60 partes e se expressam os comprimentos das cordas sexagesimalmente em termos dessas partes. Assim, usando o símbolo $cdr\,\alpha$ para representar o comprimento da corda do ângulo central α, encontram-se registros como $cdr\,36° = 37^{p}\;4'\,55''$, o que significa, obviamente, que a corda do ângulo central de 36° é igual a 37/60 (ou trinta e sete partes pequenas) do raio, mais 4/60 de uma dessas partes pequenas e mais 55/3600 de uma dessas partes pequenas. Pela Figura 2 (número nosso) se nota que uma tábua de cordas é equivalente a uma tábua de senos trigonométricos, pois $\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{AM}}{\text{OA}} = \frac{AB}{\textit{diâmetro}\text{ do círculo}} = \frac{cdr\,2\alpha}{120}$. (EVES, 2004, p. 203)

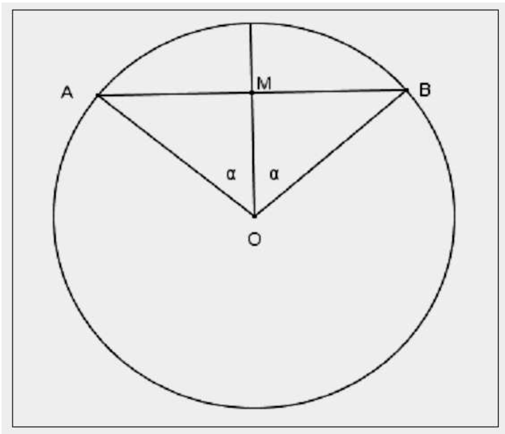


Figura 2. Equivalência entre cordas e senos trigonométricos
Fonte: EVES, (2004, p. 202)

Para Boyer (1996), um dos maiores documentos sobre astronomia foram os livros escritos por Cláudio Ptolomeu por volta de 150 d.C, baseado nos trabalhos de Hiparco, o *Syntaxis matemática* que mais tarde foi chamado pelos árabes de Almagesto (o maior). No livro , está descrito como foram construídas as tábuas de cordas, utilizando a proposição geométrica conhecida por *teorema de Ptolomeu*, assim enunciada:

> Se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo, Figura 3 (número nosso) então $AB.CD + BC.DA = AC.BD$; isto é, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais. A prova disto se faz facilmente traçando BE de modo que o ângulo ABE seja igual ao ângulo DBC e observando a semelhança dos triângulos ABE e BCD. (BOYER, 1974, p. 120)

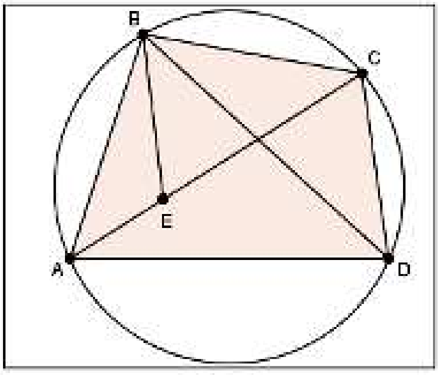


Figura 3. Quadrilátero inscrito representando o teorema de Ptolomeu
Fonte: adaptado de BOYER, (1974, p. 120)

Um caso particular e muito útil do teorema de Ptolomeu é quando um dos lados do quadrilátero coincide com o diâmetro de um círculo, supondo que esse lado seja $\overline{AD}$, (Figura 3) temos:

> $2r.BC + AB.CD = AC.BD.$ Se fizermos arco $BD = 2\alpha$ e arco $CD = 2\beta$, então $BC = 2r\,\mathrm{sen}\,(\alpha - \beta)$, $AB = 2r\,\mathrm{sen}\,(90° - \alpha)$, $BD = 2r\,\mathrm{sen}\alpha$, $CD = 2r\,\mathrm{sen}\beta$, e $AC = 2r\,\mathrm{sen}\,(90° - \beta)$. O teorema de Ptolomeu, portanto, leva ao resultado $sen\,(\alpha - \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$. Raciocínio semelhante leva à formula $sen\,(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$, e ao par análogo $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta$. Por isso essas quatro fórmulas de soma e diferença são freqüentemente chamadas fórmulas de Ptolomeu. (BOYER, 1974, p. 120)

O autor afirma que Ptolomeu construiu uma tábua de senos para ângulos de 0° a 90°, com incrementos de 15 minutos explicando elegantemente como fez e que, possivelmente já era do conhecimento de Hiparco.

Conforme Kennedy (1992), a mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia, onde elas, sem dúvida, tiveram origem. O *surya siddhanta* (século IV ou V d.C.) é um compêndio de astronomia com regras em versos escritos em sânscrito com poucas explicações e nenhuma prova. Como quase todas as funções seno primitivas são definidas em termos de um círculo cujo raio não é unitário. Outra contribuição dos hindus, de acordo com Boyer (1974) para a trigonometria foi à introdução do equivalente da função seno para substituir a tabela grega de cordas.

Segundo Kennedy (1992) os hindus ao introduzirem a semicorda ou o conceito de seno em sua trigonometria tornaram as identidades pitagóricas mais óbvias, e por volta de 505 d.C., Varahamihira descreve o equivalente verbal de $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$ e Cajori (2007) acrescenta ainda que, $\pi = \sqrt{10}$, $sen\ 30° = \frac{1}{2}$, $sen\ 60° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$, $sen^2\gamma = [\{sen\ 2\gamma\}^2 + \{1 - sen\ \{90° - 2\gamma\}^2]/4$.

Cajori (2007) afirma que esses dados são seguidos por uma lista de 24 senos com os ângulos em intervalos de 3°45', certamente, tomados das tabelas de Ptolomeu, só que em vez de dividir o raio em 60 partes como fez Ptolomeu os astrônomos hindus dividiam-no em 120 partes. Com esse procedimento, eles converteram as tabelas de Ptolomeu em uma de senos sem alterar os valores numéricos. Os indianos também adotaram dos gregos e babilônios a prática de dividir o círculo em quadrantes de 90° graus ou 5400 minutos. Desse modo, o círculo ficava dividido em 21600 minutos. Cada quadrante foi dividido em 24 partes iguais, de tal forma que cada parte abrangesse 225 unidades da circunferência e correspondesse a $3\frac{3}{4}$ graus.

Interessante é o fato de que os hindus não contavam como os gregos, com a corda toda do arco duplo, mas sempre com o seno e o seno-verso[4]. O modo dos hindus calcularem tabelas era, teoricamente, muito simples, o seno de 90° era igual ao raio de 3438, o seno de 30° era a metade desse raio, ou seja, 1719. Âryabhata (século VI) utilizou o valor para o raio de 3438, obtido talvez pela relação $2 \times 3{,}1416r = 21600$.

Com os valores dos senos dos ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° eles calcularam os senos da metade dos ângulos utilizando a fórmula para seno-verso $2a = 2sen^2 a$ e, pelo mesmo procedimento, calcularam também o seno de seus complementos. Repetindo sucessivamente esse procedimento, eles obtiveram os senos dos ângulos com intervalos de 3°45'.

Assim como os gregos, os hindus consideravam a trigonometria uma ferramenta para a astronomia, já utilizavam graus, minutos e segundos nas tábuas de seno que construíam e empregavam o equivalente de seno, cosseno e seno-verso.

---

[4] Seno-verso é a diferença entre a unidade e a função cosseno (NOVO AURELIO, 1999. p. 1837).

Do período árabe, há vários trabalhos a respeito da Trigonometria. Destacaremos os de Al Battani, Abu'l Wefa e Nasir Eddin. De acordo com Cajori (2007), Al Battani estava entre os mais notáveis astrônomos do nono século e suas observações astronômicas eram notáveis pelas exatidões. Seu trabalho *De scientia stellarun* foi traduzido para o latim no século XII por Platão Tibúrcio. As nossas fontes não são unânimes quanto ao autor desta tradução, Boyer (1974) atribui essa tradução a Robert de Chester, Kennedy (1992) e Eves (2004), atribuem-na a Gerardo de Cremona, embora haja consenso de que houve erro de tradução. Desta tradução, espalhou-se a palavra "sinus" como o nome da função trigonométrica. O vocábulo árabe para seno é *jiba* que foi derivado do sânscrito *jiva* (corda, para os hindus) que se assemelha à palavra árabe *jaib* que significa recorte ou golfo, daí a razão da palavra latina "*sinus*". Al Battani foi um estudioso das obras de Ptolomeu, preferiu utilizar a metade da corda (seno indiano), em vez da corda inteira usada por Ptolomeu. Foi o primeiro a preparar uma tábua de cotangente. Construiu relógios de sol horizontal e vertical (Figura 4), considerando a sombra horizontal como *umbra extensa* (tradução latina) e a vertical *umbra versa* que são respectivamente, a cotangente e a tangente.

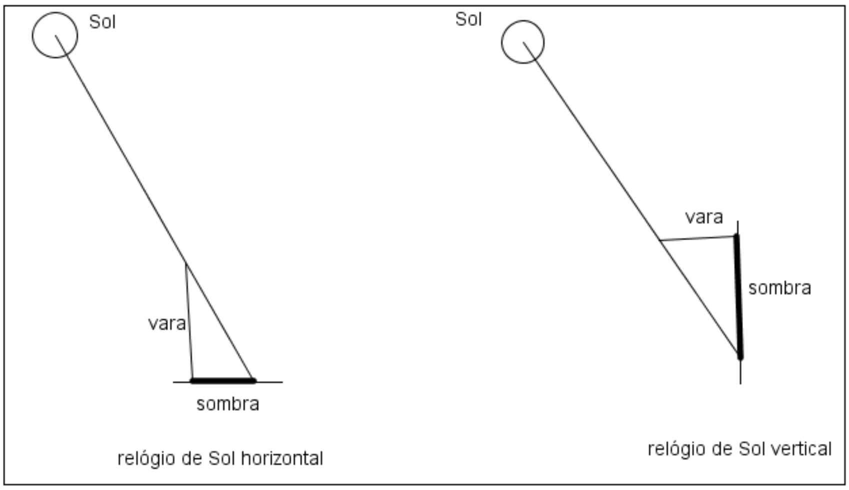


Figura 4. Relógios de sol

Fonte: adaptado de KENNEDY, (1992, p. 42)

Abu'l Wefa (940-998) criou um método para construir tábuas de seno com valores corretos até a nona casa decimal, introduziu a função tangente, fez uma tábua de senos e tangentes com incremento de 15' e, ao considerar o triângulo sombra dos relógios de sol, introduziu a secante e a cossecante (EVES, 2004; CAJORI, 2007).

Para Kennedy (1992) alguns matemáticos perceberam o inconveniente do parâmetro R (raio) ser diferente de 1 e creditam a Abu'l Wefa e a Al Biruni o passo final de fazer o parâmetro $R = 1$, embora esta medida não tenha despertado interesse por seus contemporâneos e sucessores. Também credita a Abu'l Wefa o equivalente às fórmulas $sen\,2\mathrm{x} = 2\,\mathrm{sen\ x}\,.\cos\mathrm{x}$, $\frac{tgx}{1} = \frac{senx}{\cos x}$, $\frac{tgx}{1} = \frac{1}{\cot gx}$, $\sec x = \sqrt{1 + tg^2 x}$.

De acordo com Eves (2004) e Cajori (2007), Nasir Eddin (1201-1274) em seu livro *Tratado sobre os Quadriláteros* é o primeiro que trata a trigonometria independente da astronomia e com tal perfeição que poupou os europeus do século XV de maiores encargos.

Os significados dos nomes atuais das funções trigonométricas ficam claros com sua interpretação geométrica quando o raio do círculo é igual a 1 e coloca-se o ângulo no centro do círculo como mostra a Figura 5. Desta forma, os valores da $tg\alpha$ e $\sec\alpha$ são dados pelos comprimentos dos segmentos CD e OD, respectivamente. Cotangente é a tangente do complemento e cossecante é a secante do complemento.

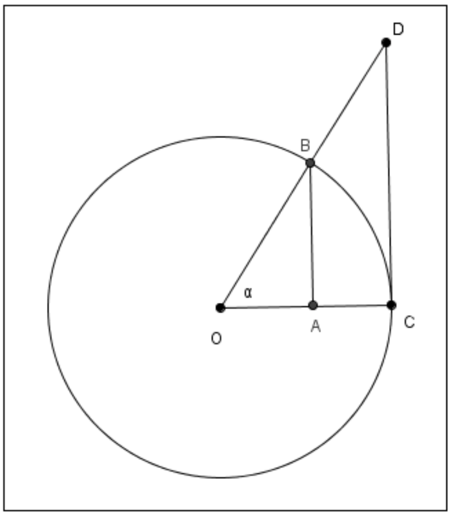


Figura 5. Representação geométrica da tangente e da secante

Fonte: EVES, (2004, p.266)

As funções, tangente, cotangente, secante e cossecante tiveram vários nomes e os nomes atuais surgiram, no máximo, no final do século XVI.

Lorenzoni (2003) afirma que a trigonometria chinesa foi estudada por Guo Shoujing (1231-1316) em que os principais elementos dessa trigonometria não são os ângulos e as fórmulas exatas, mas o estudo por aproximação de arcos, cordas e *sagitta*[5] de segmentos circulares (Figura 6). Também a trigonometria esférica chinesa não utilizava triângulos com três lados circulares, como na trigonometria esférica clássica, mas, triângulos planos com no máximo um lado circular. Na Figura 6, $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$, são raios do círculo; $\overline{AB}$ é uma corda e $\overline{DC}$ é sagitta do segmento de círculo ADB.

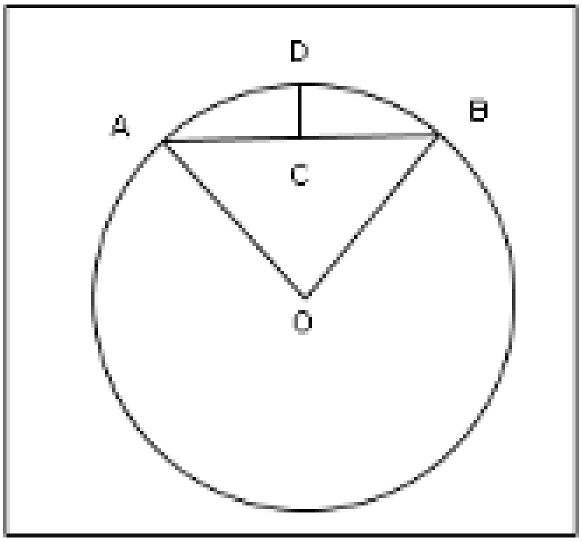


Figura 6. Corda e *sagitta* de segmentos circulares
Fonte: LORENZONI, (2003, p.55)

Lorenzoni (2003) refere que, para Guo Shoujing, o círculo ou a "periferia celestial" possuía 365,25 graus que é o mesmo número de dias de um ano, daí um grau chinês equivale a $360/365{,}25$ graus sexagesimais, do mesmo modo o comprimento do círculo trigonométrico era medido em graus.

Conforme relata Eves (2004), o mais capaz e influente matemático da Europa do século XV foi John Mueller, mais conhecido como Regiomontanus (1436-1476). Regiomontanus estudou astronomia e trigonometria em Viena com

[5]Segundo Eves (2004), sagitta é altura.

George Peurbach (1423-1463), este verificara que as traduções latinas do Almagesto estavam crivadas de erros e tomou para si a tarefa de fazer a tradução direta dos manuscritos gregos, mas não viveu o tempo necessário para terminar o projeto, ficando para Regiomontanus o trabalho começado por seu mestre. Regiomontanus e Peurbach adotaram o seno indiano no lugar da corda do arco duplo dos gregos.

De acordo com Eves (2004), o tratado *De triangulis omnimodis* é a mais importante das obras de Regiomontanus, pois contém a primeira exposição sistemática de trigonometria plana e esférica com um tratamento independente da astronomia.

> O *De* triangulis omnimodis de Regiomontanus se divide em cinco livros, os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os outros três à trigonometria esférica. Nessa obra o autor revela particular interesse na determinação de um triângulo, satisfeita três condições dadas [...]. As únicas funções trigonométricas empregadas são o seno e o co-seno. Mais tarde, porém, Regiomontanus calculou uma tabela de tangentes (EVES, 2004, p. 297).

Segundo Boyer (1996), George Joachim Rheticus (ou Rhaeticus 1514-1576), discípulo de Copérnico (1473-1543), combinou as ideias de Regiomontanus e Copérnico com as suas e fez o mais elaborado tratado de trigonometria escrito, até então, o *Opus palatinum de triangulis*. Nele, a trigonometria atingiu a maioridade. Segundo Cajori (2007), até a época de Rhaeticus as funções trigonométricas estavam sempre relacionadas com arcos, foi ele o primeiro a construir o triângulo retângulo e fazê-las depender diretamente de seus ângulos.

Ainda de acordo com Cajori (2007), Bartholomaus Pitiscus (1561-1613) foi o primeiro a utilizar a palavra trigonometria e suas tábuas astronômicas tinham um alto grau de precisão.

Outra contribuição importante para a trigonometria foi o *Canom mathematicus seu ad triangula*, escrito por Viète (1540-1603), trata-se do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas, Viète:

> Dedicou especial atenção, também, à goniometria[6], desenvolveu relações como a $sen\,\mathrm{a} = \mathrm{sen}\,(60° + \mathrm{a}) - \mathrm{sen}\,(60° - \mathrm{a})$, $\cos ec\,\mathrm{a} + \mathrm{cotg}\,\mathrm{a} = \mathrm{cotg}\,\frac{\mathrm{a}}{2}$, $-\cot g\,\mathrm{a} + \mathrm{cosec}\,\mathrm{a} = \mathrm{tg}\frac{\mathrm{a}}{2}$ com a ajuda das quais ele poderia calcular as funções de ângulos abaixo de 30° ou 45°, e as funções dos ângulos restantes abaixo de 90°, essencialmente, por adição e subtração apenas. Viète foi o primeiro a aplicar transformações algébricas à trigonometria, em particular, na multisseção de ângulos. (CAJORI, 2007, p. 201)

Para Lima et al. (1996), com o desenvolvimento da Análise Matemática no século XVII, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e outras relações trigonométricas o *status* de função real de variável real. Assim, por exemplo, ao lado do seno Â, tem se também o $sen\,\mathrm{x}$, o seno do número real x, ou seja, a função $senx : \Re \to \Re$.

Segundo Kennedy (1992), com o avanço da Análise desencadeado pela invenção do cálculo infinitesimal, a trigonometria foi logo absorvida por esta teoria. O processo de transição começou com a representação das funções trigonométricas por meio de séries infinitas no século XVII por Isaac Newton. Ele sabia que: $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$ e, ainda, que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Em 1740, Leonhard Euler mostrou que $e^Z = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{n}}\right)^n$ que, $senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ com $i = \sqrt{-1}$. Com essas relações, foi possível conceber a trigonometria como um conjunto de relações entre números complexos, sem necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Ao terminar este estudo, notamos que a trigonometria, durante muito tempo foi ferramenta para a Astronomia, que em seus primórdios alguns povos a utilizavam em triângulos para resolver situações práticas (como o cálculo do seqt de uma pirâmide pelos antigos egípcios); outros povos (hindus e chineses) a

---

[6] Goniometria "A técnica de medir ângulos" (NOVO AURÉLIO, 1999, p. 997).

utilizavam como razão entre arcos e cordas num círculo, para depois de muito tempo na Europa Ocidental passar a ser a razão entre os lados de um triângulo retângulo e seus ângulos agudos, com os estudos de Georg Joachim Rhaeticus (1514-1567).

Como nosso objetivo é ensinar a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico, este estudo foi importante para elaborarmos a sequência de ensino. Faremos a abordagem como os europeus do século XVI que calculavam a razão entre as medidas dos lados de triângulos retângulos, para depois relacionar estas razões no círculo trigonométrico.

1.2 Revisão bibliográfica

O objetivo desta revisão bibliográfica foi analisar algumas pesquisas que tratam de trigonometria e de sugestões para seu ensino.

Para realizar esta revisão bibliográfica, alguns critérios foram adotados e um deles foi a facilidade para consegui-los, a maioria foi retirada do *site* do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e da biblioteca do *campus*. Os trabalhos teriam de contemplar a trigonometria e conter, na parte empírica, atividades manipulativas (entendemos por atividades manipulativas aquelas em que os alunos manipulam instrumentos de medidas, constroem dispositivos para auxilio de sua aprendizagem, desenham utilizando compasso, transferidor e esquadros) ou uso de tecnologias para auxiliar na aprendizagem (*software* de geometria dinâmica).

Lindegger (2000) depois de perceber em sua prática pedagógica algumas dificuldades dos alunos na compreensão de conhecimentos básicos de Trigonometria e, também, de alguns erros cometidos por esses alunos por não terem esses conhecimentos, iniciou uma pesquisa para entender o porquê dessas dificuldades e criou uma sequência de ensino baseada no modelo socioconstrutivista com o intuito de colaborar, para que os alunos pudessem ter uma melhor compreensão desses conhecimentos.

Sua pesquisa embasou-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e no pensamento socioconstrutivista de Vygotsky, e teve como objetivo de pesquisa investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo de maneira significativa para o aluno.

Para isso, o autor fez um breve histórico do desenvolvimento da trigonometria, de sua ligação com a astronomia, como era estudada voltada mais para a trigonometria esférica e sua ligação com números complexos até os dias atuais, em que a mesma está presente em várias áreas do conhecimento. O pesquisador analisou seis livros didáticos e percebeu que quase todos abordam o tema Trigonometria na 8ª série. Somente um dos livros analisados “Matemática Atual” não inclui a Trigonometria.

O experimento de Lindegger (2000) foi aplicado em dois grupos de alunos, um grupo de referência que teve uma abordagem tradicional, inclusive, apoiando-se na proposta de um livro didático e um grupo experimental em que trabalhou com atividades diferenciadas, com situações mais próximas do cotidiano e com objetos para representações concretas (maquetes, triângulos em madeira e dispositivos). O pesquisador chamou de modelos a estas representações concretas.

Em suas análises finais, o autor comparou os resultados obtidos em um pré-teste e um pós-teste aplicado aos dois grupos e depois fez uma análise quantitativa e qualitativa do desempenho dos grupos. Comprovou que o grupo experimental apresentou melhor rendimento em sua aprendizagem ao verificar que este grupo desenvolveu substancialmente a competência na resolução de problemas.

A principal contribuição deste trabalho foi a ideia de representações concretas para auxiliar na compreensão e aprendizagem dos alunos.

Nascimento (2005) fez um levantamento com 652 alunos da rede pública (estadual, municipal) e particular do Estado de São Paulo e verificou que a maioria dos alunos não sabe porque $sen\,30°$ é igual a $\frac{1}{2}$. Com este levantamento, a pesquisadora desenvolveu um trabalho com o intuito de levar o aluno a construir os conhecimentos elementares da Trigonometria.

Depois de buscar alguns conhecimentos na História da Matemática nos trabalhos de Aristarco de Samos, (como ele calculou as distâncias da Terra à Lua, da Terra ao Sol e do Sol à Lua), de Erastóstenes de Cirene (como este calculou a circunferência e o raio da Terra), das contribuições de Hiparco de Niceia para a Astronomia, dos trabalhos de Ptolomeu e de seu livro (o Almagesto) e como este construiu uma tábua trigonométrica de cordas em um círculo, a pesquisadora desenvolveu uma sequência didática com quatro atividades no contexto na História da Matemática além de ensinar a construir um teodolito e um astrolábio com material simples e de fácil obtenção. Sua quarta atividade foi a proposta de construção de uma tábua trigonométrica pelo método utilizado por Ptolomeu. Na quinta atividade chamada de situação de reinvestimento, a autora desenvolveu atividades fora do contexto da História da Matemática para verificar se sua sequência didática possibilitou a aprendizagem dos conhecimentos básicos de Trigonometria.

Sua sequência de ensino foi aplicada em um grupo de 14 alunos do 1º ano do Ensino Médio separados em duplas. Após analisar os resultados apresentados pelos alunos, a pesquisadora observou que esse grupo de alunos tinha defasagem nos conteúdos de geometria do Ensino Fundamental e Médio, também, pouca familiaridade com instrumentos de medida e de construção (compasso, transferidor e esquadro), dificuldades estruturais em relação ao cálculo algébrico e que os alunos lidavam com a Matemática como se estivessem em um jogo de azar, tentando de tudo sem saber o porquê. A pesquisadora apontou que, após finalizar as atividades, o grupo teve avanços cognitivos e o trabalho em duplas foi eficiente.

Em sua conclusão, a pesquisadora fez uma síntese dos resultados obtidos que, de forma geral, apontam para uma defasagem em relação aos conteúdos e sugeriu que o professor mude sua prática em sala de aula, busque utilizar instrumentos construídos pelos alunos, além de outros espaços para suas aulas (biblioteca, pátio, quadra,...).

Consideramos importante este trabalho por utilizar recursos construídos pelos alunos (teodolito) para auxiliar na aprendizagem e por utilizar a História da Matemática para contextualizar as atividades.

Em seu trabalho, Martins (2003) fez um breve relato do contexto educacional brasileiro sobre o ensino de Trigonometria do início do século XX até a atualidade. Comentou alguns erros cometidos por seus alunos que mostraram que não construíram os conceitos de seno, cosseno e tangente.

A autora mencionou os pesquisadores que utilizaram o computador no ensino de Trigonometria e acredita que esta ferramenta possa ajudar na construção dos conceitos trigonométricos. Com estes pressupostos e com base na Teoria da Dialética Ferramenta-Objeto, a pesquisadora elaborou uma sequência didática com sete atividades, (a maioria utilizando o *software Cabri-géomètre*).

O objetivo da pesquisa de Martins (2003) foi construir o conceito de seno e cosseno, partindo do triângulo retângulo, passando pelo círculo trigonométrico e finalizou com os gráficos destas funções, tentando propiciar aos alunos condições para que eles atribuíssem significados a estes conceitos.

Sua pesquisa foi realizada com um grupo de 16 alunos e as atividades foram executadas em duplas. A autora analisou todas as respostas das duplas e acompanhou a evolução de duas duplas escolhidas aleatoriamente. Em suas considerações finais, Martins (2003) relatou que os alunos construíram os conceitos de seno e cosseno e que o *software Cabri-géomètre* possibilitou a construção da senóide e da cossenóide.

Costa (1997) fez um levantamento com alunos e professores sobre a aprendizagem de Trigonometria e com ele fez alguns questionamentos e uma pesquisa sobre o assunto, cujo objetivo foi construir uma sequência de ensino que pudesse introduzir as funções seno, cosseno e suas transformações de forma significativas para alunos, além de investigar a influência de dois contextos (Computador e Mundo Experimental) na aprendizagem da Trigonometria.

A autora realizou um estudo histórico a respeito de Trigonometria e um levantamento dos obstáculos didáticos e epistemológicos. Desenvolveu sua pesquisa pensando em três contextos, sala de aula, experimental e computacional.

Ao criar estes contextos, Costa (1997) pretendeu analisar qual era o mais significativo para a aprendizagem do aluno. A pesquisa foi aplicada em 32 alunos divididos em três grupos (A, B, C). O grupo A composto por 16 alunos que cursavam o 2º ano colegial teve apenas aulas tradicionais realizadas por seu professor; o grupo B, com 8 alunos que estavam cursando os 1º e 2º colegial (hoje Ensino Médio) ,fez experimentos em um laboratório e depois foram para o computador e o grupo C, com alunos que cursavam o 2º colegial fez o inverso do grupo B. Todos os grupos passaram por um pré-teste, um teste intermediário e um pós-teste que serviram para coleta de dados.

Costa (1997) fez uma análise geral do desempenho dos alunos e apontou que houve um progresso na construção de conhecimentos sobre trigonometria para os dois grupos experimentais, evidenciado pelo número de acertos no pós-teste realizado ao término da sequência didática e que os dois contextos (computacional e mundo experimental) são complementares para sequências didáticas semelhantes a sua.

Pelos resultados apresentados, consideramos a importância do trabalho de Costa (1997) ao afirmar que os alunos que passaram pelo contexto experimental e computacional tiveram melhor compreensão da Trigonometria.

Oliveira (2006) realizou um estudo de algumas dissertações e artigos. Dentre as dissertações, o autor destacou a de Mendes (2001) que utiliza recursos da História da Matemática para elaborar as atividades de seu trabalho, também citou o trabalho de Nacarato (2003) que analisou as diferentes abordagens para a definição de seno presentes nos livros didáticos do século XX no Brasil. O objetivo da pesquisa foi analisar as dificuldades que os professores do Ensino Médio enfrentam no processo de ensino da Trigonometria com atividades.

Outro trabalho analisado por Oliveira (2006) foi o de Brito e Morey (2004) que, ao ministrarem um curso de formação continuada para 50 professores de escolas estaduais do Rio Grande do Norte, perceberam algumas dificuldades apresentadas pelos professores, em relação ao estudo de Trigonometria. Dentre estas dificuldades, estão a manipulação de instrumentos geométricos (compasso e transferidor) e a dificuldade em localizar o cateto oposto ou adjacente a um ângulo agudo em um triângulo retângulo.

A sequência didática foi aplicada em um grupo de 52 alunos matriculados na 2ª série do Ensino Médio da rede pública do Estado do Rio Grande do Norte. Oliveira (2006) deixou claro que suas atividades baseavam-se no trabalho feito por Brito e Morey (2004) com adaptações à sua realidade. O pesquisador relaciona as dificuldades sentidas pelos professores e alunos no processo de ensino de Trigonometria por atividades e separa-as em dificuldades relacionadas ao ambiente físico e aos materiais; dificuldades decorrentes da estrutura organizacional da escola; dificuldades relacionadas aos paradigmas do ensino tradicional; dificuldades relacionadas aos paradigmas da profissão docente e dificuldades decorrentes das competências e habilidades dos alunos.

Oliveira (2006) relatou que ensinar trigonometria com atividades pode ser um caminho positivo. O autor afirma isso após comparar os resultados obtidos com uma turma de mesmo perfil, mas que teve aulas de Trigonometria pelo método tradicional.

A importância deste trabalho está no levantamento das dificuldades encontradas, quando se deseja trabalhar com atividades.

Gannam (2004) após verificar algumas hipóteses de que as dificuldades do ensino de Trigonometria estão relacionadas aos inúmeros elementos que devem ser observados concomitantemente (círculo orientado, origem e extremidade de arcos, eixos cartesianos, ordenadas, abscissas, etc.), desenvolveu um dispositivo com transparências que fixam algumas variáveis para que o aluno direcione a atenção em uma ou duas outras variáveis. Com este dispositivo, o pesquisador obteve resultados positivos no ensino da Trigonometria. O dispositivo permite ao aluno ver as projeções do seno e cosseno quando as transparências giram. Desse modo, em nosso trabalho pretendemos utilizar atividades parecidas com aquelas desenvolvidas por Gannam (2004), pois acreditamos que atividades manipulativas podem auxiliar na aprendizagem das razões trigonométricas.

1.3 O ensino de trigonometria em documentos oficiais

Analisaremos as Propostas Curriculares para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo do Primeiro Grau (SÃO PAULO, 1997), a do Segundo Grau (SÃO PAULO, 1992) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo de

Matemática (SÃO PAULO, 2008), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999) e Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) para verificar quais são as recomendações para o ensino de Trigonometria nesses documentos oficiais.

O primeiro documento analisado é a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo para o 1º grau (SÃO PAULO, 1997) com os conteúdos para os alunos da 1ª a 8ª série (atual Ensino Fundamental). Neste documento, não há menção ao ensino da Trigonometria para esta fase do ensino, mas somente semelhança de triângulos, os teoremas de Pitágoras e Tales relacionados com situações-problema, como cálculo de distâncias inacessíveis.

A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo do 2º grau (SÃO PAULO, 1992) (atual Ensino Médio) propõe atividades para o cálculo de distâncias inacessíveis, utilizando a tangente. Sugere uma atividade cujo objetivo é a construção de uma tabela com os valores das tangentes de ângulos, variando de 5 em 5 graus e com aproximação de duas casas decimais. Após o estudo da tangente, sugere atividades para o ensino de seno e cosseno no triângulo retângulo e ainda, propõe a construção de uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente para ângulos, variando de 5 em 5 graus e com valor máximo de 85 graus.

Depois de definir seno e cosseno para ângulos $0° < \alpha \leq 90°$, é proposta uma atividade para defini-los para qualquer ângulo α compreendido entre $0° < \alpha \leq 360°$. A atividade sugere a construção de quatro triângulos retângulos OBA, ODC, OFE, OHG, cuja hipotenusa é igual a 5 centímetros, um dos ângulos agudos iguais a 20°, 40°, 60°e 80°, respectivamente, com vértice em O. Estes triângulos são sobrepostos, de modo que o vértice O é o centro de uma circunferência de raio igual a 5 centímetros e os pontos B, D, F, H pertencem a esta circunferência, como mostra a Figura 7.

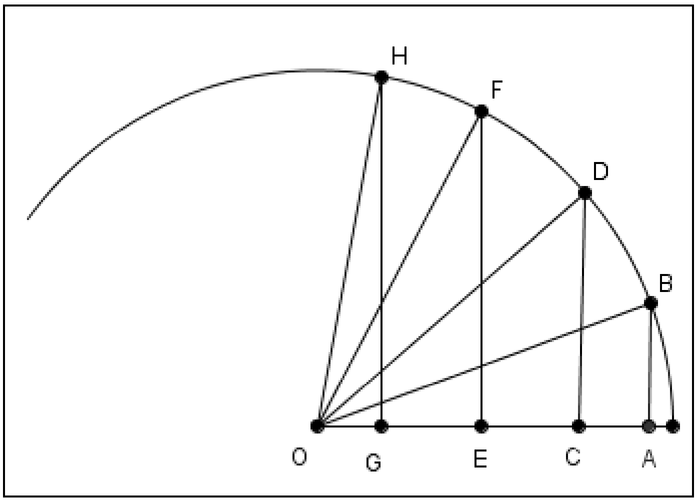


Figura 7. Representação geométrica do seno de zero a trezentos e sessenta graus
Fonte: Adaptado de São Paulo, (1992, p. 95)

Desse modo os senos dos respectivos ângulos serão as medidas dos segmentos AB, CD, EF, GH divididas por cinco, e:

> Invertendo o processo, podemos começar desenhando a circunferência; a seguir marcamos os ângulos (a partir da horizontal) no sentido anti-horário; depois, medimos os catetos verticais e dividimos essas medidas pela medida do raio da circunferência. Finalmente, para não ter de efetuar as divisões, basta considerar uma circunferência de raio unitário. Chegamos assim ao ciclo trigonométrico [...] e com o ciclo, num primeiro momento, podemos chegar aos senos dos ângulos de 0°a 360°(SÃO PAULO, 1992, p. 95).

Depois esta ideia foi ampliada ao cosseno e à tangente. De forma geral, o documento propõe o trabalho com atividades diferenciadas, tais como: atividades em que os alunos precisam medir ângulos, utilizando transferidor; construir teodolitos simples com canudinho de refrigerantes; construir triângulos retângulos; medir seus lados e construir tabelas com os valores de seno, cosseno e tangente; calcular distâncias inacessíveis como a altura de um poste, de um edifício ou um morro, para que os alunos compreendam com mais facilidade as razões trigonométricas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN) (BRASIL, 1998) da mesma forma que a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo do 1º grau não propõem o ensino de

Trigonometria para a 8ª série, mas dão ênfase ao ensino de semelhança de triângulos, teorema de Tales e de Pitágoras que são conhecimentos necessários para se estudar Trigonometria.

Em 1999, o Ministério da Educação (MEC) lançou os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM), (BRASIL, 1999) com a proposta de mudança no Ensino Médio que, com a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB Nº. 9394/96), tornou esta modalidade de ensino como etapa final da Educação Básica, completando o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental. Segundo os PCNEM (BRASIL, 1999) as disciplinas estão divididas em três áreas de conhecimento, (Linguagens e Códigos, Ciências Humanas, Ciências da Natureza e Matemática) todas acompanhadas de suas Tecnologias.

Segundo este documento, a área Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias tem o objetivo de com as outras áreas do conhecimento desenvolver nos educandos habilidades e competências que os tornarão cidadãos capazes de compreender e contribuir para o conhecimento técnico; desenvolver meios para interpretar fatos naturais; compreender a dinâmica de nossa vida e o convívio harmônico com o mundo da informação. Também deve propiciar: “Entendimento histórico da vida social e produtiva, de percepção evolutiva da vida, do planeta e do cosmos, enfim, um aprendizado com caráter prático e crítico e uma participação no romance da cultura científica”. (PCNEN) (BRASIL, 1999, p. 17)

Esse documento apresenta uma proposta interdisciplinar com uma relevância muito grande em relação à Matemática, em razão de seu caráter universal, esta disciplina está presente em quase todas as atividades da vida na sociedade atual:

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 1999, p. 21).

O documento sugere como critério central a contextualização, ou seja, o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou a relevância cultural do tema e cita como exemplo as funções pelo seu caráter integrador:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o individuo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na solução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL, 1999, p.89)

O documento descreve ainda as habilidades e competências que devem ser desenvolvidas pela disciplina. Dentre elas,

> Ler e interpretar textos de matemática.
> Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).
> Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráfico, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.
> Exprimir com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
> Produzir textos matemáticos adequados.
> Utilizar corretamente instrumentos de medição e desenho.
> Identificar o problema (compreender enunciados formular questões, etc.).
> Formular hipóteses e prever resultados.
> Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.
> Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real.
> Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> Relacionar etapas da história da matemática com a evolução da humanidade. (BRASIL, 1999, p.93)

Na aprendizagem de matemática, é importante que os alunos conheçam essas habilidades, para que possam desempenhá-las sempre que precisarem tanto na vida escolar como no exercício de sua cidadania.

Em 2006, o Ministério da Educação lançou um documento intitulado Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (doravante OCNEM), que vem completar os Parâmetros Curriculares Nacionais lançados anteriormente. Neste documento, os conteúdos estão mais explícitos, pois propõe ideias para trabalhar os temas e relacioná-los com outras áreas e com a própria Matemática.

Assim, divide a Matemática em quatro blocos, a saber: Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de Dados e Probabilidade. Daí nosso objeto de estudo encontra-se no bloco funções:

> No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos do ensino médio. Na introdução das razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0° e 90°, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90° e 180°. (BRASIL, 2006, p. 73)

As OCNEM, recomendam a determinação de elementos de um triângulo, utilizando as leis do seno e do cosseno, também sugerem para que alguns tópicos de Trigonometria sejam dispensados, como as fórmulas para $sen(a+b)$ e $\cos(a+b)$, além das outras três razões trigonométricas cotangente, cossecante, secante.(BRASIL, 2006)

No documento, há um parágrafo que chama a atenção, pois mostra a importância de compreender a transição das relações trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico, a fim de que os alunos entendam as funções trigonométricas, como extensões dessas razões.

O último documento a ser analisado é a Proposta Curricular do Estado de São Paulo de Matemática, (PCESPM), (SÃO PAULO, 2008). Na Proposta

Curricular do Estado de São Paulo de 2008, a Matemática é desvinculada do bloco das disciplinas Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois é considerada como área específica por três razões principais:

> A Matemática compõe com a Língua Materna um par fundamental, mas de caráter complementar: é impossível reduzir um dos sistemas simbólicos ao outro. Se língua se aproximar demasiadamente do modo de operar da Matemática resultará empobrecida, e o mesmo poderia ocorrer com um texto matemático que assumisse a ambivalência, apropriada apenas a expressão lingüística.
> A incorporação da Matemática à área de Ciências pode distorcer o fato de que a matemática, mesmo oferecendo uma linguagem especialmente importante e adequada para a expressão científica, constitui um conhecimento específico da educação básica.
> O tratamento da Matemática como área específica pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento (SÃO PAULO, 2008, p.38-39).

Neste documento, os conteúdos de todas as disciplinas estão organizados em séries e nosso objeto de estudo, a trigonometria, está proposta da seguinte forma: na 8ª série do Ensino Fundamental com proporcionalidade e geometria, semelhança de triângulo e razões trigonométricas no 3º bimestre desta série; já no 4º bimestre da 1ª série do Ensino Médio, os conteúdos são razões trigonométricas no triângulo retângulo, resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos cossenos; para a 2ª série do Ensino Médio, a trigonometria está proposta para ser trabalhada no 1º bimestre, e apresentada como importante característica para estabelecer a ligação entre o eixo Geometria e Medidas e o eixo Número e Funções. Nesta série, os conteúdos da trigonometria estão, assim, distribuídos: fenômenos periódicos, funções trigonométricas, equações e inequações trigonométricas e adição de arcos.

Outra característica da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008, é que com ela foram elaborados cadernos dirigidos aos professores com orientações para sua implantação e cadernos de atividades aos alunos.

Este estudo foi importante, pois ao elaborar a sequência de ensino foi necessário saber para qual série estava proposta a trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico e saber como abordar esse tema para que os alunos possam compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico.

1.4 Escolha do *software* de geometria dinâmica

Dentre os *softwares* de geometria dinâmica disponíveis gratuitamente na rede mundial de computadores, escolhemos o Geogebra, que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, trata-se de um *software* de matemática dinâmica e reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo.

O Geogebra possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica: pontos, retas, segmentos, circunferências, arcos, secções cônicas, além de uma janela de álgebra que mostra as equações e as coordenadas de um ponto. Por isso apresentam a vantagem didática de mostrar ao mesmo tempo a conversão entre duas representações diferentes de um mesmo objeto, as representações gráficas e algébricas.

O *software* encontra-se disponível em vários idiomas, dentre eles, o Português; dispõe de uma ajuda com exemplos que descrevem todas as funções e comandos, além de um fórum de usuários que o utilizam para a realização de discussões e esclarecer dúvidas.

O Geogebra distingue três tipos de ponto, como podemos ver na Figura 8: pontos livres, A e B; ponto sobre um objeto, D; e ponto de intersecção entre dois objetos, G.

- Ponto livre: movimenta-se livremente na tela, pois não depende de nenhum objeto para sua existência;
- Ponto sobre objeto movimenta-se somente no objeto a que pertence;
- Ponto de intersecção é o ponto de intersecção de dois ou mais objetos.

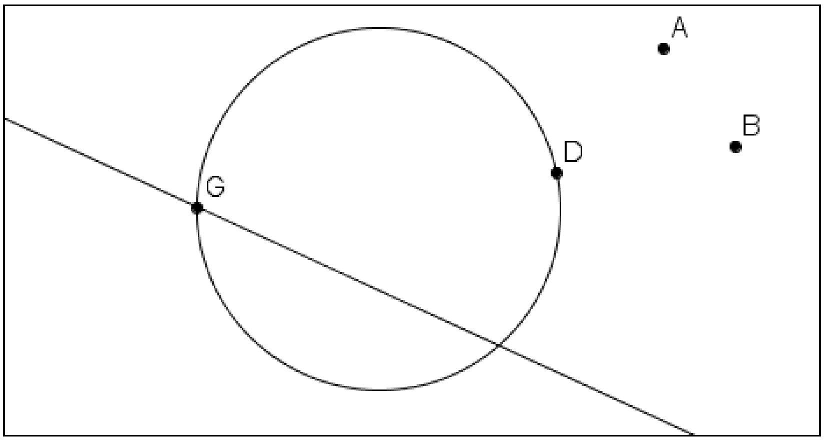


Figura 8. Algumas representações de pontos no Geogebra

O *software* tem um menu principal com ícones que representam os objetos que podem ser construídos ao serem acionados. O Geogebra permite ao usuário construir e manipular objetos geométricos, construir gráficos de funções e observar seus comportamentos pela movimentação que o programa permite na janela gráfica à direita da tela e, também, a possibilidade de acompanhar algebricamente o que está ocorrendo na janela algébrica à esquerda da tela. Na Figura 9 temos a tela gráfica e a tela algébrica do Geogebra com alguns exemplos de representação gráfica e algébrica de algumas funções.

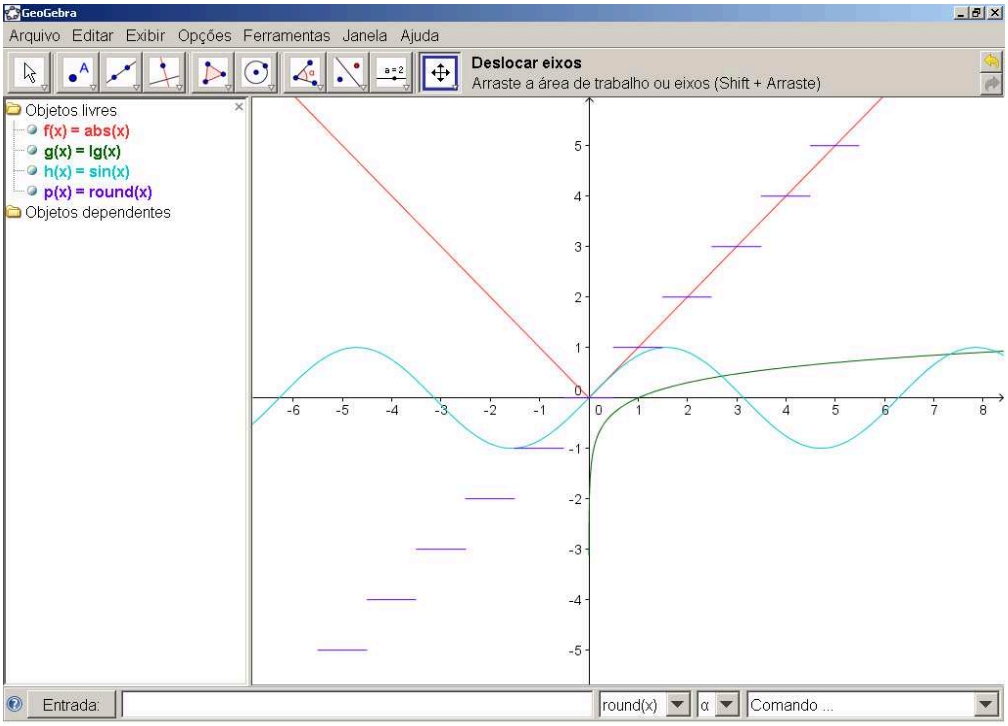


Figura 9. Janela algébrica e geométrica no Geogebra

O Geogebra apresenta algumas limitações, por exemplo, ao executar um cálculo com variáveis (ao dividir a medida do comprimento de dois segmentos) o resultado do cálculo não aparece na janela gráfica e se precisarmos acompanhar esse resultado é necessário abrir a janela algébrica. Por essa limitação nas atividades que precisarmos deixaremos a janela algébrica aberta.

CAPÍTULO 2

PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos nossa questão de pesquisa e as hipóteses para validá-la, nosso referencial teórico e os procedimentos metodológicos.

2.1 Delimitação do problema e questão de pesquisa

Após os estudos iniciais, observamos que o ensino de trigonometria apresenta várias dificuldades e obstáculos para a aprendizagem dos alunos. No estudo a respeito da evolução da trigonometria, percebemos que o seno inicialmente estava relacionado com a corda de um ângulo central de uma circunferência. Depois os hindus usaram a semicorda do ângulo central de uma circunferência e, na Europa Ocidental, após o Renascimento passa a ser a razão entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Ao elaborar as atividades, procuramos desenvolvê-las de modo que o aluno utilize instrumentos de construção geométrica ou o *software* de geometria dinâmica, pois uma das habilidades que o aluno precisa desenvolver ao estudar matemática é "fazer validar conjecturas experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades" (BRASIL, 1999, p. 93). Assim recorreremos ao recurso da construção geométrica para que o aluno aprenda a manipular instrumentos de construção (compasso, régua, transferidor) em conformidade com a habilidade que precisa ser desenvolvida no aluno que é "utilizar corretamente instrumentos de medição e desenho" (BRASIL, 1999, p. 93). Devemos levar o aluno a compreender o significado de seno, cosseno e tangente de ângulos maiores que 90°, e que ele perceba que os valores são os mesmos (a menos do sinal) que os encontrados para os ângulos agudos (ângulos menores que 90°).

Acreditamos que levar o aluno a descobrir com atividades experimentais em ambiente computacional ou com atividades com as quais ele manipule instrumentos de medida ou outros materiais didáticos, possa despertar nele o interesse por estudar trigonometria.

Diante desta realidade e das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de trigonometria veio o seguinte questionamento:

Atividades com material manipulativo e com o computador podem favorecer a aprendizagem de alunos na transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico?

Para responder nossa questão de pesquisa, levantamos três hipóteses:

1. Acreditamos que atividades manipulativas bem orientadas podem auxiliar na aprendizagem da transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.
2. A interação entre o aluno e um *software* de geometria dinâmica faz com que ele aprenda as razões trigonométricas no triângulo retângulo e o círculo trigonométrico.
3. Acreditamos que a construção do círculo trigonométrico pelos alunos possa dar significado aos valores numéricos do seno, cosseno e tangente para ângulos maiores que 90°.

O objetivo de nossa pesquisa é verificar se atividades manipulativas e o computador contribuem para a aprendizagem da transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

2.2 Referencial teórico

Para fundamentar nossa pesquisa e no intuito de que os alunos possam melhor compreender as razões trigonométricas e sua transição para o círculo trigonométrico, utilizaremos a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau para a elaboração, aplicação e análise da sequência didática.

2.2.1 A Teoria das Situações Didáticas

Segundo Almouloud (2007) o objetivo da Teoria das Situações Didáticas é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, que conduzam, com certa frequência, modificações de um conjunto de comportamentos dos aprendizes. Estas modificações decorrem da aquisição de um conjunto de conhecimentos e da ocorrência de uma aprendizagem significativa.

De acordo com o autor, como mostra a Figura 10, o objeto central do estudo desta teoria não é o aluno, mas a situação didática nas quais são identificadas as interações firmadas entre professor, aluno e o saber.

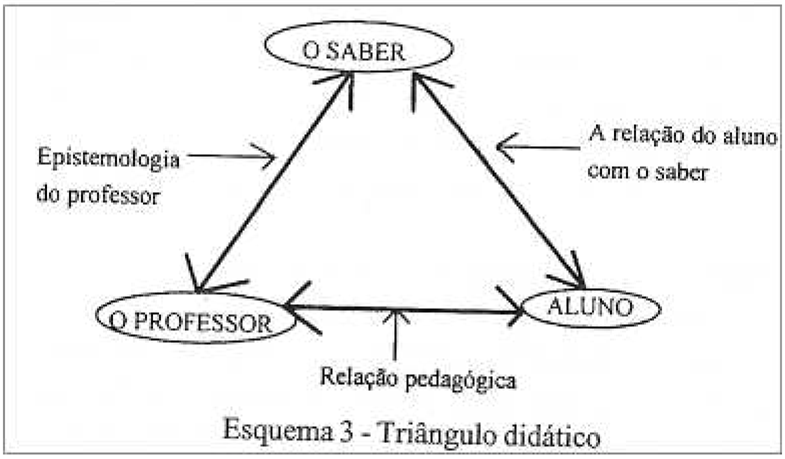


Figura 10. Triângulo didático
Fonte: Almouloud, (2007, p 32)

De acordo com Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas apoia-se em três hipóteses: a aprendizagem do aluno acontece quando este se adapta ao *milieu* (meio), que é um fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, como é a sociedade humana. O *milieu* (meio) que não está com intenções didáticas é insuficiente para permitir a apreensão de conhecimentos matemáticos pelo aluno. Por isso, o professor deve criar e organizar o meio para que este possa suscitar e provocar a aprendizagem. O meio e as situações devem engajar fortemente os conhecimentos matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Almouloud (2007) afirma que, na Teoria das Situações Didáticas a situação didática é definida por Brousseau como:

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos), e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição. (BROUSSEAU, 1978 apud ALMOULOUD, 2007, p. 33)

Segundo Almouloud (2007), uma situação adidática é uma situação em que a intenção de ensinar não é dita ao aluno, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para dar condições favoráveis aos alunos de se apropriarem do novo saber que deseja ensinar. Segundo o autor, uma situação adidática tem as seguintes características:

> O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir, e evoluir por iniciativa própria;
> O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação [...].
> O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s). (ALMOULOUD, 2007, p.33)

A situação adidática possui quatro fases que podem ser de ação, formulação, validação e institucionalização. Estas se entrelaçam fortemente umas em relação às outras. De acordo com Freitas (2002) a:

Situação de ação: em um contexto de aprendizagem, quando o aluno está envolvido ativamente na busca da solução de um problema e realiza ações imediatas que produzem um conhecimento de natureza operacional. Assim, o aluno fornece uma solução, mas não explicita os mecanismos utilizados para chegar a tal solução. Numa situação de ação, há sempre predominância quase exclusiva do aspecto experimental do conhecimento, por exemplo, quando o aluno em um problema de construção geométrica apresenta uma figura construída com régua e compasso sem a preocupação de justificar a validade de sua construção.

Situação de formulação: na solução do problema, o aluno apresenta modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, também, utiliza uma linguagem mais apropriada.

Segundo Almouloud (2007) nesta fase o aluno troca informações com uma ou mais pessoas, em mensagens escritas ou orais que podem estar na língua natural ou matemática, é o momento em que o aluno explicita as ferramentas que utilizou e a solução encontrada.

Situação de validação: o aluno utiliza mecanismos de provas, nessa situação, seu trabalho não se refere apenas às informações em torno do conhecimento, mas a certas afirmações, elaborações e declarações a respeito desse conhecimento. De acordo com Almouloud (2007), nesta fase o aluno deve mostrar a validade do modelo que criou, submetendo-o ao julgamento de outra pessoa;

Situação de institucionalização visa a estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. O conhecimento passa a ter um *status* mais universal do que aquele limitado e imposto pela particularidade do problema estudado.

Em nosso trabalho, mostraremos as situações de ação, formulação e validação realizadas pelos alunos e a situação de institucionalização será realizada pelo pesquisador ao término das atividades.

2.3 Procedimentos metodológicos

Para aplicação e elaboração da sequência didática, utilizamos alguns pressupostos da Engenharia Didática que é caracterizada por um esquema experimental com base em realizações didáticas. Aborda situações de aplicação de sequência em sala de aula e os fenômenos didáticos. As análises *a priori* das situações didáticas e a experimentação e análise *a posteriori*, a confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* serão usadas para responder nossa questão de pesquisa e validar as nossas hipóteses.

Em nossa análise *a priori* das atividades faremos a análise didática e matemática, como as definem Almouloud (2007). Na análise matemática, procuraremos identificar as estratégias de resolução de cada situação e evidenciaremos os conhecimentos e saberes matemáticos envolvidos.

Na análise didática, consideraremos os seguintes aspectos:

> [...] pertinência das situações propostas, em relação ao saber matemático visado e em relação aos saberes anteriormente adquiridos.
> Identificar as variáveis de comando da situação e escolher aquelas necessárias para o estudo.
> Estudar a consistência das situações, isto é, verificar se as variáveis escolhidas não possibilitam que os alunos construam conhecimentos incompatíveis, mesmo que de modo provisório.
> Prever e analisar as dificuldades que os alunos podem enfrentar na resolução de cada atividade.
> Identificar os novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos podem adquirir.
> Prever os saberes/conhecimentos e/ou métodos de resolução de problemas que devem ser institucionalizados. (ALMOULOUD, 2007, p.176-177)

Na análise *a priori,* consideraremos as possíveis soluções além das dificuldades que os sujeitos poderão encontrar na resolução das atividades, onde e quando o professor deverá intervir para institucionalização do saber esperado na atividade.

Ao confrontarmos a análise *a priori* com *a posteriori,* verificaremos se nossa questão de pesquisa foi respondida ou não. A análise *a posteriori* mostrará se nossas análises *a priori* foram correspondidas ou não, se ocorrerem problemas não previstos, procuraremos entender o ocorrido com base na teoria escolhida.

Em nossas atividades adaptamos, alguns arquivos cedidos pela professora doutora Maria José Ferreira da Silva, que os utilizavam em suas aulas da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar, curso de Física da PUC/SP. Tivemos de adaptar os arquivos cedidos, pois ela utiliza outro *software* de geometria dinâmica, que não é o Geogebra e, também, não está disponível gratuitamente na rede mundial de computadores.

Em nossa seqüência de ensino, utilizaremos a geometria dinâmica como recurso didático, pois os arquivos já estão prontos e os alunos terão de movimentar as construções e observar seus comportamentos. Usaremos também atividades em que os alunos terão que manipular instrumentos de construção e de medidas, pois queremos que ele desenvolva essa habilidade prevista nos PCNEM. (BRASIL, 1999)

A coleta de dados será feita ao analisarmos os protocolos dos alunos, os relatórios dos observadores e da gravação em áudio da aplicação das atividades.

CAPÍTULO 3

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo discorreremos sobre o local de aplicação da sequência didática, os sujeitos da pesquisa, o tempo estimado, a aplicação e as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades.

3.1 A escola e os sujeitos da pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada na escola Estadual Professor Rogério Levorin da periferia do município de Francisco Morato, na Grande São Paulo, unidade escolar do pesquisador. Conta com 1410 alunos matriculados no Ensino Fundamental e 878 no Ensino Médio. A comunidade no entorno escolar é, em sua maioria, composta de pais que trabalham em outros municípios e grande parte é atuante na escola.

O prédio é bem estruturado, conta com 22 salas de aula, uma biblioteca em funcionamento diário com a prestação de serviços de uma funcionária readaptada, laboratório de ciências físicas e biológicas, laboratório de informática com dez computadores ligados em rede com a Internet. A escola possui uma sala de vídeo com um *datashow*, um *laptop* e diversos materiais didáticos para todas as disciplinas.

Os Horários de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC) são programados e estruturados para acontecerem em 2 dias por semana, sempre contando com material para a formação continuada do professor e aprendizagem do aluno.

Este horário é um dos pontos fortes e marcantes na Escola que procura sempre fazer com que seus professores cresçam profissionalmente. Os conselhos de classes são realizados com a participação do corpo docente, corpo discente e pais. Pedimos autorização à Direção da Escola que se prontificou a nos dar todo o apoio necessário para realizar a pesquisa em suas dependências.

Os sujeitos da pesquisa são alunos da Escola que estudam na 2ª série do Ensino Médio, do período noturno que estão na faixa etária de 14 a 16 anos. Realizamos a pesquisa na 1ª semana do mês de junho de 2009, com oito alunos que trabalharam em duplas na execução das atividades, fora de seu horário de aula.

3.2 Aplicação da sequência de ensino

Desenvolvemos uma sequência com 12 atividades que se encontra na integra no anexo A, e fizemos a aplicação de um piloto em dois sujeitos para realizar os ajustes necessários nas atividades. A aplicação do piloto não foi no horário de aula e utilizamos um *laptop* para que a dupla executasse as investigações, manipulando os arquivos do *software* de geometria dinâmica, depois dos ajustes prontos, aplicamos a sequência de ensino para oito alunos que não eram alunos do pesquisador.

Foram necessários quatro encontros para a aplicação das atividades com aulas duplas, cada aula com duração de 50 minutos. No primeiro encontro, as duplas executaram as atividades 1, 2, 3 e 4, e na 4ª atividade fizemos a institucionalização, pois nesta atividade encerrava-se a investigação no triângulo retângulo. No segundo encontro as duplas realizaram as atividades 5, 6, 7 e 8. Ao finalizar a 8ª atividade, foi institucionalizado o que pretendíamos com estas atividades. No terceiro encontro, foram realizadas as atividades 9 e 10 e, no último encontro, as atividades 11 e 12.

Nas atividades em que foram utilizados os computadores com o *software* de geometria dinâmica (Geogebra), o pesquisador mostrou aos alunos os comandos principais do *software,* a janela algébrica, gráfica e, também, os procedimentos para a movimentação da figura.

Antes de iniciarmos a aplicação das atividades, reunimos os oito alunos e conversamos sobre que esperávamos deles, como seria nossa atuação no decorrer das atividades. Explicamos que eles participavam de uma pesquisa e que seus comportamentos e diálogos seriam observados. Comentamos a necessidade de se envolverem na resolução das atividades, que poderiam discutir os métodos que usariam para resolver as atividades com o parceiro e perguntar caso não entendessem o que era proposto na atividade. Para não identificarmos os alunos, estes seriam chamados de A, B, C, D, E, F, G e H quando nos referirmos aos registros de seus protocolos.

3.3 Análise a *priori* e a *posteriori* das atividades

Atividade 1:

1. Abra o arquivo **triângulo ret.ggb**.

a) Movimente o ponto B e observe a medida do ângulo α.

b) O que você observou?

c) O que aconteceu com as medidas dos lados do triângulo?

d) Movimente os pontos A e C, registre suas observações.

A atividade 1 é uma proposta de investigação com base em um arquivo de geometria dinâmica, cujo objetivo é mostrar que ao movimentar o ponto A ou ponto B (Figura 11), o ângulo α não varia e que o movimento dos vértices da figura não altera a forma do triângulo retângulo.

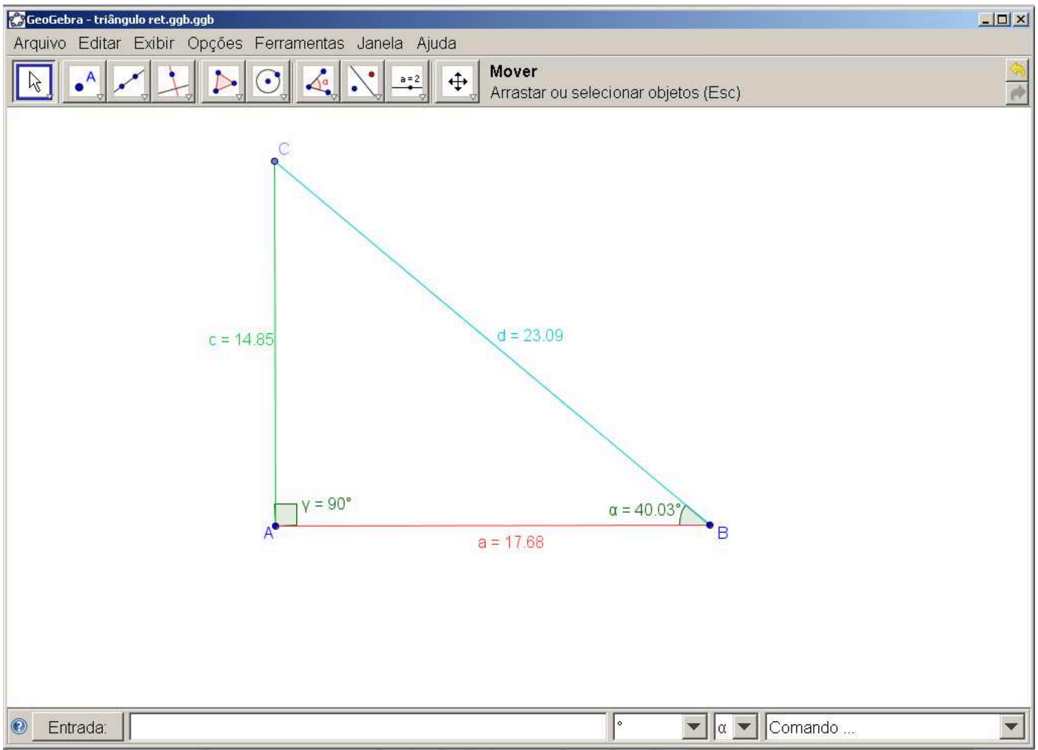


Figura 11. Tela do Geogebra com a figura da atividade 1

Ao abrir o arquivo **triângulo ret.ggb**, o aluno deveria ver na tela do computador a figura de um triângulo retângulo com vértices A, B, C e as medidas dos segmentos que representam os lados do triângulo como mostra a Figura 11. A construção permite a movimentação dos vértices do triângulo e as mudanças ocorridas, estas movimentações deveriam ser observadas pelos alunos. Ao mover os vértices, as medidas dos lados eram alteradas e estas alterações poderiam ser observadas pelos alunos na figura. A construção foi feita de modo a permitir que, ao movimentar os vértices A ou B, se obtém uma infinidade de triângulos semelhantes ao triângulo ABC dado inicialmente e, ao movimentar o vértice C, os ângulos agudos do triângulo inicial variariam e seriam obtidos triângulos não semelhantes ao triângulo inicial.

Esta atividade foi introdutória, pois as observações feitas pelos alunos serviriam para prosseguir nas atividades seguintes. Na atividade era necessário que os integrantes das duplas discutissem, formulassem suas hipóteses, tentando validá-las como previmos em nosso aporte teórico.

No item (**a**) esperava-se que os alunos não sentissem nenhuma dificuldade para realizá-lo. No item (**b**) esperava-se que os alunos notassem que ao mover o ponto B o ângulo α não variaria, e no item (**c**) esperava-se que os alunos observassem que as medidas dos lados do triângulo variassem conforme se movimenta o ponto B.

Para o item (**d**) esperava-se que os alunos observassem que ao movimentar o ponto A o ângulo α não variaria e que ao mover o vértice C o ângulo α variasse e que em ambos os casos, as medidas dos lados iriam variar.

Para executarem a atividade, esperava-se que os alunos vivenciassem a situação de ação na leitura da atividade, ao movimentarem os vértices do triângulo; ao se empenharem na resolução da atividade, de formulação ao conversar um com o outro integrante da dupla sobre suas hipóteses e na validação escreveriam suas conclusões, após convencer o colega de que elas estavam corretas.

Aplicação e análise a posteriori da atividade 1

Durante a aplicação, houve o envolvimento esperado pelo pesquisador. Os alunos mostravam preocupação em acertar e deixar claro que entenderam o que estava sendo pedido na atividade. Os alunos E e F não estavam conversando ao realizarem a atividade, porém o pesquisador disse-lhes que era necessário que trocassem ideias, pois a atividade era para ser discutida pelas duplas. Os alunos C e D interagiram bem entre si, mas mostraram grandes dificuldades de interpretação. Os alunos G e H não conheciam o símbolo da letra grega alfa e ao lerem a atividade a chamaram-na de “a”. O pesquisador ao perceber o ocorrido perguntou aos demais alunos se conheciam o símbolo α (apontando-o na a tela do computador), e os alunos disseram que era um “a”. Assim, foi necessária uma intervenção para lhes apresentar os símbolos das letras gregas utilizados nas atividades.

No item (**a**) da atividade as duplas executaram o que lhes foi solicitado e seus integrantes revezavam-se para movimentar a figura apresentada pelo *software*.

No item (**b**), as alunas A e D deram as seguintes respostas em seus protocolos, como mostra nas Figuras 12 e 13:

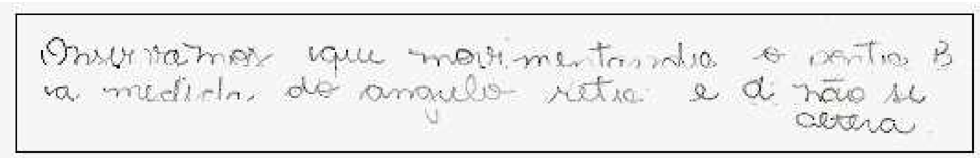

Observamos que movimentando o ponto B a medida do angulo reto e α não se altera.

Figura 12. Registro da aluna A para o item a da atividade 1

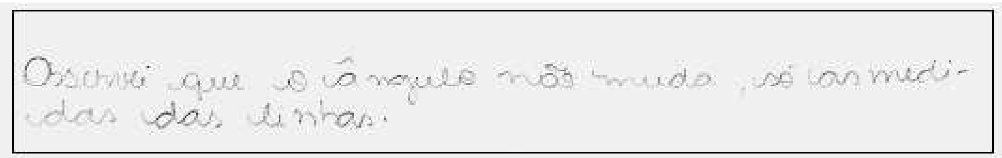

Observei que o ângulo não muda, só as medi-das das linhas.

Figura 13. Registro da aluna D para o mesmo item

Com esta resposta, entendemos que a aluna A ao observar a figura não se limitou a olhar só o ângulo α, mas também observou que o ângulo reto contido na figura não muda como mostra a Figura 12. A aluna D, ao relatar “*só as medidas das linhas*”, referia-se às medidas dos lados do triângulo. Os outros alunos perceberam que a medida do ângulo α não muda ao movimentarem o ponto B.

No item (**c**), as alunas A e C escreveram em seus protocolos (Figuras 14 e 15):


Observando os lados do triângulo eles se alteram conforme se muda de posição.

Figura 14. Registro da aluna A para item c atividade 1

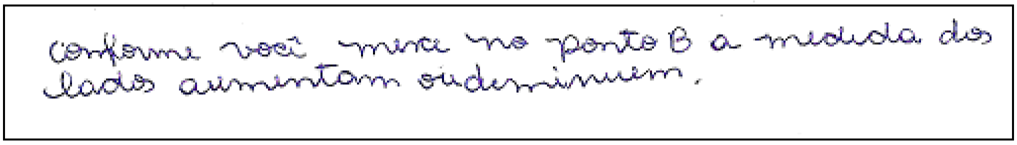

conforme você mexe no ponto B a medida dos lados aumentam ou diminuem.

Figura 15. Registro da aluna C para o mesmo item

Entendemos que a aluna A atingiu o que era solicitado na atividade, embora seu registro não fosse objetivo, como o da aluna C. Ao analisar os protocolos, notamos que ela apresentou dificuldade para expressar por escrito as suas ideias, mesmo assim percebeu que, ao mover o ponto B, as medidas dos lados alteraram-se.

No item (**d**), a aluna B escreveu em seu protocolo representado pela Figura 16:

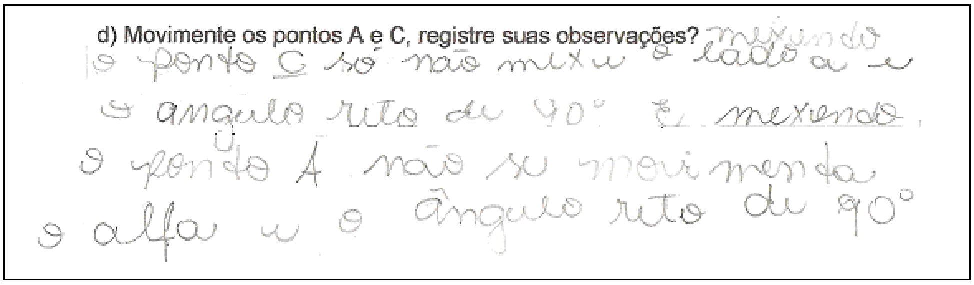
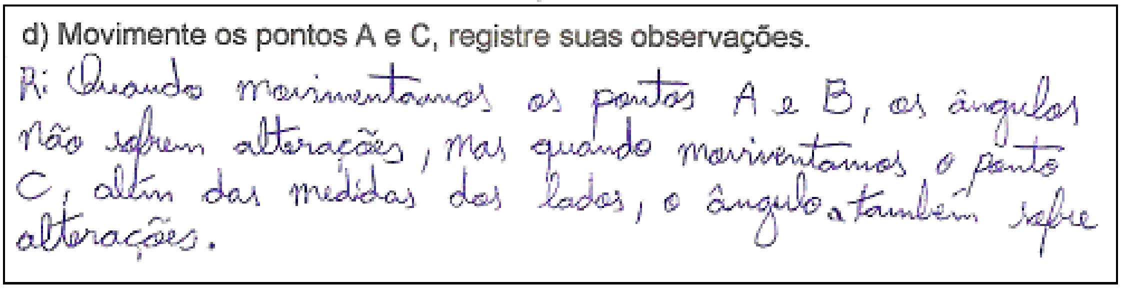

d) Movimente os pontos A e C, registre suas observações? mexendo o ponto C só não mexe o lado a e o ângulo reto de 90° e mexendo o ponto A não se movimenta o alfa e o ângulo reto de 90°

Figura 16. Registro da aluna B para item d da atividade 1

Compreendemos que a aluna ao escrever "*não se movimenta o alfa*", queria dizer que a medida do ângulo alfa não muda ao movimentar o vértice A, e a resposta foi redundante, pois escreveu "*ângulo reto de 90°*". A aluna B também percebeu que, ao mover o ponto C, a medida do lado *a* do triângulo não variava.

Para este mesmo item, o aluno G deu a seguinte resposta em seu protocolo, representado pela Figura 17:



d) Movimente os pontos A e C, registre suas observações.

R: Quando movimentamos os pontos A e B, os ângulos não sofrem alterações, mas quando movimentamos o ponto C, além das medidas dos lados, o ângulo a também sofre alterações.

Figura 17. Registro do aluno G para o item d da atividade 1

Ao escrever "*os ângulos não sofrem alterações*" o aluno referia-se às medidas dos ângulos que não variavam ao mover os pontos A ou B, por meio dessa resposta, entendemos que este aluno atingiu o que propusemos nesta atividade. Salientamos também que, embora não tenhamos registrado todas as respostas dos alunos, todos perceberam que ao movimentar os pontos A e B, as medidas dos ângulos não variavam, e ao movimentar o ponto C, as medidas dos ângulos agudos variavam.

Ao realizar esta atividade os alunos vivenciaram a situação de ação ao abrirem o arquivo **triângulo ret.ggb**, ao lerem a atividade (os alunos leram a atividade um para o outro antes de abrir e movimentar o arquivo), ao moverem os vértices do triângulo; a situação de formulação ao conversarem com o colega (a aluna H perguntou para o aluno G *"... o que significa o esse asinho aqui? Será que isso é um a? Parece um símbolo sei lá..."*). E ele respondeu... "*é um a, é o ângulo a*..." e apontou para a figura da tela do computador. A aluna A ao movimentar o ponto B disse à aluna B "... *ao movimentar o ponto B o ângulo reto e o ângulo alfa não varia...*" e moveu o ponto B em várias direções para que a aluna A observasse e, em situação de validação, ao convencerem o colega de que suas hipóteses estavam corretas (mesmo não estando). Todos perceberam que, ao mover os pontos A e B, a medida do ângulo α não variava e ao mover o ponto C a medida do ângulo α variava.

Atividade 2
Na parte inferior da tela há uma janela onde está escrito *entrada*. Aperte o botão esquerdo do mouse dentro dela e digite *c/d,* depois dê “*enter*” e observe na janela algébrica que aparece a letra *f* com o resultado da divisão da medida do lado *c* pela medida do lado *d*.

a) Arraste o ponto B e observe o resultado da razão *c/d* representada pela letra *f*. O que você observou?
b) A medida do ângulo α alterou?
c) Movimente o ponto A observe o resultado da razão *c/d*. O que você observou?
d) A medida do ângulo α alterou?
e) Movimente o ponto C observe o resultado da razão *c/d*. O que você observou?
f) A medida do ângulo α alterou?

A atividade 2 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica cujo o objetivo é que os alunos percebam que, em triângulos retângulos semelhantes, para cada ângulo agudo, a razão entre a medida do cateto oposto a ele e a medida da hipotenusa são constantes.

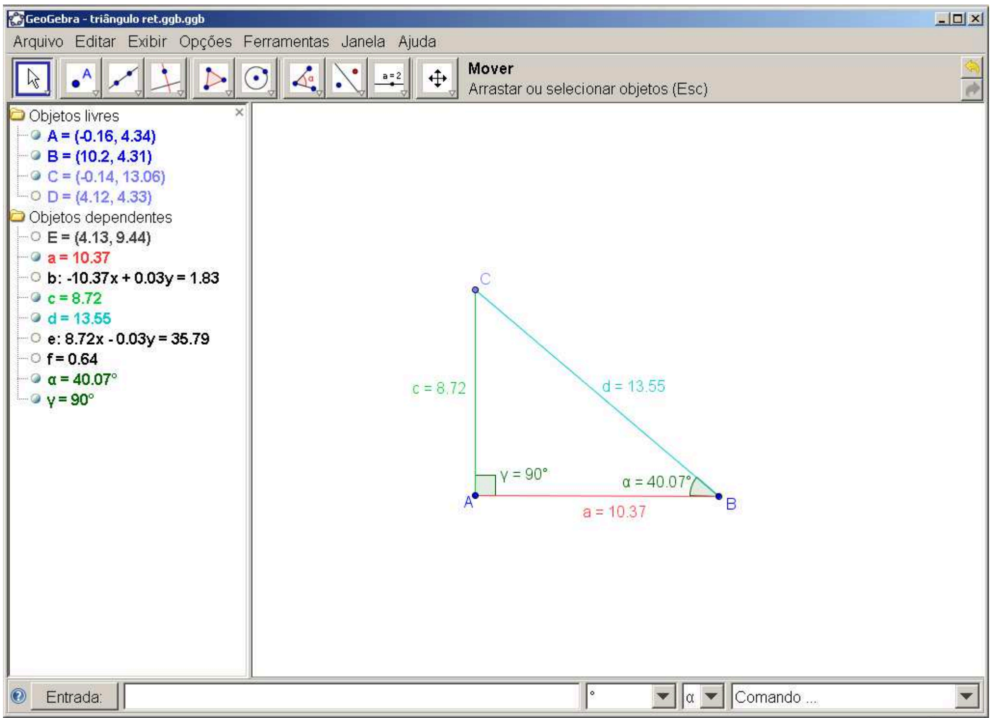


Figura 18. Tela da atividade 2 com a janela algébrica e janela de entrada

Na atividade foi utilizado o mesmo arquivo da atividade 1, (porém com a janela algébrica aberta como mostra a Figura 18), foi entregue aos alunos uma folha com o enunciado para que executassem a atividade. Ao abrirem o arquivo, os alunos veriam na tela do computador um triângulo retângulo e a janela algébrica. Na parte inferior da tela havia uma janela, que era um campo de entrada; nela, os alunos deveriam digitar os comandos pedidos na atividade para que o programa executasse-os.

Ao realizarem os procedimentos para que o programa executasse a razão da medida do lado *c* pela medida do lado *d* apareceria na janela algébrica a letra *f,* representando o resultado da razão.

Nos itens (**a**) e (**b**), os alunos deveriam movimentar o ponto B e observariam que a razão representada pela letra *f* não variaria e que a medida do ângulo α não mudaria.

Nos itens (**c**) e (**d**)*,* após movimentarem o ponto A, os alunos observariam que o valor da razão c/d não variaria e que a medida do ângulo α não alteraria.

Para os itens (**e**), e (**f**), ao movimentarem o ponto C os alunos observariam que o valor da razão c/d mudou e que a medida do ângulo α alterou. Ao mover o ponto C, havia uma infinidade de triângulos que não eram semelhantes ao triângulo ABC dado inicialmente ao abrir o arquivo.

Ao realizar a atividade, esperava-se que os alunos vivenciassem situação de ação, ao ler a atividade, na execução dos comandos, na manipulação para que os vértices do triângulo se movimentassem; situação de formulação quando observassem os resultados na janela algébrica, quando observassem o ângulo α e, ao conversarem com o outro integrante da dupla sobre suas hipóteses, e situação de validação, ao convencerem o colega que dependendo do ponto movimentado o ângulo não iria variar nem a razão c/d.

Análise *a posteriori* da atividade 2

Após lerem a atividade, os alunos começaram a digitar os comandos pedidos. A aluna D mostrou para a aluna C na janela algébrica a letra *f* e mostrou-lhe o resultado da razão apresentada pelo computador. Nessa dupla, a aluna D parecia liderar e a aluna C era mais passiva. Todos os alunos, após digitarem os comandos *c/d,* conseguiram localizar a letra *f* na janela algébrica.

No item (**a**), escolhemos as respostas dos protocolos dos alunos A, C, E H representados pelas Figuras 19, 20, 21 e 22, para contemplar um integrante de cada dupla, pois as respostas das duplas foram muito parecidas:

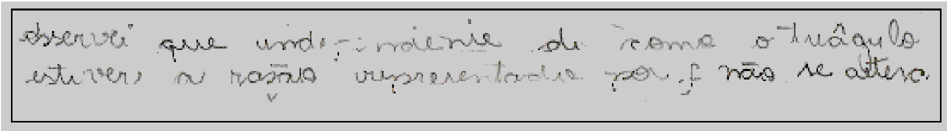

observei que independente de como o triângulo estiver, a razão representada por f não se altera.

Figura 19. Registro da aluna A para o item a atividade 2

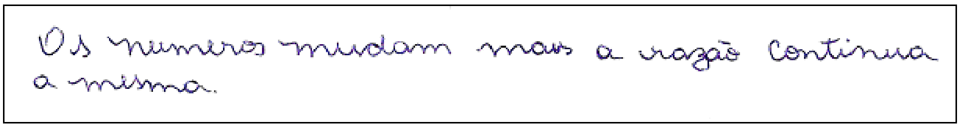

Os numeros mudam mas a razão continua a mesma.

Figura 20. Registro da aluna C para o mesmo item

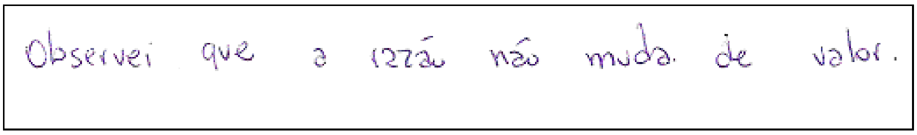

Observei que a razão não muda de valor.

Figura 21. Registro do aluno E para mesmo item

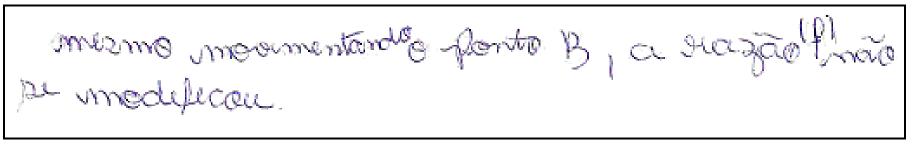

mesmo movimentando o ponto B, a razão (f) não se modificou.

Figura 22. Registro da aluna H para o item a da atividade 2

Embora os alunos escrevessem de forma diferente o que observaram como mostram as Figuras 19, 20, 21 e 22 todos perceberam que, ao mover o ponto B, a razão *f* não mudou. Para essas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao digitarem os comandos na janela de entrada, ao movimentarem o ponto B e ao observarem o movimento causado pelo deslocamento do ponto B; de formulação, a aluna A ao conversar com a aluna B, ”*você esta vendo o que está acontecendo com a razão f...*” e os demais alunos ao mostrarem um ao outro o que acontecia ao movimentarem o ponto B e observarem na janela algébrica o que ocorria com a razão *f* e, por situação de validação, ao registrarem em seus protocolos que a razão *f* não mudou, após convencerem o colega a fazerem os registros iguais aos seus.

No item (**b**), todos os alunos apresentaram respostas parecidas, mostraremos o que as alunas A e D escreveram em seus protocolos, representados pelas Figuras 23 e 24:


não se altera a medida de α

Figura 23. Registro da aluna A para o item b da atividade 2

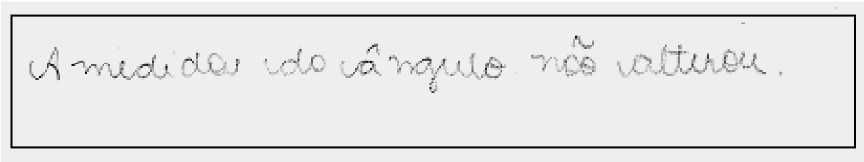

A medida do ângulo não alterou.

Figura 24. Registro da aluna D para o mesmo item

Nesse mesmo item, o aluno E perguntou "... *na b coloca só sim ou não?...".* O pesquisador respondeu-lhe com outra pergunta se ele achava que só "sim" ou só "não" responderia o que estava pedindo.

Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentar o ponto B; formulação, ao observarem e conversarem com o colega que o ângulo α não varia va e, de validação ao e registrarem que a medida do ângulo α não variava.

Ao realizar o item (**c**), todos os alunos apresentaram respostas parecidas com os registros das alunas A e B, representados pela Figura 25:

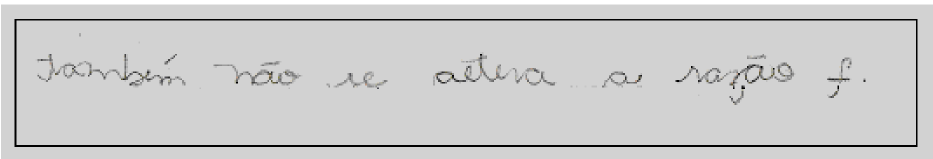

Também não se altera a razão f.

Figura 25. Registro das alunas A e B para o item c da atividade 2

Pelas respostas apresentadas nos protocolos, todos os alunos perceberam que a razão *f* não variava ao mover o ponto A. Para esta resposta, os alunos vivenciaram situação de ação ao movimentarem o ponto A e ao observarem a figura; formulação, a aluna A ao conversar com a aluna B *"... você está vendo, eu mexo com o ponto A e o número em frente ao f não muda..."* (apontando para a janela algébrica na tela do computador) e de validação, ao convencerem um ao outro a apresentarem o mesmo registro em seus protocolos de que a razão *f* não se alterava.

No item (**d**), os alunos apresentaram respostas parecidas com os registros dos protocolos da aluna D ou com os registros das alunas A e B, como mostram as Figuras 26 e 27:

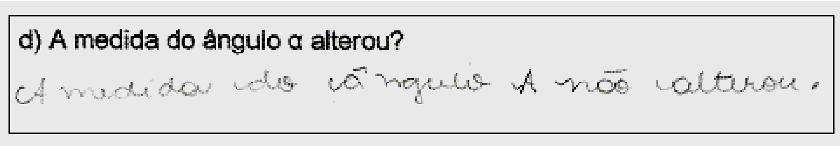

d) A medida do ângulo α alterou?
A medida do ângulo A não alterou.

Figura 26. Registro da aluna D para a item d da atividade 2

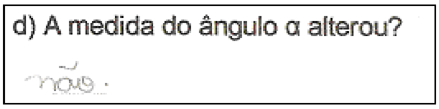

d) A medida do ângulo α alterou?
não.

Figura 27. Registro das alunas A e B para o mesmo item

A maioria dos alunos apresentou respostas sucintas, como as alunas A e B como mostra a Figura 27. Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação ao movimentarem o ponto A e observarem a medida do ânguloα; formulação, ao conversarem com o colega sobre suas observações e, validação, ao escreverem e convencerem os colegas a darem respostas iguais às suas.

Ao movimentarem o ponto C, as alunas A, C, D e H apresentaram os seguintes registros para o item (**e**) em seus protocolos representados pelas Figuras 28, 29, 30 e 31:

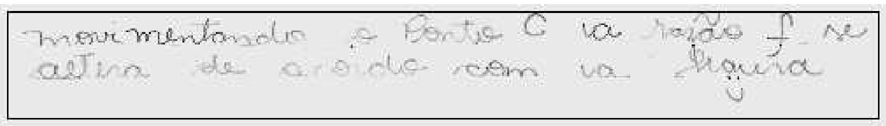

movimentando o Ponto C a razão f se altera de acordo com a figura

Figura 28. Registro da aluna A para o item e da atividade 2


A razão mudou

Figura 29. Registro da aluna C para o mesmo item

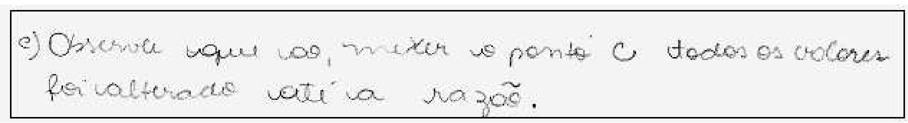

e) Observa que ao, mexer o ponto C todos os valores foi alterado até a razão.

Figura 30. Registro da aluna D para o item e da atividade 2

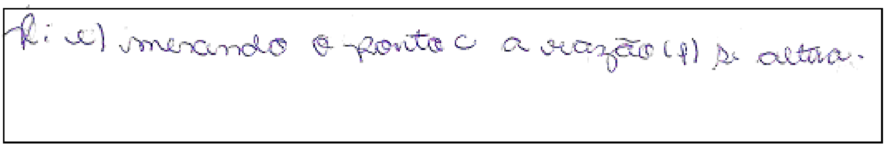

R: e) mexendo o ponto C a razão (f) se altera.

Figura 31. Registro da aluna H para o mesmo item

Ao analisar os registros, percebemos que mesmo escrevendo de modos diferentes suas observações, todos os alunos perceberam que, ao mover o ponto C, a razão *f* muda. Para as respostas, as duplas vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto C, ao observarem o valor da razão *f*; formulação, a aluna A ao conversar com a aluna B que a razão *f* está variava conforme ela mexeu com o ponto C, do mesmo modo quando os outros alunos conversavam um com o outro ao observarem o ocorrido, ao movimentarem o ponto C; validação, ao registrarem em seus protocolos suas respostas por terem certeza de que estavam corretas.

Da mesma maneira as alunas perceberam que a medida do ângulo α mudava de valor ao movimentarem o ponto C, conforme seus registros em seus protocolos para o item (**f**) Figuras 31, 32, 33 e 34:

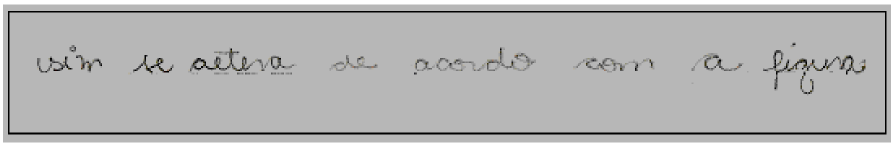

sim se altera de acordo com a figura

Figura 32. Registro da aluna A para o item f da atividade 2


sim

Figura 33. Registro da aluna C para o mesmo item

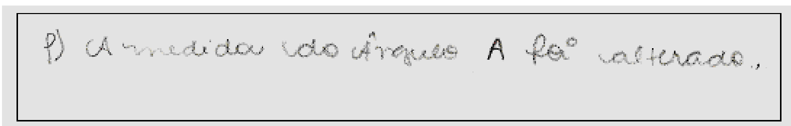

f) A medida do Ângulo A foi alterado.

Figura 34. Registro da aluna D para o item f da atividade 2

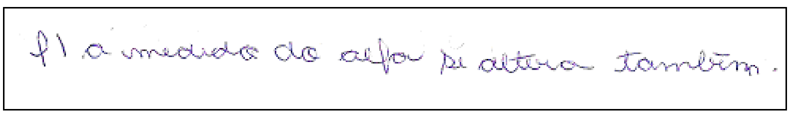

f) a medida do alfa se altera também.

Figura 35. Registro da aluna H para o mesmo item da atividade 2

No protocolo da aluna D, como mostra a Figura 34, ela registrou o nome do ângulo com a letra A por não conseguir fazer o símbolo da letra alfa (α) conforme nos relatou depois. Embora os registros fossem diferentes os alunos perceberam que a medida do ângulo mudava ao mover o ponto C e para estas respostas as duplas vivenciaram situação de ação ao movimentarem e observarem o que ocorreu com a figura; formulação ao tentarem entender porque a medida do ângulo α variava ao movimentarem o ponto C e, validação ao afirmarem e registrarem em seus protocolos que a medida do ângulo alfa mudava.

Nesta atividade, ocorreu o que esperávamos em nossas análises prévias, pois os alunos observaram que a razão *c/d* e o ângulo α não mudaram de valor ao movimentarem o ponto A ou B e que a razão *c/d* e o ângulo α mudaram de valor ao movimentarem o ponto C.

Atividade 3

Na janela de entrada, digite a/d e depois de "*enter*" aparecerá na janela algébrica a letra g que representa a razão da medida do lado a pela medida do lado d.

a) Arraste o ponto B, observe o resultado da razão a/d representada pela letra g. O que você observou?

b) A medida do ângulo α alterou?

c) Movimente o ponto A, observe o resultado da razão a/d. O que você observou?

d) A medida do ângulo α alterou?

e) Movimente o ponto C, observe o resultado da razão a/d. O que você observou?

f) A medida do ângulo α alterou?

A atividade 3 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica. Seu objetivo é que os alunos percebam que, em triângulos retângulos semelhantes, para cada ângulo agudo a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa é constante.

Para esta atividade, foi utilizado o mesmo arquivo da atividade 1. Os alunos receberam uma folha com espaço para registrarem suas observações e com o enunciado para que executassem a atividade.

Os alunos, ao executarem os comandos para que o programa calculasse a razão entre a medida do lado a e a medida do lado d veriam na janela algébrica que o programa chamou esta razão de *g*. Ao movimentarem os pontos A, B, C os alunos deveriam observar o que acontecia com os valores da razão *a/d* e com o ângulo α para que respondessem aos questionamentos propostos na atividade. Ao movimentar os pontos A ou B haveria infinitos triângulos ABC semelhantes ao triângulo inicial. Nesse caso, os alunos deveriam observar que os valores da razão *a/d* não mudariam e ao mover o ponto C a razão *a/d* mudaria de valor porque ao movê-lo seriam obtidos infinitos triângulos ABC com os ângulos agudos variariam para cada posição do ponto C.

Nos itens (**a**) e (**b**), esperava-se que os alunos após suas observações respondessem que a medida do ângulo α não alteraria e que o valor da razão a/d não variaria. Para os itens (**c**) e (**d**), ao movimentarem o ponto A esperava-se que os alunos observassem que a medida do ângulo α não se alteraria e que o valor da razão a/d não variaria.

Nos itens (**e**),e (**f**), quando movessem o ponto C esperava-se que os alunos notassem que a medida do ânguloα varia ria e que a razão a/d mudaria seu valor para cada movimento do ponto C.

Durante a realização da atividade, os alunos vivenciariam a situação de ação na execução dos comandos, ao moverem os vértices do triângulo e na leitura da atividade; formulação, ao observarem os resultados na janela algébrica, ao observarem o ângulo α e ao tentarem convencer o outro integrante da dupla de suas hipóteses, validação ao convencer o colega que dependendo do vértice movimentado não variaria a medida do ângulo e também não variaria a razão a/d.

Análise *a posteriori* da atividade 3

Quando os alunos realizaram esta atividade já estavam familiarizados com os comandos do *software*. Após lerem atividade e executarem os comandos *a/d* todos verificaram que apareceu na janela algébrica a letra *g*: em seguida, após movimentarem o ponto B começaram a conversar um com outro enquanto apontavam para a tela do computador, mostrando na janela algébrica que a razão *g* não mudou de valor. No item (**a**), todos apresentaram registros parecidos com os registros dos alunos A, D, e F mostrados nas Figuras 36,37 e 38.

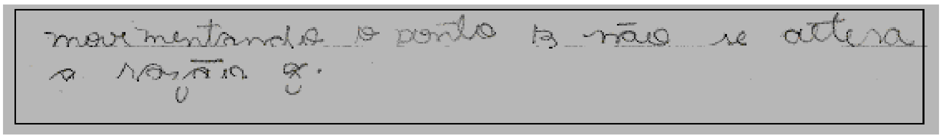

movimentando o ponto B não se altera a razão g.

Figura 36.Registro da aluna A para o item a atividade 3

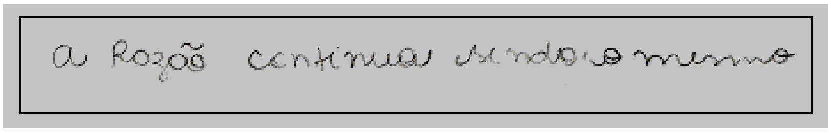

a Razão continua sendo o mesmo

Figura 37. Registro da aluna D para o mesmo item


Eu observei que não muda.

Figura 38. Registro do aluno F para o item a da atividade 3

Mesmo escrevendo de forma diferente em seus protocolos, todos os alunos perceberam que, ao mover o ponto B, os valores da razão *g* não mudaram. Com estas respostas, os alunos atingiram o que queríamos nesse item e os mesmos vivenciaram situação de ação, ao digitarem os comandos, ao movimentarem o ponto B e observarem a janela algébrica; formulação, ao conversarem com o outro integrante da dupla sobre o que estava ocorrendo com o valor da razão *g* que não variava, conforme a movimentação do ponto B e de validação, ao registrarem em seu protocolo sua resposta.

No item (**b**), todos apresentaram respostas parecidas com as dos protocolos das alunas A ou C, mostrados nas Figuras 39 e 40:

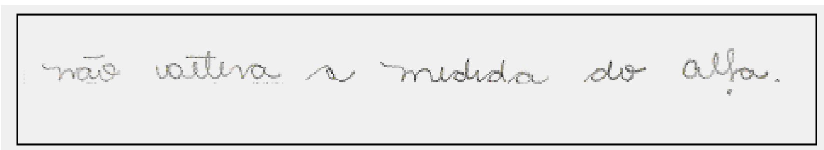

não altera a medida do alfa.

Figura 39. Registro da aluna A para o item b da atividade 3

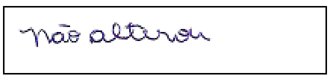

não alterou

Figura 40. Registro da aluna C para o mesmo item

Ao relatar "*não altera a medida do alfa*" a aluna omitiu o termo ângulo, mesmo assim percebeu que a medida do ângulo não variou ao mover o ponto B. A maioria dos alunos apresentou respostas mais sucintas, como a da aluna C mostrada na Figura 40. Para estas respostas os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto B; formulação, ao observarem o ângulo α enquanto moviam o ponto B e quando conversavam com o colega da dupla sobre suas observações; validação ao registrar suas observações em seu protocolo e convencerem os colegas a darem respostas iguais às suas.

Para o item (**c**), os alunos apresentaram registros em seus protocolos como as alunas A, C, D, e H mostrados pelas Figuras 41, 42, 43 e 44.

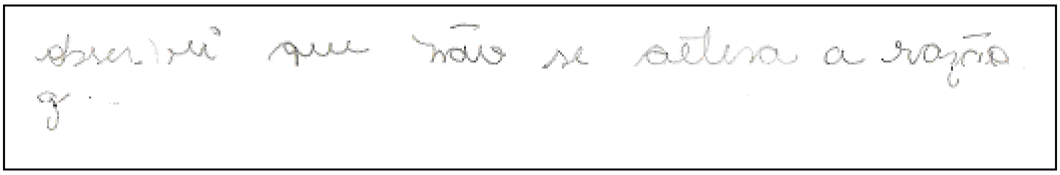

observei que não se altera a razão

Figura 41. Registro da aluna A para o item c da atividade 3

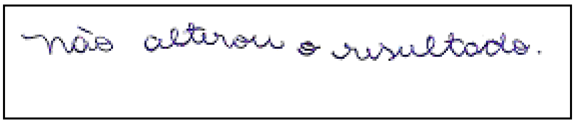

não alterou o resultado.

Figura 42. Registro da aluna C para o mesmo da atividade 3

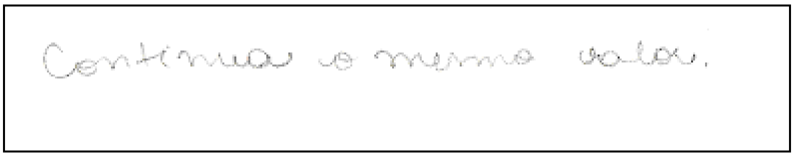

Continua o mesmo valor.

Figura 43. Registro da aluna D para o item c da atividade 3

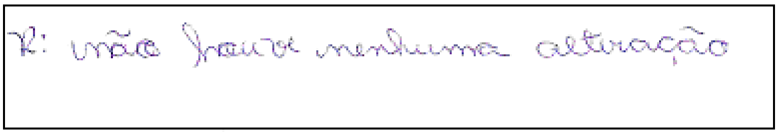

R: não houve nenhuma alteração

Figura 44. Registro da aluna H para o mesmo item

Embora suas respostas não foram iguais todos os alunos observaram que, ao mover o ponto A, os valores da razão *a/d* não mudaram e, para estas respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação, ao movimentarem o ponto A; formulação, ao observarem na janela algébrica o valor da razão *g* e ao conversarem com o colega da dupla dizendo que o valor da razão *g* não mudou e de validação, ao registrarem suas observações em seus protocolos.

No item (**d**), todos os alunos deram respostas próximas às respostas das alunas B e C mostradas pelas Figuras 45 e 46:

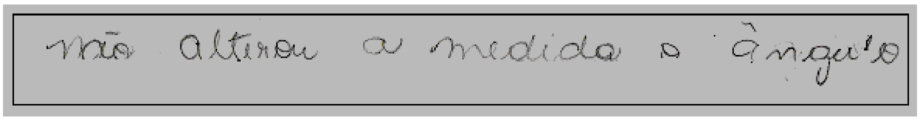

não alterou a medida o ângulo

Figura 45. Registro da aluna B para o item d da atividade 3


não alterou

Figura 46. Registro da aluna C para o mesmo item da atividade 3

Cinco alunos deram respostas mais completas como a aluna B como mostra a Figura 45 e os outros, respostas mais sucintas como a aluna C como mostra a Figura 46. Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao moverem o ponto A; formulação, ao observarem a medida do ângulo α e conversar com o colega que a medida do mesmo não mudou e validação, ao registrarem em seu protocolo a resposta para a questão depois de convencerem os colegas de que elas estavam corretas.

Para o item (*e*), todos os alunos escreveram em seus protocolos registros como os da aluna B ou da aluna D mostrados nas Figuras 47 e 48:


ao movimentar o ponto C a razão alterou.

Figura 47. Registro da aluna B para o item e da atividade 3

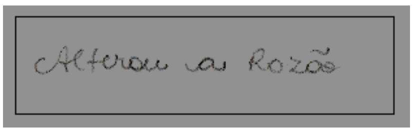

Alterou a Razão

Figura 48. Registro da aluna D para o mesmo item da atividade 3

Neste item, a maioria dos alunos deu respostas mais curtas e objetivas como a aluna D, e todos perceberam que, ao moverem o ponto C, os valores da razão *a/d* mudaram para cada posição do ponto C.

No item (**e**), a maioria dos alunos deu resposta sucinta como a do protocolo da aluna H, como mostra a Figura 49, só as alunas A e B escreveram respostas diferentes em seus protocolos como mostra a Figura 50. Com estas respostas os alunos perceberam que, ao moverem o ponto C a medida do ângulo α mudaria para cada posição do ponto C.


R: se alterou.

Figura 49. Registro da aluna H para o item e da atividade 3

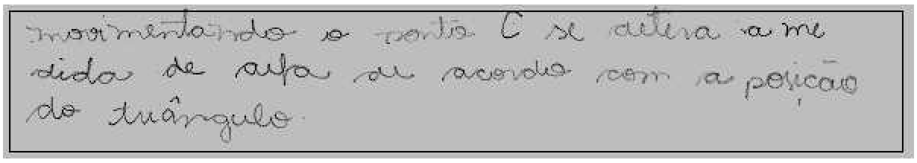

movimentando o ponto C se altera a me
dida de alfa de acordo com a posição
do triângulo

Figura 50. Registro da aluna A e B para o mesmo item da atividade 3

As alunas A e B ao relatarem, "*movimentando o ponto C se altera a me medida de alfa de acordo com a posição do triângulo*", entendemos que as alunas referiam-se que, ao movimentar o ponto C, a medida do ângulo α mudaria de valor, conforme a posição do ponto C.

Por terem acabado a atividade os alunos G e H ficaram movimentando o ponto C e observaram que, ao movê-lo, as razões *f* e *g* aumentavam ou diminuíam seus valores, conforme o ponto C, aproxima-se ou afastava-se do ponto A. Percebemos isto ao ouvir a gravação das atividades, nela o aluno G disse à aluna H "... *olha, quando você desce o ponto C a razão f diminui e a g aumenta...*".

Atividade 4
Digite na janela de entrada c/a. Dê *enter*. Aparecerá na janela algébrica, a letra h que representa a razão da medida lado c pela medida do lado a.

a) Arraste o ponto B e observe o resultado da razão c/a representada pela letra h.O que você observou?
b) A medida do ângulo α alterou?
c) Movimente o ponto A, observe o resultado da razão c/a. O que você observou?
d) A medida do ângulo α alterou?
e) Movimente o ponto C, observe o resultado da razão c/a. O que você observou?
f) A medida do ângulo α alterou?

A atividade 4 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica. Seu objetivo é que os alunos percebam que, em triângulos retângulos semelhantes, a razão entre a medida do cateto oposto a um ângulo agudo e a medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo agudo são constantes.

Os alunos receberam uma folha com o enunciado para executarem a atividade com espaço para registrarem suas observações. O arquivo utilizado era o **triângulo ret.ggb** o mesmo da atividade 1. Os alunos deveriam digitar *c/a* para que o programa calcule a razão da medida do cateto oposto pela medida do cateto adjacente e mostre na janela algébrica a letra *h,* como apresenta a Figura 51.

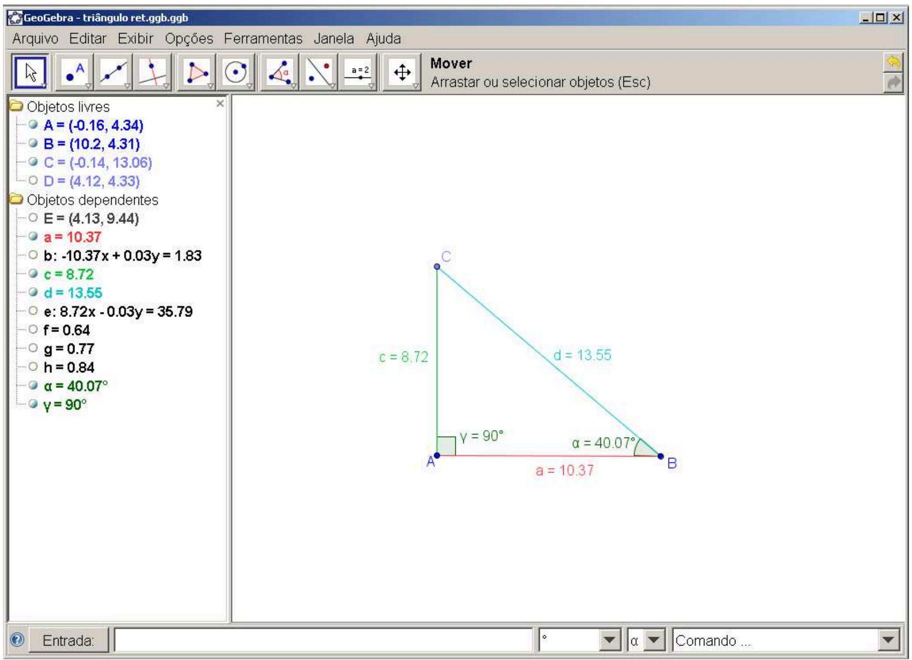


Figura 51. Janela algébrica com as razões *c/a, a/d, c/d*.

Depois de digitarem a razão *c/a* os alunos veriam na tela do computador um triângulo retângulo e a janela algébrica como mostra a Figura 51 com os valores das razões "*c/d*", "*a/d*" e "*c/a*" representados pelas letras *f, g* e *h* respectivamente, deveriam movimentar os pontos A, B e C, observar o que acontecia com os resultados das razões e com a medida do ângulo α para que depois pudessem registrar suas observações na folha com os enunciados.

Para o item (**a**) esperava-se que os alunos após a execução desse procedimento e observassem a janela algébrica e respondessem que a razão c/a não mudou.

No item (**b**), esperava-se que os alunos, após observação do ângulo α, respondessem que a sua medida não se alterou.

Para o item (**c**) esperava-se que os alunos depois de movimentarem o ponto A e observarem os valores da razão c/a na janela algébrica escrevessem que não houve mudança.

Quando realizassem o item (**d**), esperava-se que os alunos respondessem que a medida do ângulo α não sofreu alteração ao movimentar o ponto A.

No item (**e**), esperava-se que os alunos após movimentarem o ponto C e terem observado a razão c/a respondessem que os valores dela mudaram quando movimentaram o ponto C.

No item (**f**), esperava-se que os alunos respondessem que a medida do ângulo α sofreu alteração ao movimentar o ponto C.

Para a realização da atividade, os alunos vivenciariam a situação de ação, ao lerem a atividade, todas as vezes que tivessem de digitar os comandos no teclado, quando tivessem de movimentar os pontos A, B ou C, e ao se empenharem na resolução da atividade; formulação, ao buscarem em seus conhecimentos prévios um modo de resolução aos problemas, ao trocar informações com o outro integrante da dupla sobre suas hipóteses, quando tivessem de observar o resultado das razões na janela algébrica, quando tivessem de observar se o ângulo α estaria variando e validação, ao convencer o outro integrante da dupla de que suas hipóteses eram verdadeiras, que o método que utilizaram para fazer era verdadeiro.

Análise *a posteriori* da atividade 4

Logo que receberam a atividade, os alunos leram-na e já foram digitando os comandos *c/a*. Verificaram na janela algébrica que apareceu a letra h e começaram a realizar o item (**a**). Enquanto um movimentava o ponto B, o outro observava o que ocorria com a razão na janela algébrica e com o ângulo na janela gráfica. O aluno E disse ao aluno F: “*isso está muito fácil, o que será que esse professor quer?”* A aluna C disse à aluna D: “*é parecido com as outras atividades temos que fazer praticamente a mesma coisa”.* Por conhecerem o *software* e devido à semelhança das atividades os alunos resolveram esta atividade num pequeno intervalo de tempo (15 minutos) e também deram respostas mais curtas e objetivas. Nessa parte, da atividade, fizemos a análise dos itens de dois em dois, pois ao mover os pontos A, B, e C é solicitado que os alunos observem a razão e o ângulo para cada ponto movimentado.

Para os itens (**a**) e (**b**), todos os alunos apresentaram em seus protocolos respostas muito próximas às da aluna B, representadas pelas Figuras 52 e 53:

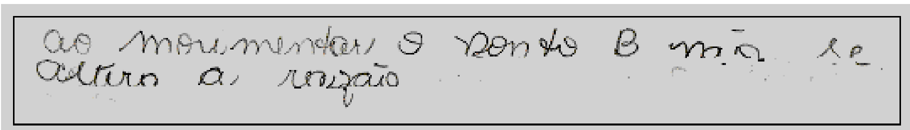


Figura 52. Registro da aluna B para o item a da atividade 4

Figura 53. Registro da aluna B para o mesmo item b atividade 4

Os alunos começaram a serem mais objetivos nas respostas, como mostra a Figura 53, somente as alunas A e B deram respostas mais longas como mostra a Figura 52. Com as respostas, os alunos perceberam que ao movimentar o ponto B a razão *c/a* não mudou e a medida do ângulo α também não variou como esperávamos em nossas análises prévias. Ao darem as respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao arrastar o ponto B; formulação ao observarem o valor da razão *h* e a medida do ângulo na janela algébrica, e ao conversarem um com o outro que esses valores não mudaram com movimento o ponto B e validação, a aluna A ao convencer a aluna B de que suas afirmações estavam corretas e ambas fazem o mesmo registro em seus protocolos (nesse momento, a aluna A movimentou o ponto B e mostrou à aluna B os valores da razão e do ângulo na janela algébrica).

Para os itens (**c**) e (**d**), todos os alunos apresentaram respostas parecidas com as da aluna B, representadas nas Figuras 54 e 55:

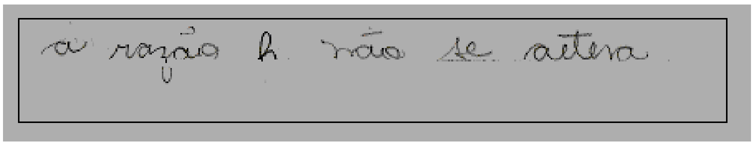


Figura 54. Registro da aluna B para o item c da atividade 4

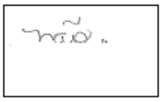


Figura 55. Registro da aluna B para o item d da atividade 4

Ao apresentar as respostas parecidas com as da aluna B, todos os alunos perceberam que, ao movimentar o ponto A do triângulo a razão *c/a* não variou nem a medida do ângulo α não mudou. Para as respostas os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto A, ao se empenharem na tentativa de resolução da atividade; formulação, ao observarem na janela algébrica os valores da razão *h* e a medida do ângulo α e ao conversarem um com o outro sobre suas observações e validação ao registrarem suas respostas nos protocolos depois de um aluno convencer o outro de que ele estava certo.

Nos itens (**e**), e (**f**), os alunos apresentaram registros em seus protocolos parecidos com os da aluna B, representados pelas Figuras 56 e 57:

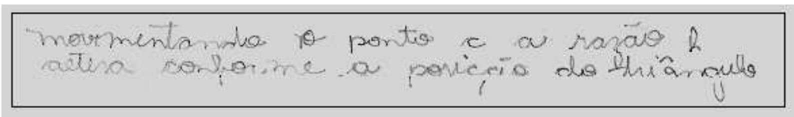


Figura 56. Registro da aluna B para o item e da atividade 4

Figura 57. Registro da aluna B para o item f da atividade 4

Todos os alunos perceberam que, ao mover o ponto C, os valores da razão h mudaram e que a medida do ângulo α variou. Para estas respostas os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto C; formulação, ao observarem na janela algébrica e na figura os valores da razão *h* e a medida do ângulo α e ao conversarem um com o outro sobre suas observações e validação, ao convencerem o colega que ao mover o ponto C os valores da razão e a medida do ângulo mudaram.

A aluna H apresentou registro diferente para o item (**e**), como mostra a Figura 58:

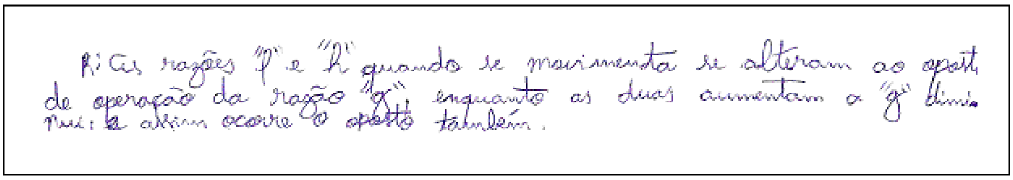

R: As razões "f" e "h" quando se movimenta se alteram ao apost de operação da razão "g" enquanto as duas aumentam a "g" diminui: e assim ocorre o aposto também.

Figura 58. Registro da aluna H para o item e da atividade 4

Quando lemos esta resposta a princípio não entendemos o que a aluna quis dizer, mas ao movimentar o ponto C do arquivo **triângulo ret.ggb** entendemos a resposta da aluna e acreditamos que ela queria escrever:

"*Quando se movimenta o ponto C e a medida do ângulo α diminui, os valores das razões f e h diminuem, e os valores da razão g aumentam, quando aumenta a medida do ânguloα , ao movimentar o ponto C, as razões f e h aumentam seus valores e os valores, da razão g diminuem".*

Embora seus registros fossem diferentes os alunos G e H foram além do esperávamos em nossas análises prévias, pois não percebemos o que relataram quando fizemos a análise *a priori*.

Nesta atividade, omitimos o item (**g**) "*escreva o que você concluiu com as observações feitas da atividade 1 até a atividade 4*" que havia no piloto, achamos melhor que o aluno expusesse suas conclusões ao grupo. Quando terminaram as atividades, o pesquisador reuniu os alunos e perguntou-lhes o que concluíram com as observações feitas da atividade 1 até a 4. O aluno E disse:" *quando mexe o ponto A ou B não muda nem o ângulo nem a razão"*. O aluno G disse que percebeu o que o aluno E disse e acrescentou: "*se mexer no ponto C ai muda* *tudo, as razões e o ângulo*". Os demais alunos também manifestaram ter percebido o que esses dois disseram, mas nenhum relacionou as razões *c/d*, *a/d* e *c/a* com as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. O pesquisador disse-lhes quais eram os objetivos das atividades e depois desenhou na lousa um triângulo retângulo parecido com o da figura da tela do computador com as mesmas letras em seus lados e vértices.

O pesquisador escreveu na lousa a razão c/d e perguntou o que as letras *c* e *d* representavam no triângulo da figura. A aluna A disse que a letra *d* era o cateto e a letra *c,* a hipotenusa. Ao observar o equívoco o pesquisador perguntou se a mesma tinha certeza do que estava falando, e a aluna respondeu que sua professora havia lhe ensinado que a hipotenusa é junto do ângulo de 90°. A aluna B disse que o *c* representava o cateto oposto e o *d* representa a hipotenusa.

O pesquisador perguntou aos alunos qual o nome da razão trigonométrica que é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α pela a medida da hipotenusa. A resposta não foi imediata, mas a aluna A disse que era o seno.

Em seguida, o pesquisador escreveu na lousa a razão *a/d* e fez a mesma pergunta, o que as letras *a* e *d* representavam no triângulo da figura. Os alunos responderam que a letra *a* era o cateto adjacente ao ângulo α e que a letra *d* a hipotenusa. Foi perguntado qual o nome da razão trigonométrica que era a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa, os alunos responderam o cosseno.

O pesquisador escreveu na lousa a razão *c/a* e perguntou o que estas letras representavam no triângulo. Os alunos responderam que *c* era o cateto oposto ao ângulo α e *a* era o cateto adjacente ao ângulo α. Foi perguntado o nome dessa razão e os alunos responderam que era tangente. Em seguida, o pesquisador fez a institucionalização dos objetos matemáticos e disse aos alunos que eles precisariam desses conhecimentos para prosseguir nas atividades seguintes. Depois foi entregue a cada integrante da dupla uma folha com o fechamento das atividades, que foi lida pela aluna H enquanto os demais acompanhavam a leitura. Terminada a leitura, o pesquisador perguntou se havia alguma dúvida e ninguém se manifestou.

Institucionalização das atividades 1 a 4

Você deve ter observado que ao movimentar os pontos A ou B o ângulo α não variou. Embora os comprimentos dos lados dos triângulos ABC tenham mudado, as razões entre as medidas dos lados mantiveram-se constantes. Isso vale para todos os triângulos da geometria euclidiana que têm um de seus ângulos reto, ou seja, para todo triângulo retângulo.

As razões entre as medidas dos lados de triângulo retângulo recebem nomes. Em nosso caso, chamaremos de seno do ângulo alfa, a razão entre o cateto oposto ao ângulo α pela hipotenusa e escreveremos assim:

$sen\,\alpha = \frac{c}{d}$, onde α é o um dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC, com vértice em B;

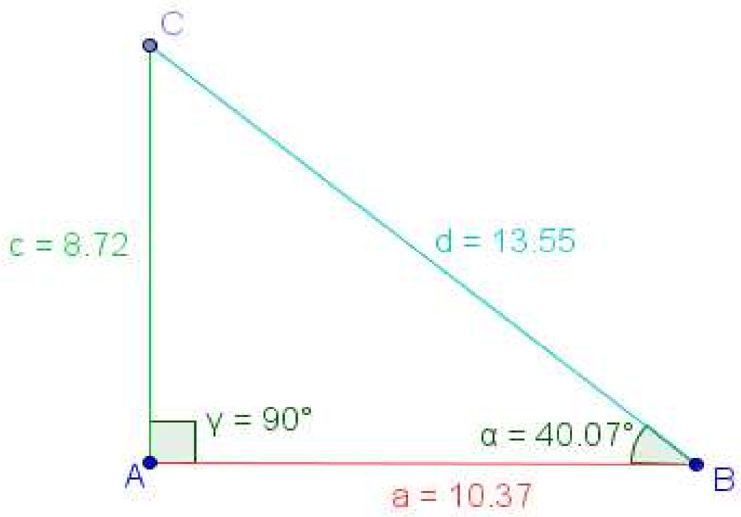
c é a medida do cateto oposto ao ângulo α;

d é a medida da hipotenusa do triângulo ABC;

Cosseno do ângulo α é razão da medida do cateto adjacente ao ângulo α pela medida da hipotenusa e escreveremos: $\cos\alpha = \frac{a}{d}$;

a é a medida do cateto adjacente ao ângulo α;

Tangente do ângulo α é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida do cateto adjacente ao ângulo α e escreveremos; $tg\,\alpha = \frac{c}{a}$



Atividade 5

1.Abra o arquivo **ciclotrigo.ggb** e movimente o ponto P no primeiro quadrante. Pare num ânguloα qualquer , calcule o $sen\,\alpha$ e o $\cos\alpha$ (utilize as medidas do triângulo PAH).

a) Depois observe as coordenadas dos pontos H e I que são as projeções do ponto P nos eixos x e y. O que você observou?

b) Escolha outras três posições para o ponto P e para cada uma observe o ângulo e determine seu seno e o cosseno.

c) Quais suas conclusões? Justifique.

d) Qual o valor máximo para o seno e o cosseno de um ângulo do primeiro quadrante? Para quais ângulos temos esses valores máximos?

A atividade 5 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica,cujo objetivo é conduzir os alunos a perceberem que no primeiro quadrante de um círculo trigonométrico de raio unitário, os valores do seno e do cosseno de um triângulo retângulo qualquer, que tem um de seus vértices sobre o círculo, (o outro vértice com ângulo agudo no centro do círculo e o vértice com ângulo reto sobre o eixo das abscissas) são as coordenadas do ponto que representam esse vértice, como mostra a Figura 59, isto é, P $(\cos\alpha, sen\alpha)$ quando o raio da circunferência for igual a 1.

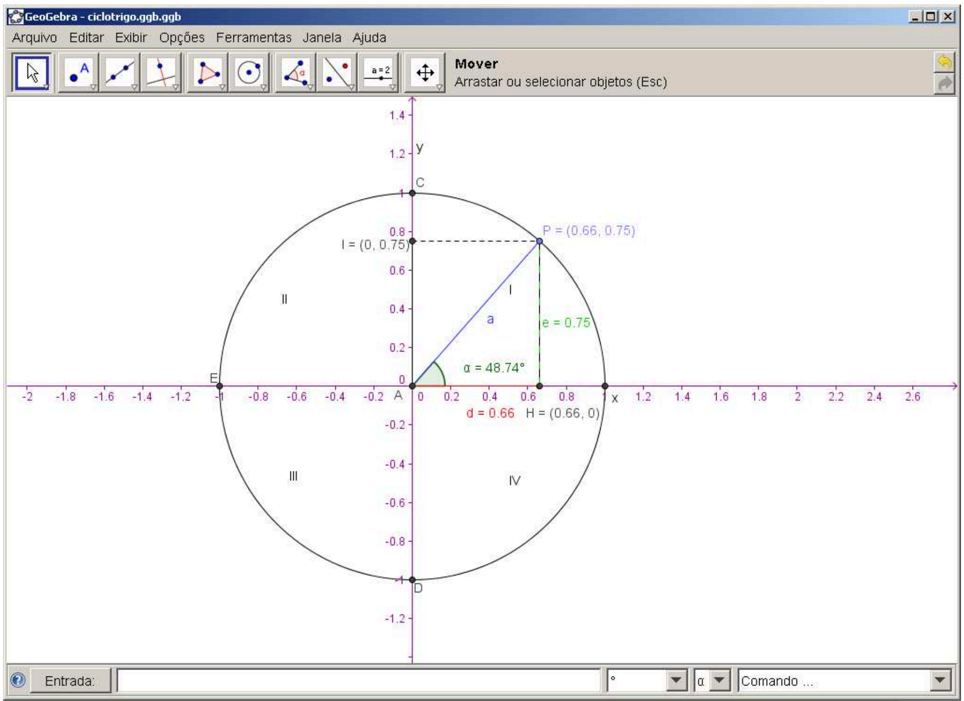


Figura 59.Seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Ao abrirem o arquivo **ciclotrigo.ggb**, os alunos deveriam ver na tela do computador um círculo trigonométrico com o triângulo retângulo PAH como mostrava a Figura 59. Os alunos receberiam uma folha com o enunciado para a resolução da atividade.

Para a resolução da atividade, seriam necessários conhecimentos prévios sobre coordenadas cartesianas e as razões trigonométricas do triângulo retângulo. O envolvimento dos alunos com a atividade seria muito importante em razão de suas características que prevêem os alunos como atores de sua aprendizagem e o pesquisador como mediador. O pesquisador faria a institucionalização do objeto de ensino quando os alunos terminassem a atividade. Após o levantamento das respostas dos alunos e ouvir seus argumentos, ele deveria fazer as correções necessárias e institucionalizaria o conhecimento matemático.

Ao executarem o procedimento 1 e pararem em um ângulo α qualquer esperava-se que alunos ao calculassem o $sen\alpha$ dividindo a medida do segmento *e* pela medida do segmento *a*. Para calcular o $\cos\alpha$, dividam a medida do segmento *d* pela medida do segmento *a* e perceberiam que como a medida de *a* era 1, o cosseno seria a medida do segmento *d* e o seno a medida do segmento *e*.

Depois da execução desses cálculos pelos alunos esperava-se que no item (**a**) observassem as coordenadas dos pontos H e I e respondessem que observaram que o valor obtido para o seno era igual à coordenada y do ponto I e o valor do cosseno era igual à coordenada x do ponto H.

Após executarem o item (**b**), que era a escolha de outras três posições para o ponto P e o cálculo do seno e do cosseno para estas posições, esperava-se que os alunos respondessem no item (**c**) que perceberam que os valores do cosseno e do seno de um ângulo α qualquer eram iguais às coordenadas do ponto P ou iguais às projeções do ponto P no eixo x ($\cos\alpha$,0) e no eixo y (0,$sen\alpha$). Ao justificarem as suas respostas esperava-se que os alunos escrevessem que chegaram a estas conclusões, porque perceberam que a hipotenusa do triângulo PAH era igual ao raio da circunferência que era igual a 1.

Para o item (**d**), esperava-se que os alunos respondessem que o valor máximo para o $sen\alpha$ era 1 que, para este valor, a medida do ângulo α era próxima de 90°, e que o valor máximo para o $\cos\alpha$ também era 1 e que nesse caso a medida do ângulo α era próxima de 0°. Isso se deve a configuração do *software* que para ângulos menores que 5° graus, mostra na figura o valor do cosseno igual a 1 e aos ângulos acima de 85°, mostra o valor do seno igual a 1.

Análise *a posteriori* da atividade 5

Assim que foi entregue a atividade, os alunos leram-na e começaram a executá-la. Após abrirem o arquivo, os alunos não sentiram dificuldades para localizar as medidas dos catetos do triângulo. O aluno G perguntou qual o valor da medida da hipotenusa por não a encontrar na figura. O pesquisador fez a mediação, perguntando-lhe o que a hipotenusa da figura representava na circunferência. Depois de observar na tela do computador o aluno respondeu que a hipotenusa representava o raio da circunferência. O pesquisador perguntou-lhe qual era a medida do raio da circunferência e depois de observar a figura o aluno respondeu que a medida do raio era igual a 1. Ao perceber que alguns alunos não sabiam identificar os quadrantes no círculo trigonométrico, o pesquisador fez uma intervenção e explicou lhes que por convenção os quadrantes são nomeados em sentido anti-horário em primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrante e mostrou-lhes na circunferência trigonométrica da tela do computador os quadrantes nomeados com algarismos romanos.

Todos os alunos conseguiram realizar os cálculos e apresentaram registros como o aluno E que fixou o ângulo α em 51,27°, como mostra a Figura 60 e ele percebeu que a medida da hipotenusa era 1 como podemos observar nos cálculos feitos em seu protocolo, representado pela Figura 60.

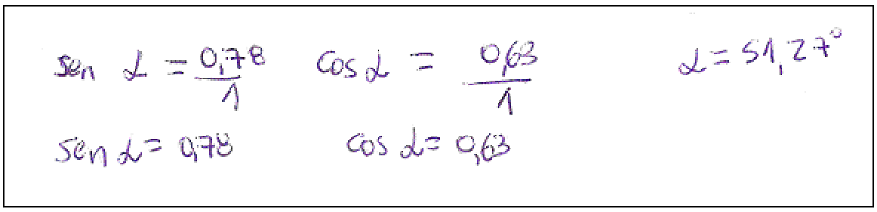


Figura 60. Registro dos cálculos do item a da atividade 5 do aluno E

Depois de movimentar o ponto P no primeiro quadrante do círculo trigonométrico, a aluna A parou no ângulo de 23,53° realizou os seguintes registros de seus cálculos como mostra a Figura 61.

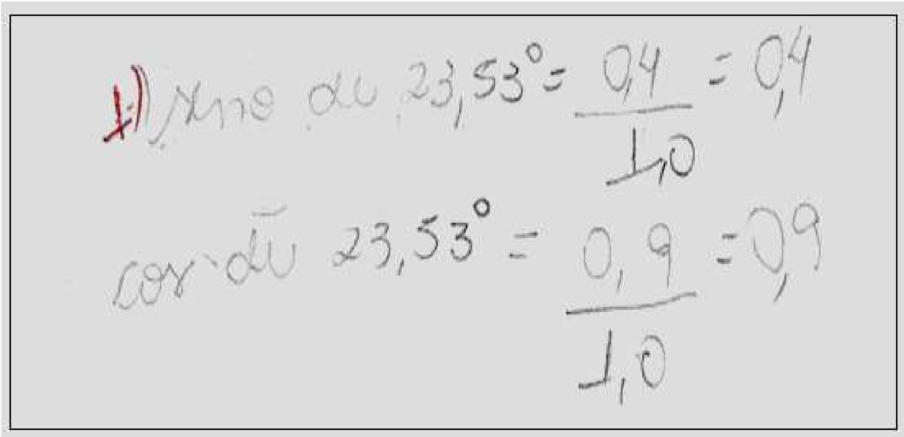


Figura 61. Registro dos cálculos da aluna A para o mesmo item da atividade 5

Em seu protocolo, escreveu *"seno de 23,53°"* e *"cos de 23,53°"*. O pesquisador ao perceber disse-lhe que não era necessário escrever dessa forma, bastava usar, por exemplo, "$sen\ 20°$" e "$\cos 20°$" e ao lermos esses símbolos falamos seno de vinte graus e cosseno de vinte graus.

Embora não tenhamos apresentado todas as respostas dos alunos, para realizar esses cálculos todos vivenciaram a situação de ação ao movimentar o ponto P e escolher um ângulo qualquer, ao identificarem, na figura, a hipotenusa e os catetos com seus respectivos valores; formulação, ao buscarem em seus conhecimentos prévios a fórmula para calcularem o seno e o cosseno e ao conversarem com os seus parceiros se concordavam que o seno era a razão da medida do cateto oposto ao ângulo α pela medida da hipotenusa e, de validação, ao registrarem em seus protocolos os resultados por terem certeza de que estavam certos depois de convencerem o parceiro da dupla.

Para o item (**a**) os alunos apresentaram registros parecidos com os da aluna A ou do aluno E, como mostram as Figuras 62 e 63 que representam seus protocolos.


Podemos observar que continua o mesmo resultado

Figura 62. Registro da aluna A para o item a da atividade 5

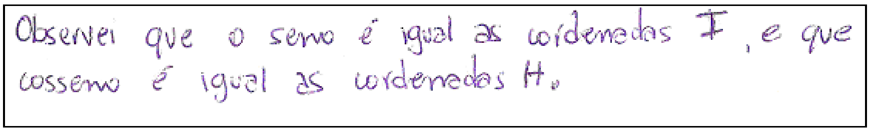
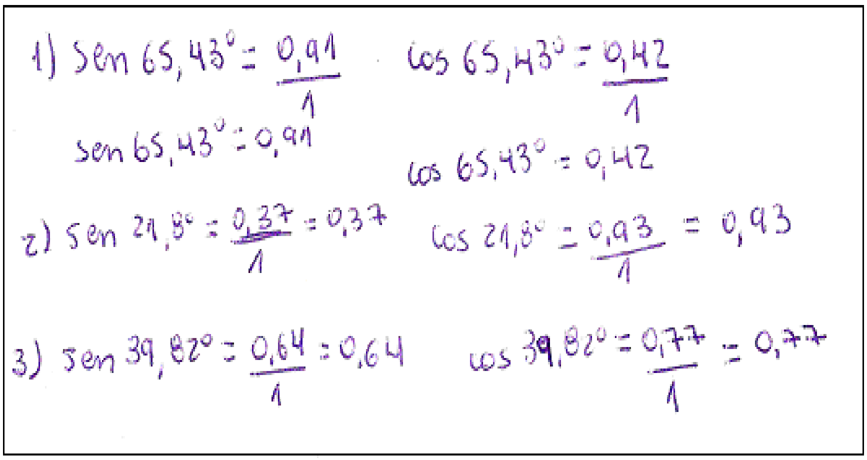

Observei que o seno é igual as cordenadas I, e que cosseno é igual as cordenadas H.

Figura 63. Registro do aluno E para o mesmo item

A aluna A simplesmente disse que observou que os resultados eram iguais e o aluno E deu mais detalhes em sua resposta como podemos observar na Figura 63. Embora este tenha sido mais detalhista, para sua resposta ficar correta deveria ter escrito que o seno é igual à coordenada y do ponto I e o cosseno é igual à coordenada x do ponto H.

Para o item (**b**) cada dupla escolheu ângulos diferentes, mas seus registros foram parecidos com os do aluno E, como mostra a Figura 64 que representa seu protocolo. Só as alunas A e B fizeram arredondamentos em seus cálculos, como mostra a Figura 65 e nos dois protocolos os alunos não deixam o traço da fração na frente do sinal de igual. Para o ângulo de 52° a dupla calculou corretamente os valores de seno e do cosseno; para o ângulo de 9,23° a dupla arredondou o valor do seno para 0,2 e o cosseno para 0,9. Para o ângulo de 37,71°, a dupla arredondou o seno para 0,6 e o cosseno para 0,7, como mostra a Figura 65.


1) $\text{sen } 65{,}43° = \frac{0{,}91}{1}$ $\cos 65{,}43° = \frac{0{,}42}{1}$

$\text{sen } 65{,}43° = 0{,}91$ $\cos 65{,}43° = 0{,}42$

2) $\text{sen } 21{,}8° = \frac{0{,}37}{1} = 0{,}37$ $\cos 21{,}8° = \frac{0{,}93}{1} = 0{,}93$

3) $\text{sen } 39{,}82° = \frac{0{,}64}{1} = 0{,}64$ $\cos 39{,}82° = \frac{0{,}77}{1} = 0{,}77$

Figura 64. Registro do aluno E para o item b da atividade 5

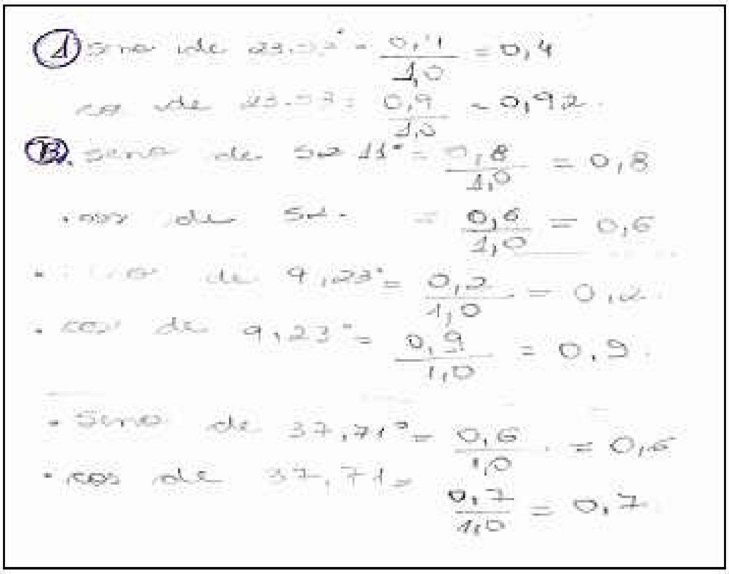
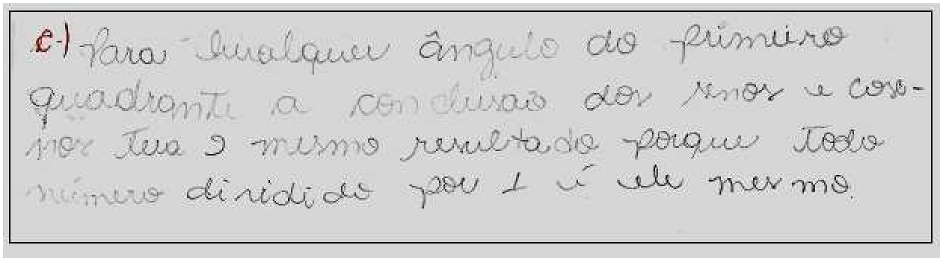


Figura 65. Cálculos apresentados pela aluna B em seu protocolo

Como comentamos anteriormente a aluna B escreveu por extenso como a aluna A fez em seu protocolo, apresentado na Figura 61. Quando o pesquisador conversou com a aluna A elas já haviam terminado a atividade e não quiseram apagar seus registros.

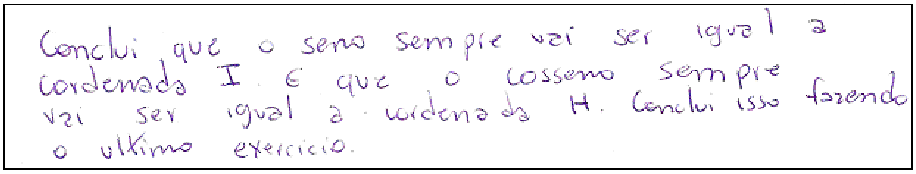
Ao realizar estes cálculos os alunos vivenciaram situação de ação, ao moverem o ponto P e escolherem os ângulos; formulação, ao conversarem e buscarem na figura as medidas dos lados do triângulo e, validação, ao registrarem a mesma resposta depois de um aluno convencer o outro.

No item (**c**), a aluna B escreveu em seu protocolo representado pela Figura 66 que percebeu que a hipotenusa do triângulo da figura era 1, mas não notou que o seno era a medida do segmento *e*,e o cosseno, a medida do segmento *d* ou que as coordenadas do ponto P eram, respectivamente, o cosseno e seno do ângulo α. Neste item, as respostas foram diferentes, cada dupla apresentou respostas conforme as suas observações, uma dupla observou os sinais do seno e do cosseno em todos os quadrantes e perceberam que o raio do círculo era igual a 1; outra dupla relatou que percebeu que as coordenadas dos pontos I e H são os valores do seno e do cosseno, como mostra a Figura 67; outra dupla relatou que se movimentasse o ponto P, os valores do seno e do cosseno mudariam.



c) Para qualquer ângulo do primeiro quadrante a conclusão dos senos e cossenos teve o mesmo resultado porque todo número dividido por 1 é ele mesmo.

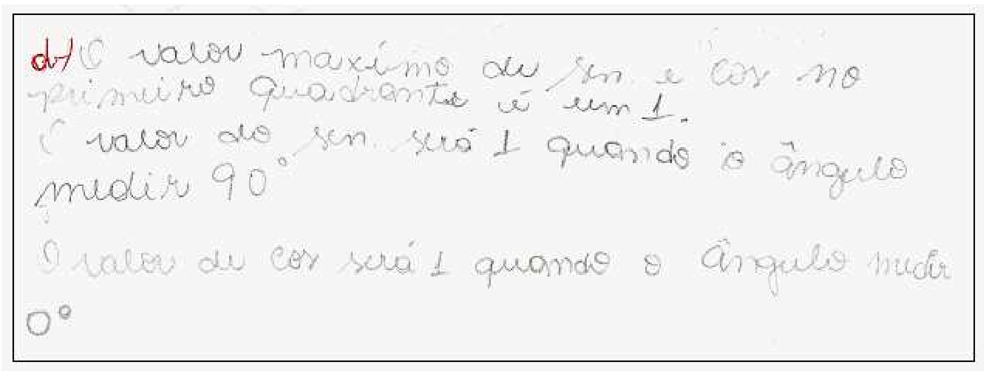
Figura 66. Registro das alunas B para o item c da atividade 5



Conclui que o seno sempre vai ser igual a cordenada I e que o cosseno sempre vai ser igual a cordenada II. Conclui isso fazendo o ultimo exercicio.

Figura 67. Registro do aluno E para o item c da atividade 5

No item (**d**), todos alunos apresentaram registros parecidos com o protocolo da aluna B representado pela Figura 68. Os alunos perceberam que o valor máximo para o seno era 1, e isto ocorreu quando o ângulo era 90° e o cosseno era 1 quando o ângulo é 0°.



d) O valor maximo de sen e cos no primeiro quadrante é um 1.
O valor do sen será 1 quando o ângulo medir 90°
O valor de cos será 1 quando o ângulo medir 0°

Figura 68. Registro da aluna B para o item d da atividade 5

Antes de prosseguir para a atividade 6, foi necessário conversar com os alunos sobre seus registros simbólicos, as dificuldades de compreensão apresentadas em seus registros (item c). Fizemos uma intervenção para que os alunos avançassem e percebessem que as coordenadas (x, y) de um ponto sobre o círculo trigonométrico eram os valores do cosseno e do seno do ângulo determinados por esse ponto.

Atividade 6

Vimos na atividade 5 que as coordenadas do ponto P que está sobre o ciclo trigonométrico, representam os valores do cosseno e do seno do ângulo α determinado por este ponto. Podemos definir que as coordenadas de P são o cosseno e o seno de um ângulo α qualquer ($0° < \alpha \leq 360°$) no ciclo trigonométrico. Dessa forma abra o arquivo **ciclotrigo1.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante observe e responda.

a) O que acontece com o ponto Q ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.
b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas dos pontos P e Q?
c) Qual a medida do ângulo β (BÂQ)? Qual o valor do cosseno e do seno desse ângulo?
d) Movimente o ponto P para três posições diferentes, determine o cosseno e o seno do ângulo β para cada uma delas.
e) Qual a soma das medidas dos ângulos α e β?
f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ângulo α, é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo β? Justifique sua resposta.

A atividade 6 é um proposta de investigação em um círculo trigonométrico construído em um *software* de geometria dinâmica, cujo o objetivo é ampliar para o segundo quadrante, o que foi desenvolvido na atividade 5, utilizando o simétrico do ponto P no segundo quadrante. Queremos que os alunos percebam que, no segundo quadrante, as coordenadas do ponto Q simétrico do ponto P são os valores do cosseno e do seno do ângulo determinado pelo ponto Q, que a coordenada que representa o seno é positiva, e a coordenada do cosseno é negativa. Também, que os alunos aprendam como calcular o seno e o cosseno de um ângulo determinado pelo ponto simétrico de um ponto do primeiro quadrante, sabendo o valor do seno e do cosseno do ângulo determinado por esse ponto do primeiro quadrante.

Nesta atividade o arquivo seria o **ciclotrigo1.ggb**. Ao abrirem, o arquivo deveriam executar o procedimento 1, assim, os alunos veriam na tela do computador um círculo trigonométrico, como mostra a Figura 69. Esperava-se que os alunos não sentissem dificuldades para executar tais procedimentos, pois no início destas atividades fizemos um trabalho de familiarização dos principais comandos do *software*.

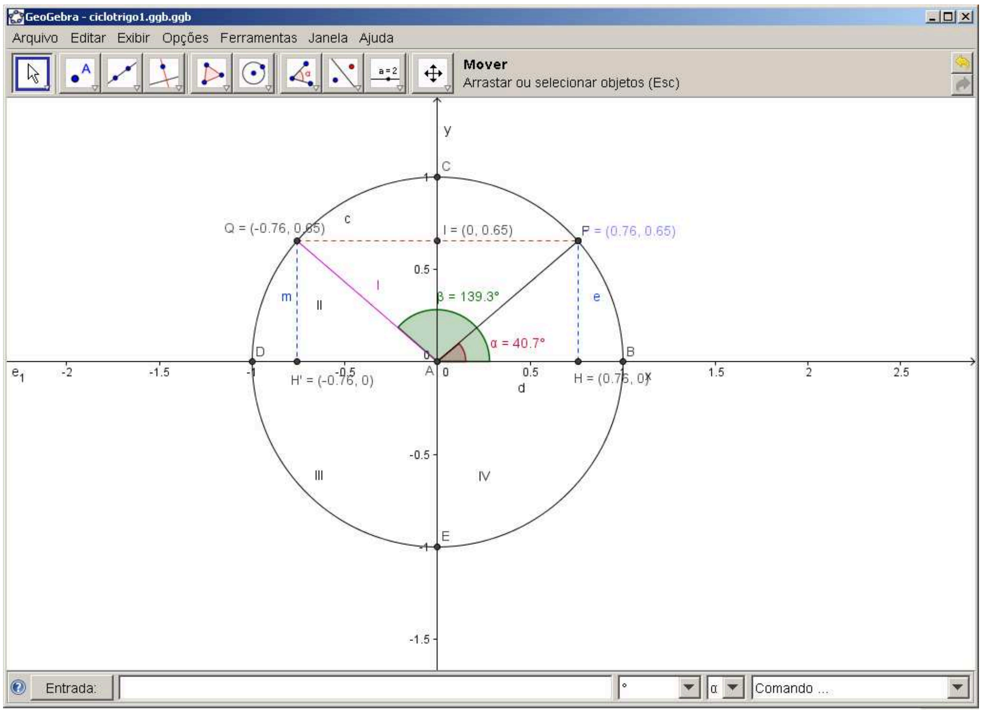


Figura 69. Simétrico de um ponto

No item (**a**), depois de executar a ação de movimentar o ponto P, esperava-se que os alunos respondessem que, ao movimentá-lo, o ponto Q se movimentar-se-ia simetricamente em relação ao ponto P. Quando o ângulo determinado por P aproximava-se de 0° o ângulo determinado por Q aproximar-se-ia de 180°, ao aproximar o ponto P de 90° o ponto Q também se aproximaria de 90° como mostra a Figura 70.

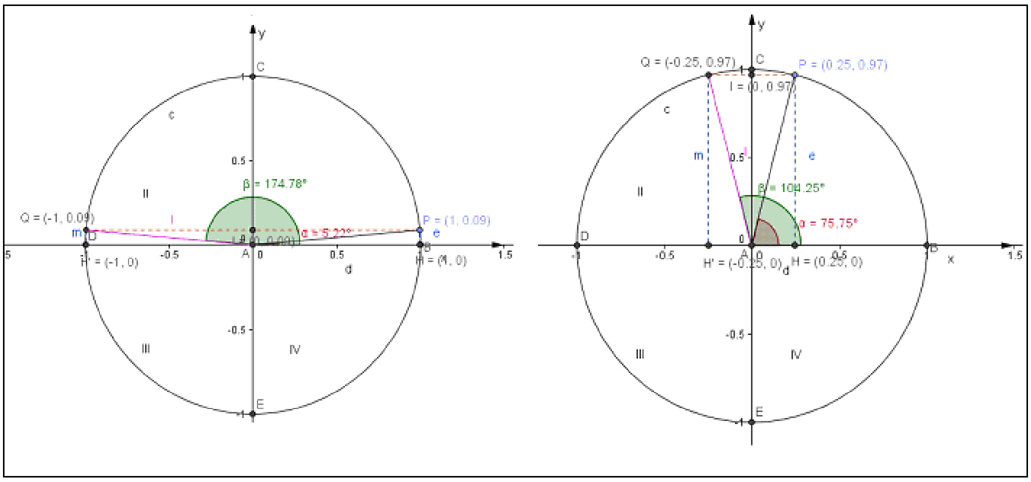


Figura 70. Ponto P próximo 0° e de 90°

No item (**b**), depois de observarem as coordenadas do ponto P e do ponto Q esperava-se que os alunos escrevessem que os valores absolutos das abscissas e das ordenadas eram iguais, e que as abscissas tinham sinais opostos.

Para o item (**c**), esperava-se que os alunos depois de parar o ponto P em um ângulo α qualquer, verificassem na tela do computador a medida do ângulo β e depois determinassem o valor do seno e do cosseno de β observando as coordenadas do ponto Q.

No item (**d**), esperava-se que os alunos procedessem do mesmo modo do item anterior para determinar os valores do seno e do cosseno do ângulo β.

No item (**e**), esperava-se que os alunos percebessem que a soma das medidas dos ângulos α e β era igual a 180°.

Para o item (**f**), esperava-se que os alunos percebessem que seria possível calcular o seno e o cosseno de β, sabendo os valores do seno e do cosseno de α, pois $\alpha + \beta = 180°$, logo $\beta = 180° - \alpha$. Daí, $sen\,(180° - \alpha) = sen\,\alpha$ e $\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Como já descrevemos em todos os momentos da atividade os alunos vivenciariam situação de ação, formulação e validação. Quando os alunos agiram sobre os comandos do *software*, quando observaram o que aconteceria com a movimentação dos pontos P e Q, ao buscarem em seus conhecimentos prévios uma maneira para tentar resolver a atividade e quando estavam envolvidos ativamente na resolução da atividade os alunos vivenciavam situação de ação. Quando conversassem com o parceiro da dupla sobre suas hipóteses de resolução ou quando observassem o que acontecia com as coordenadas de P e Q e ao compararem os resultados do seno e do cosseno de α com os resultados do seno e do cosseno de β, os alunos estariam vivenciando a situação de formulação.

Quando convencessem o colega que as coordenadas de ponto Q eram os valores do seno e do cosseno ou que as coordenadas Q eram negativas para o cosseno e positivas para o seno, os alunos estariam em situação de validação.

Análise *a posteriori* da atividade 6

No item (**a**), esperávamos que os alunos percebessem que os pontos P e Q eram simétricos, mas alguns não perceberam, embora tenham observado que o ponto Q só se mexia ao mover o P; não associaram isso à simetria dos pontos e pelo que analisamos em seus registros, observaram que P e Q tinham seno e cosseno iguais e os valores do cosseno no segundo quadrante eram negativos, conforme estava escrito no protocolo da aluna A representado pela Figura 71. Só dois alunos afirmaram em seus protocolos que os pontos P e Q eram simétricos.

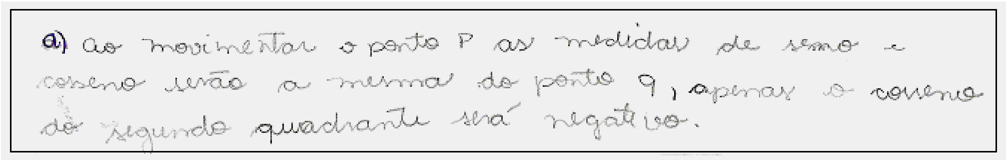

a) ao movimentar o ponto P as medidas de seno e cosseno serão a mesma do ponto q, apenas o cosseno do segundo quadrante será negativo.

Figura 71. Registro da aluna A para o item a da atividade 6

A aluna ao escrever "*as medidas do seno*" em seu protocolo, referia-se aos valores do seno observados na tela do computador.

Mesmo que não tivessem percebido que os pontos P e Q eram simétricos eles vivenciaram a situação de ação ao se dedicarem ativamente na busca de uma resolução à atividade, ao moverem o ponto P; formulação, ao conversarem um com o outro sobre o que observaram ao mover o ponto P e, validação, ao convencerem o colega que os valores do cosseno do segundo quadrante eram negativos.

No item (**b**) a aluna A escreveu em seu protocolo que percebeu que o seno e o cosseno eram positivos para o ponto P como mostra a Figura 72 e, também, percebeu que os valores do cosseno eram iguais em valores absolutos, mas não relatou se notou que os valores do seno eram as ordenadas dos pontos P e Q e que os valores do cosseno eram suas abscissas. O aluno E escreveu algo muito próximo ao que relatamos sobre a aluna A em seu protocolo com mostra a Figura 73.

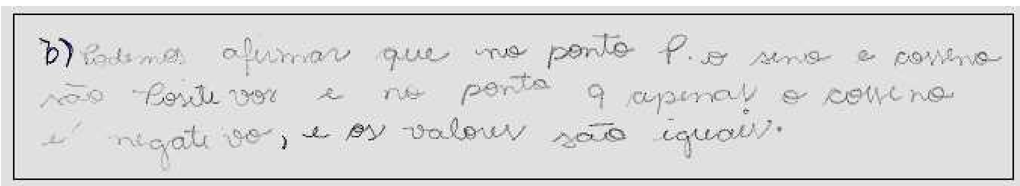
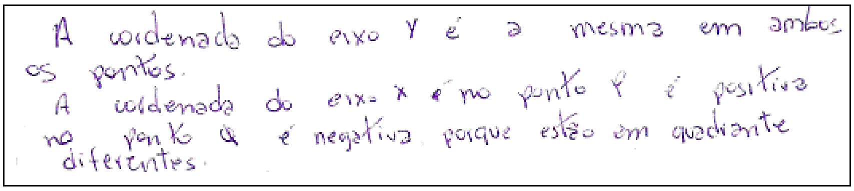

b) Podemos afirmar que no ponto P. o seno e cosseno são Positivos e no ponto q apenas o cosseno é negativo, e os valores são iguais.

Figura 72. Registro da aluna A para o item b da atividade 6



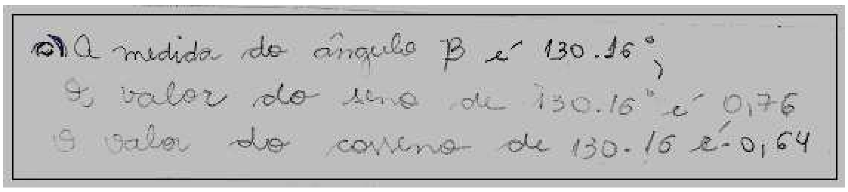
A cordenado do eixo Y é a mesma em ambos os pontos.
A cordenado do eixo x é no ponto P é positiva no ponto Q é negativa porque estão em quadrante diferentes.

Figura 73. Registro do aluno E para o mesmo item

O aluno E, embora tenha escrito "*cordenada",* percebeu a relação entre os sinais das coordenadas dos dois pontos como relatou em seu protocolo representado pela Figura 73. Os demais alunos escreveram respostas parecidas com essas das Figuras 72 e 73 em seus protocolos.

Com estas respostas, acreditamos que os alunos perceberam que as ordenadas de P eram iguais às ordenadas de Q e que as abscissas dos dois pontos eram iguais em valor absoluto. Para estas respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação, ao moverem o ponto P; formulação, ao compararem as coordenadas dos dois pontos e validação, ao escreverem em seus protocolos suas respostas por estarem certos de que estas estavam corretas, após convencerem o colega a darem respostas idênticas às suas.

No item (**c**), para o ângulo β igual a 130,16°, a aluna B escreveu por extenso seno e cosseno como mostra a Figura 74, embora sua resposta estivesse correta e a aluna preferisse escrever por extenso as razões seno e cosseno o pesquisador disse-lhes que os símbolos eram mais simples para utilizar.



c) A medida do ângulo β é 130.16°;
O valor do seno de 130.16° é 0,76
O valor do cosseno de 130.16 é -0,64

Figura 74. Registro da aluna B para o item c da atividade 6

Para o mesmo item, os alunos D e E apresentaram os seguintes registros em seus protocolos representados pelas Figuras 75 e 76. Observando estes registros, notamos que eles atingiram o que queríamos nesse item da atividade e apresentaram registros mais sucintos que a aluna B.

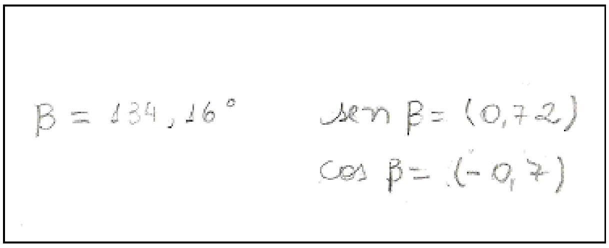


Figura 75. Registro do aluno D para o item c da atividade 6

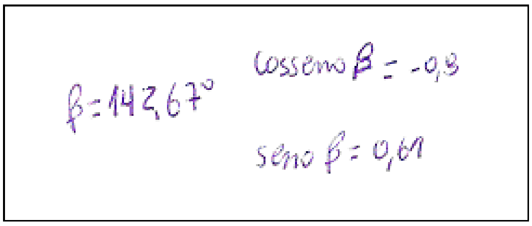


Figura 76. Registro do aluno E para item c atividade 6

Os demais alunos apresentaram registros parecidos com os dos alunos D ou do aluno E. Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao fixar um ângulo qualquer movendo o ponto P; formulação ao observarem na tela do computador o valor do ângulo β e conversarem com o colega sobre suas observações e validação, ao convencerem o colega que os valores das coordenadas dos pontos P e Q eram os valores do cosseno e do seno.

Para o item (**d**), todos os alunos apresentaram registros parecidos com o registro da aluna B, mostrado na Figura 77 ou do aluno E mostrado na Figura 78, mudando apenas os valores dos ângulos. Ao realizar este item os alunos não apresentaram dificuldades em localizar os valores do cosseno e do seno no círculo trigonométrico e, também, apresentaram registros simbólicos corretos como a Figura 77.

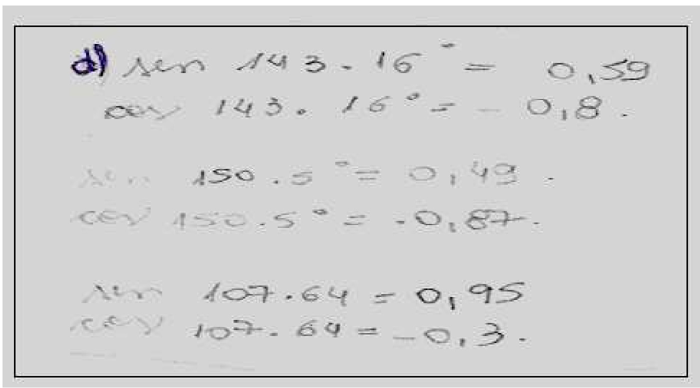


Figura 77. Registro dos cálculos da aluna B para o item d da atividade 6

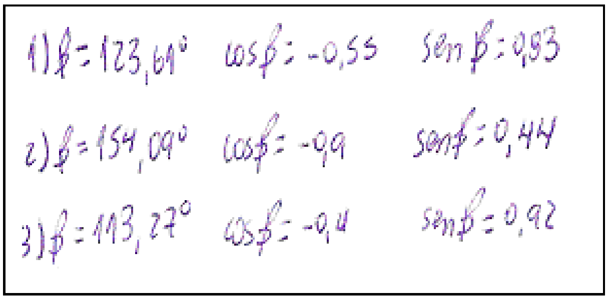

1) β=123,61° cosβ: -0,55 senβ:0,83
2) β=154,09° cosβ: -0,9 senβ:0,44
3) β=113,27° cosβ: -0,4 senβ:0,92

Figura 78. Registro do aluno E para o item c da atividade 6

Seis alunos deram suas respostas parecidas com a resposta do aluno E, como está relatado em seu protocolo na Figura 78, escrevendo primeiro o ângulo β e depois os valores do cosseno e do seno do ângulo β. Para tais respostas, os alunos, vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto P e escolherem os valores dos ângulos; formulação, ao conversarem com o colega sobre os valores do seno e do cosseno para cada ângulo escolhido e validação, ao convencer o colega de que suas observações eram corretas e ambos deram a mesma resposta em seus protocolos.

No o item (**e**), todos os alunos apresentaram registros idênticos aos da aluna B, mudando apenas os valores dos ângulos α e β (Figura 79):

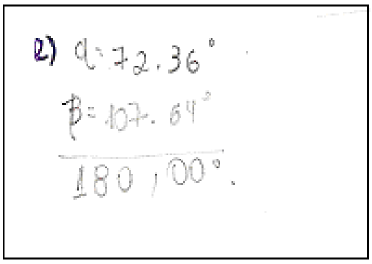

2) α=72,36°
β=107,64°
180,00°.

Figura 79. Registro dos cálculos da aluna A para o item e da atividade 6

Todos os alunos perceberam que a soma dos ângulos α e β era sempre igual a 180°. Os alunos C e D fizeram o cálculo com vários valores diferentes para os ângulos α e β e, por fim, concluíram que o resultado dessa soma era sempre igual a 180°. Ao responderem a esse item os alunos vivenciaram situação de ação, ao observarem na figura e copiarem os valores dos ângulos; formulação, ao conversarem com o colega ”... *será que sempre da 180°*...” (aluna C perguntou para a aluna D) e validação, ao registrar em seu protocolo sua resposta, depois de convencer o colega de que ela estava correta.

No item (**f**), a aluna B escreveu em seu protocolo "*sim,afirmamos também que seno de α e β são iguais* ..." como mostra a Figura 80, mas não disse qual a relação entre os ângulos α e β, já que $\beta = 180° - \alpha$. Contudo a aluna B relatou em seu protocolo que percebeu a relação entre os valores do seno e do cosseno dos dois ângulos.

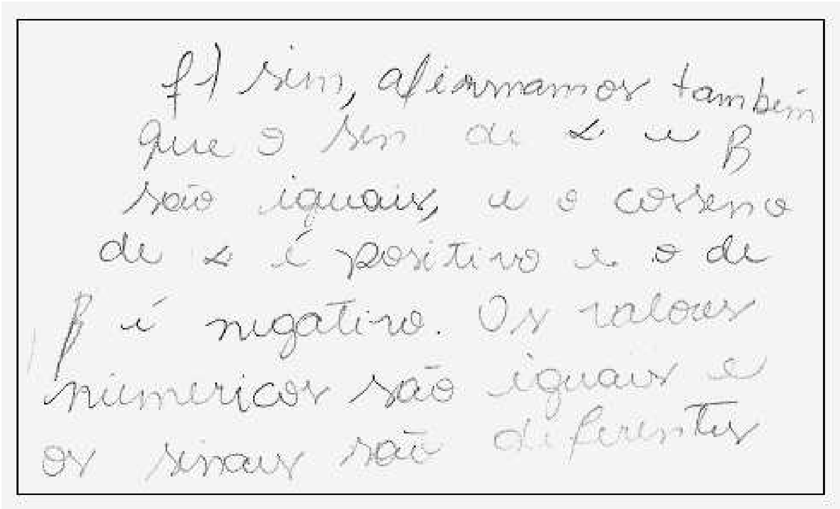
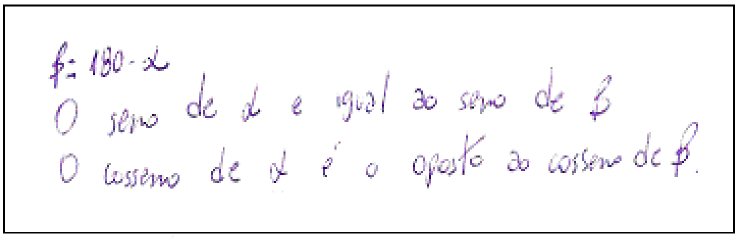

f) sim, afirmamos também que o sen de α e β são iguais, e o cosseno de α é positivo e o de β é negativo. Os valores numericos são iguais e os sinais são diferentes

Figura 80. Registro da aluna B para o item f da atividade 6

Para o mesmo item, os alunos apresentaram registros parecidos com o do protocolo do aluno E, como mostra a Figura 81. Os alunos perceberam a relação entre os dois ângulos, conseguiram generalizar que $\beta = 180° - \alpha$ e, também, perceberam a relação entre o seno e cosseno dos dois ângulos mas não conseguiram escrever, utilizando somente a linguagem matemática.


$\beta = 180 - \alpha$

O seno de α e igual ao seno de β

O cosseno de α é o oposto ao cosseno de β.

Figura 81. Registro do aluno para o item f da atividade 7

Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação ação, ao movimentarem o ponto P e observarem a medida do ânguloα e β e os valores das coordenadas dos dois pontos; formulação, ao perceberem que a soma das medidas dos dois ângulos é 180°, que os valores do seno são iguais para os dois ângulos e que os valores dos cossenos dos dois ângulos são iguais em valor absoluto e validação, ao convencerem os colegas que suas respostas estavam corretas e ao concluírem que $\beta = 180 - \alpha$.

Com esta resposta acreditamos que os alunos perceberam que os valores do seno eram iguais aos dois ângulos e que os valores do cosseno são iguais em valores absolutos como previmos em nossas análises prévias.

Atividade 7
1. Abra o arquivo **ciclotrigo2.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante, observe e responda:
a) O que acontece com o ponto R ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.
b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas dos pontos P e R?
c) Qual a medida do ângulo γ (BÂR)? Qual o valor do cosseno e do seno desse ângulo?
d) Movimente o ponto P. Pare em três posições diferentes e determine o cosseno e o seno do ângulo γ para cada uma delas.
e) Como encontrar a medida de γ sabendo a medida de α?
f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ânguloα é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo γ?Justifique sua resposta.

A atividade 7 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica. Seu objetivo é ampliar o que foi desenvolvido na atividade 5 e 6 para o terceiro quadrante, utilizando o simétrico do ponto P no terceiro quadrante.

Quando os alunos abrirem o arquivo **ciclotrigo2.ggb**, aparecerá na tela do computador um círculo trigonométrico como mostra a Figura 82 com o simétrico do P no terceiro quadrante, o ângulo γ e o ponto I’ simétrico do ponto I e o ponto H’ simétrico do ponto H.

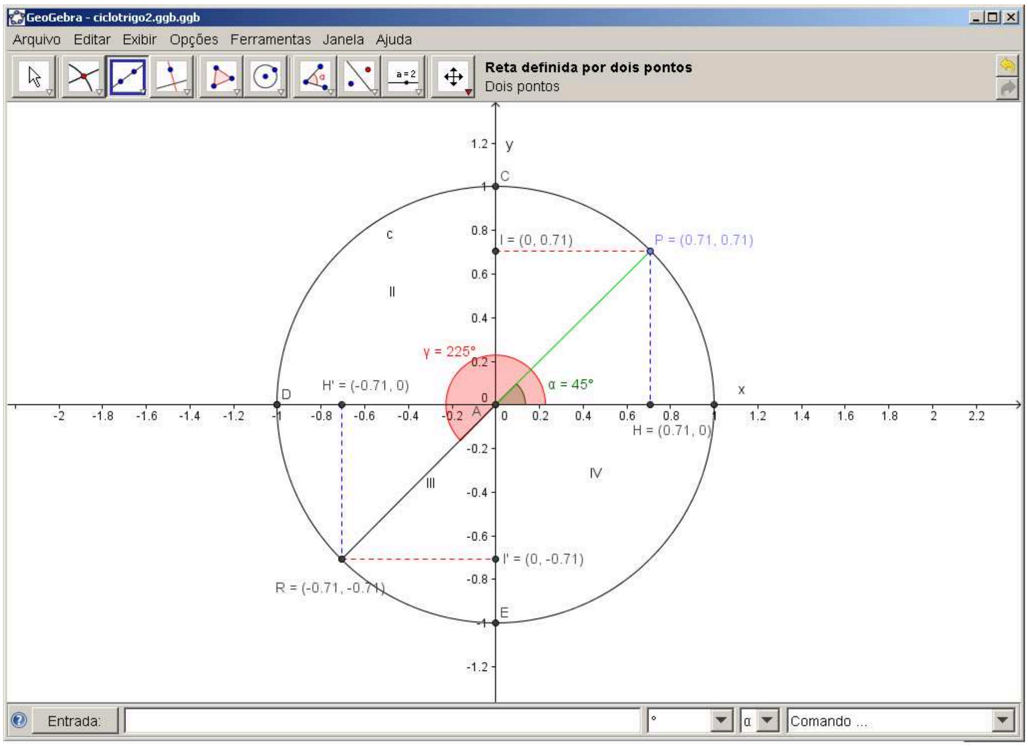


Figura 82. Representação do ponto R simétrico do ponto P no terceiro quadrante

Ao realizarem o procedimento 1 esperávamos que os alunos não apresentassem dificuldades, pois já executaram procedimentos semelhantes nas atividades anteriores.

No item (**a**) espera-se que os alunos respondessem, depois de movimentar o ponto P e observarem que o ponto R era o seu simétrico, conforme o ângulo α se aproximasse de 0°, o ângulo γ e aproximar-se-ia de 180°, e que a abscissa do ponto P se aproximar-se-ia de 1, a abscissa de R se aproximar-se-ia de -1, também, que as duas ordenadas dos dois pontos se aproximar-se-iam de zero como mostra a Figura 83. Quando o ponto P se aproximar-se-ia de 90° o seu simétrico se aproximar-se-ia de 270°, as abscissas dos dois pontos se aproximar-se-iam de zero enquanto a ordenada de P se aproximar-se-ia de 1 a ordenada de R se aproximar-se-ia de -1 como mostra a Figura 83.

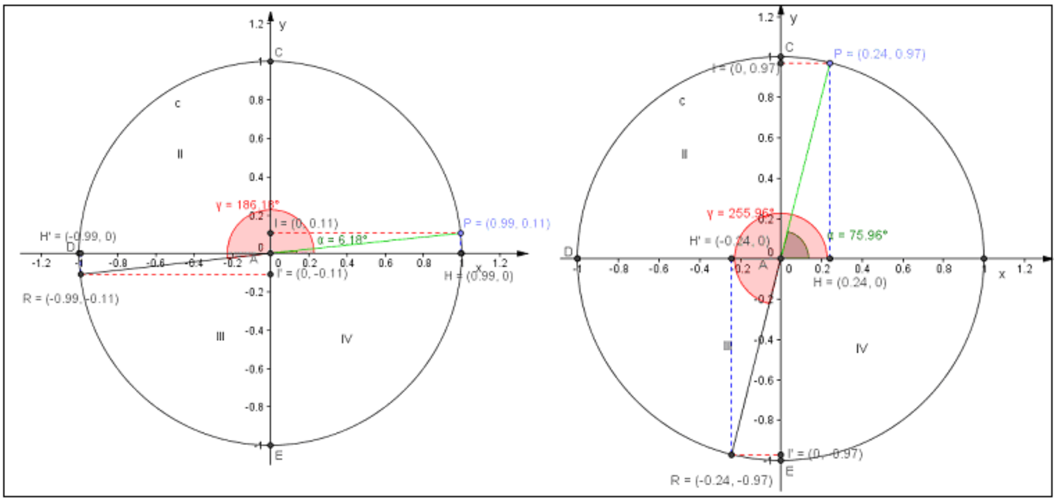


Figura 83. Ponto P se aproximando de 0° e de 90°

No item (**b**), esperava-se que os alunos percebessem que os valores absolutos das coordenadas eram iguais, porém os sinais, opostos.

Para o item (**c**), esperava-se que os alunos, depois de fixarem o ponto P em um ângulo α qualquer, observassem na tela do computador a medida do ângulo γ e depois determinassem o valor do seno e do cosseno de γ, observando as coordenadas do ponto R.

No item (**d**), esperava-se que os alunos procedessem da mesma maneira do item (**c**) para determinar os valores do seno e do cosseno do ângulo γ, após movimentarem o ponto P para três posições diferentes.

Para o item (**e**) esperava-se que os alunos percebessem que $\gamma = 180° + \alpha$

No item (**f**), esperava-se que os alunos afirmassem que era possível determinar o seno e o cosseno do ângulo γ, sabendo o seno e o cosseno do ângulo α. Se, $\gamma = 180° + \alpha$ logo $sen\,(180° + \alpha) = -sen\alpha$ e $\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\alpha$.

Como já descrevemos em todos os momentos da atividade os alunos vivenciariam situações de ação, formulação e validação Quando agirem sobre os comandos do *software*, quando observavam o que acontecia com a movimentação dos pontos P e R, ao buscarem em seus conhecimentos prévios uma maneira para tentar resolver a atividade e quando estavam envolvidos ativamente na resolução da atividade, os alunos estariam vivenciando situação de ação. Quando os alunos conversassem com o parceiro da dupla sobre suas hipóteses de resolução, ou quando observassem o que acontece com as coordenadas de P e R e ao quando comparassem os resultados do seno e do cosseno de α com os resultados do seno e do cosseno de γ, os alunos estariam vivenciando a situação de formulação.

Quando convencessem o colega de que as coordenadas de ponto R eram os valores do seno e do cosseno ou que as coordenadas R eram negativas para o cosseno e para o seno, os alunos estariam vivenciando situação de validação.

Análise *a posteriori* da atividade 7

Assim que leram a atividade, os alunos começaram a realizá-la. No item (**a**), depois mover o ponto P, os alunos não perceberam que os pontos P e R eram simétricos. A aluna A percebeu que os valores do seno e do cosseno para os ângulos determinados pelo ponto R eram negativos no terceiro quadrante como mostrou em seu protocolo, representado pela Figura 84. A aluna C embora apresentasse em seu protocolo um registro confuso, como mostra a Figura 85, percebeu que os valores das coordenadas dos dois pontos tinham o mesmo valor absoluto. A aluna D relatou que “*o ponto R tem os mesmos valores do ponto P, só que os valores do ponto R são negativos*”, quando lhe perguntamos o que queria dizer em seu protocolo representado pela Figura 86. Só o aluno G percebeu que os pontos P e R eram simétricos, mas não conseguiu expressar corretamente sua observação como mostra o seu protocolo representado pela Figura 87.

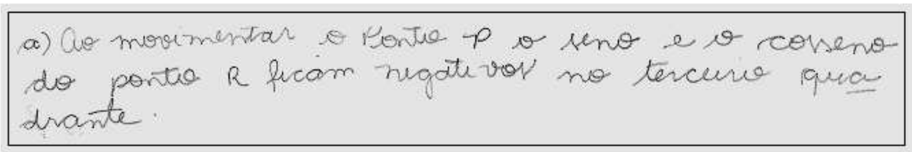

a) Ao movimentar o Ponto P o seno e o cosseno do ponto R ficam negativos no terceiro qua-
drante.

Figura 84. Registro da aluna A para o item a da atividade 7

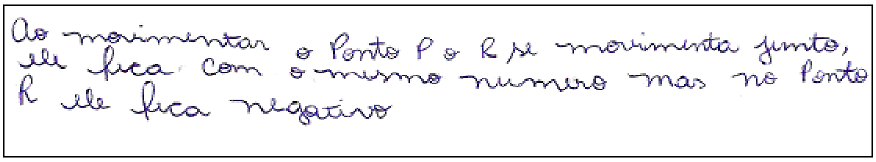

Ao movimentar o Ponto P o R se movimenta junto, ele fica com o mesmo numero mas no Ponto R ele fica negativo

Figura 85. Registro da aluna C para o item a da atividade 7

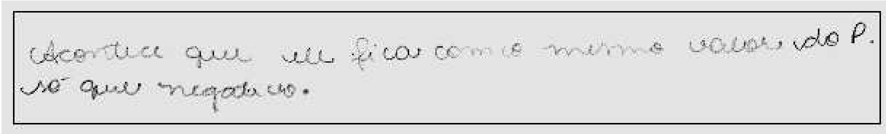

Acontece que ele fica com o mesmo valor do P. só que negativo.

Figura 86. Registro da aluna D para o item a da atividade 7

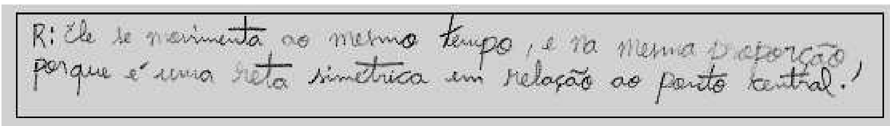

R: Ele se movimenta ao mesmo tempo, e na mesma proporção, porque é uma reta simétrica em relação ao ponto central.

Figura 87. Registro do aluno G para o mesmo item

Embora os alunos não tivessem percebido que os pontos P e R eram simétricos, todos notaram que os valores do seno e do cosseno para os ângulos do terceiro quadrante eram negativos. Mesmo não respondendo como esperávamos, para essas respostas os alunos vivenciaram situação de ação ao movimentarem o ponto P, ao dedicarem-se ativamente em busca de uma resposta para a atividade; formulação, ao compararem os valores das coordenadas dos pontos P e R e validação, ao convencerem o parceiro a dar a mesma resposta que a sua.

No item (**b**), a aluna A percebeu que os valores do seno e do cosseno para os dois pontos eram iguais em valores absolutos como mostrou em seu protocolo representado pela Figura 88. O aluno G, ao observar as coordenadas dos dois pontos, simplesmente escreveu em seu protocolo que "*uma é oposto da a outra*" como mostra seu protocolo representado pela Figura 89. Quando perguntamos ao aluno o que ele queria dizer ele nos respondeu que "*ao movimentar o ponto P os números das coordenadas do ponto P são iguais aos números das coordenadas do ponto R só que as coordenadas Ponto R são negativas*".

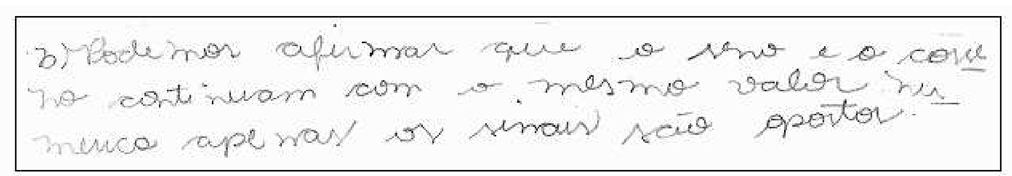

b) Podemos afirmar que o seno e o cosseno continuam com o mesmo valor numérico apenas os sinais são opostos.

Figura 88. Registro da aluna A para o item b da atividade 7

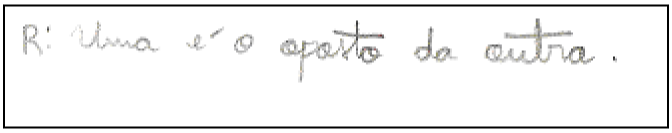


Figura 89 Registro do aluno G para o item b da atividade 7

Os demais alunos apresentaram registros parecidos com esses e, para as respostas, vivenciaram situação ação, formulação e validação.

No item (**c**), a aluna A apresentou o seguinte registro, seu protocolo foi representado pela Figura 90. Nesse item, todos os alunos apresentaram registros parecidos com o registro da aluna A, mudando apenas o valor das medidas dos ângulos.

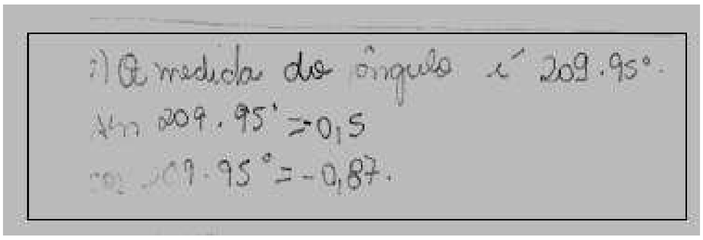


Figura 90. Registro da aluna A para o item c da atividade 7

Ao responderem esse item, os alunos vivenciaram situação de ação, ao moverem o ponto P, ao observarem na tela do computador o valor do ângulo, formulação, ao conversarem com o colega que os valores das coordenadas do ponto R eram negativas e validação ao escreverem suas respostas por terem certeza de que elas estavam corretas.

No item (**d**), os alunos A, D, F e H executaram os seguintes registros em seus protocolos, representados pelas Figuras 91, 92, 93 e 94. A aluna A ao copiar os ângulos da tela do computador separou a parte decimal com um ponto, como podemos observar em seu protocolo representado pela Figura 91. A aluna D, ao copiar os valores do seno e do cosseno da tela do computador, copiou o par ordenado, como está apresentado na tela, como mostra o seu protocolo representado pela Figura 92. O aluno F escreveu por extenso seno e cosseno, quando poderia escrever simbolicamente como a aluna A, (Figura 91). A aluna H escolheu os ângulos de 90°, 180°, e 270°, determinou os valores do seno e do cosseno para esses ângulos e escreveu que estes ângulos pertenciam aos primeiro, segundo e terceiro quadrantes, como mostra seu protocolo representado pela Figura 94. Ao perceber estes equívocos o pesquisador fez uma intervenção explicando-lhes que, em outros países, separam-se as casas decimais com um ponto e não com a vírgula, como fazemos. Disse que, ao copiar da tela do computador os valores do seno e do cosseno não precisam copiar o par ordenado como está na tela, só a ordenada para os valores do seno e, somente, as abscissas aos valores do cosseno. Disse-lhes, também, que os pontos sobre os eixos não pertenciam a nenhum dos quadrantes.

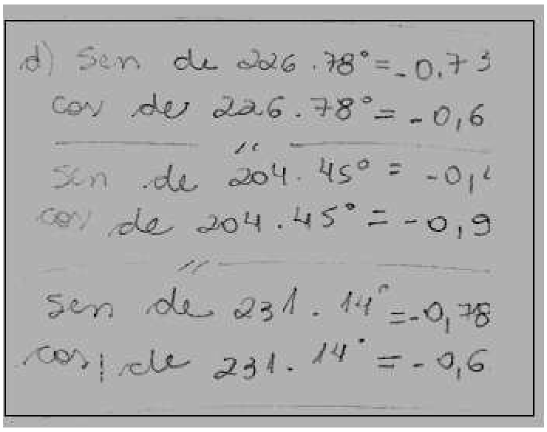


Figura 91. Registro da aluna A para o item d da atividade 7

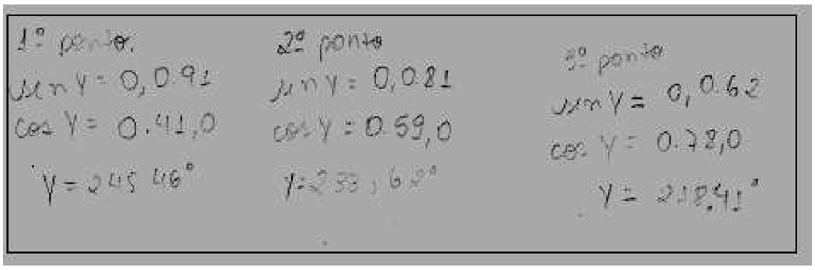


Figura 92. Registro da aluna D para o mesmo item

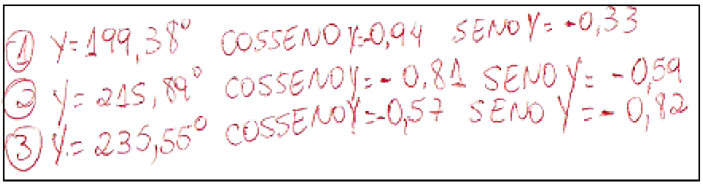
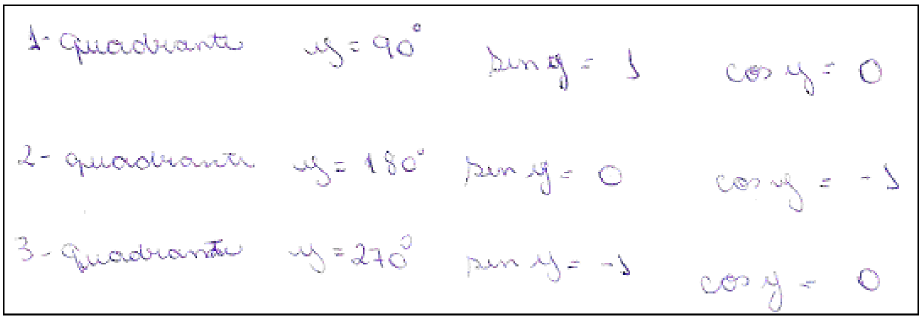


Figura 93. Registro do aluno F para o item d da atividade 7



1- Quadrante $y = 90°$ sen $y = 1$ cos $y = 0$

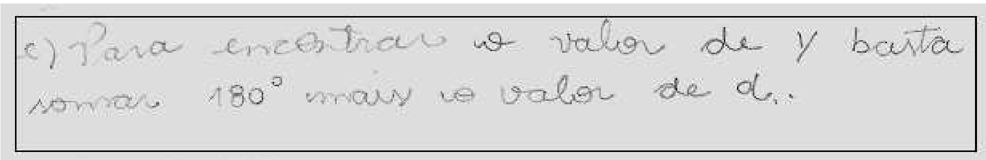
2- quadrante $y = 180°$ sen $y = 0$ cos $y = -1$

3- Quadrante $y = 270°$ sen $y = -1$ cos $y = 0$

Figura 94. Registro da aluna H para o mesmo item

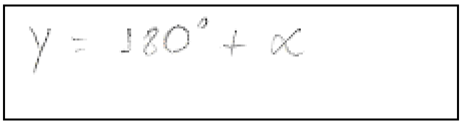
Para essas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto P e escolherem os valores dos ângulos; formulação ao conversarem com colega que os valores do seno e do cosseno eram sempre negativos para os ângulos do terceiro quadrante e validação, ao convencerem os colegas a registrarem em seus protocolos suas respostas.

No item (**e**), a aluna B escreveu por extenso sua observação como mostra o registro em seu protocolo representado pela Figura 95, já a aluna D escreveu a sua observação simbolicamente como mostra a Figura 96 e os demais alunos perceberam a relação entre os ângulos α e γ.



e) Para encontrar o valor de γ basta somar 180° mais o valor de α.

Figura 95. Registro da aluna B para o item e da atividade 7



$\gamma = 180° + \alpha$

Figura 96. Registro da aluna D para o item e da atividade 7

Ao apresentarem seus registros, três dos alunos o fizeram por extenso como a aluna B e os demais alunos fizeram os seus registros simbolicamente como aluna D (Figura 96). Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto P; formulação, ao conversarem um com o outro sobre as observações feitas ao moverem o ponto P e validação, ao registrarem em seus protocolos suas respostas depois de convencerem o colega que para todas as posições do ponto P a medida do ângulo γ era igual a medida do ângulos α mais 180°.

No item (**f**), os alunos perceberam a relação entre o seno e o cosseno dos dois ângulos, como mostram as Figuras 97 e 98, mas nenhum deles escreveu esta relação com símbolos.

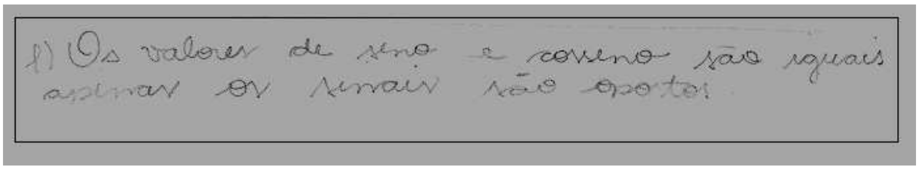

f) Os valores de seno e cosseno são iguais apenas os sinais são opostos

Figura 97. Registro da aluna B para o item f da atividade 7

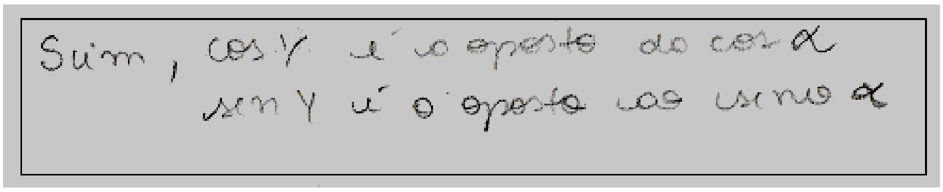

Sim, cos γ é o oposto do cos α
sen γ é o oposto do seno α

Figura 98. Registro da aluna D para o mesmo item

Para estas respostas os alunos vivenciaram a situação ação, ao movimentarem o ponto P e observarem a medida do ânguloα e γ e os valores das coordenadas dos dois pontos; formulação, ao perceberem que a medida do ângulo γ era igual à medida do ângulo α mais 180° e validação ao registrar em seus protocolos que os valores do seno e do cosseno são iguais para os dois ângulos, mas, com sinais opostos.

Atividade 8

1. Abra o arquivo **ciclotrigo3.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante, observe e responda:

a) O que acontece com o ponto S ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.
b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas do ponto P e S?
c) Qual a medida do ângulo δ (BÂS)? Qual o valor do seno e do cosseno desse ângulo?
d) Movimente o ponto P pare em três posições diferentes e determine o cosseno e o seno do ângulo δ para cada uma delas.
e) Qual a soma do ângulo α e δ?
f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ângulo α, é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo δ? Justifique sua resposta.

A atividade 8 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica. Seu objetivo é ampliar o que foi desenvolvido na atividade 5, 6 e 7 para o quarto quadrante pelo simétrico do ponto P no quarto quadrante.

Após abrirem o arquivo **ciclotrigo3.ggb**, aparecerá na tela do computador um círculo trigonométrico como mostra a Figura 99, com o ponto S que é simétrico do ponto P no quarto quadrante, o ângulo δ, e o ponto I' que é o simétrico do ponto I. Depois destes procedimentos esperávamos que os alunos movimentassem o ponto P e observassem o que aconteceria com o seu simétrico no quarto quadrante, para em seguida respondessem aos questionamentos.

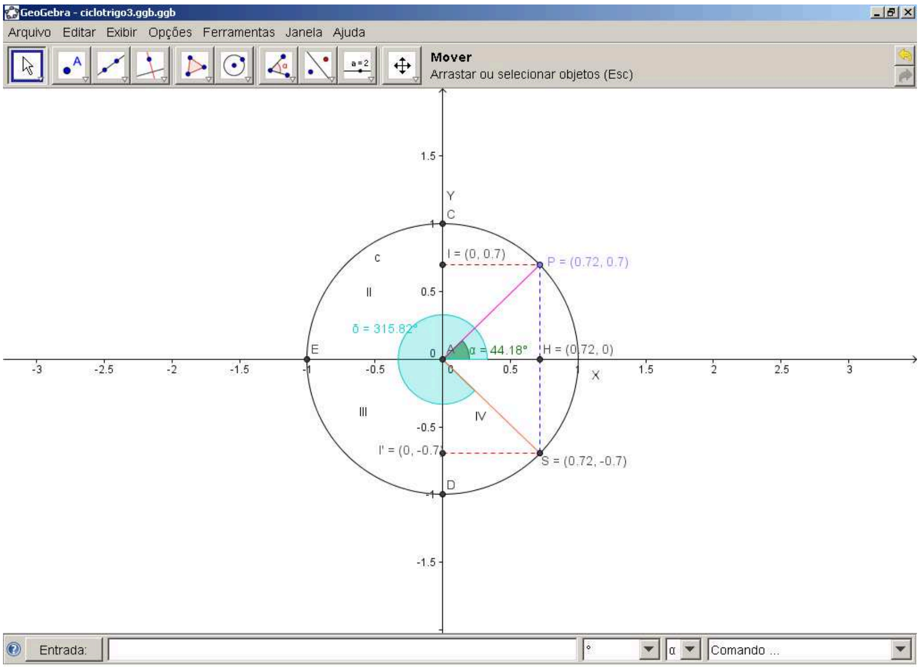


Figura 99. Simétrico do ponto P no quarto quadrante.

No item (**a**), depois que os alunos movimentassem o ponto P no primeiro quadrante e observassem seu simétrico no quarto quadrante, esperava-se que os alunos respondessem que ao aproximar o ângulo α de 0° o ângulo δ aproximar-se-ia de 360° e que as ordenadas dos dois pontos aproximar-se-iam de zero e as abscissas dos dois pontos aproximar-se-iam de 1 como mostrou a Figura 100, e quando o ângulo α se aproximasse de 90° o ângulo δ aproximar-se-ia de 270°, as abscissas dos dois pontos aproximar-se iam de zero, a ordenada de P aproximar-se-ia de 1 e a ordenada de S aproximar-se-ia de -1 como mostrou a Figura 100.

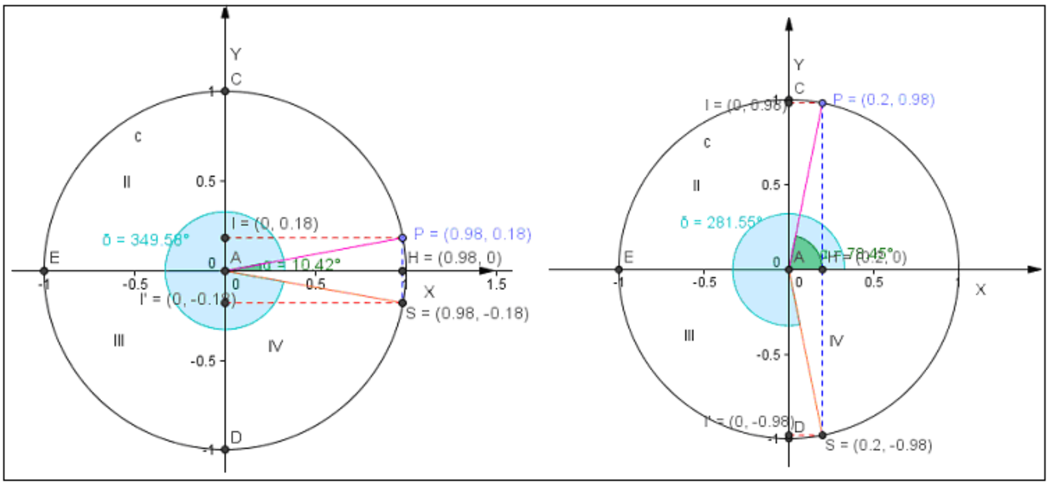


Figura 100. Ponto P se aproximando de 0° e de 90°.

Para responder ao item (**b**), esperava-se que os alunos escrevessem que as abscissas dos dois pontos eram iguais e que as ordenadas dos dois pontos eram iguais em valores absolutos.

Para o item (**c**), esperava-se que os alunos depois de fixarem o ponto P em um ângulo α qualquer, observassem na tela do computador a medida do ângulo δ e depois determinassem o valor do seno e do cosseno de δ, copiando as coordenadas do ponto S.

Para o item (**d**) esperava-se que os alunos após movimentarem o ponto P para três posições diferentes procedessem da mesma maneira do item (**c**) para determinar o seno e o cosseno de δ.

No item (**e**), esperava-se que os alunos escrevessem que a soma de α e δ era igual a 360°.

Para o item (**f**), esperava-se que os alunos afirmassem que era possível determinar o seno e o cosseno do ângulo δ, sabendo o seno e o cosseno de α, pois se $\delta + \alpha = 360°$ logo $\delta = 360° - \alpha$. Daí, teria o $sen(360° - \alpha) = -sen\alpha$ e $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$.

Ao realizarem a atividade, os alunos estariam vivenciando situação de ação, ao movimentar o ponto P e observar o que acontece com seu simétrico, ao se envolver na realização da atividade, querendo uma solução para os questionamentos; situação de formulação, ao comparar os valores do seno e do cosseno das medidas dos ângulos α com o seno e o cosseno do ângulo δ, ao conversarem com o outro integrante da dupla sobre as suas hipóteses, ao observarem o que acontece com o simétrico do ponto P ao movimentá-lo, ao observarem o que acontece com os sinais das coordenadas do ponto P e de seu simétrico e, em situação de validação, ao mostrar para o colega que a sua estratégia de resolução é correta, ao convencer o colega que as ordenadas do simétrico do ponto P eram os valores do seno e que as abscissas eram os valores do cosseno.

Ao término desta atividade, o pesquisador levantaria todas as respostas dos alunos para discuti-las e depois de corrigi-las, faria a institucionalização do objeto matemático em estudo e, em seguida, daria uma folha aos alunos com a institucionalização.

Análise *a posteriori* atividade 8

No item (**a**), alguns alunos não perceberam que os pontos P e S eram simétricos, embora notassem a relação entre os valores do seno e do cosseno para os dois ângulos determinados por esses pontos. A aluna A relatou em seu protocolo como mostra a Figura 101: "*observamos que ao movimentar o ponto P o seno e cosseno são positivos, no ponto S apenas o seno se torna negativo".* Ao lhe pedirmos para comentar sua resposta ela moveu o ponto P, mostrou-nos que os valores do seno e do cosseno para os ângulos determinados pelo ponto P eram positivos e aos ângulos determinados pelo ponto S, o cosseno era positivo e o seno, negativo.

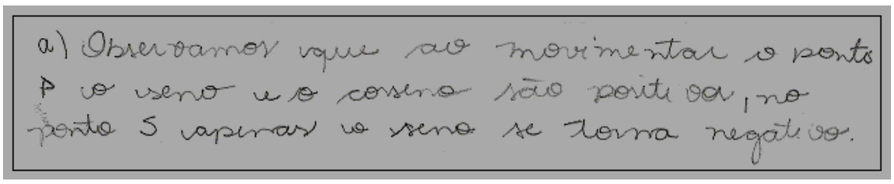

a) Observamos que ao movimentar o ponto P o seno e o cosseno são positivos, no ponto S apenas o seno se torna negativo.

Figura 101. Registro da aluna A para o item a da atividade 8

Nesse mesmo item, o aluno G percebeu a simetria entre os pontos como mostrou o registro de seu protocolo representado pela Figura 102, mas não observou nada sobre as coordenadas dos dois pontos.


R: Eles se movem simetricamente ao mesmo tempo.

Figura 102. Registro do Aluno G para o item para o mesmo item

Nas respostas dadas, percebemos que a maioria dos alunos não observou que os pontos P e S eram simétricos (só os alunos G e H), embora tenha percebido que o seno e o cosseno dos ângulos determinados pelo ponto P eram positivos e que os valores do seno dos ângulos determinados pelo ponto S eram negativos. Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentar o ponto P e observar o que acontecia com S; formulação ao conversar com o colega sobre os valores das coordenadas dos pontos P e S e, validação, ao convencer o colega de que suas observações eram corretas.

No item (**b**), os alunos perceberam a relação entre as coordenadas dos pontos P e S, como relatou a aluna A em seu protocolo, representado pela Figura 103, embora sua resposta não tenha sido tão objetiva como a resposta dada pelo aluno E em seu protocolo representado, pela Figura 104.

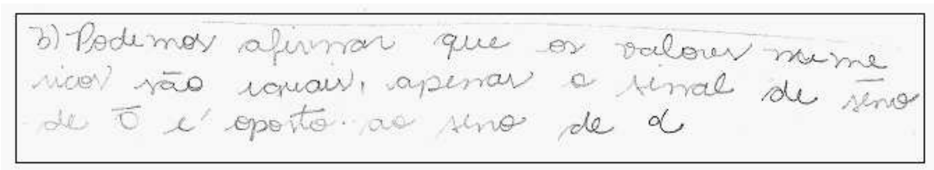

b) Podemos afirmar que os valores numericos são iguais, apenas o sinal do seno de T é oposto ao seno de α

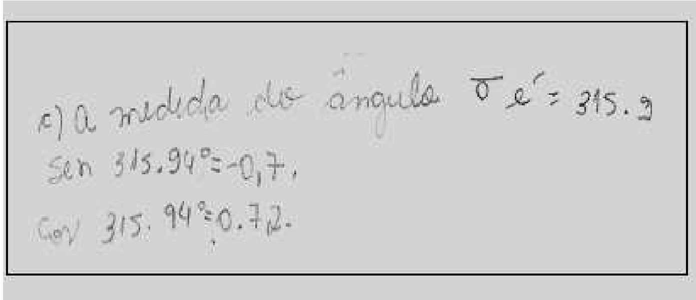
Figura 103. Registro da aluna A para o item b da atividade 8


As cordenadas dos pontos P e S no eixo X são iguais no eixo Y são opostas.

Figura 104. Registro do aluno E para o item b da atividade 8

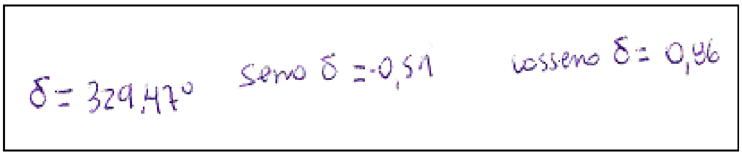
Como já relatamos, alguns alunos sentiam dificuldade para expressar suas observações por extenso, mas ao perguntarmos o que queriam dizer com as respostas, expressaram-se muito bem oralmente. Ao perguntarmos para à aluna A, o que acontecia com as coordenadas dos pontos P e S ao movimentar o ponto P, ela relatou que as coordenadas do ponto P eram positivas e a abscissa do ponto S era positiva enquanto a ordenada era negativa.

No item (**c**), os alunos não tiveram dificuldades para resolvê-lo, e apresentaram registros os parecidos com o protocolo da aluna A, representado pela Figura 105 ou do aluno E representado, pela Figura 106:



c) a medida do ângulo σ é = 315.9
Sen 315.94° = -0,7.
Cos 315.94° = 0.72.

Figura 105. Registro feito pela aluna A para o item c da atividade 8

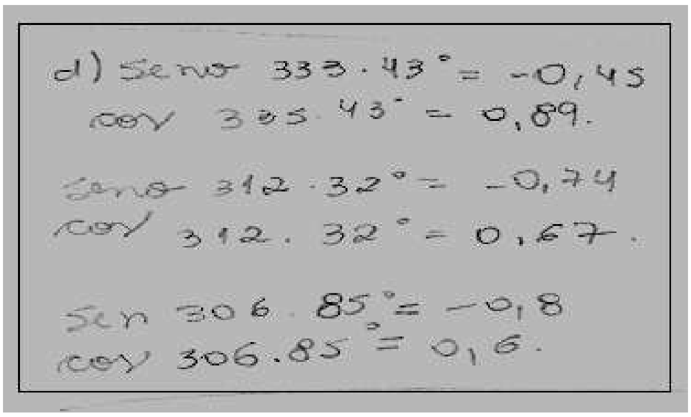


δ = 329,47°   seno δ = -0,51   cosseno δ = 0,86

Figura 106. Registro do aluno E para o item c da atividade 8

Ao observar os protocolos, notamos que a aluna A separou as casas decimais com um ponto e alguns casos com a vírgula como mostra a Figura 106.

No item (**d**), os alunos não tiveram dificuldades para resolvê-los, a aluna A em seu protocolo, em alguns casos, escreveu por extenso a palavra *"seno"* como mostra a Figura 107 e em outros casos abreviou a mesma palavra (Figura 107). Em seu protocolo, a aluna A separou os valores das casas decimais dos ângulos com um ponto; e os valores do seno e do cosseno separou as casas decimais com vírgula. O aluno E escreveu em seu protocolo representado pela Figura 108, por extenso, as palavras "*seno*" e "*cosseno*" quando poderia abreviá-las.



d) Seno 333.43° = -0,45
cos 333.43° = 0,89.
Seno 312.32° = -0,74
cos 312.32° = 0,67.
Sen 306.85° = -0,8
cos 306.85° = 0,6.

Figura 107. Registro dos cálculos da aluna A para o item d atividade 8

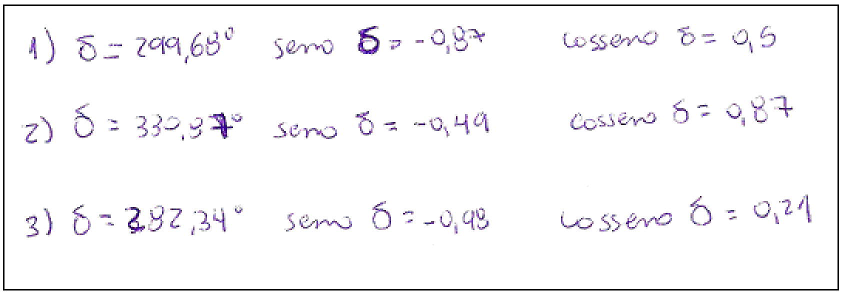


Figura 108. Registro dos cálculos da aluna E atividade 8

Os demais alunos apresentaram respostas parecidas com as dos alunos A e E em seus protocolos, embora tenham escolhidos ângulos diferentes. Para estas respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação, ao movimentarem o ponto P e escolherem os valores dos ângulos; formulação ao conversarem com colega na hora de escolherem o ângulo e validação, ao registrarem em seus protocolos suas repostas, após convencerem os colegas a darem respostas iguais às suas.

O item (**e**) todos os alunos conseguiram resolvê-lo corretamente. Em seu protocolo, A aluna B separou as casas decimais com um ponto, mesmo depois da intervenção feita pelo pesquisador anteriormente, como mostra a Figura 109.

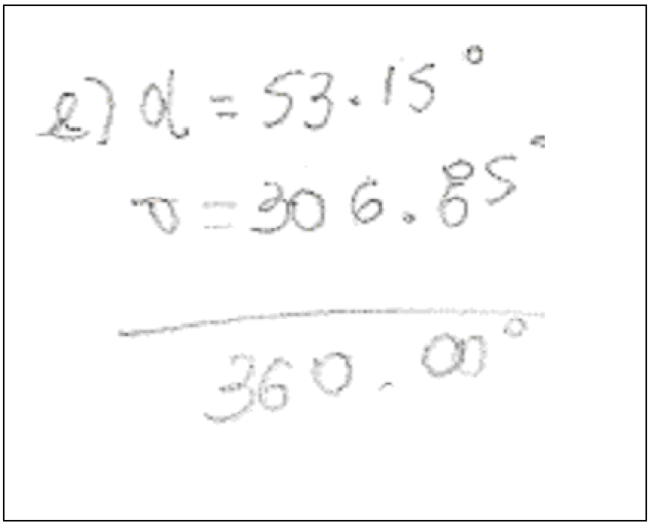


Figura 109. Registro dos cálculos da aluna B atividade 8

Nesse mesmo item, quatro alunos escreveram em seus protocolos que a soma dos ângulos era sempre igual a 360° e não apresentaram nenhum cálculo. O pesquisador perguntou como eles chegaram a esta conclusão, e o aluno G disse "... *foi fácil, nós mexemos no ponto P e somamos os valores dos dois ângulos, o resultado sempre dava 360°...*".

No item (**f**), a aluna B percebeu que os valores do cosseno dos dois ângulos eram iguais e que os valores do $sen\delta$ era oposto ao $sen\alpha$, como mostra o registro de seu protocolo representado pela Figura 110, mas não percebeu a relação entre os ângulos α e δ como o aluno E registrou em seu protocolo, como mostra Figura 111.

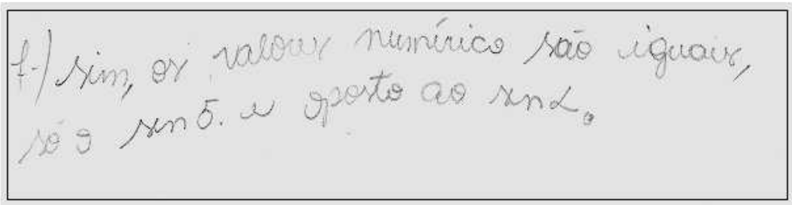

f-) sim, os valores numéricos são iguais, só o sen δ. é oposto ao sen α.

Figura 110. Registro da aluna B para o item f da atividade 8

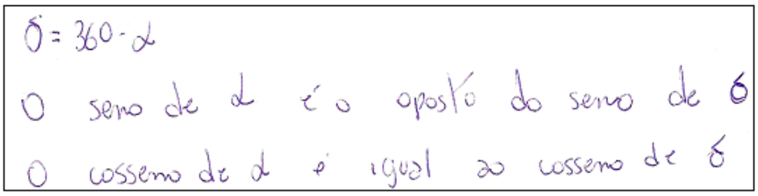

δ = 360 - α
O seno de α é o oposto do seno de δ
O cosseno de α é igual ao cosseno de δ

Figura 111. Registro do aluno E para o mesmo item

Nesse mesmo item, os demais alunos perceberam a relação entre os ângulos α e δ e escreveram essa relação como o aluno E fez em seu protocolo (Figura 111), também, notaram a relação entre seno e cosseno dos dois ângulos, mas nenhum deles escreveu com símbolos matemáticos e sim por extenso. Para estas respostas os alunos vivenciaram situação ação, ao movimentarem o ponto P, ao observarem a medida do ângulo α e do ângulo δ e os valores das coordenadas dos dois pontos; formulação, ao conversar com o colega que a medida do ângulo δ era igual à medida do ângulo α subtraída de 360° e de validação, ao registrarem em seus protocolos depois de convencerem os colegas que os valores do seno do ângulo α eram opostos aos valores do seno do ângulo δ e que os valores do cosseno eram iguais para os dois ângulos.

Ao término das atividades, o pesquisador perguntou-lhes se haviam entendido, o que foi proposto nas atividades 5, 6, 7, e 8, eles relataram que perceberam que as coordenadas de um ponto no círculo trigonométrico representam os valores do cosseno e do seno.

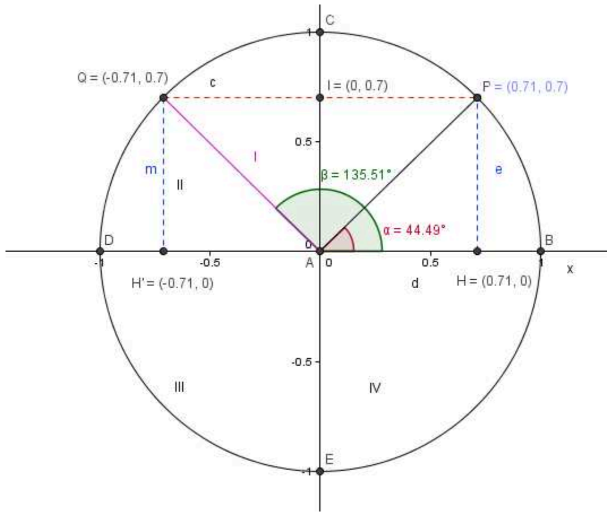
O pesquisador mostrou aos alunos que os pontos Q, R e S eram os pontos simétricos de P no segundo, terceiro e quarto quadrantes, respectivamente, mostrou a relação entre os ângulos α e β, entre α e γ, e entre α e δ. Depois, mostrou a relação entre os valores do seno e do cosseno desses ângulos. Após esta discussão foi entregue a cada integrante da dupla uma folha com a institucionalização das atividades 5, 6, 7, e 8.

Institucionalização das atividades 5, 6, 7 e 8.

Seja o ponto P a extremidade de um ângulo de medida α sobre um círculo trigonométrico, chama-se $sen\alpha$ a ordenada de P e $\cos\alpha$ a abscissa do ponto P.

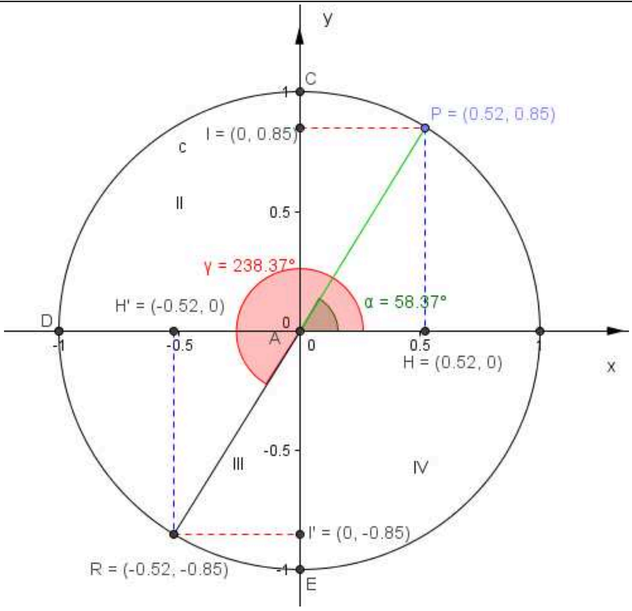
Para o ângulo β determi nado pelo ponto simétrico do ponto P no segundo quadrante, temos que o seno deste ângulo é igual ao seno do ângulo α e o cosseno deste ângulo tem valor absoluto igual ao cosseno do ângulo α.

Para calcular a medida do ângulo do ponto simétrico do ponto P no segundo quadrante basta subtrair a medida do ângulo determinado pelo P de 180° simbolicamente $\beta = 180° - \alpha$. E $sen(180° - \alpha) = sen\alpha$ e $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$



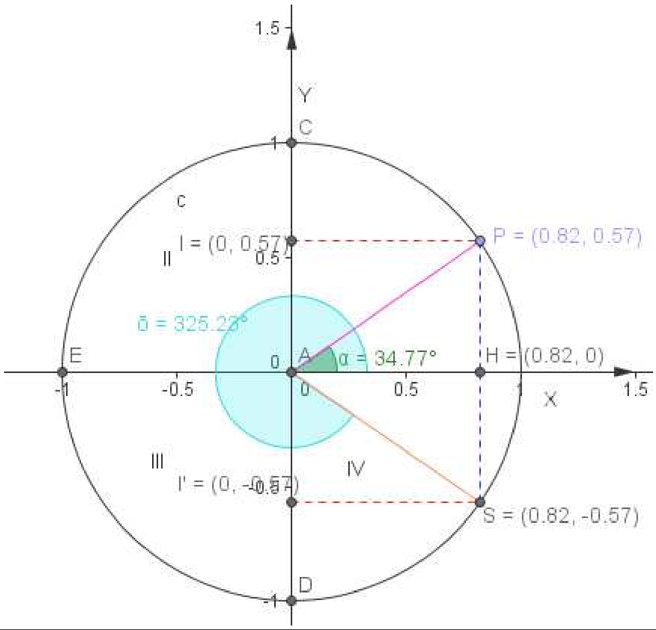
Para o simétrico do ponto P no terceiro quadrante os valores do seno e do cosseno do ângulo γ são iguais ao seno e ao cosseno do ângulo α em valores absolutos.

Para calcular a medida do ângulo γ no terceiro quadrante, basta somar a medida do ângulo α com 180° , com símbolos $\gamma = 180° + \alpha$. E $sen(180° + \alpha) = -sen\alpha$ e o $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$.



No quarto quadrante, o cosseno do ângulo δ determinado pelo ponto simétrico do ponto P é igual ao cosseno do ângulo α e o seno dos dois ângulos são iguais em valores absolutos.

Para calcular a medida do ângulo δ determinado pelo ponto simétrico de P no quarto quadrante, basta subtrair a medida do ânguloα de 360° simbolicamente $\delta = 360° - \alpha$ E $sen\,(360° - \alpha) = -sen\alpha$ e o $\cos\,(360° - \alpha) = \cos\alpha$.



Atividade 9

a. Abra o arquivo **trigocirculo.ggb**, e observe os triângulos CBF e ZBA , utilize a semelhança de triângulos para calcular a medida do segmento $\overline{ZA}$.

b. Calcule a tangente do ângulo β no triângulo CBF.

c. Divida o valor do seno pelo valor do cosseno do triângulo CBF, compare com a medida do segmento $\overline{ZA}$ e com o valor da tangente obtida no item b. Os valores são iguais?

d. Movimente o ponto C para um outro ângulo qualquer do primeiro quadrante, depois repita os procedimentos a, b e c. Novamente os valores são iguais? O que você conclui com estes resultados? Os resultados são iguais à tangente de β? Existe outro ângulo que tenha o mesmo valor da tangente de β? Qual a medida desse ângulo?

e. Movimente o ponto C no segundo quadrante observe e responda. Existe outro ângulo que tenha o mesmo valor da tangente de β? Qual a medida desse ângulo?

A atividade 9 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica, seu objetivo é calcular a calcular a tangente e apresentá-la no círculo trigonométrico.

Ao abrirem o arquivo **trigocirculo.ggb**, os alunos veriam na tela do computador um círculo trigonométrico com uma reta tangente ao círculo no ponto (1,0) que representaria os valores da tangente como mostra a Figura 112.

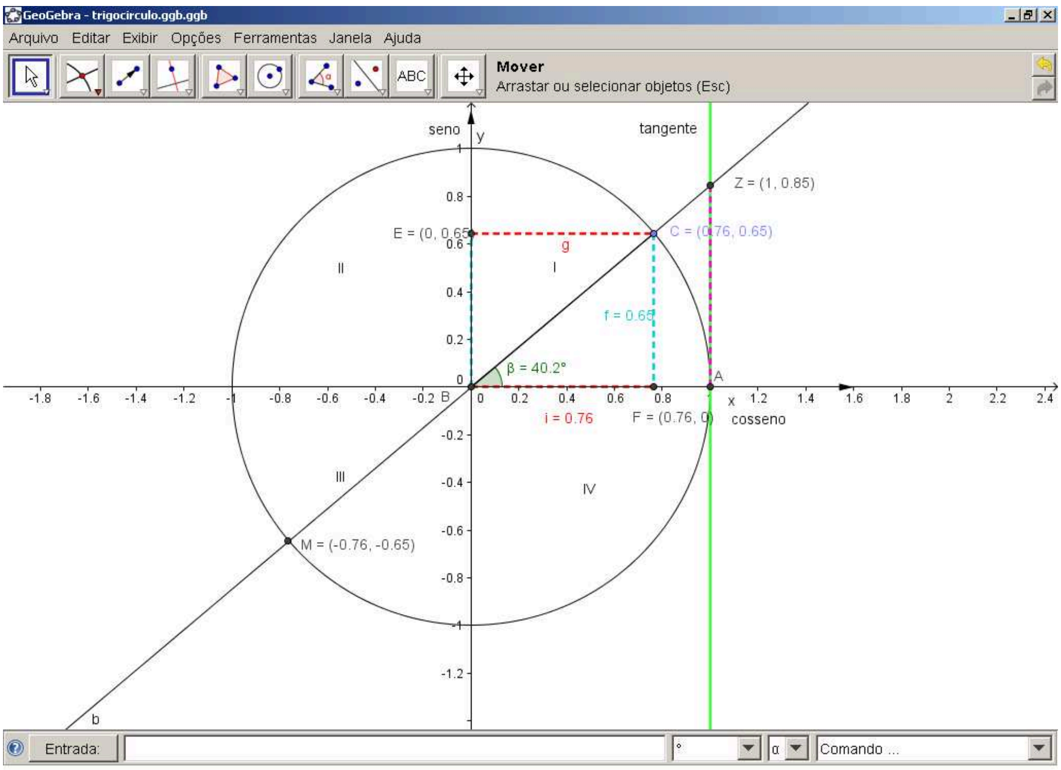


Figura 112. Círculo trigonométrico

Para executarem os primeiros itens da atividade os alunos precisariam buscar em seus conhecimentos prévios a semelhança de triângulos para calcularem o comprimento do segmento $\overline{ZA}$. Caso os alunos não se lembrassem como resolver a situação, o pesquisador no momento poderia lembrá-los de como proceder para resolvê-la, pois o objetivo da atividade não era ensinar a semelhança de triângulos.

A atividade propunha aos alunos para verificar se o comprimento do segmento $\overline{ZA}$ ou a ordenada do ponto Z era a tangente do ângulo β, também que os alunos percebessem que, para uma posição qualquer do ponto Z, existiam dois ângulos com mesmo valor de tangente.

Para o item (**a**), depois que abrissem o arquivo **trigocirculo.ggb** e percebessem que os triângulos CBF e ZBA eram semelhantes seria proposto que calculassem o comprimento do segmento $\overline{ZA}$ da seguinte forma:

$\frac{\overline{CF}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}}$, daí, utilizando, por exemplo, as informações da Figura 112 concluiriam que $\overline{ZA}$=0,85

No item (**b**), utilizando as informações da Figura 112 esperava-se que os alunos fizessem $tg\beta = \frac{f}{i} = \frac{0,65}{0,76} = 0,85$.

Para o item (**c**), esperava-se que os alunos escrevessem que o $\frac{sen\beta}{\cos\beta} = 0,85$ para os valores dados na Figura 112. Depois de efetuar os três cálculos e de compará-los, esperava-se que os alunos escrevessem que estes valores eram iguais.

No item (**d**), esperava-se que os alunos, após movimentarem o ponto C para um ângulo β qualquer e resolvessem os itens 1, 2 e 3 respondessem que os valores eram iguais e com estes resultados concluiriam que $\overline{ZA} = \frac{f}{i} = \frac{sen\beta}{\cos\beta} = tg\beta$. Esperava-se que os alunos percebessem que existia outro ângulo que tinha o valor da tangente igual à tangente β e que este ângulo era igual a $180° + \beta$.

Para o item (**e**), esperava-se que os alunos percebessem que existia outro ângulo com o valor da tangente igual à tangente deβ e que este ângulo era igual a $180° + \beta$.

Os alunos vivenciariam a situação de ação ao abrirem o arquivo, ao movimentarem o ponto C, ao copiarem as medidas dos segmentos na figura; em situação de formulação, ao compararem a medida do segmento $\overline{ZA}$ com a tangente de B e com a divisão do seno pelo cosseno e em situação de validação, ao registrarem suas respostas depois de convencerem o colega de que elas estavam corretas.

Análise *a posteriori* da atividade 9

Assim que leram o item (**a**), os integrantes das duplas relataram que não sabiam o que era semelhança de triângulos (a aluna A disse que aprendeu e a aluna B afirmou nunca ter aprendido). Os demais alunos não se pronunciaram, mas depois disseram que também não sabiam.

Como o objetivo da atividade não era ensinar semelhança de triângulos e para dar prosseguimento à atividade, o pesquisador fez uma figura na lousa como mostra a Figura 113, parecida com a figura do arquivo **trigocirculo.ggb** para demonstrar aos alunos, como realizar os cálculos para determinar a medida do segmento $\overline{ZA}$. Mostrou que os triângulos CBF e ZBA eram semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, ângulo (AAA) e escreveu a seguinte relação $\frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{ZA}}$ para determinar a medida do segmento $\overline{ZA}$.

Figura 113. Figura para mostrar como determinar o segmento $\overline{ZA}$[7].

Após esta explicação, os alunos conseguiram executar o item (**a**). A aluna A, em seu protocolo registrou a resposta para o ângulo 41,61°, como mostra a Figura 114. Ela não fez os cálculos na mesma linha, como o aluno F fez em seu protocolo, como mostra Figura 115.

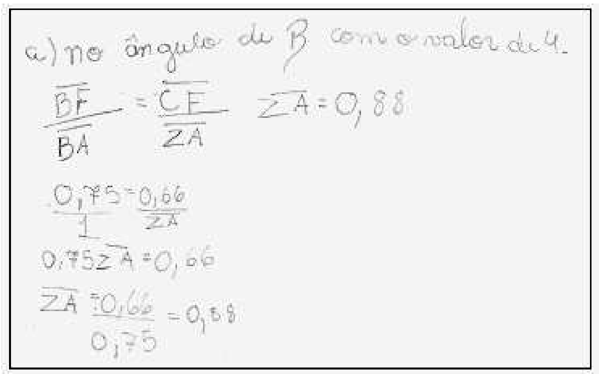


Figura 114. Representação dos cálculos apresentada pela aluna A

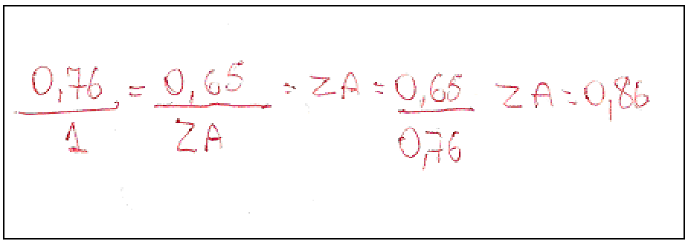


Figura 115. Cálculo apresentado pelo aluno F para o item a da atividade 9

[7] Ao construirmos esta figura na lousa estávamos preocupados em mostrar a semelhança entre os triângulos CBF e ZBA, por isso acabamos nos esquecendo de nomear os eixos x e y e de colocar a orientação nos referidos eixos.

Os demais alunos fizeram seus registros iguais ao do aluno F (Figura 115). Para esta resposta os alunos vivenciaram situação de ação ao observarem e copiarem os valores dos segmentos da figura da tela do computador; de formulação ao conversarem um com o outro, a aluno A disse a aluna B que estava confusa na hora de encontrar as medidas dos segmentos na figura da tela do computador; ao buscarem em seus conhecimentos prévios como calcular a medida de $\overline{ZA}$, utilizando a regra de três e de validação ao convencerem o colega de que o procedimento utilizado para efetuarem os cálculos eram corretos e convencerem os colegas a fazerem do mesmo modo.

No item (**b**), a aluna A realizou o cálculo para o ângulo de medida igual a 41,61° como mostra a Figura 116 e não representou a tangente pela razão entre a medida do segmento *f* e a medida do segmento *l* como fez o aluno E em seu protocolo, representado pela Figura 117.

$$tg\ 41{,}61° = \frac{0{,}66}{0{,}75} = 0{,}88$$

Figura 116. Cálculo apresentado pela aluna A para atividade 9

$$\beta = 40{,}73° \quad tg\ 40{,}73° = \frac{f}{l} = \frac{0{,}65}{0{,}76} = 0{,}86.$$

Figura 117. Registro do aluno E do item c da atividade 9

Os demais alunos fizeram seus registros como o da aluna A (Figura 116). Ao apresentar as respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação ao buscarem na figura da tela do computador a medida do cateto oposto ao ângulo β e a medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo; formulação ao buscarem em seus conhecimentos prévios a fórmula para calcular a tangente de um ângulo e ao conversarem com o parceiro se ele concordava que a fórmula da tangente era a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo β e hipotenusa e validação ao convencerem o colega de que seus cálculos estavam corretos e ambos escreveriam em seus protocolos a mesma resposta.

No item (**c**), a aluna A registrou a divisão do seno pelo o cosseno para o ângulo de 41,61° como mostra a Figura 118 e o aluno G somente copiou os valores da tela do computador e dividiu um número pelo outro como mostra a Figura 119.

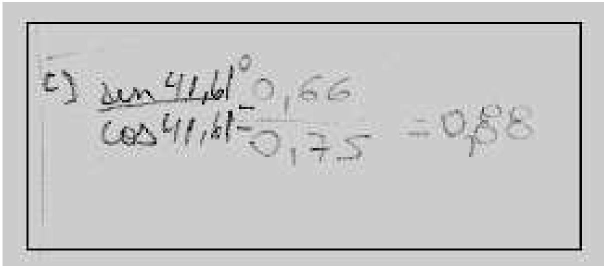


Figura 118. Registro da aluna A para o item c da atividade 9

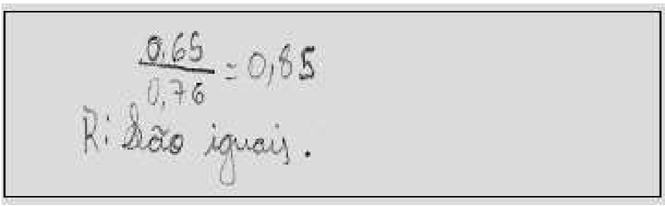


Figura 119. Registro do aluno G para o item c da atividade 9

Os demais alunos fizeram seus protocolos como do aluno G, representado pela Figura 119. Embora os alunos não tenham registrado como a aluna A (Figura 118). Todos perceberam que as respostas dos itens (**a**), (*b*) e (**c**) eram iguais. Para estas respostas os alunos vivenciaram situação de ação ao copiarem da figura os valores do seno e do cosseno; formulação, ao comparar os valores obtidos nos itens anteriores com o valor do item c e validação, ao comprovarem que esses valores eram iguais.

Para o item (**d**), a aluna A apresentou os seguintes cálculos em seu protocolo como mostra Figura 120, no registro apresentado em seu protocolo a aluna A escreveu o cálculo da tangente deβ para o item (**d**), mas não registrou como esperávamos em nossas análises prévias.

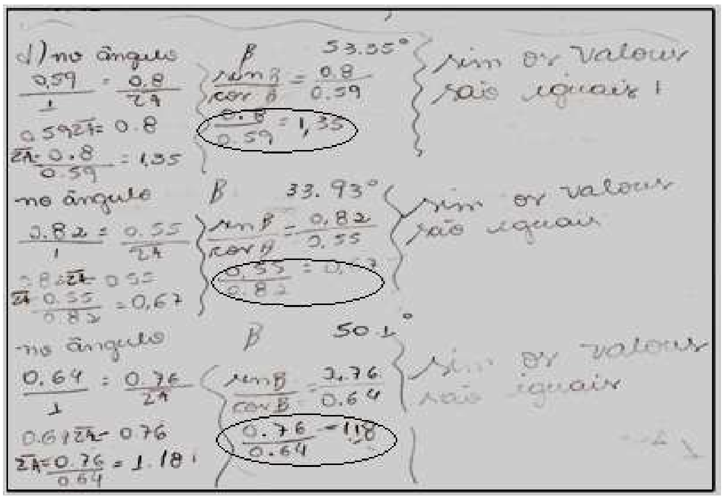


Figura 120. Registro da aluna A para o item d da atividade 9

Neste mesmo item, o aluno E relatou em seu protocolo após fazer o cálculo do comprimento de $\overline{ZA}$, e calcular a tangente do ângulo de 48,4° e dividir o valor do seno pelo cosseno do seno desse ângulo que, em todos os casos os resultados eram iguais como mostra a Figura 121; mas ao concluir não percebeu que em todos os casos os valores obtidos eram a tangente do ângulo de 48,4°.

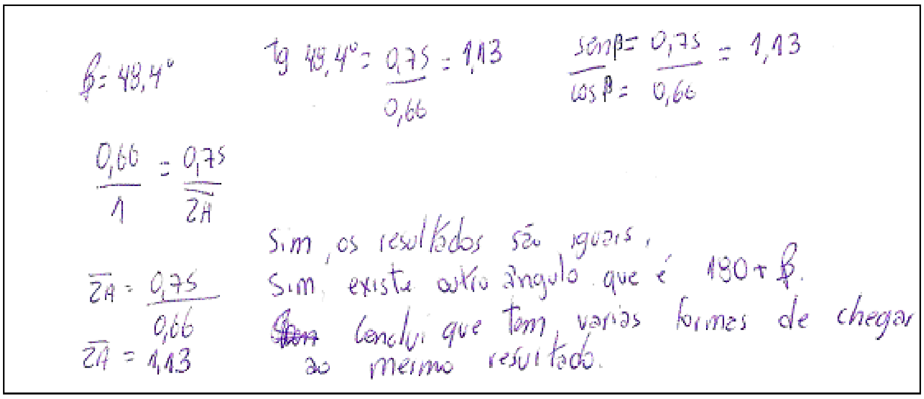
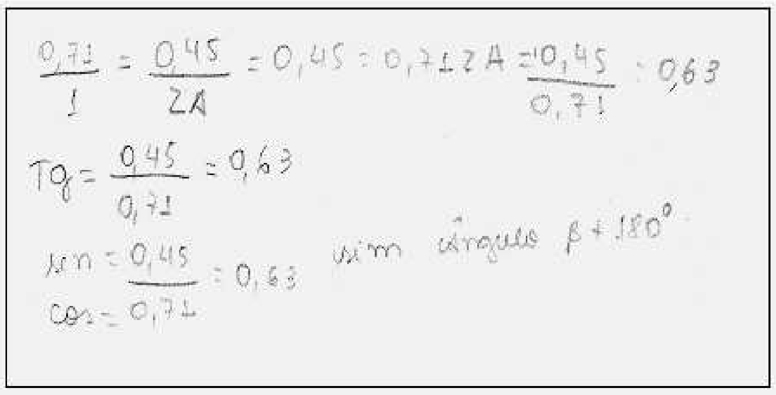


Figura 121. Cálculos do aluno E para o item d da atividade 9

Nesse mesmo item, embora tenha feito corretamente os cálculos a aluna D não escreveu o ângulo ao calcular a tangente e ao dividir o seno pelo cosseno como mostra a Figura 122.



$\frac{0,71}{1} = \frac{0,45}{ZA} = 0,45 = 0,71 ZA = \frac{0,45}{0,71} = 0,63$

$Tg = \frac{0,45}{0,71} = 0,63$

$\frac{sen = 0,45}{cos = 0,71} = 0,63$ sim ângulo $\beta + 180°$

Figura 122. Protocolo da aluna D

Ainda no item (**d**), após executar os cálculos, a aluna A achou estranho e perguntou se era possível o valor da tangente dar um número maior que 1, pois, no seu cálculo o valor da tangente deu 1,35. O pesquisador pediu para ela mover o ponto C e observar o comprimento de $\overline{ZA}$. As alunas A e B não perceberam que existia outro ângulo com o mesmo valor da tangente de β. O pesquisador solicitou que elas movimentassem o ponto C do círculo trigonométrico e observassem o ângulo determinado pelo ponto M (Figura 123). Após esta intervenção a dupla percebeu que existia outro ângulo e escreveu em seus protocolos:

"Sim existe, para determinar este ângulo é só somar 180° com o β".

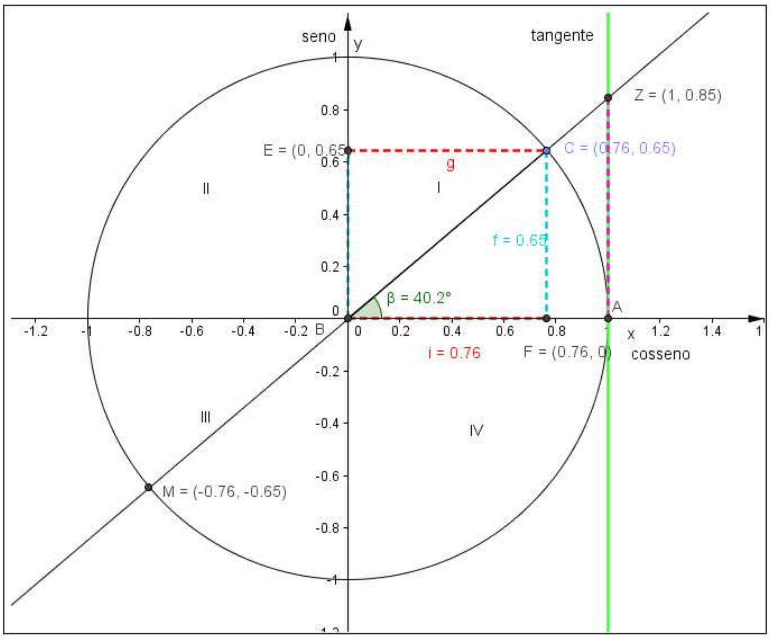


Figura 123. Ângulo determinado pelo ponto M

No item (**e**), após movimentarem o ponto C no segundo quadrante e observarem o ponto M, a aluna H percebeu que existia outro ângulo e que para encontrá-lo bastava somar 180° ao ângulo β como mostra a Figura 124. Os demais alunos escreveram em seus protocolos como o registro da aluna H (Figura 124).

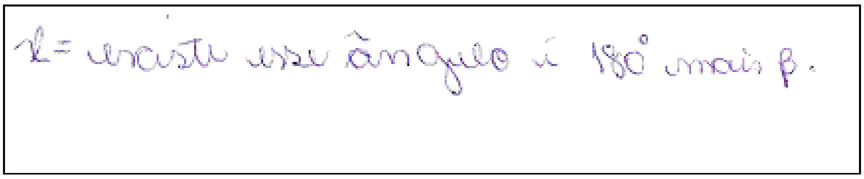
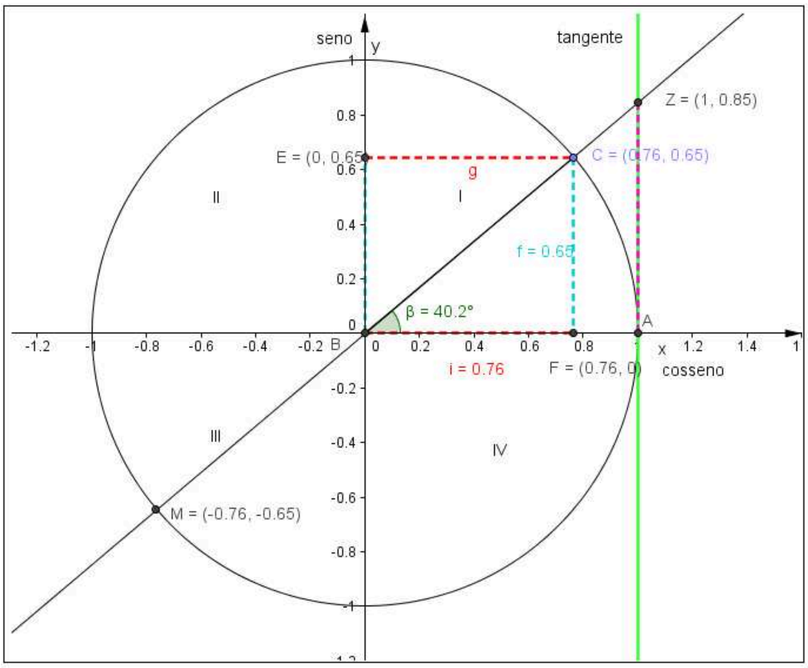

R= existe esse ângulo é 180° mais β.

Figura 124. Registro da aluna H para o item e da atividade 9

Na execução da atividade, os alunos utilizaram a calculadora do computador para efetuar os cálculos. Ao término desta atividade, o pesquisador depois de corrigir as conjecturas feitas pelos alunos, fez a institucionalização do objeto matemático. Em seguida, entregou para cada aluno uma folha com a institucionalização da atividade.

Institucionalização da atividade 9

Dado um círculo trigonométrico como a figura seguinte a reta que tangencia o círculo no ponto A (1,0) representa os valores da tangente para qualquer ângulo β e $\overline{ZA} = \dfrac{f}{i} = \dfrac{sen\beta}{\cos\beta} = tg\beta$. E, também, a $tg\beta = tg\,(180° + \beta)$.



Atividade 10

1.Abra o arquivo **trigociclo.ggb**, observe os sinais das razões trigonométricas ao movimentar o ponto C no primeiro quadrante e responda:

a. O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
b. O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
c. E com o sinal dos valores das tangentes?

2.Movimente o ponto C no segundo quadrante:

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
c) E com o sinal dos valores das tangentes?

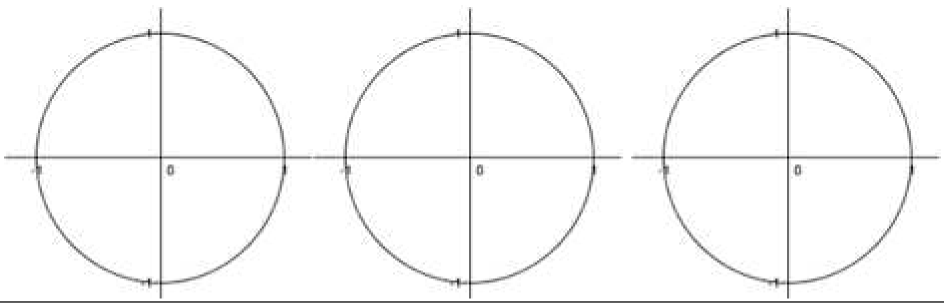
3.Agora mova o ponto C no terceiro quadrante, observe e responda:

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
c) E com o sinal dos valores das tangentes?

4.Movimente o ponto C no quarto quadrante, observe e responda:

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
c) E com o sinal dos valores das tangentes?
d) Represente os sinais dos valores do seno, do cosseno e da tangente para o primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes a partir das observações acima.

seno cosseno tangente



A atividade 10 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica, seu objetivo é que os alunos aprendam os sinais das razões trigonométricas. Nesta atividade, será utilizado o mesmo arquivo da atividade anterior.

Nos itens **1a, 1b**, e **1c** esperava-se que os alunos depois de abrissem o arquivo e movimentassem o ponto C, percebessem que os valores para o seno, o cosseno e a tangente para qualquer ângulo do primeiro quadrante são positivos. Estes valores estariam representados na figura pelas coordenadas do ponto C (cosseno e seno) e pela ordenada de Z (tangente), como mostra a Figura 125.

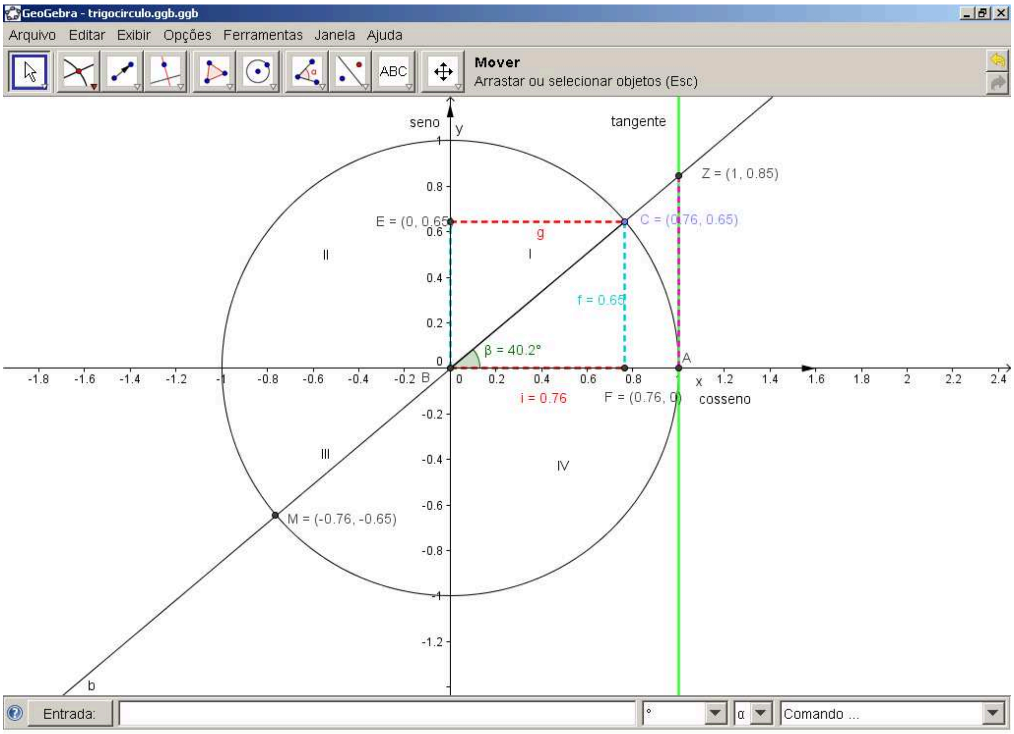


Figura 125. Círculo trigonométrico com os valores do seno, do cosseno e da tangente

Nos itens **2a, 2b** e **2c**, esperava-se que ao mover o ponto C no segundo quadrante, como mostra a Figura 126, os alunos percebessem que o sinal dos valores do seno para este quadrante eram positivos, que o sinal dos valores do cosseno a da tangente para este quadrante eram negativos.

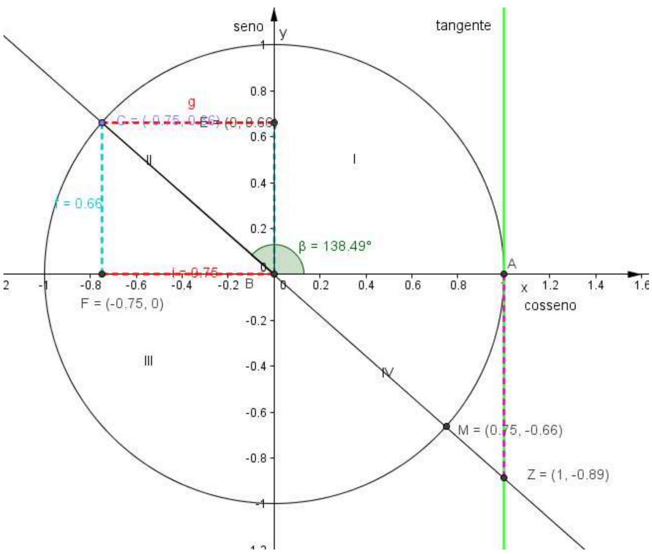


Figura 126. Ponto C no segundo quadrante

Para os itens **3a, 3b** e **3c** esperava-se que, ao movimentar o ponto C no terceiro quadrante, como mostra a Figura 127, os alunos percebessem que o sinal dos valores do seno era negativo, o sinal dos valores do cosseno era negativo e o sinal dos valores da tangente era positivo.

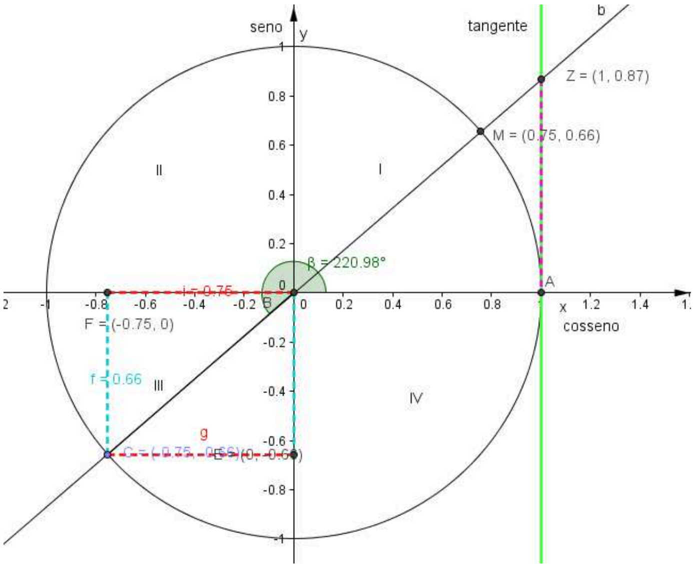


Figura 127. Ponto C no terceiro quadrante

Nos itens **4a, 4b** e **4c**, esperava-se que, ao movimentar o ponto C no quarto quadrante como mostra Figura 128, o aluno percebesse que o sinal dos valores do seno neste quadrante era negativo, que o sinal dos valores do cosseno para este quadrante era positivo e que o sinal dos valores da tangente para este quadrante era negativo.

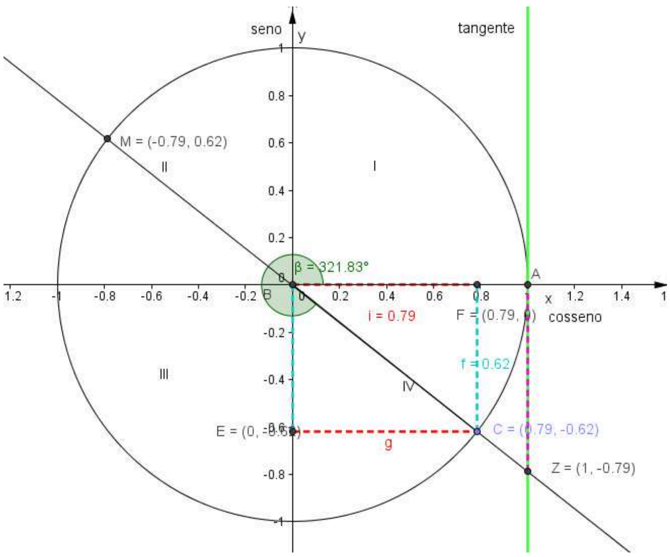


Figura 128. Ponto C no quarto quadrante

Para resolver o item **4d** esperava-se que os alunos após suas observações pudessem colocar os sinais, como na Figura 129, ou que eles escrevessem por extenso em cada quadrante positivo ou negativo.

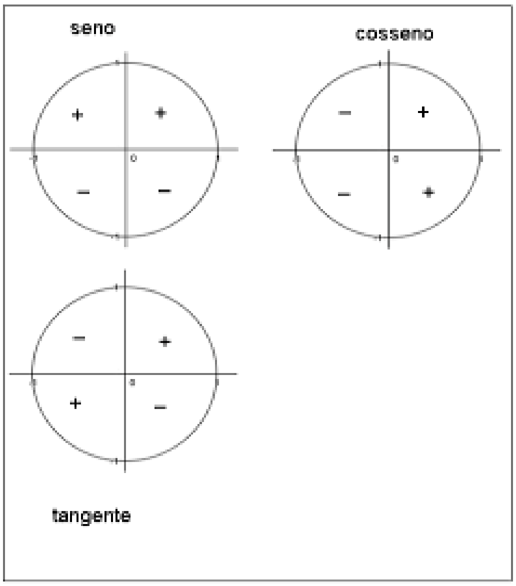


Figura 129. Sinais dos valores do seno, do cosseno e da tangente.

Como relatamos nas atividades anteriores os alunos vivenciariam durante a realização da atividade situação de ação, formulação e validação. Os alunos vivenciariam a situação de ação ao lerem a atividade, ao abrirem o arquivo, ao movimentarem o ponto C nos quadrantes, ao registrarem suas observações, ao se dedicarem ativamente na solução da atividade; situação de formulação, quando conversassem com o colega da dupla sobre suas estratégias de resolução, ao confrontarem os resultados obtidos, ao levantarem alguma hipótese depois de movimentar o ponto C e a situação de validação ao convencerem o colega que sua estratégia era verdadeira.

Análise *a posteriori* da atividade 10

Ao realizarem esta atividade, os alunos não apresentaram dificuldades e nos itens **1a, 1b**, e **1c** todos escreveram que o sinal permaneceu positivo só o aluno G foi mais enfático em sua resposta, relatando que o sinal era positivo e permaneceu positivo como registrou em seu protocolo representado pela Figura 130.

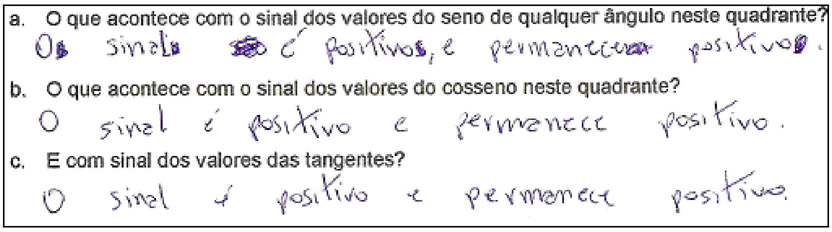

a. O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
Os sinais é positivos, e permanecem positivos.
b. O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
O sinal é positivo e permanece positivo.
c. E com sinal dos valores das tangentes?
O sinal é positivo e permanece positivo.

Figura 130. Registro do aluno G para item 1 atividade 10

Para estas respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação ao movimentarem o ponto C, ao observarem os sinais dos valores das razões trigonométricas no primeiro quadrante; formulação ao conversarem com o colega que os valores do seno, do cosseno e da tangente no primeiro quadrante são positivos e de validação, ao registrarem as suas respostas depois de ter certeza de que elas estavam corretas.

Nos itens **2a, 2b** e **2c**, todos os alunos perceberam que os sinais dos valores do seno permaneciam positivos no segundo quadrante e que os sinais dos valores do cosseno e da tangente ficaram negativos nesse mesmo quadrante. O aluno G relatou em seu protocolo corretamente suas observações, só que ao escrever "*o sinal da tangente é negativa*", como mostra o registro em seu protocolo, representado pela Figura 131 deveria ter escrito que o sinal da tangente era positivo.

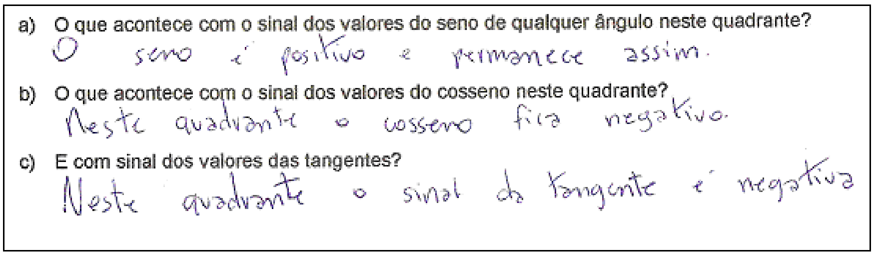

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
O seno é positivo e permanece assim.
b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
Neste quadrante o cosseno fica negativo.
c) E com sinal dos valores das tangentes?
Neste quadrante o sinal da tangente é negativa

Figura 131. Registro do aluno G para o item 2 atividade 10

Para estas respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação ao movimentarem o ponto C, ao observarem os sinais dos valores das razões trigonométricas no segundo quadrante; formulação ao conversarem com o colega que os valores do cosseno e da tangente no segundo quadrante eram negativos e que os valores do seno no segundo quadrante eram positivos e de validação ao convencerem o colega a registrar respostas iguais às suas depois de terem certeza de que elas estavam corretas.

Nos itens **3a, 3b** e **3c**, a aluna B escreveu “torna-se negativo” nos dois primeiros itens e “*torna-se positivo*” no terceiro item, como mostra a Figura 132 que representa seu protocolo (nesse item, a aluna B teve uma participação maior, pois começou a entender o que era proposto na atividade e começou a manipular o *software,* e a observar os sinais das razões trigonométricas) os demais alunos, também, perceberam que os valores do seno, do cosseno eram positivos e o sinal dos valores da tangente, era negativo no terceiro quadrante.

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
torna-se negativo.

b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
torna-se negativo.

c) E com sinal dos valores das tangentes?
torna-se positivo.

Figura 132. Registro da aluna B para o item 3 da atividade 10

Para estas respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação, ao movimentarem o ponto C e ao observarem os sinais dos valores das razões trigonométricas no terceiro quadrante; formulação, ao conversarem com o colega que os valores do seno e do cosseno no terceiro quadrante eram negativos e que os valores da tangente no terceiro quadrante eram positivos e de validação, ao registrarem as suas respostas depois de terem certeza de que elas estavam corretas.

Nos itens **4a, 4b** e **4c**, os alunos registraram em seus protocolos respostas parecidas com as do protocolo da aluna B, representado pela Figura 133. Todos perceberam que os sinais dos valores do seno e da tangente eram negativos e que os sinais dos valores do cosseno eram positivos.

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?
torna-se negativo.

b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?
positivo.

c) E com sinal dos valores das tangentes?
negativo.

Figura 133. Registro da aluna B para o item 4 da atividade 10

Para estas respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao movimentarem o ponto C, ao observarem os sinais dos valores das razões trigonométricas no quarto quadrante; formulação, ao conversarem com o colega que os valores do seno e da tangente no quarto quadrante eram negativos e que os valores do cosseno no quarto quadrante eram positivos, validação ao convencerem o colega a registrar respostas iguais às suas, depois de terem certeza de que elas estavam corretas.

No item **4d**, as alunas A e B apresentaram em seus protocolos a resposta escrevendo por extenso no interior dos quadrantes "*positivo*", "*negativo*", como mostra o protocolo da aluna A, representado pela Figura 134. Os demais alunos fizeram o registro igual ao da aluna D, como mostra a Figura 135 que representa seu protocolo.

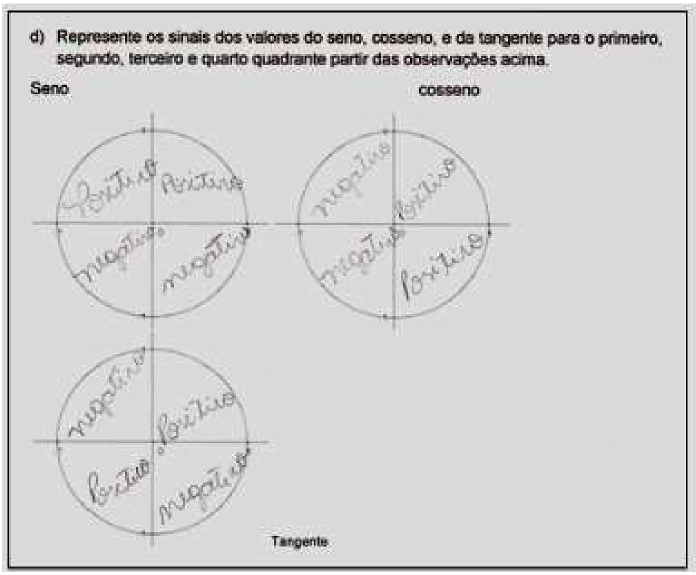


Figura 134. Registro da aluna A para o item d da atividade 10

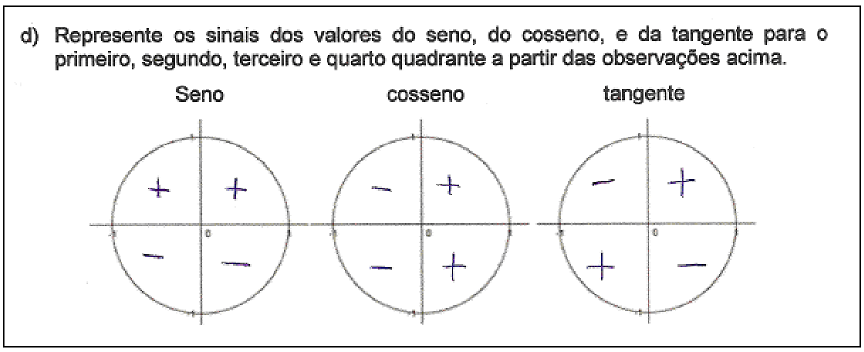


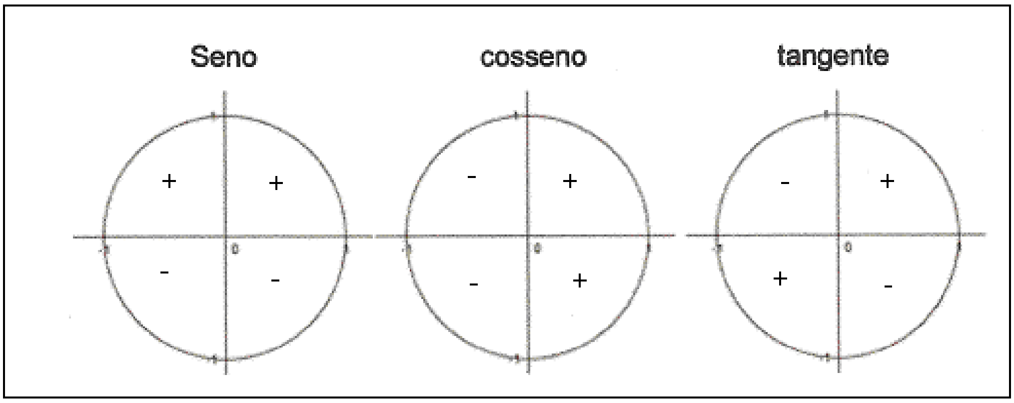
Figura 135. Registro da aluna D para o mesmo item

Com estas respostas, os alunos vivenciaram a situação de ação ao terem de movimentar a figura para observar os sinais das coordenadas; formulação, ao conversarem com o parceiro sobre suas observações e de validação, ao convencerem o colega e ambos apresentarem a mesma resposta.

Ao término da atividade, o pesquisador fez a institucionalização da atividade que tinha por objetivo determinar os sinais dos valores das razões trigonométricas em todos os quadrantes. Entregou aos alunos uma folha com um esquema dos sinais das razões trigonométricas em todos os quadrantes.

Institucionalização da atividade 10

Sinais dos valores do seno,cosseno e da tangente em todos os quadrantes.



Atividade 11

1. Abra o arquivo **rad.ggb** e observe na figura que $\overline{CA}$ é o raio da circunferência**,** d**,** representa o comprimento do arco CD. Movimente o ponto C, observe o que acontece com a medida do raio e do arco da circunferência. O que você observou?

Quando a medida do arco de uma circunferência for igual à medida do raio da circunferência que o contém, dizemos que este arco mede 1 radiano ,(símbolo *rad*).

2. Qual o comprimento de uma circunferência qualquer?
3. Quantos radianos têm uma circunferência qualquer?
4. Quantos radianos têm a metade de uma circunferência?
5. Quantos radianos têm em um quarto de uma circunferência?
6. Quantos radianos equivalem a um arco que corresponde a 60°? E 45°equivalem a quantos radianos?
7. Quantos graus equivalem a um arco de $\frac{\pi}{6}$*rad*? E $\frac{\pi}{8}$*rad* equivalem a quantos graus?

A atividade 11 é uma proposta de investigação em um arquivo de geometria dinâmica, cujo objetivo é definir aos alunos o radiano e ensinar a conversão de unidades de arcos em radianos para unidades de ângulos em graus e vice-versa.

Ao abrirem o arquivo **rad.ggb**, os alunos verão na tela do computador uma circunferência com um arco e com um ângulo, como mostra a Figura 136, em que **d** é a medida do comprimento do arco e $\overline{AC}$ é o raio da circunferência.

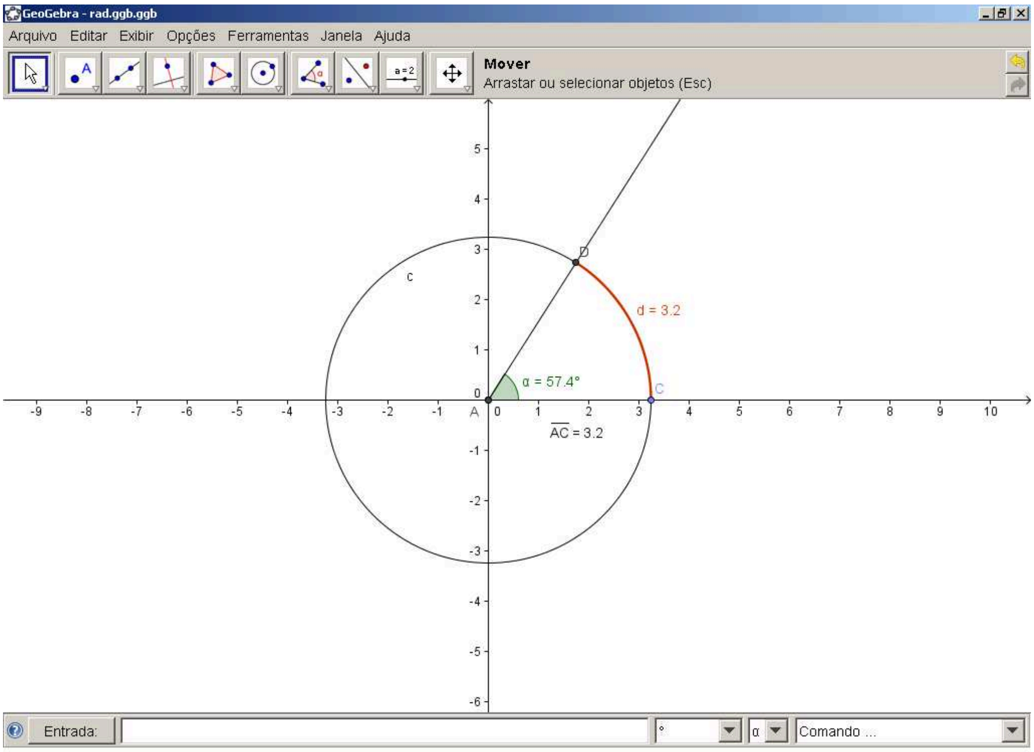


Figura 136. Tela do Geogebra com a circunferência da atividade 11

Os alunos receberam uma folha com o roteiro de perguntas para resolver a atividade. Optamos por dar a definição de radianos na atividade para prosseguirmos com o outro objetivo de fazer a conversão de unidades de ângulos e dos arcos (graus para radianos e de radianos para graus). Para resolver a atividade é necessário que os alunos tenham em seus conhecimentos prévios a fórmula do perímetro de uma circunferência.

No item 1, esperava-se que os alunos depois de movimentar o ponto C percebessem que a medida do raio da circunferência era igual ao comprimento do arco, representado pela letra *d*.

Para o item 2, esperava-se que os alunos buscassem em seus conhecimentos prévios que o comprimento de uma circunferência era igual $C = 2\pi\ r$ em que C era o comprimento da circunferência e *r* era o raio da mesma.

No item 3, esperava-se que os alunos, após entenderem que um radiano era a medida de um arco que seu comprimento era igual ao raio da circunferência que o contém e, após, perceberem que $1\,rad = 1\,r$, que $2\text{rad} = 2\text{r}$ e que $\pi\,rad = \pi\,\text{r}$, escrevessem que em uma circunferência de raio qualquer tínhamos $C = 2\pi\ \text{rad}$.

No item 4, esperava-se que os alunos respondessem que metade de uma circunferência tinha π *rad*.

Para o item 5, esperava-se que os alunos respondessem que um quarto de circunferência tinha $\frac{\pi}{2}$*rad*.

No item 6, esperava-se que os alunos escrevessem que um arco que corresponde a 60° era igual a $\frac{\pi}{3}$*rad*, pois se em 180° tem π radianos e $180° \div 60° = 3$, logo 60° equivale a $\frac{\pi}{3}$*rad* e com raciocínio semelhante esperava-se que os alunos chegassem ao valor de $\frac{\pi}{4}$*rad* para o ângulo de 45°.

Para o item 7, esperava-se que os alunos percebessem que para transformar a medida do arco de $\frac{\pi}{6}$*r*ad em graus era só dividir 180° por seis e obter 30° como resposta, e com o mesmo raciocínio os alunos chegassem ao valor de 22,5° para o arco de $\frac{\pi}{8}$*rad*.

Os alunos vivenciariam situação de ação ao abrirem o arquivo, ao movimentarem o ponto C e ao observarem a figura; situação de formulação, ao conversarem com o colega sobre suas hipóteses de resolução, ao buscarem em seus conhecimentos prévios uma estratégia de resolução e situação de validação, ao convencerem o parceiro que sua hipótese era verdadeira.

Análise *a posteriori* da atividade 11

No item 1, após abrirem o arquivo **rad.ggb**, movimentaram o ponto e observaram a figura. Os alunos perceberam que a medida do raio era sempre igual ao valor da medida do arco. A aluna H relatou em seu protocolo que percebeu que a medida do ângulo α era igual a 57,4°, como mostra a Figura 137, embora na atividade não pedisse para observar o valor da medida do ângulo.

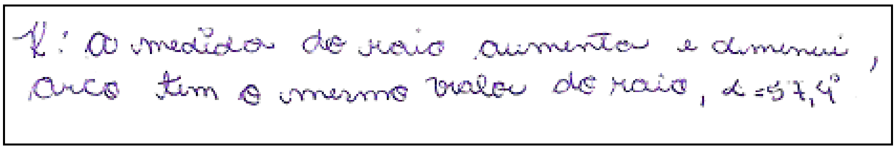

R: a medida do raio aumenta e diminui, arco tem o mesmo valor do raio, $\alpha = 57,4°$

Figura 137. Registro da aluna H para o item 1 da atividade 11

Ao responderem a este item os alunos vivenciaram a situação de ação ao abrirem o arquivo, ao movimentarem o ponto C e observarem as medidas do arco e do raio; formulação, ao conversarem com o colega que a medida do arco e do raio da circunferência variou, mas os mesmos eram sempre iguais e de validação, ao registrarem em seus protocolos suas respostas, depois de convencerem o colega a darem respostas idênticas às suas.

Após a resolução deste item, o pesquisador fez uma intervenção com o objetivo de dar aos alunos a definição de radiano. Após o entendimento dos alunos sobre o que era um radiano, os alunos prosseguiram com a resolução da atividade.

No item 2, as alunas A e B não responderam imediatamente à pergunta, pois estavam confusas com as fórmulas da área do círculo e com a fórmula do comprimento da circunferência. Depois de chegarem a um consenso, a dupla apresentou os mesmos registros, como mostra a Figura 138. A dupla escreveu primeiro "$C = 2\pi r$", o pesquisador perguntou o que significavam as letras C e *r,* e a aluna A respondeu que C era o comprimento da circunferência e que *r* era o raio da circunferência. Depois desta intervenção a dupla indicou em suas respostas o que respondeu ao pesquisador como mostra a Figura 138.

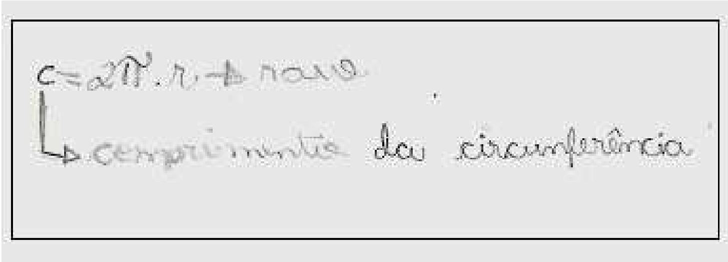


Figura 138. Registro da dupla A e B para o item 2 da atividade 11

Apenas as alunas C e D apresentaram registros iguais ao das alunas A e B. Os outros alunos apresentaram registros diferentes em seus protocolos, o aluno G simplesmente escreveu "R: 2πr" como, mostra a Figura 139. O pesquisador perguntou-lhe o que significava seu registro e o aluno G respondeu que "*o símbolo R: é a abreviatura de resposta e o símbolo 2πr é a resposta da pergunta*". O aluno E escreveu em seu protocolo "*Circunferência* = 2πr" como mostra a Figura 140, ao lhe perguntarmos o que significava seu registro o mesmo respondeu que "*é a fórmula da circunferência"*.

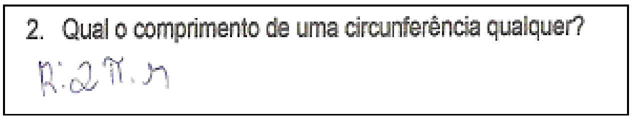


Figura 139. Registro do aluno G para o item 2 da atividade 11

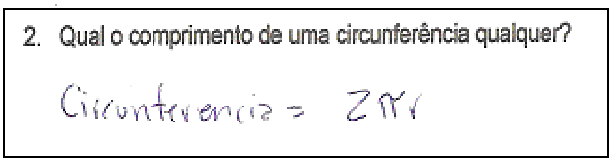


Figura 140. Registro do aluno E para o mesmo item da atividade 11

Antes de prosseguirem com a resolução da atividade, o pesquisador fez uma intervenção, escreveu os registros dos alunos na lousa, comentou que alguns tinham escrito a fórmula incompleta e outros haviam escrito errado. Depois lhes mostrou que, ao apresentar uma fórmula, como a do comprimento da circunferência, é necessário escrever o significado de cada letra que compõe a fórmula.

No item 3, foi necessário uma intervenção do pesquisador, pois os alunos não conseguiram associar que, em uma circunferência qualquer, tem-se 2π *rad*, isto porque temos um radiano quando um arco de circunferência tem o comprimento igual ao raio da circunferência que o contém, ou seja, $1rad = 1r$, então, era só substituir esta informação na fórmula do comprimento da circunferência.

Após esta intervenção, os alunos conseguiram realizar o item 4 e responderam que na metade de uma circunferência tinha "*1* π rad".

No item 5, os alunos conseguiram resolver, alguns pensaram como a aluna A que percebeu que, para encontrar a medida em radianos de um quarto da circunferência, bastava dividir a medida em radianos da circunferência por quatro, como mostra o registro em seu protocolo representado pela Figura 141. Outros alunos fizeram como o aluno E que percebeu que se a metade da circunferência equivale a *π rad,*um quarto é a metade desse valor, como relatou em seu protocolo representado pela Figura 142.

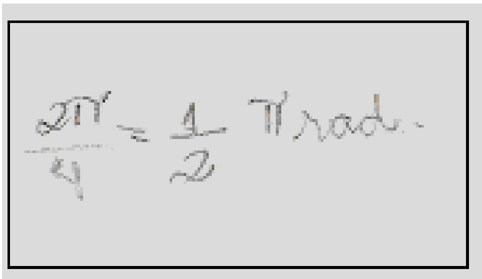


Figura 141. Registro da aluna A para item 5 da atividade 11

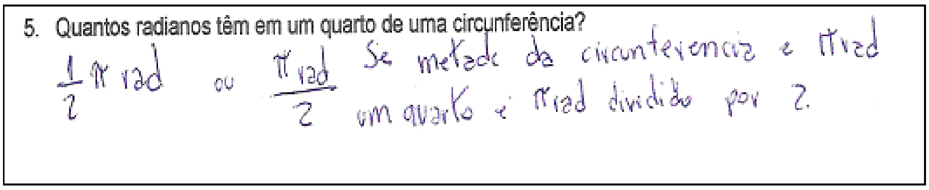
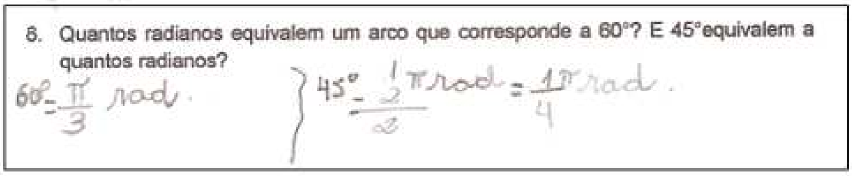


Figura 142. Registro do aluno E para o item 5 da atividade 11

Os alunos vivenciaram a situação de ação, ao lerem a atividade, formulação, ao conversarem com o colega (a aluna A falando com a aluna B "*... se em uma circunferência tem* 2π *rad um quarto terá esta quantidade dividida por 4...*", ou *"...se a metade da circunferência é* π *rad um quarto é* π *rad dividido por 2..."* o aluno E explicando para o aluno F e validação, ao realizarem os registros de seus cálculos em seus protocolos por terem certeza que suas respostas estavam corretas após, convencerem o parceiro a darem a mesma resposta que às suas.

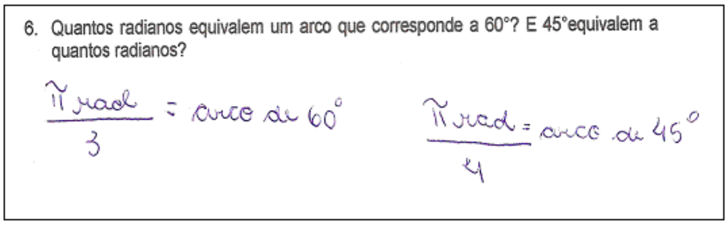
No item 6, as alunas B e G apresentaram os seguintes registros em seus protocolos representados pelas Figuras 143 e 144.


6. Quantos radianos equivalem um arco que corresponde a 60°? E 45°equivalem a quantos radianos?

$60° = \frac{\pi}{3}$ rad.

$45° = \frac{\frac{1}{2}\pi \text{rad}}{2} = \frac{1}{4}\pi$ rad.

Figura 143. Registro da resolução aluna B para o item 6 da atividade 11


6. Quantos radianos equivalem um arco que corresponde a 60°? E 45°equivalem a quantos radianos?

$\frac{\pi \text{ rad}}{3}$ = arco de 60°

$\frac{\pi \text{ rad}}{4}$ = arco de 45°

Figura 144. Registro da resolução do aluno G

No primeiro caso, como mostra a Figura 143, a aluna B percebeu que 180° dividido por 3 era igual a 60° e como 180° equivale π *rad* dividiu esta quantidade por 3; no segundo caso, da Figura 143, a aluna B associou 45° à metade de 90° e como 90° equivalem a $\frac{\pi}{2}$*rad,* dividiu esta quantidade por 2. O aluno G como mostra a Figura 144 só registrou as respostas, porque fez os cálculos na calculadora do computador. Os demais alunos apresentaram registros iguais aos das Figuras 143 ou 144.

Os alunos realizaram o item 7 e apresentaram em seus protocolos registros parecidos com o registro da aluna B, como mostra a Figura 145, os mesmos fizeram os cálculos, mas não escreveram qual raciocínio utilizaram como fez o aluno E, que, em seu protocolo, registrou os cálculos e o raciocínio que utilizou, como mostra a Figura 146.

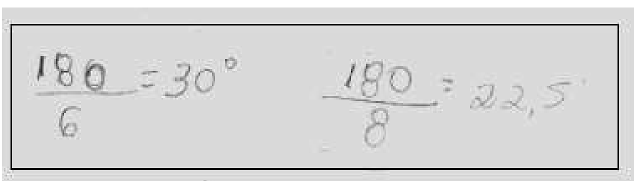
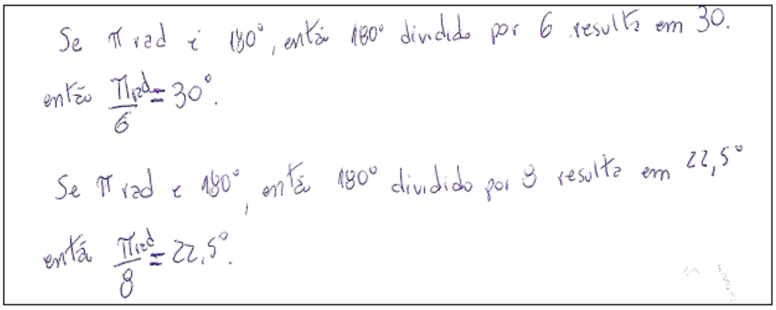

$\frac{180}{6} = 30°$ $\frac{180}{8} = 22,5$

Figura 145. Cálculos apresentados pelas alunas A e B



Se π rad é 180°, então 180° dividido por 6 resulta em 30.

então $\frac{\pi rad}{6} = 30°$.

Se π rad é 180°, então 180° dividido por 8 resulta em 22,5°

então $\frac{\pi rad}{8} = 22,5°$.

Figura 146. Registro do aluno E para o item 7 da atividade 11

Para estas respostas os alunos vivenciaram situação de ação, ao lerem o item da atividade; formulação, ao conversarem com o colega sobre suas hipóteses de resolução e de validação, ao convencerem o colega que suas hipóteses eram verdadeiras e ambos apresentaram registros idênticos.

Ao término da atividade, o pesquisador reuniu os alunos para fazer a institucionalização, disse-lhes quais eram os objetivos da atividade, que era definir o que era um radiano e a conversão dessa unidade de medida em graus e vice-versa. O pesquisador perguntou-lhes se tinham alguma dúvida sobre como converter unidades de arcos em unidades de ângulos e todos disseram que entenderam. O pesquisador perguntou-lhes se eles utilizaram a regra de três para resolver os itens 6 e 7, eles responderam que não. O pesquisador disse-lhes que poderiam utilizar esta regra para ângulos e arcos que não são múltiplos ou submúltiplos de 180°.

Atividade 12

a) Na folha de papel milimetrado trace duas retas perpendiculares entre si. A intersecção destas retas será a origem do sistema de eixos coordenados, a reta na horizontal será o eixo x e a reta na vertical será o eixo y. Faça marcas nos eixos de 10 em 10 milímetros, partindo do cruzamento dos eixos para cima, para baixo, para a direita, e para a esquerda. Cada marca representará 0,1 decímetros, escreva em cada marca o valor que elas representam nos eixos orientados.
b) Com o compasso, trace uma circunferência com centro em O (0,0) e raio igual a 1 decímetro (10 cm). Como consequência deste traçado, a circunferência ficou dividida em quatro partes que chamaremos de quadrantes.
c) Faça marcas de 10° em 10° no sentido anti-horário, começando a contar a partir do ponto (1,0).
d) Trace uma reta paralela ao eixo y no ponto (1,0) e chame-a de t. Faça marcas iguais às feitas no eixo y.

e) Sobreponha a transparência no ciclo trigonométrico de modo que o ponto A da transparência coincida com o centro da circunferência, fixe a tachinha no ponto A de maneira que a transparência possa girar.

f) Para utilizar o dispositivo, mova a transparência, pare num ponto qualquer, e observe a intersecção da circunferência da transparência com os eixos x e y. A distância dos pontos de intersecção da circunferência com os eixos y e x e a origem serão, respectivamente, os valores do seno e do cosseno do ângulo. A ordenada do ponto de intersecção da reta da transparência com a reta t será o valor da tangente.

g) Utilize o dispositivo e determine o seno, o cosseno e a tangente de 50°.

h) Encontre os valores do seno do cosseno e da tangente para os arcos de $\frac{\pi}{4}$*rad* e para $\frac{\pi}{6}$*rad.*

A atividade 12 é uma proposta de construção de uma régua trigonométrica. Seu objetivo é construir uma régua trigonométrica para ser utilizada em sala de aula, quando não for possível usar o laboratório de informática.

Nesta atividade, os alunos deveriam construir uma régua trigonométrica, foi utilizada uma folha de papel milimetrado e uma transparência que contém o desenho de uma reta, uma circunferência de raio 5 cm e dois pontos chamados de A e P, como mostra Figura 147.

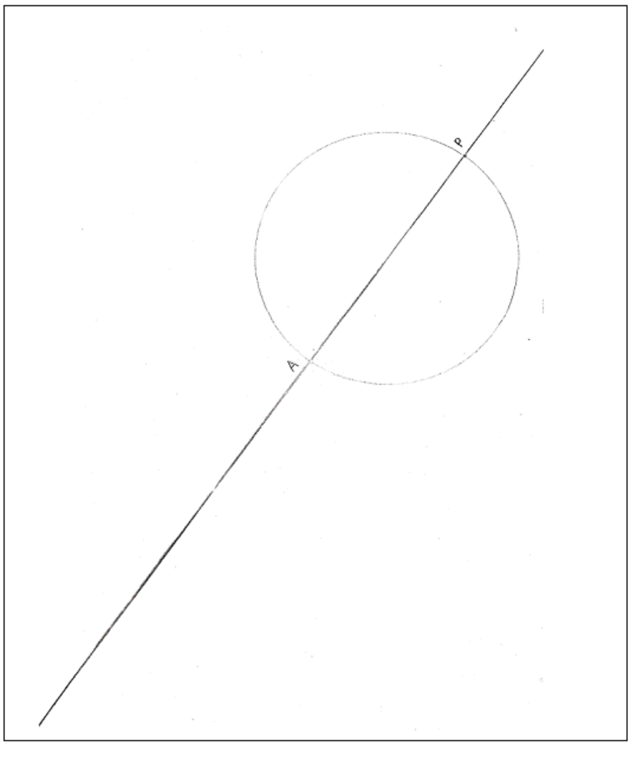


Figura 147. Transparência para construção da régua trigonométrica

Esperava-se que os alunos não encontrassem dificuldades na realização os itens (**a**,) (**b**), (**c**), (**d**) e (**f**). Caso os alunos não soubessem utilizar o transferidor, o pesquisador poderia ensiná-los como usar o instrumento.

Para construir a régua trigonométrica, bastava sobrepor a transparência no papel milimetrado com o círculo trigonométrico de modo que o ponto A da transparência coincidisse com o centro da circunferência do papel milimetrado como mostra a Figura 148. Para fixar a transparência no papel milimetrado foi utilizado um percevejo (tachinha) para que fosse possível que a transparência girasse sobre o papel milimetrado. O percevejo seria fixado primeiro no ponto A e depois no centro da circunferência do papel milimetrado (Figura 148).

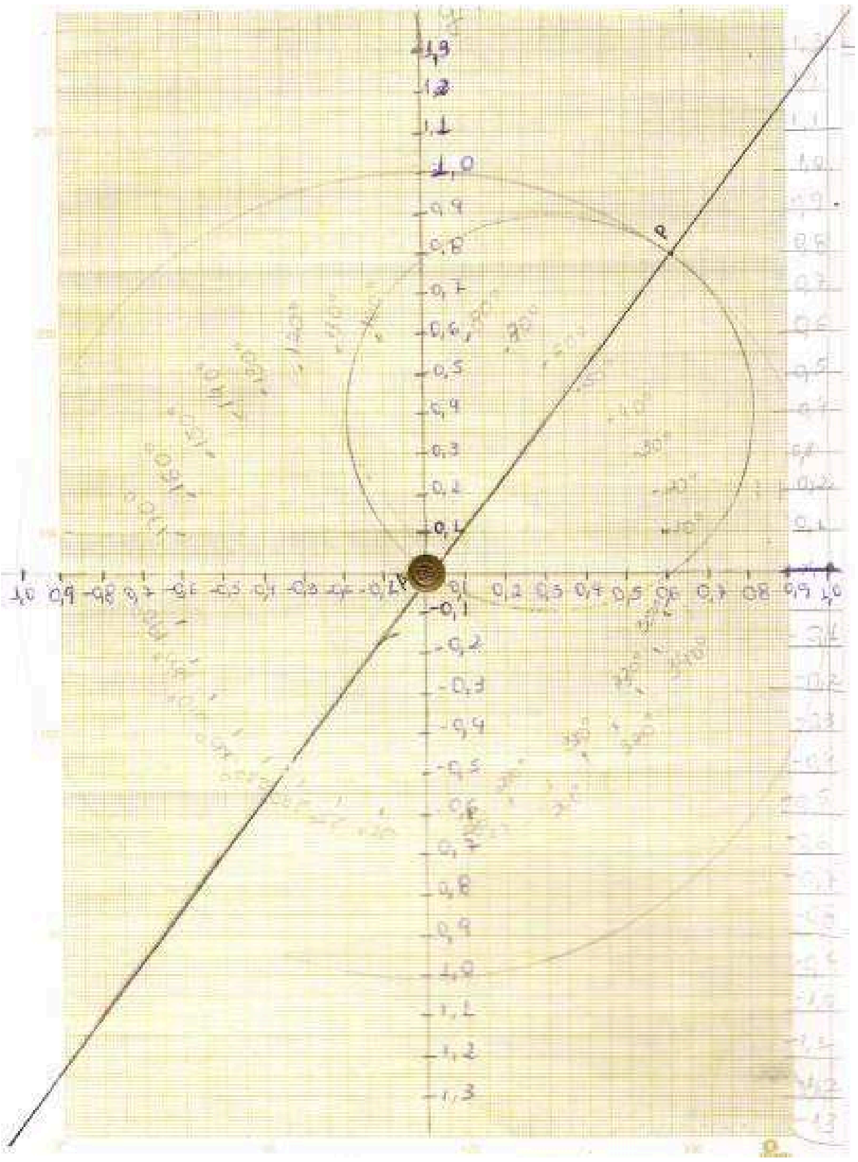


Figura 148. Régua trigonométrica

O que garante que as intersecções da circunferência da transparência com os eixos são as coordenadas do ponto P é que ao unir estas intersecções com um segmento, este segmento divide a circunferência em duas semicircunferências; o triângulo formado pelo ponto P e as intersecções da circunferência com os eixos é retângulo em P, como mostra a Figura 149 e o triângulo formado pelo ponto A e as intersecções da circunferência com os eixos é retângulo em A.

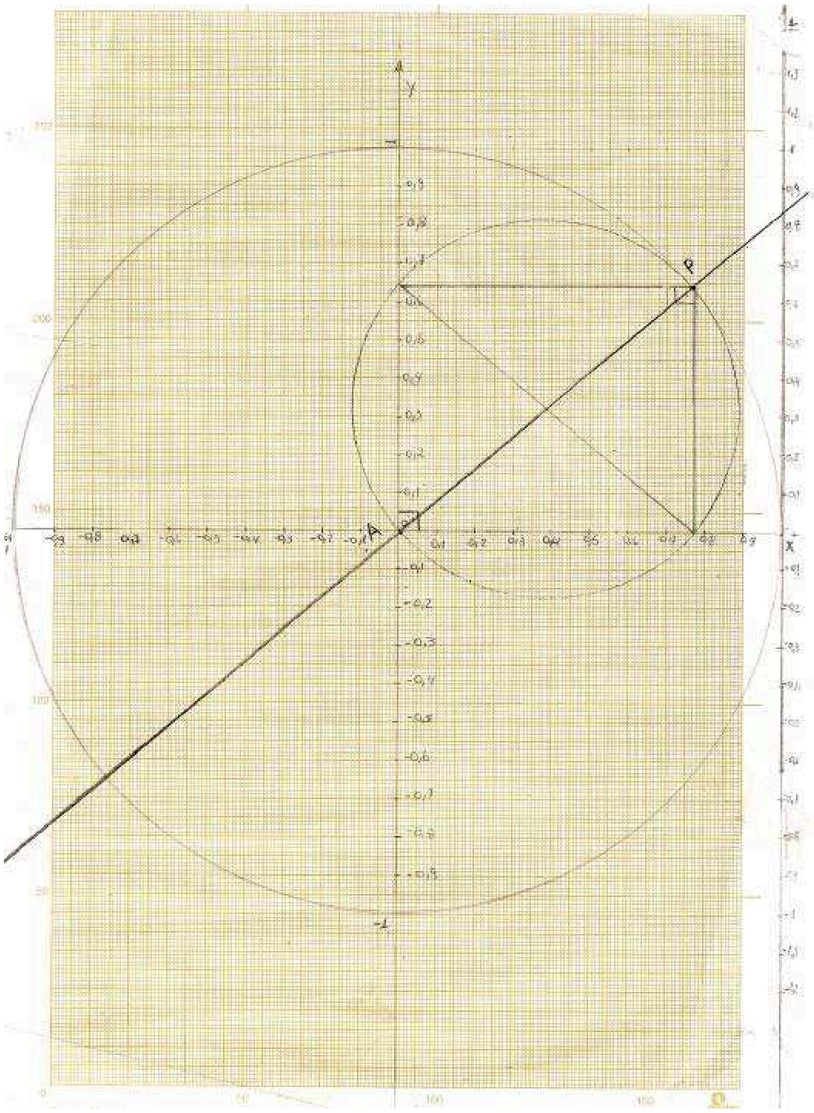


Figura 149. Intersecções da circunferência menor com os eixos e os pontos P e A

No item (**g**), para determinar o seno, o cosseno e a tangente de 40° esperava-se que os alunos posicionassem a transparência sobre o ângulo de 40°, depois observassem a intersecção da circunferência da transparência com os eixos para determinar o seno e o cosseno e a intersecção da reta da transparência com a reta *t* para determinar a tangente. No caso, o $sen 40° = 0,64$ e o $\cos 40° = 0,76$ e $tg 40° = 0,83$.

No item (**h**), para os arcos de $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$ depois de transformar estas medidas em graus esperava-se que os alunos utilizassem os mesmos procedimentos para o ângulo de 40° e respondessem que o $sen\frac{\pi}{4} = sen 45° \cong 0,7$ e que $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° \cong 0,7$ e a $tg\frac{\pi}{4} = tg 45° = 1$.

Análise *a posteriori* da atividade 12

Nos itens (**a**) e (**b**) da atividade, os alunos não apresentaram dificuldades, só a aluna H perguntou o que eram retas perpendiculares e o aluno G perguntou se a intersecção das retas teria de ser feita no meio da folha.

No item (**c**), o pesquisador teve de fazer uma intervenção, pois a aluna A pegou o transferidor e começou a usá-lo, como se fosse uma régua convencional. A aluna achou que, para utilizar o transferidor bastava copiar os números, após posicionar o zero do transferidor com o ponto (1,0) do círculo trigonométrico. Assim, como a aluna B o aluno F relatou que nunca usou um transferidor.

Após esta intervenção, os alunos continuaram executando a atividade e não apresentaram nenhuma dificuldade nos itens (**d**) e (**e**). No item (**f**) as alunas A e B após a leitura da questão perceberam que já tinham feito algo semelhante na atividade 9. Ao executarem estes itens os alunos vivenciaram situação de ação, ao marcar no papel milimetrado os ângulos de 10 em 10 graus, ao traçarem a reta paralela ao eixo y no ponto (1,0), ao fixarem a transparência sobre o papel milimetrado; formulação ao conversarem com o colega sobre a melhor posição para colocar o eixo y se no comprimento maior da folha ou no comprimento menor e validação, ao convencerem o colega de que era melhor o comprimento maior para colocarem o eixo y. Ao terminarem este item, as réguas trigonométricas dos alunos ficaram iguais à Figura 148, apenas o aluno G fez sua régua igual à Figura 149, ele deixou o comprimento maior da folha para o eixo X, com isso perdeu valores no eixo das tangentes.

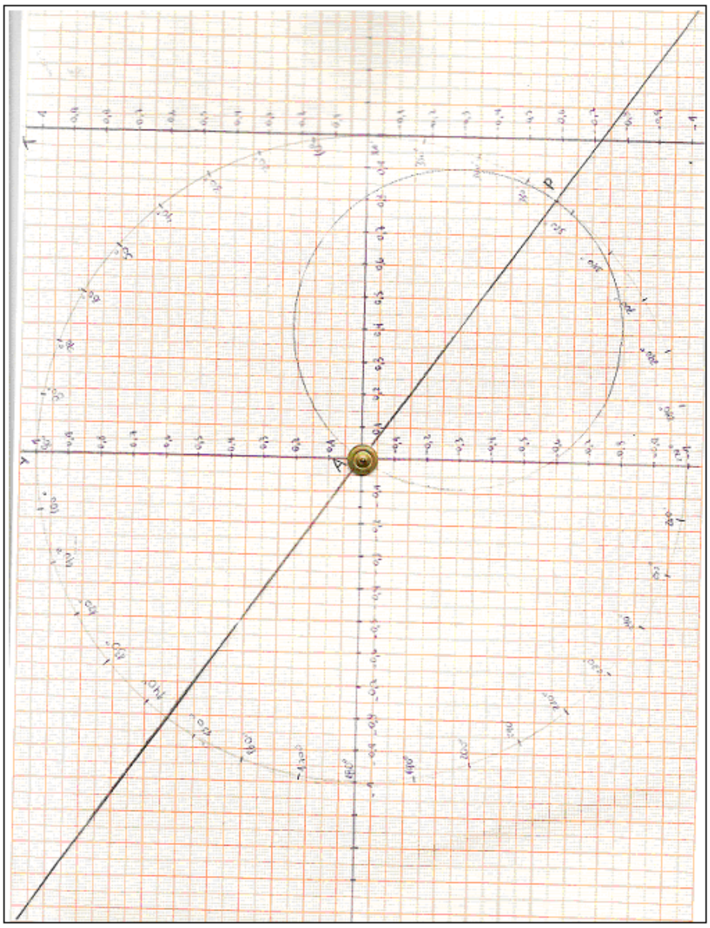


Figura 150. Régua trigonométrica do aluno G

No item (**g**), os alunos não apresentaram dificuldades para resolvê-lo. A aluna A, após posicionar a transparência no ângulo de 40°, apresentou no registro de seu protocolo um espaço entre os símbolos *sen*, *cos* e *tg* e o ângulo de 40° como mostra a Figura 151, pelo fato da a aluna ter apagado a palavra "*de",* após o pesquisador dizer que não havia a necessidade de escrever *sen de 40°.*

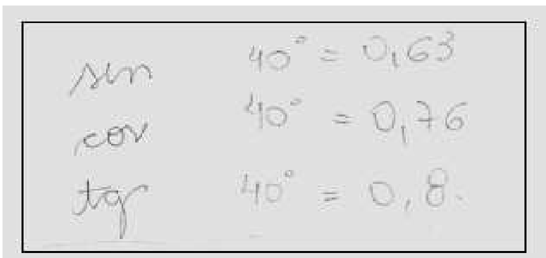


Figura 151. Registro da aluna A para o item g da atividade 12

No mesmo item, o pesquisador solicitou aos alunos que determinassem o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 50°. Todos os alunos realizaram e não precisaram fazer nenhum cálculo, como o aluno G, que no registro em seu protocolo, representado pela Figura 152 fez o cálculo para determinar a tangente de 50°.

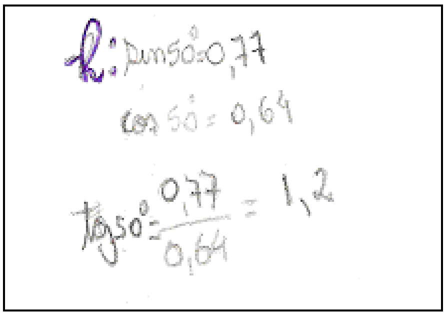


Figura 152. Cálculos do aluno G para o ângulo de 50°

Em razão do aluno G ter colocado o eixo y no comprimento menor da folha em sua régua trigonométrica, como mostra a Figura 150, teve que calcular a tangente de 50°, enquanto os demais tiveram apenas que observar o valor da tangente de 50° em suas réguas.

Com estas respostas, acreditamos que os alunos tenham aprendido o funcionamento da régua trigonométrica. Para as respostas, os alunos vivenciaram situação de ação, ao posicionarem a transparência no ângulo de 40° e, ao observarem os valores do seno, do cosseno e da tangente nas intersecções da transparência com os eixos x e y e com a reta t; formulação, ao conversarem com o colega se os valores estavam corretos e de validação, ao conferirem na calculadora que os valores por eles observados na régua trigonométrica estavam corretos.

No item h, os alunos apresentaram registros diferentes como mostra a Figura 153 e 154.

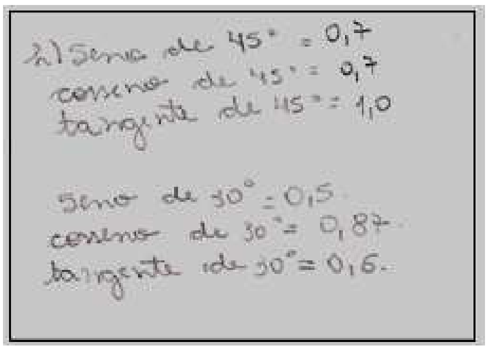


Figura 153. Registro da aluna B para o item h da atividade 12

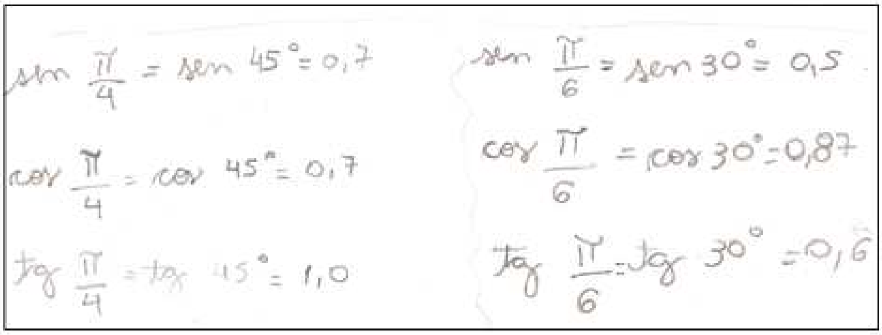


Figura 154. Registro da aluna A para o item h da atividade 12

A aluna B registrou por extenso as razões trigonométricas como mostra a Figura 153. Em seu registro a aluna B transformou os arcos em radianos para seus equivalentes em graus e deu a resposta ao seno, cosseno e tangente em graus, sem se preocupar em registrar que estava determinando o seno, o cosseno e a tangente do arco em radianos. A aluna A registrou que estava calculando o seno, o cosseno e a tangente dos arcos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$, mostrou quanto estes arcos equivalem em graus, para depois dar os resultados como mostra a Figura 154. Importante ressaltar que ao responder que o seno de 45° é igual a 0,7 e não utilizar o símbolo de aproximadamente, é devido à limitação da régua trigonométrica, pois os alunos registram o que observam na mesma. Os demais alunos fizeram seus registros como a aluna A.

Para estas respostas os alunos vivenciaram a situação de ação, ao posicionarem a transparência nos ângulos pedidos e ao observarem em suas réguas trigonométricas os valores do seno, cosseno e tangente nas intersecções da transparência com os eixos x e y e com a reta t; formulação ao conversarem com o colega sobre suas hipóteses e de validação ao conferirem os valores obtidos na régua trigonométrica com os resultados apresentados na calculadora científica. Ao término da atividade o pesquisador disse-lhes que poderiam levar as réguas que construíram, explicou-lhes porque a régua dá os resultados aproximados e que, para melhorar os resultados, é preciso utilizar corretamente o transferidor ao fazer as marcas no papel milimetrado, para que ao posicionar a transparência, ela fique sobre o ângulo desejado e não próximo dele.

Apresentaremos alguns resultados importantes observados com base nas análises dos protocolos dos alunos, das gravações feitas durante a execução das atividades e dos relatórios dos nossos observadores.

Os alunos ao realizarem as atividades 1, 2, 3 e 4 trabalharam livremente sem intervenção do pesquisador que estava observando se estavam com dificuldades para manipular o *software*. Ao escreverem suas respostas, alguns não souberam expressar coerentemente suas ideias e às vezes, tivemos de realizar o item que eles realizaram para entender o que queriam dizer, por exemplo, a aluna G ao escrever o item (**e**) da atividade 4 em seu protocolo, “*As razões f e h quando se movimentam se alteram ao oposto de operação da razão g, enquanto as duas aumentam a g diminui, assim ocorre o oposto também”.* Ao lermos a resposta, não entendemos o que ela queria dizer, mas, ao realizar o item compreendemos sua resposta.

Ao executarem estas atividades os alunos estavam muito entusiasmados por estarem utilizando o computador. Ao término delas alguns perguntaram por que os professores deles não utilizavam o computador, alegando nunca terem feito atividades usando o computador e nem terem visto um *software* de geometria dinâmica.

As atividades não explicitavam o que queríamos ensinar (atividades adidáticas) e as observações feitas pelos alunos durante as investigações foram utilizadas na institucionalização para mostrarmos as razões trigonométricas. É importante ressaltar graças à movimentação que o *software* permite e, também, por poderem acompanhar os resultados na janela algébrica, eles puderam verificar que em triângulos retângulos, se o ângulo agudo não variar as razões trigonométricas também não variavam.

Nas atividades 5, 6, 7 e 8 só dois alunos perceberam que os pontos dados nos arquivos eram simétricos, tivemos de realizar algumas intervenções, para que os alunos prosseguissem na resolução dessas atividades sobretudo ao realizarem seus registros simbólicos. Embora não tenham percebido que os pontos eram simétricos, conseguiram realizar as atividades e alcançaram o que esperávamos em nossas análises prévias.

Na atividade 9, para que pudessem executá-la, houve a necessidade do pesquisador ensinar o procedimento para calcular a medida do segmento $\overline{ZA}$, a partir da semelhança de triângulos. Após esta intervenção, os alunos conseguiram realizar a atividade e não apresentaram problemas por entenderem a atividade, porém alguns ainda apresentavam erros de notação ao escreverem as razões trigonométricas simbolicamente.

Os alunos ao realizarem a atividade 10 não apresentaram nenhuma dificuldade, acreditamos que esta tenha sido relativamente fácil, pois eles precisavam apenas determinar os sinais dos valores das razões trigonométricas em todos os quadrantes e, para tanto, era só observá-los na figura da tela do computador.

Na atividade 11 demos a definição de radiano, pois queríamos que os alunos soubessem que há outra unidade e que eles aprendessem a conversão de uma unidade para outra. Na atividade 12, superadas as dificuldades da construção geométrica da régua trigonométrica, os alunos não apresentaram dificuldades na utilização da mesma.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo verificar se atividades manipulativas e o uso do computador contribuem para a aprendizagem da transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

Para tanto, utilizamos a Teoria das Situações Didáticas e alguns pressupostos da Engenharia Didática que serviram para a elaboração, aplicação e análise de nossa sequência de ensino, que nos auxiliou na hora de prever e dar soluções aos problemas que poderiam ocorrer durante aplicação da atividade. Em nosso estudo, o *software* de geometria dinâmica que escolhemos, foi importante, pois graças à movimentação e a visualização (da variação das medidas dos segmentos, dos ângulos, das coordenadas dos pontos), tanto na figura como na janela algébrica, facilitou aos alunos a compreensão das razões trigonométricas.

Apontaremos alguns problemas que ocorreram durante a aplicação das atividades:

1. Quando a atividade exigia um conhecimento anterior, na maioria dos casos, os alunos não tinham esse conhecimento ou não se lembravam de tê-lo aprendido, por exemplo, (não se lembrar da semelhança de triângulos, das coordenadas cartesianas, o que são retas perpendiculares, entre outros);
2. Quando a atividade exigia a construção geométrica, os alunos não sabiam utilizar corretamente os instrumentos de construção e de medida (o compasso, a régua e o transferidor).
3. Alguns alunos não tinham autonomia para executar as atividades como previmos em nosso aporte teórico, pois estavam acostumados

> a terem as respostas de seus professores e a todo instante ficavam pedindo explicações ao pesquisador.

Outro fato que deve ser considerado, a pesquisa foi realizada com um grupo reduzido de alunos (8 alunos), se o número de alunos fosse muito grande, esbarraríamos em outro problema: a quantidade de máquinas necessárias para executar as atividades.

Após confrontarmos o depoimento dos alunos (gravação do experimento), as análises *a priori* e *a posteriori* relatadas no capítulo 3, encontramos evidências de que nossa questão de pesquisa: "**Atividades com material manipulativo e com o computador podem favorecer a aprendizagem de alunos na transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico?"** foi respondida e as hipóteses que levantamos foram validadas. Pudemos perceber algumas contribuições de nosso trabalho, como nas atividades que usamos o *software* de geometria dinâmica, os alunos demonstraram interesse e mostraram-se concentrados na resolução das mesmas. Ainda a ordem em que as atividades foram aplicadas favoreceu a aprendizagem das razões trigonométricas; pois primeiro, os alunos precisavam investigar as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, depois no primeiro quadrante do círculo trigonométrico e, posteriormente, nos demais; assim uma atividade para aprenderem e visualizarem a tangente no círculo trigonométrico, outra para investigarem os sinais das razões trigonométricas, uma atividade para aprenderem a converter unidades de arcos (radianos) em unidades de ângulos (graus) e vice-versa e por fim uma atividade em que teriam que construir um círculo trigonométrico utilizando régua, transferidor e compasso.

A movimentação do *software* de geometria dinâmica favoreceu a aprendizagem dos alunos das razões trigonométricas, ao perceberem a diferença entre uma figura estática na lousa e uma figura que se movimenta na tela do computador. A visualização que o *software* permite, tanto da parte gráfica como da algébrica favoreceu a aprendizagem dos alunos na hora em que colocamos um triângulo retângulo no interior de um círculo trigonométrico e quando mostramos a representação da tangente no círculo trigonométrico eles perceberam que o cosseno e o seno deste triângulo eram, respectivamente, as coordenadas do ponto que era um dos vértices desse triângulo (vértice sobre o círculo trigonométrico) e a visualização gráfica da tangente possibilitou que os alunos compreendessem porque a mesma era igual a razão da medida do cateto oposto a um ângulo agudo pela medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo e, também, é igual ao seno de um ângulo agudo dividido pelo cosseno do mesmo ângulo.

Na atividade que os alunos tiveram de construir a régua trigonométrica, eles perceberam a necessidade de utilizar corretamente os instrumentos de medida ao precisarem verificar os valores das razões trigonométricas em suas réguas e compararem com os valores dos colegas e, também, ao confrontarem os valores obtidos em suas réguas com os valores obtidos na calculadora científica do computador.

De tudo que apresentamos um dos aspectos positivos deste trabalho é que ao realizarem as últimas atividades os alunos apresentaram um número maior de acertos em suas respostas, mostrando que tiveram progresso na aprendizagem.

Como sugestões para trabalhos futuros, seria importante dar continuidade a este trabalho, já que ele não aborda a transição das razões trigonométricas no círculo trigonométrico para os gráficos das funções trigonométricas. Sugerimos uma questão de pesquisa semelhante a nossa, “atividades com material manipulativo juntamente com o computador podem favorecer na aprendizagem de alunos das razões trigonométricas no círculo trigonométrico para os gráficos das funções trigonométricos?”, ou outro tipo de abordagem em que as atividades no computador possam simular os problemas de astronomia (cálculo do raio da Terra, distância da Terra ao Sol, da Terra a Lua e da Lua ao Sol, dentre outros).

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba Ed. UFPR, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria da Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Ensino Médio. Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias / Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**.Brasília: MEC/SEF, 2006, v 2.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Matemática - 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998, v. 3.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Trad. de Lazaro Coutinho Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

COSTA, N. M. L. **Funções Seno e Cosseno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador.** Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 1997,179 p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues, Campinas, S P: Editora da Unicamp, 2004.

FREITAS, J. L. M. Situações Didáticas.In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: Uma Introdução.São Paulo: EDUC,2002.

GANNAM, A. Ensinando Trigonometria por meio da imagem.In: DRUCK, S. (Org.). **Matemática: ensino médio**. Brasília: 2004. 248 p. v 3 (Coleção Explorando o ensino).

KENNEDY, E. S. **História da Trigonometria**. Trad. Hygino H Domingues, São Paulo: Atual, 1992. 48 p. v. 5 (Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula).

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio.** Rio de janeiro: SBM,1997. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

LINDEGGER, L. R. M. **Construindo os conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000, 204 p.

LORENZONI, A. C. A. Alguns aspectos históricos da trigonometria Chinesa. **Educação Matemática em Revista,** São Paulo, ano 10, n.14 p. 54-57, agosto 2003.

MACHADO, N. J. **Medindo Comprimentos**, São Paulo, Editora Scipione, 1998. 40 p. (Vivendo Matemática).

MARTINS, V. L. O. F. **Atribuindo significado ao Seno e Cosseno utilizando o software Cabri Gèométre**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 2003, 129 p.

NASCIMENTO, A. Z. **Uma seqüência ensino para a construção de uma tabela trigonométrica**. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005, 206 p.

NOVO AURÉLIO SÉCULO XXI, **O Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999, 2128 p.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades no processo de ensino aprendizagem de Trigonometria por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006, 54 p.

SÃO PAULO. Secretaria da educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau**. 3. ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

_____Proposta curricular para o ensino de matemática: Ensino Fundamental. 5. ed. São Paulo: SE/CENP, 1997.

_____Proposta curricular do estado de São Paulo Matemática /coord. Maria Inês Fini - São Paulo: SEE, 2008.

ANEXO A: A sequência de ensino

Atividade 1

1. Abra o arquivo **triângulo ret.ggb**.

a) Movimente o ponto B e observe a medida do ângulo α.

b) O que você observou?

c) O que aconteceu com as medidas dos lados do triângulo?

d) Movimente os pontos A e C, registre suas observações.

Atividade 2

Na parte inferior da tela há uma janela onde está escrito *entrada*. Aperte o botão esquerdo do mouse dentro dela e digite *c/d,* depois dê "*enter*" e observe na janela algébrica que aparece a letra *f* com o resultado da divisão da medida do lado *c* pela medida do lado *d*.

a) Arraste o ponto B e observe o resultado da razão *c/d* representada pela letra *f.* O que você observou?

b) A medida do ângulo α alterou?

c) Movimente o ponto A observe o resultado da razão *c/d*. O que você observou?

d) A medida do ângulo α alterou?

e) Movimente o ponto C observe o resultado da razão *c/d*. O que você observou?

f) A medida do ângulo α alterou?

Atividade 3

Na janela de entrada, digite *a/d* e depois de "*enter*" aparecerá na janela algébrica a letra *g* que representa a razão da medida do lado *a* pela medida do lado *d.*

a) Arraste o ponto B, observe o resultado da razão *a/d* representada pela letra *g*. O que você observou?

b) A medida do ângulo α alterou?

c) Movimente o ponto A, observe o resultado da razão *a/d*. O que você observou?

d) A medida do ângulo α alterou?

e) Movimente o ponto C, observe o resultado da razão *a/d*. O que você observou?

f) A medida do ângulo α alterou?

Atividade 4

Digite na janela de entrada *c/a*. Dê *enter*. Aparecerá na janela algébrica, a letra *h* que representa a razão da medida lado *c* pela medida do lado *a*.

a) Arraste o ponto B e observe o resultado da razão *c/a* representada pela letra *h*.O que você observou?

b) A medida do ângulo α alterou?

c) Movimente o ponto A, observe o resultado da razão *c/a*. O que você observou?

d) A medida do ângulo α alterou?

e) Movimente o ponto C, observe o resultado da razão *c/a*. O que você observou?

f) A medida do ângulo α alterou?

Atividade 5

1. Abra o arquivo **ciclotrigo.ggb** e movimente o ponto P no primeiro quadrante. Pare num ânguloα qualquer, calcule o $sen\,\alpha$ e o $\cos\alpha$ (utilize as medidas do triângulo PAH).

a) Depois observe as coordenadas dos pontos H e I que são as projeções do ponto P nos eixos x e y. O que você observou?

b) Escolha outras três posições para o ponto P e para cada uma observe o ângulo e determine seu seno e o cosseno.

c) Quais suas conclusões? Justifique.

d) Qual o valor máximo para o seno e o cosseno de um ângulo do primeiro quadrante? Para quais ângulos temos esses valores máximos?

Atividade 6

Vimos na atividade 5 que as coordenadas do ponto P que está sobre o ciclo trigonométrico, representam os valores do cosseno e do seno do ângulo determinado por este ponto. Podemos definir que as coordenadas de P são o cosseno e o seno de um ângulo α qualquer (0°< α ≤ 360°) no ciclo trigonométrico. Dessa forma abra o arquivo **ciclotrigo1.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante observe e responda.

a) O que acontece com o ponto Q ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.

b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas dos pontos P e Q?

c) Qual a medida do ânguloβ (BÂQ)? Qual o valor do cosseno e do seno de sse ângulo?

d) Movimente o ponto P para três posições diferentes, determine o cosseno e o seno do ângulo β para cada uma delas.

e) Qual a soma das medidas dos ângulos α e β?

f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ângulo α, é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo β? Justifique sua resposta.

Atividade 7

1. Abra o arquivo **ciclotrigo2.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante, observe e responda:

a) O que acontece com o ponto R ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.

b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas dos pontos P e R?

c) Qual a medida do ângulo γ (BÂR)? Qual o valor do cosseno e do seno desse ângulo?

d) Movimente o ponto P. Pare em três posições diferentes e determine o cosseno e o seno do ângulo γ para cada uma delas.

e) Como encontrar a medida de γ sabendo a medida de α?

f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ânguloα é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo γ?Justifique sua resposta.

Atividade 8

1. Abra o arquivo **ciclotrigo3.ggb**, movimente o ponto P no primeiro quadrante, observe e responda:

a) O que acontece com o ponto S ao movimentar o ponto P? Justifique sua resposta.

b) O que você pode afirmar a respeito das coordenadas do ponto P e S?

c) Qual a medida do ânguloδ (BÂS)? Qual o valor do seno e do cosseno desse ângulo?

d) Movimente o ponto P pare em três posições diferentes e determine o cosseno e o seno do ângulo δ para cada uma delas.

e) Qual a soma do ângulo α e δ?

f) Sabendo os valores do cosseno e do seno do ângulo α, é possível determinar o cosseno e o seno do ângulo δ? Justifique sua resposta.

Atividade 9

a) Abra o arquivo **trigocirculo.ggb**, e observe os triângulos CBF e ZBA , utilize a semelhança de triângulos para calcular a medida do segmento $\overline{ZA}$.

b) Calcule a tangente do ângulo β no triângulo CBF.

c) Divida o valor do seno pelo valor do cosseno do triângulo CBF, compare com a medida do segmento $\overline{ZA}$ e com o valor da tangente obtida no item b. Os valores são iguais?

d) Movimente o ponto C para um outro ângulo qualquer do primeiro quadrante, depois repita os procedimentos a, b e c. Novamente os valores são iguais? O que você conclui com estes resultados? Os resultados são iguais à tangente de β? Existe outro ângulo que tenha o mesmo valor da tangente de β? Qual a medida desse ângulo?

e) Movimente o ponto C no segundo quadrante observe e responda. Existe outro ângulo que tenha o mesmo valor da tangente de β? Qual a medida desse ângulo?

Atividade 10

1. Abra o arquivo **trigociclo.ggb**, observe os sinais das razões trigonométricas ao movimentar o ponto C no primeiro quadrante e responda:

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?

b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?

c) E com o sinal dos valores das tangentes?

2. Movimente o ponto C no segundo quadrante:

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?

b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?

c) E com o sinal dos valores das tangentes?

3.Agora mova o ponto C no terceiro quadrante, observe e responda:

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?

b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?

c) E com o sinal dos valores das tangentes?

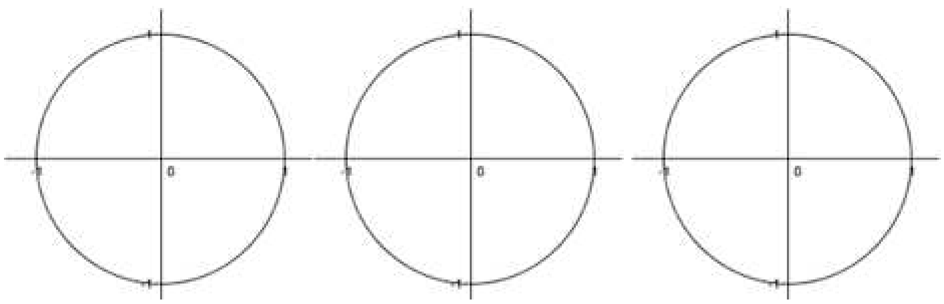
4.Movimente o ponto C no quarto quadrante, observe e responda:

a) O que acontece com o sinal dos valores do seno de qualquer ângulo neste quadrante?

b) O que acontece com o sinal dos valores do cosseno neste quadrante?

c) E com o sinal dos valores das tangentes?
d) Represente os sinais dos valores do seno, do cosseno e da tangente para o primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes a partir das observações acima.

Seno cosseno tangente



Atividade 11

1) Abra o arquivo **rad.ggb** e observe na figura que $\overline{CA}$ é o raio da circunferência**,** *d***,** representa o comprimento do arco CD. Movimente o ponto C, observe o que acontece com a medida do raio e do arco da circunferência. O que você observou?

Quando a medida do arco de uma circunferência for igual à medida do raio da circunferência que o contém, dizemos que este arco mede 1 radiano , (símbolo *rad*).

2) Qual o comprimento de uma circunferência qualquer?

3) Quantos radianos têm uma circunferência qualquer?

4) Quantos radianos têm a metade de uma circunferência?

5) Quantos radianos têm em um quarto de uma circunferência?

6) Quantos radianos equivalem a um arco que corresponde a 60°? E 45°equivalem a quantos radianos?

7) Quantos graus equivalem a um arco de $\frac{\pi}{6}$*rad*? E $\frac{\pi}{8}$*rad* equivalem a quantos graus?

Atividade 12

a) Na folha de papel milimetrado trace duas retas perpendiculares entre si. A intersecção destas retas será a origem do sistema de eixos coordenados, a reta na horizontal será o eixo x e a reta na vertical será o eixo y. Faça marcas nos eixos de 10 em 10 milímetros, partindo do cruzamento dos eixos para cima, para baixo, para a direita, e para a esquerda. Cada marca representará 0,1 decímetros, escreva em cada marca o valor que elas representam nos eixos orientados.

b) Com o compasso, trace uma circunferência com centro em O (0,0) e raio igual a 1 decímetro (10 cm). Como consequência deste traçado, a circunferência ficou dividida em quatro partes que chamaremos de quadrantes.

c) Faça marcas de 10° em 10° no sentido anti-horário, começando a contar a partir do ponto (1,0).

d) Trace uma reta paralela ao eixo y no ponto (1,0) e chame-a de t. Faça marcas iguais às feitas no eixo y.

e) Sobreponha a transparência no ciclo trigonométrico de modo que o ponto A coincida com o centro da circunferência, fixe a tachinha no ponto A de maneira que a transparência possa girar.

f) Para utilizar o dispositivo, mova a transparência, pare num ponto qualquer, e observe a intersecção da circunferência da transparência com os eixos x e y. A distância dos pontos de intersecção da circunferência com os eixos y e x e a origem serão, respectivamente, os valores do seno e do cosseno do ângulo. A ordenada do ponto de intersecção da reta da transparência com a reta t será o valor da tangente.

g) Utilize o dispositivo e determine o seno, o cosseno e a tangente de 50°.

h) Encontre os valores do seno do cosseno e da tangente para os arcos de $\frac{\pi}{4}$ *rad* e para $\frac{\pi}{6}$ *rad.*