PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

GABRIELA DOS SANTOS BARBOSA

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA: JOGOS E PROBLEMAS COM ALUNOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

GABRIELA DOS SANTOS BARBOSA

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA: JOGOS E PROBLEMAS COM ALUNOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como critério parcial para obtenção do título de **Doutor em Educação Matemática,** sob a orientação da **Professora Doutora Sandra Maria Pinto Magina**.*

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________ Local e Data ______________

Quando falo em conquista, quero dizer a conquista de uma situação decente para todas as criaturas humanas, a conquista da paz digna, através do espírito de cooperação. E quando falo em aceitar a vida não me refiro à aceitação resignada e passiva de todas as desigualdades, malvadezas, absurdos e misérias do mundo. Refiro-me, sim, à aceitação da luta necessária, do sofrimento que esta luta nos trará, das horas amargas a que ela forçosamente nos há de levar... todos, desde o artesão mais humilde até o intelectual mais reputado, podem prestar serviços à causa dentro do raio da sua atividade. Devem-se usar as armas do amor e da persuasão.

(Érico Veríssimo)

Para as crianças do
Jabour, de Madureira, da Rocinha
e das comunidades Guarani.

Agradecimentos

*Aos meus pais, **Maria Amália dos Santos Barbosa** e **Luiz Carlos Barbosa**, e ao meu irmão, **André Luiz dos Santos Barbosa**, pelo amor que sempre me deram e está acima de tudo.*

*Á minha querida orientadora Professora Doutora **Sandra Maria Pinto Magina**, pelas orientações e pela amizade de que tanto me orgulho.*

*Á Professora Doutora **Anna Franchi** por ter refletido comigo sobre todas as atividades da intervenção de ensino e por ter me disponibilizado, sem restrições, seus materiais de trabalho.*

*À Professora Doutora **Irene Mauricio Cazorla**, pelo generoso auxílio no tratamento estatístico dos dados desta pesquisa.*

*Ao Professor Doutor **Vinícius de Macedo Santos**, por estar presente em todas as etapas deste estudo, oferecendo valiosas sugestões.*

*À Professora Doutora **Silvia Dias Alcântara Machado**, ao Professor Doutor **Benedito Antônio da Silva** e à Professora Doutora **Adriana César Mattos Marafon** que, com tanta presteza, aceitaram compor a nossa banca examinadora.*

*Á Professora Doutora **Tânia Maria Mendonça Campos**, ao Professor Doutor **Ruy César Pietropaolo** e à Professora Doutora **Janete Bolite Frant** que, como membros da banca de qualificação, fizeram as primeiras leituras do nosso estudo e sugeriram caminhos para seu fechamento.*

*A **Ana Paula, Adriana, Cido, Claudemir, Cláudio, Corina, Daniela, Denise, Eurivalda, Franciana, Conceição, Otávio, Irene, Raquel, Romeu, Rosana, Marcelo, Silvana, Vera, Aida** e **Sandra**, que são meus amigos do Grupo de Pesquisa REPARE, e refletiram comigo sobre cada capítulo desta tese.*

*Ao Professor Doutor **Ubiratan D'Ambrósio**, pelos comentários tão positivos que sempre fez dos meus textos. Mesmo que esta tese não tivesse sido concluída, só a honra de ter sido sua aluna já compensaria os meus esforços.*

*À Professora Doutora **Maria Cristina Maranhão**, pelos ensinamentos e pelo tratamento tão carinhoso que sempre teve comigo.*

*A **Chang**, **Patrícia**, **Victória** e **Gilson**, pela amizade tão confortante e pelas ajudas na formatação desta tese.*

*Ao Analista **Francisco Olímpio da Silva**, pelos serviços prestados com tanta boa vontade.*

*À **CAPES**, pelo financiamento.*

*À Professora **Denise**, que cedeu seus tempos de aula para que realizássemos a intervenção e sempre esteve ao nosso lado durante as reflexões.*

*À Professora **Mariana Lopes Nunes**, pelas filmagens e sugestões durante a intervenção de ensino.*

*À Professora **Fernanda Muniz**, pela transcrição das fitas e por ajudar na organização de todo o material comentado na qualificação.*

*À amiga **Tânia**, pela tradução do resumo para o Inglês.*

*A minha madrinha **Juciara**, pelos incentivos da vida inteira.*

*A minha tia **Marilena**, por ser meu grande exemplo na vida acadêmica.*

*A **Maria José**, **Dinho**, **Roselene** e companhia, minha segunda família, que cuidou de mim boa parte do curso de doutoramento.*

*Ao **Anderson Luiz Barbosa Lopes**, o **Kiko**, por ter convivido tão pacientemente comigo nos últimos meses de elaboração desta tese. A ele, meu pedido de desculpas pelas ausências, meu amor e minha eterna gratidão.*

A Autora

Resumo

A presente tese teve por objetivo realizar um estudo intervencionista para a introdução do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e dos principais conceitos associados a ele com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Na pesquisa, propomo-nos a responder a seguinte questão: ***"De que argumentos os alunos se valem no processo de significação do Teorema Fundamental da Aritmética?"*** Para tanto, realizamos um estudo com 22 alunos, advindos de uma turma de uma escola particular da zona norte do Rio de Janeiro. O grupo já havia tido contato, do ponto de vista formal da escola, com conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética: múltiplo, divisor, números primos e compostos e decomposição em fatores primos. A fundamentação teórica da pesquisa contou com a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1983, 2001) e as idéias de Campbell e Zazquis (2002) com relação à aprendizagem dos conceitos associados à Teoria Elementar dos Números, de que o TFA é parte integrante. O método constou de um estudo dividido em três etapas. A primeira referiu-se a aplicação coletiva de uma avaliação inicial. A segunda voltou-se para a fase de intervenção, que foi divida em três grupos de atividades intercalados por duas avaliações intermediárias. E, por fim, a terceira corresponde à aplicação, também coletiva, de uma avaliação final, com as mesmas questões da avaliação inicial. Os dados foram analisados em duas perspectivas: uma voltada à análise quantitativa, em que se buscou relacionar os percentuais de acerto, com a ajuda do pacote estatístico SPSS (Statistical Package for Social Science). A segunda perspectiva referiu-se à análise dos dados do ponto de vista qualitativo, visando identificar os tipos de erros cometidos pelos alunos, bem como suas estratégias na resolução de situações-problema. Os resultados mostraram que os alunos desenvolvem esquemas próprios para lidar com os conceitos em construção. Nesse processo, uma série de conceitos matemáticos está presente, ainda que implicitamente, em suas ações. É função do professor criar condições que favoreçam aos alunos explicitá-los.

Palavras-chave: Teorema Fundamental da Aritmética, intervenção de ensino, Ensino Fundamental, Teoria dos Campos Conceituais, estruturas multiplicativas.

Abstract

The present thesis has the purpose of carrying out an interventionist study for the introduction of the Fundamental Theorem of Arithmetic (FTA) and main concepts associated to it to students of the 6th Grade of Basic Education. In the research we intend to answer the following question: **“What are the arguments used by students in the significance process of the Fundamental Theorem of Arithmetic?”** For that purpose, we carried out a study with 22 students of a private school situated in the north zone of Rio de Janeiro. The group had already been in touch, according to the school’s formal point of view, with the concepts related to the Fundamental Theorem of Arithmetic: multiples, divisors, prime and compound numbers and prime factors decomposition. The research has as theoretical fundamental, the *Conceptual Fields Theory* proposed by Vergnaud (1983, 2001) and the ideas of Campbell and Zazquis (2002) related to the learning process of concepts associated with the Basic Number Theory, which TFA belongs to. The method used a study divided into three stages. The first stage was the collective use of an initial evaluation. The second addressed the intervention stage, which was divided into three activity groups, and inserted into them, there were two intermediary evaluations. And, at last, the third corresponds to the use, also collective, of a final evaluation, with the same questions as the initial evaluation. Data was analysed from two perspectives, one directed to quantitative analysis, where we tried to relate the percentages of rights, with the help of the statistic package SPSS (Statistical Package for Social Sciences). The second perspective was data analysis from the qualitative point of view, aiming at identifying the type of mistakes made by students, as well as their strategies to solve problem-situations. The results showed that students had developed their own scheme to deal with concepts in construction. In this process, even if implicitly, a series of mathematic concepts present in students’ actions; is the teacher’s function to create favourable conditions for the students to explain them.

Key words: Fundamental Theorem of Arithmetic, teaching intervention, Basic Teaching, *Conceptual Fields Theory, multiplicative structures.*

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este trabalho tem como objetivo desenvolver, analisar e avaliar uma proposta de ensino centrada nos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Buscamos identificar e compreender os argumentos e os procedimentos utilizados por um grupo de 22 alunos de 6º ano (antiga 5ª Série) do Ensino Fundamental, ao trabalharem em um cenário de aprendizagem em que privilegiamos a diversificação das situações nas quais tais conceitos estão envolvidos e o uso das várias simbologias que lhes são associadas.

Segundo Alencar Filho (1988), o TFA garante que todo número natural maior do que um pode ser decomposto de maneira única num produto de números primos, a menos de permutações dos fatores e os conceitos relacionados a ele são: definições de múltiplos e fatores de um número, critérios de divisibilidade, diferenciação entre primos e compostos e decomposição de um número em fatores primos. Trata-se de conceitos muito relevantes não só na prática cotidiana, mas, sobretudo, dentro do corpo de conhecimentos matemáticos a serem estudados pelos alunos durante o ensino Fundamental e Médio.

A divisibilidade associada a números naturais envolve a divisão e a multiplicação. O fato de conhecer alguns critérios de divisibilidade permite ao aluno efetuar cálculos mentais e estimativas. Saber decompor um número em fatores primos auxilia-o na obtenção do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e do máximo divisor comum (m.d.c.), bem como no cálculo envolvendo radiciação. Todos estes conceitos são partes do conteúdo programático de Matemática desde o 4º ano (antiga 3ª Série) do Ensino Fundamental, sendo retomado nos anos subseqüentes apenas com aumento gradual dos números, cuja decomposição é solicitada aos alunos.

A presente investigação constitui-se em um desdobramento de nossa pesquisa “Construção dos conceitos de múltiplo e divisor à luz da psicologia de Vygotsky”, que deu origem à dissertação de mesmo nome apresentada na Universidade Santa Úrsula em junho de 2002 (BARBOSA, 2002). O estudo enfocou o processo de ensino-aprendizagem da Matemática por meio do uso de diferentes linguagens e examinou os procedimentos e as argumentações apresentadas pelos alunos no processo de construção dos conceitos de múltiplo e fator.

Sua fundamentação teórica apoiou-se no sócio-interacionismo[1], que tem como uma de suas idéias centrais a construção dos conhecimentos mediada por sistemas simbólicos, sendo a linguagem o signo comum a todos os grupos humanos. Conforme esta teoria, elaboramos e desenvolvemos atividades que envolviam os conceitos de múltiplo e divisor para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona norte do Rio de Janeiro. Os alunos trabalharam em pequenos grupos, o que permitiu que dialogassem e manifestassem seus conhecimentos sobre o assunto. As aulas foram gravadas e depois transcritas. Pode-se dizer que nosso estudo de mestrado tratou-se de uma pesquisa de intervenção, cuja análise dos dados, predominantemente, foi qualitativa, com técnicas etnográficas.

O método de ensino baseou-se nos conceitos espontâneos[2] dos alunos sobre o tema e, por meio das atividades, objetivamos favorecer a aquisição e internalização significativa dos conceitos que foram explorados e sistematizados. Na análise, verificamos que os alunos produziram significados e construíram

---

[1] Segundo Oliveira,

> o sócio-interacionismo tem como um de seus pressupostos básicos a idéia de que o ser humano constitui-se enquanto tal na sua relação com o outro social. A cultura torna-se parte da natureza humana num processo histórico que, ao longo do desenvolvimento da espécie e do indivíduo molda o funcionamento psicológico do homem (Oliveira, 1992, p.24).

[2] Entendemos conceitos espontâneos tal como Vygotsky. São conceitos que a criança desenvolve no decorrer das atividades práticas e de suas interações sociais imediatas.

várias representações para falar sobre múltiplo e divisor de um número. Cada etapa permitiu aos alunos:

i) Identificar se um número é múltiplo ou divisor de outro a partir da análise dos elementos presentes na multiplicação e na divisão;

ii) Enunciar, em linguagem própria, critérios de divisibilidade pela reflexão sobre as atividades acima;

iii) Reconhecer números primos; e

iv) Reconhecer números quadrados.

Observamos que, subjacentes aos conceitos de múltiplo e divisor de um número se iniciou o processo de construção dos conceitos de números primos e números quadrados. Por parte dos alunos, houve um redimensionamento dos conceitos relacionados às operações de multiplicação e divisão.

A partir daí, novas inquietações surgiram e motivaram a elaboração da presente tese. Nosso interesse ampliou-se. Desejamos agora reavaliar as atividades propostas na pesquisa descrita buscando aprofundar o conhecimento dos alunos sobre múltiplo e divisor. Nela, a intenção foi elaborar uma proposta de ensino visando a compreensão das idéias de “ser múltiplo de” ou “ser divisor de”[3] e a reversibilidade entre elas. Agora, a intenção é analisar atividades capazes de mobilizar os alunos na construção dos conceitos relacionados ao TFA.

Nacionalmente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para 5ª a 8ª séries apontam diretrizes para o ensino da Aritmética, sugerindo uma abordagem mais reflexiva dos números e considerando que o aluno deve perceber (BRASIL, 1998)

> a existência de diversos tipos de números (naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados à medida que deparar com situações-problema, envolvendo operações ou medidas de grandeza, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento matemático (PCN, 1998, p. 50).

[3] Ao longo desta tese, também usamos as expressões *relações de multiplicidade* ou *relações de divisibilidade* para nos referirmos às relações “múltiplo de” e “fator de”.

Referindo-se às operações ainda concluem:

> Com relação às operações, o trabalho a ser realizado deve se concentrar na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos – exato e aproximado, mental e escrito (PCN, 1998, p. 50).

Entretanto, as pesquisas em Educação Matemática, que serão descritas mais detalhadamente nos próximos parágrafos, sinalizam a existência de problemas no ensino e na aprendizagem da Aritmética. Com relação à proposta curricular, podemos perceber que, com freqüência, o estudo dos conceitos aritméticos não tem sido enfatizado no Ensino Fundamental. Embora ocorra, observamos um tratamento mecanizado, com base em exercícios repetitivos e problemas idealizados.

Em outras palavras, todas as possibilidades de abordagem dos conceitos relacionados à aritmética são reduzidas ao ensino de algoritmos. Pouca atenção tem sido dispensada às reflexões sobre o funcionamento dos algoritmos e os alunos não têm tido oportunidade de descobrir variações nos algoritmos que possam ser úteis para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e estimativas. Lins e Gimenez enfatizam esta constatação ao afirmarem que:

> Os conceitos aritméticos usados na Educação Matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos. Tem-se esquecido frequentemente que a aritmética inclui também: a) representações e significações diversas (pontos de referência e núcleos, que ampliam a idéia simples do manipulativo); b) análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e habilidades); e d) descobertas ou "teoremas" (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínios). (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 33).

Coelho et al. (2005, p. 11-12) investigaram a compreensão do TFA, por professores de Matemática em curso de formação continuada e alunos de 8ª série do Ensino Fundamental de São Paulo. Buscaram responder se existe diferença significativa na compreensão do TFA entre os dois grupos estudados e nos recursos utilizados para resolver as situações propostas. Concluíram que, comparativamente, tais diferenças existem e que também *"existem cursos voltados para estudantes brasileiros nos quais a compreensão conceitual é* *enfatizada"*. Mas, alertam que *"essa abordagem pode ser perturbada por um ensino prévio muito calcado em algoritmos".* Voltando-se para o grupo de professores, as autoras perceberam que,

> apesar de ter havido ênfase na compreensão conceitual durante a formação mais recente dos professores no curso de Pós Graduação, esse esforço pode ter sido prejudicado por não ter abarcado todo o ensino recebido, sendo que ainda prevaleceram os hábitos constituídos na formação em longo prazo (COELHO et al., 2005, p. 12).

Estes dados reforçam a necessidade de uma abordagem que priorize a formação de conceitos e não simplesmente a memorização de algoritmos, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, justifica nossa pesquisa. Se a construção de conceitos não for favorecida, o indivíduo enfrentará dificuldades durante sua vida escolar, sobretudo, quando confrontado com situações que lhe exijam tomar decisões e estabelecer estratégias de resolução de problemas. As dificuldades poderão se fazer presentes, inclusive, em níveis de ensino mais elevados. Idéias mal concebidas inicialmente se constituirão em obstáculos para a compreensão de futuros conceitos.

Em pesquisa anterior, em que fizeram uma análise de propostas curriculares nacionais, documentos oficiais e institucionais, Coelho et al. (2003) revelaram descontinuidades existentes entre o ensino da Álgebra, na educação básica, e nos cursos superiores de formação de professores. No caso dos últimos, mostraram a necessidade do ensino da Teoria Elementar dos Números[4]. Vale destacar que tal teoria abarca uma série de conceitos aritméticos, entre eles, o TFA.

Resende (2007), analisou as propostas curriculares das disciplinas de doze universidades brasileiras, que tratam da Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em Matemática, concluiu que não tem havido a preocupação com a formação do professor da escola básica: a abordagem dos conteúdos é axiomática, em uma linguagem predominantemente simbólico-formal e as

[4] Segundo Santos (2003), o estudo das propriedades dos números inteiros positivos é o objetivo central da Teoria dos Números. São três os principais ramos em que se divide a Teoria dos Números: Teoria Elementar, Teoria Analítica e Teoria Algébrica. Os conceitos cujo processo de construção é objeto de nossa investigação compõem a Teoria Elementar dos Números. Assim, quando nos referimos à Teoria dos Números estamos fazendo alusão a este ramo.

demonstrações são demasiadamente enfatizadas. Trata-se de um ensino que se enquadra na tendência formalista clássica. Por outro lado, fundamentada na presença dos tópicos da Teoria dos Números no currículo da escola básica, como a divisibilidade e outras propriedades dos naturais que se estendem aos inteiros, aponta possibilidades para que este quadro seja revisto.

É necessário, incontestavelmente, uma revisão dos princípios que norteiam o atual ensino da aritmética. Na escola, as atividades indutivas devem ser favorecidas. Assim, *"a cultura ocidental tem esquecido que as descobertas matemáticas não são somente dedutivas, mas, fundamentalmente, práticas e indutivas"* (LINS E GIMENEZ, 1997, p. 36). Conforme os autores citados, os objetivos gerais de um trabalho curricular aritmético devem ser:

> - Buscar a compreensão da quantidade e a observação e a manipulação de processos operativos.
> - Fomentar a criatividade e a sensibilidade na busca de propriedades e relações.
> - Conhecer, assumir e usar uma metodologia heurística, motivando a intuição para ajudar a formulação de hipóteses, generalizações e, em alguns casos, estratégias indutivas.
> - Reconhecer processos dedutivos e iterativos usados na história, tentando reconhecer e identificar seus fundamentos, e reviver suas reflexões.(Lins e Gimenez, 1997, p. 40-44).

Internacionalmente, vimos que as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da aritmética também conduzem a propostas de reformulação de seu ensino. As pesquisas da Campbell e Zazkis (2002), por exemplo, apontam para a necessidade de mudanças no ensino da Teoria dos Números nos cursos de formação de professores. Estas mudanças envolveriam modificações nas atividades propostas não apenas para exercícios e prática, mas também no desenvolvimento de idéias associadas à estrutura multiplicativa. Retornaremos às pesquisas de Campbell e Zazkis nos próximos parágrafos.

Vergnaud (1990), ao pensar sobre os processos de ensino e de aprendizagem, em sua Teoria dos Campos Conceituais, atribui à criança e suas atividades sobre a realidade um papel decisivo no processo educativo e em seu desenvolvimento cognitivo. Entretanto, não negligencia o papel do professor. Ao contrário, o valor do professor está justamente em sua capacidade de estimular e utilizar essa atividade da criança, o que, de certo modo, implica uma discussão a respeito da formação dos professores. O professor é tido como pesquisador que busca identificar os conhecimentos implícitos na ação das crianças para lhes favorecer explicitá-los.

Embora reconheçamos a importância do trabalho do professor, o aspecto mais relevante na teoria de Vergnaud, que foi decisivo para que a escolhêssemos para fundamentar esta pesquisa, foi o valor que ele atribui às características específicas do conceito a ser construído pela criança tanto em seu processo de construção como em seu desenvolvimento cognitivo. Este aspecto diferencia-o de Piaget que atribui a construção de conceitos às operações lógicas gerais, Vergnaud alerta para o fato de que, no estudo do processo de conceitualização do real,

> qualquer reducionismo é perigoso na medida em que ela é específica de conteúdo e não pode ser reduzida nem às operações lógicas gerais, nem às operações puramente lingüísticas, nem à reprodução social, nem à emergência de estruturas inatas, nem, enfim, ao modelo do processamento da informação (VERGNAUD,1983a, p. 392).

Assim, é nessa direção que conduzimos nossa pesquisa, dando oportunidade para o aluno se expressar, descentralizando do professor a fala e o desenvolvimento de modos de pensar sobre o conteúdo matemático que está sendo estudado. Além disso, recorremos a uma diversidade de situações, visto que é por meio de situações a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.

É importante que deixemos claro como usaremos a expressão situações. Aqui, q idéia de situações difere daquela adotada por Brousseau na Engenharia Didática. Na Teoria dos Campos Conceituais, a situação é analisada como uma combinação de tarefas para as quais é essencial conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. A dificuldade de uma tarefa não é nem a soma, nem o produto das diferentes subtarefas envolvidas, mas o desempenho em cada uma afeta o desempenho global.

Desse modo, quando dizemos que o objetivo de nosso estudo é desenvolver, analisar e avaliar uma proposta de ensino centrada nos principais conceitos ligados ao Teorema Fundamental da Aritmética, queremos dizer que nosso olhar está voltado às ações dos alunos, na medida que elas expressam os objetos matemáticos que estão sendo construídos. Buscamos a análise e a compreensão dos procedimentos e argumentos de que os alunos se valem em cada situação, dados que são obtidos por meio de um recorte de suas falas enquanto interagem entre si e com o professor, sejam essas falas orais, gestuais, apontamentos escritos ou pictóricos.

Revisão Bibliográfica

Outro fator que nos fez construir o presente estudo foi a revisão bibliográfica. A seguir, optamos por incluir, uma revisão da literatura relevante para melhor situar nosso problema. Cabe mencionar que o levantamento do material a ser estudado não foi uma tarefa fácil. O número de pesquisa em Educação Matemática voltada para o ensino e a aprendizagem de conceitos associados à Teoria dos Números é bastante reduzido. Encontramos amparo nos estudos organizados na obra de Campbell e Zazkis (2002).

Os sujeitos destas pesquisas são diferentes dos sujeitos envolvidos em nossa investigação: trabalhamos com alunos do Ensino Fundamental enquanto esses pesquisadores fizeram-no com professores em formação.

No entanto, a experiência em sala nos revelou que certas concepções e procedimentos empregados pelos professores em formação, quando confrontados com situações-problema que envolvem conceitos da Teoria dos Números, também, podem ser percebidos na conduta dos alunos do Ensino Fundamental. Assim, procuramos compreender os dados das pesquisas descritas na obra de Campbell e Zazkis (2002) e as conclusões a que chegaram. Na análise de nossos dados, tentaremos reconhecer em que medida elas se repetem ou não.

Os autores organizaram onze pesquisas abordando a Teoria dos Números. São estudos que discutem questões como o uso da linguagem e das metáforas no ensino, provas e demonstrações e formação de professores. Priorizamos os estudos de Campbell (2002), Brown et al. (2002) e Teppo (2002), porque subjacentes a estas questões estão a estrutura multiplicativa e a decomposição de números em fatores primos, ou seja, nosso objeto matemático. É um aspecto consensual entre os pesquisadores a relevância do estudo da Teoria Elementar dos Números desde a educação básica, porque, aplicando seus conhecimentos da estrutura multiplicativa nesse contexto, o sujeito terá oportunidades valiosas para enriquecer sua compreensão das propriedades de multiplicação e divisão. Para fazer uso das possibilidades oferecidas pelos conceitos da estrutura multiplicativa, o indivíduo deve ter experiência com a representação de números naturais como produto (s) de primos. Isto inclui decompor em fatores primos, executar aritmética sobre as decomposições e usar a estrutura embutida nas fatorações para reconhecer e justificar relações de divisibilidade.

A natureza elementar do processo de construção da decomposição em fatores primos para números pequenos pode sugerir para alguns que o uso dessas decomposições como ferramenta estrutural para resolver problemas, é igualmente, elementar. Entretanto, Zazkis e Campbell (2002) e Brown et al. (2002) indicam que muitos professores em formação têm dificuldades para trabalhar com esta representação e com as propriedades. Com freqüência, relações fundamentais não são facilmente reconhecidas ou inferidas baseadas em descrições estruturais.

Deste modo, Brown et al. (2002) interessaram-se pela compreensão dos professores em formação sobre a Teoria dos Números. Procuraram enfocar a habilidade do indivíduo orientar suas ações aritméticas e raciocínios por meio da compreensão da estrutura multiplicativa sobre o conjunto dos números naturais. Usando as palavras deles, estavam interessados

> na habilidade individual de progredir das respostas nos caminhos que são primeiramente ações orientadas, com pouca consciência dos conceitos matemáticos subjacentes, para respostas com raciocínio inferencial baseado explicitamente na compreensão das operações e propriedades matemáticas (BROWN et al., 2002, p. 41).

Eles apresentaram aos professores em formação a decomposição em fatores primos de um número. Em seguida, questionaram sobre a divisibilidade desse número por outros que, em muitos casos, eram fatores presentes na sua decomposição. Por exemplo, perguntaram se o número $3^3 x 5^2 x 7$ é divisível por 7. Por meio das respostas e justificativas dos sujeitos, concluíram na pesquisa que alguns freqüentemente lidam com tarefas da Teoria dos Números sem usar de modo consciente seus conhecimentos da estrutura multiplicativa. Eles escolheram executar computações quando raciocinar sobre as computações bastaria. As respostas iniciais tenderam calcular em vez de antecipar, inferir ou predizer. Com relação ao exemplo, o procedimento de boa parte dos sujeitos foi efetuar os cálculos, descobrir que $3^3 x 5^2 x 7 = 4725$ para, enfim, dividir este resultado por 7 e decidir sobre a divisibilidade em questão analisando o resto da divisão.

Similarmente, Notari (2002), pesquisando sobre erros e dificuldades manifestados por alunos do ensino Fundamental e Médio na simplificação de frações aritméticas e algébricas, verificou que boa parte dos sujeitos, quando confrontados com frações aritméticas, não se valem das decomposições do numerador e do denominador para simplificá-las. Mesmo, quando estes são apresentados decompostos em fatores primos, os alunos efetuam os cálculos para identificar a que números eles correspondem e iniciam o processo de simplificação dividindo ambos pela seqüência de números primos até tornar a fração irredutível.

A natureza automática das respostas, encontradas tanto por Brown et al. (2002), como por Notari (2002) apresenta obstáculos para a reflexão. Este quadro, entretanto, segundo Brown et al. (2002), vai sendo revertido progressivamente, à medida que os alunos internalizavam as ações relacionadas à divisibilidade. As inferências ocorrem apoiadas na reflexão a respeito dos resultados da coordenação dos processos, sublinhando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, com o processo de concepção da decomposição em fatores primos.

Campbell (2002), também, investiga as habilidades dos professores em formação para pensar a divisão aritmética em um nível mais abstrato. O autor pesquisou a compreensão desses professores sobre conceitos, procedimentos e termos pertencentes ao algoritmo da divisão, teorema fundamental da Teoria dos Números que define a divisão com números inteiros. Para tanto, usou tarefas de problemas abstratos envolvendo a decomposição em fatores primos e calculadoras, descreveu, por meio de uma perspectiva empírica, a variedade de fenômenos lingüísticos, processuais e conceituais associados à compreensão dos professores sobre divisão.

Assim, o autor inicia propondo aos sujeitos questões semelhantes às de Brown et al. (2002) em sua pesquisa. Em seguida, acrescenta questões relativas à divisibilidade por 2 e por 6 dos números $6x147+1$ e $6x147+2$. Questiona sobre os restos das divisões destes números por 2 e por 6 e sobre a utilidade da calculadora para determinar tais restos. Os resultados obtidos abrangeram desde abordagens processuais da divisão, quer usando uma calculadora quer efetuando divisão longa, até abordagens mais conceituais que resultaram em respostas apropriadas com pouca ou nenhuma computação.

Observa-se que entre estes extremos, houve variações sugerindo dificuldades na compreensão da divisão de número inteiro em relação à divisibilidade e na sua distinção da divisão de número racional. Por meio destas entrevistas, participantes confrontaram uma variedade de obstáculos que foram conduzidos para uma série de inferências, envolvendo vários aspectos da divisão. Em suas notas conclusivas, Campbell resume:

> Teoricamente este estudo destacou uma variedade de distinções lingüísticas, processuais e conceituais que podem de uma forma ou de outra, ser tematicamente envolvidas numa compreensão da divisão aritmética mais ideal tais como: 1) números inteiros e números racionais não negativos; 2) unidades indivisíveis e divisíveis; 3) divisão de número inteiro com resto e divisão de número racional; 4) abordagens inteiras e fracionais para a divisão com resto usando calculadoras e 5) divisão quotitativa e partitiva. Números inteiros, unidades indivisíveis, e divisão com resto estão claramente relacionadas, tal como estão a divisão de números racionais não negativos, unidades divisíveis, e número racional. Divisão quotitativa parece ter uma afinidade natural, no entanto não exclusiva, com o grupo anterior tal como tem a divisão partitiva, no entanto não exclusiva também, com o último grupo. A extensão a qual o estudante pode tematizar relações entre estes vários aspectos formais e intuitivos da divisão ao longo destas linhas continua para ser mais totalmente determinada (CAMPBELL, 2002, p. 36-37).

Esclarecendo suas conclusões, Campbell (2002) explica que, em situações problema apresentadas no contexto da Teoria Elementar dos Números no domínio dos números inteiros, boa parte dos alunos, em um ponto ou noutro, expressam restos ou quocientes como números racionais, o que conduz a uma considerável confusão, freqüentemente impedindo participantes de alcançarem a solução dos problemas. Segundo ele, muitos desses casos parecem estar relacionados com disposições partitivas em relação à divisão.

Assim como os sujeitos da pesquisa de Brown et al. (2002), diante de questões como *“Qual é o resto da divisão de 3^3 x 5^2 x 7 por 15?”*, a maioria dos alunos eventualmente assimila o problema calculando o dividendo no sentido de determinar o resto, ao passo que apenas uma minoria, usando vários critérios de divisibilidade, é capaz de responder definitivamente que o resto é zero. Estas respostas pertencem à compreensão de divisibilidade e de decomposição prima.

É importante destacar que, entre os sujeitos que fazem inferências em vez de apenas calcular e mobilizam conceitos associados à divisibilidade, Campbell (2002) verificou certa propensão em ver problemas multiplicativos aditivamente. Para eles, a decomposição prima está relacionada com decompor um número em uma árvore de fatores e compreender a divisibilidade, como um assunto de fatoração em termos de isolar e remover.

Assim, os indivíduos não raciocinam sobre as fatorações e simplificam cálculos, tendo como referência os fundamentos da estrutura multiplicativa Por exemplo, concluem que o resto da divisão de 3^3 x 5^2 x 7 por 15 é $3^2 x 5 x 7$, pois *eliminam* (riscam, desprezam) os fatores comuns às decomposições em primos dos dois números em questão e decidem que aqueles que não foram eliminados, formam o resto. Aparentemente, estão subtraindo e uma compreensão imprecisa do resto pode tê-los conduzido a concluir que tal se referia àquilo que se “obtém”, depois de *eliminar*. Esta interpretação é consistente com subseqüentes tentativas para fazer uma conexão entre o divisor e o subtraendo em termos daquilo que se estava “tirando”.

Além disso, muitas respostas dos sujeitos em questões de divisibilidade caracterizaram-se pela concentração no papel da divisão. Além disso, as respostas iniciais de todos os sujeitos revelam uma tendência para associar fortemente os conceitos de divisibilidade e divisor com a ação de dividir. Também foi típico associar o conceito de múltiplo com multiplicação ou soma de parcelas repetidas.

Em linhas gerais, o autor considera todos esses fatos conseqüências de um ensino de Matemática tradicional que pouco favoreceu a reflexão sobre os processos empregados na resolução de problemas. Especificamente, no que tange ao ensino das estruturas multiplicativas, o autor observa que o ensino mais tradicional prioriza a soma de parcelas repetidas e a divisão partitiva em detrimento não só de outras idéias subjacentes à multiplicação e à divisão, como também da reversibilidade que se estabelece entre estas operações.

Hoje, muitos professores encontram-se situados de forma embaraçosa entre suas experiências como alunos da escola tradicional e as reformas de ensino. Eles estão sendo levados a entrar em um mundo diferente daquele que experimentaram, em que estão sendo redefinidas as noções do que é Matemática e do que vem a ser seu ensino. As áreas dos conteúdos e processos são integradas. Processos são entendidos como enfocando conteúdos e conteúdos entendidos com ênfase nos processos. No artigo cujo título pode ser *"Integrando conteúdos e processos na aula de Matemática"*, Teppo (2002) descreve uma atividade de sala de aula baseada nas idéias da Teoria dos Números que, de maneira bem-sucedida, integra conteúdo e processo. A autora propõe para uma turma de professores em formação uma atividade que para a introdução da Teoria dos Números por meio da investigação de modelos para números naturais que têm exatamente 2, 3, 4 ou 5 divisores. A investigação inclui o trabalho com os conceitos de fatores, divisibilidade, números primos e compostos.

A análise dos dados mostra que é possível que os estudantes e o professor envolvam-se em um processo matemático de grande extensão, incluindo organizar informação, fazer generalizações a partir de padrões numéricos, fazer e testar conjecturas e formar abstrações. Por meio desses processos, os estudantes trabalham com os conceitos de decomposição em fatores primos, divisibilidade e números primos e compostos dentro da estrutura multiplicativa subjacente. As inferências ocorrem baseadas reflexão sobre os resultados de coordenação dos processos, sublinhando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação com o processo de concepção da decomposição em fatores primos. Durante a reflexão, o indivíduo que, por exemplo, associa a divisibilidade primeiramente com a divisão, faz inferências e pode também incluir uma aplicação da relação reversa entre multiplicação e divisão.

Segundo Teppo (2002), representações verbais, escritas e simbólicas contribuem significativamente para que os estudantes as articulem e reflitam sobre as idéias discutidas. Ela assegura, ainda, que o processo de fazer generalizações a respeito dos conceitos de divisibilidade é facilitado por meio do registro das afirmações dos estudantes, tanto na forma escrita como simbólica. O uso das palavras de cada estudante fornece um registro para futuras referências, assim como para a criação de uma ligação entre a compreensão intuitiva dos estudantes da estrutura multiplicativa dos diferentes números e as afirmações algébricas mais rigorosas das formas padronizadas.

Desta forma, podemos concluir ser fundamental que as interações na sala de aula desloquem-se de um foco numérico para um algébrico, por meio dos processos de generalização e abstração. A ênfase em encontrar padrões multiplicativos desloca, então, o foco da atenção de executar cálculos particulares para descrever as operações partilhadas por muitos exemplos.

A introdução de símbolos encoraja ainda mais a mudança para um nível estrutural, pois permite que os estudantes notem padrões comuns em muitas situações. A busca de uma articulação de padrões requer dos estudantes e do professor o uso de um novo vocabulário, tal como “fator”, “divisor”, “divide” e “número primo”, em contextos significativos. Os padrões usados para constituir “multiplicativamente” diferentes categorias de números são articulados à medida que os estudantes verbalizam as operações matemáticas envolvidas. Cada vez que os estudantes testam suas declarações verbais com exemplos específicos, esta linguagem torna-se mais refinada.

É preciso, entretanto, atentar para o fato de alguns alunos responderem as questões de divisibilidade corretamente sem, contudo, compreenderem os conceitos aí envolvidos. Na verdade, as respostas podem estar baseadas em uma observação de características superficiais, em vez da coordenação dos processos necessários. O exemplo mais nítido disso ocorre quando os alunos expressam a idéia de que um número é divisível por outro número se o último estiver na decomposição em fatores primos do primeiro. Para eles, ter sucesso na tarefa apenas requer olhar. Referindo-se ao fato, Brown et al. (2002) argumentam que

> para alguém cujas ações são guiadas pela compreensão da estrutura multiplicativa, esta ação de "olhar" para a decomposição em fatores primos pode ser uma versão repleta de significado e condensada da coordenação proposta antes.(BROWN et al., 2002, p. 56).

Lamentam que as ações de boa parte dos alunos ainda sejam realizadas sem uma consciência dos mecanismos que garantem seu sucesso. Lamentamos tanto quanto eles, pois a ausência do raciocínio multiplicativo constituir-se-á em um obstáculo para a compreensão de outras questões relacionadas à Teoria dos Números, como a discussão dos restos e dos critérios de divisibilidade.

Problema

Como descrevemos inicialmente, o foco de nossa pesquisa reside na análise dos procedimentos e argumentos de alunos de 6º ano do Ensino Fundamental ao realizar as tarefas, envolvendo conceitos relacionados ao TFA. Interessa-nos identificar e analisar momentos em que os alunos realizam as generalizações dos padrões aritméticos aí envolvidos. Em outras palavras, nossa questão geral é: ***Como se dá o processo de construção dos conceitos associados ao TFA?*** Para solucioná-la, tentaremos responder às seguintes questões específicas:

- Que estratégias são adequadas para que os alunos compreendam o conceito de número primo?
- Como favorecer a compreensão da decomposição dos números em fatores primos e de seu uso na simplificação de cálculos?
- De que argumentos os alunos se valem durante o processo de significação acima? Que procedimentos adotam?
- Quais são os erros mais cometidos? Quais as causas desses erros?

- Embora não se vislumbre a representação algébrica, como ocorre a generalização dos padrões aritméticos envolvidos?

Podemos perceber que o estudo justifica-se não só pelos dados das pesquisas recentes apresentadas, que mostraram que a Teoria Elementar dos Números possui um potencial formador negligenciado em todos os segmentos de ensino, mas também pela sua preocupação com os processos de formação de significados de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos. Estas idéias construtivistas são promulgadas também pelos documentos oficiais brasileiros. De acordo com estas idéias, elaboramos uma intervenção de ensino e, para aplicá-la, freqüentamos regularmente, durante dois meses, uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental.

Resgatamos parcialmente atividades e listas de exercícios criadas por Anna Franchi, no ano de 1979, em curso desenvolvido na Escola Experimental da Lapa, São Paulo e aprimoradas no Projeto Laboratório de Matemática PUC-SP (1992). Analisamos os dados obtidos à luz da Teoria dos Campos Conceituais e organizamos as informações da seguinte maneira: no primeiro capítulo, fazemos uma síntese da Teoria dos Campos Conceituais, enfatizando, sempre que possível, o campo conceitual multiplicativo. No segundo capítulo, apresentamos nosso método e a proposta de ensino que desenvolvemos na pesquisa. O terceiro capítulo foi dedicado ao tratamento quantitativo e qualitativo dos dados coletados. Por fim, no capítulo 4, fazemos nossas considerações finais, tendo como foco principal responder cada questão específica e, em seguida, a questão geral.

Capítulo 1

QUADRO TEÓRICO

A presente pesquisa estuda aspectos relativos à compreensão dos principais conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética em uma situação concreta – a sala de aula de um sexto ano de uma escola particular da zona norte da cidade do Rio de Janeiro. Focaliza o significado da decomposição de um número em fatores primos, buscando desvelar como os alunos compreendem a decomposição na prática escolar.

Esta compreensão é vista em múltiplas dimensões, determinadas pelas relações estabelecidas no decorrer do processo de ensino-aprendizagem entre aluno e professor, aluno e aluno, mediadas pelo conteúdo matemático em jogo e pelos processos discursivos utilizados. Buscamos, em particular, captar os processos de decomposição de um número em fatores primos e os usos que os alunos fazem desta decomposição. Por exemplo, se a utilizam para, entre outros, otimizar cálculos ou efetuar cálculos mentais.

Neste capítulo, apresentamos as principais idéias do referencial teórico que fundamenta a pesquisa em relação ao problema investigado: A Teoria dos Campos Conceituais. Seu autor é Gérard Vergnaud, psicólogo francês, que a define da seguinte maneira:

> A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que se relevam das ciências e das técnicas. (VERGNAUD, 1990a, p. 135)

É importante ressaltar, entretanto, que não se trata de uma teoria simples. O próprio Vergnaud reconhece que:

> ... ela envolve a complexidade decorrente da necessidade de abarcar em uma única perspectiva teórica todo o desenvolvimento de situações progressivamente dominadas, dos conceitos e teoremas necessários para operar eficientemente nessas situações, e das palavras e símbolos que podem representar eficazmente esses conceitos e operações para os estudantes, dependendo de seus níveis cognitivos (VERGNAUD, 1994, p. 43).

Além do próprio conceito de campo conceitual, os conceitos-chave desta teoria são esquemas (a grande herança piagetiana), situação, invariantes operatórios implícitos (teorema-em-ação e conceito-em-ação) e explícitos e sua concepção de conceito, que trataremos holisticamente na seção a seguir.

1.1 A Teoria dos Campos Conceituais

Atualmente, vivemos um momento em que a crise do ensino da Matemática agrava-se. Os maus resultados dos alunos nos programas de avaliação do ensino em níveis nacional e internacional são evidências disso. Analisando a crise do ensino na França, Vergnaud (1981) afirma que há várias razões para sua existência e aponta algumas delas, que podem muito bem ser associadas à crise brasileira:

- A preparação insuficiente de reformas de ensino sucessivas e a falta de continuidade na reflexão e na experimentação que deveriam acompanhá-las.
- O excesso de formalismo que, freqüentemente, tem sido cometido na concepção e na aplicação das reformas e, em particular, na redação de manuais.
- O laço insuficiente dos programas e métodos de ensino com a análise das capacidades e condutas intelectuais das crianças. Por exemplo, não se tem levado em conta as relações entre a atividade intelectual da criança e sua atividade material sobre objetos físicos ou, ainda, as relações entre a atividade intelectual e sua experiência de situações da vida corrente.

Para resolver esta crise, Vergnaud (1981) afirma que seria necessário, entre outros aspectos, rever a formação dos professores e as pesquisas de ensino. Segundo ele, seria preciso impulsionar um grande programa de pesquisa em psicologia e didática e analisar mais completamente as finalidades do ensino da Matemática.

Ao analisar as razões e propostas expostas acima, podemos inferir que Vergnaud atribui à criança e as suas atividades sobre a realidade um papel decisivo no processo educativo e em seu desenvolvimento cognitivo. Entretanto, ele não negligencia o papel do professor. Ao contrário, o valor do professor está justamente em sua capacidade de estimular e utilizar esta atividade da criança.

Mas o aspecto mais relevante na teoria de Vergnaud, que foi decisivo para que a escolhêssemos para fundamentar esta pesquisa, é o valor que ele atribui às características específicas do conceito a ser construído pela criança, tanto no processo de construção como em seu desenvolvimento cognitivo. Tal aspecto o diferencia de Piaget. Enquanto Piaget atribui a construção de conceitos às operações lógicas gerais, Vergnaud alerta para o fato de que, no estudo do processo de conceitualização do real,

> qualquer reducionismo é perigoso na medida em que ela é específica do conteúdo e não pode ser reduzida nem às operações lógicas gerais, nem às operações puramente lingüísticas, nem à reprodução social, nem à emergência de estruturas inatas, nem, enfim, ao modelo do processamento da informação. (VERGNAUD,1983a, p. 392).

O papel das características específicas do conceito na Teoria dos Campos Conceituais é decorrente do que Vergnaud entende por conceito. Para ele, um conceito não pode ser reduzido a uma definição, sobretudo se estivermos interessados em seu ensino e em sua aprendizagem. É por meio das situações a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Na verdade, estabelece-se, uma relação dialética entre as características específicas do conceito e tais situações e problemas. Afinal, também, podemos afirmar que são justamente as características específicas do conceito a ser construído que irão orientar o trabalho do professor na escolha de situações a serem enfrentadas pela criança.

Vergnaud atribui ao conceito de situação o mesmo sentido dado pelos psicólogos[5]. Mas, além disso, ele retém duas idéias principais:

> - a idéia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceitual, e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis;
> - a idéia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (VERGNAUD,1990a, p. 150)

Em outras palavras, o conhecimento constitui-se e desenvolve-se no tempo em interação adaptativa do indivíduo com as situações que ele experiencia. O funcionamento cognitivo do sujeito, frente a uma situação, repousa sobre novos aspectos relacionados a esses conhecimentos, desenvolvendo competências[6] cada vez mais complexas.

Vergnaud (1990a) esclarece ainda que a primeira idéia orienta o trabalho do pesquisador em didática para a análise das situações, sua decomposição em elementos simples e o combinatório dos possíveis, enquanto a segunda orienta-o para a procura de situações funcionais, quase sempre compostas por várias relações, cuja importância relativa está, em grande medida, associada à freqüência com que se encontram.

Estas tarefas, entretanto, não são facilmente realizáveis pelo pesquisador. Vamos analisar o exemplo fornecido por Vergnaud (1990a). Para uma criança de seis anos comprar bolos, frutas ou bombons, pôr a mesa, contar as pessoas, os lugares postos à mesa, estas são atividades favoráveis ao desenvolvimento das conceitualizações matemáticas relativas ao número, à comparação, à adição e à subtração. No entanto, na maior parte destas atividades, a vida apenas oferece um pequeno número de casos entre os problemas possíveis (Terei dinheiro suficiente para comprar isto? Para comprar isto e aquilo? Com quanto ficarei, se comprar isto? Quanto me falta?).

---

[5] Para os psicólogos, situações são circunstâncias em função das quais estão os processos cognitivos e as respostas do sujeito.

[6] Tomamos o termo competência tal como Vergnaud (1990a, p. 137) que afirma que: *"as competências são sustentadas por esquemas organizadores da conduta"*.

Além disso, nas situações habituais da vida, os dados pertinentes encontram-se imersos em um conjunto de informações pouco ou nada pertinentes, sem que as questões possíveis de se colocar sejam sempre claramente expressas. De tal maneira que o tratamento dessas situações pressupõe, tanto a identificação das questões como o reconhecimento das operações necessárias para lhes responder.

Ao final do exemplo, Vergnaud conclui que, apesar de tais dificuldades:

> (...) qualquer situação pode ser remetida para uma combinação de relações de base com dados conhecidos e desconhecidos, que correspondem a outras tantas questões possíveis. A classificação destas relações de base e dos problemas que se podem gerar a partir delas é um trabalho científico indispensável. Nenhuma ciência se constitui sem um trabalho de classificação sistemática. Esta classificação permite, por outro lado, abrir o campo dos possíveis e ultrapassar o quadro, demasiadamente limitado, das situações habituais da vida (VERGNAUD, 1990a, p. 151).

Desta forma, Vergnaud considera a possibilidade e a relevância de classificar clara e exaustivamente as situações do ponto de vista de sua estrutura conceitual. Para ele, a classificação das situações é conseqüência de considerações matemáticas e psicológicas. Como resultado de seu esforço nessa direção, podemos citar a classificação das estruturas aditivas e multiplicativas que comentaremos mais adiante.

Mas Vergnaud acrescenta que, se quisermos avaliar de forma correta a medida da função adaptativa do conhecimento, teremos de atribuir um lugar central às formas que ela assume na ação do sujeito. Assim, ele distingue dois tipos de situações:

> 1) Situações para as quais o sujeito dispõe no seu repertório, num dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
>
> 2) Situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, de hesitações, de tentativas abortadas e o conduz eventualmente a resultados satisfatórios (VERGNAUD, 1990a, p. 136).

O conceito de esquema é relevante, tanto para um tipo de situação como para outro, mas não funciona da mesma forma nos dois casos. Esquema é um conceito introduzido por Piaget, para considerar as formas de organização das habilidades sensório-motoras e das habilidades intelectuais. Vergnaud, em sua teoria, utiliza-se deste conceito. Um esquema gera ações e deve conter regras, é eficiente para toda uma série de situações e pode gerar diferentes seqüências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular.

No primeiro tipo de situações (para as quais o sujeito dispõe de repertório), observam-se condutas largamente automatizadas, organizadas por um esquema único; no segundo tipo (para as quais o sujeito não dispõe de repertório), percebe-se a recorrência sucessiva a vários esquemas que podem entrar em competição e que, para conduzir à solução procurada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados. Este processo é acompanhado necessariamente por descobertas.

Assim, o autor chama de esquema "a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações" (VERGNAUD, 1990a, p. 136; 1993, p. 2; 1994. p. 53; 1998, p. 168). Segundo ele, é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Em seu artigo *Teoria dos Campos Conceituais*, Vergnaud (1990a) oferece três exemplos que podem esclarecer o que significa "esquema" para ele. Vamos, a seguir, resumir dois deles.

1) O esquema de enumeração de uma pequena coleção por uma criança de 5 anos

Quando uma criança conta a quantidade de objetos de um determinado conjunto discreto, os elementos do conjunto podem variar, podem ser bombons, pratos sobre uma mesa, pessoas em um jardim; entretanto permanece invariante a organização para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos, dos gestos do dedo e da mão com relação à posição do objeto, enunciado coordenado da seqüência numérica (1, 2, 3...) e a cardinalização do conjunto enumerado por acentuação na tônica ou por repetição da última palavra-número pronunciada.

2) O esquema da resolução de equações da forma $ax + b = c$

Este esquema atinge rapidamente um grau elevado de disponibilidade e de confiabilidade nos alunos iniciantes na álgebra, quando a, b e c têm valores numéricos positivos e $b < c$ (o que não é, todavia, o caso quando a, b, c e $b - c$ são negativos). A seqüência de escritas efetuadas pelos alunos mostra claramente uma organização invariante, que repousa ao mesmo tempo sobre os hábitos aprendidos e sobre teoremas, como “conserva-se a igualdade quando se subtrai b de seus dois membros”, “conserva-se a igualdade quando se divide seus dois membros por a”.

Como podemos observar nos exemplos, existem conceitos implícitos nos esquemas e a criança, em uma determinada situação, pode acionar mais de um esquema simultaneamente ou de maneira seqüenciada. Quanto a isso, Vergnaud acrescenta:

> o funcionamento cognitivo de um sujeito ou de um grupo de sujeitos em uma situação dada baseia-se no repertório dos esquemas disponíveis, formados anteriormente, de cada um dos sujeitos individualmente. Ao mesmo tempo, as crianças descobrem, em situação, novos aspectos e eventuais novos esquemas (VERGNAUD, 1990a, p. 140).

Em outras palavras, as condutas em uma dada situação repousam sobre o repertório inicial de esquemas que o sujeito dispõe, e o desenvolvimento cognitivo pode ser interpretado como consistindo, sobretudo, no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas que afetam esferas muito distintas da atividade humana.

Voltando ao caso da enumeração, Vergnaud (1990a) identifica facilmente duas idéias matemáticas indispensáveis ao funcionamento do esquema: aquelas relativas à bijeção e à cardinalidade. Sem elas, não há conduta de enumeração possível. É, aliás, sobre estes dois pontos que se observam erros: certas crianças não chegam a cardinalizar, ou seja, a compreender que a última palavra-número pronunciada corresponde ao total de elementos do conjunto; outras crianças (eventualmente as mesmas) omitem elementos ou contam duas vezes o mesmo elemento. De maneira análoga, retomando o segundo exemplo, podemos afirmar que não há álgebra verdadeiramente operatória, sem o reconhecimento dos teoremas que concernem à conservação da igualdade.

Uma outra conclusão a que podemos chegar é relativa ao caráter invariante da organização da ação. A automatização é uma das manifestações mais visíveis disso. Entretanto, uma seqüência de decisões conscientes pode também compor uma organização invariante para uma classe de situações dadas. Aliás, como afirma Vergnaud (1990a, p. 138), *"a automatização não impede que o sujeito conserve o controle das condições sob as quais tal operação é apropriada ou não"*. Na verdade, para Vergnaud (1990a), todas as nossas condutas comportam uma parte automatizada e uma parte de decisão consciente.

Compreendendo um algoritmo como *"uma regra (ou um conjunto de regras) que permite, diante de todos os problemas de uma classe dada, conduzir à solução ou mostrar que não há solução"*, Vergnaud (1990a), para esclarecer a afirmativa anterior, dá como exemplo o algoritmo da adição com números decimais. A execução do algoritmo da adição é largamente automatizada para a maioria das crianças no final da escola elementar. Entretanto, elas são capazes de gerar uma seqüência de ações diferentes em função da situação: conservação ou não, zero intercalado ou não, decimal ou não.

Vê-se que os algoritmos são esquemas, ou ainda, que os esquemas são objetos de mesmo tipo lógico que os algoritmos: falta-lhes, eventualmente, a eficácia, isto é, a propriedade de conduzir de modo infalível à solução do problema em um número finito de passos. A respeito disso, Vergnaud afirma que:

> os esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efetivos. Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para uma certa situação, a experiência o conduz seja a trocar de esquema, seja a modificar seu esquema (VERGNAUD, 1990a, p. 138).

Com isso, ele descreve o processo de adaptação das estruturas cognitivas, decompondo-o, tal como Piaget, em processos de assimilação e acomodação.

Podemos reconhecer, assim, a grande influência que as idéias piagetianas sobre a aquisição do conhecimento exercem em Vergnaud. Salientamos, tal como Merlini, três idéias:

- O conhecimento dá-se pela adaptação do indivíduo ao meio, isto é, o processo de conhecimento é tratado, como um caso particular de equilibração. Assim, a apreensão de novas estruturas e novos objetos às estruturas já existentes por meio da ação do sujeito, diz respeito à assimilação, e a modificação dessas estruturas às novas características do objeto relaciona-se com a acomodação*;*
- O conhecimento, portanto, pode ser traçado pelo modo como um indivíduo atua sobre o objeto, isto é, a ação é o principal fator no processo do conhecimento;
- Os indivíduos desenvolvem diferentes tipos de conhecimento, dependendo do tipo de abstração que eles fazem. Para Piaget, conhecimento lógico-matemático dá-se com base na abstração reflexiva, isto é, consiste em isolar as propriedades e as relações das próprias operações do indivíduo". (MERLINI, 2005, p. 19-20)

Vergnaud (1993) retoma essa idéia para explicar os invariantes, que com as situações e as representações simbólicas, constituem o alicerce triangular da formação do conceito. A expressão mais global *invariante operatório* designa os conhecimentos mobilizados nos esquemas.

Os invariantes do tipo proposições são suscetíveis de ser verdadeiro ou falso. Os teoremas-em-ação são invariantes desse tipo. Para esclarecer, Vergnaud (1990) dá, como exemplo, a descoberta por crianças entre 5 e 7 anos de que não é necessário contar tudo para obter o cardinal de $A \cup B$ se já se tiver contado *A e B*. Somando-se o número de elementos de *A* com o número de elementos de *B*, obtém-se o cardinal de $A \cup B$. Pode-se exprimir este teorema-em-ação pelo seguinte teorema matemático:

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) \quad \text{desde que } A \cap B = \emptyset.$$

Vergnaud (1990) propõe ainda outro exemplo, ao lembrar o momento, quando a criança compreende que, em uma situação de comércio, se a quantidade de objetos for multiplicada por 2, 3, 4, 5,10, 100, então o preço será 2, 3, 4, 5, 10, 100 vezes maior. Para ele, pode-se exprimir este teorema-em-ação pelo seguinte teorema matemático:

$$f(nx) = nf(x)$$

sendo *f* uma função definida pela lei *f(x)* = *ax*, com $a \in Q_{+}^{*}$, que a cada número natural *x* associa o número racional não negativo *f(x)*.

Vale ressaltar, porém, que situações diferentes, envolvendo um mesmo conceito, podem apresentar graus de dificuldade variados por exigirem da criança, em sua resolução, diferentes teoremas-em-ação. Restringindo esta idéia à aprendizagem das operações, Franchi acrescenta:

> Pesquisas na área têm amplamente constatado que o tipo de operação matemática mobilizada no processo de resolução de problemas não se constitui no fator essencial de dificuldade para as crianças. Esses fatores situam-se na ordem de grandeza e na natureza dos números (naturais, racionais...), na estrutura textual, no tipo de referentes numéricos (km, km/h, m); mas situam-se essencialmente nas operações de pensamento necessárias para estabelecer relações pertinentes entre os dados do problema. Pode haver uma grande defasagem no domínio pelo aluno de duas situações envolvendo as mesmas operações matemáticas e variáveis diferentes. (FRANCHI, 2002, p. 159-160)

Os problemas abaixo, apresentados por Magina et al. (2002) nos permitem exemplificar a afirmação de Franchi:

Problema A: Márcio convidou três amigos para sua festa de aniversário. Para cada amigo, ele quer dar 5 bolas de gude. Quantas bolas de gude precisa comprar?

Problema B: Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar?

Os conceitos relevantes são os mesmos para as duas situações, mas a situação B é bem mais difícil para alunos de 7 ou 8 anos, porque implica achar o estado inicial. Tal raciocínio tem implicitamente um forte teorema matemático (ibid.): $F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$ onde *I* é o estado inicial, *F* o estado final, *T* a transformação bijetora direta e T^{-1} a transformação inversa.

Moreira e Souza (2002) discutem um exemplo que pode esclarecer ainda mais as idéias sobre teoremas-em-ação. Ele sugere que se considere a seguinte situação proposta por Vergnaud (1994, p. 49) a alunos de 13 anos: *"O consumo de farinha é, em média, 3,5 kg por semana para dez pessoas. Qual a quantidade* *de farinha necessária para cinqüenta pessoas durante 28 dias? Resposta de um aluno: 5 vezes mais pessoas, 4 vezes mais dias, 20 vezes mais farinha; logo, 3,5 x 20 = 70 kg".*

Citando Vergnaud, Moreira e Souza (2002) afirmam ser impossível dar conta desse raciocínio sem supor o seguinte teorema implícito na ação do aluno:

$$f(a_1x_1, a_2x_2) = a_1a_2 f(x_1,x_2),$$

ou seja, consumo (5 x 10, 4 x 7) = 5 x 4 consumo (10, 7)

Ainda acrescentam:

> Naturalmente, este teorema funciona porque as razões de 50 pessoas para 10 pessoas e 28 dias para 7 dias são simples e evidentes. Ele não seria tão facilmente aplicado a outros valores numéricos. Portanto, seu escopo de aplicação é limitado. Ainda assim, é um teorema que pode ser expresso, por exemplo, em palavras: O consumo é proporcional ao número de pessoas quando o número de dias é mantido constante; e é proporcional ao número de dias quando o número de pessoas é mantido constante. Pode também ser expresso pela fórmula C = k.P.D. onde C é o consumo, P o número de pessoas, D o número de dias e k o consumo por pessoa por dia. (VERGNAUD apud Moreira e Souza, 2002, p. 11)

Claramente, percebemos que as maneiras de expressar o raciocínio expostas acima são diferentes e, quanto à cognição, elas apresentam distintos níveis de dificuldade. Disso, Moreira e Souza (2002, p. 11) concluem:

> É claro que essas diferentes maneiras de expressar o mesmo raciocínio não são cognitivamente equivalentes. A segunda é mais difícil. São maneiras complementares de explicitar a mesma estrutura matemática implícita em diferentes níveis de abstração.

Os invariantes do tipo funções proposicionais não são suscetíveis de ser verdadeiro ou falso, mas constituem os "tijolos" indispensáveis à construção das proposições. Por exemplo, os conceitos de cardinal e de coleção, de estado inicial, de transformação, de relação quantificada são relevantes para a conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas. Vergnaud (1990) insiste, entretanto, que estes conceitos são raramente explicados pelos alunos, mesmo sendo construídos por eles na ação: eles são conceitos-em-ação ou categorias-em-ação.

Cabe ressaltar aqui que o tipo lógico dos conceitos-em-ação é diferente do tipo lógico dos teoremas-em-ação, sendo necessário analisar o estatuto de cada um deles. Para isso, Vergnaud (1990a, p. 143) esclarece que

> a relação entre função proposicional e proposição e, conseqüentemente, entre teorema-em-ação e conceito-em-ação, é uma relação dialética: não há proposição sem função proposicional e, não há função proposicional sem proposição. Da mesma forma, teorema-em-ação e conceito-em-ação se constroem em estreita interação.

Além disso, Vergnaud (1990a, p. 145) aponta para a possibilidade de um conceito-em-ação não ser propriamente um conceito nem um teorema-em-ação, um teorema. Segundo ele,

> conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceitualização, sem a parte escondida, constituída pelos invariantes operatórios, esta parte visível nada seria.

Reciprocamente, só podemos falar de invariantes operatórios integrados nos esquemas com o auxílio das categorias do conhecimento explícito, como proposições e funções proposicionais.

Resumindo as considerações feitas anteriormente, podemos, então, apresentar o que Vergnaud (1998, p. 173;) chama de ingredientes dos esquemas:1. *“metas e antecipações; 2. regras de ação, busca de informação e controle; 3. invariantes operatórios; e 4. possibilidades de inferência”*

A noção de esquema tal como foi apresentada por Vergnaud nas diversas fases do desenvolvimento da Teoria dos Campos Conceituais, conduz-nos a uma nova definição de conceito. Não se pode mais falar em conceito sem se mencionar as diversas situações associadas a ele e, igualmente, sem se destacar os invariantes operatórios que levam o indivíduo a reconhecer os elementos pertinentes à situação. Nesse sentido, Vergnaud define conceito como um tripleto de três conjuntos (1983a, p. 393; 1988, p. 141; 1990a, p. 145; 1993, p. 8; 1997, p. 6):

> *“C = (S, I, R) onde:*
>
> S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.
>
> O primeiro conjunto – de situações – é o referente do conceito, o segundo – de invariantes operatórios – é o significado do conceito, enquanto o terceiro – de representações simbólicas – é o significante.

Assim, para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente. Vergnaud afirma ainda que

> “não há, em geral, correspondência biunívoca entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações; não se pode, portanto, reduzir o significado nem aos significantes nem às situações”[7] (VERGNAUD, 1990a, p. 146).

Por outro lado, como foi dito, um único conceito não se refere a um só tipo de situação, e uma única situação não pode ser analisada com um só conceito. Isto nos leva a concluir que um programa de ensino abrangente não prioriza a construção de um conceito por parte da criança mas sim a construção das idéias relativas a um campo conceitual, cuja definição dada por Vergnaud é:

> Campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (...). Ou ainda: um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes mas intimamente relacionados. (VERGNAUD, 1983b, p. 127)

Um exemplo de campo conceitual é aquele cujo ensino enfatizamos neste trabalho: o campo conceitual multiplicativo, entendido por ele como:

[7] Os termos significante e significado, bem como referente, são discutidos na semiótica a partir do triângulo aristotélico, no qual referente significa o objeto (no mundo real), o significante é o nome que este objeto recebe, portanto é arbitrário, tem caráter universal e é composto por signos e sinais. Por fim, o significado é a função dada ao objeto e tem caráter pessoal.

- Um conjunto de situações que requerem multiplicação, divisão, ou combinação destas operações;

- Um conjunto de esquemas que são necessários para lidar com estas situações. Esquemas são organizações invariantes do comportamento para classes de problemas bem definidas; mas eles também podem ser evocados para resolver novos problemas;

- Um conjunto de conceitos e teoremas que tornam possível analisar as operações de pensamento necessárias: funções lineares e não-lineares, fração, razão, proporção e número racional, análise dimensional, espaço vetorial (Estes três conceitos podem estar explícitos, mas freqüentemente estão implícitos apenas nos esquemas);

- Um conjunto de formulações e simbolizações (VERGNAUD, 1994, p. 57-58)

Vergnaud (1983a) ressalta, entretanto, que o domínio de um campo conceitual não ocorre em alguns meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos, se quisermos que os alunos progressivamente os dominem. Além disso, os campos conceituais não são independentes e uns podem ser importantes para a compreensão de outros. Mas, ainda assim, Vergnaud considera útil falar em distintos campos conceituais, se eles puderem ser consistentemente descritos. Ele crê que é praticamente impossível estudar as coisas separadamente, mas, por isso mesmo, é preciso fazer recortes e é nesse sentido que os campos conceituais são unidades de estudo frutíferas para favorecer o processo de significação das situações com que os alunos são confrontados.

Por fim, com relação à representação simbólica referida no tripleto que define a formação de um conceito, Vergnaud (1981) afirma que nem ela reflete toda a realidade, nem é necessariamente homomorfa à realidade. Por exemplo, precisando representar certa quantidade de cartas, uma pessoa dispõe de pelo menos dois signos (dois significantes): os algarismos arábicos ou os algarismos romanos. Assim, temos dois significantes para representar o valor numérico (I – significado), da quantidade de cartas representadas (*S* – referente). Por outro lado, como afirmam Magina et al (2001), o signo *M* pode representar, tanto o número mil em algarismo romano como o gênero masculino.

Mas não se compreenderia o papel da representação simbólica se não se visse um reflexo da realidade, um instrumento de simulação dela e, por via de conseqüência, um meio de prever os efeitos reais e calcular as ações a fazer para provocá-las ou evitá-las.

A representação pode, com efeito, ser operacional apenas se refletir a realidade de maneira relevante e homomorfa. Mas Vergnaud garante que esta idéia geral seria excessivamente simplista se não se acrescentasse imediatamente as duas idéias seguintes:

> 1) Não existe apenas uma representação, mas múltiplas representações, de formas diferentes e de níveis diferentes; 2) Existem homomorfismos não somente entre a realidade por um lado e as representações por outro, mas também entre as diferentes formas de representação (entre representação por imagem e linguagem, entre representação geométrica e representação algébrica, etc.) (VERGNAUD, 1981, p. 201).

Clarificar a função da linguagem e dos outros significantes é, pois, um trabalho teórico e empírico indispensável. Na Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud atribui-lhes uma tripla função:

> 1) ajuda à designação, e portanto à identificação dos invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas; 2) ajuda ao raciocínio e à inferência; 3) ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, ao planejamento e ao controle da ação (VERGNAUD, 1990a, p. 159).

Mais precisamente, ainda, podemos dizer que o pensamento consiste ao mesmo tempo em operações conceituais e preconceituais sobre os significados e em operações simbólicas sobre os significantes, que formam vários sistemas simbólicos distintos e que têm laços entre eles e com o significado. Em outras palavras, as representações simbólicas favorecem as representações mentais que o indivíduo constrói dos conceitos envolvidos nas situações com que é confrontado.

Para exemplificar, adaptamos um problema de Vergnaud (1981) que discute a solução de uma situação aditiva. Suponhamos que João precisa saber que quantia deve pedir à sua mãe para ir à casa de sua avó, sabendo que ele precisa de 6 unidades monetárias (u. m.) para o trem e 2,50 u.m. para o ônibus.

João já tem 2,40 u. m. no seu porta moeda e seu pai disse que vai contribuir com 4 u. m. para essa ida.

Para Vergnaud (1981), a criança pode se servir de, pelo menos, três representações:

- Uma representação verbal que consiste em conectar em voz alta ou interiormente os enunciados verbais. Por exemplo: “É-me necessário mais... dado que... então... eu junto...eu corto... etc.”
- Uma representação do tipo “estados e transformações” que pode igualmente ser explicitada ou puramente mental, como mostramos na figura abaixo:

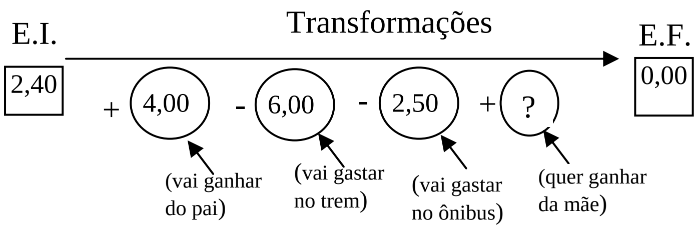


Figura 1.1:
Representação do tipo “estados e transformações”.

- Uma representação algébrica que pode do mesmo modo ser explicitada ou permanecer mental. Por exemplo (Figura 1.2:):

$$6 + 2{,}50 = 8{,}50$$
$$4 + 2{,}40 = 6{,}40$$
$$8{,}50 > 6{,}40$$

Figura 1.2:
Representação algébrica

Refletindo também sobre o papel da representação no processo de construção de conceitos ligados à estrutura aditiva, Franchi explica:

> Temos constatado a forte influência do plano de representação como agente mobilizador de um ou outro procedimento. Não é a mesma coisa, por um lado, resolver problemas provocados por meio de jogos em que o aluno deve registrar e calcular pontos ganhos e pontos perdidos em

> diferentes jogadas, expressar por meio de adições as diferentes possibilidades de repartir um certo número de objetos entre duas pessoas, lidar com situações simuladas de comprar, pagar, receber, preencher notas fiscais, etc. e, por outro lado, resolver problemas verbais, em que há uma forte interferência da linguagem natural no texto do problema. No caso da estrutura aditiva, essa interferência se manifesta de modo mais decisivo no significado das expressões verbais que estabelecem relações entre os elementos da situação descrita pelo texto (FRANCHI, 2001, p. 190).

É simultaneamente com a ajuda destas diferentes representações que a criança raciocina, passando de um plano a outro em função das necessidades e das relações que ela tem a tratar. Pensar consiste não só em passar de uma situação real à representação, mas passar de uma representação para outra, e retornar. Nesse sentido, Franchi conclui:

> Representações significativas intermediárias entre a situação problema e seu tratamento matemático, auxiliam na compreensão, assim como diagramas esquemáticos podem ter um papel no esclarecimento de certas propriedades. Devem-se, porém, escolher cuidadosamente o momento e a forma de introdução desses diagramas e avaliar criteriosamente sua efetiva contribuição para clarificação e desenvolvimento do raciocínio. Deve-se evitar que a introdução desses recursos simbólicos venha a provocar uma utilização mecânica de procedimentos não significativos, constituindo-se apenas em recurso subsidiário das práticas usualmente chamadas, na nossa tradição pedagógica, de “prova real” ou “operação inversa. (FRANCHI, 2000, p. 191)

1.2 O Campo Conceitual Multiplicativo

Como já foi visto, na Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud afirma que o enfoque mais frutífero para o entendimento do processo de construção de certo conhecimento é obtido, usando-se a estrutura referente às suas características específicas e a análise conceitual de seu domínio. Este enfoque tem produzido resultados esclarecedores para a construção dos conhecimentos ligados à aritmética elementar (estruturas aditivas e estruturas multiplicativas), à física elementar, à biologia, à álgebra elementar e à geometria, enfim, aos domínios das ciências exatas e naturais. No que concerne ao campo conceitual multiplicativo, está claro que não se pode reduzi-lo ao raciocínio proporcional, nem aos conceitos de fração ou razão, nem tampouco aos algoritmos da multiplicação e da divisão. Nesse sentido, Vergnaud define:

> O campo conceitual das estruturas multiplicativas é, simultaneamente, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, relação, número racional, múltiplo e divisor, etc. Entre os teoremas que atribuem a sua função a estes conceitos, devemos mencionar.
>
> As propriedades de isomorfismo da função linear bijetora[8]
>
> $$f(nx) = nf(x)$$
> $$f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) - n_2f(x_2)$$
>
> e a sua generalização a relações não inteiras as propriedades relativas ao coeficiente constante entre duas variáveis linearmente ligadas
>
> $$f(x) = a(x) \to x = \frac{1}{a} f(x)$$
>
> E algumas propriedades específicas da bilinearidade
>
> $$f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1n_2 f(x_1, x_2).$$
>
> (VERGNAUD, 1990, p. 147-148)

Inevitavelmente, esta definição nos remete a outra abordagem para a multiplicação e para a divisão. Ela desvaloriza a visão comum da multiplicação e da divisão, como simples operações aritméticas diferentes que deveriam ser ensinadas às crianças após terem aprendido a adição e a subtração. Propõe a abordagem simultânea das duas, uma vez que reconhece a reversibilidade entre elas. Além disso, esclarece que o ensino das estruturas multiplicativas é um processo longo, uma vez que abrange uma série de conceitos.

Ao discutirmos um campo conceitual, é importante que identifiquemos seus invariantes conceituais. O invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é, segundo Nunes et al. (2002, p. 78), *"a existência de uma relação fixa entre duas variáveis (ou duas grandezas ou quantidades"* Em outras palavras, qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si. No problema *"Uma caixa de bombons contém 25 bombons, quantos bombons há*

---

[8] Na definição oferecida por Vergnud (1990) não consta o termo bijetora. Acrescentamo-lo com o objetivo de assegurar a existência da função inversa de *f*.

em 5 caixas?" (p. 79), apresentado por esses autores para clarificar a idéia acima, as variáveis são número de caixas e número de bombons e a relação fixa entre elas é 25 bombons por caixa.

Outro aspecto fundamental em relação ao raciocínio multiplicativo diz respeito aos esquemas de ação que dão origem aos conceitos de multiplicação e divisão. Para Nunes et al. (2002, p. 42):

> ...dentre as mais importantes contribuições de Piaget para a educação matemática está sua teoria de que a compreensão das operações aritméticas tem origem nos esquemas de ação das crianças.

Os autores explicam que um esquema de ação é constituído por uma representação da ação em que apenas os aspectos essenciais da ação aparecem: não importam, por exemplo, os objetos sobre os quais a ação foi executada.

Os esquemas de ação a partir dos quais a criança começa a compreender a multiplicação e a divisão são a correspondência um-a-muitos e a distribuição eqüitativa. O problema dos bombons, que citamos acima, é um exemplo do primeiro tipo de esquema de ação. Como exemplo do segundo, Nunes et al. (2002, p. 83 propõem *"Márcio tem 15 bolas de gude. Ele vai distribuí-las igualmente entre seus três amigos. Quantas bolas de gude cada um vai ganhar?"*

Os autores citados ainda apontam que mesmo alunos dos primeiros anos, que tipicamente ainda não receberam instrução em multiplicação e divisão, resolvem corretamente problemas práticos de multiplicação e divisão, usando seus esquemas de ação. Já os problemas inversos requerem a coordenação entre os dois esquemas e, por isso, são mais complexos, podendo causar dificuldade até mesmo para alunos de quarta série. Assim, é essencial apresentarmos às crianças uma grande variedade de problemas, focalizando especialmente a coordenação entre os diferentes esquemas.

Nesse sentido, Vergnaud (1988) propõe a classificação dos problemas ligados às estruturas multiplicativas em três tipos: *isomorfismo de medidas*, *produtos de medidas* e *proporções múltiplas*. Os problemas do primeiro tipo são aqueles que envolvem uma proporção simples e direta entre duas grandezas de medidas M_1 e M_2. O problema *Joana comprou 5 bombons a R$ 0,30 cada. Quanto ela teve que pagar?* é um exemplo. As medidas M_1, M_2 e M_3 são, respectivamente, o número de bombons, o preço de cada bombom e o custo da compra de Joana. Cabe destacar ainda que os problemas que envolvem divisão por cotas[9], divisão por partição[10] e o cálculo da quarta proporcional,[11] também, são exemplos deste tipo. A figura abaixo refere-se a uma problema que envolve o cálculo da quarta proporcional.

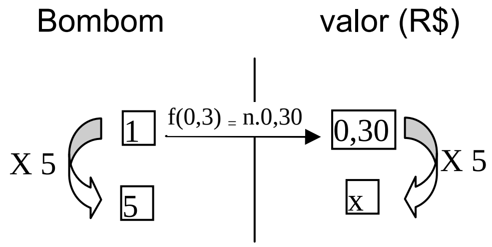


Figura 1.3:
Representação para um problema que envolve cálculo da quarta proporcional

Já os problemas do tipo *produto de medidas,* são aqueles que envolvem uma composição cartesiana de duas grandezas de medidas M_1 e M_2, dentro de uma terceira, de medida M_3. São exemplos deste tipo, problemas referentes à área, volume, produto cartesiano, trabalho e outros conceitos físicos. Em todos os casos, as unidades do produto são expressas como produtos de unidades elementares. No problema, *Qual é a área de uma sala retangular que tem 6 m de comprimento e 5 m de largura*, as grandezas de medidas M_1, M_2 e M_3 são, respectivamente, o comprimento, a largura e a área da sala. É importante notar que os problemas combinatórios também se enquadram neste tipo. Na situação-problema, *Tenho 3 calças e 4 blusas. De quantas maneiras diferentes, posso me vestir?*, M_1 é o número de calças, M_2 é o número de blusas e M_3 é o número de maneiras procurado.

[9] Em *problemas de divisão por quotas* é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas (tamanho das partes), devendo-se encontrar o número de vezes (número das partes) em que esta quantidade é dividida.
[10] Em *problemas de partição* é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que esta quantidade deve ser distribuída, devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos).
[11] Nesses problemas, três termos são conhecidos e um termo é desconhecido.

Para finalizar, os problemas do tipo *proporções múltiplas* assemelham-se aos do tipo *produto de medidas* do ponto de vista das relações aritméticas: uma grandeza de medida M_3 é proporcional a duas grandezas de medidas M_1 e M_2, diferentes e independentes. Entretanto, no tipo *proporções múltiplas*, as grandezas envolvidas têm seus próprios significados e nenhum deles pode ser reduzido ao produto de outros. O problema de regra de três composta. *Se 3 vacas, em 5 dias, produzem 30 litros de leite, qual será, sob as mesmas condições, a produção de leite de 2 vacas em 15 dias?* É um bom exemplo deste tipo.

1.3 Síntese do capítulo

Neste capítulo, apresentamos as principais idéias relativas à Teoria dos Campos Conceituais. É evidente que não esgotamos todos os elementos e contribuições desta teoria. Focalizamos aqueles que consideraremos na análise dos dados de nossa pesquisa de campo. Concluímos ser praticamente impossível estudar a aquisição de conceitos separadamente. No caso do campo conceitual multiplicativo, seria um erro estudarmos separadamente multiplicação, divisão, decomposição em fatores primos, fração, razão, números racionais, função linear e não-linear, análise dimensional e espaço vetorial; pois eles não são matematicamente independentes uns dos outros e estão simultaneamente presentes nos primeiros problemas com que os alunos se deparam.

Além disso, o papel atribuído pela Teoria dos Campos Conceituais aos invariantes operatórios e à representação simbólica no processo de construção e apropriação dos conceitos ressaltou a importância do professor levar em consideração as diferentes concepções e representações expressas pelos alunos durante tal processo. Embora algumas dessas concepções e representações sejam fracas ou parcialmente errôneas, elas podem ser valiosas para a solução de subclasses de problemas elementares e para o aparecimento posterior de soluções mais fortes e próximas da universal.

Capítulo 2

MÉTODO

Este capítulo aborda a pesquisa realizada com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular do Rio de Janeiro. Tal pesquisa pode ser dividida em três partes. Na primeira, de cunho exploratório, a partir da qual aplicamos um teste diagnóstico, que nomeamos avaliação inicial, a partir do qual pretendíamos obter informações referentes à relação que os alunos já estabeleciam com os conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, cujos processos de construção estão em questão (propriedades da multiplicação, múltiplo, divisor, números primos e compostos, decomposição de um número em fatores primos). O que já dominavam plenamente? A que estratégias recorriam para solucionar problemas? Que erros cometiam freqüentemente? De que pré-requisitos dispunham?

A segunda parte, foi de cunho intervencionista, com a implementação de uma proposta de ensino composta por sete atividades e duas avaliações intermediárias. Vale ressaltar que, embora estejamos enfocando atividades de ensino realizadas de forma seqüencial, adotamos a expressão *proposta de ensino*[12], em vez de *seqüência didática*. E, por fim, a terceira parte, corresponde à aplicação do segundo teste diagnóstico que nomeamos de avaliação final, com as mesmas questões da avaliação inicial. Ao aplicarmos este teste, nosso objetivo foi identificar as possíveis contribuições da proposta de ensino no processo de

[12] Em muitas partes deste texto, também, referimo-nos à proposta de ensino com a expressão *intervenção de ensino*.

construção de conceitos vividos pelos alunos. Que conceitos foram construídos? Que novos procedimentos passaram a adotar? Que idéias equivocadas foram desfeitas?

A elaboração da proposta de ensino contou com a participação constante da professora Anna Franchi e suas diretrizes gerais basearam-se em experiências vividas por ela em curso desenvolvido na Escola Experimental da Lapa – São Paulo, com duas séries do Ensino Fundamental em 1979. Segundo a referida professora, as atividades deste curso foram ampliadas e reavaliadas no Projeto Prática de Ensino e Estágio Supervisionado PUC-SP, realizado por ela de modo conjugado ao Projeto Laboratório de Matemática PUC-SP em 1992. Este último contou com a coordenação da Professora Tânia M. M. Campos e com a participação da Professora Maria José Ferreira da Silva.

Desse modo, nossa pesquisa integra experiências advindas de outras, desenvolvidas em diferentes tempos, em distintas realidades escolares e sob diferentes fundamentos teóricos. Buscamos reavaliar a proposta de ensino, assim produzida, à luz da teoria de Vergnaud, complementada por fundamentos decorrentes de pesquisas específicas sobre o ensino-aprendizagem da Teoria Elementar dos Números.

Neste capítulo, apresentamos o método adotado em nosso estudo, a descrição do teste diagnóstico (avaliação inicial e avaliação final), que tem a pretensão de caracterizar o perfil da turma em relação aos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética, antes e depois da realização da proposta de ensino, respectivamente. Por fim, descrevemos a proposta que teve como objetivo criar condições para que os alunos construíssem significativamente tais conceitos.

Este estudo pretende descrever e analisar à luz da Teoria dos Campos Conceituais, o processo de construção que citamos acima, admitindo que o sujeito é o próprio construtor de seu conhecimento. Quando confrontados com um problema, os alunos mobilizam e engendram uma série de esquemas mentais. Os esquemas, por sua vez, não podem ser restritos a estruturas lógicas gerais. Há conceitos matemáticos implícitos ou explícitos em sua constituição.

2.1 Método

A pesquisa desenvolvida constituiu-se em um estudo exploratório e intervencionista, com o objetivo de entender o pensamento do aluno no processo de construção das principais idéias relacionadas ao Teorema Fundamental da Aritmética, no que diz respeito aos eventuais equívocos cometidos pelos alunos, às suas estratégias e procedimentos adotados e à generalização desses elementos.

É importante destacar que o presente estudo pretende também auxiliar o professor em sua prática pedagógica, mostrando, com base nos resultados encontrados, alternativas que sejam mais eficientes no ensino do Teorema Fundamental da Aritmética e das principais idéias associadas a ele. Como subsídio, buscamos os pressupostos teóricos empregados nesse método, que estarão expostos na próxima seção.

2.2 Trajetória metodológica

Não nos foi fácil decidir como caminhar metodologicamente. A definição metodológica surgiu, tendo por base a idéia de que as pesquisas têm características concretas que lhes são próprias; que os princípios gerais metodológicos, embora úteis são referenciais amplos, genéricos, que não levam em conta essas peculiaridades. Por causa disso, é preciso adequar os métodos às circunstâncias e aos problemas (BECKER, 1993, p. 13).

Este é um estudo intervencionista que se classifica como uma pesquisa quase-experimental. Além disso, ele preserva certas características da pesquisa qualitativa. Os estudos experimentais, para Fiorentini e Lorenzato (2006, P. 104): *"caracterizam-se pela realização de experimentos que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema"*.

Experimentos compõem a parte da investigação na qual se manipulam certas variáveis e observam-se seus efeitos sobre outras. Estes autores ainda distinguem dois tipos especiais de pesquisa experimental:

a) quase-experimental: é aquele em que a variável independente é manipulada pelo pesquisador, operando com grupos de sujeitos escolhidos sem o seu controle;

b) experimental: é útil quando se deseja destacar as relações entre variáveis (previamente selecionadas); nele, as hipóteses desempenham importante papel e o pesquisador pode controlar tanto a variável independente como também a constituição dos grupos de sujeitos envolvidos na pesquisa. (FIORENTINI E LORENZATO, 2006, p. 105)

Identificamo-nos com a classificação quase-experimental. Nosso “laboratório” foi a sala de aula. O experimento consistiu na intervenção de ensino e nos testes diagnósticos. Contamos com a participação de todos os alunos da turma. Quando realizávamos atividades em equipe, a formação destas ocorria aleatoriamente. Não houve a formação rigorosa de um grupo a ser pesquisado. Embora a experiência profissional e a revisão bibliográfica tenham nos conduzido a formular possíveis explicações para as condutas dos alunos, quando confrontados com problemas que envolvem os conceitos associados ao TFA, não estabelecemos hipóteses explícitas. Acreditamos que elas estiveram implícitas nas questões de pesquisa, nos critérios que empregamos na organização das atividades e testes e no entendimento que tivemos das ações dos alunos. É, nesse sentido, que também encontramos as características da pesquisa qualitativa.

Tendência crescente no panorama educacional, a pesquisa qualitativa vem se voltando, especialmente, para o interior da escola. Nessa aproximação, procura captar seu cotidiano, extraindo dele os elementos capazes de construir novos conhecimentos a respeito desse universo (Lüdke 1984; Lüdke e André 1986; Ezpeleta e Rockwell 1986). Reconhece-se a importância de se analisar o que se passa em sala de aula, sobretudo na situação de ensino e aprendizagem, usando metodologias de cunho mais qualitativo. Espera-se que essas dêem subsídios para a construção de conhecimentos mais relevantes sobre o universo escolar, seus atores, a produção do conhecimento, e as relações que ali ocorrem, tanto com o macrossistema, como em seu interior.

Em relação à abordagem qualitativa, Triviños, 1987, apud Kimura, diferencia a pesquisa qualitativa da quantitativa, defendendo que ela:

> (...) responde a questões particulares, e que as ciências sociais não tratam da realidade quantificada. Elas trabalham com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, por isso as variáveis não podem ser medidas, porém devem ser descritas daí seu caráter exploratório e não confirmatório (TRIVIÑOS, 1987, apud KIMURA, 2005, p. 194).

Nesse sentido, Lüdke e André (1986, p. 11; 12; 13), citando Bogdan e Biklen (1982), apontam cinco características básicas que configuram uma pesquisa qualitativa em educação:

1) *"A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento".* (1986, p. 11)

Dessa forma, a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra por meio do trabalho intensivo de campo. Por exemplo, uma vez que a questão que estivemos estudando, foi a da construção dos conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, procuramos presenciar o maior número de situações em que esta se manifestou, o que nos exigiu um contato direto e constante com o dia-a-dia escolar e, mais especificamente, da sala de aula de Matemática.

2) *Os dados coletados são predominantemente descritivos. O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos; inclui transcrições de entrevistas e de depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos.* (1986, p. 12).

Todos os dados da realidade são considerados importantes. Assim, atentamos para o maior número possível de elementos presentes em cada situação, pois sabíamos que aspectos supostamente triviais poderiam ser essenciais para a melhor compreensão de nosso problema. Questões aparentemente simples, como: *"De que forma os alunos contam grãos de feijão distribuídos igualmente em pratinhos?"*. E outras desse mesmo tipo, foram sempre apresentadas e sistematicamente investigadas.

3) *A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. O interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas.* (1986, p. 12).

Por exemplo, em nossa pesquisa, tentaremos mostrar como os diferentes procedimentos adotados pelos alunos para obtenção do total de grãos de feijão distribuídos igualmente em pratinhos, interferem no processo de construção dos conceitos de múltiplo e fator.

4) *"O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador"* (1986, p. 12).

Assim, neste estudo, tentamos capturar a "perspectiva dos participantes", isto é, a maneira como os alunos concebem os conceitos que estão sendo focalizados. Acreditamos que, considerando os diferentes pontos de vista dos alunos, conseguiremos iluminar o dinamismo interno das situações. Tomamos cuidado apenas com a acuidade de tais pontos de vista ao revelá-los.

Por isso, discutimo-los abertamente com os alunos, confrontamo-los com dados das outras pesquisas que constituíram nossa revisão bibliográfica e criamos meios de checá-las, que são os complementos de cada atividade, que explicaremos nos próximos itens.

5) *"A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo"* (1986, p. 13).

Em outras palavras, não nos preocupamos em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. Concordamos com Lüdke e André (1986, p. 13), quando propõem que *"as afirmações se formam ou se consolidam basicamente a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima".*

Assim, certas características que Lüdke e André (1986, p. 19) identificam em um estudo qualitativo, também, podem ser observadas neste estudo. São elas: 1) Visar à descoberta; 2) Enfatizar a "interpretação em contexto"; 3) Buscar retratar a realidade de forma completa e profunda; 4) Usar uma variedade de fontes de informação; 5) Permitir generalizações naturalísticas, isto é,

> *generalizações que ocorrem em função do conhecimento experimental do sujeito, no momento em que este tenta associar dados encontrados no estudo com dados que são frutos das suas experiências pessoais.*

6) Procurar representar os diferentes, e, às vezes, conflitantes, pontos de vista presentes numa situação social; 7) Utilizar uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa.

Finalmente, mesmo em relação a problemas tão circunscritos como o da pesquisa aqui tratada, não há como negar a presença da dimensão política quando se trabalha em educação. Desta forma, outra idéia a nortear nossa definição metodológica foi a preocupação em se ir além da simples descrição da realidade estudada, buscando caminhos para a ação e transformação.

Embora, como discutido acima, o foco metodológico de nosso estudo seja qualitativo, não vemos incoerência alguma em quantificar os percentuais de acerto de nossos sujeitos nos instrumentos diagnósticos utilizados no estudo. Portanto, com o auxílio de um pacote estatístico, calculamos tais percentuais e aplicamos testes para medir o grau de significância dos valores encontrados.

2.3 As fases da Pesquisa

Nossa pesquisa foi organizada em três fases, sendo uma primeira aberta ou exploratória, a segunda, mais sistemática em termos de coleta de dados e a terceira, consistiu na análise e interpretação dos dados. Esclarecem ainda que estas três fases superpõem-se em diversos momentos, sendo difícil precisar as linhas que as separam. Inicialmente iremos descrevê-las.

Sendo a fase exploratória o momento em que o pesquisador define mais precisamente o objeto de estudo, os instrumentos de coleta de dados, a amostragem, a construção dos fundamentos teóricos conceituais a serem empregados, a escolha do espaço, do grupo de pesquisa e da estratégia a ser utilizada em campo, nela, efetuamos as seguintes ações:

- Elaboramos as questões fundamentais para definir e delimitar o objeto de estudo;
- Estabelecemos os contatos iniciais com a professora da turma;
- Discutimos e elaboramos o teste diagnóstico, as atividades da proposta de ensino e o cronograma de realização dos mesmos.

Na segunda fase, coletamos os dados, ou seja, propusemos o teste diagnóstico – avaliação inicial e final – e colocamos em prática a proposta de ensino.

Na terceira fase, realizamos a análise quantitativa, em que utilizamos o pacote estatístico SPSS (*Satistical Package for Social Science)* e a análise qualitativa das informações coletadas, alicerçadas nos fundamentos da Teoria dos Campos Conceituais e nas pesquisas de Campbell e Zazkis (2002).

2.4 Delineamento da pesquisa

A coleta de dados ocorreu nos meses de maio e junho de 2006. Na primeira semana de maio, aplicamos o teste diagnóstico (avaliação inicial). Embora planejada para duas aulas de 50 minutos, sua realização ocorreu em quatro aulas de 50 minutos, distribuídas igualmente entre dois dias. Um material escrito com nove questões, sendo três delas com subitens, foi proposto individualmente para os alunos da turma.

No restante do mês de maio e no mês de junho inteiro, desenvolvemos a proposta de ensino, usando, para cada atividade e seu complemento, três aulas de 50 minutos, sendo uma aula dupla de 100 minutos, em um dia, e uma aula de 50 minutos no outro. As atividades possuíam características diversas e demandavam da turma trabalho em pequenas equipes, que eram formadas aleatoriamente. Além disso, as atividades foram organizadas em três grupos, segundo seus objetivos.

Desse modo, realizamos a primeira e a segunda avaliação intermediária ao final do primeiro e do segundo grupo de atividade, respectivamente. Após a última atividade do terceiro grupo, para verificar possíveis contribuições da proposta, aplicamos novamente o teste diagnóstico (avaliação final).

Todas as aulas foram filmadas e gravadas para que se pudesse ter uma visão geral do trabalho, da contribuição de cada aluno nos processos de negociação. Ao final de cada dia de atividade, eram feitas as transcrições. Analisando e avaliando os resultados, repensávamos as atividades seguintes.

Durante todo esse período, estiveram presentes na sala, a professora de Matemática da turma e, como observadora e, ao mesmo tempo, auxiliando nas filmagens, uma estudante do oitavo período de Pedagogia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Diariamente, nós três discutíamos os aspectos positivos e negativos de cada atividade, o que deveria ser mudado e o que deveria ser mantido nas próximas atividades.

Como já citamos, criamos três grupos de atividade. O primeiro, era o grupo das atividades que favoreciam tanto a compreensão das relações *"múltiplo de"* e *"fator de"* e quanto das propriedades advindas delas. As atividades eram *o jogo de restos, a construção de retângulos* e *a tábua de Pitágoras.* No segundo grupo, formado pelo *jogo das mensagens* e pelo *jogo do telegrama*, procuramos favorecer a atribuição de significados ao produto, envolvendo três fatores e as possibilidades de decomposição dos números. As atividades visando à decomposição dos números em fatores primos, ao TFA e ao uso da decomposição para simplificar cálculos compuseram o terceiro grupo. Eram elas: *a construção da árvore e o jogo da árvore*.

Depois de cada atividade, com exceção da *tábua de Pitágoras*, do *jogo do telegrama* e do *jogo da árvore*, propúnhamos aos alunos exercícios mais formais que chamamos de complemento da atividade. Eles poderiam ser a produção individual de texto, expondo o que haviam aprendido, questões do livro didático ou listas com problemas. Além disso, foram realizados dois testes intermediários e, finda a proposta, aplicamos novamente o teste diagnóstico (avaliação final).

Cabe mencionar que não propusemos complemento para as atividades acima mencionadas, pelo fato de elas antecederem tais testes. Buscando atingir o objetivo maior da pesquisa – compreender os procedimentos que os alunos utilizavam na construção de conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética – nesses momentos, tínhamos por finalidade:

i) Obter mais um instrumento que nos permitisse avaliar o alcance das atividades;

ii) Rever a proposta, alterando, se necessário, etapas seguintes; e

iii) Favorecer o uso das representações e esquemas associados às situações experimentadas pelos alunos durante a aula.

Todas as atividades que compunham a proposta de ensino, foram construídas com a intenção de proporcionar aos alunos situações diversificadas que promovessem a mobilização de esquemas e o uso das representações subjacentes aos conceitos em questão. Preocupamo-nos sempre em levantar questionamentos para que os alunos pudessem responder ou argumentar.

A cada pergunta que faziam, devolvíamos-lhes novas perguntas. Promovíamos vários diálogos com o objetivo de permitir que trocassem idéias e se utilizassem das diversas representações e esquemas.

Assim, os alunos iam elaborando novos esquemas de ação, tendo como referência esquemas que já dominavam completamente. Apenas questionávamos e redimensionávamos os aspectos relevantes de suas experiências, isto é, incidíamos sobre os conceitos que eles haviam construído a partir da observação, manipulação de objetos e vivência direta.

Na figura a seguir, apresentamos de forma sintetizada as atividades, na ordem em que foram aplicadas e esclarecemos os momentos em que foram realizados os testes.

Atividade	Tempo de Aplicação (min)	Observações
Realização do teste diagnóstico inicial (200)		
1) Jogo de restos	Aula dupla (100)	Divisão euclidiana
Complemento da atividade 1	1 aula (50)	Tabela incompleta com registro dos dados do jogo
2) Construção de retângulos	Aula dupla (100)	Reconhecimento dos divisores de um número
Complemento da atividade 2	1 aula (50)	Exercícios do livro didático de Matemática / Produção de texto
3) Tábua de Pitágoras	Aula dupla (100)	Propriedades dos divisores e dos múltiplos de um número
Realização do 1º teste intermediário (50)		
4) Jogo de mensagem	Aula dupla (100)	Múltiplas representações para a x b x c
Complemento da atividade 4	1 aula (50)	Folha com exercícios escritos
5) Jogo do telegrama	Aula dupla (100)	Decomposição de um número
Complemento da atividade 5	1 aula (50)	Folha com exercícios escritos
Realização do 2º teste intermediário (50)		
6) Árvore	Aula dupla (100)	Decomposição de um número em fatores primos
Complemento da atividade 6	1 aula (50)	Folha com exercícios escritos
7) Jogo da árvore	Aula dupla (100)	O produto de dois fatores primos de um número é fator deste número
Realização do teste diagnóstico final (100’)		

Figura 2.1:
Quadro Geral com apresentação da intervenção de ensino

2.5 O cenário da pesquisa

Neste tipo de pesquisa, existem especificações que precisam ser bem detalhadas. Assim, apresentamos a seguir uma breve descrição da escola e das pessoas nela envolvidas.

A escola

O Centro Educacional Luiz Carlos Barbosa é uma escola particular de baixo custo, localizada em Madureira, zona norte do Rio de Janeiro. Ela se diferencia das demais escolas que possuem este perfil, por não oferecer aos alunos salas superlotadas. Além disso, estão incluídas no programa de estudo de todas as turmas, aulas de informática e natação. São 17 turmas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, distribuídas em dois turnos: manhã (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e Ensino Médio) e tarde (Educação Infantil e 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental). Os alunos têm acesso à biblioteca, sala de vídeo, teatro e quadras de esporte. As salas são amplas, arejadas e há disponibilidade de recursos didáticos para o ensino da Matemática: caixas de material dourado, escala cuisinaire, livros paradidáticos, instrumentos para construções geométricas etc.

Nossa inserção neste ambiente escolar, deu-se por ocasião de sua inauguração, em 1997, quando uma de nós estava recém formada e assumiu turmas de 5ª a 8ª séries (atualmente, 6º ao 9º anos) do Ensino Fundamental para ministrar aulas de Matemática e coordenar o trabalho dos outros professores. São 12 anos de uma convivência que permitiu não só o acompanhamento detalhado do crescimento da escola, mas também receber dela contribuições significativas para o avanço de nossos estudos.

A turma 51

A turma era formada por vinte e cinco alunos, sendo vinte meninos e cinco meninas. Entretanto, dois alunos eram faltosos e uma aluna saiu da escola no período da intervenção de ensino, o que fez com que considerássemos apenas 22 sujeitos em nossa investigação A maioria tinha 11 anos, o que denota adequação idade/série. Podemos caracterizar o grupo pelo compromisso, traduzido em um constante clima de participação, sobretudo nos debates e questionamentos durante a realização das atividades. Os alunos trabalhavam bem, ainda que de forma não muito organizada.

Graças ao longo convívio com os alunos, pois boa parte deles estuda na escola desde a Educação Infantil, foi possível traçar um quadro socioeconômico da turma, quadro esse de grande valia quando houve necessidade de se contextualizar o conhecimento matemático.

Trata-se de um grupo que não tem o poder aquisitivo para ser considerado classe média, mas também não tem acesso aos planos assistencialistas do governo. Um exemplo disso é dado pelos irmãos mais velhos de alguns alunos, que também estudam na escola e que desejam prestar o vestibular: eles não conseguem inscrever-se para os vestibulares das universidades públicas por falta de dinheiro (cerca de R$ 90,00 por instituição), nem conseguem a isenção da taxa, que é concedida aos jovens de baixa renda.

Assim, as crianças são filhas de pessoas de origem humilde, que pagam com muita dificuldade a mensalidade escolar e percebem a importância da educação para a formação de indivíduos críticos e atuantes, mas que não recebem qualquer incentivo do governo. São empregados da construção civil, empregados de empresas de transporte ou de serviços domésticos, comerciários, funcionários públicos. Moram em casas simples, levantadas, em muitos casos, pela própria família. Depoimentos pessoais à parte, é um grupo cativante.

Ainda em relação à turma, é importante registrar o critério que fundamentou sua escolha para realização da pesquisa. Desde o início da elaboração das atividades, tendo claro nosso objetivo, precisávamos de um grupo que realizasse com facilidade multiplicações e divisões, ou seja, que produzisse poucos erros de cálculo, tivesse domínio da tabuada dos números de um a dez. Afinal, como seria possível discutir, por exemplo, a reversibilidade entre estas operações a partir de igualdades matemáticas falsas? Em uma leitura breve, pode parecer que desejávamos que os alunos já dominassem as idéias cuja compreensão pretendíamos favorecer. Entretanto, não se trata disso. Como já foi dito, compreender os conceitos do campo conceitual multiplicativo é um processo muito mais amplo do que simplesmente efetuar cálculos.

Deste modo, analisamos juntamente com as professoras de Matemática das 4ª e da 5ª séries (atuais 5º e 6º anos, respectivamente) os materiais – cadernos, avaliações formais, folhas de exercício – produzidos pelos alunos desde o início de 2006 e concluímos que esta era a turma que melhor contemplava nossas necessidades. Além disso, o fato dos alunos serem pontuais e assíduos, colocou fim ao processo de escolha.

A professora e o currículo de Matemática

O currículo de Matemática segue as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. A professora possuía um planejamento anual em que distribuía entre os quatro bimestres letivos os assuntos a serem estudados com os alunos: no 1º bimestre, números, operações com números naturais e primeira parte de divisibilidade (múltiplos, divisores e critérios de divisibilidade); no 2º bimestre, segunda parte de divisibilidade (m.d.c., m.m.c. e números primos) e primeira parte de números racionais na forma de fração (frações equivalentes e operações); no 3º bimestre, segunda parte de números racionais na forma de fração (potenciação e radiciação) e números racionais e sua representação decimal. Finalmente, para o 4º bimestre, estava planejado o estudo das figuras geométricas, comprimentos, áreas e volumes.

Desejamos aplicar a proposta no período em que estava planejado o ensino de Divisibilidade, ou seja, nos meses de abril e maio de 2006. Entretanto, no mês de abril, ainda estávamos concluindo nossos encontros e discussões a respeito das atividades. Foi preciso propor à professora que alterasse seu planejamento, pois não faria sentido para esta pesquisa aplicar a proposta depois que a turma tivesse tido aulas formais sobre o assunto. A professora aceitou imediatamente nossa sugestão de antecipar para o mês de abril o estudo de números racionais e sua representação decimal e, assim, pudemos aplicar a proposta nos meses de maio e junho, sem prejudicar o seu planejamento.

É importante destacar as contribuições dessa professora para o estudo. Formada, inicialmente, em contabilidade e tendo concluído a Licenciatura em Matemática, tempos depois de atuar em outro ramo, a professora demonstra interesse na formação continuada e, sempre que pode freqüenta cursos de extensão ou especializações oferecidos pelas universidades do Rio de Janeiro. Interessou-se logo pelo nosso estudo e contribuiu na observação e registro da conduta dos alunos durante a proposta, discutiu conosco ao final de cada dia de trabalho o alcance das atividades e sugeriu alguns complementos de atividades, como atividades do livro didático e listas de exercícios escritos.

A estudante de Pedagogia que realizou as filmagens

As filmagens foram realizadas por uma estudante do sexto período do curso de Pedagogia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, suas contribuições também foram valiosas. Embora sua experiência profissional fosse incipiente, restringindo-se a estágios supervisionados, ela nos alertava sempre quanto aos aspectos pedagógicos mais gerais, tais como: a organização dos alunos durante as atividades, os momentos em que devíamos interromper as atividades, os alunos de quem deveríamos nos aproximar para uma observação mais detalhada dos diálogos e condutas. Desse modo, sua participação, também, foi fundamental para nossa pesquisa.

2.6 Teste diagnóstico

Esta etapa teve um caráter exploratório com o objetivo de diagnosticar os conhecimentos dos alunos em relação ao campo conceitual multiplicativo, antes e após a intervenção de ensino. A partir do levantamento feito na avaliação inicial, realizamos a intervenção visando a criar condições para que os alunos redimensionassem tais conhecimentos, ou seja, generalizassem procedimentos e estratégias, superassem equívocos e simplificassem cálculos. Após a intervenção, propusemos novamente o teste diagnóstico para verificar os efeitos produzidos por ela. A análise da conduta dos alunos no desenvolvimento da proposta foi, indiscutivelmente, nosso objetivo principal.

O teste diagnóstico (avaliação inicial e avaliação final)[13], elaborado para este estudo, apresentou nove questões e foi aplicado coletivamente, com resolução individual para 25 alunos da turma. Tivemos a mortalidade de três

[13] Como explicamos no início deste capítulo, o teste diagnóstico corresponde à avaliação inicial e à avaliação final. Aplicamos o mesmo teste antes e depois da intervenção de ensino. As duas avaliações intermediárias serão apresentadas com a intervenção, no item 3.9, por terem seus objetivos e conteúdos associados aos grupos de atividades que a compõem.

sujeitos, um porque saiu da escola no meio de processo e dois porque tiveram muitas faltas ao longo da intervenção.

Assim sendo, embora esses três alunos, sempre que estavam presentes na sala de aula, participassem das atividades, eles não foram computados como sujeitos da pesquisa. Isto significa que tivemos, efetivamente, 22 sujeitos. Vale destacar apenas que, nas duas avaliações, antes de autorizarmos o começo, lemos o teste em voz alta e pausadamente para a turma. Não explicamos aos alunos o que deviam fazer nas questões, mas lemos os enunciados para eles quantas vezes foram necessárias.

Quando a avaliação inicial foi aplicada, antes da intervenção de ensino, os alunos tinham à disposição folhas de rascunho para efetuar os cálculos que julgassem necessários e os objetos mencionados no material escrito: embalagens de ovos, formas de gelo e formas para bombons e pirulitos. Na avaliação final, os mesmos materiais foram dispensados pelos alunos. Entre os diversos conceitos pertencentes ao campo conceitual multiplicativo e associados ao TFA, foram abordados:

1) Representação para produtos envolvendo três fatores[14];
2) Produção e manipulação[15] de igualdades matemáticas com base na complementaridade entre multiplicação e divisão;
3) Identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores;
4) Identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos; e
5) Uso da decomposição dos números em fatores primos para simplificar cálculos.

[14] Sabemos da Matemática formal que o produto só pode ser efetuado, por definição, entre dois fatores. O que estamos nomeando produto de três fatores, corresponde ao emprego da propriedade associativa da multiplicação.

[15] Estamos empregando a expressão *manipulação de igualdades matemáticas* para nos referirmos à obtenção de outras igualdades a partir de uma dada. Por exemplo, da igualdade *8 : 2 = 4*, podem ser obtidas as igualdades *8 : 4 = 2* e *2 x 4 = 8*.

Nessa direção, elaboramos o teste diagnóstico[16] em cinco blocos. Cada item acima corresponde a um bloco. O primeiro, que denominamos *diferentes representações para o produto* contém uma questão com dois itens, como mostra a Figura 2.2, e tem como objetivo investigar se os alunos são capazes de atribuir significados para e estabelecer correspondência entre as diferentes representações e o produto de três números. Para cada situação proposta, existem duas representações distintas: os desenhos e as igualdades matemáticas.

1) a) Agora imagine que você quer desenhar as embalagens para 5 dúzias de ovos. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho
Igualdade matemática: ___ x 2 x ___ = ___

1) b) E se você quiser desenhar 4 embalagens de bombom FERRERO. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho
Igualdade matemática: ___ x ___ x 5 = ___

Figura 2.2:
Questões do teste diagnóstico sobre representações para produtos de três números

Nos dois itens, mencionamos os materiais que disponibilizamos sobre a mesa da professora para que os alunos os manipulassem, caso necessitassem. Nossa expectativa era que eles tivessem pouca necessidade de fazer isso, bastando-lhes observá-los a certa distância. Entretanto, todos queriam ter em mãos as formas e as embalagens. Alguns queriam pegar no material por curiosidade, outros para conferir o que fizeram inicialmente, sem a manipulação.

16 Neste texto, apresentamos as questões do teste diagnóstico na medida que são mencionadas. Para melhor visualização do layout das folhas do teste, ver anexo 1 (teste diagnóstico).

Assim, uma parte da turma manipulava o material para, então, produzir as igualdades e os desenhos solicitados nas questões. Este interesse excessivo dos alunos por manipular o material nos surpreendeu e foi a principal razão por que a duração do teste se estendeu de 100 minutos para 200 minutos, ou seja, o teste foi feito em dois dias (duas aulas duplas de 100 minutos). Julgamos corretos os desenhos dos objetos que descreviam a organização retangular das unidades que os compunham. Por exemplo, no caso da embalagem de ovo, o desenho esperado era aquele que descreve a organização retangular de seis fileiras, cada uma com duas unidades. No caso da embalagem de bombom, tratava-se de outra organização retangular, sendo cinco fileiras, cada uma com três unidades. A posição dos retângulos poderia variar em função do ângulo de observação dos alunos. Os desenhos dos retângulos deveriam ser repetidos o número de vezes que as embalagens eram citadas nos enunciados das questões.

No segundo bloco, denominado *produção e manipulação de igualdades matemáticas com base na complementaridade entre multiplicação e divisão*, apresentamos duas questões: uma com dois itens cujo objetivo era investigar a escrita de igualdades matemáticas, e a outra, com três itens, que envolvia a manipulação de duas igualdades simultaneamente. A primeira questão, é a questão *q1* que também pertence ao primeiro bloco. Nela, pedimos aos alunos que escrevessem a igualdade matemática para representar certa quantidade de cada objeto manipulado. Na segunda questão, eles deviam completar um texto que descreve duas operações matemáticas seguidas (Figura 2.3).

9) Resolva a questão abaixo:

a) Dividi 50 por 5. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a __________.

Agora observe atentamente o que você fez e, em seguida, complete os outros itens.

Não deixe de explicar o que você fez ou pensou para completar:

b) Dividi _________ por 3. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 8.

Explicação:

c) Dividi 36 por ____________. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 2.

Explicação:

Figura 2.3:
Questões do teste diagnóstico associadas às igualdades matemáticas e à reversibilidade entre multiplicação e divisão

Nos textos de cada item, algum termo é desconhecido e deve ser identificado. Para resolver q9a, basta que o aluno realize as operações na ordem em que são enunciadas. O último resultado é o valor procurado. Assim, nossa expectativa era que os alunos não sentissem maiores dificuldades ao solucioná-la, o que foi confirmado pelos índices de acertos, tanto na avaliação inicial como na avaliação final.

Já os termos desconhecidos (*q9b e q9c*) poderiam ser obtidos por meio da escrita de igualdades matemáticas e da aplicação de conhecimentos da complementaridade entre multiplicação e divisão. Por exemplo, para resolver q9b, o aluno deveria escrever $a : 3 = b$ e $b : 2 = 8$. Manipulando a última igualdade, obteria $b = 8 \times 2 = 16$ e, substituindo b na primeira igualdade, identificaria $a = 16 \times 3 = 48$. Boa parte dos alunos, entretanto, não adotou este procedimento e recorreu às tentativas e estimativas. Pudemos percebê-lo apenas em algumas soluções apresentadas na avaliação final.

As questões do terceiro bloco estão relacionadas à *identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores*, por isso ele recebe este nome. Na Figura 2.4, temos as três questões que o compõem.

3) João multiplicou dois números naturais e encontrou 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

______x ______= 36 ou _____x______ = 36 ou ______x______ = 36

ou

______x ______= 36 ou _____x_____ = 36

4) Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3 x 5 = 15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

5) O número 7 possui quantos fatores? Quais são eles?

Figura 2.4:
Questões do teste diagnóstico associadas à decomposição em fatores

Na primeira, foi solicitado dos alunos esgotar todas as possibilidades de decompor um número em um produto de dois fatores. Na segunda e na terceira questão, propusemos o reconhecimento dos fatores de um número composto e de um número primo, respectivamente, por meio da observação das decomposições feitas na questão anterior. Como as noções de múltiplo e fator já haviam sido estudadas nos anos anteriores, esperávamos que os alunos relembrassem estas noções, mas isto não lhes foi possível

Analogamente a esse bloco, o quarto bloco, denominado *identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos*, teve objetivos semelhantes. Mas, nele procuramos enfatizar o conceito de números primos e a obtenção de fatores primos. De acordo com a Figura 2.5, são duas questões: em uma, os alunos deveriam decidir se um número era primo utilizando a definição de número primo apresentada no enunciado, na outra, foi pedida a decomposição de um número em fatores primos.

6) Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

7) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

____

Figura 2.5:
Questões do teste diagnóstico associadas à decomposição em fatores primos

Neste bloco, desejávamos saber se os alunos distinguiam números primos de compostos, quais critérios adotavam para efetuar tal distinção, se sabiam decompor um número em fatores primos, quais procedimentos conheciam para obter a decomposição, se reconheciam a igualdade entre um número e sua forma fatorada.

Na avaliação inicial, esperávamos que os alunos, pelo menos, relembrassem as técnicas de decomposição de um número em fatores primos que estudaram exaustivamente nos anos anteriores, o que não ocorreu. Além disso, tanto neste bloco como no anterior, esperávamos que o fato de certas definições serem apresentadas nos enunciados, bastando aos alunos apenas interpretá-los, conduzir-los-ia ao acerto das questões, mas isto ocorreu somente na avaliação final.

Finalmente, o quinto bloco, que chamamos *uso da decomposição em fatores primos para simplificar cálculos*, serviu como instrumento para que identificássemos como os alunos procediam para obter o quociente entre dois números escritos em suas formas fatoradas e se reconheciam e aplicavam em situação problema a complementaridade que existe entre a multiplicação e a divisão (ver Figura 2.6).

8) Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!

a) João dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por 2 x 3 x 5 e encontrou ....

b) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou ......

c) Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ......

d) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por um certo número e encontrou 55. O número é ......

Figura 2.6:
Questões do teste diagnóstico, envolvendo a simplificação de cálculos usando a decomposição em fatores primos

Um dos aspectos que nos chamou atenção, na avaliação inicial, foi com relação à obtenção do quociente. Muitos alunos multiplicavam os fatores para, em seguida, calcular o quociente entre os números que inicialmente se encontravam fatorados. Tínhamos a expectativa de que eles eliminassem fatores comuns para simplificar a obtenção do quociente, entretanto isto não aconteceu. Outra expectativa, também frustrada, foi a de que os alunos já dominassem os conceitos de multiplicação e divisão, reconhecendo a complementaridade entre ambos. Muitos, em situação problema, usaram métodos de tentativa e erro e não a aplicaram. Entretanto, como analisaremos no próximo capítulo, especificamente neste bloco, verificamos mudanças significativas nos procedimentos dos alunos. Estas discussões serão mais detalhadas no próximo capítulo.

Sintetizando as informações sobre o teste diagnóstico, na Figura 2.7, apresentamos a relação entre o número das questões e o bloco em que elas estão inseridas:

Bloco	Questões
Representação para produtos envolvendo três fatores	Q1a, q1b
Produção e manipulação de igualdades matemáticas com base na complementaridade entre multiplicação e divisão	Q1a, q1b, q9a, q9b, q9c
Identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores	Q3, q4, q5
Identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos	Q6, q7
Uso da decomposição dos números em fatores primos para simplificar cálculos.	Q8a, q8b, q8c, q8d

Figura 2.7:
Distribuição das questões do teste diagnóstico, segundo os blocos de conceitos

2.7 Critérios de correção

Para a apresentação dos critérios de correção, é fundamental esclarecer nossa concepção sobre o erro produzido pelo aluno em uma atividade ou em uma avaliação. Novas propostas curriculares, fundamentadas na concepção construtivista da aprendizagem, vêm servindo de guia para os professores dinamizarem seu ensino em sala de aula. Um dos princípios estruturantes desta nova abordagem é a concepção do erro como uma hipótese integrante da construção do conhecimento do aluno. A esse respeito, Pinto destaca que

> diferentemente das didáticas tradicionais em que o erro servia, geralmente, como indicador do fracasso do aluno, nas novas teorias ele se apresenta como um reflexo do pensamento da criança, sendo percebido como manifestação positiva de grande valor pedagógico (PINTO, 2000, p. 10).

Pesquisando especificamente sobre o erro no processo de aprendizagem da Matemática, Pinto sugere que discutir suas condições de existência poderia gerar um questionamento fecundo do trabalho desenvolvido no ensino da Matemática e sinaliza que

> o erro apresenta-se como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino a fim de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros e apropriar-se dos conhecimentos necessários à sua cidadania (PINTO, 2000, p. 11).

Pinto (2000) ainda assegura que, de uma certa forma, o erro é um conhecimento, já que ele aponta para um caminho em que o acerto se encontra implícito na situação. Dessa forma, Pinto entende que o erro é relevante para ajudar o professor a saber como as crianças aprendem. Assim, o erro apresenta-se como uma pista para organizar a aprendizagem do aluno.

Igualmente a Pinto (2000), percebemos os erros como estratégia didática e, tanto na realização das atividades da intervenção de ensino como na correção do teste diagnóstico, procuramos captá-los e compreender suas causas. Nosso critério de análise dos registros dos alunos em cada questão foi qualitativo, não atribuímos pontuação às questões. Na medida do possível, categorizamos tais registros. Ao final da proposta de ensino, aplicamos novamente o teste diagnóstico a fim de verificar as alterações qualitativas nos dados. Assim, demos aos erros o mesmo tratamento dado até então.

2.8 A proposta de ensino

A proposta foi formada por sete atividades, seus complementos e dois testes[17] intermediários. De acordo com os objetivos, as atividades e os complementos foram distribuídos em três grupos e a idéia central foi de que o complemento promovesse o uso de uma maneira de registrar os conhecimentos produzidos distinta daquela que vigorou na atividade. Além disso, acreditamos que os complementos favorecem uma reflexão coletiva sobre os principais conceitos enfatizados nas atividades. Por meio dos testes intermediários, realizamos avaliações do desempenho individual dos alunos. Eles foram aplicados após o primeiro e o segundo grupo de atividades.

[17] Estamos tratando como sinônimos os termos testes e avaliações.

Nesta seção, descrevemos as atividades, os complementos e as avaliações intermediárias que compuseram a proposta de ensino. Na descrição, incluímos nossas expectativas sobre as condutas dos alunos. Elas foram fundamentadas nas experiências que tivemos anteriormente com as atividades. Como já é sabido, a maioria das atividades não é inédita e já foi utilizada em outras pesquisas. À medida que as formos descrevendo, pontuaremos de qual estudo foram retiradas. Além disso, todos os materiais utilizados nelas estão disponíveis por ordem de uso na intervenção no anexo 2.

2.8.1 Primeiro grupo de atividades

Como já informamos, o primeiro grupo foi composto de três atividades: o jogo de restos, a construção de retângulos e a tábua de Pitágoras. As duas primeiras possuíam complemento. O objetivo geral foi favorecer a construção de conceitos a respeito das relações de multiplicidade que podem se estabelecer entre pares de números e das propriedades advindas destas relações. Consideramos a Primeira Avaliação Intermediária como a etapa final deste grupo.

<u>Atividade I: Jogo de restos</u>[18]

Objetivo geral

Por meio desta atividade, pretendíamos criar condições que favorecessem ao aluno:

- Atribuir significado aos elementos de uma situação em que se distribui certo número de objetos em grupos iguais.

Objetivos da atividade

- Reconhecer que o “tamanho” do resto está associado ao fato de o número de feijões ser ou não múltiplo do número de pratinhos e não apenas aos números de feijões ou de pratinhos isoladamente.

[18] Atividade extraída de uma das fichas (1991) e da tese de doutorado de Anna Franchi (1995). A ficha encontra-se no anexo 3a.

- Conceituar fator de um número com base nas distribuições de resto zero.
- Reconhecer, na análise da situação, que se um número for múltiplo de outro, então este último será divisor do primeiro.
- Utilizar o simbolismo associado aos conceitos de múltiplo e divisor de um número.
- Sistematizar os conhecimentos construídos no jogo e na reflexão sobre ele.
- Reconhecer que o um é o único número que é divisor de todos os números naturais.

Organização da classe

Os alunos trabalharam em dupla e, a cada cinco rodadas, uma partida era encerrada. A realização de quatro partidas foi suficiente para que se estabelecesse uma discussão informal entre nós e os alunos sobre os conceitos envolvidos no jogo.

Material utilizado

Para cada dupla

- Um recipiente com feijões;
- Um dado; e
- Um conjunto de pequenos pratos.

Para cada aluno:

- Folhas de rascunho para cálculos; e

– Fichas de registro do jogo. Na ficha, há cinco tabelas como a da Figura 2.8, a seguir, sendo uma para registro dos dados de cada partida[19].

1ª Jogada				
Jogadas	Nº de pratinhos	Nº de grãos em cada prato	Resto	Nº total de grãos
1ª				
2ª				
3ª				
4ª				
5ª				

Figura 2.8:
Tabela de registro do jogo do resto

Desenvolvimento

O reconhecimento da relação múltiplo/fator entre dois números é feito com base na análise do resto obtido na divisão do maior pelo menor. Por isso, iniciamos com a atividade de divisão euclidiana, evidenciando que, sendo dado um par de números naturais (a, b) com a maior que b, pode ocorrer: a divisão de a por b deixa resto zero – divisão exata – ou deixa resto diferente de zero. Para que os alunos pudessem verificar e analisar tais ocorrências, realizamos o *jogo de restos.*

Neste jogo, cada aluno pegará inicialmente um punhado de feijão, sem contá-los e, em seguida, jogará o dado. O número que aparecer na face superior do dado determinará o número de pratos que o aluno deverá pegar. Ele, então, deverá repartir os feijões do punhado que pegou nos pratos, respeitando duas regras:

[19] A ficha inteira encontra-se no anexo 2a.

Regra 1: Todos os pratos devem ter o mesmo número de feijões, eles devem receber o maior número possível de feijões.

Regra 2: Ganhará a partida quem ficar com o maior resto, após esta repartição.

Três tempos de aula foram usados, distribuídos em dois dias, sendo uma aula dupla de 100 minutos e uma aula com 50 minutos. No primeiro dia, foi feita a apresentação e o reconhecimento do jogo: o material usado para jogar e a ficha para registrar os resultados de cada partida, em que consistia o jogo, algumas partidas de treinamento e muitas outras "pra valer", adotando o vocabulário dos alunos. No segundo dia, quando utilizamos uma aula com 50 minutos, iniciou-se a reflexão sobre o jogo no complemento desta atividade.

Não era esperado que os alunos tivessem dificuldades na realização do jogo e, desde o início, procuramos prestar atenção:

- Aos diferentes procedimentos dos alunos na distribuição dos feijões. Eles poderiam estimar oral ou mentalmente a quantidade de feijões em cada pratinho. Ou ainda, distribuir os feijões colocando mais de um em cada prato.
- Aos erros de cálculo e aos erros na distribuição. Por exemplo, poderiam esquecer de colocar feijões em algum pratinho e colocar a mais em outros.
- Às possibilidades de os alunos construírem algumas idéias equivocadas, como, por exemplo, *"Quanto maior o número de feijões que ele pegar maior será o resto que encontrará"*, ou ainda, *"Quanto maior o número que ele tirar no dado menor será o resto"*.

É importante apenas esclarecermos desde o início que o tamanho do resto está associado ao fato do número de feijões ser ou não múltiplo do número de pratinhos e não apenas dos números de feijões ou de pratinhos isoladamente.

Complemento da atividade 1

Objetivo geral

- Generalizar as relações “múltiplo de” e “fator de” por meio da análise da situação.

Objetivo específico

- Produzir igualdades matemáticas, escrevendo que a adição do resto ao produto do número de pratos pelo número de grãos por prato, resulta no total de grãos.
- Reconhecer igualdades equivalentes à que citamos acima, como por exemplo, subtraindo-se o resto do total de grãos, obtém-se o produto de número de pratos pelo número de grãos por prato.

Organização da classe

A discussão foi coletiva, mas não houve organização das carteiras em grupo. O preenchimento da Ficha 2, que apresentamos abaixo, foi feito individualmente.

Material utilizado

- Uma cópia da Ficha 2 para cada aluno. Na Figura 2.9, apresentamos um extrato dela:[20]

Jogadas	Número de pratos	Número de grãos em cada prato	Resto	Total de grãos	Igualdade
1ª	2	17	1		
2ª	3	8	2		
3ª	4	8		35	
4ª	4		1	37	
5ª		5	3	23	
6ª		12	4	64	
7ª	6	21	5		

Figura 2.9:
Extrato da ficha usada pelos alunos no complemento do jogo do resto

[20] Esta ficha está inteiramente disponível no anexo 2b.

Trata-se de uma tabela com células incompletas. Para preenchê-la, o aluno deveria valer-se de sua experiência no jogo. A tabela inteira propõe a análise dos dados de 20 jogadas. A partir da 8ª jogada, procuramos priorizar casos de divisão exata.

Desenvolvimento

O jogo não é apenas uma diversão. Para que ele constitua um instrumento de ensino, é necessário que seja seguido por uma discussão e que, esta, por sua vez, crie condições para que os alunos adquiram e usem os simbolismos associados ao conteúdo do conhecimento abordado e confrontem esquemas de ação que devem ser mobilizados ou refutados na situação.

Durante o jogo, os alunos tiveram oportunidade de coletar dados numéricos relativos aos totais de pratos, de feijões, de feijões por pratos e de restos. Este momento consistiu na organização desses dados, para que se iniciasse o processo de generalização baseada na análise da situação. Portanto, trata-se da tabulação de dados e da análise dessa tabulação.

Após várias partidas, pedimos aos alunos que, comparando suas fichas, ajudassem-nos a preencher tabelas,[21] como a que segue na Figura 2.10:

Com 3 pratinhos			
Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobram	Total de feijões

Figura 2.10:
Modelo de tabela preenchida pelo professor na reflexão do jogo do resto

Nas tabelas, procuramos variar o número de pratinhos, isto é, de acordo com os dados, consideramos de 1 a 6 pratinhos. Levantamos questões para que os alunos tentassem respondê-las a partir da observação de cada tabela:

[21] Esta tabela está disponível no anexo 2c.

- Quais números intervêm no jogo em cada partida?
- Qual o maior resto possível?
- O que aconteceu quando o número 1 saiu no dado? Por quê?
- Se você pudesse escolher a quantidade de feijões que pegaria para começar a partida, qual você escolheria?
- Qual a menor quantidade de feijões que você deveria pegar para obter o maior resto possível?

Em seguida, organizamos com eles uma tabela apenas com dados das situações cujos restos foram zero, o que não foi difícil, uma vez os alunos que dispunham das fichas com informações sobre as várias partidas que jogaram. Assim, questionamos:

- Que número você encontra ao dividir o total de feijões pelo número de pratos?
- Que número você encontra ao dividir o total de feijões pelo número de feijões por prato?
- Para obter o total de feijões, que operação você deve realizar com o número de pratos e o número de feijões por pratos?
- Imagine que a tabela abaixo teve algumas células apagadas. Tente completá-las:

Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobram	Total de feijões
	12	0	24
5		0	35
3	9	0	
	6	0	48

Como foi visto, todas as etapas da atividade foram realizadas em dupla ou coletivamente. O conhecimento destas condições nos fez questionar seu alcance e a veracidade dos dados obtidos: Até que ponto nosso objetivo foi realmente contemplado? Os alunos davam suas respostas e faziam seus comentários influenciados pelos colegas ou tinham alguma compreensão da situação em questão?

Assim, para tentar clarificar estas dúvidas, propusemos a sistematização do jogo de restos por meio do preenchimento individual da ficha 2, mencionada na relação de materiais deste complemento.

Atividade II – Construção de retângulos[22]

Objetivo geral

Por meio desta atividade pretendemos criar condições que favoreçam o aluno a:

- Construir o repertório dos produtos (dois fatores) possíveis para o mesmo número.
- Registrar tais produtos por igualdades matemáticas e obter igualdades equivalentes à primeira. Por exemplo, de $a \times b = c$, obter $c : b = a$ ou $c : a = b$.
- Construir uma representação geométrica para os conceitos de fator/divisor, números primos e compostos.

Objetivo específico

- Reconhecer que as dimensões dos retângulos formados correspondem aos fatores do número de unidades quadradas usadas na construção dos mesmos.
- Diferenciar números primos de números compostos pela identificação do número de retângulos formados.

[22] Esta atividade foi extraída de nossa dissertação de mestrado. (Barbosa, 2002)

Organização da classe

Para aplicação desta atividade, foram mantidas as duplas da atividade anterior.

Material didático

Para cada dupla de alunos:

- Uma centena de quadrados de papel idênticos para cada dupla de alunos;
- Folhas para cálculos;
- Papel quadriculado; e
- Fichas de registro como a Ficha 3 cujo extrato é apresentado na Figura 2.11:

Número de unidades quadradas	Desenho dos retângulos construídos	Número de produtos

Figura 2.11:
Extrato da Ficha 3 preenchida pelos alunos na atividade de construção de retângulos

É importante esclarecer que a versão original desta ficha, disponível no anexo 2*d*, foi formada por 12 linhas, além da que designa cada coluna, para que, observando um número considerável de casos, os alunos pudessem identificar regularidades entre os retângulos construídos e os produtos associados a cada retângulo.

Desenvolvimento

Nesta segunda atividade, a discussão a respeito da obtenção dos divisores de um número é privilegiada, e o aluno é levado a confrontar os conceitos de números primos e números compostos. Ela foi realizada em uma aula dupla de 100 minutos e seu complemento, em uma aula de 50 minutos.

Trata-se de construir retângulos, utilizando números diferentes de unidades quadradas. As dimensões dos retângulos correspondem aos divisores da quantidade ou (número) de unidades quadradas de que o aluno dispõe.

A atividade foi realizada em duas etapas. Na primeira, solicitamos aos alunos que obtivessem os retângulos a partir da medida de área que mencionamos. Por exemplo, propusemos aos alunos que construíssem todos os retângulos possíveis com 18 quadrados, ou seja, com 18 unidades de área.

Já na segunda etapa, pedimos aos alunos que identificassem a menor quantidade de unidades quadradas que deviam tomar para obter um número de retângulos de mesma área e diferentes dimensões que estipulamos. Por exemplo, perguntamos aos alunos qual a menor quantidade de unidades quadradas que lhes permitiria construir três retângulos de mesma área e diferentes dimensões.

Imaginamos que a dificuldade dos alunos relacionada ao conceito de área poderia prejudicar o andamento desta atividade. Reconhecemos a necessidade de falar em linha e coluna, para que eles compreendessem a relação entre as dimensões do retângulo e o número de unidades quadradas utilizadas em sua construção. Pretendíamos priorizar a análise de duas situações: o número de unidades em cada linha e o número de linhas; o número de unidades em cada coluna e o número de colunas. Além disso, tínhamos por expectativa a ocorrência de alguns equívocos, caso a proposta não fosse explicada claramente aos alunos. Eram eles:

- Considerar que, mudando a posição de um mesmo retângulo, obtém-se um novo retângulo;

- Construir retângulos, usando a quantidade de unidades quadradas que solicitávamos, mas construindo apenas contornos. Como, por exemplo, com 14 unidades quadradas, construir o retângulo abaixo:

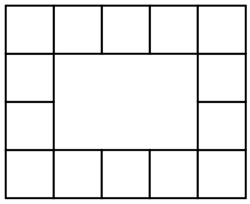


Figura 2.12:
Equívoco na construção de retângulo

- Construir retângulos usando a quantidade de quadrados que solicitávamos sobrepondo peças; e
- Considerar que quadrados não são retângulos.

Procuramos atentar, sobretudo para os procedimentos dos alunos na passagem da manipulação das unidades quadradas para o cálculo mental das dimensões dos retângulos a serem construídos.

<u>Complemento da atividade II</u>

Objetivo geral

- Explicitar as relações entre a construção de retângulos e os conceitos de múltiplo e divisor de um número.

Objetivo específico

- Empregar adequadamente as expressões “múltiplo de”, “divisor de”, “fator de”, “divisível por”, “número primo” e “número composto”.
- Obter os divisores/fatores de um número.

Material utilizado

- Livro didático[23] de Matemática adotado na turma; e
- Folha pautada para produção de texto.

Organização da classe

Em uma aula de 50 minutos, estabelecemos uma discussão coletiva sem organizar duplas ou grupos maiores e, em seguida, propusemos exercícios do livro didático e produção de texto individualmente.

Desenvolvimento

Iniciamos discutindo com a turma questões como: 1) Com que números foi possível construir mais retângulos? Por quê?; 2) Com que números só foi construir um retângulo? Por quê?; Com que números foi possível construir quadrados? Por quê?

Desejávamos também verificar se os alunos estabeleciam relações entre a construção de retângulos e o estudo dos conceitos de múltiplo e divisor de um número. Assim, propusemos os exercícios descritos na Figura 2.13, extraídos do livro didático adotado na turma. Enquanto eles faziam os exercícios, tivemos oportunidade de trocar idéias individualmente com vários alunos. Além disso, a correção coletiva do exercício permitiu que as questões apresentadas inicialmente fossem retomadas.

[23] Os exercícios do livro selecionados para esta atividade encontram-se no anexo 2e.

1) Classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta:
   a) 35 é múltiplo de 7.
   b) 180 é divisível por 40.
   c) 24 é múltiplo de 144.
   d) 252 é divisível por 12.
   e) 69 é múltiplo de 31.
   f) 510 é divisível por 34.

2) Dentre os números 144, 210, 320, 392 e 540, verifique quais são múltiplos de 36. Justifique.

3) Verifique se o número 724 é divisível por 8. Por quê?

4) Dê exemplo de um número natural:
   a) Múltiplo de 15;
   b) Divisor de 15.

Figura 2.13:
Complemento da construção de retângulos – Exercícios do livro didático

Para finalizar, solicitamos aos alunos que escrevessem um pequeno texto relatando o que aprenderam durante a construção de retângulos. Estes textos tiveram uma função fundamental na análise diagnóstica do trabalho realizado até então. As atividades propostas seriam úteis para que os objetivos do projeto fossem alcançados? Seriam suficientes? Além disso, os esforços para se fazer entender, por escrito, permitiram aos alunos mais uma vez organizar os conhecimentos que construíram.

Atividade III: Tábua de Pitágoras[24]

Tábua de Pitágoras

Objetivo geral

Por meio desta atividade, pretendíamos criar condições que favorecessem ao aluno:

[24] Atividade extraída de E.R.M.E.L. (2001).

- Lembrar o repertório multiplicativo de cada número de 1 a 10.
- Decompor um inteiro como produto de dois números.
- Conscientizar-se de que um número pode ser múltiplo/divisor de muitos outros.
- Identificar os divisores de um número.
- Explicitar a relação multiplicação/divisão. Para cada multiplicação inferir duas divisões.

Objetivo específico

- Reconhecer que a obtenção dos múltiplos de um número pode ser feita por meio de adições;
- Obter igualdades matemáticas equivalentes;
- Encontrar múltiplos e fatores de um número;
- Obter múltiplos comuns a dois números;
- Identificar critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10;
- Reconhecer as propriedades: P_1) Se *a* for múltiplo de *b*, todo múltiplo de *a* será múltiplo de *b*, mas nem todo múltiplo de *b* será múltiplo de *a* e P_2) Se *a* for fator de *b*, então, todo fator de *a* será fator de *b*, mas nem todo fator de *b* será fator de *a*.

Material usado

- Uma folha de papel, com o desenho da tábua, para cada aluno.

A tábua de Pitágoras é uma tabela de dupla entrada 11 x 11, cujas células da primeira coluna são preenchidas a partir da segunda linha, com os números naturais de um a dez e cujas células da primeira linha serão preenchidas a partir da segunda coluna com os números naturais de um a dez. As demais células a_{mn}

são preenchidas pelo produto de *(m – 1)* por *(n – 1)* com $2 \leq m, n \leq 11$. A Figura 2.14 corresponde a uma Tábua de Pitágoras[25] já preenchida:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 2.14:
Tábua de Pitágoras preenchida

- Uma grande tábua para ser preenchida coletivamente.
- Giz de cera colorido.

Organização da classe

Esta atividade foi realizada individualmente e desenvolvida em uma aula dupla de 100 minutos. Não houve formação de grupos, mas os alunos trocavam idéias entre eles e conosco.

Desenvolvimento

Realizamos esta atividade em duas etapas. A primeira consistiu em preencher e pintar partes da tábua e a segunda consistiu em refletir sobre o que foi pintado. Solicitamos aos alunos que preenchessem a linha e a coluna do 2, que chamamos de tábua de 2 e, em seguida, pintassem-nas de azul. Solicitamos

[25] Nos anexos 2f e 2g, disponibilizamos uma Tábua de Pitágoras em branco e outra preenchida.

o mesmo trabalho com as tábuas do 5 e do 8 cujos termos foram coloridos, respectivamente, de amarelo e vermelho. Finalmente, pedimos que os alunos completassem as demais tábuas.

Já, na segunda etapa, após preenchermos, com o auxílio da turma, uma grande tábua, que foi afixada à parede da sala, apresentamos as seguintes questões para que os alunos tentassem responder em dupla ou individualmente:

- Por que são aqueles números que estão na tábua de 2?
- Como poderemos obter um número da tábua de 2, conhecendo seu antecessor? E se conhecêssemos apenas seu sucessor?
- Os números que estão na tábua de 2 são pares ou ímpares? Se prolongássemos a tábua, apareceria algum número ímpar? Por quê?
- Há números que também pertencem à tábua de 5?
- Se prolongássemos as tábuas, que outros números também pertenceriam simultaneamente às tabuas de 2 e de 5?
- Quais os números da tábua de 4 que já foram escritos na tábua de 2?
- Quais os números da tábua de 2 que foram escritos na tábua de 4? E quais não foram escritos?
- Quais os números da tábua de 8 que já foram escritos na tábua de 4?
- Quais os números da tábua de 4 que foram escritos na tábua de 8? E quais não foram escritos?
- Quais os números da tábua de 8 que já foram escritos na tábua de 2?
- Quais os números da tábua de 2 que foram escritos na tábua de 8? E quais não foram escritos?
- Quais números pertenciam simultaneamente às tábuas de 2 e 4?
- Os números da tábua de 10 pertenciam simultaneamente a que tábuas?

Supomos que as dificuldades que poderiam surgir nesta atividade fossem de duas ordens: leitura de tabelas de um modo geral e capacidade de generalizar resultados. Sabíamos que o tratamento da informação, incluindo a capacidade de ler e construir tabelas, tem sido alvo de muitas pesquisas e os resultados obtidos mostram a necessidade de um trabalho específico sobre o assunto. Além disso, questionávamos se os dados fornecidos pela situação eram suficientes para que os alunos generalizassem suas conclusões.

Os fatos da a tabela ter um número finito de termos e de nem todos os múltiplos comuns a dois números, de acordo com a seqüência de instruções, fossem pintados com a mesma cor, alimentavam nossos questionamentos. Para esclarecermos este último fato, vamos dar como exemplo o número 40. Embora ele seja um múltiplo comum a 2 e a 8, ele não ficou com a mesma cor do 16 que também tem as mesmas características.

Nossa expectativa era, entretanto, que a observação de regularidades na tábua permitisse memorizar resultados ainda mal conhecidos, decompor um inteiro como produto de dois números e outras propriedades das operações de multiplicação e divisão.

Para esta atividade, não houve complemento e com a sua conclusão, aplicamos a primeira avaliação intermediária.

Primeira Avaliação Intermediária[26]

A fim de verificar de maneira mais formal, como os objetivos traçados nas atividades I, II e III estavam sendo contemplados, aplicamos em uma aula de 50 minutos o primeira avaliação intermediária. Os alunos trabalharam individualmente e, no início da aplicação, realizamos a leitura em voz alta das questões que a compunham. As três primeiras questões, como pode ser visto na Figura 2.15, enfatizam as relações “múltiplo de” e “fator de”, entre pares de números:

[26] A Primeira Avaliação Intermediária encontra-se no anexo 2h tal como foi aplicada na turma.

1) Para cada uma das igualdades abaixo, completar com números ou com as expressões “múltiplo de” ou “fator de”:
   a) Se 5 x 7 = 35, então 35 é ___________5 e 5 é __________ de 35.
   b) Se 6 x 8 = 48, então 8 é fator de _____, 6 é _______________ de 48 e 48 é ___________ de _____ e de _______.

2) Observe os números abaixo. Quais deles são múltiplos de 24?
   144 120 324 36 480

3) Observe os números abaixo. Quais deles são fatores de 24?
   12 44 36 15 9

Figura 2.15:
Questões da Primeira Avaliação Intermediária relativas às relações “múltiplo de” e “fator de” entre pares de números

Desejávamos investigar, com estas questões, quais procedimentos os alunos adotariam para verificar se um número é múltiplo ou fator de outro. Além disso, desejávamos saber se empregavam corretamente tal nomenclatura. Durante as atividades, percebemos que muitos alunos confundiam-se nas situações em que precisavam empregá-los. Falavam *múltiplo* quando deveriam falar *fator* e vice-versa.

Outro aspecto conceitual importante trabalhado no primeiro grupo de atividades, foi a enunciação do conjunto dos múltiplos e do conjunto dos fatores de um número. Realizar esta tarefa requer esquemas de ação distintos daqueles usados para verificar se um número é múltiplo/fator de outro. O fato de um aluno saber verificar, não assegura que saiba enunciar tais conjuntos. Por isso, incluímos na avaliação as questões 5 e 6 (Figura 2.16):

5) Escreva todos os fatores de 90.
   ____

6) Dê três exemplos de números que só possuem como fatores o 1 e si mesmo.
   ____

9) Escreva o menor número que tem os fatores:
   a. 1, 2, 5 e o próprio número:
   b. 1, 3, 11, 33 e o próprio número:

Figura 2.16:
Questões da Primeira Avaliação Intermediária sobre enunciação do conjunto dos fatores de um número

Como podemos observar, na questão 5 é solicitado o conjunto dos fatores de 90 e, nas questões 6 e 9, são dados os conjuntos de fatores e cabe ao aluno identificar a que números eles correspondem. Para cada item da questão 9, há apenas uma resposta. Já a questão 6 é uma questão aberta, pois, como o número diferente de 1 não foi especificado, qualquer número primo satisfaz às condições do enunciado. Assim, subjacente à enunciação do conjunto de fatores, está o conceito de número primo. Como explicaremos, na análise da intervenção, este conceito foi discutido durante o primeiro grupo de atividades sem que priorizássemos tal nomenclatura.

Finalmente, as questões 7 e 8, apresentadas na Figura 2.17, enfatizam generalizações e propriedades que podem ser estabelecidas baseadas nas relações "múltiplo de" e "fator de":

7) Pare, pense um pouco e complete com V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas.
8) Justifique aquelas que julgar falsas:
   ( ) O zero é fator de todos os números naturais.
   ( ) O um é múltiplo de todos os números naturais.
   ( ) Todo número natural é múltiplo e divisor de si mesmo.
   ( ) Sendo *a e b* dois números naturais, é certo que se *a* é múltiplo de *b*, então *b* é fator de *a*.

Justificativas:
____
____

9) Em cada item abaixo há informações sobre determinados números.
10) Quais números podem ser esses? Quando houver mais de um, escreva, pelo menos, dois:
   a. É fator de 12, mas não é fator de 6: ____________________
   b. É fator de 2 e de 5: ______________________________
   c. É múltiplo de 2 e de 5: ___________________________
   d. É múltiplo de 4 e de 8: ___________________________

Não é múltiplo de 2 nem de 3: __________________________

Figura 2.17:
Questões da Primeira Avaliação Presencial relativas às propriedades e generalizações das relações *"múltiplo de"* e *"fator de"*

Na questão 7, investigamos se o aluno reconhece que o zero e o um são, respectivamente, múltiplo e fator de qualquer número natural. Além disso, investigamos se identificam a reversibilidade entre estes dois conceitos. Na questão 8, abordamos as propriedades enfatizadas na Tábua de Pitágoras.

2.8.2 Segundo grupo de atividades

Atividade IV: Jogo de mensagem[27]

Objetivo

Por meio desta atividade, pretendíamos criar condições que favorecessem ao aluno:

- Observar a diferença entre a representação de a x b e b x a.
- Construir representações para o produto de *três números naturais*.

Material didático[28]

- Etiquetas brancas; e
- Seis cartinhas semelhantes à da figura 2.18 para cada dupla de alunos.

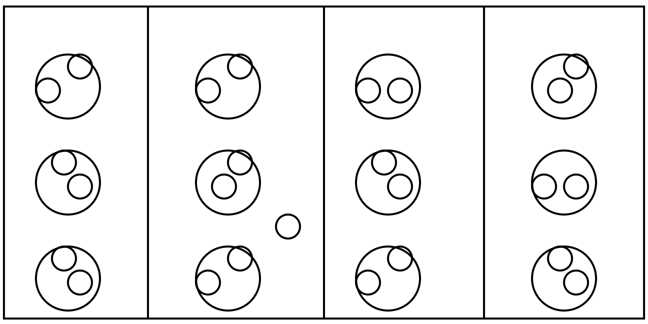


Figura 2.18:
Carta do jogo de mensagem

[27] Atividade adaptada da tese de doutorado de Anna Franchi. (1995).
[28] O modelo das etiquetas e o modelo das cartinhas estão, respectivamente, nos anexos, 2i e 2j.

A cartinha apresentada na Figura 2.18 corresponde ao produto 4 x 3 x 2. O primeiro fator corresponde ao número de partes em que a cartinha foi dividida. O segundo e o terceiro correspondem, respectivamente, ao número de conjuntos em cada parte e ao número de elementos em cada conjunto. As outras cartinhas do jogo estão no anexo 3 e correspondem aos produtos 2 x 2 x 3, 5 x 2 x 3, 3 x 2 x 2, 2 x 3 x 4 e 2 x 5 x 3.

Organização da classe

Realizamos a atividade em uma aula dupla de 100 minutos. Os alunos formaram duplas que se enfrentaram durante o jogo.

Desenvolvimento

No jogo dos restos, os alunos vivenciaram uma situação que lhes permitiu construir uma representação para o produto de dois números. Como a decomposição em fatores primos de um número pode envolver *o produto de mais de dois números naturais*, nesta atividade iremos criar condições para que os alunos construam representações para *o produto de três números* naturais. Vale lembrar apenas que destacamos as expressões *produto de três números* e *produto de mais de dois números*, pois sabemos que conceitualmente o produto está definido para dois fatores.

As cartinhas possuem representações para *produtos de três números.* Cada dupla de alunos recebe um envelope com as seis cartas e etiquetas brancas para transmissão de mensagens em linguagem matemática. Um aluno seleciona uma, constrói e passa a mensagem para que o colega adversário decifre. A cartinha apresenta a representação para o produto de três números naturais e decifrar a mensagem significa identificar qual produto está sendo representado. Em resumo, os alunos devem jogar, de acordo com as seguintes regras:

Regra 1: Jogar o dado para decidir quem vai começar: aquela dupla que obtiver o maior número deverá começar

Regra 2: A dupla que começar deverá escrever na etiqueta uma mensagem, ou seja, o *"produto de três números naturais"* que pode ser representado por uma das cartinhas para que a dupla adversária a decifre, ou seja, escolha a cartinha certa;

Regra 3: Se a escolha for correta, a dupla que a fez, ganhará a rodada. Caso contrário, a dupla que deu início à rodada escrevendo a mensagem será a vencedora;

Regra 4: As duplas alternam-se na escrita da mensagem de cada rodada; e

Regra 5: Ganhará o jogo aquela que, ao final de seis rodadas, tiver mais vitórias.

Assim, caberá aos alunos identificar quais produtos estão representados nas cartinhas.

Embora o objetivo de criar condições para que os alunos construíssem representações para o *produto de três números* tenha sido contemplado, é importante destacar que, durante a realização desta atividade, previmos a possibilidade de os alunos desviarem-se da proposta de escrever um produto e, apenas contando o total representado, escreverem qualquer operação que resulte nesse total. Além disso, previmos a discussão a respeito da comutatividade da multiplicação.

<u>Complemento da atividade IV</u>

Objetivo

- Estabelecer correspondência entre a representação pictórica (cartinhas) e a representação matemática (*produto de três números)*;
- Aplicar a idéia da representação para o *produto de três números* a um contexto diferente da cartinha, por exemplo, às embalagens de bombom e às formas apresentadas no teste diagnóstico.

Material utilizado

- Quadro de giz.
- Uma lista[29] de exercícios como a que segue (ver Figura 2.19) para cada aluno.

1) Para cada igualdade, obtenha outras duas:
   a) 3 x 5 = 15 b) 123 : 3 = 41

2) Desenhe a cartinha de cada igualdade:

   a) 3 x 5 x 2 = 30 b) 2 x 5 x 3 = 30

As cartinhas ficaram iguais ou diferentes? Por quê?

____

3) Agora pense nas embalagens de bombom. Que igualdade matemática pode expressar uma embalagem? E sete embalagens?

Figura 2.19:
Lista de exercício complementar ao jogo de mensagem

Organização da classe

Em uma aula de 50 minutos, propusemos uma lista de exercícios escritos para que os alunos os resolvessem individualmente.

Desenvolvimento

Fizemos a leitura coletiva da lista, assim que a distribuímos entre os alunos. A correção também foi feita coletivamente, convidando-os para ir ao quadro de giz expor suas soluções. Este foi um momento bastante oportuno para a troca de idéias, além, é claro, de nos oferecer um registro por escrito do entendimento dos alunos.

[29] Há uma cópia desta lista no anexo 2L.

Atividade V: Jogo do telegrama[30]

Objetivo geral

Por meio desta atividade, pretendíamos criar condições que favorecessem ao aluno:

- Identificar diferentes formas de decompor um número.

Objetivo específico

- Reconhecer que, se um número é composto, existirá mais de uma fatoração para ele.
- Admitir que, na decomposição, um fator poderá ser usado mais de uma vez.
- Perceber que apenas a ordem dos fatores não irá diferenciar uma decomposição de outra.
- Decompor um número em fatores primos.

Material didático

- 10 folhas de papel A4 para cada equipe.

Organização da classe

Os alunos distribuíram-se em cinco grupos de cinco componentes e jogaram durante uma aula dupla de 100 minutos.

Desenvolvimento

A partir do levantamento das diversas formas de decompor um número, os alunos compreenderam o produto de três ou mais fatores como mais uma destas formas de escrevê-lo. Assim, obtiveram a decomposição em fatores primos de alguns números naturais.

[30] Atividade sugerida por Anna Franchi.

Tratou-se de colocar em prática as diferentes escritas de maneira sistemática, respeitando as regras dadas pela professora. Uma folha dividida em várias partes circulou entre os alunos de uma mesma equipe. Na primeira parte, colocavam o número dito pela professora. Esta folha era dobrada na medida que cada aluno escrevia o número de uma maneira diferente da que ele encontrou. Ganhava o jogo a equipe que produzia o maior número de escritas diferentes para o mesmo número.

Inicialmente, o jogo foi realizado livremente. Entretanto, para que os alunos alcançassem os objetivos, após algumas partidas, passamos a ditar que operações deveriam estar envolvidas em cada etapa da escrita do número. Por exemplo, no início de uma rodada, dizíamos "usando apenas soma", em outra, "usando apenas a multiplicação de dois números" ou "usando a multiplicação de três números", etc. Vale lembrar que procuramos escolher um repertório variado de números para serem usados em cada rodada. As equipes trabalharam com números pequenos, grandes, pares, ímpares, primos, compostos e quadrados.

Após o jogo, procuramos discutir coletivamente questões, como: 1) Observando as fatorações dos números, como podemos agrupá-los? 2) Que números só puderam ser escritos como produto de 1 por si mesmo? 3) Além do 2, existe outro número par que só pode ser escrito como produto de 1 por si mesmo? 4) Que números ímpares possuem mais de uma fatoração? 5) Que números puderam ser decompostos em um produto de fatores iguais? 6) Houve algum número grande com poucas decomposições em fatores?

Conduzimos a discussão, tendo como referência as folhas produzidas pelos grupos enquanto jogavam e o complemento da atividade realizado pelos alunos individualmente em casa.

Complemento da atividade V

O complemento foi uma pequena folha[31] com apenas um exercício: *"Agora é a sua vez de jogar sozinho (a)! Escreva os números abaixo como produto de primos".* Em seguida, eram apresentados os números 90, 64, 144 e 945. Tanto os objetivos gerais como os específicos são os mesmos da atividade V.

[31] Esta folha encontra-se no anexo 2m.

Esta não foi uma atividade na qual os alunos apresentaram grandes dificuldades. Mas, previmos que seria necessário esclarecê-los quanto à possibilidade de um fator ou mais fatores se repetirem na decomposição de um número e quanto ao fato da ordem dos fatores não alterar a decomposição.

Esgotamos os debates no mesmo dia da realização do jogo. Na aula seguinte, aplicamos a segunda avaliação intermediária.

Segunda Avaliação Intermediária

A segunda avaliação intermediária[32] foi formada por sete questões. Todas as questões eram de múltipla escolha: os alunos deviam escolher uma alternativa correta entre quatro oferecidas. Diferentemente da primeira, que intencionamos verificar de maneira mais formal, como os objetivos traçados nas atividades anteriores estavam sendo contemplados. Nesta avaliação, investigamos também os conhecimentos que os alunos haviam adquirido sobre aspectos que seriam abordados nas duas atividades que ainda estavam por vir (terceiro grupo). Assim, nas questões 1, 2 e 5, enfocamos os objetivos do primeiro e segundo grupo de atividades:

1) Observe atentamente a igualdade 910 : 14 = 65.
   a) 910 é múltiplo de 14 e de 65.
   b) 910 é múltiplo de 14 e não é múltiplo de 65.
   c) 65 é múltiplo de 910.
   d) 65 não é fator de 910.

2) Escrevendo 290 como um produto de números primos, encontramos:
   a) 2 x 145
   b) 2 x 7 x 29
   c) 2 x 5 x 29
   d) 1 x 10 x 29

[32] A segunda avaliação intermediária correspondeu a uma ficha de trabalho de Anna Franchi. (1979). No anexo 2n ela está disponível com a mesma formatação com que foi aplicada nesta pesquisa. Ela também se encontra no anexo 3f, destinado apenas às fichas de trabalho de Ana Franchi.

5) baixo escrevemos o conjunto dos fatores dos números 27, 47, 49 e 97.

Fatores de 27: 1, 3, 9, 27
Fatores de 47: 1, 47
Fatores de 97: 1, 97
Fatores de 49: 1, 7, 49

Analisando os fatores deste número podemos dizer:
a) 49 é número primo.
b) 97 e 47 são números primos.
c) 27, 47 e 97 são números primos.
d) 47 e 49 são números primos.

Figura 2.20:
Questões da Segunda Avaliação Intermediária – Grupos 1 e 2

Na primeira questão, é necessário decidir se um número é múltiplo/fator de outro por meio da observação da igualdade matemática que os envolve. Já, nas questões 2 e 5, os alunos deviam, respectivamente, decompor um número em fatores primos e identificar um número primo, conhecendo seus fatores.

Nas quatro questões restantes (ver Figura 2.21), procuramos investigar se os alunos já eram capazes de usar a decomposição dos números em fatores primos para decidir sobre as relações de múltiplo/divisor entre eles e para realizar cálculos mais rapidamente.

3) Observe a expressão produto 175 = 5 x 5 x 7.

a) 25 é divisível por 175.
b) 25 é fator primo de 175.
c) 25 é múltiplo de 175.
d) 25 é fator de 175.

4) Os números 84 e 126 estão escritos como produto de números primos

84 = 2 x 2 x 3 x 7
126 = 2 x 3 x 3 x 7

Podemos dizer que:

a) 4 é divisor de 84 e de 126.
b) 6 é divisor de 84 e não é divisor de 126.
c) 9 é divisor de 84 e de 126.
d) 21 é divisor de 84 e de 126.

Para responder às questões 6 e 7 observe a decomposição em fatores primos dos números 294 e 210.

294 = 2 x 3 x 7 x 7
490 = 2 x 5 x 7 x 7

6) Dividindo 294 por 49 e 490 por 49, encontramos, respectivamente:

a) 6 e 10
b) 5 e 3
c) 21 e 10
d) 6 e 35

7) É certo dizer que:

a) 2 x 3 x 5 x 7 é múltiplo de 490 e de 294.
b) 3 x 5 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.
c) 2 x 3 x 5 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.
d) 2 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.

Figura 2.21:
Questões da Segunda Avaliação Intermediária – Terceiro grupo

Nas questões 3, 4 e 7, apresentamos as decomposições dos números em fatores primos e questionamos sobre seus possíveis múltiplos e fatores. Na questão 6, solicitamos dois quocientes.

Distribuímos a avaliação entre os alunos, fizemos a leitura coletiva em voz alta, e eles dispuseram de 50 minutos para fazê-la. Desde a elaboração da intervenção, entendemos que o tempo que gastariam nela, seria um dado bastante relevante. Ele é um indício do tipo de procedimento empregado na solução das questões. Caso a fizessem em pouco tempo, poderíamos inferir que se valiam das decomposições para simplificar cálculos e obter os múltiplos e fatores dos números dados. Entretanto, isto não aconteceu. Durante a aplicação e em entrevistas informais com os alunos, pudemos concluir que, para que eles desenvolvessem tais capacidades, era necessário prosseguir com as atividades e foi o que fizemos.

2.8.3. Terceiro grupo de atividades

Atividade VI: A árvore[33]

Objetivo geral

Por meio desta atividade, pretendíamos criar condições que favorecessem o aluno a:

- Decompor um número em fatores primos e compostos.
- Enunciar os fatores primos do número.
- Efetuar cálculos com números decompostos em fatores primos.

Objetivos específicos

- Descrever os fatores encontrados nos últimos ramos da árvore como fatores primos.
- Comparar 2x3x2 com 2x2x3 trabalhando a associatividade da multiplicação.
- Fazer cálculo mental sobre o suporte obtido.
- Fazer outras decomposições obtendo os fatores em outra ordem.

Material didático

- Folha de papel A4.

Organização da classe

Durante uma aula dupla de 100 minutos, os alunos trabalhariam individualmente.

[33] Atividade extraída de uma das fichas de trabalho de Anna Franchi (1992). Estas fichas estão disponíveis no anexo 3d.

Desenvolvimento

Nesta atividade, os alunos recorreram a um esquema de flechas para decompor um número em fatores primos. Na Figura 2.22, desenhamos duas árvores distintas produzidas na decomposição do número 36. Embora diferentes, ambas forneceram a decomposição em fatores primos do número, que, segundo o Teorema Fundamental da Aritmética, é única a menos da ordem dos fatores.

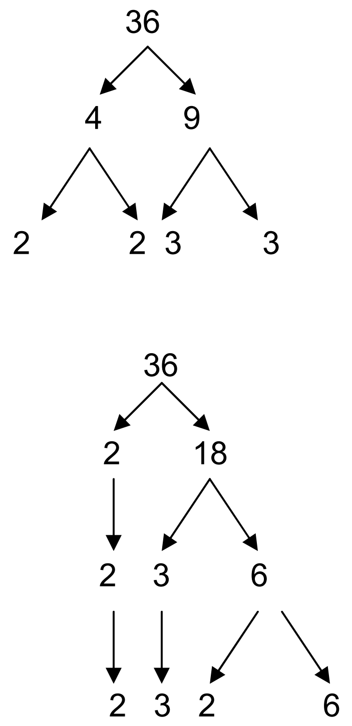


Figura 2.22:
Árvores de fatores do número 36

Cada linha da árvore fornece uma decomposição do número que se pretendeu fatorar. Por exemplo, na árvore acima, a primeira linha nos fornece 2 x 18, a segunda, 2 x 3 x 6, a terceira 2 x 3 x 2 x 3. Tomando-se elementos em cada linha ou o produto de combinações desses elementos, podemos listar todos os fatores do número, com exceção do 1. Voltando à arvore acima, na primeira linha, obtemos 2, 18, 2 x 18 = 36; na segunda, obtemos 2, 3, 6 ou 2 x 3 = 6; e, na terceira, obtemos ainda, 2, 3, 2 x 3 = 6, 2 x 2 = 4, 3 x 3 = 9, 2 x 2 x 3 = 12, 3 x 2 x 3 = 18, 2 x 3 x 2 x 3 = 36. Este procedimento, na verdade, oferece-nos outras decomposições do número e, também, permite uma reflexão a respeito da propriedade associativa da multiplicação: na segunda linha, (2 x 3) x 6 = 36 ou 2 x

(3 x 6) = 36; na terceira linha (2 x 3) x (2 x 3) = 36, (2 x 3 x 2) x 3 = 36, 2 x (3 x 2 x 3) = 36.

A construção da árvore consiste em fatorações sucessivas. Inicialmente, decompomos o número que se deseja fatorar em um produto. Em seguida, decompomos, novamente, cada fator num produto e repetimos este processo até que todos os fatores sejam primos. O primeiro passo esclarece a obtenção de árvores distintas para um mesmo número, mas o "critério de parada" (repetimos este processo até que todos os fatores sejam primos) assegura que a decomposição em fatores primos de um número é única.

No trabalho com os alunos, chamamos o registro das decomposições efetuadas na construção da árvore de "ramificação" e procuramos extrair de cada uma o maior número possível de igualdades matemáticas. Por exemplo, da ramificação que envolvia o 2 e o 18 na árvore do 36, extraímos 2 x 18 = 36, 36 : 18 = 2 e 36 : 2 = 18. A discussão deste aspecto, conduziu-nos à escrita de igualdades mais complexas, como (2 x 3 x 2) x 3 = 36, 36 : (2 x 3 x 2) = 3 e 36 : 3 = 2 x 3 x 2.

Antes de iniciarmos a atividade propriamente dita, construímos no quadro de giz com a ajuda dos alunos a árvore de alguns números, obtendo, assim, suas decomposições em fatores primos. Procuramos extrair o maior número possível de igualdades matemáticas. Afinal, a atividade foi uma competição entre os alunos que teve a seguinte regra:

Regra 1: A professora escreve no quadro um número;

Regra 2: Os alunos devem construir a árvore e obter as igualdades matemáticas; e

Regra 3: Ganha o jogo aquele que, no menor tempo, extrair da árvore o maior número possível de igualdades matemáticas.

Como o assunto (decomposição de um número em fatores primos) já foi trabalhado em séries anteriores, admitimos a possibilidade dos alunos reconhecerem o que estavam fazendo e acabarem recorrendo aos métodos mais tradicionais para esta ação, o que não aconteceu. Interpretamos este fato como uma evidência de que o processo de ensino da decomposição em fatores primos vivenciado tradicionalmente não foi significativo para eles.

Complemento da atividade VI

Objetivos gerais

- Decompor um número em fatores primos e compostos.
- Enunciar os fatores de um número.

Objetivos específicos

- Descrever os fatores encontrados nos últimos ramos da árvore como fatores primos.
- Fazer outras decomposições obtendo os fatores em outra ordem.
- Encontrar os fatores compostos.

Material utilizado

- Uma lista[34] de exercícios escritos para cada aluno em que foi solicitado construir as árvores dos números 525 e 168, listar seus fatores e escrever, pelo menos, seis igualdades matemáticas.

Organização da classe

Em uma aula de 50 minutos, os alunos fizeram individualmente a lista.

Desenvolvimento

Entregamos uma lista para cada aluno e efetuamos a leitura coletiva para evitar que dificuldades na interpretação do texto comprometessem a realização das tarefas propostas. Assim que todos concluíram, procedemos à correção e convidamos os alunos a escreverem suas soluções no quadro. Com isso,

[34] Esta lista encontra-se no anexo 2o.

pudemos discutir as diversas árvores produzidas na decomposição de um mesmo número, como elas conduzem à decomposição em fatores primos e a obtenção de igualdades matemáticas.

Atividade VII - Jogo da árvore[35]

Objetivos

Por meio desta atividade pretendemos criar condições que favoreçam o aluno a:

- Reconhecer que o produto de dois fatores primos de um número é fator deste número.
- Determinar o cociente de dois números conhecendo a decomposição em fatores primos de cada um.

Material utilizado

- Uma folha de papel A4 para cada aluno.

Organização da classe

Em uma aula de 100 minutos, os alunos trabalharam em dupla.

Desenvolvimento

Após decompor um número em fatores primos, é necessário que o aluno consiga utilizar a decomposição do número para facilitar alguns cálculos com ele. Para isso o aluno deve reconhecer as propriedades subjacentes à decomposição bem como extrair operações a partir da observação da decomposição de um número em fatores primos. Nesse sentido, o *jogo da árvore* contribuiu significativamente. Sabendo como construir a árvore de um número, cada aluno construiu árvores incompletas (ver Figura 2.23) para que sua dupla completasse.

[35] Atividade extraída da ficha de trabalho de Anna Franchi. Esta ficha está disponível no anexo 3d.

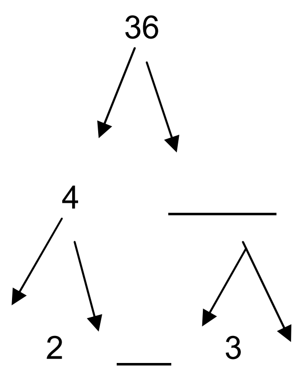


Figura 2.23:
Árvore incompleta

Esperamos que, nesta atividade, surgissem expressões como “cancelamento” ou “eliminação” de fatores. Cuidamos para que o significado ambíguo destas expressões não conduzisse a conclusões equivocadas nem restringisse toda a análise que a árvore favorece a ações mecanizadas. Procuramos explorar as igualdades matemáticas e a obtenção de igualdades equivalentes. Não julgamos necessário qualquer tipo de complemento para esta atividade.

Com o *jogo da árvore* encerramos a proposta de ensino. Depois disso, encontramo-nos com a turma uma vez mais para aplicação do teste diagnóstico final, que, como já dissemos, foi semelhante ao teste diagnóstico inicial, mas teve duração menor: uma aula dupla de 100 minutos.

2.9 Síntese do capítulo

Estávamos interessados em investigar o processo de construção dos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética, mais precisamente, queríamos identificar que condutas, concepções e procedimentos relativos a estes assuntos, os alunos relembrariam ou criariam enquanto vivenciassem a proposta de ensino.

Portanto, procuramos colocar, no teste diagnóstico, questões que perpassassem por todos esses conceitos. Além disso, nas atividades da proposta, oportunizamos situações em que os alunos estivessem engajados em resolver problemas, não apenas imitassem soluções que demonstrássemos anteriormente. Procuramos favorecer também a coordenação entre os vários esquemas de ação e as diferentes representações, que, segundo Vergnaud, dão origem ao raciocínio multiplicativo. Por meio de constantes reflexões sobre as atividades, levamos os alunos a registrar e explicar seus raciocínios. Partimos, no próximo capítulo, para a descrição e análise dos dados relativos à intervenção e aos testes diagnósticos.

Capítulo 3

ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos a análise dos dois momentos da pesquisa: o primeiro, sobre os instrumentos diagnósticos e o segundo, a intervenção de ensino.

No que concerne aos instrumentos diagnósticos – avaliação inicial, duas avaliações intermediárias e a avaliação final, analisamos tanto os aspectos quantitativos como os qualitativos. A fim de descrevermos em termos quantitativos o processo de construção dos conceitos favorecidos pela intervenção de ensino, iniciamos pela comparação do desempenho dos alunos na seqüência das avaliações. Comparamos seus desempenhos questão por questão e nas avaliações em sua totalidade. Finalmente, visando à análise qualitativa, comparamos os desempenhos dos alunos nos grupos de questões das avaliações inicial e final.

No que tange à intervenção de ensino, descrevemos e discutimos as estratégias e os esquemas de ação utilizados pelos alunos em cada atividade. Como já dissemos, organizamos as atividades em grupos: o primeiro, das atividades ligadas às relações “múltiplo”, “divisor”, “fator” e suas propriedades. O segundo, das atividades ligadas à decomposição de um número e o terceiro, das atividades que favorecem a decomposição de um número em fatores primos e o uso desta decomposição para otimizar cálculos. Dessa modo, procuramos respeitar tal organização na análise e tentamos não perder de vista a especificidade e a totalidade das manifestações da compreensão sobre o Teorema Fundamental da Aritmética e principais conceitos a ele relacionados.

Ao apresentarmos nossos resultados, não temos a pretensão de generalizá-los para além do universo pesquisado, pois temos consciência de que se trata de um estudo com um pequeno número de sujeitos. Não temos, também, a pretensão de apontar o melhor ou único caminho a ser percorrido pelos alunos para a construção dos conceitos ligados ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Sabemos que cada sujeito traça o seu caminho e que outros fatores, como as experiências anteriores com o assunto ou com as situações-problema propostas são determinantes para sua caminhada. Acreditamos que nossos resultados poderão trazer contribuições significativas para a discussão científica sobre a construção de conceitos ligados não só ao Teorema Fundamental da Aritmética como à Teoria dos Números, de modo geral.

3.1 Análise dos instrumentos diagnósticos

Antes de inicia esta primeira parte, cabe relembrar que nossas avaliações, bem como toda a intervenção de ensino foram realizadas com os 22 alunos de uma turma de 6º ano (antiga 5ª série) de uma escola particular de Madureira, zona norte do Rio de Janeiro. As avaliações inicial e final foram idênticas e realizadas, respectivamente, antes e ao final da intervenção. Já as avaliações intermediárias, foram realizadas ao final, respectivamente, do primeiro e do segundo grupo de atividades.

Ressaltamos que, para a análise quantitativa, tratamos as questões deixadas em branco pelos alunos como erradas. Elas ocorreram em um percentual muito pequeno (cerca de 1,3%)[36] e, em entrevista informal, os alunos relataram que deixaram em branco aquelas questões que realmente não sabiam resolver ou tinham muitas dúvidas. Isto nos mostra que eles se empenharam para responder às questões propostas.

[36] Num universo de 616 questões (duas avaliações com 14 questões cada para 22 alunos), apenas oito foram deixadas em branco, o que corresponde a aproximadamente 1,3% do total.

Para dar sustentabilidade aos resultados, aplicamos testes estatísticos, utilizando o pacote estatístico *Satistical Package for Social Science*, SPSS (Norusis, 1993). Foram escolhidos os testes F para comparar o desempenho médio nas avaliações e o teste de comparações múltiplas de Tukey para agrupar os desempenhos similares nas avaliações. O teste de McNemar (Siegel e Castellan, 1998) foi utilizado, na análise das diferenças na porcentagem de desempenho dos alunos entre as avaliações inicial e final e Qui-quadrado na análise da relação entre as questões. Em todos os testes, o nível de significância utilizado foi de 5% (α = 0,05).

3.1.1 Desempenho por aluno

A análise do desempenho por aluno permitiu responder à questão de pesquisa específica: "Os alunos possuíam conhecimentos prévios a respeito dos conceitos elementares relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética (medidos pelos seus desempenhos nas avaliações inicial e final)?" Além disso, mostrou de forma global o ganho na aprendizagem dos conceitos e procedimentos ligados ao Teorema Fundamental da Aritmética.

3.1.1.1 Em todas as avaliações

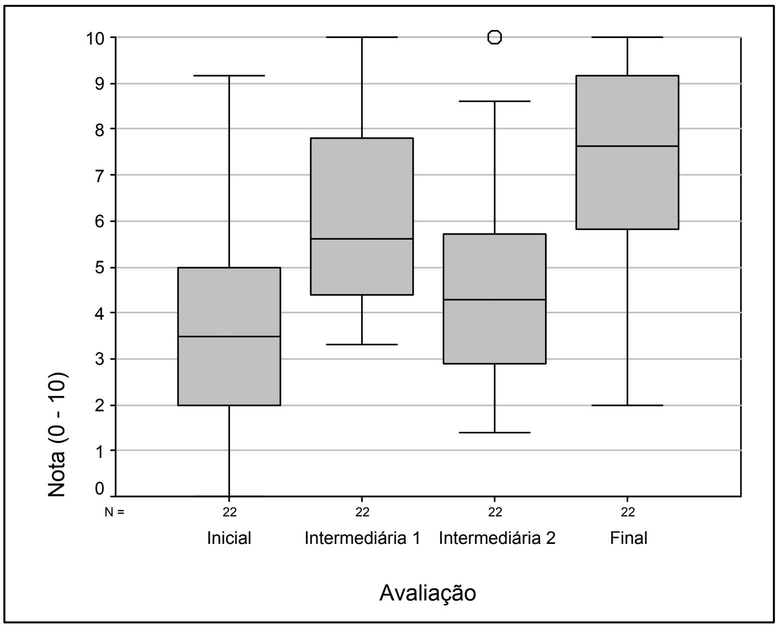
A análise foi iniciada com uma apresentação do panorama geral do desempenho dos alunos nos instrumentos diagnósticos (avaliação inicial, avaliações intermediárias e avaliação final), conforme mostram os dados da Figura 3.1.

Ao analisar a evolução do grupo, observamos que este praticamente duplicou seu desempenho médio, passando de 3,74 na avaliação inicial para 7,13 pontos na avaliação final, sendo este ganho estatisticamente significativo ($F(3,84) = 9,258$; $p = 0,000$).

Entretanto, como esperamos que aconteça em todo processo de ensino, a evolução do grupo não foi linear. O resultado do teste de comparações múltiplas de Tukey evidencia este fato Assim, não podemos dizer que de uma avaliação para outra (da inicial para a primeira intermediária, da primeira para a segunda intermediária e da segunda intermediária para a final) houve variações significativas no desempenho dos alunos, exceto entre as avaliações inicial e final,

Avaliações	N	Média (*)	Desvio padrão	Mínimo	Máximo
Inicial	22	3,74a	2,39	0,00	9,17
Intermediária 1	22	6,01 bc	2,07	1,40	10,00
Intermediária2	22	4,81ab	2,17	2,00	10,00
Final	22	7,13 c	2,40	3,30	10,00

(*) médias com letras iguais não diferem, segundo o teste de Tukey.



Pré-teste = Avaliação inicial
Inter 1 = Avaliação intermediária 1
Inter 2 =Avaliação intermediária 2
Pós-teste = Avaliação final

Figura 3.1:
Estatística das notas nas avaliações

Desta forma, foi possível perceber que o crescimento significativo ocorreu após toda a intervenção de ensino e temos razão para supor que, quanto maior o número de situações trabalhadas, estaremos criando maiores condições para que os alunos atribuam sentido aos conceitos, o que encontra respaldo na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990; 1994). Em outras palavras, nem um só conceito, nem uma situação isolada dão conta do processo de aquisição de um conhecimento.

É importante, também, que justifiquemos a queda da média da turma na segunda avaliação intermediária. No segundo grupo de atividades (grupo ao qual a avaliação pertence), os alunos demonstraram conhecimentos relativos à decomposição em fatores primos, o que nos levou a acrescentar nesta avaliação, questões voltadas para o seu uso na simplificação de cálculos e na identificação dos fatores do número decomposto. Entretanto, notamos que os esquemas envolvidos na ação de decompor, não asseguram a capacidade de usar a decomposição em outras situações como as que envolvem, por exemplo, simplificação. O insucesso dos alunos na segunda avaliação intermediária foi para nós, um alerta de que a realização do terceiro grupo de atividades era fundamental para que os objetivos de ensino fossem contemplados. Feito isso, na avaliação final, o desempenho da turma voltou a crescer.

Na próxima seção, faremos uma comparação mais detalhada entre as avaliações inicial e final.

3.1.1.2 Nas avaliações inicial e final

A seguir, apresentamos a análise de correlação e de regressão do desempenho na avaliação final em função da avaliação inicial. Em geral, quase todos os estudantes apresentaram ganhos na avaliação final. Por essa razão, a nuvem de pontos fica localizada acima da diagonal Y = X.

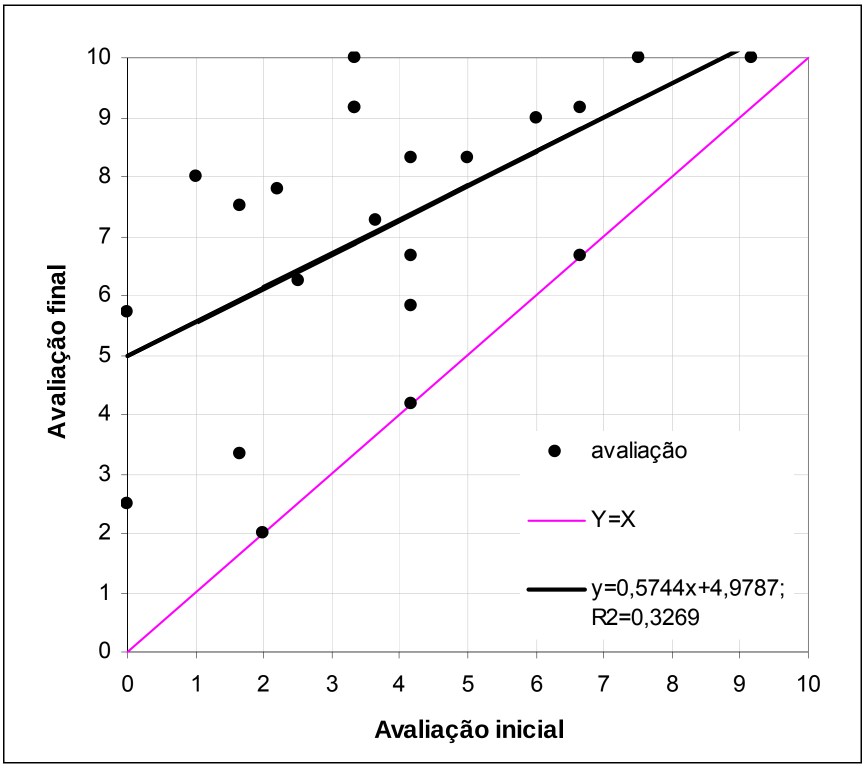


Figura 3.2:
Relação entre o desempenho na avaliação inicial e na avaliação final

Considerando o rendimento na escala de zero a dez, podemos observar que, na avaliação inicial, 16 alunos apresentaram rendimento inferior ou igual a 5, o que entendemos como um indicador de que esses alunos, embora tenham tido algum contato com os conceitos em questão nas séries anteriores, ainda não haviam se apropriado deles naquele momento. Destes, 12 elevaram seu desempenho para igual ou superior a 5 na avaliação final, indicando tal apropriação. Mesmo os alunos que aparentavam dominar tais conceitos, pois tiveram média superior a 5 na avaliação inicial, apresentaram nítido crescimento em seu desempenho.

Assim, com exceção de três alunos, cujos desempenhos se mantiveram, todos os outros aumentaram seu percentual de sucesso de uma avaliação para outra. Isto é uma evidência de que a intervenção de ensino favoreceu a aprendizagem dos conceitos para quase todos os alunos.

Ajustando o modelo linear aos dados, temos o modelo $y = 0{,}5744x + 4{,}9787$, com um coeficiente de determinação de 32,69% ($R^2 = 0{,}3269$). Este resultado reforça a efetividade da intervenção de ensino. O valor relativamente alto do coeficiente angular e do intercepto do grupo demonstrou o valor agregado da intervenção para a maioria dos alunos, cujo ganho foi substancial.

Já esperávamos por tal evolução, pois, segundo Vergnaud (1982; 1987; 1988), o professor exerce um papel fundamental, é visto como mediador; é dele a responsabilidade de fazer escolhas adequadas e favorecer o avanço dos alunos no processo de aprendizagem.

Enfim, temos condições de responder às questões apresentadas inicialmente. De fato, a intervenção favoreceu o ganho na aprendizagem, e os alunos possuíam conhecimentos prévios sobre o assunto. Considerando o desempenho como termômetro para avaliação desses conhecimentos, podemos afirmar que os alunos dominavam certos conceitos associados ao TFA. Caso contrário, não haveria qualquer acerto na avaliação inicial. Entretanto, só será possível identificar quais são estes conceitos em uma análise do desempenho por questão. Na próxima seção, apresentaremos e analisaremos o desempenho nas avaliações inicial e final por questão.

3.1.2 Desempenho geral nas avaliações inicial e final por questão

Este tipo de análise permitiu responder quais os conceitos e os procedimentos que tiveram um melhor aproveitamento, como conseqüência da intervenção de ensino. Por essa razão, cada uma das questões foi examinada, segundo o conceito e/ou procedimento a que se relaciona.

Na Figura 3.3, mostram a taxa de acerto, em porcentagem, do grupo para cada questão das avaliações inicial e final e a diferença entre estas duas taxas. Acompanham as porcentagens, os resultados do teste de McNemar, e foram destacados em negrito os valores que indicam diferenças significativas entre a avaliação inicial e a avaliação final.

Vale lembrar que a segunda questão da avaliação inicial, que se relacionava a classes de resto, não foi proposta novamente na avaliação final. Julgamos que o domínio e a manipulação das classes de resto, embora pertencentes ao mesmo campo conceitual – o das estruturas multiplicativas –, não influenciavam decisivamente a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética. Por isso que nas Figuras 4.3 e 4.4 que seguem, há um salto do item b da questão 1 (q1b) para a questão 3 (q3).

Questões	Avaliação Inicial	Avaliação Final	Ganho (%)	p-valor(*)
q1a	42,1	63,2	50,0	0,219
q1b	36,8	63,2	71,4	0,180
q3	38,1	76,2	100,0	**0,021**
q4	15,0	70,0	366,7	**0,001**
q5	28,6	85,7	200,0	**0,000**
q6	55,0	95,0	72,7	**0,008**
q7	0,0	60,0	**	**0,000**
q8abc	45,5	86,4	90,0	**0,004**
q8d	40,9	72,7	77,8	**0,016**
q9a	77,3	63,6	-17,6	0,453
q9b	42,1	57,9	37,5	0,375
q9c	40,0	65,0	62,5	0,180

(*) significativo ao nível de 5% (□ = 0,05) pelo teste de McNemar.
(**) Não foi calculado, pois a avaliação inicial foi zero.

Figura 3.3:
Taxa de acerto na avaliação inicial e final, ganho e resultado do teste de McNemar por questão.

Observando a coluna com os percentuais de desempenho na avaliação inicial, podemos inferir que os alunos possuíam conhecimentos dos conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética a que se relacionava cada questão. Assim, somente na questão 7 o percentual de acerto na avaliação inicial foi zero. Isto não foi surpreendente, uma vez que tais conceitos pertencem ao campo conceitual multiplicativo e, ainda que, de forma precária, este último vem sendo explorado nas aulas de Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Seu tratamento é recomendado nos documentos oficiais de orientação curricular e também são abordados nos livros didáticos voltados para esses anos.

Consideramos que os alunos possuíam pouco ou nenhum conhecimento sobre os conceito envolvidos em questões cujos percentuais de acerto na avaliação inicial foram inferiores a 40% e isso corresponde às questões q1b, q3, q4, q5 e q7.

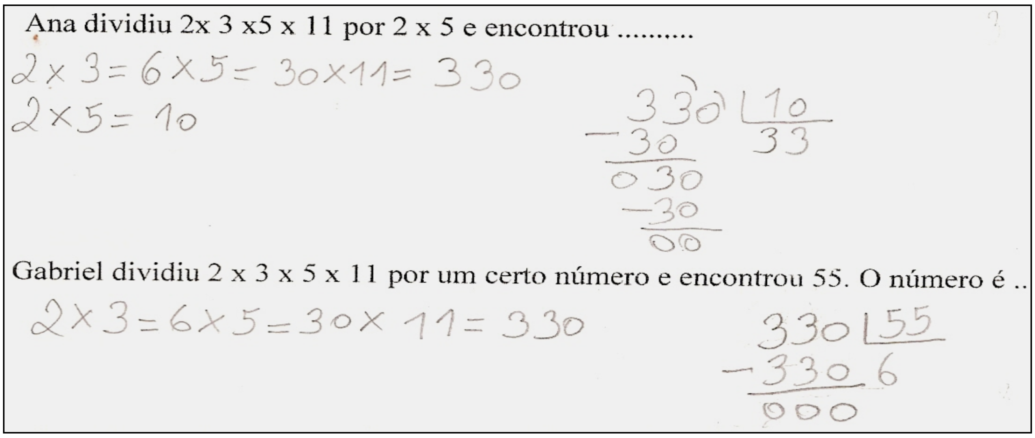
Já os conhecimentos considerados em um nível de domínio razoável são os evocados nas questões cujos percentuais de acerto na avaliação inicial ficaram entre 40% e 60%, que são q1a, q6, q8abc, q8d, q9b e q9c. Só na questão q9a, o percentual de acerto foi superior a 60% e, assim, entendemos que os conceitos nela envolvidos já haviam sido apropriados pelos alunos.

Como já foi visto, as questões das avaliações inicial e final relacionaram-se à:

- representação para produtos envolvendo “três fatores”(q1a e q1b),
- produção e manipulação de igualdades matemáticas (q1a, q1b, q9a, q9b, q9c),
- identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores (q3, q4 e q5),
- identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos (q6 e q7) e,
- uso da decomposição dos números em fatores primos para otimizar cálculos (q8abc e q8d).

Desse modo, na avaliação inicial, parte dos alunos conseguiu produzir igualdades matemáticas, decompor um número em fatores, listar os fatores de um número e identificar números primos. Nenhum aluno, porém, conseguiu decompor um número em fatores primos, pois ninguém acertou a questão q7, nem sequer conseguiu usar a decomposição dos números em fatores primos para otimizar cálculos.

As questões q8abc e q8d, que favoreciam tal uso, tiveram um razoável percentual de acerto na avaliação inicial, mas a estratégia usada pelos alunos para resolvê-la não levava em consideração a decomposição dos números em fatores primos. Na Figura 3.4, mostra o procedimento adotado pelos alunos que acertaram as questões q8abc e q8d:


Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ....

2 x 3 = 6 x 5 = 30 x 11 = 330

2 x 5 = 10

330 | 10
-30   33
030
-30
00

Gabriel dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por um certo número e encontrou 55. O número é ..

2 x 3 = 6 x 5 = 30 x 11 = 330

330 | 55
-330   6
000

Figura 3.4:
Resolução da questão 8 na avaliação inicial

Como podemos notar, o aluno efetuou os produtos para, em seguida, realizar a divisão entre os números obtidos. Desprezou o fato de estarem sendo apresentadas as decomposições dos números em fatores primos e não admitiu qualquer possibilidade de simplificação de cálculos.

Vale sinalizar que este procedimento é o mesmo identificado por Campbell e Zazkis (2002) em seu estudo sobre o uso que professores e futuros professores fazem de seus conhecimentos de Teoria dos Números. Os sujeitos da pesquisa mencionada, assim como os sujeitos da nossa pesquisa, já haviam estudado a decomposição de números em fatores primos e, no entanto, também não se valeram desse conhecimento para otimizar cálculos.

Na seção 3.1.1.1, quando analisamos os resultados de todas as avaliações, observamos que, em média, o percentual de acerto na avaliação inicial foi de 37,4%, crescendo para 71,3% na avaliação final, o que correspondeu a um crescimento de 90,6% Já na figura 4.3, percebemos que o desempenho por questão não cresceu na mesma razão. Houve questões em que o percentual de crescimento foi maior: os desempenhos nas questões q3, q4, q5 e q8abc, por exemplo, cresceram, respectivamente, 100%, 366,7%, 200% e 90%.

Houve questões em que o crescimento foi menor: q1a, q1b, q6, q8d, q9b e q9c cresceram, respectivamente, 50%, 71,4%, 72,7%, 77,8%, 37,5% e 62,5%. Na questão q7, não foi possível calcular o percentual de crescimento, visto que não houve acerto na avaliação inicial. Houve ainda a questão q9a, cujo desempenho na avaliação final foi inferior ao da avaliação inicial, ou seja, houve um decréscimo nos percentuais. Mas, quando realizamos o teste de Mc Nemar, verificamos que, de todos os ganhos, foram considerados significativos os das questões q3, q4, q5, q6, q7, q8abc e q8d. Isto nos permite dizer que estatisticamente as questões com ganho foram aquelas relacionadas à identificação de números primos, à decomposição em fatores primos e ao uso desta decomposição para simplificar cálculos.

A Figura 3.5 ilustra ainda que, q3, q5, q6, q8abc e q8d são as questões que, na avaliação final, tiveram os maiores percentuais de acerto.

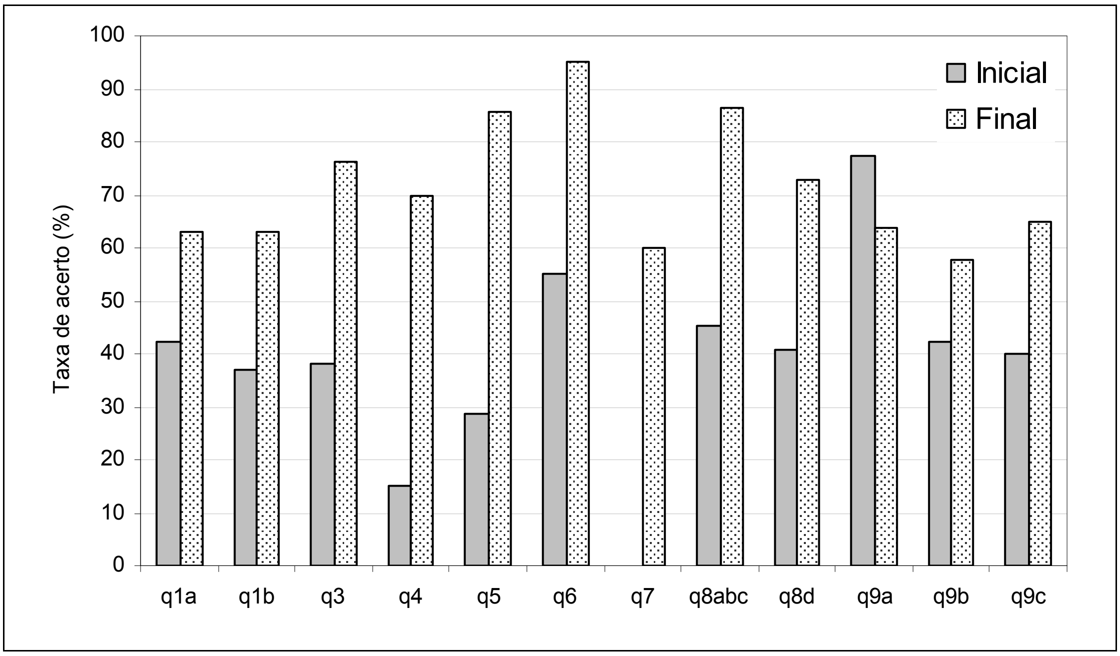


Figura 3.5:
Gráfico do desempenho do grupo na avaliação inicial e na avaliação final por questão

Estes resultados sugerem a eficácia da intervenção de ensino. Não devemos esquecer que nosso objetivo está intimamente relacionado à construção de tais conceitos pelos alunos. Todavia, para compreendermos melhor os resultados, analisamos o desempenho dos alunos em cada uma das questões, por conceitos a que se relacionavam. Com isso, verificamos em que tipo de questão houve maior promoção na aprendizagem e como isso pôde estar vinculado ou não ao processo de intervenção.

3.1.2.1 Desempenho nas questões de representação para "produtos envolvendo três fatores" (q1a e q1b)

O crescimento dos percentuais de acerto destas questões não foi considerado significativo pelo teste de McNemar. Entretanto, em termos qualitativos, as estratégias empregadas pelos alunos em suas resoluções, tanto na avaliação inicial como na avaliação final, mereceram destaque.

A decomposição de um número em fatores primos, na maioria das vezes, envolve mais de dois fatores. Cientes disso, desde a organização da intervenção de ensino, julgamos necessário incluir, além daquelas atividades relacionadas diretamente a números primos, outras que favorecessem a produção de significados para o produto de três números. É o caso de q1a e q1b.

Como já foi mencionado na descrição do método de pesquisa, antes de receber as questões, os alunos puderam manipular livremente embalagens de ovos e bombons, formas para gelo e para confecção de bombons. Puderam também fazer o registro que quisessem sobre estes objetos. Todos eles têm em comum a arrumação retangular em linhas e colunas**.** Assim, esperávamos que realizassem a escrita do produto de dois fatores para a descrição de um objeto e a escrita do produto de três fatores para a descrição de mais de um objeto do mesmo tipo. Por exemplo, esperávamos que os alunos escrevessem 2 x 6 para descrever uma embalagem com uma dúzia de ovos e escrevessem 5 x 2 x 6 para descrever 5 delas. Nas questões, solicitava-se aos alunos que representassem os objetos por meio de desenhos e, em seguida, por meio de igualdades matemáticas. Neste tópico, demos ênfase aos registros feitos livremente e aos desenhos. No próximo tópico, comentaremos as igualdades matemáticas.

No início da aula, os alunos foram comunicados de que fariam alguns exercícios – a avaliação inicial – e que, para isso, era interessante que observassem atentamente os objetos. Muito desconfiados e temendo que, durante os exercícios, os objetos não pudessem ser vistos novamente, alguns alunos registraram, ou melhor, descreveram no papel e em linguagem materna, os referidos objetos.

Assim, dividimos estes registros em categorias. A primeira, corresponde aos registros nos quais os alunos priorizavam apenas o total de elementos das formas e embalagens. A segunda, priorizaram o número de linhas e o número de colunas de cada objeto e na terceira, os alunos descreviam, ou o número de linhas, ou o número de colunas e o total de elementos das formas e embalagens.

A Figura a seguir corresponde a um registro que se enquadra nesta última:

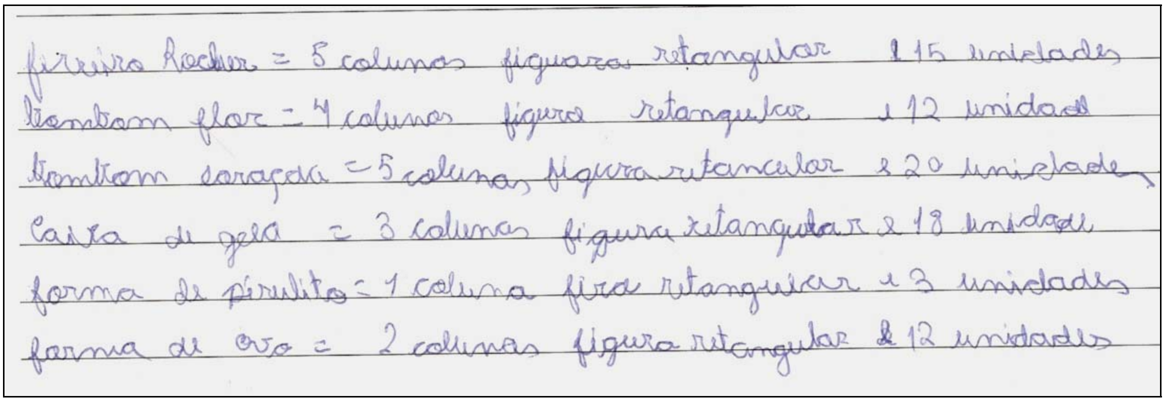

ferreiro Rocher = 5 colunas figuara retangular e 15 unidades
bombom flor = 4 colunas figura retangular e 12 unidades
bombom coraçõa = 5 colunas figura retancalar e 20 unidade
Caixa de gelo = 3 colunas figura retangular e 18 unidade
forma de pirulito = 1 coluna fira retangurar e 3 unidades
forma de ovo = 2 colunas figura retangular e 12 unidades

Figura 3.6:
Descrição das embalagens e formas (número de colunas e total de unidades)

Como pode ser observado, o aluno escreveu apenas o número de colunas e o total de unidades de cada objeto. Perguntado sobre como iria se lembrar do objeto, caso tivesse que desenhá-lo, dispondo apenas destas informações, ele respondeu: *"é só eu ir fazendo uma coluna do lado da outra até ficar igual à forma".* Insistimos questionando ainda sobre como saberia que o desenho está igual à forma e ele disse: *"quando ficarem com os mesmos números, ora".*

É possível identificar pelos registros desta categoria que os alunos que os produziram, empregavam corretamente termos do vocabulário matemático como *retangular, colunas, unidades* e, para expressarem suas idéias, utilizavam simultaneamente estruturas da língua materna e da linguagem matemática. Isto é uma evidência do que Vergnaud (1990a), afirma quanto ao papel da representação e o uso que o indivíduo faz dela na construção de conceitos.

Reconhecemos, também, o esquema mobilizado pelos alunos para transferir do registro escrito para o desenho: desenhar uma coluna com a quantidade de elementos informados e repetir este procedimento até obter o total de unidades informadas. Neste caso, inferimos que o aluno reconhece na ação, embora não consiga generalizar formalmente que o total é múltiplo do número de elementos de cada coluna e adiciona seguramente parcelas repetidas desse número até obter o total. Ou seja, trata-se de um teorema-em-ação. Os conceitos de adição, de multiplicação como a soma de parcelas repetidas, a reversibilidade entre multiplicação e divisão, as noções de representação retangular, de coluna, de unidade e de igualdade são também invariantes operatórios presentes nesta ação, mas como elementos constituintes do teorema-em-ação e, por isso, são exemplos de conceitos-em-ação.

Comparando os registros dos alunos desta categoria com os registros dos alunos da primeira, em que apenas informavam o total de unidades (ver Figura 3.7), percebemos que os conhecimentos matemáticos mobilizados e presentes na ação desses últimos foram em menor quantidade e mais elementares.

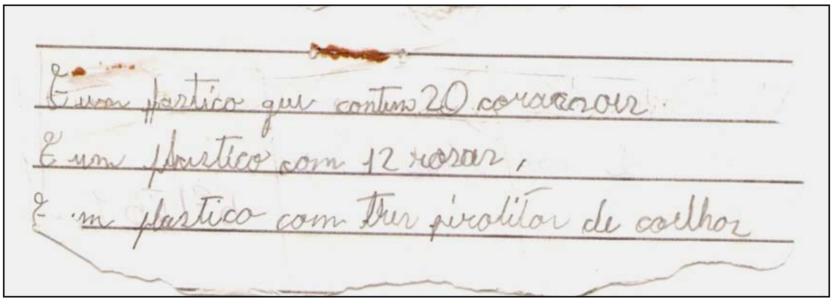


Figura 3.7:
Descrição das embalagens e formas (total de unidades)

Diante dos registros, levantamos a hipótese da ocorrência de algum procedimento que não haviam sido representados no papel. Indagamos, então, todos os alunos dessa categoria sobre como chegaram ao total que escreveram e eles responderam que contaram um a um ou coluna por coluna. Não deram indícios de que percebiam alguma relação entre o total de unidades e o número de elementos por linha ou por coluna. Na transferência dos registros para os desenhos e, em seguida, dos desenhos para as igualdades matemáticas, este grupo foi o que enfrentou mais dificuldades e produziu um maior percentual de resultados equivocados.

Com relação aos registros que se enquadraram na segunda categoria, vale destacar apenas que os esquemas e os invariantes operatórios apresentados pelos alunos em muito se assemelharam àqueles apresentados pelos alunos cujos registros se enquadraram na terceira categoria. Houve apenas um conceito sobre o qual não encontramos dados suficientes para inferir sua presença na ação dos alunos: a reversibilidade entre multiplicação e divisão.

Em todas as reflexões, eles se remetiam apenas ao número de linhas e de colunas dos objetos. Nenhum aluno fez alusão ao total de unidades da cada embalagem ou forma nem ao modo como ele se relaciona ao número de linhas e de colunas.

É importante esclarecer que foram verificadas variações nos registros das observações que antecederam a avaliação inicial. Para as observações que antecederam a avaliação final, os alunos não quiseram fazer registros, pois eles disseram que conheciam bem os objetos envolvidos nas questões.

Durante a atividade de construção de retângulos e da tábua de Pitágoras, verificamos que boa parte dos alunos, independente das categorias em que enquadramos seus registros, produziram as mesmas igualdades matemáticas para as representações retangulares e conseguiram obter outras igualdades baseadas em uma igualdade dada, o que nos sugeriu que, embora o conhecimento inicial dos alunos tenha variado bastante, a intervenção criou condições para que avançassem na compreensão da representação retangular e da estrutura multiplicativa.

Este avanço também pôde ser verificado dos desenhos que fizeram na avaliação inicial para os desenhos que fizeram na avaliação final. Na avaliação inicial, houve alunos que fizeram a representação retangular, usando os desenhos dos elementos de cada forma ou embalagem (bombom, flor, ovo, etc), houve alunos que desenharam apenas a malha quadriculada em que cada quadrado correspondia a um elemento da forma ou embalagem e, ainda, houve aqueles que uniram os dois procedimentos: faziam a malha quadriculada e, dentro de cada quadrado, desenhavam os elementos. A Figura abaixo apresenta um desenho de cada tipo:

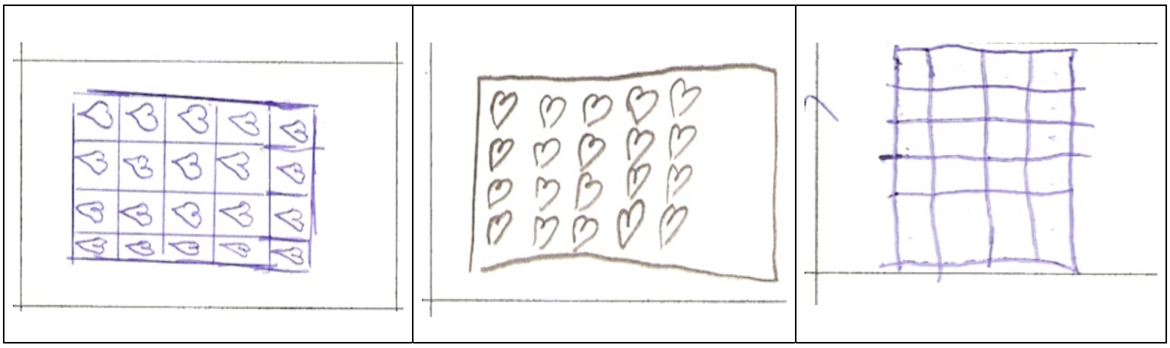


Figura 3.8:
Desenhos da forma de bombom

Em cada um destes casos, houve erros e acertos. Os desenhos apresentados pelas crianças que acertaram não diferiram muito. Pequenas diferenças foram notadas apenas na disposição da malha quadriculada, o que para uns era linha, para outros foi coluna e vice-versa.

Desse modo, os erros foram de dois tipos. O primeiro, foi aquele que os alunos não consideraram as quantidades dos elementos de cada forma, ou embalagem, nem a maneira como estavam distribuídos, como atributos importantes em sua representação. Preocuparam-se, por exemplo, em desenhar com precisão os rótulos das embalagens, os elementos que deveriam estar presente nelas (ovos, bombons) e colocavam-nos em qualquer quantidade. A Figura abaixo ilustra bem este tipo de erro:

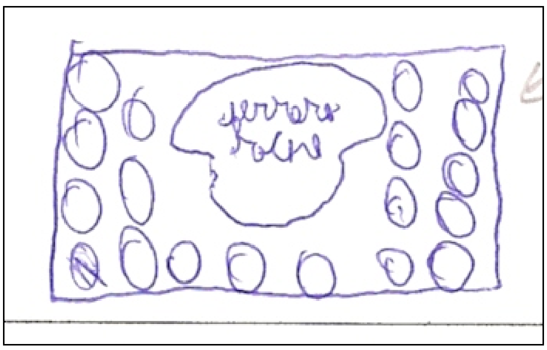


Figura 3.9:
Desenho que desconsiderou a quantidade de bombons e sua organização na embalagem

Como é possível verificar, o aluno preocupou-se em desenhar o rótulo da embalagem de bombom, as curvas desta embalagem, porém preencheu-a com qualquer quantidade de bombons e não os organizou em três linhas e cinco colunas como é a organização real da embalagem. Assim, estes alunos se detinham a conceitos irrelevantes ao tratamento matemático da situação. Trata-se de conceitos-em-ação irrelevantes.

No segundo tipo de erro, que foi, inclusive, o mais cometido, o aluno sabia o total de elementos de cada forma ou embalagem e fazia qualquer representação retangular que resultasse naquele total, como mostra a Figura a seguir:

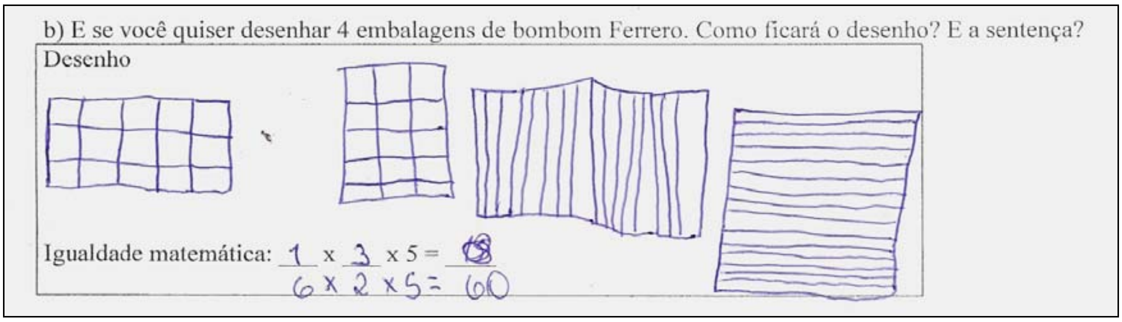
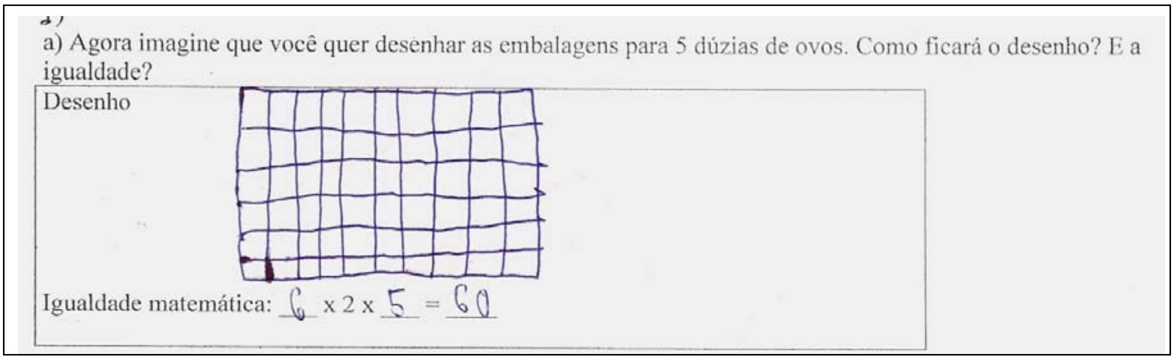


Figura 3.10:
Desenho da embalagem considerando apenas o total de unidades que ela comporta

Podemos notar que o aluno faz duas representações de 3 linhas e 5 colunas, mas, como estava ciente de que o total por embalagem era 15 bombons, não teve esta preocupação ao desenhar as outras duas e fez mais duas representações: uma com uma linha e 15 colunas e outra com 15 linhas e uma coluna.

Cabe esclarecer que alguns alunos ainda representaram as embalagens todas juntas. É o caso da representação abaixo:


a) Agora imagine que você quer desenhar as embalagens para 5 dúzias de ovos. Como ficará o desenho? E a igualdade?

Desenho

Igualdade matemática: 6 x 2 x 5 = 60

Figura 3.11:
Desenho das embalagens juntas

O aluno fez o desenho para representar 5 dúzias de ovos. Em uma conversa informal, perguntamos em que linha e em que coluna ele fazia a separação das embalagens. Para responder, o aluno passou o lápis no terceiro, no quinto, no sétimo e no nono segmento vertical do desenho, que era a resposta esperada. Consideramos este caso e outros casos análogos como certos.

Já, na avaliação final, nenhum aluno fez a representação retangular, usando apenas os desenhos dos elementos das formas ou embalagens. A malha quadriculada esteve presente em todos os desenhos, com ou sem desenho dentro de cada quadrado. Os erros ocorridos podem ser classificados apenas no segundo tipo descrito anteriormente. Estes fatos sugerem que, após terem vivenciado as situações da intervenção de ensino, todos os alunos conseguiam identificar os conceitos e outros aspectos invariantes relevantes ao tratamento matemático da situação.

3.1.2.2 Desempenho nas questões de produção e manipulação de igualdades matemáticas (q1a, q1b, q9a, q9b, q9c)

O uso da decomposição em fatores primos para favorecer o cálculo mental e a otimização de cálculos, de um modo geral, pressupõe que o sujeito saiba escrever igualdades matemáticas que envolvam multiplicações e saiba, também, manipular estas igualdades, obtendo outras a partir de uma conhecida.

Por exemplo, para registrar matematicamente quantas unidades há na embalagem de ovos, o aluno deveria escrever 2 x 6 = 12 ou 6 x 2 = 12.

Manipulando os termos destas igualdades, poderia, ainda, obter 12 : 6 = 2 e 12 : 2 = 6. Por isso, há, na intervenção de ensino, uma etapa que favorece a obtenção e manipulação de igualdades matemáticas, e desejávamos saber, desde a avaliação inicial, quais conhecimentos prévios os alunos tinham sobre elas e que usos faziam delas. Para investigar a produção de igualdades matemáticas pelos alunos, solicitamos nas questões q1a e q1b, comentadas anteriormente, que escrevessem igualdades matemáticas que representassem as formas e embalagens.

Para investigar se, conhecendo uma, conseguiriam obter outras e se usavam essas igualdades para resolver problemas envolvendo cálculo de termos desconhecidos, propusemos, nas avaliações inicial e final, as questões q9a, q9b e q9c. O crescimento das taxas de acerto também não foi considerado significativo pelo teste de McNemar, e, em q9a, não houve crescimento da taxa de acerto: o número de erros da avaliação final foi maior do que o da avaliação inicial.

Embora estatisticamente não se justifique a análise de tais questões, a diversidade de estratégias e procedimentos apresentados pelos alunos, ao resolvê-las, sobretudo na avaliação inicial, pôde contribuir para a compreensão de seu desempenho em outras questões cujos crescimentos foram considerados significativos pelo teste. Vamos começar analisando as igualdades matemáticas produzidas em q1a e q1b. Em seguida, descreveremos as estratégias adotadas pelos alunos para resolver q9a, q9b, q9c.

Tanto na avaliação inicial como na avaliação final, os alunos dispuseram de espaço suficiente para desenhar as embalagens e formas. Além deste espaço para atender à solicitação dos desenhos, havia uma sentença matemática incompleta identificada pelo nome *Igualdade Matemática*. Um membro possuía três fatores, sendo dois desconhecidos e o outro membro que correspondia ao total de unidades de cada forma ou embalagem, também, não estava preenchido. Em q1a, que tratava da representação de 5 dúzias de ovos, a sentença era ___ x 2 x ___ = _____ e, em q1b, que tratava da representação de 4 embalagens de bombom, a sentença era ___ x ___ x 5 = 60.

Esperávamos que os alunos completassem com 5, 6 e 60 na primeira, e com 4, 3 e 60, na segunda. O número que correspondia ao total de unidades, 60 nos dois casos, foi preenchido corretamente, entretanto o preenchimento dos fatores foi feito de diversas maneiras. Alguns alunos confundiam multiplicação e adição e preencheram q1b, por exemplo, com *5 x 6 x 5 = 60*, produzindo uma igualdade matemática falsa. Indagado sobre o porquê de tal preenchimento, um dos alunos respondeu: *"ué, 5 mais 5 dá 10, vezes 6, 60, não é isso?".*

Além de confundir adição e multiplicação, estes alunos não associaram a igualdade à maneira como as unidades estavam arrumadas nas embalagens. Como eles, outro grupo de alunos desconsiderou o desenho ou a disposição das embalagens para preencher os fatores e valeu-se da propriedade comutativa da multiplicação.

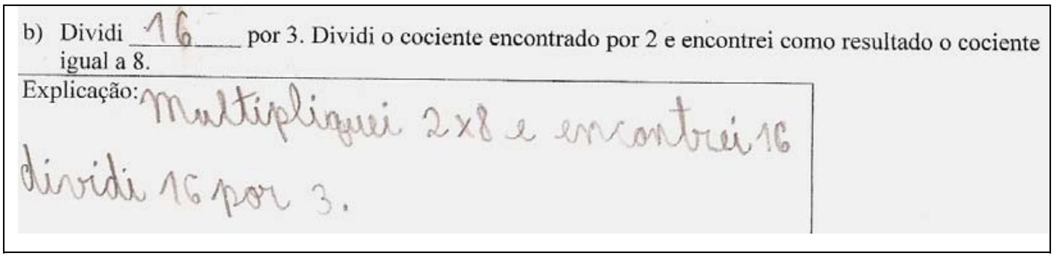
Mentalmente, os alunos buscavam trincas de números, sendo um deles 2, em q1a, e 5, em q1b, cujo produto fosse 60. Assim, foram preenchimentos comuns para q1b, *3 x 4 x 5 = 60, 2 x 6 x 5 = 60* ou *6 x 2 x 5 =60* e, para q1a, *3 x 2 x 10 = 60*, *10 x 2 x 3 = 60* e *6 x 2 x 5 = 60.*

De todas as maneiras de preencher apresentadas pelos alunos, esta última, *6 x 2 x 5 = 60* merece destaque. Entrevistamos os alunos para que justificassem seu preenchimento e encontramos três justificativas distintas para o preenchimento de *6 x 2 x 5 = 60* em q1a. A primeira, foi igual à justificativa de todos os outros preenchimentos: o aluno buscou três números, sendo um deles o 2, cujo produto é 60. A segunda justificativa, fundamentou-se na disposição das unidades nas embalagens, mas o aluno pensou na propriedade comutativa da multiplicação e não se preocupou com a ordem de preenchimento. A terceira justificativa, também, fundamentou-se na representação retangular dos objetos, entretanto o sujeito preencheu a igualdade matemática na ordem de suas ações. Primeiramente, ele obteve o total de unidades de uma embalagem e isso o levou a escrever 6 x 2. Em seguida, ele multiplicou este total por 5, o número de embalagens que constou no enunciado da questão. Assim, como ficou evidente nas palavras de um aluno: *"o 5 entra multiplicando por último".* Este é um exemplo do que Vergnaud (1996) destaca sobre as relações entre a situação e sua representação. As ações do indivíduo em situação coordenam a representação que ele fará dela.

A análise das igualdades produzidas pelos alunos nos levou a alguns questionamentos: Por que, em meio a tantas igualdades, nenhuma apresentava o 1 como fator? Por que muitos alunos insistiam em preencher as igualdades com dois fatores, deixando em branco o espaço reservado para o terceiro fator? Estas questões nos levaram a supor, por exemplo, que a compreensão de que o número 1 é um fator comum a todos os números não seria fácil para todos os alunos. Previmos também a dificuldade de alguns alunos para lidar com decomposições que envolvam mais de dois fatores ou fatores repetidos. Decompor os números parece-lhes contraditório, uma vez que todo o processo de ensino de Matemática a que foram submetidos valorizou a "elegância" das resoluções, que se traduz no poder de sintetizar procedimentos e notações.

Mas as dificuldades ficaram ainda mais evidentes nos itens b e c da questão 9. Em todos os itens são apresentadas seqüências de operações matemáticas em que algum dos termos envolvidos é desconhecido e a tarefa é justamente encontrá-lo. A seqüência de operações pode ser expressa por duas igualdades matemáticas e a manipulação das mesmas permite que se obtenha o termo desconhecido. Julgamos que o fato de, no item a, o termo desconhecido corresponder ao último número obtido na seqüência de operações, não exigindo, assim, o emprego da reversibilidade entre multiplicação e divisão, fez com que ele tivesse um elevado índice de acerto nas duas avaliações. Mas, os itens b e c, com características diferentes, não apresentaram índices tão satisfatórios. Solicitávamos aos alunos que completassem textos como *"Dividi ___ por 3. Dividi o quociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o quociente igual a 8*", que corresponde à q9b. Esperávamos que escrevessem $a : 3 = b$, $b : 2 = 8$ e, em seguida, manipulassem estas igualdades, obtendo $b = 2 \times 8$ e $a = b \times 3$, o que não aconteceu.

O erro mais comum foi cometido pelos alunos que consideravam apenas uma das duas ações informadas no texto. Assim, para q9b, uma resposta freqüente foi 16. O extrato do protocolo de um aluno, apresentado na figura 3.12, fornece um exemplo:

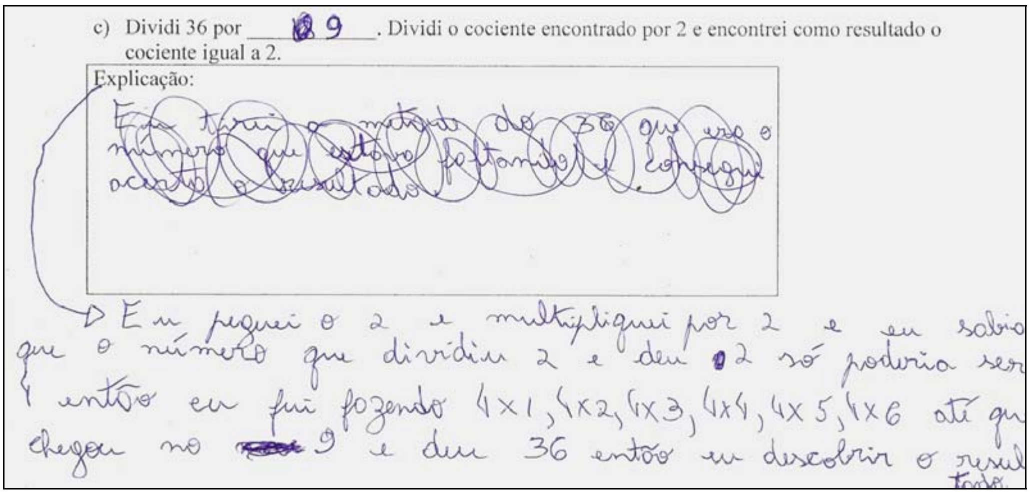

b) Dividi 16 por 3. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 8.

Explicação: Multipliquei 2x8 e encontrei 16 dividi 16 por 3.

Figura 3.12:
Resolução com erro de q9b pelas propriedades da igualdade matemática

Como podemos observar, o aluno considerou apenas a segunda frase do texto: *"Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 8"*. Entretanto, apresentou um raciocínio adequado, fundamentado na reversibilidade entre a multiplicação e a divisão. Entendemos que este procedimento é conseqüência da obtenção, embora mental, de igualdades matemáticas a partir da igualdade *a : 2 = 8.* Houve, ainda, casos em que os alunos também buscavam mentalmente, mas, por meio de tentativas, o número que dividido por 2 resulta 8.

A estimativa e o uso da reversibilidade entre multiplicação e divisão também foram os procedimentos predominantes nas soluções corretas. Eles predominaram inteira ou parcialmente nas soluções. No último caso, tivemos o que chamamos de estratégia mista. O aluno empregava a reversibilidade para resolver parte do enunciado e, em seguida, fazia estimativas para resolver a parte que restava. Percebemos a estratégia mista empregada pelo aluno cujo protocolo se encontra na Figura 3.13:


c) Dividi 36 por 9. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 2.

Explicação:

Eu peguei o 2 e multipliquei por 2 e eu sabia que o número que dividiu 2 e deu 2 só poderia ser 4 então eu fui fazendo 4x1, 4x2, 4x3, 4x4, 4x5, 4x6 até que chegou no 9 e deu 36 então eu descobrir o resultado.

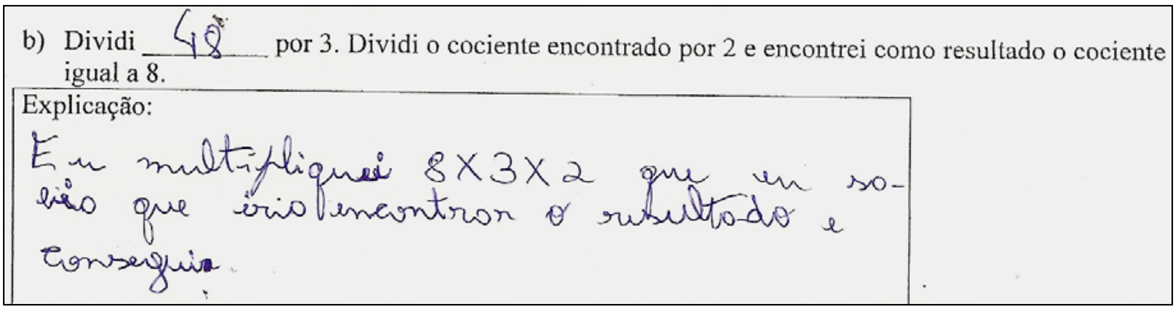
Figura 3.13:
Resolução correta de q9c adotando a estratégia mista

O aluno empregou a reversibilidade para obter o número 4 e estimou o número que deveria multiplicar por 4 para obter 36. As expressões *4 x 1, 4 x 2, 4 x 3, 4 x 4, 4 x 5, 4 x 6* mostram a busca do aluno até encontrar o número 36. Constatando que a reversibilidade entre a multiplicação e a divisão era um conhecimento subjacente às ações dos alunos, consideramo-la um teorema-em-ação. Entre os conceitos que lhe dão sustentação, designados conceitos-em-ação, temos os algoritmos das duas operações e as tabuadas.

Com base na análise das soluções dos alunos, inferimos sobre o grau de dificuldade das questões q9b e q9c. São questões extremamente complexas, pois requerem a identificação sucessiva de dois termos desconhecidos.

Desse modo, acreditamos que boa parte dos alunos possuía esquemas necessários para a identificação de um termo desconhecido, porém não fizeram a composição destes com outros esquemas a fim de construir esquemas mais abrangentes para a obtenção de dois termos desconhecidos em uma mesma situação problema.

O fato não foi decisivo para que construíssem e empregassem os principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética. Julgamos que a compreensão da reversibilidade entre multiplicação e divisão era imprescindível e ela pôde ser verificada, entre outros dados, na mudança do procedimento das estimativas para o procedimento fundamentado na reversibilidade ocorrida da avaliação inicial para a avaliação final. Segue, na figura 4.14, a solução de q9b feita, na avaliação final, pelo aluno cujo extrato do protocolo da avaliação inicial consta na figura 3.14:


b) Dividi 48 por 3. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 8.

Explicação:

Eu multipliquei 8X3X2 que eu so-
bião que iria encontrar o resultado e
consegui.

Figura 3.14:
Resolução correta de q9b na avaliação final

Podemos notar que, para resolver q9c, na avaliação inicial,o aluno usou a estratégia mista e, para resolver q9b, na avaliação final, ele empregou apenas a reversibilidade que existe entre multiplicação e divisão. É importante lembrar apenas que, embora q9b e q9c sejam questões distintas, elas pertencem à mesma classe de situações. Portanto, podemos comparar as soluções que o aluno apresentou para cada uma.

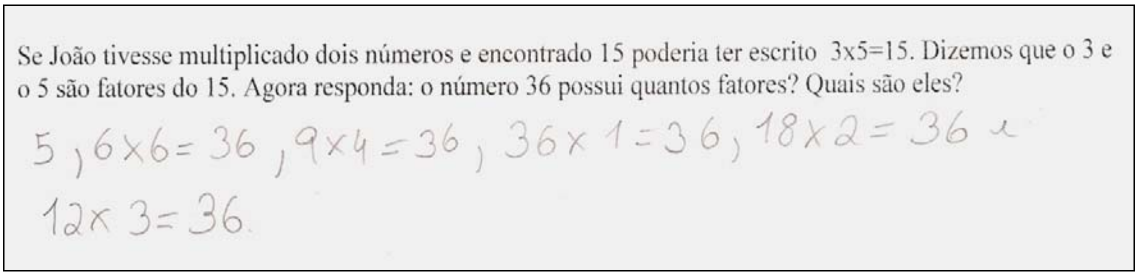
3.1.2.3 Desempenho nas questões de identificação dos fatores de um número e sua decomposição em fatores (q3, q4 e q5)

Para compreender a decomposição de um número em fatores primos e, conseqüentemente, usá-la na otimização de cálculos e na realização de cálculos mentais, é preciso, antes de tudo, que o aluno admita a possibilidade de decompor um número em fatores, ou seja, escrevê-lo como produto de dois ou mais fatores. Nossa experiência, adquirida lecionando Matemática para turmas do Ensino Fundamental há cerca de 10 anos, associada às pesquisas de Campbell e Zazkis (2002) nos sugeriu que esta não é uma idéia facilmente concebida pelos alunos. Tanto em nossa prática profissional como na leitura dos artigos organizados por esses pesquisadores, percebemos que há alunos que, frente a um número, aplicam processos para fazer sua decomposição em fatores, obtêm-na satisfatoriamente, entretanto, não associam a decomposição que obtiveram ao número tomado inicialmente no processo.

Assim, por exemplo, o aluno obtém *2 x 3 x 5* a partir do 30, mas não reconhece que 30 é, na verdade, o resultado de *2 x 3 x 5*. Nesse sentido, julgamos necessário investigar os conhecimentos prévios dos alunos da turma na qual realizamos nossas investigações sobre a decomposição de um número e, por isso, as questões q3, q4 e q5 constaram nas avaliações inicial e final.

Na questão q3, foi proposto aos alunos decompor 36 em produtos de dois fatores. Nas questões q4 e q5, propusemos que identificassem os fatores de, respectivamente, 36 e 7. Escolhemos estes números justamente para verificar se haveria alguma diferença no tratamento que dariam a números primos e compostos, muito embora as questões ainda não apresentassem esta nomenclatura. É importante salientar que os percentuais de crescimento das taxas de acerto das três questões foram considerados significativos pelo Teste de McNemar. Os erros verificados na avaliação inicial foram, em sua maioria, superados na avaliação final.

Em q4 e q5, os cálculos e a identificação dos fatores com os produtos foram as causas dos erros cometidos pelos alunos. Por exemplo, ao produzirem a falsa igualdade *3 x 13 = 36*, alguns alunos indicavam 3 e 13, como fatores de 36. Já a identificação dos fatores com o produto pôde ser melhor esclarecida pela análise do protocolo apresentado na Figura 3.15:


Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3x5=15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

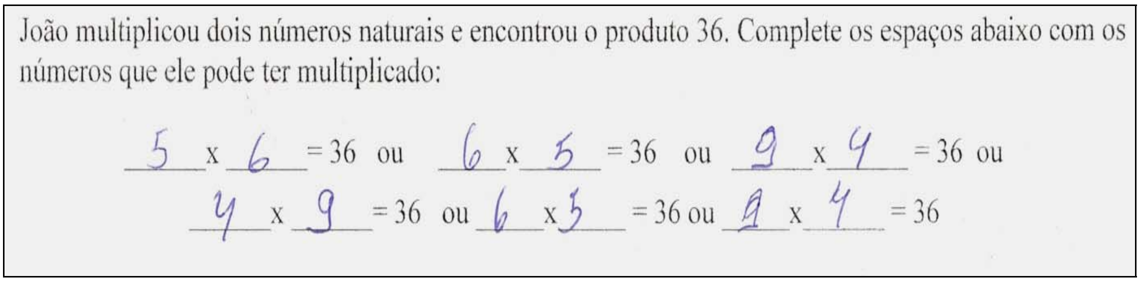
5 , 6x6= 36 , 9x4 = 36 , 36x 1 = 36 , 18x2 = 36 e 12x 3= 36.

Figura 3.15:
Identificação dos fatores como produtos

Em lugar do aluno escrever que os fatores de 36 são 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36, ele considerou que a resposta certa a esta solicitação eram os produtos que havia escrito na questão anterior: *2 x 18*, *3 x 12, 4 x 9, 6 x 6, 1 x 36*. Assim, escreveu que o 36 possui 5 fatores. Este equívoco foi bastante freqüente na avaliação inicial e nós inferimos que os enunciados destas questões associados à q3 induziram os alunos a cometê-lo. Outra justificativa fundamenta-se nas pesquisas de Campbell e Zazkis (2002) e Barbosa (2002) que revelam a tendência dos alunos para associar fatores à divisão e múltiplos à multiplicação.

Por fim, as omissões dos produtos *3 x 12*, *2 x 18*, *6 x 6* e *1 x 36* foram os únicos fatos que nos chamaram atenção em q3. O Teste de McNemar não apontou como significativo o crescimento das taxas de acerto desta questão, porém as justificativas que os alunos deram para tais omissões foram úteis para que compreendêssemos seus procedimentos em algumas atividades na intervenção de ensino.

Os produtos *3 x 12* e *2 x 18* foram esquecidos, pois, como verificamos nas conversas com os alunos, não constam nas tabuadas de 1 a 10, que eles memorizaram desde as séries iniciais e era exatamente nelas que eles buscavam produtos que resultassem em 36. As omissões dos produtos *6 x 6* e *1 x 36* ocorreram porque, para eles, era necessário que os números a serem multiplicados fossem diferentes e não fazia sentido que o próprio 36 fosse usado como fator. Estas concepções, inicialmente, foram obstáculos para a formalização dos conceitos e para o reconhecimento de propriedades das relações "múltiplo de" e "fator de" durante a intervenção de ensino. Na questão q3, eram oferecidas lacunas para que os alunos completassem com os produtos. Ao omitirem algum deles, pelo menos uma lacuna sobrava. Nestes casos, ou os alunos deixavam a (s) lacuna (s) em branco ou aplicavam a propriedade comutativa e trocavam a ordem dos fatores de algum produto que já tivessem escrito, como mostra a figura a seguir:


João multiplicou dois números naturais e encontrou o produto 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

5 x 6 = 36 ou 6 x 5 = 36 ou 9 x 4 = 36 ou
4 x 9 = 36 ou 6 x 5 = 36 ou 9 x 4 = 36

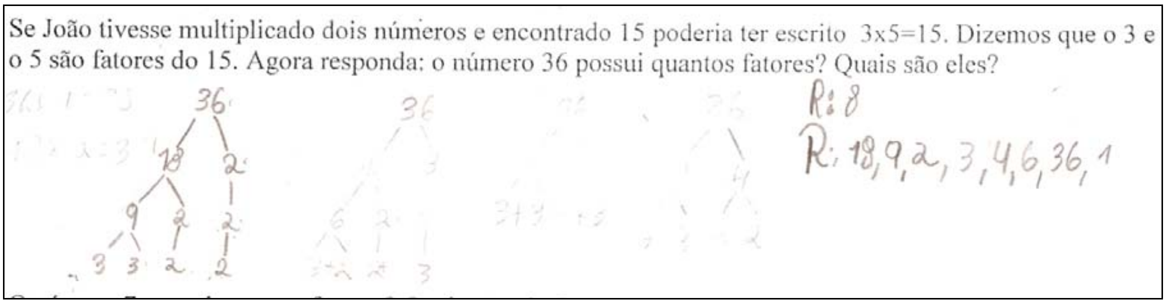
Figura 3.16:
Aplicação da propriedade comutativa da multiplicação

Não tendo escrito os produtos *3 x 12* e *2 x 18*, o aluno aplicou a propriedade comutativa e preencheu as lacunas com *4 x 9* e *9 x 4*. Mesmo a falsa igualdade, proveniente de erros de cálculos, teve a ordem dos fatores invertida. Esta atitude dos alunos foi um exemplo do processo de equilibração e acomodação de esquemas descrito por Vergnaud (1990) na Teoria dos Campos Conceituais. Eles possuíam esquemas suficientes para dar conta do preenchimento de algumas lacunas: aquelas cujos pares de números se encontram nas tabuadas de 1 a 10. Mas encontrar os pares cujo produto é 36 que não se encontram nas tabuadas de 1 a 10 constituiu-se um situação conflituosa para eles.

Assim, foram buscar na bagagem de esquemas que já dominavam, algum que pudesse ajudá-los a lidar com a situação. Encontraram este que tem como invariante operatório a propriedade comutativa da multiplicação, entretanto ele não contribuiu para que o conflito fosse desfeito. Afinal, desconsiderando-se a ordem, os pares eram os mesmos e aqueles esperados não foram encontrados.

Na intervenção era fundamental, propor atividades que favorecessem a ampliação do esquema empregado pelos alunos para buscar fatores de um número. Caso contrário, continuariam identificando apenas os fatores dos números que constam nas tabuadas de 1 a 10. Como fruto de nossa preocupação e do trabalho realizado na intervenção, identificamos, na avaliação final, a mudança de procedimento dos alunos, sobretudo em q4 e q5.

A busca dos fatores passou a ser fundamentada na reversibilidade entre multiplicação e divisão. Um esquema muito comum empregado para a obtenção dos fatores de 36 foi realizar a divisão deste número pela seqüência dos números naturais e escolher aqueles cuja divisão foi exata. Trata-se de um esquema em que os alunos tinham, inclusive, o controle de suas ações: sabiam que o processo não deveria ser repetido indefinidamente. Alguns interrompiam-no quando dividiam por 18, alegando que *"depois do 18, que é o meio, só o 36 mesmo"* e outros interrompiam-no apenas quando dividiam por 36 e, nas divisões, por sua vez, ora armavam cálculos, ora empregavam critérios de divisibilidade. Outro esquema, muito empregado na avaliação final, para a obtenção dos fatores de 36, está representado na Figura 3.17:


Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3x5=15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

R: 8

R: 18, 9, 2, 3, 4, 6, 36, 1

Figura 3.17:
Obtenção dos fatores utilizando a árvore

Podemos ver que o aluno desenhou a árvore do 36 e obteve os divisores por meio da manipulação dos números que apareceram nela, tendo se esquecido apenas do 12. Implícitas na ação do aluno estão a decomposição do 36 em fatores primos e a observação desta para obter os fatores. Trata-se de um raciocínio extremamente sofisticado que Campbell e Zazkis (2002) não conseguiram verificar nem entre professores em formação, que constituíam os sujeitos de suas pesquisas. Segundo os mesmos autores, a reflexão sobre este procedimento cria condições para a construção de outros conceitos da Teoria Elementar dos Números, como o m.m.c. e o m.d.c..

3.1.2.4 Desempenho nas questões de identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição em fatores primos (q6 e q7)

Como discutido no capítulo 1, no qual enfocamos o objeto matemático de nossa pesquisa, os conceitos de números primos e de decomposição de um número em fatores primos subjazem o Teorema Fundamental da Aritmética. A fim de investigar os conhecimentos dos alunos sobre estes conceitos, em q6, solicitamos que listassem três números primos e, em q7, pedimos que fizessem a decomposição do 36 em fatores primos.

Segundo o Teste de McNemar, os crescimentos das taxas de acerto destas questões da avaliação inicial para a avaliação final foram considerados significativos. Podemos facilmente verificá-los. A questão q7, por exemplo, não teve nenhum acerto na avaliação inicial e atingiu 60% de acerto na avaliação final. Em todos os acertos, o procedimento foi o mesmo: os alunos construíam a árvore do 36 para obter sua decomposição em fatores primos (Figura 3.18):

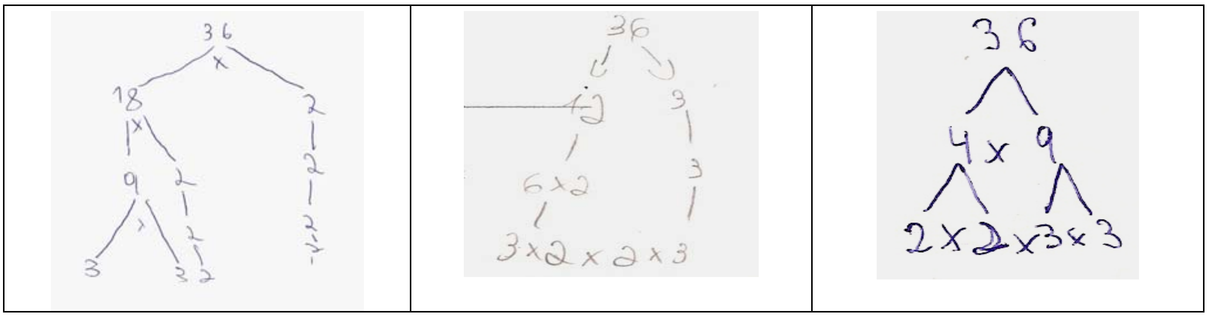
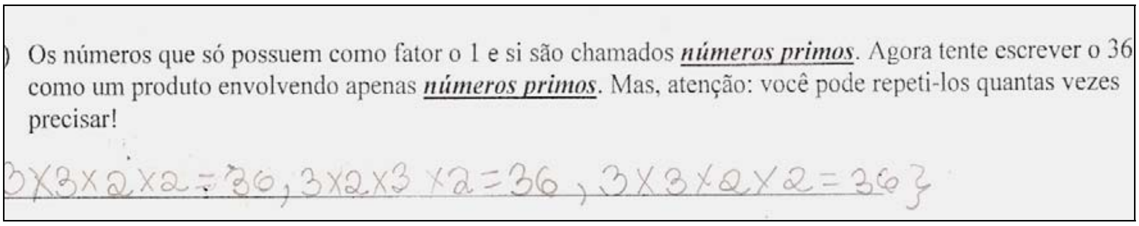


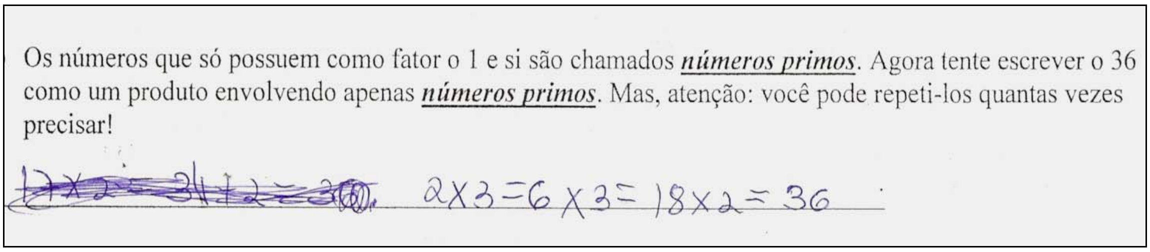
Figura 3.18:
Obtenção dos fatores utilizando a árvore

Observamos acima as árvores construídas por três alunos na avaliação final. Como a ordem dos fatores não altera o produto, as três decomposições estão corretas. Este foi um aspecto muito discutido com os alunos ao longo da intervenção e é de suma importância para a compreensão do TFA. A comparação entre as árvores favoreceu, por exemplo, o uso adequado dos símbolos da Matemática para expressar a decomposição em fatores primos. Nas Figuras 3.19 e 3.20, apresentamos extratos dos protocolos com as representações feitas por dois alunos (o primeiro, que decompôs construindo a árvore do número e o segundo, que buscava mentalmente os fatores primos):


Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

3X3X2X2=36, 3X2X3 X2=36, 3X3X2X2=36}

Figura 3.19:
Teorema Fundamental da Aritmética

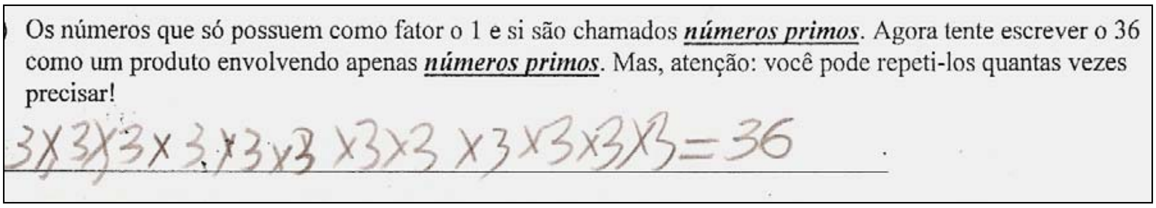

Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

2X3=6X3=18X2=36

Figura 3.20:
Registro próprio para decomposição

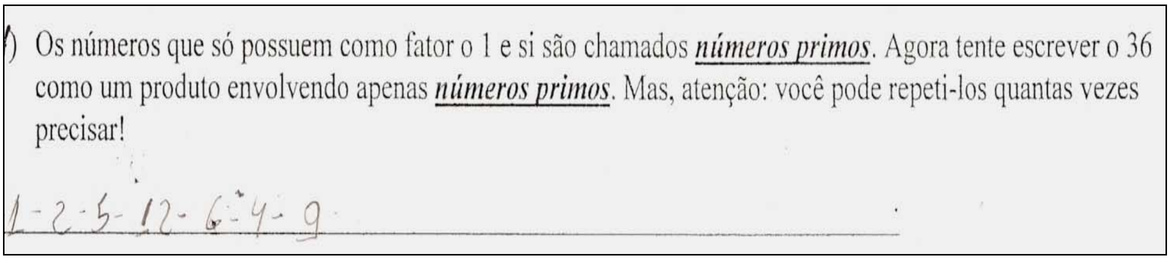
Podemos observar que, o primeiro aluno, que desenhou a árvore, escreveu igualdades matemáticas verdadeiras. Como já mencionamos, a manipulação destas igualdades favorece o uso da decomposição em fatores primos para simplificar cálculos. O segundo aluno, que buscou mentalmente os fatores primos de 36, sabia decompor, entretanto produzia a escrita na medida em que efetuava os cálculos. Isto o conduziu a escrever falsas igualdades matemáticas que, em momentos subseqüentes, não lhes favoreceriam avançar na construção dos conceitos.

Já os erros cometidos pelos alunos, inicialmente, sugerem que eles não admitiam a possibilidade da decomposição envolvendo mais de dois fatores. Para resolver q7, listavam os pares que usaram para responder q3 ou escreviam somas cujo total é 36. Os protocolos das Figuras 3.21, 3.22 e 3.23 nos oferecem exemplos da recorrência ao raciocínio aditivo:


Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

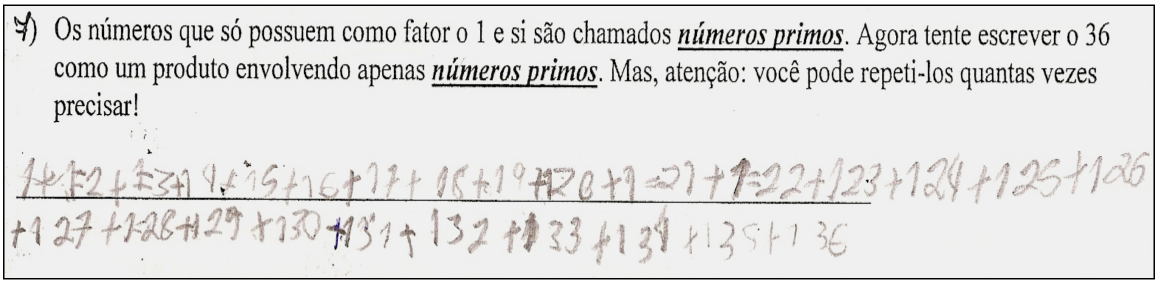
3X3X3X3X3X3 X3X3 X3X3X3X3=36

Figura 3.21:
Compreensão da fatoração como soma de parcelas repetidas


) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

1-2-5-12-6-4-9

Figura 3.22:
Compreensão da fatoração como soma


7) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

+1 27 +1 28 +1 29 +1 30 +1 31 + 1 32 +1 33 +1 34 +1 35 +1 36

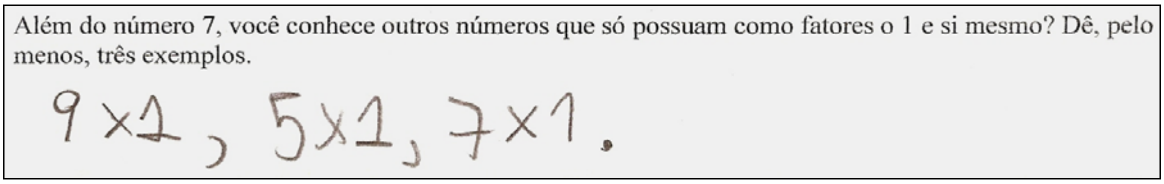
Figura 3.23:
Compreensão da fatoração como soma em que as parcelas são a unidade

Em 3.21, o aluno decompôs 36 em 12 parcelas iguais a 3, usando inadequadamente o símbolo da multiplicação. Em 3.22, o aluno pensou em números primos cuja soma é 36, porém cometeu erros de cálculo e, nem todos os números que listou são primos. Em 3.23, a expressão presente no enunciado *"como fator 1 e si mesmo"* chamou a atenção do aluno para o número 1 e ele entendeu que o 36 deveria ser obtido usando apenas a unidade. A recorrência ao pensamento aditivo, quando vivenciando situações multiplicativas, foi verificada com boa parte dos sujeitos das pesquisas de Campbell e Zazkis (2002). No caso da nossa pesquisa, esta recorrência fez parte das ações de alguns sujeitos até a última avaliação.

Com relação à questão q6, além do avanço de 55% para 95%, foi possível notar alterações na qualidade das respostas dos alunos, que merecem destaque. A primeira alteração foi referente às presenças dos números 2 e 9 entre os números primos que listavam. Na avaliação inicial, nenhum aluno listou o número 2 e boa parte deles listou o número 9. Isto nos sugeriu que empregavam os falsos teoremas-em-ação *"todo número ímpar é primo"* e *"todo número primo é ímpar"*, o que confirmamos durante a intervenção de ensino.

Além disso, os números primos listados na avaliação inicial foram apenas 3, 5 e 7, enquanto, na avaliação final, foram citados todos os primos até 31.

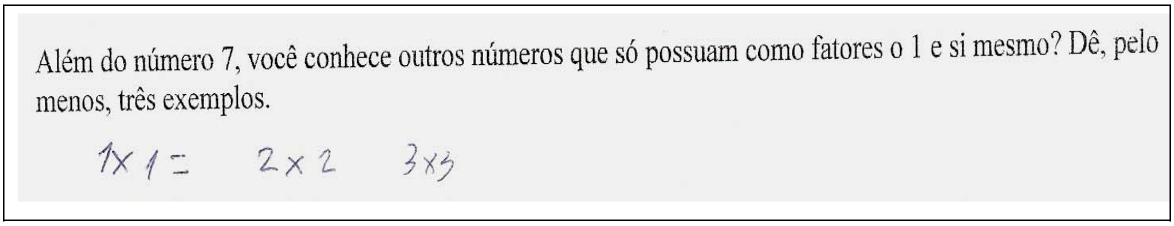
É importante mencionar ainda que aqueles alunos que confundiam produto com fatores, que descrevemos no item anterior, quando solicitados a listar os primos, listaram produtos, como mostra a Figura 3.24:


Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

9 x 1, 5 x 1, 7 x 1.

Figura 3.24:
Identificação dos números primos

Em vez de escrever 9, 5 e 7, o aluno escreveu os produtos *9 x 1*, *5 x 1* e *7 x 1*. Com exceção do número 9, que não satisfaz às condições do enunciado, estas respostas não estão erradas, pois o produto de qualquer número por 1 é o próprio número, entretanto a confusão entre produto e fator associada à ênfase dada no enunciado à expressão *"si mesmo"*, favoreceu a produção da seguinte escrita por alguns alunos:



Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

1x1= 2x2 3x3

Figura 3.25:
Registro incorreto dos números primos

Pensando em responder 3, 5 e 7, o aluno escreveu *3 x 3*, *5 x 5* e *7 x 7*. Para nós, estas escritas foram evidências de que nem todos os alunos compreendiam de fato o conceito de primos. Afinal, segundo Vergnaud (1990a), as simbologias associadas ao conceito formam um dos conjuntos que o compõem[37]. Julgamos que o uso desta simbologia inadequada certamente ofereceria algum tipo de obstáculo na interpretação e uso que deveriam fazer da decomposição de números em fatores primos. Na intervenção de ensino, tentamos impedir que os alunos permanecessem adotando-a.

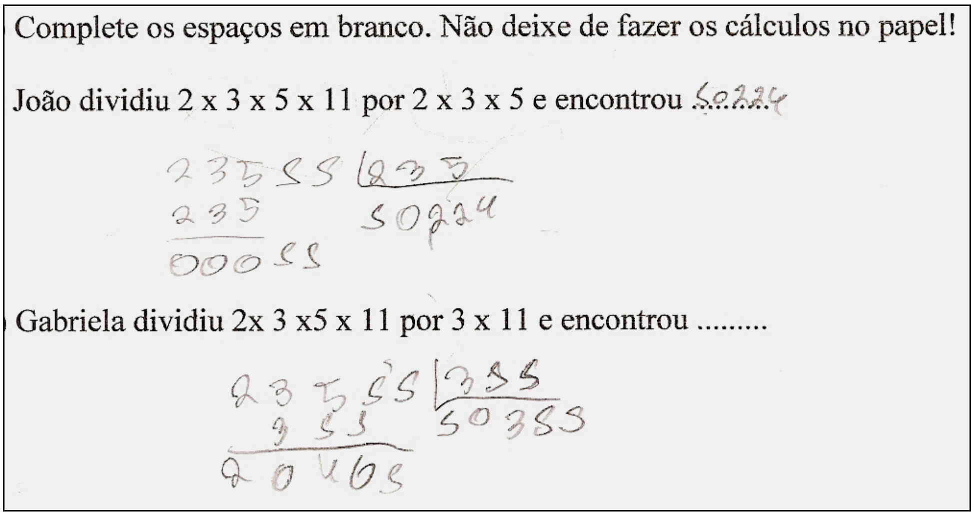
3.1.2.5 Desempenho nas questões de uso da decomposição dos números em fatores primos para otimizar cálculos (q8abc e q8d).

O objetivo central de toda a intervenção de ensino era criar condições para que os alunos operassem com a decomposição dos números em fatores primos e realizassem simplificações e cálculos mentais. Com estas questões, desejávamos investigar se já realizavam tais ações.

Assim, oferecíamos dois números naturais e solicitávamos aos alunos que dividissem o maior pelo menor. Entretanto, pelo menos, um destes números era apresentado decomposto em fatores primos. Para melhor esclarecer, nas questões q8abc, dividendo e divisor eram apresentados decompostos em fatores primos e pedíamos aos alunos que encontrassem o quociente. Na questão q8d, eram apresentados dividendo e quociente, sendo que apenas o primeiro decomposto em fatores primos, e era preciso obter o divisor.

[37] Estamos nos referindo à terna formada pelas situações, pelos invariantes e pelas representações.

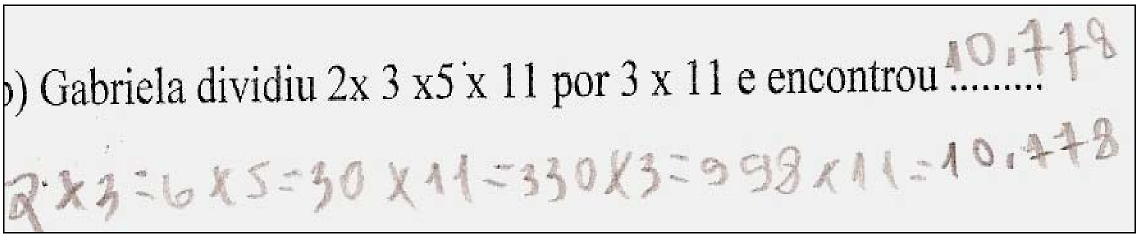
Consideramos q8d mais difícil que q8abc, pois requer, para sua solução, que o aluno reconheça que, quando a divisão é exata, o divisor é o resultado da divisão do dividendo pelo quociente, o que usando a linguagem matemática pode ser expresso: *“se a : b = c, então a: c = b, sendo a, b e c números inteiros”*. Contudo, as dificuldades apresentadas pelos alunos na avaliação inicial em todos os itens da questão 8 estão associadas sobretudo à interpretação do enunciado. Nas figuras 3.26 e 3.27, fornecemos dois exemplos:


Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!

João dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por 2 x 3 x 5 e encontrou 50224

Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou ....

Figura 3.26:
Outra interpretação para decomposição em fatores primos


b) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou 10.778

2 x 3 = 6 x 5 = 30 x 11 = 330 x 3 = 998 x 11 = 10.778

Figura 3.27:
Outra interpretação para a palavra *por*

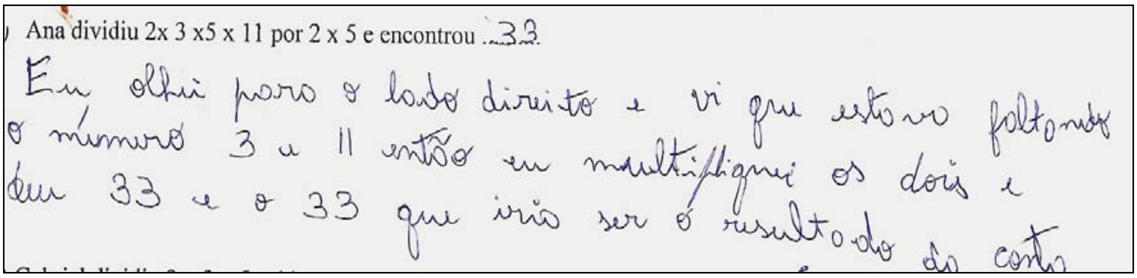
Em 3.26, o aluno desprezou o símbolo da multiplicação escrito entre os números e interpretou *2 x 3 x 5 x 11,* como o número 23511 (vinte e três mil, quinhentos e onze). Em 3.27, a presença da palavra *por* sugeriu para o aluno a operação de multiplicação e ele não levou em consideração outros termos também presentes no enunciado como *“dividiu”*.

Realizamos, também, o Teste de McNemar para estas questões e os crescimentos das taxas de acerto da avaliação inicial para a avaliação final foram considerados significativos.

Devemos destacar que boa parte dos alunos que erraram tais questões na avaliação inicial, passaram a acertá-la na avaliação final. Os alunos que as haviam feito corretamente na avaliação inicial, alteraram os procedimentos adotados de uma avaliação para a outra.

Assim, na avaliação inicial, realizavam os cálculos para identificar cada número separadamente e, em seguida, efetuar as divisões, o que requeria mais tempo e envolvia cálculos com números maiores. Na avaliação final, realizaram simplificações tendo em vista a decomposição dos números para, então, obter o resultado da divisão de um pelo outro.

Na Figura 3.28, apresentamos o extrato da avaliação final de um aluno que mudou seus procedimentos:


Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ...33

Eu olhei para o lado direito e vi que estava faltando o número 3 e 11 então eu multipliquei os dois e deu 33 e o 33 que iria ser o resultado da conta

Figura 3.28:
Operando com as fatorações

Na avaliação inicial, o aluno fez os cálculos e descobriu que *2 x 3 x 5 x 11* é igual a 330. Em seguida, fez novos cálculos para obter o resultado de *2 x 3 x 5*. Somente de posse destes números, calculou o quociente 11. Já, na avaliação final, o aluno não se preocupou em efetuar quaisquer cálculos. Simplificou primeiro, ou seja, *“eliminou”* os fatores comuns às duas decomposições para encontrar o mesmo resultado da avaliação inicial, mas, desta vez, mais rapidamente e operando com números menores.

Apenas em q8d alguns alunos ainda mantiveram o mesmo procedimento empregado na avaliação inicial Atribuímos isto ao fato de que um dos números do enunciado, 55, não estava decomposto em fatores primos. Para efetuar as simplificações, o aluno deveria fazer sua decomposição, ou seja, era necessário incorporar mais esta ação ao esquema de resolução da questão que envolve a simplificação. Entretanto, nem todos o fizeram e empregaram o esquema antigo, que já dominavam e que envolvia cálculos com números maiores, como mostramos nos protocolos a seguir (Figuras 3.29 e 3.30):

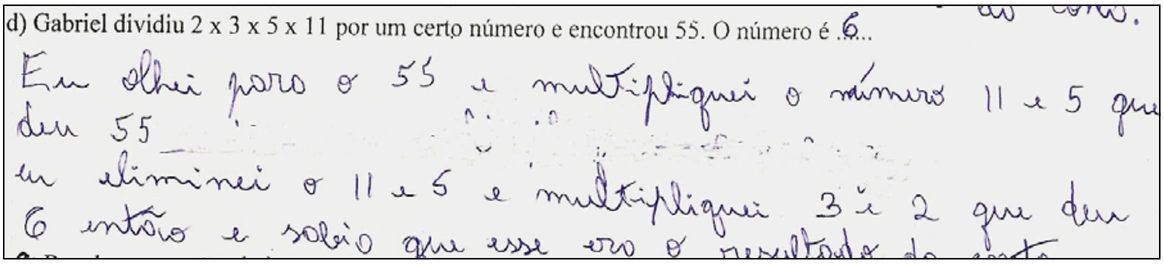


Figura 3.29:
Fatorando para efetuar os cálculos

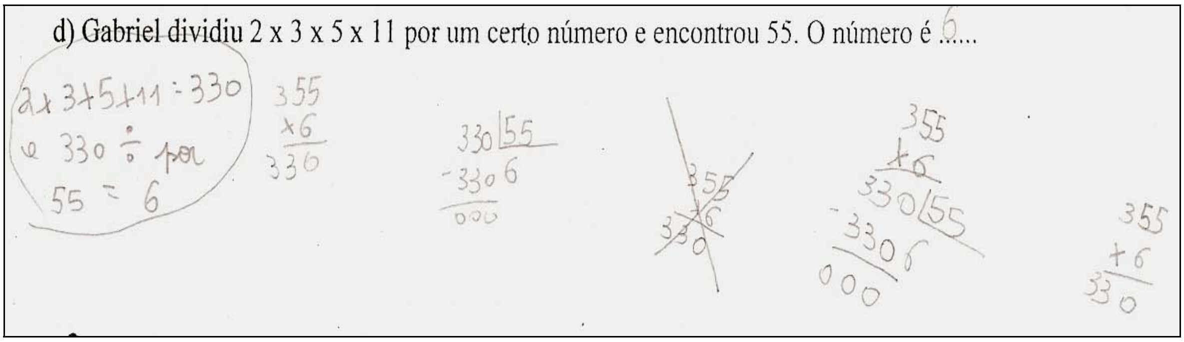


Figura 3.30:
Cálculos e estimativas para resolver q8d

Ao comparar as duas soluções apresentadas pelos alunos na avaliação final, percebemos que o primeiro decompôs 55 e efetuou as simplificações possíveis. O segundo não só efetuou cálculos para obter o resultado de *2 x 3 x 5 x 11,* como também ficou estimando o número por que deveria dividir 330 para encontrar 55. Neste caso, o aluno não aplicou nem a propriedade da divisão exata (se *a : b = c, então a : c = b, para quaisquer inteiros a, b e c).*

Finalmente, não podemos deixar de comentar a maneira como os alunos registravam seus pensamentos e suas soluções para as questões. Aqueles que empregavam o procedimento mais longo de efetuar os cálculos, simplesmente deixavam os cálculos escritos e não houve variação considerável nestas escritas.

Mas os que optaram pela simplificação e precisaram operar com a decomposição dos números, circulavam ou riscavam os fatores comuns, para que, então, ficassem evidentes os fatores *"incomuns"* que compõem o resultado da divisão a ser feita. Entretanto, quando tinham de organizar suas respostas, apagavam os traços e os círculos que faziam e escreviam uma operação matemática. Os extratos dos protocolos abaixo são exemplos:

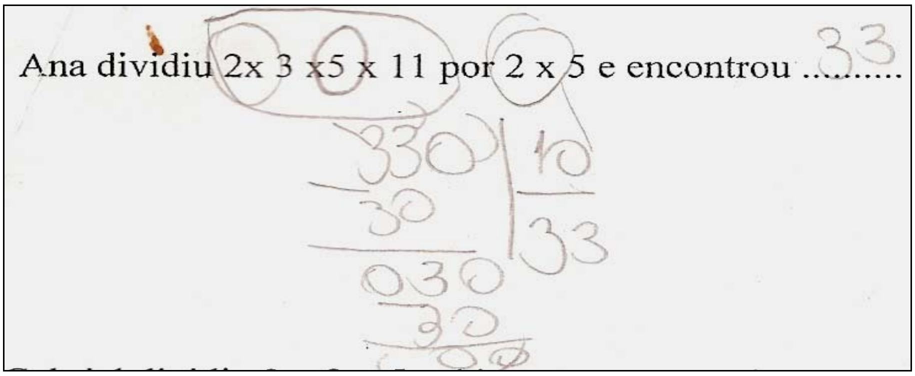


Figura 3.31:
Identificação dos fatores comuns

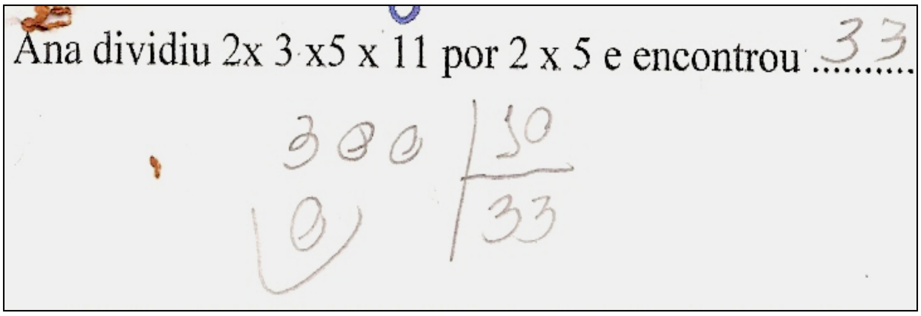


Figura 3.32:
Procedimento padrão

O primeiro é um dos raros registros que conseguimos impedir que o aluno apagasse. Nele, vemos que ele circulou o 2 e o 5 nas duas decomposições, destacando num retângulo maior os fatores restantes. No segundo, vemos uma conta armada com muita organização, sem pequenos cálculos ao redor, o que é comum quando os alunos operam com números grandes. Foi exatamente este excesso de limpeza e organização que nos levou a desconfiar do procedimento que adotavam.

Em entrevista informal os alunos explicaram-se. Assim, nas palavras de um aluno: *“saí cortando tudo e depois armei a conta para dar a resposta certa”*. Em outras palavras, o aluno efetuou as simplificações, entretanto entendia que a maneira correta de resolver um problema é armar uma conta. Não admitia outra forma de solução, mesmo depois de uma longa intervenção de ensino em que lhe foi permitido jogar, desenhar, manipular unidades quadradas e tabelas, etc. Temos, então, mais uma evidência das conseqüências de um ensino tradicional que prioriza alguns raciocínios e representações em detrimento de outros.

3.2 Análise da intervenção

Na seção anterior, realizamos a análise quantitativa dos resultados, cujo principal parâmetro foi o número de acertos que nossos alunos obtiveram nos testes diagnósticos (avaliação inicial e avaliação final). Com base nesta análise, podemos afirmar que a intervenção de ensino favoreceu o processo de ensino-aprendizagem do Teorema Fundamental da Aritmética e dos conceitos relacionados a ele.

Ao procurar identificar os conhecimentos prévios e os conhecimentos adquiridos pelos alunos durante a intervenção, o tratamento qualitativo às soluções que apresentaram nos testes, foi inevitável.

Na presente seção, realizamos uma análise da qualidade dos tipos de resolução e das estratégias utilizadas pelos sujeitos nas atividades que compuseram a intervenção de ensino. Para facilitar nosso estudo, dividimos as atividades em três grupos. Ao final de cada grupo, listamos os principais conhecimentos matemáticos envolvidos nas ações das crianças. Cabe lembrar que eles estavam implícitos nas ações, portanto as crianças não os enunciavam em linguagem matemática formal e, com certa dificuldade, empregavam-nos a situações diferentes das que foram produzidos.

3.2.1 Análise do primeiro grupo de atividades

O primeiro grupo é composto de três atividades (jogo de restos, construção de retângulos e tábua de Pitágoras) e uma avaliação intermediária. Nosso objetivo foi favorecer a compreensão das relações de divisibilidade e suas principais propriedades. Subjacentes a estes assuntos, os alunos tiveram oportunidade de confrontar, informalmente, os conceitos de números primos e compostos.

3.2.1.1 Jogo de restos

Como já dissemos, a primeira atividade da intervenção de ensino foi o jogo dos restos. Ele foi realizado em três tempos de aula, com 50 minutos cada, distribuídos em dois dias, ou seja, aproximadamente, 150 minutos. No primeiro dia, em um encontro de 100 minutos, foi feito o reconhecimento do jogo (o material usado para jogar e a ficha para registrar os resultados de cada partida, em que consistia o jogo, algumas partidas de familiarização), e os alunos jogaram. No segundo dia, refletimos sobre o jogo e propusemos aos alunos que organizassem seus conhecimentos por escrito e individualmente.

Os momentos vividos pelos alunos ainda na compreensão do jogo e na organização do material merecem ser destacados. No dia anterior ao início da atividade, pedimo-lhes que trouxessem dados para a escola. Então, já no primeiro dia, pudemos perceber o empenho e a adesão dos alunos. Houve um grande número de dados trazidos por eles. Mesmo aqueles que não o tinham em casa construíram dados de papel para participar da atividade.

Outro aspecto interessante ficou por conta dos procedimentos deles enquanto recebiam os pratinhos e feijões. Sem ter conhecimento das regras nem ter recebido qualquer instrução, tratavam de distribuir igualmente entre cada indivíduo da dupla tais materiais. Este procedimento desnecessário para a realização do jogo, gerou obstáculos na compreensão de suas regras. Até compreenderem que feijões e pratinhos deveriam ficar à disposição do jogador que tivesse acabado de lançar o dado, muitos alunos brigavam porque não queriam “emprestar” pratinhos para o colega com quem jogavam.

Embora tenha fugido ao tema deste trabalho, surgiu uma inquietação: Por que os alunos adotaram o procedimento de distribuir igualmente? Indagados sobre isso, muitos responderam que, quando não estão trabalhando individualmente e recebem um material que não compraram por conta própria, preferem dividir tudo “certinho” para “evitar confusão e injustiças”. O fato sugeriu um senso de justiça e participação por parte dos alunos. Além disso, o emprego do termo *certinho* também despertou nossa curiosidade: Os alunos valorizam demasiadamente a distribuição em partes iguais de modo a considerá-la a única forma certa? Não admitem outra possibilidade de distribuição de uma quantidade? Não pensam, por exemplo, na distribuição em partes proporcionais? Na verdade, quais critérios adotam para julgar se uma distribuição é certa ou errada? Estas questões não eram o foco de nossa pesquisa, mas as levantamos para destacar a relevância de futuras pesquisas sobre o tema.

Ao voltarmos nossas atenções para os momentos nos quais os alunos efetivamente jogavam, nos próximos parágrafos iremos apresentar os dados relativos à execução propriamente dita da atividade. Podemos dividi-los em três categorias: Quando o aluno tirava 1 no dado, Discussão dos restos e Contagem dos feijões.

Quando o aluno tirava 1 no dado

Nas primeiras rodadas, em todas as duplas, se algum aluno tirasse 1 no dado, o procedimento era o mesmo: colocar apenas um feijão no prato e considerar que os outros grãos eram o resto. Transcrevemos[38] abaixo uma parte de um debate de uma dupla mediada por nós, que ilustra um tipo de raciocínio protótipo da turma. Os demais nomes são de alunos e abreviamos por questões éticas.

[38] Em todos os diálogos e conversas transcritas, representamo-nos pela letra maiúscula G.

__G__: Mas, por que vocês estão fazendo assim?

Todos falam juntos.

__G__: Não estou entendendo nada. Pode falar um de cada vez?

Alguns levantam o braço.

__L.A.__: Porque não tem mais pratinhos para a gente ficar dando os feijões, então, só dou um para este e paro.

__B.H.__: É, não dá para distribuir. Para distribuir tem que ter mais pratos.

__G__: Quando você tem uma quantidade de coisas para distribuir para uma pessoa, o que você faz?

__B.H.__ Eu vou dando um para mim e um para ela.

__G__: Eu falei para repartir entre você e a pessoa?

__B.H__.: Foi, não foi?

__G__: Vou repetir. Você tem uma quantidade de coisas para distribuir para uma pessoa, o que você faz?

__B.H.__: Ah! Então é tudo para ela.

__G__: Agora pense nos feijões e em apenas um pratinho, o que você deve fazer?

__B.H.:__ Vou colocar todos no pratinho.

__G:__ Vai sobrar algum?

__B.H.:__ Não.

O debate sugere que boa parte dos alunos ainda apresenta dificuldades relacionadas a divisões com o divisor igual a um. O ato de distribuir objetos entre pessoas, por exemplo, parece fazer sentido para eles quando o número mínimo de pessoas envolvidas na distribuição é maior ou igual a 2.

Assumimos a distinção entre as classes de situações sugeridas por Vergnaud (1990a) e, desta forma, inferimos que as distribuições em que o divisor é um número inteiro maior ou igual a dois constituem uma classe de situações para as quais os alunos dispõem em seu repertório competências necessárias a seu tratamento. As distribuições com divisor igual a 1 pertencem à classe de situações para as quais eles não dispõem de todas as competências necessárias, o que os obriga a um tempo de reflexão e exploração, de hesitações e de tentativas abortadas.

Os alunos efetuavam as distribuições com divisor inteiro maior ou igual a 2 na seqüência de ações: colocar um feijão em cada pratinho, repetir esta ação enquanto ela for possível e, em seguida, contar quantos grãos foram colocados em um pratinho. Diante das distribuições com divisor 1, eles tentavam aplicar a mesma seqüência de ações, que se tornava sem sentido em razão da ausência de outros pratinhos. Isto os levava a interromper a distribuição depois de colocar apenas um grão no único prato.

Em resumo, os esquemas de que os alunos dispunham eram suficientes para a classe de situações em que a divisão corresponde à repartição de objetos entre indivíduos. Como a divisão por um não supõe repartição, o parentesco entre esta classe de situações e a primeira é apenas parcial e os esquemas que dão conta do tratamento de uma não são suficientes para o tratamento da outra.

Discussão dos restos

A partir de um determinado momento, muitos alunos começaram a trocar ofensas: acusavam-se de "roubo" no jogo. Indagados sobre os tipos de "roubo" que estavam acontecendo, eles listaram os seguintes:

- Pegar alguns feijões que haviam sobrado no copo para aumentar os restos;
- Distribuir de forma desigual os feijões nos pratos;
- Mexer no dado, depois de lançado, para dar um número "melhor";
- Alterar os dados da rodada na ficha de controle;
- Efetuar propositalmente de forma errada a soma dos restos de cada rodada da partida.

Desta lista, interessou-nos, especialmente, as ações de mexer no dado – o que estavam considerando um número "melhor" no dado? – e alterar os dados na ficha de controle. Com relação ao número "melhor", a transcrição da conversa esclarece:

G: Que história é essa? Um número pode ser melhor que outro?

Todos: Claro. Sim.

G: Um de cada vez, por favor. Como?

G.S.: O um é muito ruim. Nunca sobra nada.

L.G.: Quando é um, temos que dar tudo para o prato.

G: Há outros que vocês acham ruins?

B.H.: Pior que o um não tem, mas também tem outros meio ruinzinhos.

G: Pode dizer algum?

B.H.: O dois.

G: Qual é o problema do dois?

B.H.: São muitos números que não sobra feijão quando temos que distribuir com dois pratinhos. Se a gente ainda pudesse escolher os feijões depois do dado...

G: Com quais números não sobrou feijão quando vocês tiveram que distribuir entre dois pratos? Se pudessem, como vocês escolheriam a quantidade de feijão?

G.S.: 12, 18, 24, 22 e mais um monte.

B.H.: Os pares, os pares. É só assim: se deu dois no dado, pego um número ímpar de feijões.

G: Por quê?

B.H.: Porque aí, pelo menos, um feijãozinho ia sobrar.

A transcrição das falas revela que os alunos já começavam a perceber relações entre o número que saía no dado, o número de feijões que pegavam e o número de feijões que restava após a distribuição. Embora não tenham usado termos como *múltiplo, fator* ou qualquer outro relacionado ao campo conceitual da estrutura multiplicativa, mostraram saber que, se o número de feijões que pegaram para distribuir fosse múltiplo de dois, não lhes restaria feijões na distribuição desta quantidade em dois pratinhos. Já seriam capazes de generalizar esta idéia? Obtendo, no dado, números maiores que dois, conseguiriam estabelecer raciocínios análogos?

Possíveis respostas a estas perguntas serão discutidas mais adiante, mas não podemos negar que, pelo menos, implícitos na ação dos alunos estavam os conhecimentos de que a divisão de números pares por 2 é sempre exata e que o resto da divisão de números ímpares por 2 é sempre 1. A respeito disso Vergnaud (1990a) explica que um esquema assenta sempre numa conceitualização implícita e designa pelas expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação os conhecimentos contidos nos esquemas. Estes conhecimentos, passíveis de serem verdadeiros ou falsos, são teoremas-em-ação. As noções de número par, número ímpar, o conhecimento do sistema de numeração, bem como das quatro operações correspondem aos alicerces sobre os quais se fundamentam os teoremas-em-ação, isto é, são os conceitos-em-ação.

Com relação às alterações na ficha de controle, elas ocorriam da seguinte maneira: o aluno esperava que seu adversário se distraísse, apagava os valores dos restos lançados nas rodadas anteriores e escrevia valores maiores. A discussão sobre as possibilidades de se evitar ações desse tipo permitiu que os alunos dessem mais um passo no processo de formação dos conceitos em questão:

G(aluna): Gabriela, Gabriela, olha aqui como é que o Higor "rouba".
G: Mas o que ele fez?
G: Aqui. Ele apagou e aumentou os restos dele.
H.: Não fiz nada disso...

Risos.
G: Estou vendo. Mas você não tem como controlar isso?

A aluna mostra-se pensativa, mas não responde.
G: Pessoal, vamos conversar um pouco. Como podemos evitar que o adversário nos trapaceie no jogo?
Todos: Prestando atenção. Muita atenção em cada coisa que fizer.
G: Mas como podemos perceber agora se já sofremos algumas trapaças?

Silêncio.

G: Vamos ver esta situação da Gabi e do Higor. Ele tirou 5 no dado, colocou 11 feijões em cada pratinho e sobraram 6 feijões. Isto é possível?

B.H.: Não.

G.S.: Por que não?

B.H.: Porque ele ainda pode colocar um em cada prato e vai ficar com um na mão.

G: Vocês concordam?

Todos: Sim, sim.

G: Então, vamos analisar as fichas de controle para detectarmos os problemas.

Por meio desta discussão e da revisão das fichas, os alunos concluíram que o maior resto possível tem sempre uma unidade a menos que o número de pratos. Podemos dizer que, nas ações e esquemas que mobilizavam, mais uma vez, havia conhecimentos matemáticos implícitos. Destacamos a comparação de números naturais e o algoritmo da divisão.

No caso do algoritmo da divisão, os alunos não são capazes de enunciá-lo nem mesmo demonstrá-lo, tratando-se de um teorema-em-ação. Como conceito-em-ação, podemos citar a idéia de número e as relações de comparação "maior que" e "menor que", usadas pelos alunos na análise das fichas.

Contagem dos feijões usados em cada rodada

Antes de expormos os diferentes procedimentos adotados pelos alunos na contagem dos feijões usados em cada rodada, é importante destacarmos que a maneira como eram distribuídos nos pratos não variou muito de um aluno para outro. Enquanto alguns faziam a distribuição colocando apenas um feijão em cada prato, outros a faziam colocando dois. Assim, diferenças processuais significativas foram observadas apenas na contagem após a distribuição. Motivada pelo preenchimento da ficha de controle da partida, que reserva uma coluna para o total de grãos, ela ocorreu de três maneiras diferentes.

a) Contando um a um

O aluno simplesmente apontava cada feijão e ia falando a seqüência dos números naturais. No exemplo desenhado abaixo, a criança falou a seqüência dos números naturais de um até 22. Esta estratégia foi usada pela maioria dos alunos.

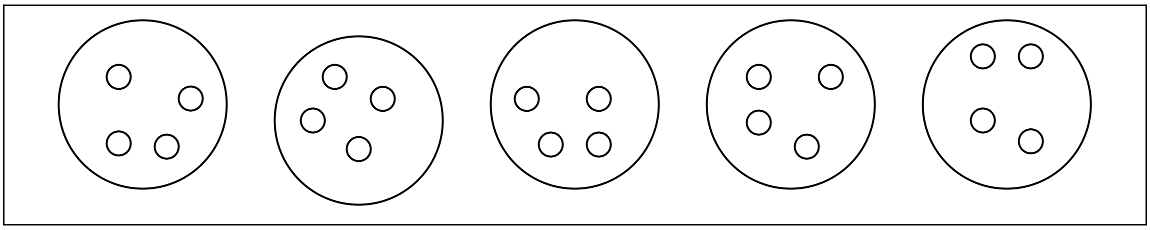


Figura 3.33:
Distribuição dos feijões nos pratos

b) Falando múltiplos

Esta estratégia foi usada por alguns alunos quando a quantidade de grãos por prato era um número menor ou igual a nove, e caracterizou-se por três ações: apontar os pratinhos e, simultaneamente, falar a seqüência dos múltiplos positivos da quantidade de grãos por prato. Em seguida, somar o resto, ou seja, somar a quantidade de feijões que havia sobrado após colocar o maior número possível de feijões em cada prato. Na situação mostrada acima, utilizando este procedimento para contar o total de feijões de que dispunha, um aluno agiu da seguinte maneira: apontando o primeiro prato, falou quatro, o segundo, falou oito, o terceiro, falou 12, o quarto, falou 16 e o quinto, falou 20. Depois somou vinte com dois e concluiu que, antes de lançar o dado, tinha em mãos vinte e dois grãos.

c) Efetuando cálculos no rascunho

Alguns alunos recorriam a esta estratégia quando o número de feijões por prato era muito grande. Ela consistiu em, numa folha de rascunho, multiplicar o número de feijões por prato pelo número de pratos e, depois, somar o resto.

Na descrição das maneiras de contar os feijões, percebemos que cada uma mobiliza esquemas distintos que, por sua vez, assentam sobre conhecimentos implícitos distintos. Vergnaud (1990a), analisando estratégias de contagem semelhantes à primeira que descrevemos, identifica facilmente duas idéias matemáticas indispensáveis ao funcionamento do esquema: as de bijeção e de cardinal e reconhece uma organização invariante, essencial ao funcionamento do esquema:

> (...) coordenação dos movimentos dos olhos e dos gestos dos dedos e da mão relativamente à posição do objeto, enunciado coordenado da seqüência numérica, cardinalização do conjunto numerado por sublinhado tônico ou pela repetição da última palavra-número pronunciada.(VERGNAUD, 1990a, p. 137)

Semelhante à primeira que acabamos de comentar, a segunda maneira de contar os feijões também apresenta uma organização invariante, essencial ao funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e dos gestos dos dedos e da mão relativamente à posição do objeto. Enunciado coordenado da seqüência dos múltiplos do número de feijão colocado em cada prato. Adição do número de feijões que restaram, após a distribuição com o último múltiplo pronunciado e cardinalização do conjunto numerado por sublinhado tônico ou pela repetição da última palavra-número pronunciada.

Neste caso, identificamos, além das duas idéias matemáticas citadas por Vergnaud (1990a), como indispensáveis ao funcionamento do esquema, as idéias de seqüência dos múltiplos de um número e de adição.

Finalmente, a terceira maneira que descrevemos é um exemplo da afirmação de Vergnaud (1990a) de que as competências matemáticas também são sustentadas por esquemas organizadores da conduta. A seqüência da escrita efetuada pelos alunos mostrou claramente uma organização invariante, que assenta simultaneamente nos hábitos aprendidos.

Depois que os alunos jogaram, procuramos refletir com eles alguns aspectos mais gerais. Durante o jogo, eles tiveram oportunidade de colher dados numéricos relativos ao total de pratos, de feijões, de feijões por pratos e aos restos. A organização destes dados desencadeou o processo de generalização de alguns procedimentos.

Uma consideração que se tornou consenso entre os alunos e que, para nós, merece um destaque maior, diz respeito aos procedimentos que efetuavam para obter o total de feijões. Podemos dizer que a reflexão sobre tais procedimentos permitiu que revissem e descrevessem em linhas gerais, um processo para encontrar o total de feijões, que correspondeu aos seguintes cálculos: soma do resto ao produto do número de pratos pelo número de feijões por prato. Na discussão transcrita abaixo, estabelecida entre dois alunos e mediada por nós, podemos reconhecer isto:

G: Como podemos descobrir o total de feijões?

Ma: É só contar quantos feijões colocou em cada prato e depois multiplicar.

J.P.: É. É...

G: Mas multiplicar, multiplicar por quanto?

Ma: Se forem dois pratos, multiplicar por 2. Se forem três pratos, multiplicar por 3. Se forem 4, por 4. Se forem 5, por 5. Se forem 6, por 6.

G: Mas e se for um prato só?

Ma: Não precisa multiplicar.

G: Você concorda, João?

J.P.: Concordo. Concordo...

G: Você acha que assim estão contando todos os feijões que pegaram?

J.P.: É, não é?

G: Mas e os feijões que sobraram e não foram colocados em nenhum prato?

Ma: Ih! Esquecemos deles.

J.P.: Ah! É só juntar.

Ma: É isso aí. A gente multiplica e depois soma.

G: Mas multiplica o que pelo quê? E soma com quê?

Ma: Ai! Tem que repetir?

G: Mas você ainda não me disse.

J.P.: Deixa que eu falo. Pega quantos foram os feijões no prato e multiplica por quantos pratos tiver. Depois soma os que sobraram.

Ma: Mas, se for um prato só, nem precisa multiplicar.

G: Durante o jogo, eu estava observando e vocês não estavam fazendo assim, estavam?

Ma: Não. Os pratinhos estavam na nossa frente e, aí, a gente contava.

J.P.: Contar é mais fácil que fazer conta.

Percebemos que os alunos iniciavam um processo de generalização fundamentados nas características da situação, tal como Vergnaud (1990a) prevê. Entretanto, em situação, optavam pela contagem e não realizavam os cálculos que descreveram na conversa transcrita, pois julgavam a contagem um método mais fácil e seguro. Franchi (1995) relata que, quando realizou o mesmo jogo com os sujeitos de sua pesquisa, também, verificou o esquecimento dos restos e a facilidade de interpretação de uma ação de formação de grupos com o mesmo número. Mas, alerta que este último fato não é generalizável para a interpretação de um problema verbal em uma fórmula multiplicativa.

É importante, ainda, mencionarmos que, convidados ao quadro de giz para expressar por escrito os cálculos que efetuavam, alguns alunos apresentavam a resposta certa, mas escreviam falsas igualdades matemáticas. Por exemplo, para uma situação em que foram usados 3 pratos, colocados 7 feijões em cada um e obtidos 2 feijões como resto, um aluno escreveu *"3 x 7 = 21 + 2 = 23"* em vez de *3 x 7 + 2 = 23"*. Inferimos que a produção das falsas igualdades deve-se à redução do significado do símbolo "=" à palavra "é". Ao usar o símbolo "=", o aluno não lhe atribuía todos os significados e, conseqüentemente, propriedades, que a igualdade entre expressões matemáticas possui. Inevitavelmente, preocupamo-nos com as possíveis implicações do uso incorreto da simbologia no processo de construção dos conceitos de múltiplo e fator, que era o principal objetivo da atividade. Pedimos, então, aos alunos que justificassem cada etapa da escrita:

G: Luan, escreve lá no quadro os seus cálculos para obter o total de feijões.

O menino escreveu no quadro *"3 x 7 = 21 + 2 = 23".*

G: Agora explique para todo mundo por que você fez assim.

Lu: Eram 7 feijões. Eram 3 pratos. Aí 3 vezes 7 dá 21. Como ainda tinha 2 sem prato, 21 mais 2 dá 23.

O diálogo sugere que o aluno compreendia perfeitamente o que estava fazendo e que a escrita da falsa igualdade matemática não influenciava seu raciocínio. Ele dominava uma seqüência de ações, e a igualdade era apenas um meio de expressar ou comunicar esta seqüência. Inferimos que a escrita de falsas igualdades é decorrente de uma formação escolar que, priorizando resultados, pouco incentivou a produção de textos matemáticos. Embora fugisse de nosso objetivo naquele momento, procuramos discutir estas falsas igualdades com os alunos a fim de corrigi-las. Segundo Vergnaud (1983a, p. 393; 1988, p. 141; 1990a, p. 145; 1993, p. 8; 1997, p. 6):

> as representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) podem ser usadas para indicar e representar as invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Nas atividades posteriores, a escrita adequada destas igualdades constituiu uma importante ferramenta para a construção dos conceitos em questão.

Prosseguindo a reflexão com a turma, verificamos que a ênfase nos casos em que o resto era zero, minimizava ou praticamente impossibilitava a produção de falsas igualdades matemáticas. Além disso, surpreendentemente, os termos múltiplo e divisor surgiram de modo espontâneo nas falas dos alunos e eles demonstraram domínio de certos aspectos do campo conceitual multiplicativo:

G: Observando a igualdade 5 x 7 = 35, o que podemos afirmar sobre a divisão de 35 por 7?

La: Dá 5 e não sobra nada.

G: Como você sabe disso?

Le: Porque 5 vezes 7 dá 35.

La: Ou então porque o 35 é múltiplo de 7.

G: Que palavra é essa? O que ela significa?

La: Que o 35 está na tabuada do 7. Mas não tem só ela. Tem uma outra: divisor.

G: E, para você, quando um número é divisor de outro?

Le: É quando o número divide outro, né?

La: Assim, olha, o 35 dividido por 7 dá 5 sem sobras, então o 7 é divisor do 35.

Quando perguntados por que empregavam estes termos, os alunos responderam que *"já haviam estudado múltiplo e divisor até m.m.c. e m.d.c"*. Mas, embora isto fosse verdade, percebemos que boa parte apresentava idéias equivocadas relativas a esses conceitos. Dentre elas, destacamos aquelas que também foram identificadas entre os sujeitos das pesquisas organizadas por Campbell e Zazkis (2002):

a) A identificação dos conceitos de múltiplo e divisor com, respectivamente, as operações de multiplicação e divisão.

A própria aluna que colocou os termos em debate, confundia-os com freqüência. Assim, analisando outra igualdade matemática também obtida a partir da situação do jogo e comentava:

La: Seis vezes oito dá quarenta e oito. Por isso o quarenta e oito é múltiplo.

G: Mas o quarenta e oito é múltiplo de que número?

La: O quarenta e oito é múltiplo porque é uma multiplicação. Se fosse uma divisão seria divisor.

b) A troca entre os conceitos: empregavam o termo múltiplo, quando deveriam empregar o termo divisor e vice-versa.

Para incidir sobre estas idéias equivocadas, optamos pela exploração oral e escrita das igualdades matemáticas que os alunos produziam e pela análise da situação do jogo que foi tabelada. Tais explorações não foram ações coordenadas e independentes. Ao contrário, foi um processo cheio de idas e vindas, que começou na análise da situação, passou à análise da igualdade, mas, em muitos momentos retornou à situação. O mau emprego dos termos, na verdade, esteve presente, também, nas demais atividades que se seguem.

c) A extensão dos procedimentos ao domínio dos racionais

Para verificar relações de divisibilidade entre pares de números, alguns alunos efetuavam a divisão de um pelo outro. Entretanto, havendo resto na divisão, prosseguiam os cálculos indefinidamente. Informamos aos alunos que não deveriam prosseguir, que deveriam trabalhar com números naturais. Depois disso, equívocos como esse não ocorreram novamente. Antes de iniciarmos a intervenção de ensino, os alunos estavam estudando números racionais. Inferimos que o estudo recente do assunto, influenciou a conduta dos alunos.

3.2.1.2 Construção de retângulos

Como já explicamos, uma parte de nossa pesquisa consistiu em uma intervenção de ensino que visou à construção de novos significados a respeito da decomposição de um número em fatores primos por parte dos alunos.

Iniciamos a intervenção com o jogo dos restos. Por meio dele, os alunos conceituaram múltiplo e fator de um número com base nas distribuições de resto zero, reconheceram na análise da situação, que, se um número for múltiplo de outro, então, este último será fator do primeiro e utilizaram o simbolismo associado aos conceitos de múltiplo e fator de um número.

Ao dar continuidade, a *construção de retângulos*, segunda atividade do primeiro grupo, permitiu que a discussão a respeito da obtenção dos fatores de um número se intensificasse e os aluno pudessem confrontar os conceitos de números primos e compostos.

Nesta atividade, realizada em três tempos de 50 minutos, os alunos construíram retângulos, utilizando números diferentes de unidades quadradas. As dimensões dos retângulos correspondiam aos fatores da quantidade ou (número) de unidades quadradas que os alunos dispunham. Primeiramente, solicitávamos que obtivessem os retângulos a partir da medida de área que mencionávamos. Em momentos subseqüentes, pedíamos que identificassem a menor quantidade de unidades quadradas que deviam tomar para obter um número de retângulos de mesma área e de diferentes dimensões que estipulávamos.

Iniciamos a atividade, explicando aos alunos que se tratava de um quebra-cabeça um pouco diferente daqueles que estavam acostumados a montar. Pedimos que, discutissem a respeito de todos os possíveis retângulos, construíssem-nos, usando as unidades quadradas e, em seguida, desenhassem no papel quadriculado tais construções.

Já nos primeiros momentos, a atividade desenvolvia-se de uma maneira que não havíamos previsto. Percebemos a ocorrência do que denominamos de *divisão intelectual do trabalho*. Em vez de realizarem juntos cada etapa solicitada, os alunos combinaram uma divisão das tarefas. Em cada dupla, havia um indivíduo responsável para refletir sobre os retângulos, fazendo um esboço deles na folha de rascunho e, outro indivíduo, responsável apenas por passar os desenhos a limpo no papel quadriculado.

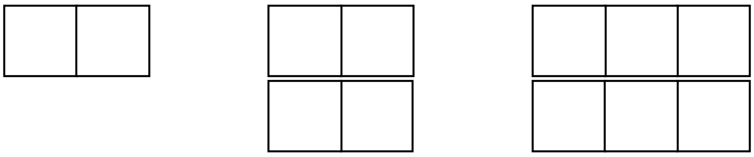
Em outras palavras, as ações dos alunos eram coordenadas, porém, eles não interagiam. A nosso ver, muitas possibilidades de troca de informações e de reflexão estavam sendo desperdiçadas.

Para tentar reverter esse quadro, redistribuímos os materiais de modo que cada aluno recebeu 50 unidades quadradas, folhas de rascunho e papel quadriculado. Pedimos que tentassem fazer individualmente e, depois, comparassem suas produções. Conseguimos, assim, que a interação entre eles se expandisse gradativamente.

Passando a uma análise da atividade propriamente dita, destacamos ao longo de sua realização os seguintes aspectos: a dificuldade inicial para apreender suas *regras*; o esquecimento de certos retângulos e o abandono do material concreto.

A dificuldade inicial para apreender suas *regras*

Como havíamos previsto na análise prévia da atividade, alguns alunos não conseguiram perceber imediatamente que tipos de retângulos poderiam construir. Então, surgiram retângulos com peças sobrepostas; retângulos vazados ou mesmo polígonos que nem eram quadriláteros. Um equívoco que nos chamou atenção foi cometido pela dupla que construiu vários retângulos com áreas diferentes cuja soma era igual ao total de unidades de que dispunha. Quando, por exemplo, solicitamos que construíssem retângulos, usando 12 unidades quadradas, a dupla construiu:



Indagado sobre as causas de tais construções, Ben Hur, integrante da dupla, respondeu:

B.H.: Você pediu para fazer retângulos com os 12 quadradinhos e nós fizemos.

G: Mas você deve usar todos os quadradinhos no mesmo retângulo.

B.H.: Mas aí só vai dar para construir um sempre.

G: Não. Você monta um usando todos os quadradinhos, desenha para não esquecer como ficou. Depois você tenta montar um tipo diferente e assim vai.

B.H.: Ah! Você quer os tipos, né? Você não quer todos ao mesmo tempo?

Lutando ainda para não invalidar seu procedimento, o aluno apontou para os desenhos de uma dupla que havia compreendido a proposta e montado os retângulos 3 x 4, 2 x 6 e 1 x 12 e argumentou:

B.H.: Olha só. Eles acharam o mesmo número de retângulos que nós.

J: É, mas se fosse assim, eu acharia mais que você. Eu ia fazer 6 retângulos com dois quadradinhos cada. É claro que isso não vale.

A compreensão que Ben Hur e sua dupla tiveram da proposta sugere que alguns ajustes na atividade podem torná-la favorável ao ensino de seqüências e séries. Mas o episódio foi bastante relevante sobretudo porque serviu como parâmetro para que adotássemos uma postura mais cuidadosa na elaboração dos enunciados e na proposição das atividades.

Além disso, assim como no jogo dos restos, verificamos uma postura reflexiva em alguns alunos. Percebemos raciocínios sofisticados nos quais o aluno levanta e testa hipóteses, visando à generalização de procedimentos, mas, na maioria das vezes, fundamentado nas características da situação e não em leis matemáticas mais gerais. Desse modo, como argumentar com um aluno que levanta uma hipótese falsa? Qual o momento mais adequado para intervirmos?

Estas são questões-chave para o ensino de conceitos matemáticos que se tornaram uma preocupação constante em nossa pesquisa. Um dos princípios que estabelecemos a partir desse momento, foi o de que, qualquer tipo de argumento que discutíssemos com os alunos também deveria levar em conta as características da situação. Deveríamos sempre que possível, recorrer a exemplos e contra-exemplos. No caso acima, Ben Hur só se convenceu realmente quando propusemos que pegasse outras quantidades de quadradinhos e os seus resultados não coincidiram com os dos demais colegas.

Os retângulos mais esquecidos

Compreendida a proposta, os alunos não tiveram dificuldades para realizar a atividade. Inicialmente, estávamos preocupadas com sua dinâmica. Temíamos que não houvesse motivação suficiente para que ficassem construindo retângulos ininterruptamente. Entretanto, a cada número que solicitávamos, estabeleciam entre eles uma competição: Que dupla conseguiria fazer o maior número de retângulos no menor tempo?

Passaram a construir os retângulos, cada vez mais rapidamente, reclamavam quando demorávamos a propor o número de unidades quadradas de que deveriam dispor e, conseqüentemente, produziam mais erros.

Com isso, outras preocupações nos ocorreram: Este tipo de competição pode trazer benefícios para o espaço escolar? Os erros que cometiam eram decorrentes apenas da pressa ou havia outras causas? Conseguiríamos contemplar os objetivos que traçamos?

Para tentar responder a estas questões, precisávamos conter um pouco a ação dos alunos. Precisávamos criar condições para que agissem de forma mais reflexiva. Resolvemos, então, interferir na competição e propusemos duas novas regras:

Regra 1: Para cada número de unidades quadradas que mencionávamos, os alunos teriam dois minutos para montar os retângulos. Todas as duplas que conseguissem construir todos os retângulos dentro desse intervalo seriam vitoriosas.

Regra 2: Ao final dos dois minutos faríamos uma correção coletiva em que alguma dupla iria ao quadro desenhar os retângulos que construiu.

A princípio, muitos alunos não gostaram das novas regras:

G. S.: Assim vai ficar sem graça. Todo mundo vai ganhar.

G: Mas será que do outro modo alguma dupla ganhava alguma coisa? Vamos corrigir o que foi feito até aqui para ver?

Nesse momento, todos os alunos riram e nós continuamos:

G: Vamos ver o caso do 30, que vocês fizeram com toda pressa do mundo. Quem pode vir ao quadro desenhar os retângulos que construiu com 30 quadradinhos?

G. S.: Eu boto.

No quadro, o aluno desenhou os retângulos 3 x 10, 6 x 5 e 1 x 30 e nós perguntamos à turma:

G: Estes são todos os retângulos que ele poderia construir?

Para nossa surpresa, quase todos os alunos responderam que sim, isto é, esqueceram do retângulo 2 x 15. Continuando a correção, verificamos que, na maioria das vezes, as duplas se esqueciam dos mesmos retângulos. Na Figura 3.34, fornecemos alguns exemplos:

Número de unidades	Retângulos possíveis	Retângulo (s) esquecido (s)
18	1 x 18, 2 x 9, 3 x 6	Nenhum
24	1 x 24, 3 x 8, 4 x 6 e 2 x 12	2 x 12
28	1 x 28, 4 x 7 e 2 x 14	2 x 14
36	4 x 9, 6 x 6, 1 x 36, 2 x 18 e 3 x 12	2 x 18 e 3 x 12

Figura 3.34:
Retângulos possíveis x retângulos mais esquecidos

Iniciamos, então, uma investigação mais detalhada sobre os procedimentos adotados pelas duplas para obterem os retângulos.

A passagem da manipulação das unidades quadradas para o cálculo mental

Quando os alunos começaram a construir os retângulos, utilizavam muito as unidades quadradas. Construíam uma fileira com algumas delas e, em seguida, tentavam completar outras fileiras idênticas.

Ao perceber que alguma ficaria incompleta, concluíam que deveriam começar novamente, alterando a quantidade de unidades quadradas da primeira fileira. Por exemplo, para construir um retângulo com 36 unidades quadradas, uma dupla fez uma fileira com cinco delas e, em seguida, fez mais seis fileiras do mesmo tipo. Mas, ao observar que sobrou uma unidade, desistiu e reiniciou o procedimento, alterando o número de unidades quadradas da primeira fileira. O desenho abaixo dá uma idéia como foi esse procedimento:

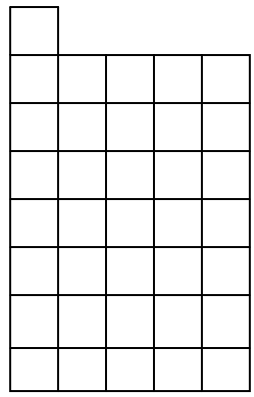


Figura 3.35:
Procedimento inicial para compor os retângulos

Ao longo da atividade, percebemos que esta estratégia inicial estava sendo deixada de lado por todas as duplas. Quase não manipulavam mais as unidades quadradas. Desenhavam imediatamente os retângulos no papel quadriculado. Aqueles que, por vezes, ainda manipulavam já partiam para a construção correta. Não levantavam hipóteses sobre ela. Concluímos que, por meio da manipulação dos quadrados, os alunos criaram uma representação mental da situação, o que, segundo Vergnaud (1990a), corresponde a mais um passo no sentido da conceitualização. Para ele, na medida que o indivíduo apropria-se da situação, ele cria representações mentais para ela e vice-versa. Assim, aproveitamos um momento de correção para perguntar:

G: - Desenha lá o quadrado! Vocês ficaram o tempo todo pegando no quadradinho? Quem não pegou no quadradinho, levanta o dedo. Então, vamos começar lá. Gabriel Leal! O que você pensava pra fazer a conta sem pegar no quadradinho?

G. L.: - Pensei na conta de vezes.

G: - Que conta de vezes você fazia?

G. L.: - Assim, 36 eu fiz 6 x 6.

G. S.: - Multiplicava pra chegar no resultado.

G.: E você Ben Hur, como fazia?

B.H.: Eu dividia. Não é a mesma coisa?

G: Mas dividia o quê?

B.H.: Eu pensava: 36 dividido por 9 dá 4. Aí posso fazer o retângulo 4 por 9.

Uma análise mais detalhada do conteúdo da transcrição acima nos levou a distribuir as ações dos alunos em duas categorias.

Primeira categoria: os alunos estimavam mentalmente pares de números cujo produto era o número de unidades quadradas de que dispunham. Por exemplo, dispondo de 36 unidades, os alunos estimavam pares de números cujo produto era 36. E, então, encontravam 4 e 9, 6 e 6, etc.

Este tipo de ação nos permitiu inferir sobre uma possível causa para os retângulos mais esquecidos. Na busca pelos pares de números, os alunos utilizavam seus conhecimentos sobre as tabuadas que estudam desde as séries iniciais do Ensino Fundamental – tabuadas de 2 a 10. Voltando ao caso do 36, como não costumavam escrever a tabuada de 3 até 3 x 12 e a tabuada de 2 até 2 x 18, não se lembravam de que o produto destes pares também é 36.

Segunda categoria: os alunos dividiam mentalmente ou no rascunho o número de unidades quadradas pela seqüência de números naturais diferentes de zero. Apenas as ações de cerca de 4 das duplas, enquadraram-se nesta categoria. Assim, fortalecendo o que inferimos acima sobre os retângulos mais esquecidos, tal minoria praticamente não esquecia de nenhum retângulo. Afinal, seguindo estas ações, os mais esquecidos eram os primeiros a surgir. Nossa curiosidade se voltou, então, às seguintes questões: A partir de que momento paravam de efetuar as divisões? Que critérios usavam para interromper as ações? A conversa transcrita abaixo foi reveladora para nosso estudo:

G: Mas vocês ficam dividindo a vida toda? Como fazem?

B.H.: Não. Tem uma hora que a gente para, né? Se não, a gente estaria até agora fazendo contas para o primeiro, concorda?

G: Mas, então, quando vocês resolvem parar?

M: Quando o número vai ficando muito grande. Quando passa da quantidade de quadradinhos que você fala.

G: Mas precisa ir realmente testando até chegar ao número que eu falei?

B.H.: Ah, eu não faço assim, não. Quando vai chegando lá pela metade, eu já sei que posso pular para o próprio número.

G: Por quê?

B.H.: Porque, quando passa da metade, só dá 1, só dá 1, só dá 1... E tem resto.

G: O que só dá 1?

B.H.: As divisões.

Nesta conversa, percebemos que as ações dos alunos são coordenadas por algumas propriedades das relações de divisibilidade. Eles sabem, por exemplo, que, dado um número natural *x*, os números diferentes de $\frac{x}{2}$ e de *x*, compreendidos entre eles, não podem ser fatores de *x*. Sabem, também, que o quociente da divisão de *x* por qualquer desses números é 1 e que o resto é diferente de zero. Embora não tenham usado termos como *múltiplo, fator* ou *divisor* e, talvez, nem sejam capazes de expressar formalmente tais propriedades, elas estão subjacentes às suas ações, constituem um teorema-em-ação. A divisão, a noção de intervalo numérico, os conceitos de múltiplo e fator são os conceitos-em-ação.

Ao final, iniciamos uma discussão com os alunos sobre a atividade. Desejávamos saber mais detalhadamente as estratégias que adotaram e as regularidades que observaram. Perguntamos à turma de que maneira obteve os retângulos, com que números foi possível construir quadrados, com que números foi possível construir mais retângulos e com que números só foi possível construir um retângulo.

Dando sinal de cansaço, os alunos não demonstraram interesse por responder tais questões. Quando o faziam, davam respostas curtas. Apenas com o propósito de cumprir a “obrigação” de responder. Não nos forneciam elementos pra aprofundar as discussões como desejávamos. Propusemos, então, um desafio que se caracterizou por favorecer o uso de raciocínios inversos aos que vinham adotando. Perguntávamos aos alunos qual a menor quantidade de unidades quadradas que deveriam pegar se quisessem formar um determinado número de retângulos. Este desafio os motivou novamente. A transcrição abaixo expõe como ele foi apresentado aos alunos:

G: Eu não vou dizer o número de quadradinhos que vocês vão pegar pra formar retângulos. Eu vou dizer assim: Eu quero que vocês consigam fazer três retângulos. Qual é o menor número de quadradinhos que vocês têm que pegar para conseguir formar três retângulos?

G. S.: 12.

G: - Por que 12?

G. S.: 3 x 4, 12 x 1 e 2 x 6.

Os alunos interessaram-se rapidamente pelo desafio. Aqueles cujos procedimentos na etapa anterior desta atividade foram enquadrados na primeira categoria, isto é, buscavam os produtos em vez de efetuar divisões, enfrentavam menos dificuldades, identificavam mentalmente o menor número que pudesse ser decomposto em três pares distintos de fatores.

O aluno que teve a fala transcrita acima era um deles. Já aqueles cujas ações se enquadram na segunda categoria paralisaram-nas por algum tempo, refletindo sobre qual estratégia adotar. Como começariam as divisões, se precisariam descobrir o número a ser dividido? Um caminho seria pensar em números que possuem seis fatores, entretanto nenhum aluno teve esta idéia. Ainda que tivessem, as pesquisas de Teppo (2002) mostram que a obtenção de um número, conhecida a sua quantidade de fatores, não é uma tarefa simples para os estudantes.

Após refletir, parte desses alunos passou a adotar a mesma estratégia dos outros, que descrevemos acima, e os demais escolhiam aleatoriamente os números para verificar pelas divisões, se permitiam construir as quantidades de retângulos que pedíamos. É importante mencionarmos que os alunos que efetuavam as divisões, eram os que, nesta proposta, produziam mais erros.

O fato nos levou a pensar sobre o quanto a eficácia dos procedimentos é relativa e, como Vergnaud (1990a) afirma, depende das características da situação. Quando o número de unidades quadradas a serem usadas era conhecido, os alunos que adotavam esse procedimento eram os que cometiam menos erros.

Assim, inferimos que a necessidade de controlar duas variáveis (o número de unidades que estimavam aleatoriamente e a seqüência dos números naturais pelos quais deveriam dividir o número escolhido) era a causa da maior incidência de erros neste grupo.

Para nós, os questionamentos dos alunos foram indícios do envolvimento do grupo. Com isso, demos continuidade à conversa, procurando, na medida do possível, conduzi-la de forma a obtermos respostas às questões que havíamos apresentado inicialmente, o que conseguimos com sucesso. Dentre os aspectos abordados, destacamos:

a) A diferenciação entre primos e compostos;
b) O desvio da discussão para o conceito de números quadrados; e
c) A tentativa de identificar um padrão para números primos e para números quadrados.

a) A diferenciação entre primos e compostos

A conversa que permitiu tal diferenciação foi um desdobramento do desafio acima. Depois de perguntar sobre as várias quantidades de unidades quadradas que permitiam formar três retângulos, perguntamos sobre as quantidades que permitiam formar 2, 4 e até 5 retângulos. Finalizamos perguntando sobre as quantidades que permitiam formar apenas um retângulo:

G: - Com que números, eu só consigo formar um retângulo?

R: 17.

M: 7.

L. A: 3.

B.H.: 2.

L: 9

G: - Nove serve?

M: 23.

B.H.: Nove dá pra formar quadrado: 3 x 3.

Em suas respostas, com exceção do 9, os alunos listavam números primos. Assim, reconheciam que havia uma seqüência de números que só permitia formar um retângulo e havia uma outra seqüência que permitia formar mais de um retângulo. Em outras palavras, construíam uma representação geométrica para os conceitos de números primos e compostos.

Cabe destacar que, para Vergnaud (1990a), o domínio progressivo das representações associadas ao conceito favorece a conceitualização Explorando estas representações, chegamos a abordar também algumas propriedades dos números primos:

G: - Agora eu vou falar um tipo de número pra vocês me dizerem se dá um retângulo ou mais. Se o número for par, ele vai formar só um retângulo ou mais?

Todos: - Mais.

G: - Existe algum número par que só dá um retângulo?

Todos: - Dois!

G: - Por que depois do dois não tem mais nenhum?

B.H.: Porque sempre vai poder fazer assim: com o 4: 2 x 2, com o 6: 2 x 3, com o 8: 2 x 4 e assim vai.

G: E se for ímpar?

B.H.: Só dá um mesmo.

G: Tem certeza?

B.H.: Ah, não. Com o 25 dá para fazer o 5 x 5.

Como podemos perceber, em suas falas, fundamentadas na análise da situação, os alunos expressavam propriedades como *o único número par que é primo é o 2* e aquela de que *nem todo número ímpar é primo*. São propriedades com que os alunos comumente se equivocam no processo de construção do conceito de número primo. São afirmações que os alunos ainda não conseguiam expressar formalmente, dependiam fortemente da situação para fazê-las. São dois teoremas-em-ação. Como conceitos-em-ação que os constituem, podemos citar o conceito de número par, de número ímpar e de número primo.

Ainda com relação aos números primos e compostos, é importante mencionarmos que não demos ênfase à nomenclatura específica *primos* e *compostos*. Falávamos apenas em *números que formavam apenas um retângulo* e *números que formavam mais de um retângulo*. Entretanto o uso destes termos surgiu na fala dos alunos, que já haviam sido confrontados com conceitos relacionados à divisibilidade em séries anteriores.

Conforme a discussão desenvolvia-se, iam substituindo o vocabulário espontaneamente. Números que formavam apenas um retângulo, foram chamados primos e os demais, compostos. Como não construíam retângulos com apenas uma unidade quadrada, nesse momento, não foi possível refletir sobre o fato do número um não receber outra nomenclatura.

b) O desvio da discussão para o conceito de números quadrados

Desde o início das atividades, percebemos certo encantamento nos alunos quando, entre os retângulos que construíam e desenhavam, figuravam quadrados. Chegaram a suspeitar, como previmos, do fato de um quadrado também ser um retângulo, o que foi esclarecido logo para que a atividade ocorresse de forma satisfatória. Julgamos interessante enfocar os números quadrados visto que o contra-exemplo dado por B.H. para justificar que nem todo número ímpar é primo, foi um número quadrado. Na transcrição abaixo, expomos como retomamos este assunto:

G: - Qual é o primeiro número de quadradinhos que eu pego que vai dar pra formar um quadrado?

B.H.: 2 x 2 que é 4.

G: - Depois do 4 qual é o próximo número?

B.H.: 3 x 3 que é 9.

Ainda neste primeiro momento, outro número ímpar quadrado foi mencionado. Isto permitiu que discutíssemos mais um exemplo de número ímpar que não é primo. Mas, voltando às atenções para a discussão a respeito de números quadrados, notamos que a atividade poderia conduzir os alunos a um erro conceitual. Embora o objetivo da pesquisa fosse a construção dos conceitos de divisibilidade, não podíamos ignorar tal possibilidade.

Ao responder nossa pergunta, o aluno afirmou que o primeiro número que lhe permitiria formar um quadrado era 4. A afirmação foi pertinente, dada as características da situação. Em nenhum momento, pedimos que montassem retângulos com uma unidade quadrada. Também não faria sentido, no contexto do jogo, falarmos em nenhuma unidade quadrada. Assim, ao nos voltarmos para o aluno, questionamos:

G: - Estes números que dão pra formar quadrado são chamados de números quadrados. O 4 dá pra formar quadrado, o 9 dá pra formar quadrado. Mas será que o primeiro quadrado é 4?

B.H.: 1.

G: Por quê?

B.H.: Porque um quadradinho tem os quatro lados iguais.

Analisando as transcrições, constatamos que, em princípio, para o aluno, o primeiro número quadrado era o 4. Posteriormente refletindo sobre a construção dos retângulos, ele mudou de idéia e concluiu que o primeiro número quadrado era o 1. Iinferimos que, para que concluísse que o zero, também, era um número quadrado, precisaríamos incentivar a observação da característica aritmética desses números (para todo número natural quadrado *n*, existe um número natural *y* tal que $n = y^2$).

As falas de B.H. transcritas anteriormente *"2 x 2, que é 4"* e *"3 x 3, que é 9"* foram o ponto de partida para nossas reflexões coletivas sobre o fato de o zero ser ou não ser um número quadrado. Este foi um dos momentos que pudemos perceber que, embora os alunos fizessem generalizações, elas ainda ocorriam tendo como referência a situação.

Muitos alunos não viam sentido em discutir o zero. Nas palavras de um deles:*"se não vai fazer retângulo, por que está falando de zero?*

Temos, então, mais um exemplo, da relatividade do potencial de ensino de uma situação. A construção de retângulos, que favoreceu o desenvolvimento das primeiras noções de números quadrados, estava oferecendo um obstáculo para que os alunos compreendessem que o zero também é um deles.

c) A tentativa de identificar um padrão para números primos e para números quadrados.

Insistimos nas discussões, embora os argumentos dos alunos fossem fundamentados na situação, elas atingiram um nível de complexidade, que o foco não era mais apenas reconhecer números primos, compostos ou quadrados. Os alunos começavam a observar possíveis regularidades associadas a estes conceitos. Por isso, continuamos:

G: - É com todo número que dá pra montar quadrado?

Todos: Não.

G: Com que números, podemos montar quadrados?

J: 4, 9, 16, 25...

G: - Por quê?

J: Porque 2 x 2 dá 4, 3 x 3 dá 9, 4 x 4 dá 16, 5 x 5 dá 25.

G: Além do 25? Tem mais algum?

R: 36. 6 x 6 é 36.

Como simultaneamente às falas dos alunos, escrevíamos no quadro os números na ordem crescente, perguntamos:

G.: - Pra ter certeza que vai formar quadrado, qual número eu colocaria ali?

B.H.: 49.

G.: - Por que 49?

B.H.: 7 x 7 dá 49.

G. S.: Depois 64. 8 x 8.

A conversa transcrita acima sugere que os alunos começavam a reconhecer certa regularidade ou um procedimento-padrão para obter a seqüência dos números quadrados. Buscavam nos cálculos suas respostas. Nem pensavam mais na representação geométrica. Aproveitamos a ênfase que davam aos cálculos para discutir novamente sobre a inclusão do zero e do um na seqüência, o que demonstraram compreender.

Além disso, provocamo-los a buscar um procedimento padrão para obtenção da seqüência de números primos. Não encontrando, apenas repetiram verbalmente as ações que utilizavam para verificar se era possível construir apenas um ou mais de um retângulo com determinada quantidade de unidades quadradas.

3.2.1.3 A Tábua de Pitágoras

Ao finalizar o primeiro grupo de atividades, a Tábua de Pitágoras foi uma atividade que permitiu que os alunos avançassem ainda mais na construção dos conceitos de múltiplo e fator. Ela permitiu aos alunos não só identificar fatores de um número, mas também reconhecer certas propriedades das relações de divisibilidade. Além disso, retomamos as reflexões sobre as igualdades matemáticas e criamos condições para que os alunos explicitassem a relação multiplicação/divisão. Para cada multiplicação, inferiam duas divisões.

Como mencionamos no capítulo 3, dividimos os 100 minutos de realização desta atividade em duas etapas. A primeira, consistiu em preencher e pintar partes da tábua e a segunda, consistiu em refletir sobre o que foi pintado. Conduzimos as reflexões de modo a favorecer a observação de regularidades nos números usados para o preenchimento.

Na primeira etapa, foi possível destacar alguns aspectos relevantes. A representação escrita dos termos foi feita de duas maneiras diferentes. Houve alunos que apenas colocavam o número e houve aqueles que escreveram uma igualdade matemática. Por exemplo, o termo correspondente à linha do 2 e à coluna do 3 foi representado por alguns alunos apenas pelo número 6 e, por outros alunos, pela igualdade 2 x 3 = 6.

Com relação às estratégias empregadas pelos alunos em situação, identificamos duas estratégias distintas para obtenção dos números usados no preenchimento de cada célula, que são:

- Demonstravam já dominar as tabuadas de 1 a 10 e obtinham imediatamente os números adequados ao preenchimento;
- Adicionavam o número da tábua ao termo anterior para obter o termo seguinte;

Passando à segunda etapa, a reflexão sobre a tábua permitiu que abordássemos as seguintes propriedades:

a) A seqüência dos múltiplos consecutivos de um número é uma progressão aritmética cuja razão é este número.

O preenchimento das tábuas contribuiu bastante para que os alunos concluíssem esta propriedade. Além disso, pedíamos que falassem em voz alta os termos consecutivos que compõem cada tábua, o que impediu a construção da equivocada idéia de que a seqüência dos múltiplos de um número é finita. “Cantando os números”, como costumavam chamar este momento, os alunos percebiam a lei de formação da seqüência e, na maioria das vezes, ultrapassavam os limites da tabela.

Outra evidência de que haviam identificado uma progressão aritmética na seqüência dos números que compõem cada tábua, pode ser percebida em uma das estratégias usadas para preencher a tábua.

Eles demonstraram saber que, conhecendo o termo anterior, basta adicionar a ele a razão para obtermos o termo seguinte. Ou, para obtermos o termo anterior, basta subtrairmos a razão do termo seguinte.

Os alunos não enunciavam formalmente este conhecimento, mas ele, assim como tantos outros estava presente em suas ações. Passível de ser verdadeiro ou falso, podemos considerá-lo um teorema-em-ação. As noções de seqüência, de seqüência dos números naturais, de múltiplo, de fator e as quatro operações são os conceito-em-ação que compõem o teorema.

Passamos, então, a listar seqüências numéricas no quadro e perguntávamos aos alunos se elas correspondiam à seqüência dos múltiplos de algum número. Nas respostas de alguns deles, localizamos um falso teorema-em-ação. Podemos verificá-lo na transcrição de uma reflexão coletiva:

G: 2, 4, 6, 8, 10, 12 etc. são múltiplos de que números?

Coro: Do 2.

G: E essa, olha, 9, 12, 15, 18, 21 etc. é a lista de que número?

Coro: Do 3.

G: Alguém pode me dizer uma lista só de múltiplos de 5?

L: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35. Pode parar?

G: 2, 5, 8, 11, 14, 17 é uma lista de múltiplos?

Coro: É, é.

G: Ah é. De que número?

L: Do 3.

G: Tem certeza? Por quê?

L: Porque está pulando de 3 em 3.

G: Vamos testar para ver se é mesmo?

Ao ter reconhecido em suas ações, que a seqüência dos múltiplos de um número é uma progressão aritmética, como descrevemos anteriormente, os alunos julgavam que a recíproca também era verdadeira. Ou seja, acreditavam que toda progressão aritmética formada por números naturais corresponderia a uma seqüência de múltiplos. Para que eles desfizessem essa idéia, foram precisos muitos contra-exemplos. Tratava-se de um teorema-em-ação falso cujos conceitos-em-ação eram os mesmos da recíproca dele.

b) Se $a \times b = c$, então $c : a = b$ e $c : b = a$

Como mencionamos, alguns alunos realizavam operações para identificar os números com os quais deveriam preencher a tábua. As igualdades matemáticas que representam tais operações, serviram como ponto de partida para a reflexão sobre a obtenção de outras igualdades. Desejávamos que, observada, por exemplo, a igualdade 2 x 3 = 6, os alunos escrevessem 6 : 3 = 2 e 6 : 2 = 3. Ou ainda, observando a igualdade 6 : 2 = 3, escrevessem 2 x 3 = 6 e 6 : 3 = 2.

Ainda durante o preenchimento da tábua, um aluno comentou que era necessário "percorrer um caminho" (linha e coluna) para localizar a célula. Apontando para a célula preenchida com o número 6, perguntamos:

G: Por que você colocou o 6 aqui?

R: Olha lá, se subir, cai no 3, se andar pro lado, cai no 2.

G: Tem outra casa onde você também pode colocar 6?

R: Tem. É só descer do 2 até o nível do 3.

G: Como você faz para saber que número deve colocar na casa vazia?

R: Eu faço o caminho, você não entendeu?

Desta maneira, os alunos também concluíram que este caminho fornece os números que compõem o primeiro membro da igualdade matemática que escreviam na célula. Pudemos inferir que, paralelamente à representação aritmética, os alunos construíram uma representação geométrica das igualdades matemáticas, o que, segundo Vergnaud (1990a), favoreceu-lhes a conceitualização da multiplicação, da divisão e da reversibilidade entre as duas. Procuramos explorar "idas" e "vindas" no caminho: *"Faz de conta que a minha tábua está apagada. Se eu sei a coluna e sei o número que tem dentro da casa, posso saber na linha de que número está? Como.?"*. Tendo entendido a lógica dos *deslocamentos* na tábua, os alunos obtinham facilmente todas as igualdades que poderiam ser extraídas de uma célula. Nesse sentido, reconhecemos as contribuições da representação geométrica que os alunos construíram para as igualdades.

Outro aspecto abordado com base nas igualdades matemáticas foi o uso das expressões *múltiplo, fator* ou *divisor.* Tentamos promover o uso adequado desses termos. Entretanto, quando pensávamos que os alunos dominavam a nomenclatura, éramos surpreendidas por algum equívoco que cometiam. Podemos afirmar que ainda não foi nesta atividade que as dificuldades relativas ao uso da nomenclatura foram superadas. O que é mais curioso é que tais equívocos não constituíram obstáculos para que identificassem os fatores de um número. Mesmo usando, em alguns momentos, a nomenclatura inadequadamente, boa parte dos alunos reconhecia que, para cada número que escolhesse, havia um conjunto formado por números que o dividia de forma exata. Assim, passaram à obtenção do conjunto de fatores de alguns números. O procedimento que adotaram pode ser sintetizado nos seguintes passos:

1º passo: localizar na tábua todas as células em que o número cujos fatores se deseja obter aparece.

2º passo: percorrer o "caminho" de cada célula, isto é, identificar os números de sua linha e de sua coluna. Estes números são alguns dos fatores do número.

3º passo: acrescentar aos fatores identificados acima o 1 e o próprio número.

Verificamos, porém, que, com estes passos, a possibilidade de obtenção de todos os fatores do número em questão é bastante reduzida. Isto porque nem todos os produtos encontram-se nos dados da tabela 10 por 10. Por exemplo, seguindo os passos para obter os fatores de 30, os alunos encontravam 1, 3, 5, 6, 10 e 30. Não incluíam o 2 e o 15, porque o produto 2 x 15 não consta nos dados da tabela 10 por 10. Era preciso que ficassem atentos às necessidades de ampliar a tabela. As questões que se levantavam eram: quais critérios deviam adotar para reconhecer a necessidade de expandir a tabela? Como decidir até que tamanho era necessário expandi-la? Nas palavras de um aluno: *Como a gente vai saber que tem, mas não está aqui?*

Assim, concluímos que esta atividade em muito havia contribuído para que os alunos admitissem que a um número natural qualquer está associado um conjunto que contém todos os seus fatores, porém ela não lhes assegurava a obtenção de todos os elementos desse conjunto. Foi preciso refletir sobre isto, pois, caso contrário, os alunos fundamentariam suas ações em um falso teorema-em-ação (a seqüência de passos) que, por sua vez, apresenta em sua constituição conceitos-em-ação verdadeiros, como as noções de linha, coluna, produto cartesiano e reversibilidade entre multiplicação e divisão. Esta conclusão nos levou a aprofundar as discussões a respeito dos critérios de divisibilidade.

c) Critérios de divisibilidade

A observação das regularidades no preenchimento da tábua criou condições para que os alunos enunciassem critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10. Embora não enunciassem com o rigor dos teoremas matemáticos, os conhecimentos que demonstravam dos critérios não se fundamentavam apenas nesta situação. Pelos argumentos dos alunos, percebemos a tentativa de identificar na situação que estava sendo discutida princípios que utilizam em outras situações. Por exemplo, associavam números usados para preencher a tábua do 5 aos números que pronunciam na leitura das horas em um relógio. Entendemos que, comparando situações, os alunos estavam reconhecendo seus invariantes operatórios.

Para Vergnaud (1990a), o processo de generalização ocorre na medida que o indivíduo consegue fazer tal reconhecimento. Cabe destacar apenas que a generalização de um conceito ou de uma propriedade de um conceito não ocorre isoladamente. Conceitos que pertencem ao mesmo campo conceitual influenciam-se mutuamente no processo de generalização.

Assim, a discussão dos critérios de divisibilidade levou os alunos a enunciar outras propriedades dos números naturais. Na discussão dos critérios, por exemplo, alguns alunos construíram argumentos como *"a soma de números pares é sempre um número par"*, ou, ainda, *"a soma de um número par com um número ímpar é sempre um número ímpar".*

Mas o fato que mais chamou nossa atenção, foi a tentativa de alguns alunos de formular critérios de divisibilidade por outros números diferentes de 2 e de 5. Eles tentavam aplicar o procedimento de observar apenas o algarismo das unidades do número para decidir sobre sua divisibilidade. A fim de criarmos condições para que revissem este pensamento, propusemo-lhes alguns contra-exemplos.

Pedimos que verificassem se os números 10, 13, 16 e 19 são divisíveis por 3. Realmente, por meio dos contra-exemplos, muitos alunos conseguiram perceber que não é possível estender para a divisibilidade por 3 o procedimento de observar o algarismo das unidades do número, procedimento próprio dos critérios de divisibilidade por 2 e por 5.

No entanto, os contra-exemplos não foram suficientes para que eles deduzissem o critério de divisibilidade por 3 e, em outra atividade, como veremos, este falso teorema-em-ação foi enunciado novamente.

Embora alguns tenham demonstrado interesse por outros critérios de divisibilidade, julgamos que aprofundar esta discussão nos faria fugir dos objetivos centrais desta pesquisa e conduzimos a discussão para a descoberta de múltiplos comuns a dois números.

A tábua de Pitágoras revelou-se um meio útil para que os alunos percebessem que um número pode ser múltiplo de muitos outros, mas a observação das cores os conduzia a desconsiderar vários múltiplos comuns dos números em questão. Por exemplo, alguns alunos identificaram como múltiplo de 2 e de 5 aquele número que ficou pintado de verde, mistura do azul, empregado na pintura da tábua do 2, com o amarelo, empregado na pintura da tábua do 5. Desse modo, consideraram apenas o 10 e desprezaram outros como 20, 30, 40, etc.

Ao retomarmos as reflexões, procuramos dar ênfase aos critérios de divisibilidade por 2 e por 5. Observando novamente a tabela, todos puderam concluir que, além do 10, havia números que são múltiplos de 2 e de 5 que não estavam pintados de verde. Chamaram este fato de *Perigo da Tabela*. Indagados sobre o porquê deste nome, responderam: *"Porque a gente fica pensando que só o 10 que serve porque ele está verde, mas tem muito mais. A última linha toda!"* Mais uma vez, notamos que a mesma atividade que favorece a construção de certos conceitos também pode oferecer obstáculos a sua generalização.

d) Se *a* é múltiplo de *b*, todo múltiplo de *a* será múltiplo de *b*, mas nem todo múltiplo de *b* será múltiplo de *a*.

Dando seqüência, partimos para a reflexão sobre múltiplos comuns de 2 e de 8. Distinguimos três ações diferentes adotadas pelos alunos para identificar os números que são múltiplos comuns a 2 e a 8:

1ª) Simplesmente observar a tábua do 2 e a tábua do 8, buscando os números que constam nas duas tábuas.

2ª) Testar a divisibilidade por 2 e por 8 de todos os números da tabela.

3ª) Verificar entre os múltiplos de 8 aqueles que são pares.

As três ações, entretanto, conduziram a resultados diferentes. Enquanto os alunos que executaram a primeira encontraram apenas o 8 e o 16, aqueles que executaram a segunda e a terceira concluíram que todos os números da tábua do 8 são múltiplos de 2.

Inicialmente, pensamos que diante dos resultados, pelo menos, estes últimos pudessem já ter concluído por conta própria que todo múltiplo de 8 é múltiplo de 2, pois o 8 é múltiplo de 2, o que não aconteceu. Os alunos repetiam o procedimento adotado na identificação dos múltiplos comuns a 2 e a 5 e não se referiam ao fato do 8 ser múltiplo de 2. Isto aconteceu somente quando propusemos questões semelhantes, envolvendo o par 2 e 4.

Finalmente, questionávamos se conseguiriam estender esse raciocínio a outros pares de números, como por exemplo, 3 e 9 ou 3 e 12. Conseguiriam perceber que todo múltiplo de 9 é múltiplo de 3 e que todo múltiplo de 12 é múltiplo de 3? Ou só conseguiam refletir a respeito da divisibilidade por 2?

Mas os alunos estenderam o raciocínio apenas ao par 3 e 9. Na análise de suas observações, concluímos que os fatos de 9 ser o quadrado de 3 e do único fator positivo de 9, além de 1 e de 9, ser o 3, foram fundamentais para tal procedimento. Julgamos que o fato de não haver registro da tábua do 12 e, portanto, os alunos não poderem observar a seqüência de seus múltiplos, suas regularidades e características, prejudicaram suas possibilidades de conjecturar sobre o par 3 e 12. Esta é mais uma evidência de que os alunos fundamentavam seus argumentos na situação.

3.2.1.4 Síntese do primeiro grupo de atividades

Como era esperado, com base nas igualdades matemáticas, os alunos foram capazes de verificar se um número é múltiplo ou fator de outro. Além disso, listaram os conjuntos de múltiplos e fatores de um número e criaram uma representação geométrica para falar de números primos e compostos. Ao longo das atividades, pontuamos os conhecimentos matemáticos mobilizados na ação dos alunos. Entre os mais importantes, podemos citar:

- Toda divisão com divisor igual a 1 é exata;
- A divisão de números pares por 2 é exata;

- A divisão de números ímpares por 2 tem resto 1;
- Algoritmo da divisão;
- Numa divisão, o resto é menor do que o divisor;
- Se a é múltiplo de b, então b é fator de a;
- O único número primo que é par é o 2;
- Considerando um número natural *a*, é possível construir, pelo menos, um retângulo de área *a*, cujas dimensões são números naturais As dimensões do retângulo são fatores de *a*. Quando o número natural que consideramos é primo, então só é possível construir um retângulo. Quando o número que consideramos é par e maior que 2, então é possível construir, pelo menos, dois retângulos;
- Dado um número natural *x*, qualquer número diferente de *x* e maior que $\frac{x}{2}$ não divide *x*. O quociente da divisão de *x* por qualquer destes números é 1 e que o resto é diferente de zero;
- Nem todo número ímpar é primo;
- Não existe uma fórmula ou padrão para obtenção da seqüência de primos;
- Se *a x b = c*, então *a = c : b* e *b = c : a*;
- Se *a : b = c*, então *a = b x c* e *b = a : c*;
- A todo número natural, associamos um conjunto com seus múltiplos;
- A todo número natural, associamos um conjunto com seus fatores;
- O conjunto dos múltiplos de um número é infinito;
- Todo número que tem na ordem das unidades os algarismos 0, 2, 4, 6, 8, é divisível por 2;
- Todo número que tem na ordem das unidades os algarismos 0 e 5, é divisível por 5;
- Todo número que tem na ordem das unidades o algarismo zero, é divisível por 10;

- A seqüência dos múltiplos de um número *n* é uma P.A. de razão *n*; e
- Se *a* é múltiplo de *b*, todo múltiplo de *a* será múltiplo de *b*, mas nem todo múltiplo de *b* será múltiplo de *a*.

Ao final, realizamos a primeira avaliação intermediária, cujos resultados foram descritos no início do capítulo. Em termos qualitativos, as soluções que os alunos apresentaram nesta avaliação, não diferiram do que verificamos ao longo das atividades.

3.2.2 Análise do Segundo Grupo de Atividades

Este grupo é formado por duas atividades (jogo de mensagem e jogo do telegrama) e pela segunda avaliação intermediária. Seu principal objetivo é criar condições para que os alunos compreendam o que significa decompor um número. Oportunizamos decomposição em parcelas, decomposição em quaisquer fatores e decomposição em fatores primos. Procuramos enfatizar a igualdade entre o número e sua decomposição, visto que alguns erros que os alunos cometem advêm do desconhecimento desta igualdade.

3.2.2.1 Jogo de Mensagem

Nesta atividade, procuramos criar condições para que os alunos construíssem representações para o produto de três números naturais. As cartinhas apresentavam desenhos. Decifrar a mensagem significava escrever igualdades matemáticas que pudessem representar cada cartinha.

Inicialmente, compreender como o jogo deveria ser realizado, não foi uma tarefa fácil para os alunos. Conforme previmos, todos eles priorizavam o total e não atentavam para as diferentes situações que estavam sendo representadas em cada cartinha. As cartinhas 3 e 6, por exemplo, para eles tinham o mesmo significado, que era 30 unidades. Impacientes para ouvir as regras do jogo e ansiosos para começarem a usar as cartinhas, muitos alunos criavam regras próprias: *"Você pega uma carta, eu pego outra. Quem tiver mais bolinhas na carta* *ganha"*. Estas palavras, usadas pelo aluno S. em um diálogo com o aluno R. mostram que a atenção dos alunos se voltava para o total de bolinhas, o que é uma evidência do que mencionamos acima.

Precisávamos, então, estabelecer com a turma uma conversa que criasse condições para que cada aluno percebesse que, embora a ordem dos fatores não altere o produto, sua inversão implica a representação de situações distintas. Começamos, pedindo-lhes que obtivessem o total de bolinhas de cada cartinha e, em seguida, explicassem oralmente seus procedimentos. Esperávamos que a discussão e o posterior registro com símbolos matemáticos destes procedimentos permitissem a distinção das situações.

Durante as explicações, identificamos cinco procedimentos usados entre os alunos da turma, vamos expô-los a seguir, tomando como referência a cartinha número 3.

1º) Contagem um a um

Neste procedimento, usado por poucos alunos e considerado trabalhoso por boa parte da turma, aqueles que o adotaram, apontavam cada bolinha e falavam a seqüência dos números naturais. Assim, para contar o total de bolinhas da cartinha 3, eles apontavam todas as bolinhas e falavam a seqüência dos números naturais de 1 até 30.

2º) Contagem das bolinhas de cada círculo

Muitos alunos adotaram este procedimento. Ele consistiu em obter o total de bolinhas de um círculo e, em seguida, apontando cada círculo, falar a seqüência dos múltiplos positivos desse número. Para obter o total de bolinhas da cartinha 3, desta forma, os alunos contavam as 3 bolinhas que havia em um círculo e, apontando para este círculo falavam 3, para outro círculo, falavam 6, para outro, falavam 9 e, assim, por diante até que, no décimo e último, falavam 30.

3º) Contagem das bolinhas de cada círculo e do total de círculos

Na fala, *"Eu comecei fazendo assim, mas depois eu vi que dava no mesmo se eu fizesse a conta de multiplicar",* o aluno L.G. explicou que mudou o procedimento que usava para obter o total de bolinhas de uma cartinha para outra. Ele iniciou adotando o procedimento acima e, em seguida, fez uma alteração: após obter o total de bolinhas de um círculo, contou o total de círculos e efetuou o produto dos dois números obtidos, sem, entretanto, preocupar-se com a ordem dos fatores. Assim, sabendo que havia 3 bolinhas em cada círculo, os alunos observavam que havia 10 círculos e efetuavam o produto 10 x 3.

Analisando as falas dos alunos, como esta que destacamos do aluno L.G., percebemos que o novo procedimento foi tratado pela turma como certo aprimoramento ou refinamento do procedimento anterior.

4º) Contagem do total de bolinhas de cada "pedaço"

Alguns alunos chamaram de "pedaço" cada retângulo obtido a partir da divisão da superfície de uma cartinha em partes iguais. Desta forma, as cartinhas 1, 5 e 6 tinham dois pedaços, a cartinha 2 tinha quatro, a 4 tinha três e a 3 tinha cinco pedaços.

Neste procedimento, os alunos obtinham o número de bolinhas de um pedaço e, apontando para cada pedaço, falavam a seqüência dos múltiplos positivos deste número. No caso da cartinha 3, após identificarem que, em um pedaço, havia 6 bolinhas, os alunos apontavam para o primeiro pedaço à esquerda e falavam 6, para o segundo e falavam 12 e, assim, por diante até que no quinto e último pedaço falavam 30.

5º) Contagem das bolinhas de um pedaço e do total de pedaços

Finalmente, assim como aconteceu no terceiro procedimento, este último foi considerado pelos alunos um aprimoramento do procedimento anterior. Após obterem o número de bolinhas de um pedaço, eles obtinham o número de pedaços e efetuavam o produto dos dois números. Para obter o total de bolinhas da cartinha 3, por exemplo, eles verificavam que em cada pedaço havia 6 bolinhas, observavam, também, que havia 5 pedaços e efetuavam um produto envolvendo 6 e 5, sem novamente se preocuparem com a ordem dos fatores.

Depois que os alunos expuseram oralmente seus procedimentos, pedimo-lhes que escrevessem, quando possível igualdades matemáticas que os representassem. Nos dois primeiros tipos descritos acima, que têm em comum a ação de enunciar uma seqüência numérica, os alunos não escreveram qualquer igualdade. Houve apenas o registro por escrito de tais seqüências. Os registros apresentaram pequenas variações: a) listagem de todos os números da seqüência, separados por vírgulas ou traços; b) listagem dos primeiros números da seqüência seguida da palavra *até* e do último número da seqüência e c) listagem dos primeiros números da seqüência seguida de reticências e do último número da seqüência.

Já nos três últimos procedimentos, foi possível para os alunos escrever igualdades matemáticas na tentativa de representá-los. Entretanto, nenhuma delas apresentou um "produto de três fatores". O fato não nos surpreendeu. Por isso, inclusive, que, para a intervenção, selecionamos este jogo. De todos os procedimentos, inferimos que o quinto favoreceria a escrita de um produto de três fatores, mas os alunos não produziam igualdades matemáticas para o total de bolinhas de um pedaço. Escreviam imediatamente esse total. Podemos tomar o exemplo da cartinha 6. As igualdades produzidas pelos alunos foram 2 x 15 = 30 e 15 x 2 = 30. Por mais que eles percebessem que o 15 é obtido, calculando-se 5 x 3, não faziam esta substituição na igualdade. Questionamos sobre o fato de não substituírem:

G.: De onde saiu o 15? Como vocês o encontraram?

M: Ué, contando.

G.S.: Eu não contei. Eu fiz 5 x 3.

G.: E por que você não escreve isso no lugar do 15?

G.S.: Se eu já sei que o resultado é 15, pra que que eu vou escrever a conta? Pra gastar mais lápis?

Nas palavras de G. S., percebemos que sua preocupação era apenas expressar o total de bolinhas da cartinha. Diante da argumentação do aluno, decidimos solicitar que observassem mais detalhadamente cada cartinha. Adotando o vocabulário deles, perguntávamos quantos pedaços cada cartinha tinha e, se fôssemos recortar as cartinhas para dar um pedaço a cada aluno, no recorte de que cartinha, um número maior de alunos seria agraciado.

Estas questões criaram condições para que os alunos começassem a perceber que cada cartinha estava dividida em grupos e eles, por sua vez, também estavam divididos em grupos. Estabelecendo ainda uma comparação entre as cartinhas que possuíam o mesmo total de bolinhas, com as cartinhas 3 e 6 nas mãos, acrescentamos:

G.: Quantas bolinhas há em cada cartinha?
Todos: Trinta.

Sacudindo a cartinha 3, continuamos:

G.: Mas quantas pessoas vão ganhar um pedaço se eu recortar esta cartinha?
Todos: Cinco.

E, balançando a cartinha 6:

G.: E se eu recortar esta?
Todos: Duas.
G.: É a mesma coisa? Se vocês fossem escolher uma para recortar, qual vocês escolheriam?

Depois de muita confusão, porque todos falavam e justificavam suas escolhas ao mesmo tempo:

G.S.: Eu escolheria a primeira porque dava pra mais gente.
B.H.: Mas se a gente recortar os círculos, em vez dos pedaços, dá para dar pra dez pessoas nos dois jeitos e os círculos ainda são todos iguais.

A resposta de G. S., compartilhada por muitos alunos, foi para nós um indício de que os alunos passavam a observar as cartinhas de outra forma e não apenas procurando obter o total de bolinhas.

Entre os alunos que optaram pela segunda cartinha, um deles argumentou: *"tem menos pedaços para dar, mas os pedaços são melhores porque têm mais bolinhas".* Com mais esse comentário, confirmamos que os alunos já faziam uma análise qualitativa das cartinhas. Atribuímos esta mudança de comportamento dos alunos ao fato de terem construído um significado para as cartinhas, pedaços e bolinhas no momento em que elas foram inseridas em uma situação que dominavam: a distribuição de objetos entre indivíduos.

Restava-nos investigar se eram capazes de expressar estas diferenciações por meio das igualdades matemáticas e prosseguimos a discussão. Antes, argumentamos com B.H., tomando como referência as cartinhas 2 e 5. Este par nos permitiu lhe fornecer um contra-exemplo para seu comentário transcrito acima, pois afirmou que se recortassem os círculos em vez dos pedaços, os resultados seriam os mesmos. Nas cartinhas 2 e 5, o total de bolinhas era o mesmo, mas o total de bolinhas por círculo e o total de círculos variava de uma para outra. Tentamos impedir que ele generalizasse a idéia equivocada e perguntamos:

G.: E agora, quantas bolinhas há em cada cartinha?

B.H.: Vinte e quatro nas duas.

G.: E se a gente recortar os círculos, vai dar o mesmo resultado nas duas?

B.H.: Ih! Não.

G.: Por quê? O que você está vendo?

B.H.: Porque numa tem 6 círculos com 4 bolinhas em cada um e na outra tem 12 círculos com 2 bolinhas em cada um. Nada dá igual.

O diálogo com B.H. foi muito importante, pois, além de impedir que ele generalizasse a idéia de que distribuir pedaços e círculos são ações equivalentes, alertou para a observação da distribuição dos círculos nos pedaços e das bolinhas nos círculos. Em outras palavras, o aluno percebeu que era possível estabelecer uma diferenciação entre pedaços e, em seguida, entre círculos e, conseqüentemente, entre as cartinhas. Vale lembrar, entretanto, que o reconhecimento das diferenças entre as cartinhas foi um processo lento que só se completou durante o jogo, quando os alunos passaram a identificar bolinhas com feijões, círculos com pratinhos e pedaços com pessoas, assim, os alunos compreenderam a diferença entre as cartinhas.

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o indivíduo aproxima situações distintas para pode empregar esquemas de ação válidos em uma que ele domina, na outra que domina apenas parcialmente. A aproximação que os alunos fizeram da situação do jogo da mensagem com a situação da distribuição de restos foi um exemplo deste aspecto teórico.

Os alunos começaram a jogar e nós passamos a circular pela sala de aula observando suas ações e discussões. A dupla B.H. e G. logo nos chamou atenção. B. ainda não estava compreendendo exatamente a produção das igualdades matemáticas a partir das cartinhas e G. tentava explicar-lhe: *"Pensa assim, oh, duas duplas, cada dupla com três pratinhos e tem seis feijões em cada pratinho".*

Nesta fala, percebemos que a aluna, tentando criar condições para que o colega entendesse, buscou uma analogia entre a cartinha e a situação do feijão. Cada círculo correspondeu a um pratinho, as bolinhas aos feijões e cada divisão da cartinha demarcava o que uma pessoa possuía. Assim, se a cartinha estivesse dividida em três regiões, tratava-se de três pessoas.

Ouvindo a explicação da colega, outras duplas sanaram suas dúvidas e começaram a jogar, mas, em vários momentos, voltavam a errar no jogo. Percebemos que o apelo à propriedade comutativa ainda era muito forte entre os alunos e que muitos ainda priorizavam apenas o resultado. Analisando os registros feitos pelos alunos no complemento da atividade, verificamos novamente estes fatos (Figura 3.36):

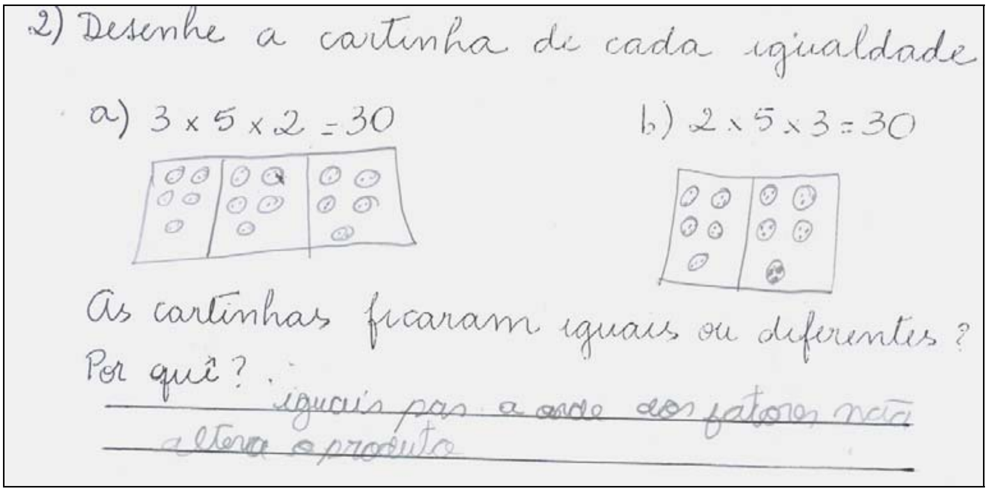


Figura 3.36:
Resposta *"iguais"* para cartinhas diferentes

Notamos que o aluno desenhou cartinhas diferentes, entretanto respondeu *"iguais"*, pois se referiu ao total de unidades. Para se justificar, enunciou a propriedade comutativa da multiplicação.

Entre os registros dos alunos que responderam *"diferentes"* à mesma questão, identificamos duas categorias: aqueles que se fundamentavam em números de feijões, pratos e pessoas e aqueles que usavam um contexto mais geral. Nas Figuras 3.37 e 3.38, oferecemos um exemplo de cada categoria:

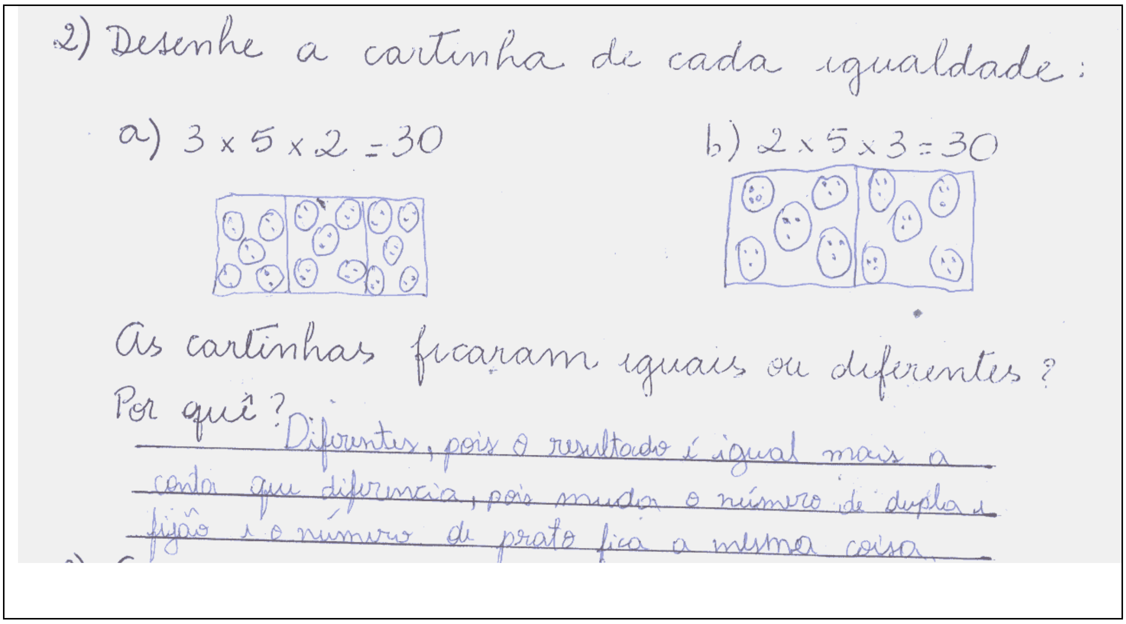


Figura 3.37:
Resposta *"diferentes"* para cartinhas diferentes, fundamentada no jogo dos restos

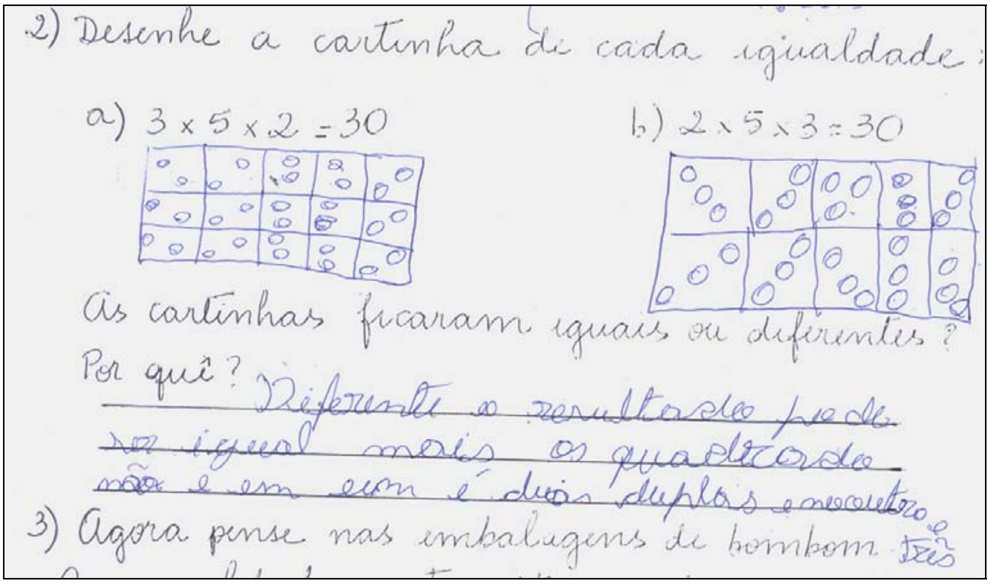


Figura 3.38:
Resposta *"diferentes"* para cartinhas diferentes sem mencionar jogo de restos

Comparando os dois exemplos, percebemos que, o tratamento mais generalizado também se manifestou no desenho da igualdade. O aluno que não se referiu a feijões, pratos e pessoas, também não fez um desenho procurando representar estes elementos.

Com tudo que expusemos, ficou claro que a produção de significados e a construção do conhecimento em contextos matemáticos não ocorrem de forma linear. Assim, em determinados momentos, os alunos voltavam a priorizar o total de bolinhas ou aplicavam aleatoriamente a propriedade comutativa e precisávamos intervir. Mas também é fato que eles já admitiam a diferenciação das cartinhas por meio das igualdades matemáticas. Para eles, cartinhas diferentes implicavam igualdades matemáticas diferentes e vice-versa, embora o total de bolinhas pudesse ser o mesmo.

Para finalizar, salientamos que, no jogo, apenas foi desencadeado o processo para que o aluno construísse uma representação para o produto de três fatores. Entre as características deste processo, estão, inclusive, o emprego e a comparação de outras representações para a mesma situação. Nesta atividade tivemos a descrição oral, o desenho e a igualdade matemática.

3.2.2.2 O jogo do telegrama

Como explicamos no capítulo II, o objetivo deste jogo foi criar condições para que os alunos identificassem as diversas escritas que podem ser produzidas para expressar um mesmo número e reconhecessem que a decomposição em fatores primos corresponde a uma delas.

Participaram do jogo três equipes com seis componentes e uma equipe com quatro. Os alunos de cada equipe organizavam-se em filas e nós ditávamos um número. O primeiro aluno da fila deveria escrever em um papel uma operação cujo resultado fosse o número ditado, dobrar o papel de modo a esconder o que escreveu e passar para o segundo da fila, que repetiria o procedimento, passando para o terceiro e, assim por diante.

Depois que cada equipe produzisse seis escritas (os dois primeiros alunos da fila da equipe de quatro componentes escreviam duas vezes), recolhíamos os papéis e fazíamos coletivamente a leitura das escritas. Ganhava a rodada a equipe que tivesse a maior quantidade de escritas diferentes. À medida que as rodadas se sucediam, mudávamos as características dos números ditados e, aumentando o nível de dificuldade do jogo, ditávamos também a (s) operação (operações) que deveria (deveriam) ser usada (s) nas escritas. Alternávamos números pequenos com números grandes, pares e ímpares, primos e compostos. Alternávamos, também, adição com subtração, multiplicação e divisão.

Inicialmente, não nos preocupamos com as operações, ditávamos apenas os números, e os alunos tinham liberdade para usar a operação que desejassem em suas escritas. Nestas condições, quase todas as escritas produzidas envolviam apenas adições e subtrações, como mostramos na Figura 3.39:

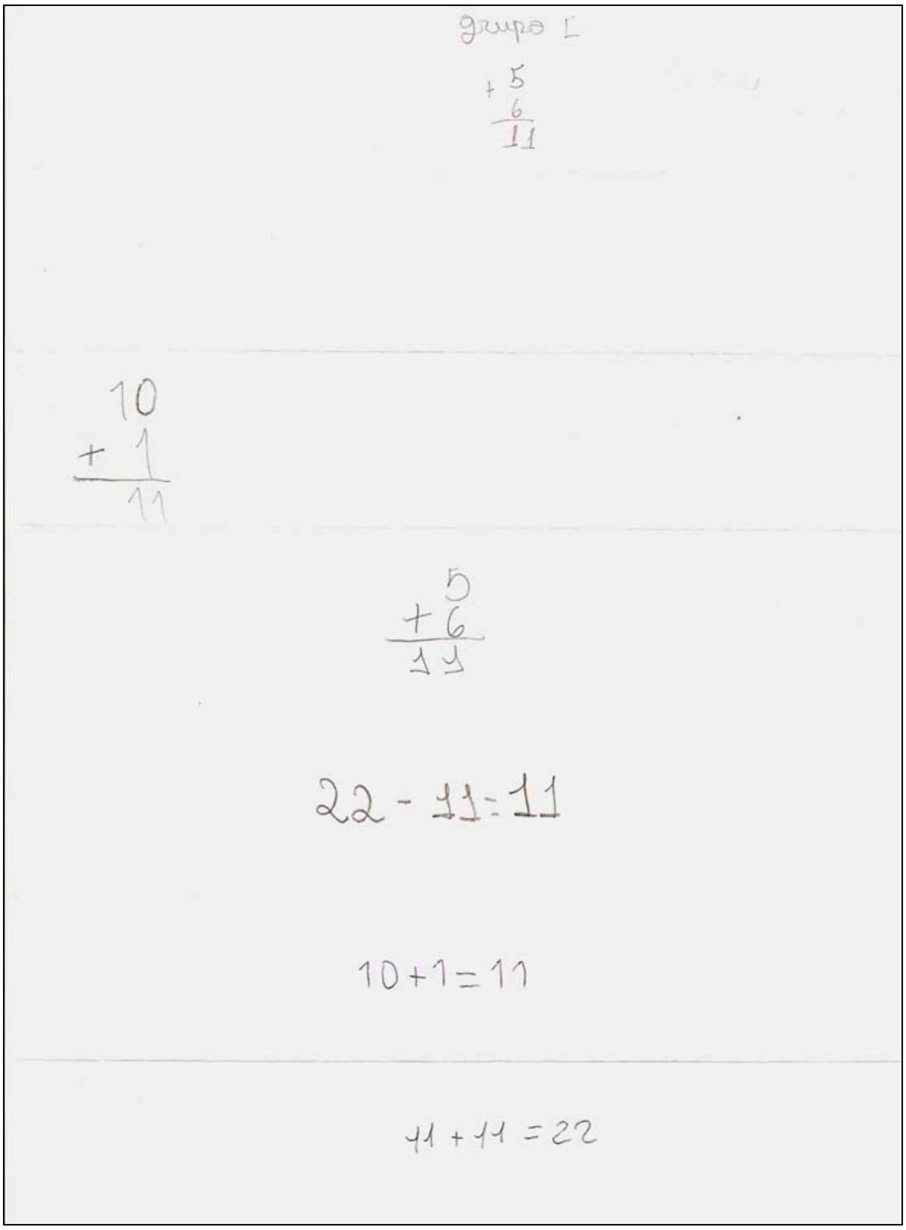


Figura 3.39:
Ficha do jogo do telegrama contendo apenas adições e subtrações

A equipe fez a ficha mostrada na Figura 3.39, quando o número que ditamos foi 11. As outras equipes não produziram fichas muito diferentes. Apenas uma equipe apresentou um produto, além das adições e subtrações: um dos integrantes escreveu uma multiplicação, *11 x 1* = 11. Inferimos que o fato de 11 ser um número primo fosse responsável pela pequena incidência de multiplicações. Mas, quando ditamos números compostos como 12 e 18, os procedimentos dos alunos não diferiram muito dos apresentados nestas fichas .

O fato dos alunos não escreverem divisões, intrigou-nos. Assim, nas entrevistas informais, alguns alunos revelaram que achavam muito difícil descobrir divisões que resultassem nos números que ditávamos. A maioria deles respondia que *"tem que ficar testando muito e, às vezes, não dá em nada"*. Apenas um aluno comentou que *"tem que ficar fazendo contas de multiplicar, não dá para fazer de cabeça"*.

Os comentários sugeriram-nos que, embora não verbalizasse, este último aluno reconhecia no jogo uma situação em que podia aplicar seus conhecimentos sobre as igualdades matemáticas, o que foi confirmado quando lhe pedimos que explicasse melhor seu pensamento: *"se eu quero chegar no 18, eu faço 18 vezes 2 e vejo quanto vai dar; aí eu escrevo o número dividido por 2, mas é muito chato, tem que fazer conta armada"*.

Desse modo, reconhecemos implícito nas ações descritas pelo aluno o conhecimento da reversibilidade entre multiplicação e divisão. Segundo Vergnaud, podemos classificá-lo como um teorema-em-ação. Compondo-o e, conseqüentemente, constituindo-se em conceitos em ação estão os algoritmos da multiplicação e da divisão. É importante destacar que os algoritmos correspondem apenas à parte do campo conceitual multiplicativo.

Uma vez que os alunos pouco escreviam multiplicações e não escreviam divisões, passamos a ditar o número e a operação que deveria constar nas escritas. Preferencialmente, ditávamos estas duas operações. Quando recolhíamos as fichas, identificávamos outro tipo de problema: em um mesmo grupo, sem terem acesso à escrita dos companheiros, os alunos produziam escritas idênticas. Na ficha a seguir, oferecemos um exemplo:

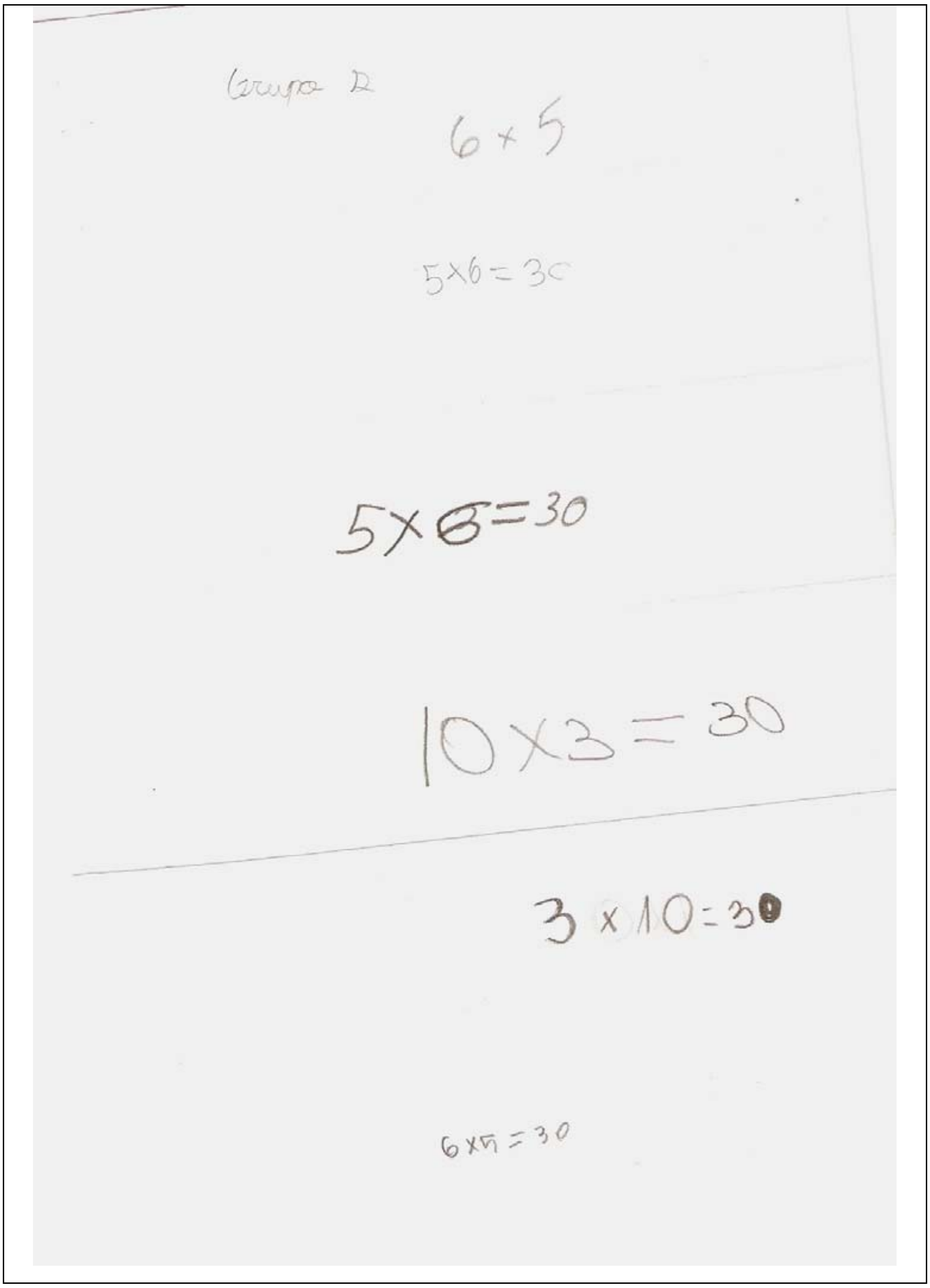


Figura 3.40:
Ficha do jogo do telegrama com produtos repetidos

Para a produção da ficha acima, ditamos *"30 e multiplicação"*, ou seja, os alunos deveriam escrever multiplicações cujo produto é 30. Assim, dos seis alunos que compõem a equipe, dois escreveram *6 x 5*, dois *5 x 6,* um *10 x 3 e* outro *3 x 10.* As multiplicações *2 x 15 = 30* e *30 x 1 = 30* não foram escritas. Julgamos que tal ausência ocorreu porque os alunos buscavam as multiplicações que constam nas tabuadas de 1 a 10. A incidência de casos análogos reafirmou nosso julgamento e, dessa forma, muitas rodadas terminaram empatadas, o que começou a causar o desinteresse dos alunos.

Indagamos à turma sobre o que poderíamos fazer para que não houvesse mais tantos empates e duas equipes propuseram que mudássemos as regras do jogo. Pediram que os integrantes de uma mesma equipe pudessem ver todas as escritas produzidas para que não acontecessem mais as repetições:

BH: Já que todo mundo bota sempre a mesma coisa, é melhor a gente ver para pensar em contas diferentes.

JP: Mas aí vai terminar empatado de novo, porque todos os grupos vão ter todas as contas diferentes.

Então, interferindo no debate, estabelecemos as novas regras do jogo. Não seria mais necessário sentar em fila. As equipes deveriam se sentar em roda. Continuaríamos ditando números e operações. Marcaríamos um tempo no relógio e a equipe que produzisse o maior número de escritas naquele intervalo seria vencedora. Todos concordaram com as regras e iniciou-se uma nova fase do jogo do telegrama.

Ao pedirmos que escrevessem multiplicações, as primeiras escritas eram obtidas pelo procedimento descrito anteriormente, isto é, buscá-las nas tabuadas de 1 a 10. Entretanto, quando estas se esgotavam, identificamos dois procedimentos distintos entre as equipes e mesmo entre indivíduos de uma mesma equipe para obter as outras. O primeiro, empregado inicialmente pela maioria dos alunos, consistia em estimar aleatoriamente os pares de números que multiplicados resultariam nos números que ditávamos. Os alunos estimavam os pares e efetuavam os cálculos para validar ou invalidar suas estimativas. Já o segundo procedimento, era o que se fundamentava na reversibilidade entre multiplicação e divisão. Ao empregar critérios de divisibilidade, os alunos encontravam um dos fatores do número ditado, realizavam a divisão deste último pelo primeiro para obter o quociente, que é o outro fator e, finalmente, conhecendo os fatores escreviam as multiplicações.

É fundamental esclarecer que existem conhecimentos matemáticos implícitos em ambos os procedimentos. Mesmo no caso das estimativas que, de modo geral, correspondem a um procedimento mais lento, os alunos seguiam determinados critérios para obter os pares, como pode ser percebido na transcrição do diálogo:

> **<u>G.:</u>** Como vocês estão fazendo para escolher os números?
>
> **<u>Je:</u>** Estamos fazendo um monte de multiplicações até dar certo.
>
> **<u>G.:</u>** Mas como vocês escolhem os números para fazer as multiplicações?
>
> **<u>Je:</u>** A gente começa escolhendo números bem pequenos e vai crescendo.
>
> **<u>G.:</u>** E quando vocês param?
>
> **<u>Je</u>**: Quando fica grande demais. Quando passa.
>
> **<u>G.</u>**: Quando passa o quê?
>
> **<u>Je</u>**: Quando passa do número que você falou, a gente escolhe números menores.

Assim, ficou evidente que a escolha dos pares não é totalmente aleatória. Pelo contrário, a aluna reconheceu que os pares devem ser formados por números menores que o número ditado e que, quanto maiores eles forem, maior será o produto deles, ou seja, ela sabe que, se os fatores forem aumentados, o produto também ficará maior. Além disso, reconhece que os fatores de um número sempre são menores ou iguais a ele. Estas são propriedades verdadeiras para o produto de números naturais, e a última corresponde a um conhecido teorema matemático (Sejam a e b inteiros, se a divide b e $a \neq b$, então $|a| < |b|$).

Na ação das crianças encontramos mais alguns teoremas. Elas ainda não eram capazes de empregar a simbologia matemática para descrevê-los e dependiam das características da situação para empregá-los, o que nos permitiu caracterizá-los como teoremas-em-ação. São conceitos que fundamentam tais teoremas, podendo ser chamados de conceitos-em-ação: a comparação entre números naturais, as noções de múltiplo e fator, a multiplicação e a divisão.

Com relação ao segundo procedimento, que se fundamenta na reversibilidade entre multiplicação e divisão, começamos por comentar o emprego dos critérios de divisibilidade. Embora não os expressassem em linguagem matemática formal, os alunos empregavam adequadamente os critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 10. Os erros aconteciam quando criavam critérios de divisibilidade por outros números, 3 e 4, por exemplo, fazendo analogia com os critérios por 2, 5 e 10:

R: 46? O 46 dá por 3. Olha lá, ele termina em 6.

G.: E o que é que tem isso?

R: Para dar por 3 tem que terminar em 0, 3, 6 e 9

No diálogo, foi possível perceber que o aluno tentava empregar para o número três, procedimentos (observar o algarismo das unidades e verificar se este é múltiplo do número, pelo qual se testa a divisibilidade do número ditado) válidos apenas para testar a divisibilidade de um número por 2, 5 e 10. Atribuímos este fato à falta de compreensão por parte do aluno do domínio de validade de seus procedimentos. Confirmando as idéias de Vergnaud, ele tentou estender o domínio de validade de seus procedimentos, válidos para 2, 5 e 10, incluindo outros números, como 3 e 4. Embora não seja um procedimento correto para testar a divisibilidade por 3, podemos dizer que se tratava de um conhecimento presente na ação do aluno, passível de ser julgado verdadeiro ou falso. Temos, então, outro teorema-em-ação, mas, desta vez, um falso teorema-em-ação. A reflexão que favoreceu a mudança de procedimento dos alunos segue abaixo:

G.: Ah é? Então divide 46 por 3 para ver se vai ter resto?

R.: Ah não. Começou...

G.: Faz logo.

R.: Sobra 1.

G.: Ué, mas você não tinha dito que 46 é divisível por 3?

R: É, mas não é não.

Repetimos este tipo de reflexão várias vezes, mudando apenas os números, para que os alunos reconhecessem que não é possível fazer tal extensão. O sucesso das reflexões, comprovado pela mudança de procedimento dos alunos, destaca a importância dos contra-exemplos no processo de construção de conceitos.

Os alunos, porém, não conseguiram chegar a uma conclusão a respeito dos critérios de divisibilidade por números diferentes de 2, 5 e 10. Inseguros, quando precisavam verificar tais divisibilidades, efetuavam os cálculos e analisavam os restos.

Dando prosseguimento ao jogo, em determinado momento, passamos a solicitar que escrevessem os números que ditávamos, utilizando mais de uma operação e, por fim, pedimos que os escrevessem usando duas, três ou quantas multiplicações quisessem. Mas os alunos só escreviam produtos de dois fatores. Não compreendiam como fariam para obter três ou mais números que multiplicados resultariam em um número dado. Os esquemas de ação envolvidos nos dois tipos de procedimento que empregavam, não permitiam obter um número de fatores maior que dois. Era preciso incorporar-lhes novas ações para empregar esquemas mais abrangentes. A seguir, a conversa transcrita sobre o desafio de escrever o número 60 como produto de três fatores, mostra as reflexões dos alunos nesse sentido:

J: Sessenta é três vezes vinte.

M: Eu achei seis vezes dez.

G.: Mas tem três números?

Coro: Não.

G.: O que foi pedido?

Coro: Multiplicação com três números.

G.: Alguma idéia?

Je: Posso fazer vinte mais vinte mais vinte?

G.: É multiplicação?

M: Não. Não pode, não! Você tá falando mais.

Notamos que a aluna, assim como boa parte dos outros alunos, recorreu à decomposição em três parcelas e não em fatores. Isto confirma a tendência dos alunos pensarem aditivamente, verificada por Campbell e Zazkis (2002).

Além disso, revela a idéia, defendida por Vergnaud (1990a), de que, quando o indivíduo é confrontado com uma situação para a qual não possui esquemas suficientes, ele emprega os esquemas válidos para outras situações que possuem aspectos semelhantes à situação dada. As novas ações, a serem incorporadas ao esquema antigo para dar conta da nova situação, são decompor em fatores, um dos dois fatores encontrados inicialmente, e substituí-lo por tal decomposição (por exemplo, substituir 10 por 2 x 5 e, então, em vez de escrever 6 x 10, escrever 6 x 2 x 5). Entretanto, elas não foram empregadas sem nossa intervenção, pois foi preciso pedir aos alunos que observassem os fatores que obtiveram e tentassem decompô-los em um produto. Propusemos este procedimento, tanto para o número 10 como para o número 6. Refletimos novamente com base na fatoração 3 x 20 e, somente desta maneira, os alunos deram os primeiros passos na compreensão da decomposição em mais de dois fatores.

Durante o jogo, propusemos que escrevessem o número 12 como um produto de primos, tivemos a oportunidade de avançar nas discussões iniciadas anteriormente.

Gabriel: Bom, 12. Uma multiplicação que dá 12 é três vezes quatro.

G.: O três é primo?

Coro: É!

G.: O quatro é primo?

Coro: Não.

G.: E agora, no que que ele pode mexer pra ficar só com primos?

L: Eu ia fazer três vezes três mais três.

B.H.: Eu! Dois vezes dois, vezes três. Que dá quatro vezes três.

G.: Você não concorda com a idéia do Luan?

B.H.: Não, porque na dele tem mais e tem que ser tudo vezes.

G.: E aí, Luan, o que você acha?

Luan: Mas o meu também tá certo, porque o meu só tem 3 e o 3 é primo.

G.: Mas qual foi a regra dessa rodada?

L: Tá bom, tá bom, que tinha que ter só multiplicação.

G.: O que você observou, Ben-Hur?

B.H.: O quatro é igual a dois vezes dois. Dois vezes dois é igual a quatro. Então, ao invés do quatro, eu coloco dois vezes dois.

L: Ah, mas não valeu porque repetiu o dois.

G.: Mas quem foi que disse que não podia repetir? Naquela sua idéia do início só tinha três?

L: Pode?

G.: Pode, turma?

Coro: Pode.

Nessa conversa, encontramos, pelo menos, dois aspectos que merecem comentários. O primeiro, refere-se ao pensamento aditivo expresso na fala do aluno Luan. Diante de um problema multiplicativo, mais uma vez, alguns alunos insistiram em pensar aditivamente, tal como constatado com os sujeitos das pesquisas de Campbell e Zazkis (2002). O segundo, refere-se à possibilidade de escrevermos fatores repetidos. Esta idéia, assim como a de substituir um número pela sua decomposição, não é uma idéia a que os alunos aderem facilmente. Durante o jogo, foi preciso que insistíssemos em propostas como esta de decompor em primos. Vale destacar, apenas, que, trabalhando com números maiores, a decomposição em primos requer que o aluno repita o procedimento de substituição de cada fator por sua decomposição em produto até que todos os fatores sejam primos. A idéia de repetir o procedimento um número, a priori, indefinido de vezes, também, não foi facilmente concebida por eles e a nossa intervenção foi necessária.

Complementando o jogo solicitamos aos alunos que fizessem individualmente, por escrito e, em casa, uma atividade com o seguinte enunciado: *Agora é a sua vez de jogar sozinho (a)! Escreva os números abaixo como produto de primos.* Oferecíamos quatro itens, com os números 90, 64, 144 e 945. Acreditávamos que eles compreenderiam o enunciado e apresentariam a decomposição dos números em fatores primos. Entretanto, alguns alunos que deram ênfase à primeira frase, *Agora é a sua vez de jogar sozinho (a)!*, não fizeram o que pedíamos. Eles se remeteram aos primeiros momentos do jogo em que tinham de produzir várias decomposições para um número que ditávamos, como mostra a Figura 3.41:

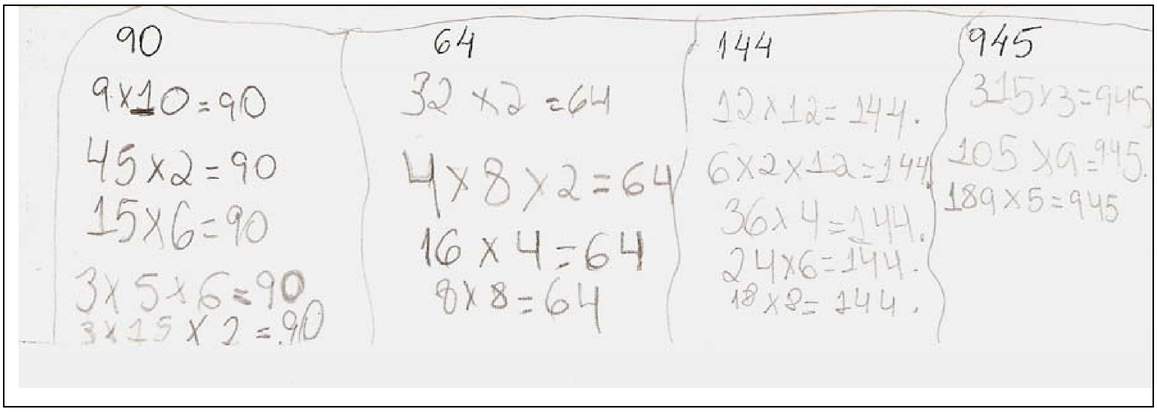


Figura 3.41:
Interpretação equivocada do enunciado do complemento do jogo do telegrama

Como podemos perceber, o aluno decompôs corretamente cada número em vários produtos, alguns com dois e outros com três fatores. Entretanto, nenhum deles correspondia à decomposição dos números em fatores primos como havíamos pedido no enunciado.

Entre aqueles os que compreenderam o enunciado, encontramos erros e acertos. Um tipo de erro muito comum foi envolver números que não são primos na decomposição (Figura 3.42):

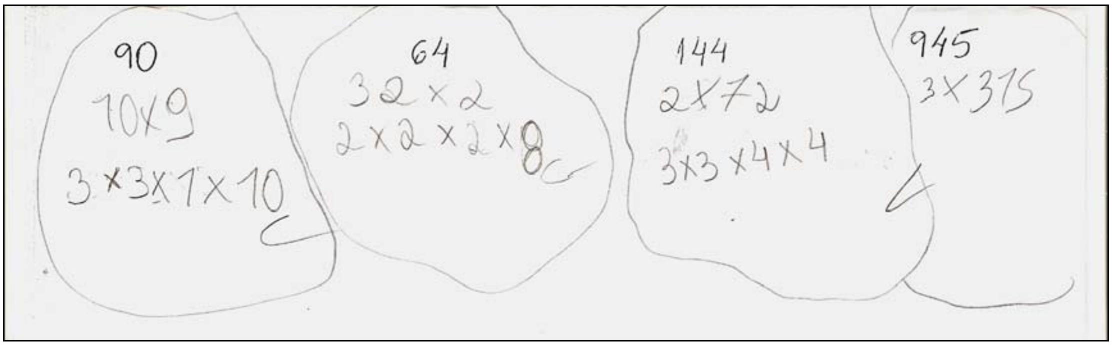


Figura 3.42:
Decomposição envolvendo fatores primos e compostos

Como pode ser observado na Figura 4.42, o aluno inicia o processo de decomposição em fatores, realiza substituições obtendo alguns fatores primos, mas interrompe o processo antes de encontrar todos os fatores primos. No exemplo, o número 10 ainda deveria ser substituído por 2 x 5, mas o aluno deu a atividade por concluída, antes de fazê-lo. Isto evidencia para nós que o aluno entende o procedimento, mas não tem o controle das circunstâncias em que ele deve ser empregado, não tem, por exemplo, um critério para decidir se prossegue com ele ou se o interrompe. Este controle, segundo Vergnaud (1990a), integra a conceitualização em questão, ou seja, se o aluno ainda não tem o controle das circunstâncias em que seus procedimentos devem ser empregados, o processo de conceitualização ainda não está completo.

Outro aspecto que também verificamos foi o esquecimento de alguns fatores primos que já haviam sido identificados no processo de decomposição. Na Figura 3.43, mostramos um caso desse:

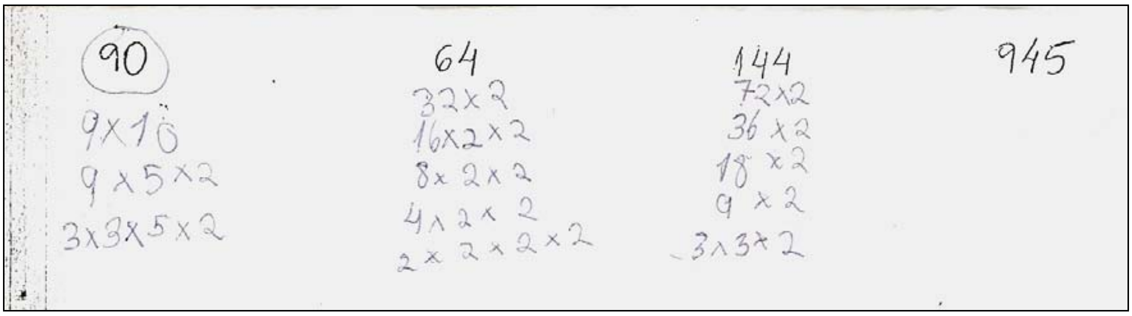


Figura 3.43:
Esquecimento de alguns fatores primos durante a decomposição

Com o número 90, o aluno não sentiu dificuldade. Com números em que a quantidade de fatores primos era maior e, conseqüentemente, precisou repetir mais vezes o processo de substituição de um fator pela sua decomposição em um produto, o aluno se atrapalhou. Como podemos perceber na decomposição que ele apresentou para o número 64 e, sobretudo na decomposição que ele apresentou para o 144, o aluno substituía um fator pela sua decomposição, mas não repetia o outro fator. Assim, substituiu o número 72 por 36 x 2, mas não repetiu o número 2 escrito quando substituiu 144 por 72 x 2 e cometeu esquecimentos análogos, conforme realizava as substituições.

Neste caso, foi interessante observar que, é que diferente do aluno cujo registro foi comentado anteriormente, este aluno sabia o momento de interromper o processo, pois, em todos os itens, chegou a fatores primos. Julgamos este erro como decorrente do uso inadequado da linguagem matemática, do desconhecimento das propriedades que asseguram a igualdade entre duas expressões matemáticas e de como devem ser representadas.

Em outras palavras, o aluno ainda não dominava as representações associadas ao conceito. De acordo com Vergnaud (1990a), a compreensão e o uso adequado da simbologia associada a um conceito são elementos que o compõem, portanto, também inferimos que os alunos que cometiam esse erro ainda não dominavam plenamente a decomposição em fatores primos.

Desse modo, consideramos que o uso inadequado da simbologia poderia se constituir em um obstáculo para que os alunos usassem a decomposição de um número em fatores primos na simplificação de cálculos e na obtenção dos fatores de um número. Por isso, cuidamos de, nas atividades seguintes, criar condições para que os alunos pudessem corrigi-los.

Referindo-nos, ainda, à Figura 3.43, notamos que a decomposição do número 945 em fatores primos não foi feita. Reparamos pelos registros que muitos alunos, também, não haviam feito ou cometeram algum erro nesse item. Entrevistamos, informalmente, alguns deles e constatamos que o fato de ser um número ímpar, muito maior do que 90, 64 e 144 constituiu-se em dificuldade. Os alunos não conseguiam encontrar sua decomposição em dois fatores, que deveria ser o ponto de partida para as substituições. Diante do fato, ou não faziam ou pensavam aditivamente (Figura 3.44):

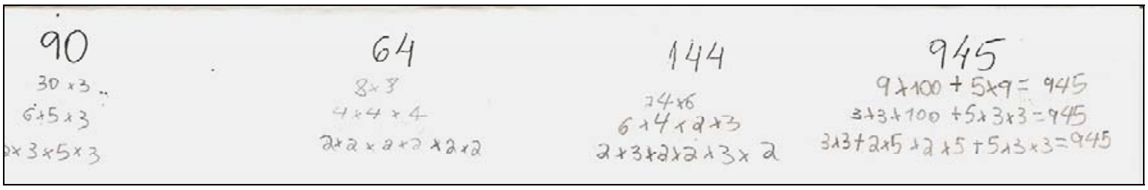


Figura 3.44:
Pensamento aditivo na decomposição em fatores primos

O aluno acertou a decomposição em fatores primos dos números 90, 64 e 144. Quando confrontado com o número 945, pensou inicialmente em *“900 + 45”* e decompôs em fatores primos cada uma destas parcelas.

Por fim, vamos comentar os acertos. Das 22 crianças, apenas seis acertaram a decomposição em fatores primos de todos os números solicitados. Na Figura 3.45, mostramos um exemplo:

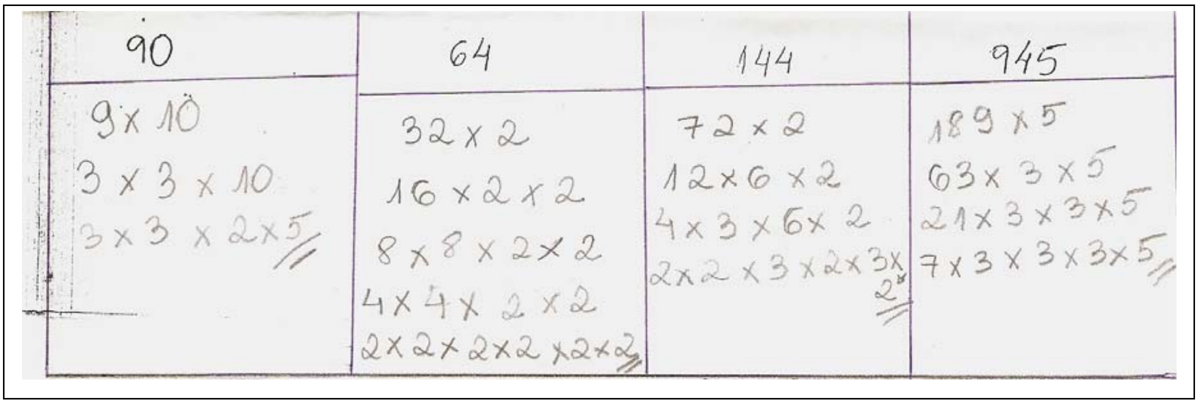


Figura 3.45:
Protocolo em que a criança acertou a decomposição em fatores primos de todos os números solicitados

A aluna entregou também sua folha de rascunho, que colocamos com a cópia da parte da folha na qual organizou suas soluções. Pelos cálculos escritos nele pela aluna, podemos verificar que, para identificar os produtos, ora ela efetuava as divisões, ora estimava-os mentalmente e efetuava os cálculos para comprovar sua estimativa. Já, na Figura 3.46, não só temos mais um caso de acerto, como também temos o registro de que a aluna reconhecia que a decomposição do número em fatores era igual ao próprio número.

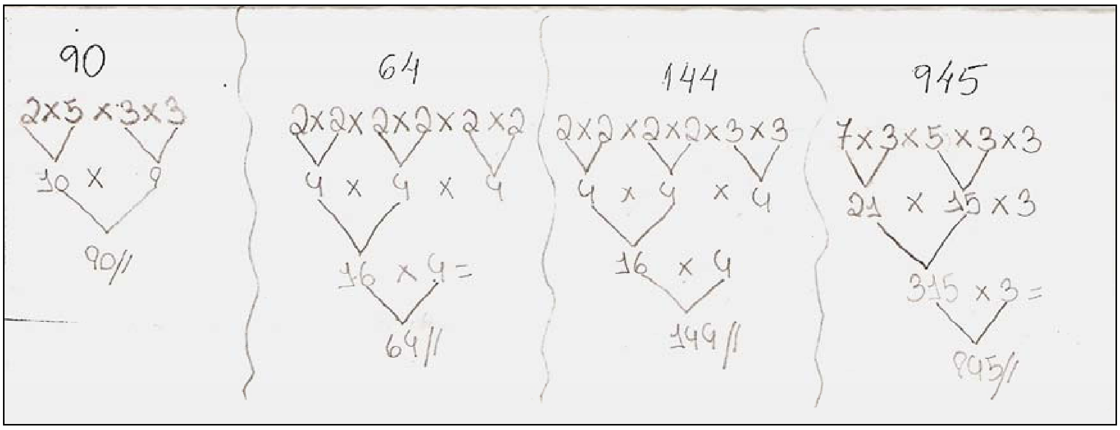


Figura 3.46:
Decomposição em fatores primos com prova real

Após decompor os números em fatores primos, a aluna refez as multiplicações, verificando seus resultados em uma espécie de *prova real,* o que não foi feito pelo aluno cujos registros disponibilizamos na Figura 3.47:

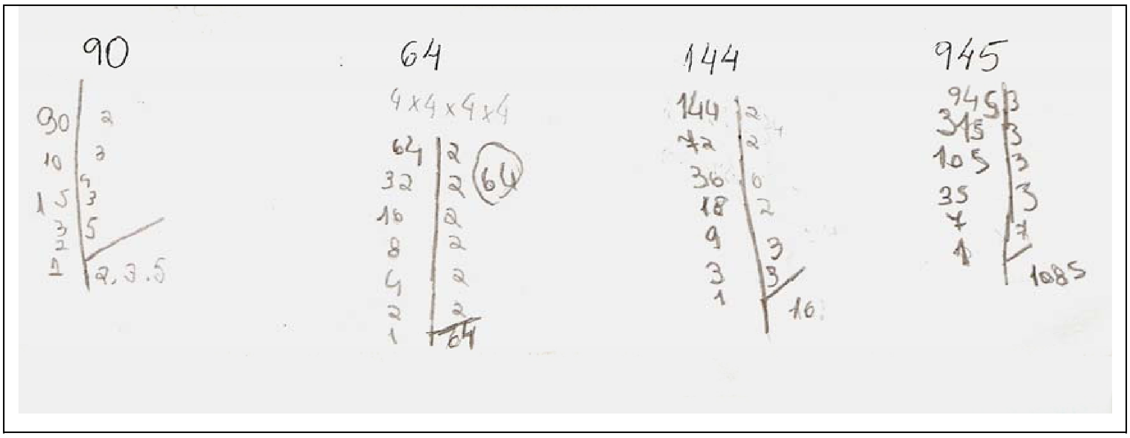


Figura 3.47:
Decomposição pelo método tradicional

Esse aluno foi o único a empregar o método de decomposição de um número em fatores primos tradicionalmente ensinado nos livros didáticos. O aluno, cursava o sexto ano pela segunda vez e reconheceu pelo enunciado qual procedimento deveria usar. Entretanto, seus registros nos fornecem indícios de que empregava o método de forma mecanizada. Não testava suas respostas a fim de validá-las ou refutá-las. No caso do número 945, por exemplo, chegou a uma decomposição diferente da considerada correta, efetuou as multiplicações e, conseqüentemente, não retornou ao 945, porém nem questionou a decomposição que havia feito.

3.2.2.3 Síntese do Segundo Grupo de Atividades

Nas duas atividades que compõem este grupo, os alunos tiveram oportunidade de decompor números em fatores. Na primeira, criaram uma representação pictórica para associar ao produto de três números e na segunda, decompuseram alguns números em parcelas ou fatores. Assim como no primeiro grupo de atividades, identificamos uma série de conceitos matemáticos em nas ações das crianças. São eles:

- A ordem dos fatores não altera o produto;
- Todo número pode ser decomposto em duas ou mais parcelas;
- Todo número pode ser decomposto em fatores;

- Todo número é igual a sua decomposição; e
- Os fatores de um número são menores ou iguais ao próprio número.

É importante salientar que, embora não tenhamos listado, conhecimentos mobilizados no primeiro grupo de atividades como a reversibilidade entre as operações de multiplicação e divisão, e os critérios de divisibilidade, também, foram percebidos nas ações das crianças quando realizavam as atividades deste grupo. De acordo com nosso referencial teórico, o processo de construção de conceitos não é linear, e, no caminho das generalizações, as situações são retomadas ou refutadas um número considerável de vezes.

Ao final realizamos a segunda avaliação intermediária. Seus dados estatísticos já foram apresentados no início deste capítulo. É necessário comentar apenas que incluímos nela, questões relativas ao uso da decomposição em fatores primos para simplificar cálculos e identificar os fatores do número. O fato de alguns alunos efetuarem sem dificuldades as decomposições propostas no complemento do jogo do telegrama, sugeriu-nos a possibilidade deles fazerem tal uso. Entretanto, o rendimento insatisfatório da maioria dos alunos, alertou-nos quanto à necessidade de realizarmos o terceiro grupo de atividades.

3.2.3 Análise do Terceiro Grupo de Atividades

Finalizando a intervenção de ensino, as atividades deste grupo tiveram por objetivo favorecer a decomposição em fatores primos e o uso desta decomposição na simplificação de cálculos e na identificação do conjunto de fatores do número. São elas: a construção da árvore e o jogo da árvore. Ao final, aplicamos o teste diagnóstico (avaliação final).

3.2.3.1 Construção da árvore

A construção da árvore foi a quinta atividade da intervenção e a primeira do terceiro grupo de atividades. Construindo a árvore de fatores de um número, o aluno não só obtém sua decomposição em fatores primos, como também pode obter outras decomposições para ele e todos os seus fatores. Além disso, adquire um suporte para a realização de cálculos mentais. Como explicamos no capítulo 3, esta atividade e seu complemento tiveram ao todo 150 minutos de duração, sendo uma aula dupla de 100 minutos para a atividade e uma aula de 50 minutos para discussão do complemento.

Uma preocupação que tivemos quando elaboramos a intervenção foi relacionada à representação gráfica da *árvore.* Como criaríamos condições para que os alunos atribuíssem significado a uma representação gráfica composta por setas e números, sem os tradicionais símbolos das operações e da igualdade?

Afinal, para Vergnaud (1990a), as representações exercem um papel essencial no processo de construção de conceitos, mas, para desempenhá-lo, é preciso que cada etapa seja negociada com os alunos, enquanto vivenciam a situação. Isto foi possível graças às reflexões que ocorreram durante o *jogo do telegrama.* As discussões sobre a substituição dos números por sua fatoração nas etapas finais do jogo, permitiram que, naquele momento, começássemos a discutir o significado de tal simbologia.

Ao longo da aula, solicitávamos aos alunos que construíssem *árvores* para os vários números que ditávamos. Pedíamos que desenhassem no quadro as *árvores* que haviam construído. Comparávamos árvores distintas feitas para um mesmo número, extraíamos coletivamente os fatores e igualdades matemáticas.

Como a comutatividade da multiplicação é um conhecimento demonstrado pelos alunos em suas ações ao longo da intervenção, com poucos exemplos, eles enunciavam informalmente o Teorema Fundamental de Aritmética.

Ao observar a última ramificação de cada *árvore,* um aluno comentou: *"quando não dá mais para continuar a árvore, ficam os mesmos números. Pode ser até fora de ordem, mas se multiplicar, a ordem não vai importar"*. Este comentário foi por outros semelhantes feitos pelos alunos enquanto comparavam as árvores. Notamos que a maioria deles conhecia e empregava na situação da *árvore* o teorema. Logo ele foi mais um teorema-em-ação enunciado pelos alunos. A multiplicação e sua propriedade comutativa correspondem aos principais conceitos-em-ação.

É importante destacar que este foi um momento muito aguardado por nós, desde quando estabelecemos o objetivo de nossa pesquisa. Esperávamos que o momento em que, finalmente, os alunos enunciassem o TFA fosse constituído por discussões muito sofisticadas ou com, pelo menos, algumas características distintas de tantos outros momentos vividos durante dois meses de intervenção. Mas fomos surpreendidas. Mal iniciávamos a atividade de construção da *árvore* e isso já aconteceu.

Refletimos sobre os resultados obtidos anteriormente e, sobretudo, as idéias da Teoria dos Campos Conceituais. Concluímos que, se compreendemos a formação de conceitos como um processo não linear, com continuidades e rupturas, não faz sentido aguardarmos por um dia de intervenção de ensino com características especiais. Certamente, no jogo do telegrama, alguns alunos poderiam já conhecer, em suas ações para aquela situação, o teorema. Provavelmente, outros alunos poderiam depender de mais alguns encontros para isso.

Durante a construção da árvore, assistimos à superação de erros cometidos no jogo do telegrama por parte de alguns alunos. O primeiro erro superado foi aquele referente ao esquecimento do fator que não estava sendo substituído pela sua decomposição (ver Figura 3.43). Inferimos que a ênfase no uso das flechas contribuiu para esta superação. As flechas, os números e a maneira como os alunos deveriam coordená-los na construção da *árvore*, compuseram o sistema simbólico de que os alunos dispunham para lidar com a situação de decomposição e, para Vergnaud (1990a), o uso de sistemas simbólicos favorece a construção do conceito e vice-versa.

Outro erro que também foi superado referiu-se à associação entre o número e sua decomposição em fatores primos. Como vimos na Figura 3.47, o aluno não reconhecia a igualdade entre esses elementos. As constantes discussões sobre a obtenção de igualdades a partir da análise da árvore favoreceram a superação desse erro. No complemento da atividade, os alunos produziram registros escritos que a comprovam. Este é um erro considerado tradicional no ensino da decomposição em fatores primos. Foi também cometido pelos sujeitos das pesquisas de Campbell e Zazkis (2002). No método de decompor por meio da construção da árvore, encontramos uma possibilidade dos alunos superá-lo.

Mas a construção da *árvore* também oferece alguns obstáculos conceituais e não impede a produção de outros equívocos. Vamos mencionar, primeiro, os casos que se referem à obtenção dos fatores de um número. Freqüentemente, os alunos se esqueciam de identificar alguns fatores (Figura 3.48):

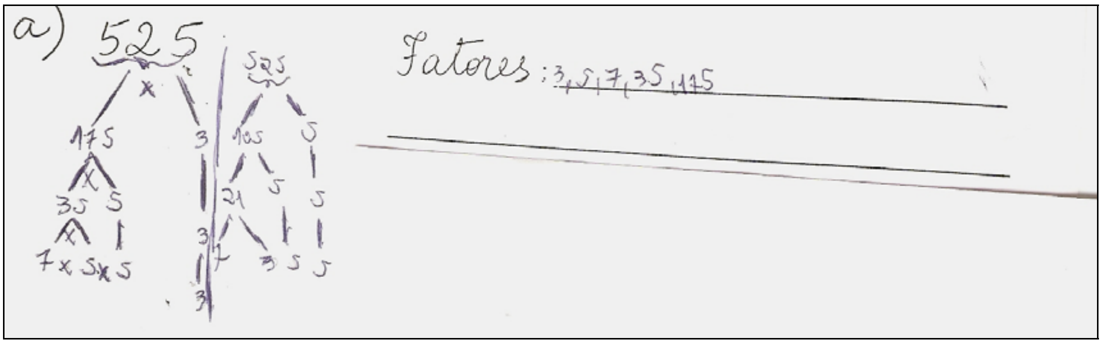


Figura 3.48:
Esquecimento de todos os fatores que não estão escritos na árvore

Neste registro, o aluno só escreveu os fatores de 525 que apareceram na primeira *árvore* que construiu. Mesmo tendo construído outra árvore para o mesmo número (fato muito comum entre os alunos), ele só observou os fatores escritos na primeira. Se tivesse observado a segunda, acrescentaria o número 21 entre os fatores que listou. Mas, como seus argumentos nos sugeriram, a ênfase que demos na igualdade das decomposições em primos – última ramificação de cada árvore – fazia-o crer que os fatores que encontraria analisando uma árvore seriam os mesmos que verificaria analisando a outra.

Por exemplo, o aluno não reconhecia que o produto de fatores primos de um número também é um fator deste número e, assim, não obtinha os outros fatores. Nesta perspectiva, havia ainda aqueles alunos que sabiam que efetuando os produtos de alguns fatores primos do número encontrariam outros fatores dele, mas não conseguiam coordenar suas ações para obter todos eles e se esqueciam de alguns. Na Figura 3.49, apresentamos o extrato de um registro que evidencia este fato:

Figura 3.49:
Esquecimento de alguns fatores que não constam na árvore

Percebemos que o aluno não incluiu em a sua lista de fatores de 525, os números 21, 35 e 105, que não foram escritos em nenhuma ramificação da *árvore.* Por outro lado, ele escreveu o número 15, que também não estava em ramificação alguma. Indagado sobre o que o levou a listá-lo, ele respondeu de forma interrogativa: *"mas, depois da árvore, ainda não tem que ficar multiplicando uns números para achar mais fatores?".*

Desse modo, inferimos que o aluno sabia o que fazer, mas não sabia exatamente como nem em que circunstâncias deveria fazer. Ou seja, não tinha o controle da situação em que deveria agir. Vergnaud (1990a) salienta que, durante o processo de conceitualização, o aluno adquire progressivamente o controle da situação que vivencia. Isto nos sugeriu que, se os alunos que cometiam tal esquecimento, vivenciassem mais algumas situações desta mesma classe, ele também seria superado.

Desta forma, é possível concluir que existem conhecimentos matemáticos implícitos na ação de construir a árvore. Quando os alunos os detêm apenas parcialmente, não conseguem extrair todas as informações que a árvore poderia lhes fornecer.

A equivalência entre um número e sua decomposição em fatores e as propriedades da igualdade que asseguram ser possível substituir um pelo outro sem alterá-la, são conhecimentos implícitos na ação dos alunos quando constroem a árvore. São os teoremas-em-ação dessa situação. Mas, quando o aluno vai extrair da árvore de um número os seus fatores, ele coloca em prática, pelo menos, mais um conhecimento: *o produto dos fatores primos de um número também é um fator dele.* Temos, portanto, outro teorema-em-ação. Se o aluno não fizer todas as combinações possíveis dos fatores primos do número, algum fator será esquecido. Porém, quando o aluno combina os fatores que estão na árvore, mas não são primos, acaba encontrando mais fatores do que o número realmente tem. Ele está empregando um falso teorema-em-ação: *o produto dos fatores de um número, também, é um fator dele.* Na figura a seguir, apresentamos a obtenção de fatores com base nele:

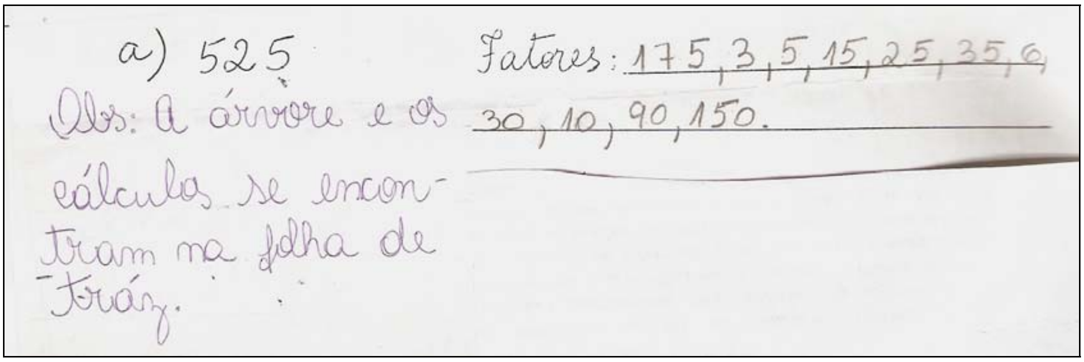


Figura 3.50:
Lista incluindo números que não são fatores do número dado

Neste caso, os cinco últimos números da lista da aluna não são fatores de 525. Além disso, os números 1 e 525 não constam nesta lista. Como o número um não pode ser obtido por meio destas ações, ele foi esquecido. Temos, então, uma limitação da atividade. Por meio da construção e da análise da *árvore* de fatores dos números, os alunos não identificam o 1 como fator de nenhum número. Assim, foi fundamental refletirmos sobre os fatores obtidos na análise da *árvore*, procurando criar condições para que os alunos generalizassem o conceito de fator. Caso contrário, não admitiriam o número 1 como fator de outro número.

Finalmente, a atividade da *árvore* não impediu que determinados alunos pensassem aditivamente mais uma vez, como podemos perceber na Figura 3.51:

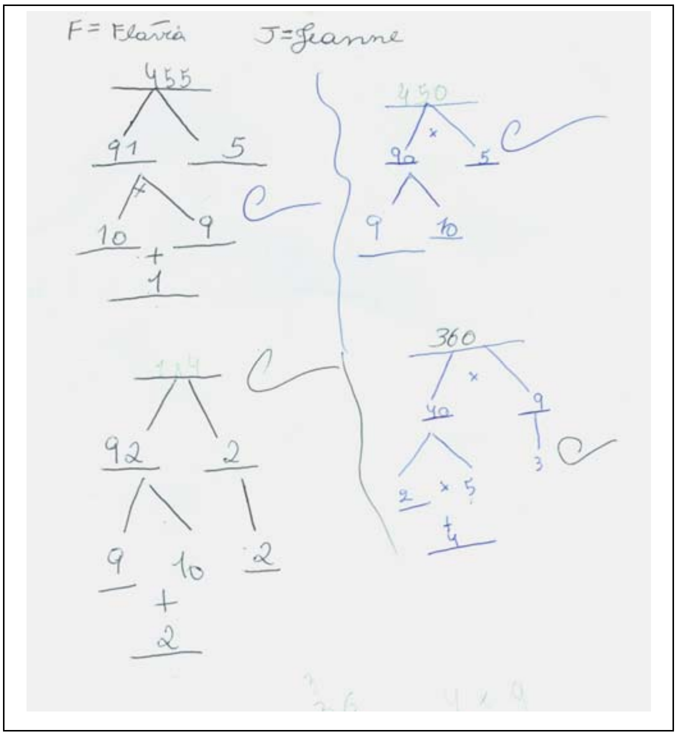


Figura 3.51:
Pensamento aditivo na árvore

Acostumados a decompor em fatores números que são múltiplos de 2, 3 e 5, decompor o número 91 não foi trivial para os alunos (os fatores de 91 são, além de 1 e 91, 7 e 13). Assim, não conseguindo decompor o número em fatores, a aluna decompôs nas parcelas 90 e 1 e decompôs em fatores apenas o 90.

3.2.3.2 O jogo da árvore

Encerrando o terceiro grupo de atividade e, conseqüentemente, a intervenção de ensino, realizamos o jogo da árvore. Como explicamos no capítulo anterior, sabendo como construir a árvore de um número, cada aluno construiu árvores incompletas para que sua dupla completasse. A Figura 3.52, descreve uma partida entre os alunos B e R:

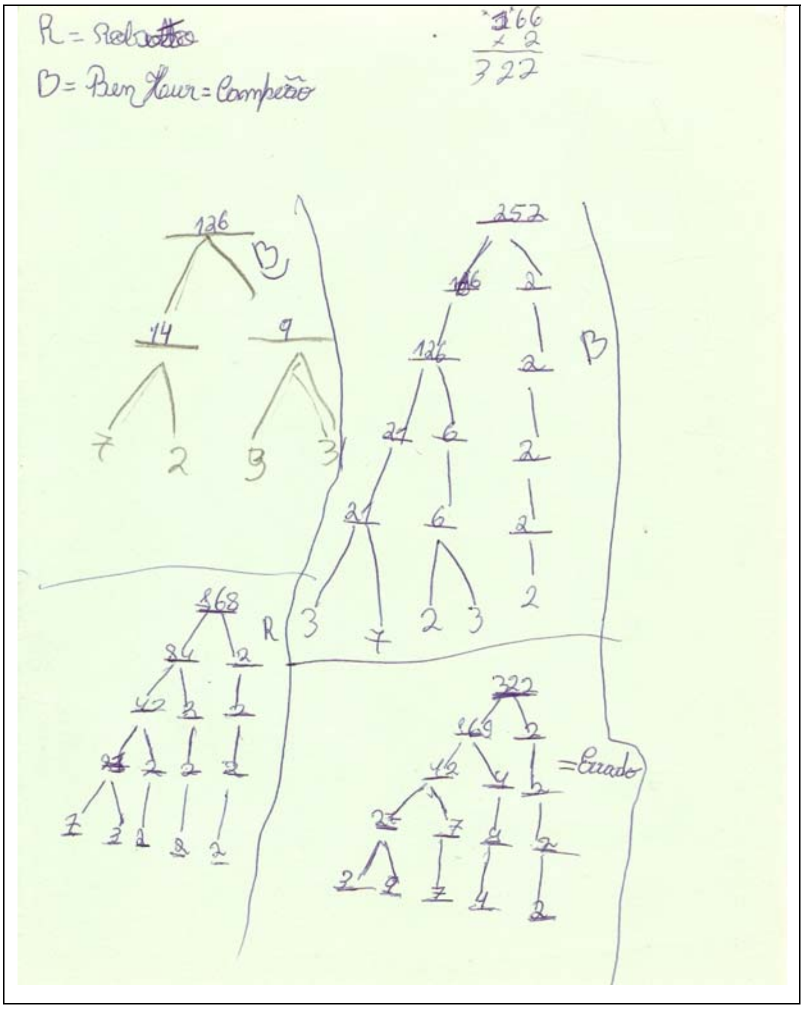


Figura 3.52:
Uma partida do jogo da árvore

A dupla era formada pelos alunos B e R. As árvores assinaladas com a letra B foram propostas por R a B e este a completou corretamente. As árvores assinaladas com R e *errado* foram propostas por B a R. R só acertou a que está assinalada com a sua inicial Na maioria das duplas, as árvores incompletas trocadas tinham características semelhantes a estas: apresentavam o número e a primeira ramificação ou, simplesmente, o número.

Esperávamos que os alunos deixassem outras lacunas para serem completadas, o que favoreceria a obtenção de igualdades matemáticas e o emprego da reversibilidade entre multiplicação e divisão com números ou expressões numéricas da árvore. Por exemplo, se na primeira *árvore* à esquerda, R escrevesse 126 e 9, mas omitisse 14, levaria B a dividir 126 por 9 na busca do número omitido. Mas isto não acontecia sem nossa intervenção. Então, sugerimos que cada aluno propusesse apenas a última ramificação da árvore para que seu adversário pudesse descobrir o número que ficaria no *topo da árvore*, isto é, o número tomado inicialmente para ser decomposto. Na Figura 3.53, mostramos o material produzido por uma dupla com base nessa idéia:

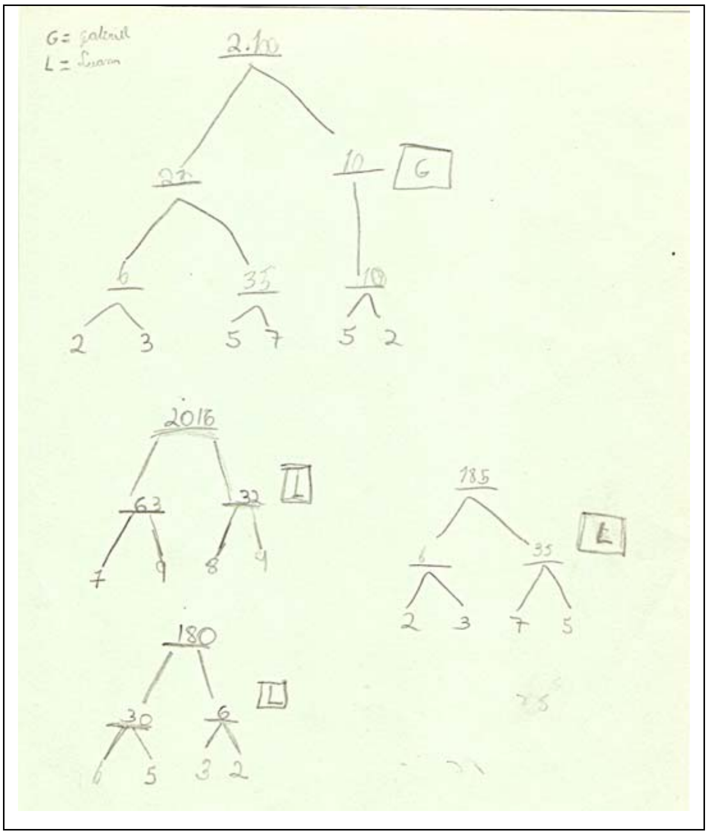


Figura 3.53:
Jogo da árvore com proposição da última ramificação

Salvo alguns erros de cálculo, como podem ser verificados logo na primeira árvore, os alunos completavam as lacunas corretamente, efetuando o procedimento inverso do que fizeram na construção da árvore. Eles também escreviam igualdades matemáticas mais simples e, com nossa ajuda, começavam a escrever aquelas mais incrementadas como $180:(2x3x5)=6$, em que foi possível atribuir significado ao uso dos parênteses em uma expressão matemática.

Em um determinado instante, a dupla que produziu o registro a que estamos nos referindo, passou a se desentender e um aluno dizia para o outro: *mas isto não pode ser a última ramificação! Ainda dá para continuar.* Quando nos aproximamos, compreendemos melhor a discussão. O aluno G ofereceu ao aluno L dois pares de números e dizia se tratar da última ramificação de uma *árvore.*

Mas, o aluno L observou que nem todos os números oferecidos eram primos e, portanto, ainda poderia obter mais ramificações. Ele não expressava esse conhecimento formalmente, mas, fundamentado na situação, demonstrava compreender que, dada a decomposição de um número em fatores quaisquer, podemos operar sobre ela até obter sua decomposição em fatores primos. Por estar presente nas ações que se estabelecem na situação, configura-se em um teorema-em-ação.

Foi também possível explorar a reversibilidade e a escrita de igualdades, quando as competições entre os alunos foram ficando mais acirradas e, para criarem dificuldades aos adversários, eles escreviam *números difíceis* para serem decompostos. A busca dos *números difíceis* fez com que os alunos que propunham as *árvores* empregassem a reversibilidade. Mas, primeiramente, tratamos de compreender o que estavam considerando *números difíceis* para serem decompostos. Em entrevistas informais, os alunos nos explicaram que os *números difíceis* eram números grandes, que o adversário não conseguia encontrar mentalmente dois fatores cujo produto fosse ele. Na Figura 3.54,.apresentamos a busca de um aluno por um *número difícil*:

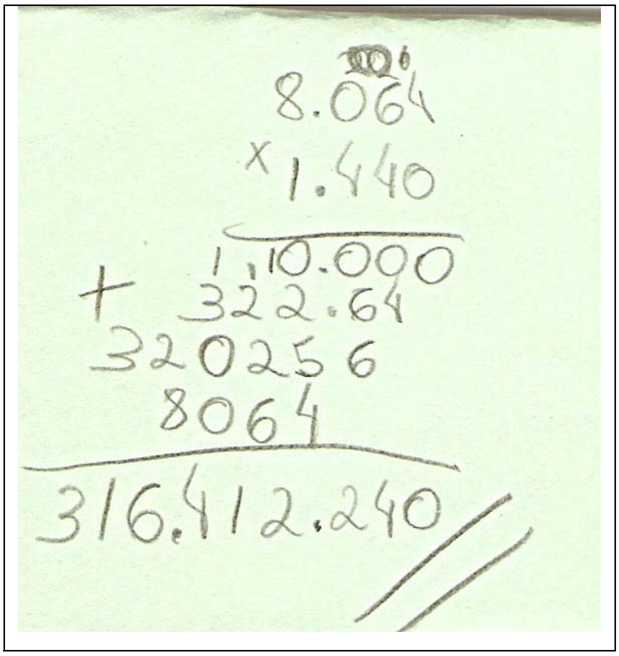


Figura 3.54.:
Busca de um *número difícil* no jogo da *árvore*

O aluno efetuou estes cálculos para obter um número grande e propor sua árvore incompleta no jogo. Em seguida, elaborou o gabarito, isto é, a árvore do número que estava propondo. O colega que recebeu a proposta, recusou-se a fazer.

Solicitamos ao aluno que desenhasse no quadro de giz seu gabarito. Esta árvore favoreceu nossas reflexões com a turma sobre as igualdades matemáticas. A manipulação das igualdades matemáticas ganhou sentido na medida que tornava desnecessários os cálculos com números tão grandes. Algumas das igualdades matemáticas foram extraídas pela turma ao observar o desenho da árvore de 316.412.240:

$$316.412.240 : 1.440 = 8.064,$$

$$316.412.240 : 8.064 = 1.440,$$

$$316.412.240 : (28x288) = 1.440,$$

$$316.412.240 : (36x40) = 8.064,$$

$$316.412.240 : (288x28x36) = 40$$

$$316.412.240 : (7x4x36x8) = 9x4x5x8$$

Depois desta reflexão, os alunos passaram a extrair igualdades matemáticas de todas as *árvores* que construíram no jogo. Competiam entre si quem conseguiria extrair mais igualdades de uma mesma *árvore.* Para finalizar, construímos coletivamente a *árvore* do 180, propusemos algumas operações e pedimos que explicassem com as próprias palavras os procedimentos que empregaram. Na Figura 3.55, apresentamos os registros de um aluno:

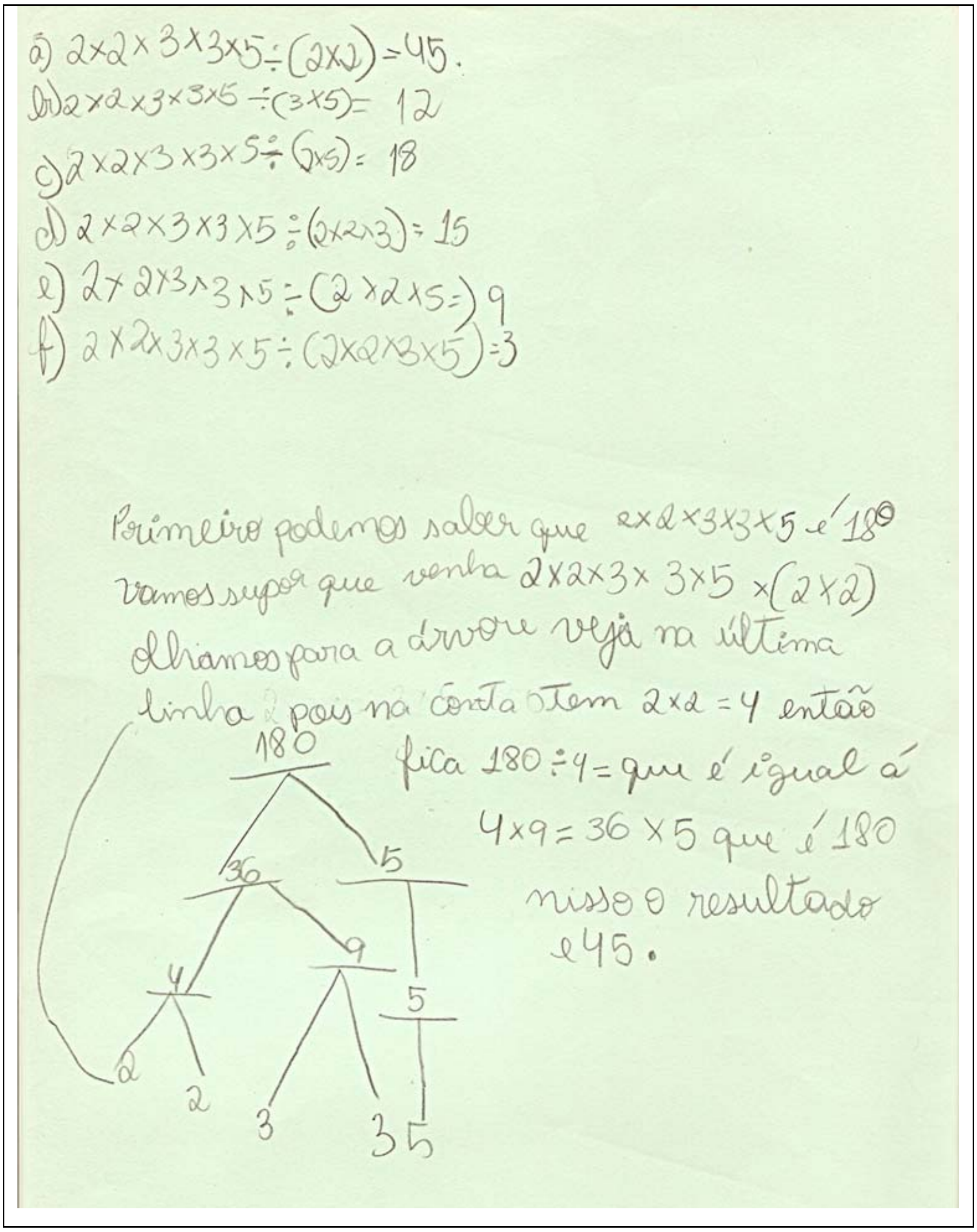
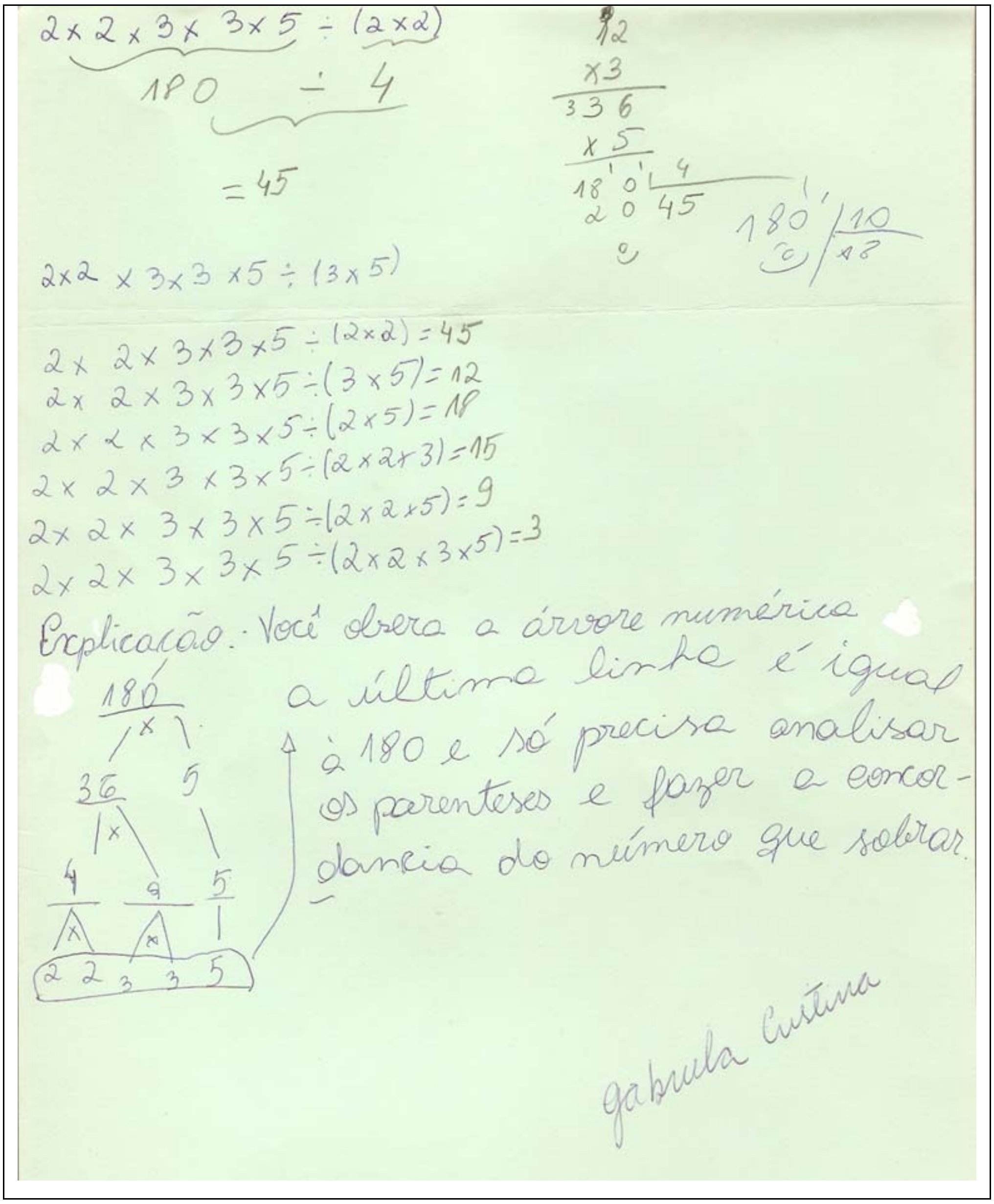


Figura 3.55:
Emprego da decomposição para simplificar cálculos (I)

As contas propostas compõem os itens de a até f. Percebemos pela argumentação do aluno, que ele se valeu das propriedades da árvore para justificar seus resultados. Embora, na sua justificativa, o aluno tenha dado um exemplo numérico, é possível notar que, fundamentado na situação, ele avança no processo de generalização de seus conhecimentos. A seguir, na Figura 3.56, apresentamos os registros de outro aluno que também se fundamentou nas propriedades da árvore:



2×2×3×3×5 ÷ (2×2)
180 ÷ 4
= 45
2×2×3×3×5 ÷ (3×5)
2×2×3×3×5 ÷ (2×2) = 45
2×2×3×3×5 ÷ (3×5) = 12
2×2×3×3×5 ÷ (2×5) = 18
2×2×3×3×5 ÷ (2×2×3) = 15
2×2×3×3×5 ÷ (2×2×5) = 9
2×2×3×3×5 ÷ (2×2×3×5) = 3
Explicação. Você observa a árvore numérica a última linha é igual à 180 e só precisa analisar os parenteses e fazer a concordancia do número que sobrar.
Gabriela Cristina

Figura 3.56:
Emprego da decomposição para simplificar cálculos (II)

Correspondendo às nossas expectativas iniciais, a aluna empregou o termo *sobrar.* Tememos um tratamento aditivo à situação. Mas, quando lhe perguntamos o que significa *fazer a concordância*, ela respondeu *“fazer a multiplicação”* percebemos que não havia nenhum tratamento aditivo.

Destacamos estes registros, pois neles fica evidente a mudança de procedimento dos alunos em relação a questões desse tipo. Como informamos na análise das questões do teste diagnóstico, inicialmente, confrontados com elas, os alunos efetuavam os produtos para, em seguida, multiplicar os dois valores encontrados. Contudo, este procedimento não deixou de existir entre os alunos da turma. Alguns deles, em número bem reduzido, preservaram-no.

3.2.3.3 Síntese do terceiro grupo de atividades

Na conduta das crianças ao longo das atividades que compõem este grupo, pudemos perceber a superação de alguns erros produzidos em momentos anteriores, sobretudo em questões relativas à decomposição em fatores primos. Além disso, os conhecimentos matemáticos mobilizados nestas condutas foram:

- Teorema Fundamental da Aritmética;
- Os fatores de um número são combinações dos fatores primos dele;
- Se *a x b x c x d x e = f*, então *a = f : (b x c x d x e)*; e
- Se *a x b x c x d x e = f*, então *a x b = f : (c x d x e).*

Par finalizar, vale lembrar que, embora alguns erros tenham sido superados, outras dificuldades não o foram. A tendência para pensar aditivamente certas situações multiplicativas, por exemplo, não foi completamente eliminada. Nas últimas etapas, ainda fomos surpreendidas com o emprego deste raciocínio por alguns alunos. Embora, não tenha interferido na compreensão dos conceitos, o uso inadequado dos termos “múltiplo” e “fator” também continuou ocorrendo esporadicamente.

3.3 Síntese do capítulo

Iniciamos este capítulo com a análise quantitativa dos resultados dos testes diagnósticos e das avaliações intermediárias. Fizemos uma análise mais detalhada das estratégias apresentadas pelas crianças nas questões dos testes. Identificamos os conhecimentos prévios e os conhecimentos adquiridos a respeito do TFA e principais conceitos associados a ele.

Reconhecendo a eficácia da intervenção de ensino, analisamos todas as atividades que a formaram. Nesta análise, observamos uma série de conhecimentos matemáticos implícitos nas ações das crianças, quando em situação-problema. Verificamos os erros que elas cometem e as estratégias que adotam.

Acreditamos que agora temos dados suficientes para responder nossas questões de pesquisa. Passaremos ao próximo capítulo, no qual apresentaremos as conclusões do estudo.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, faremos uma síntese da trajetória de nossa pesquisa e de seus principais resultados. Na seqüência, com base nesses resultados, responderemos às questões de pesquisa que motivaram a realização deste estudo. Faremos, ainda, algumas reflexões que surgiram apoiadas em nossa vivência ao longo da implementação da pesquisa. Por fim, faremos algumas sugestões para futuras pesquisas, que se nos apresentaram em nossa análise.

Na análise de cada atividade da intervenção de ensino, fomos elaborando conclusões parciais de nossa reflexão sobre a natureza dos procedimentos empregados pelos alunos nas questões propostas. O conjunto dessas conclusões nos ajudará a compreender as possíveis contribuições de nosso estudo para o ensino. Assim, vemos necessário apresentá-las de maneira sintetizada e integradas neste último capítulo.

4.1 A trajetória de nossa pesquisa

A presente pesquisa teve por objetivo realizar um estudo intervencionista para a introdução do Teorema Fundamental da Aritmética e dos principais conceitos associados a ele, com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Os alunos compunham uma turma de uma escola particular da zona norte do Rio de

Janeiro e passaram por uma planejada intervenção de ensino sobre o tema. Salientamos que eles já haviam estudado, em séries anteriores, conceitos como múltiplo, fator, números primos e decomposição em fatores. primos.

Para alcançarmos o objetivo da pesquisa, traçamos um planejamento científico que envolveu algumas etapas. A primeira delas foi justificar o interesse e a importância de realizarmos uma investigação sobre o tema. Em seguida, estabelecemos a problemática para, então, colocarmos explicitamente as questões de pesquisa (Introdução). O delineamento destas questões foi favorecido pela revisão bibliográfica das pesquisas correlatas à nossa (Introdução), realizadas no Brasil e no exterior, e pela revisão do material didático (fichas de ensino em anexo) elaborado por Anna Franchi, em 1979, em curso desenvolvido na Escola Experimental da Lapa, São Paulo, e aprimorado no Projeto Laboratório de Matemática PUC-SP (1992).

O estudo baseou-se em conhecimentos da Teoria Elementar dos Números, seus teoremas e resultados a respeito da divisibilidade entre números naturais, para enfatizar a decomposição em fatores primos. Observando a decomposição dos números em fatores primos, podemos, além de efetuar cálculos mentalmente, inferir sobre relações de divisibilidade (se um é múltiplo ou fator do outro), identificar fatores e múltiplos comuns a dois ou mais números e de cada número isoladamente.

Realizamos, também, inúmeras leituras para definição do suporte teórico que seria usado na construção e análise da pesquisa. Encontramos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (capítulo I) os subsídios necessários para a elaboração e análise de nossa pesquisa. Ela foi muito importante para fundamentar nossa visão sobre o processo de formação de conceitos ao destacar o papel das situações e dos conhecimentos implícitos nas ações dos alunos enquanto as vivenciam.

Apoiadas nas idéias teóricas de Vergnaud, bem como nas leituras das pesquisas correlatas a nosso interesse de estudo, definimos e construímos o método de nossa pesquisa (capítulo II). Realizamos um estudo intervencionista (quase experimental) composto de três partes: a primeira, consistiu na aplicação de um teste diagnóstico, a segunda, correspondeu à implementação da intervenção de ensino e, a terceira, à aplicação, novamente, do teste diagnóstico, para verificar possíveis contribuições da intervenção.

O passo seguinte à realização do estudo foi proceder com a análise dos dados delineada em dois momentos: primeiro, em relação aos aspectos quantitativos que, utilizando o pacote estatístico SPSS, relacionamos e interpretamos os percentuais de acerto. O segundo momento, referiu-se à análise dos dados do ponto de vista qualitativo, visando a identificar os tipos de erros cometidos pelos alunos, bem como analisar suas estratégias de resolução (capítulo III). Na seção a seguir, apresentaremos uma síntese desses resultados para, na seqüência, retomarmos as questões de pesquisa.

4.2 Síntese dos principais resultados

Nesta seção, apresentamos uma síntese dos principais resultados discutidos no capítulo da análise, tanto no que se refere aos testes diagnósticos como à intervenção de ensino pela qual os alunos passaram. Como já dissemos anteriormente, aplicamos um teste diagnóstico antes e outro, depois da intervenção. Os dois eram compostos pelas mesmas questões. Começamos esta síntese pelos testes diagnósticos e a concluiremos pela análise qualitativa.

4.2.1 O desempenho geral

O desempenho médio de todos os alunos na avaliação inicial foi insatisfatório. Verificamos que o nível de conhecimento prévio em relação ao Teorema Fundamental da Aritmética e os principais conceitos associados a ele eram da ordem de 40%. Em questão que solicitávamos decompor um número em fatores primos, por exemplo, não houve qualquer acerto. Os resultados obtidos na avaliação final indicaram que houve avanço, já que este índice foi elevado para cerca de 70%. A diferença entre os índices foi considerada significativa pelo Teste de Tukey, o que nos permitiu inferir sobre a eficácia da intervenção de ensino.

Entre os testes diagnósticos, durante a intervenção, ainda ocorreram duas avaliações intermediárias, cujas médias não diferiram significativamente. O fato nos sugeriu que o processo de aprendizagem não é linear, havendo continuidades e rupturas entre conceitos.

4.2.2 O desempenho por grupo de questões dos instrumentos

De acordo com as características conceituais, agrupamos as questões e estabelecemos um critério para medir os conhecimentos dos alunos a respeito dos conceitos evocados nelas, seja na avaliação inicial, seja na final. Constatamos que, na avaliação inicial, os alunos dominavam de forma insuficiente as possíveis representações para produto envolvendo mais de dois fatores, a identificação dos fatores e a decomposição dos números em fatores, fossem eles primos ou não.

Quanto ao reconhecimento de um número primo, a operação com números escritos na forma fatorada e a reversibilidade entre multiplicação e divisão, os alunos demonstraram um domínio razoável. Já na avaliação final, apenas na questão que envolvia multiplicações e divisões com números pequenos (dezenas, no máximo), os alunos demonstraram um bom domínio. Estes resultados nos permitiram inferir que realizar multiplicações e divisões era uma ação que esses alunos já haviam se apropriado, o que, aliás, já tínhamos como hipótese quando escolhemos realizar o estudo com essa turma.

Na avaliação final, os índices de acerto por questão aumentaram. Aplicamos o teste de McNemar e parte desse aumento foi considerada significativa. Os grupos com maior número de questões que apresentaram crescimento significativo dos índices de acerto, foram aqueles que envolviam a identificação de fatores, o reconhecimento de números primos, a decomposição em fatores primos e os cálculos com os números escritos na forma fatorada. Tivemos, então, mais uma evidência de que nossos objetivos de ensino e de pesquisa estavam sendo contemplados.

Cabe destacar que, no último grupo que mencionamos (cálculos com números escritos na forma fatorada), o aumento dos índices de acerto veio acompanhado de uma mudança de estratégia. Mesmo aqueles que, na avaliação inicial, acertaram tais questões, na avaliação final, mudaram seus procedimentos e, passaram a empregar conhecimentos da decomposição para efetuar cálculos.

Tendo obtido quantitativamente os avanços nos desempenhos depois da intervenção de ensino, o próximo passo foi proceder com a análise qualitativa dos dados obtidos, que será apresentada, também, de maneira sintética na subseqüência a seguir.

4.2.3 A análise qualitativa

Buscamos compreender o processo de construção de conceitos aritméticos. Para tanto, elaboramos uma intervenção de ensino e aplicamos um teste diagnóstico antes e depois de sua realização. A análise qualitativa que fizemos neste estudo, refere-se sobretudo aos procedimentos empregados pelos alunos, tanto nos testes diagnósticos como em todas as atividades e avaliações intrmediárias realizadas durante a intervenção. Por meio da interpretação desses procedimentos, analisamos também os recursos que mobilizamos (questões, atividades, materiais concretos) para favorecer o processo.

Entre as características das questões do teste e das atividades da intervenção, podemos citar a intenção de criar condições para que as crianças utilizassem as diversas representações dos conceitos, a ênfase nas situações a que eles estão associados e a tentativa de problematizar, utilizando jogos ou desafios em tais situações. Estas características nos permitem refletir que as leituras que fizemos dos textos de Vergnaud influenciaram nossas ações, desde a etapa de elaboração do teste e da intervenção, embora, naquele momento, não estivéssemos conscientes do fato.

Nas atividades que compuseram a intervenção e em uma questão do teste diagnóstico, observamos que o uso do material concreto de apoio concreto favoreceu a percepção de diferentes atributos dos conceitos abordados e produziu um efeito motivador. Com a utilização do material, os alunos foram capazes de perceber diferentes padrões, representar figurativamente cada padrão observado e estabelecer outros tantos padrões, o que nos levou a destacar a importância de tal material para o processo de aprendizagem desses alunos.

Uma vez que as atividades foram realizadas em grupo, observamos, também, que houve proveito na troca de informações entre as crianças, especialmente nas atividades envolvendo o material suporte, o que pode ter contribuído para o aprendizado individual. A articulação entre as várias formas de representação foi feita de tal maneira que as crianças iam adquirindo mais confiança para expressar seus procedimentos e estratégias, tornando esse processo mais eficiente.

Na ação desses alunos, percebemos uma série de conhecimentos matemáticos, que Vergnaud nomeia de “teoremas-em-ação“ e “conceitos-em-ação”. Procuramos organizá-los ao final da análise de cada grupo de atividades. Nessa organização, constatamos, mais uma vez, que os fenômenos observados, relacionados à construção de conceitos, não se dão de forma linear. Não se trata de estabelecer relações estritas de causa e efeito. Muitos fatores conjugam-se e interagem durante a construção de conceitos, proporcionando avanços e retrocessos. As mesmas atividades que favorecem a compreensão de certos aspectos conceituais, podem conduzir a generalizações equivocadas. Dois bons exemplos vêm da tábua de Pitágoras e do jogo de mensagens. Ao respondermos às questões de pesquisas, explicaremos mais detalhadamente nossas conclusões sobre as estratégias e os procedimentos das crianças.

4.3 Resposta às questões de pesquisa

Esta seção é dedicada à apresentação de nossa resposta à questão de pesquisa. Quando a expusemos na introdução desta tese, fizemo-las acompanhada de cinco outras questões, de caráter mais específico, que ao serem respondidas, dar-nos-iam subsídios necessários para responder à questão maior (e por isso mais geral) de nosso estudo. Assim, dividimos essa seção em duas outras, sendo a primeira dedicada a responder às questões específicas e, a segunda, à questão geral.

4.3.1 Resposta às questões de pesquisa específicas

Como observado acima, elaboramos cinco questões específicas de pesquisa, as quais serão, uma a uma, retomadas nesta subseção, acompanhadas de nossas respostas a elas.

Que estratégias são adequadas para que os alunos compreendam o conceito de número primo?

A definição comumente encontrada nos livros didáticos de que um número natural maior do que 1 é primo se seus fatores forem o número 1 e ele próprio, conduziu-nos a pensar que atividades que criem condições para que as crianças verifiquem relações de multiplicidade entre pares de números e reconheçam o conjunto dos fatores de um número serão suficientes para que compreendam o conceito de primo. Mas, atividades desse tipo são apenas necessárias, mas não suficientes.

Entendendo a construção de um conceito tal como Vergnaud, só podemos afirmar que este processo ocorreu se as crianças compreenderam não só uma definição formal, mas também as situações em que podem empregar o conceito e as representações que podem fazer dele. Durante a intervenção de ensino, conseguimos que as crianças criassem, pelo menos, duas representações: uma aritmética, observando os fatores do número; outra geométrica (primos são números para os quais só conseguiam obter um retângulo de dimensões inteiras que os tivessem como medida da superfície). Mas sob nosso ponto de vista, ainda é preciso muito mais. Elas precisam compreender que, conhecendo os fatores primos de um número, conseguirão obter todos os outros fatores ou que números primos são números a partir dos quais, efetuando produtos, poderão obter qualquer outro. É necessário acrescentar outras atividades àquelas mencionadas inicialmente.

A compreensão do conceito de número primo requer, simultaneamente, um trabalho que favoreça a compreensão da decomposição em fatores primos. No ensino tradicional, adquirimos uma visão linear do processo de construção de conceitos e pode parecer difícil conceber que a construção do conceito de número primo ocorra paralelamente ao reconhecimento de suas aplicações. Entretanto, estabelece-se aí uma relação dialética: só é possível avançar na construção do conceito de número primo se reconhecermos suas aplicações e vice-versa.

Como favorecer a compreensão da decomposição dos números em fatores primos e de seu uso na simplificação de cálculos?

Como já se sabe, fundamentamos teoricamente nossa pesquisa na Teoria dos Campos Conceituais. Segundo esta teoria, um conceito não pode ser visto isoladamente. Todo conceito está associado a muitos outros, sendo mobilizado em situações distintas e possui uma série de representações, portanto, para favorecermos sua compreensão, deveremos reconhecer estes fatos. Daí a idéia de optarmos por trabalhar considerando o campo conceitual a que o conceito pertence e classificarmos as situações em que ele se apresenta.

Nesse sentido, nosso primeiro passo foi o estudo da Teoria dos Números, mais especificamente, da parte dela que se associa aos números inteiros e à divisibilidade. Por meio de tal estudo, identificamos os principais conceitos associados à decomposição em fatores primos: a multiplicação, a divisão, suas propriedades e a reversibilidade entre elas, as noções de múltiplo e fator, a distinção entre números primos e números compostos, as técnicas de decomposição, o Teorema Fundamental da Aritmética, o uso da decomposição para simplificar cálculos, listar múltiplos e fatores, obter m.m.c. e m.d.c..

Em seguida, refletimos sobre como estes conceitos se associam entre si e os tipos de situação em que estão inseridos. Traçamos uma seqüência de objetivos que, a nosso ver, posta em prática, criaria condições para que as crianças a compreendessem e utilizassem a decomposição em fatores primos na simplificação de cálculos. De acordo com os dados coletados em sala de aula e analisados no capítulo IV, tivemos sucesso ao implementar esta seqüência. A seguir, listamos as ações que a compõem:

1º) Efetuar divisões e discernir as exatas das não exatas.

2º) Produzir igualdades matemáticas que representem estas divisões.

3º) Aplicar a reversibilidade entre multiplicação e divisão para obter outras igualdades matemáticas a partir de uma igualdade dada.

4º) Refletir sobre as igualdades relacionadas às divisões exatas e, a partir daí, identificar as relações *múltiplo de* e *fator de* que se estabelecem entre os números envolvidos.

5º) Reconhecer as propriedades das relações "múltiplo de" e "fator de",

6º) Listar o conjunto dos múltiplos e dos fatores de um número;

7º) Diferenciar números primos de números compostos;

8º) Criar representações para o produto envolvendo mais de dois fatores;

9º) Decompor números em fatores e, simultaneamente, escrever e refletir;sobre as igualdades matemáticas referentes a cada decomposição; e

10º) Decompor números em fatores primos e, simultaneamente, escrever e refletir sobre as igualdades matemáticas referentes a cada decomposição.

Desta seqüência, dois objetivos mereceram comentários. O primeiro foi *listar o conjunto dos múltiplos e dos fatores de um número.* Pode parecer ambíguo e desnecessário termos traçado este objetivo, uma vez que, até então, as crianças já seriam capazes de reconhecer se um número era, ou não era, fator ou múltiplo de outro.

Contudo, a prática em sala e a análise teórica das ações das crianças nestas situações nos revelaram que o fato de reconhecerem se a relação de multiplicidade se estabelece, ou não, não lhes assegura a habilidade de listas os conjuntos de múltiplos e fatores. Isto porque, para cada um desses objetivos, as crianças mobilizam esquemas distintos.

Para estabelecer a relação de multiplicidade, elas precisam apenas efetuar uma divisão e inferir a partir da análise do resto. Já, para listar os conjuntos, precisam efetuar divisões ou multiplicações sucessivas e aí outros conhecimentos são mobilizados, como, por exemplo, reconhecer quando devem parar de efetuar as divisões ou multiplicações.

O segundo objetivo que mereceu comentários foi o de *criar representações para o produto envolvendo mais de dois fatores.* Neste caso, podemos pensar equivocadamente que, se os alunos decompõem um número em dois fatores, conseguirão decompô-lo em três ou quatro fatores sem maiores dificuldades.

Entretanto, isto não foi verdade para os alunos que participaram de nossa pesquisa. Em princípio, a idéia de decompor em si já lhes pareceu estranha. Acostumados a valorizar o poder de síntese, costume este que é fruto de um ensino de Matemática tradicionalista, eles não compreendiam por que deveriam decompor. Superada esta fase, como se fundamentam em tabuadas e em razão da ênfase dada no ensino das quatro operações, conseguiam apenas decompor em dois fatores. Fez-se necessário, propor-lhes situações em que lhes fosse necessário decompor em três fatores. Caso contrário, não o fariam sem nossa ajuda. Interessante aí é que, quando admitiram a possibilidade de decompor em três fatores, passaram a decompor em quatro, cinco fatores sem que fosse preciso novamente nossa intervenção.

Finalmente, procuramos atividades (jogos, problemas, desafios) e materiais (grãos, cartinhas, questões do livro didático, fichas e listas de exercício) que nos permitissem concretizar nossos objetivos. Com estes elementos, elaboramos a intervenção de ensino. Fundamentadas na Teoria dos Campos Conceituais, elaboramos atividades que visavam a estabelecer conflitos cognitivos nas crianças para que, dessa forma, elas, de fato, construíssem os conceitos.

De que argumentos os alunos se valem durante o processo de significação acima? Que procedimentos adotam?

Como já dissemos, uma de nossas preocupações, ao elaborarmos a intervenção de ensino, foi oportunizar o emprego pelos alunos de procedimentos e argumentos diversificados. Não acreditamos num ensino em que o aluno não atue nem argumente. Assim, a cada atividade que propomos, procuramos criar condições para que os alunos participassem ativamente, expondo seus pensamentos e justificando seus procedimentos.

A partir da análise das fichas de atividades dos alunos ao longo da intervenção de ensino, foi possível identificar os seguintes procedimentos:

- Diferentes estratégias de contagem. Nas situações em que foram levados a contar elementos de um conjunto, as estratégias mais usadas pelos alunos foram contar um a um, contar dois a dois, agrupar os elementos a serem contados e somar grupo a grupo, o número de elementos por grupo. Embora preferissem contar a efetuar cálculos, os alunos sabiam que, para lidar com grandes quantidades de elementos, poderiam agrupá-los e multiplicar o número de grupos pelo número de elementos por grupo, adicionando o resto, caso existisse. É importante lembrar que, inicialmente, esqueciam-se de adicionar os restos. Ora escreviam os cálculos no papel, ora realizavam-nos mentalmente. Na contagem, algumas vezes, usavam os dedos. Com eles, apontavam os elementos do conjunto ou indicavam as quantidades envolvidas na ação.
- Diferentes representações. Durante a intervenção de ensino, procuramos favorecer o uso de diversas representações para os conceitos envolvidos nas situações: gestos, desenhos, figuras geométricas, tabelas, língua materna, linguagem aritmética (igualdades matemáticas). No uso e na transferência destas linguagens, alguns alunos não extraíam da situação os elementos necessários ao seu tratamento matemático. Na representação de formas e embalagens, por exemplo, a representação retangular não foi um aspecto relevante para alguns alunos. Ainda com relação à linguagem, os alunos revelaram

tendência para produzir igualdades matemáticas com base na seqüência de suas ações, o que os conduzia à produção de falsas igualdades matemáticas.

- Obtenção dos fatores pela busca nas tabuadas. Para obter os fatores de um número, os alunos observavam nas tabuadas de 1 a 10, as igualdades matemáticas nas quais eles figuram. Esta ação tem um domínio de validade restrito, pois, nem todas as decomposições em dois fatores dos números constam nestas tabuadas. Este procedimento, gradativamente, foi sendo substituído pelas divisões nas quais o quociente assumia valores da seqüência dos números naturais. Cabe destacar que o reconhecimento de um número primo também seguiu este caminho.
- Tentativa de enunciar critérios de divisibilidade. Quando precisavam decidir se um número é múltiplo de outro ou estimar cálculos nas atividades de decomposição, os alunos tentavam enunciar critérios de divisibilidade. Os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 eram enunciados corretamente. Entretanto, alguns alunos adaptavam esses critérios para outros números e produziam erros.

Quais são os erros mais cometidos? Quais as causas desses erros?

A investigação do erro constitui-se em um domínio complexo. Coloca questões polêmicas sobre suas origens e as condições de sua realização em sala de aula e, ainda, sobre sua função no processo de ensino, não abordadas especificamente nesta tese. Entretanto, comentamos sobre aqueles erros comumente mais cometidos pelas crianças na construção dos conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética, com vistas a contribuir para discussões mais amplas a respeito do significado do erro para a apropriação do conceito.

Inferimos sobre suas causas fundamentadas nos registros orais e escritos e em entrevistas que realizamos informalmente com as crianças. Para esta síntese, os erros foram divididos entre aqueles que esperávamos, pois foram descritos em nossa dissertação de mestrado e nas pesquisas organizadas por Campbell e Zazkis (2002), e os advindos das características específicas de nossa intervenção, portanto, não previstos em outras pesquisas.

Iniciando pelo primeiro grupo, apontamos a identificação das relações *múltiplo de* e *fator de* com, respectivamente, as operações de multiplicação e divisão. Como desdobramento deste erro, citamos, ainda, outro: o emprego equivocado dos termos *múltiplo* e *fator*. Muitas vezes, os alunos empregavam o termo múltiplo quando, na verdade, estavam se referindo ao fator e vice-versa.

A exploração exaustiva das igualdades matemáticas, em todos os momentos da intervenção de ensino, contribuiu bastante para que as crianças compreendessem que esses devem ser empregados para designar uma relação que se estabelece entre um par de números e não uma operação entre eles. Entretanto, observamos que o emprego equivocado dos termos permaneceu, entre alguns alunos e em algumas atividades, até o final da intervenção. Toda vez que tal erro ocorria, procurávamos refletir com a classe sobre ele. Nessas ocasiões buscávamos criar condições para que os alunos tivessem oportunidade de corrigi-lo.

Vale destacar que os ocasionais usos inadequados dos termos não impediram que as crianças avançassem na construção dos conceitos. Julgamos que as características de um ensino que valoriza os resultados, o fazer e não o comunicar é um dos fatores que levavam as crianças a insistir neste tipo de erro. Nesse tipo de ensino, no qual as crianças parecem estar inseridas desde o início de sua escolarização, não há uma preocupação em discutir e corrigir o processo mas sim o resultado apresentado pela criança.

Outro aspecto que produziu erro foi a extensão das atividades, propostas para números inteiros positivos para o domínio dos racionais. Assim como ocorrido nas pesquisas de Campbell e Zazkis (2002), nas situações iniciais, que envolviam divisões no domínio dos números inteiros, algumas crianças expressavam restos ou quocientes com números racionais, o que as impedia de alcançar a solução dos problemas.

Antes de iniciar o estudo dos múltiplos e fatores, a professora estava trabalhando números decimais com a turma. O entendimento que as crianças tinham dos decimais era que eles eram obtidos quando se continuava a realizar a divisão de dois inteiros cujo resto era diferente de zero. Informadas de que deveriam trabalhar com inteiros e, portanto, não deveriam prosseguir com os cálculos, elas superaram facilmente esse erro. Temos aí outra conseqüência de um ensino que valoriza o fazer, sem refletir sobre as ações. O aluno memoriza procedimentos sem discernir em que circunstâncias ou domínios eles são válidos, ou não.

Percebemos, também, a tendência de pensar aditivamente situações multiplicativas. Atribuímos tal fato à grande ênfase que a escola dá na introdução da multiplicação, que esta operação nada mais é do que a soma de parcelas iguais. Nessa visão de ensino, o que complica é que parece não haver uma preocupação em estender o conceito da multiplicação, restringindo-o à soma de parcelas igual e ao algoritmo dessa operação.

Esta tendência pode ser verificada nas várias fases da intervenção: desde os processos de contagem de grãos de feijão, em que a maioria preferia somar os grãos de cada prato em vez de multiplicar o número de pratos pelo número de feijões por prato, até a fase final, em que, em uma situação de jogo, podendo optar por uma maneira de decompor os números, vários alunos optavam por decompor em parcelas.

Quando desafiados a decompor um número grande em fatores primos, primeiramente, o decompunham em duas parcelas para, em seguida, decompor as duas parcelas em fatores primos. Ou, ainda, quando decompunham um número em fatores primos e algum fator se repetia, escreviam o produto do fator primo pelo número de vezes que ele havia aparecido na decomposição. Erros deste tipo foram sendo extintos na medida que as crianças incorporavam a seus procedimentos, a decomposição em fatores primos por meio do desenho da *árvore de fatores*.

A seguir, apresentamos os principais erros específicos de nossa intervenção, os quais serão apresentados em dois blocos, segundo sua superação, total ou parcial.

Superação parcial

- Os múltiplos e fatores de um número são aqueles que constam nas tabuadas de 1 a 10;
- Uma igualdade matemática não pode representar uma situação. Apenas o resultado é importante, ou seja, o segundo membro da igualdade é o que importa;
- Falsas igualdades matemáticas, como 2 x 3 = 6 + 8 = 14;
- O primeiro número quadrado é o 1;
- O produto de dois fatores de um número sempre será fator deste número; e
- Todo número que tem na ordem das unidades os algarismos 0, 3, 6, 9, é divisível por 3.

Superação total

- Divisão é distribuição, o que significou um obstáculo para a divisão na qual o divisor é 1;
- Toda Progressão Aritmética de razão *n,* é seqüência dos múltiplos de *n;*
- Não é possível decompor em mais de dois fatores;
- Não é possível repetir fatores na decomposição;
- Todo número ímpar é primo;
- Todo número primo é ímpar; e
- O conjunto dos múltiplos de um número é finito.

Embora não se vislumbre a representação algébrica, como ocorre a generalização dos padrões aritméticos envolvidos?

Em toda a intervenção de ensino, tivemos os momentos de reflexão sobre as atividades ou de correção coletiva dos complementos. Buscávamos, nesses momentos, favorecer os processos de generalização de padrões aritméticos envolvidos nas situações. Freqüentemente, pedíamos aos alunos que justificassem os procedimentos e as representações que empregavam nas situações. Eles gostavam dessas indagações, pois eram momentos que lhes permitiam trocar idéias conosco e com os outros colegas. Além disso, não foram raras as vezes em que eles reconheciam, durante a reflexão, seus reais conhecimentos sobre a situação discutida. Assim, podemos afirmar que, como em todas as outras atividades, eles também se engajavam nas reflexões e procuravam dar suas melhores respostas.

Analisando suas participações, percebemos, mais uma vez, a importância da situação no processo de construção de conceitos. Todas as respostas e justificativas apresentadas pelos alunos eram fundamentadas nas características da situação. Eles não eram capazes de fundamentarem-nas em leis básicas da Matemática, sem se referir às situações (jogos e problemas) que estavam vivenciando ou que tinham acabado de vivenciar. Isto não quer dizer que não tenham ocorrido generalizações. Mas elas ocorreram pela descrição em linhas gerais de procedimentos empregados em situação. Os números eram associados a grandezas envolvidas nas situações. Havia regularmente o uso de exemplos e contra-exemplos extraídos da situação para validar ou refutar um procedimento que se desejava generalizar. Quando não dominavam uma situação plenamente, identificavam, dentre aquelas que dominavam, outras que tivessem algum "parentesco" conceitual com a primeira e, fundamentavam-se nelas, o que, na maioria das vezes, conduzia-os a erros.

Assim, podemos afirmar que, embora os casos de generalizações não tenham ocorrido de maneira formal, isto é, com todas as simbologias próprias da Matemática, que requerem uma abstração, na qual o aluno "abandona" a situação e passa a pensar em "*n*", houve vários momentos de generalizações, tais como:

- No jogo dos restos, a discussão sobre as relações entre o número de pratos, o número de feijões e o número de feijões por prato conduziu à generalização de propriedades da multiplicação e da divisão, do algoritmo da divisão e das relações de multiplicidade;

- Na construção de retângulos, por meio da representação geométrica, os alunos diferenciaram números primos de números compostos e identificaram algumas características do conjunto dos números primos: conjunto infinito que não possui uma lei de formação e seu único elemento par é o 2.
- No preenchimento da tábua de Pitágoras, os alunos enunciaram os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 e reconheceram que, a cada número natural, podemos associar dois conjuntos: o conjunto de seus múltiplos e o conjunto de seus fatores. Além disso, concluíram que a seqüência dos múltiplos de um número é uma Progressão Aritmética cuja razão é o próprio número e que, se *a* é múltiplo de *b*, todo múltiplo de *a* será múltiplo de *b*, mas nem todo múltiplo de *b* será múltiplo de *a*.
- No jogo da mensagem, os alunos criaram uma representação para o produto de três fatores e generalizaram a noção de que a ordem dos fatores não altera o produto, mas pode representar situações distintas. O jogo favoreceu a transferência de uma representação para outra, ou seja, dos desenhos das cartinhas para as igualdades matemáticas e vice-versa. Tal transferência pressupôs que os alunos generalizassem os procedimentos que empregavam nela. Por exemplo, no caso deste jogo, contar em quantas partes a cartinha estava dividida, quantos círculos havia em cada parte e quantas bolinhas havia em cada círculo. Em seguida escrever, nesta ordem, o produto dos três números. Qualquer que fosse a cartinha apresentada, os alunos realizavam estes procedimentos ordenadamente. Portanto, ocorreu a generalização dos procedimentos.
- No jogo do telegrama, os alunos generalizaram a noção de decompor um número. Decompuseram em parcelas, em fatores quaisquer e em fatores primos. Entenderam a decomposição em fatores primos como um caso particular da idéia geral de decompor um número. Salientamos que, nessa atividade, mereceu destaque a generalização da idéia de decompor em mais de dois fatores. Os processos que os alunos empregavam para decompor em fatores (busca na tabuada, estimativa, divisões sucessivas) favoreciam-lhes a decomposição em dois fatores.

Decompor em três fatores constituía-se num obstáculo. Por meio da nossa intervenção, os alunos refletiram sobre seus procedimentos para decompor em dois fatores e admitiram que seria necessário acrescentar-lhes mais uma etapa: decompor novamente cada fator e substituí-lo por tal decomposição. Para que os alunos concluíssem esta idéia, foram necessários muitos exemplos e contra-exemplos, entretanto, sua generalização para decomposições de um número em mais de três fatores ocorreu facilmente.

- Na construção da árvore, os alunos tiveram oportunidade de comparar árvores diferentes produzidas para um mesmo número e conseguiram generalizar a noção de que, a menos da ordem dos fatores, a decomposição de um número em fatores primos é única (Teorema Fundamental da Aritmética). Além disso, expressaram, em linhas gerais, os procedimentos que empregavam na decomposição de um número em fatores primos. Explicaram, com vocabulário próprio da situação (*árvores, ramificações, galhos*), que deveriam repetir as substituições de cada fator por novas decomposições até que todos os fatores fossem primos. Esta generalização era de suma importância para a intervenção. Afinal, se os alunos não conseguissem decompor os números em fatores primos, como fariam os usos que visávamos que fizessem dela? Embora importante, não foi a única generalização favorecida nesta atividade. Os alunos, também, tiveram oportunidade de generalizar conceitos e procedimentos relativos ao uso da decomposição em fatores primos para obtenção de todos os fatores do número.
- Finalmente, no jogo da árvore, os alunos puderam generalizar conceitos e procedimentos empregados na simplificação de cálculos nos quais, pelo menos, um dos números envolvidos está decomposto em fatores primos.

É importante acrescentar apenas que o processo de generalização não foi imediato e não ocorreu do mesmo modo com todos os alunos. Por exemplo, enquanto alguns alunos já decompunham em fatores primos no final do jogo do telegrama, outros precisaram de mais alguns encontros para fazê-lo. Além disso, procedimentos e conceitos integraram-se no processo de generalização. Como Vergnaud (1994) afirma, há uma série de conhecimentos (conceitos, teoremas) implícitos e explícitos nos procedimentos (ações) dos alunos. Procuramos identificar as generalizações de conceitos e procedimentos possíveis por atividade, mas isso não significa que eles estivessem restritos às atividades. Na maioria das vezes, o processo de generalização era desencadeado numa atividade e prosseguia em outras.

4.3.2 Resposta à questão de pesquisa geral

No início deste estudo, levantamos certas dificuldades encontradas em relação ao ensino e aprendizagem da Teoria Elementar dos Números, no que diz respeito à formação dos professores e aos currículos em todos os níveis de ensino. Dentro da Teoria Elementar dos Números, enfocamos o Teorema Fundamental da Aritmética e os principais conceitos associados a ele (as relações "múltiplo" e "fator", números primos, a divisibilidade e a decomposição em fatores primos).

Pautadas nesses estudos, sugerimos que essas dificuldades poderiam ser minimizadas por um trabalho que privilegiasse o ensino dos conceitos a partir de diversos contextos, explorando seus múltiplos significados e propriedades. Destacamos, ainda, a importância do papel do professor, pois cabe a ele a cuidadosa escolha e a adequação e classificação das situações que dão significado ao conceito.

Nos Estados Unidos, foram feitos estudos de caso com alunos de cursos de formação de professores, que apontaram os procedimentos empregados quando os sujeitos vivenciam situações que envolvem o Teorema Fundamental da Aritmética e conceitos associados. A principal característica destes procedimentos é o cálculo. A maioria dos sujeitos escolhe calcular em vez de levantar e testar conjecturas sobre os problemas.

Nessa perspectiva, embora os sujeitos da nossa pesquisa fossem crianças de 6º ano do Ensino Fundamental, partimos da hipótese de que o entendimento do Teorema Fundamental da Aritmética dependeria da maneira como os alunos procederiam nas situações. Buscamos situações que favorecessem as inferências e não simplesmente o cálculo mecanizado. Apoiadas nessa hipótese, lançamos mão de nossa questão de pesquisa geral:

Como se dá o processo de construção dos conceitos associados ao TFA?

Antes de responder a questão, é preciso lembrar que nosso estudo foi realizado com uma amostra escolhida por conveniência, envolvendo uma quantidade pequena de alunos (uma turma com 22 alunos). Embora tenhamos tratado os dados estatisticamente, sabemos que eles não são suficientes para fazermos generalizações para além do nosso estudo. Porém acreditamos, sim, que nossos resultados contribuam para dar pistas sobre a participação dos alunos nos processo de construção dos conceitos que enfocamos.

Para que as crianças construam significado para o Teorema Fundamental da Aritmética, defendemos a idéia da realização de uma intervenção de ensino minuciosa que vise não só ao teorema, mas a outros conceitos e propriedades associados a ele. Dessa forma, propomos que a intervenção comece por situações que favoreçam a compreensão das relações “múltiplo” e “fator” que se estabelecem entre pares de números. Em seguida, é preciso que esta intervenção contribua para que os alunos reconheçam as propriedades destas relações, identifiquem os conjuntos dos múltiplos e fatores de um números e, fundamentados nestas características, diferenciem números primos de números compostos.

A segunda etapa do processo consiste na compreensão da noção de decompor um número. É comum que, desejosos de ensinar o TFA, tendo concluído o conceito de números primos, os professores partam para o ensino da decomposição em fatores primos. Entretanto, nosso estudo confirma os dados de pesquisas anteriores de que o aluno precisa primeiro compreender o que significa decompor um número e as várias maneiras de decompô-lo para, então, decompor em fatores primos. Um trabalho que não passa por estas noções gerais de decomposição pode levar o aluno a não estabelecer a igualdade entre o número e a sua decomposição.

Finalmente, o fato de decompor um número em fatores primos não é uma garantia de que o aluno consiga fazer uso desta decomposição para obter os seus fatores, simplificar cálculos, encontrar o m.m.c. ou o m.d.c. entre números. Como vimos, situações que envolvem estas ações mobilizam esquemas mentais distintos daquelas que se voltam simplesmente para a decomposição. Há conhecimentos matemáticos que os alunos colocam em ação nas situações voltadas para a obtenção de fatores e para a simplificação de cálculos que não são utilizados nas situações de decomposição. Para que o aluno se valha da decomposição do número em fatores primos e, assim, poder identificar seus fatores ou simplificar cálculos em que ele está envolvido, é preciso realizar um trabalho constante e atento para a escrita numérica do aluno, que envolve a obtenção de igualdades matemáticas a partir da análise da decomposição do número em fatores primos.

É importante, contudo, esclarecermos que, por mais que tenhamos organizado uma intervenção com etapas bem definidas, a construção dos significados do Teorema Fundamental da Aritmética e dos principais conceitos associados a ele é um processo. Como tal, não é linear, possui continuidades e rupturas. Nele, o aluno comete vários erros e, pautado nas situações que experiência, realiza generalizações, as quais foram descritas ao respondermos nossas questões específicas. Não podemos esperar que este processo se dê em uma semana, nem em um mês, nem em um ano. Como bem afirma Vergnaud (1990a) o desenvolvimento de um campo conceitual se dá ao longo de vários anos, e aqui não seria diferente. Do nosso ponto de vista, assuntos associados ao TFA precisam ser retomados em vários momentos da vida escolar do estudante, contribuindo para que ele avance no reconhecimento e na generalização das propriedades dos números inteiros.

4.4 Algumas reflexões surgidas a partir do estudo

Como de toda pesquisa, desta também emergiram algumas reflexões. Elas são decorrentes das condições de trabalho, da escola, das crianças, dentre outros que detalhamos, a seguir.

Vamos iniciar pela discrepância entre as atividades da intervenção de ensino e as atividades que as crianças vivenciavam com a professora de Matemática da turma antes da intervenção. Nossa proposta, como já foi mencionado, favoreceu o trabalho em equipe e a manipulação de materiais de apoio concretos. As atividades com as quais as crianças estavam acostumadas não tinham estas características. Nas aulas de Matemática regulares, as crianças acostumaram-se a trabalhar individualmente e, em todos os casos, o material de apoio era apenas o livro didático.

Ainda no teste diagnóstico inicial, as crianças perceberam estas diferenças. Muitas achavam que, como estavam jogando, não estavam tendo aula. A ansiedade delas quando manipularam formas e embalagens, foi tanta que nos obrigou a ampliar o tempo de aplicação do teste, e, conseqüentemente, reduzimos em uma semana o tempo da intervenção. As crianças gostavam muito das atividades, mas, o fato de corresponderem a métodos totalmente diferentes dos convencionais a que se acostumaram, deixava-os extremamente agitados nos momentos finais, em que deveriam refletir sobre a atividade. Nesse sentido, as reflexões não foram tão proveitosas como poderiam.

Na verdade, como na maioria das pesquisas em ensino, um entrave costumeiro é o do tempo e, no nosso estudo, essa limitação não foi diferente. No Capítulo 1, quando apresentamos o objeto matemático, fizemos uma breve abordagem histórica dos conceitos. Vimos que eles remontam *Os Elementos* de Euclides e vieram sendo reformulados e aperfeiçoados ao longo dos séculos. Como exigir que conceitos cuja construção pela humanidade demandou séculos e séculos sejam construídos em apenas dois meses pelas crianças?

Parece-nos demasiadamente exagerada tal exigência, uma vez que, reconhecidamente, o processo de construção de conceitos não é linear. Entretanto, o planejamento da professora e as pressões da comunidade escolar (pais e outros familiares, explicadoras da região, etc.), por não encontrarem mais tantos exercícios repetitivos e atividades escritas nos cadernos das crianças, como era o costume nas aulas que ministradas apenas pela professora da turma, fizeram-nos antecipar o fim da intervenção.

Gostaríamos, por exemplo, de termos tido mais tempo para discutirmos com as crianças sobre a obtenção dos fatores de um número a partir da sua *árvore,* ou ainda, discutir o cálculo do m.m.c. e do m.d.c. por meio da análise das decomposições em fatores primos dos números em questão.

Mas, conseguimos apenas refletir sobre a simplificação de cálculos. Percebemos que, no senso comum, há a idéia de que só podem ser consideradas aulas aquelas ministradas em um modelo tradicional e, para reverter este quadro, é necessária uma ação conjunta de professores, escolas e pessoas que elaboram materiais didáticos.

4.5 Sugestões para pesquisas futuras

Acreditamos que nosso estudo poderá trazer contribuições significativas para a discussão científica sobre o ensino da Aritmética e, particularmente, da Teoria Elementar dos Números. A seguir, apresentamos, algumas sugestões para pesquisas futuras que surgiram a partir de nossa análise.

A primeira sugestão de pesquisa, é uma intervenção de ensino com maior número de encontros. Será que uma intervenção, com maior número de horas-aula produzirá mais resultados? Nós dedicamos 18 horas-aula à intervenção e propomos 24 horas-aula. É provável que, com mais encontros, seja possível explorar o cálculo do m.m.c. e do m.d.c. Mas será que estamos certas?

De acordo com os resultados analisados, temos a hipótese de que não demoraria muito e as crianças já estariam dando mais estes passos. O processo para compreender a decomposição em fatores primos pode ter sido demorado, mas, uma vez compreendida a decomposição, a compreensão de todos os seus desdobramentos ocorre mais rapidamente.

Além disso, como é conhecido, nosso estudo foi realizado com uma turma de 6º ano de uma escola particular. Será que, com crianças mais novas, encontraríamos resultados semelhantes? A partir de que ano do Ensino Fundamental as atividades que compõem nossa intervenção têm significado para as crianças? Realizado com turmas de escolas públicas, o estudo teria resultados consideráveis? Responder a cada questão é tarefa para futuras pesquisas.

Referências

ALENCAR FILHO, E. *Teoria elementar dos números*. São Paulo: Nobel, 1988.

BARBOSA, G. S. *Construção dos Conceitos de Múltiplo e Divisor à Luz da Psicologia de Vygotsky.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Santa Úrsula; Rio de Janeiro; 2002

BECKER, H. S. *Método de pesquisa em Ciências Sociais*. São Paulo: Ucitec, 1993.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática:5ª série.* São Paulo; Moderna, 2002.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília, DF, 1997.

________, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília, DF, 1998.

BROWN, A.; THOMAS, k. e TOLIAS, G. *Conceptions of Divisibility: Sucess and Understanding. In* MAHER, Carolyn e SPEISER, Robert (orgs.). *Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction*. (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, V. 02. Connecticut, (EUA), 2002.

CAMPBELL, S. *Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding*, in Learning and Teaching Number Theory, Ed. Campbell & Zazkis, Ablex Publishing, Westport, 2002.

__________, Zazkis, R. *Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers' understanding*, Journal for Research in Mathematics Education, 27 (5), pp. 540-563, 1995.

__________, Zazkis, R. *Prime decomposition: understanding uniqueness*, Journal of Mathematical Behavior, 15 (2), 217-218, 1996.

__________, ZAZKIS, R. *Toward Number Theory as a Conceptual Field.* In MAHER, Carolyn e SPEISER, Robert (orgs.). *Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction*. (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, V. 02. Connecticut, (EUA), 2002.

COELHO, S.; MACHADO, S. e MARANHÃO, C. *Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?.* Anais do II Sipem, Cd-rom, Santos, 2003.

__________, *Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental?* Atas do CIBEM V, Cd-rom, Cidade do Porto, 2005.

COUTINHO, S. C. *Números inteiros e criptografia RSA.* (2ª ed.). Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001

E.R.M.E.L. *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. CE Tome 1. Paris: SERMAP OCDL, 1978

__________, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. CM Tome 2. Paris: SERMAP OCDL, 1978

__________, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*. CM Tome 1. Paris: Hatier, 2001

__________, *Apprentissages*. *numériques et résolution de problèmes*. CM Tome 2. Paris: Hatier, 2001

EZPELETA, J. e ROCKWELL, E. *Pesquisa participante.* São Paulo, Cortez, 1986.

FIORENTINO, D; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos;* Campinas; SP. 2006. (Formação de Professores, 1)

FRANCHI, A. *Compreensão das situações multiplicativas elementares*. Tese de Doutorado. PUC-SP, 1995.

__________, *Considerações sobre a teoria dos campos conceituais*. In MACHADO, S.D.A. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo. EDUC. pp. 155-195, 1999.

__________, *Educação Matemática: Uma Introdução.* São Paulo: EDUC, 1999.

IMENES, L. M. e LELLIS, M. *Matemática.* São Paulo: Scipione, 1997.

KIMURA, C. F. k.. *O jogo como ferramenta no trabalho com números negativos: um estudo sob a perspectiva da epistemologia genética de Jean Piaget.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

LA TAILLE, Y. de; OLIVEIRA, M. K.; e DANTAS, H. *Piaget, Vygotsky, Wallon: Teorias Psicogenéticas em discussão.* São Paulo, Summus, 1992.

LINS, R. C.Gimenez, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: Papirus, 1997.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli Elisa D. A. *Pesquisa em Educação*. São Paulo: EPU, 1986.

__________, *Abordagens Qualitativas Pesquisa em Educação.* São Paulo. Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 2001.

__________, *Novos enfoques em pesquisa em didática. In.:*CANDAU, Vera (org.). *A Didática em questão.* Petropolis: Vozes, 1984.

MAGINA, S.; CAMPOS, Tânia M.M.; NUNES, Terezinha e GITIRANA, Verônica. *Repensando Adição e Subtração.* (2ª ed.) São Paulo: PROEM, 2001.

MAHER, Carolyn e SPEISER, Robert (orgs.). *Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction*. (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, V. 02. Connecticut, (EUA), 2002.

MERLINI, V. L. *O Conceito de fração em seus diferentes significados: Um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental*. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969.

MOREIRA, M.A. e SOUSA, C.M.S.G. *Dificuldades de alunos de Física Geral com o conceito de potencial elétrico*. Projeto de pesquisa em andamento. Porto Alegre, 2002.

NOTARI, A. *Simplificação de frações aritméticas e algébricas.*2002. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

NUNES, T. et al. *Educação Matemática: números e operações numéricas.* São Paulo; Cortez, 2005.

NUNES, T., CAMPOS, T. M. M., MAGINA, S. e BRYANT, P. *Introdução à Educação Matemática.* São Paulo: PROEM; 2002

_________, Introdução à *Educação Matemática: os números e as operações numéricas.* São Paulo; PROEM, 2001.

_________; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática*. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre, Artes Médicas, 1997.

PINTO, N.B. *O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar*. São Paulo: Papirus, 2000.

RESENDE, M.R. *Re-Significando a disciplina Teoria dos Números na formação do Professor de Matemática na Licenciatura.* Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica De São Paulo. São Paulo. 2007

RIBENBOIM, P. *Números Primos: mistérios e recordes.* Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001.

SANTOS, J. P.O. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada; IMPA, 2003.

TEPPO, A. R. *Integrating content and process in classroom mathematics* in Learning and Teaching Number Theory, Ed. Campbell & Zazkis, Ablex Publishing, Westport, 2002.

VERGNAUD, G. *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59, 1982.

__________,. *Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives*. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983a.

__________, *Multiplicative structures*. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174, 1983b.

__________,. *Problem solving and concept development in the learning of mathematics*. E.A.R.L.I. Second Meeting. Tübingen, 1987.

__________, *Multiplicative structures*. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161, 1988.

__________, *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170, 1990a.

__________, et al. *Epistemology and psychology of mathematics education*. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press, 1990b.

__________, *Teoria dos campos conceituais*. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26, 1993.

__________, *Multiplicative conceptual field: what and why?* In Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

__________, *The nature of mathematical concepts.* In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) Learning and teaching mathematics, an international perspective. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd., 1997.

__________, *A comprehensive theory of representation for mathematics education*. Journal of Mathematical Behavior, 17(2): 167-181, 1998.

__________, *L' enfant, la mathématique et la réalité.* Berne, Editions Peter Lang., 1981.

ZAZKIS, R. Language of Number Theory at the Undergraduate Level: A Semiotic Approach. *In* MAHER, Carolyn e SPEISER, Robert (orgs.). *Learning and Teaching number theory: Research in Cognition and Instruction*. (p. 1-14). Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, V. 02. Connecticut, (EUA), 2002.

Anexo 1

TESTE DIAGNÓSTICO (Avaliação Inicial e final)

1) Você está recebendo embalagens para ovos e para bombons e fôrmas para fazer bombons, pirulitos e gelo.

As embalagens são: uma delas para uma dúzia de ovos e outra para 15 bombons FERRERO. Com as fôrmas posso fazer 12 bombons *flor* ou 20 coraçõezinhos ou 30 pirulitos. Ou ainda 18 cubinhos de gelo.

a) Agora imagine que você quer desenhar as embalagens para 5 dúzias de ovos. Como ficará o desenho? E a igualdade?

Desenho
Igualdade Matemática: ___ x 2 x ___ = ___

c) E se você quiser desenhar 4 embalagens de bombom FERRERO. Como ficará o desenho? E a sentença?

Desenho
Sentença: ___x ___ x 5 = ___

2) A quantidade de bichinhos de pelúcia que Bruna tem é menor que 50. Separando-os em grupos de 5, sobram 3 e separando-os em grupos de 9, sobram 2. Quantos bichinhos de pelúcia Bruna tem?

Cálculo Sentença

3) João multiplicou dois números naturais e encontrou 36. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

______x ______= 36 ou _____x______ = 36 ou ______x______ = 36

ou

______x ______= 36 ou _____x_____ = 36

4) Se João tivesse multiplicado dois números e encontrado 15 poderia ter escrito 3 x 5 = 15. Dizemos que o 3 e o 5 são fatores do 15. Agora responda: o número 36 possui quantos fatores? Quais são eles?

5) O número 7 possui quantos fatores? Quais são eles?

6) Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

7) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

8) Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!

a) João dividiu 2 x 3 x 5 x 11 por 2 x 3 x 5 e encontrou ....

b) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por 3 x 11 e encontrou ......

c) Ana dividiu 2x 3 x5 x 11 por 2 x 5 e encontrou ......

d) Gabriela dividiu 2x 3 x5 x 11 por um certo número e encontrou 55. O número é ..

9) Resolva a questão abaixo:

a) Dividi 50 por 5. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a __________.

Agora observe atentamente o que você fez e, em seguida, complete os outros itens. Não deixe de explicar o que você fez ou pensou para completar:

b) Dividi _________ por 3. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 8.

Explicação:

c) Dividi 36 por ____________. Dividi o cociente encontrado por 2 e encontrei como resultado o cociente igual a 2.

Explicação:

Anexo 2

MATERIAIS DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Anexo 2a: Tabela de registro do jogo do resto

Jogadas	Número de pratos	Número de grãos em cada prato	Resto	Número total de grãos
1º				
2º				
3º				
4º				
5º				

Jogadas	Número de pratos	Número de grãos em cada prato	Resto	Número total de grãos
1º				
2º				
3º				
4º				
5º				

Jogadas	Número de pratos	Número de grãos em cada prato	Resto	Número total de grãos
1º				
2º				
3º				
4º				
5º				

Jogadas	Número de pratos	Número de grãos em cada prato	Resto	Número total de grãos
1º				
2º				
3º				
4º				
5º				

Anexo 2b: Ficha de complemento do jogo do resto

Jogadas	Número de pratos	Número de grãos em cada prato	Resto	Total de grãos	Igualdade
1ª	2	17	1		
2ª	3	8	2		
3ª	4	8		35	
4ª	4		1	37	
5ª		5	3	23	
6ª		12	4	64	
7ª	6	21	5		
8ª	3	22	0		
9ª	5	7	0		
10ª	6	19	0		
11ª	1	42	0		
12ª	5		0	30	
13ª	4		0	28	
14ª		13	0	39	
15ª		15	0	60	
16ª	3	18		54	
17ª	2		0	40	
18ª	5		0	105	
19ª		32	0	128	
20ª		16	0	96	

Anexo 2c: Tabela preenchida pelo professor na reflexão sobre o jogo do resto

Com 1 pratinho

Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobraram	Total de feijões

Com 2 pratinhos

Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobraram	Total de feijões

Com 3 pratinhos

Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobraram	Total de feijões

Com 4 pratinhos

Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobraram	Total de feijões

Com 5 pratinhos

Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobraram	Total de feijões

Com 6 pratinhos

Número de pratos	Número de feijões por prato	Número de feijões que sobraram	Total de feijões

Anexo 2d: Ficha da construção de retângulos

Número de unidades quadradas	Desenho dos retângulos construídos	Número de produtos

Anexo 2e: complemento da construção de retângulo: livro didático

11) Classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta:
    g) 35 é múltiplo de 7.
    h) 180 é divisível por 40.
    i) 24 é múltiplo de 144.
    j) 252 é divisível por 12.
    k) 69 é múltiplo de 31.
    l) 510 é divisível por 34.

12) Dentre os números 144, 210, 320, 392 e 540, verifique quais são múltiplos de 36. Justifique.

13) Verifique se o número 724 é divisível por 8. Por quê?

14) Dê exemplo de um número natural:
    d) Múltiplo de 15;
    e) Divisor de 15.

Anexo 2f: Tábua de Pitágoras incompleta)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Anexo 2g: Tábua de Pitágoras preenchida

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Anexo 2h: Primeira Avaliação Intermediária

1) Para cada uma das igualdades abaixo completar com números ou com as expressões "múltiplo de" ou "fator de":

   a) Se 5 x 7 = 35, então 35 é ________________5 e 5 é ______________ 35.

   b) Se 6 x 8 = 48, então 8 é fator de _____, 6 é _______________ 48 e 48 é ___________________ e de _______.

   c) Se 9 x 7 = 63, então ______ é múltiplo de ______ e ______ é fator de _____.

2) Observe os números abaixo. Quais deles são múltiplos de 24?

   144 120 324 36 480

3) Observe os números abaixo. Quais deles são fatores de 24?

   12 44 36 15 9

4) Pare, pense um pouco e complete com V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas. Justifique aquelas que julgar falsas:

   (   ) O zero é fator de todos os números naturais.

   (   ) O um é múltiplo de todos os números naturais.

   (   ) Todo número natural é múltiplo e divisor de si mesmo.

   (   ) Sendo *a* e *b* dois números naturais, é certo que se *a* é múltiplo de *b*, então *b* é fator de *a*.

   Justificativas:

____

____

____

5) Escreva todos os fatores de 90.

   ____

6) Dê três exemplos de números que só possuem como fatores o 1 e si mesmo.

   ____

   ____

7) Em cada item abaixo há informações sobre determinados números. Que números podem ser esses? Quando houver mais de um, escreva, pelo menos, dois:

a) É múltiplo de 2, mas não é múltiplo de 4: ___________________________________

b) É fator de 12, mas não é fator de 6: _______________________________________

c) É fator de 2 e de 5: ____

d) É múltiplo de 2 e de 5: ____

e) É múltiplo de 4 e de 8: ____

f) Não é múltiplo de 2 nem de 3: ____

8) Escreva o menor número que tem os fatores:

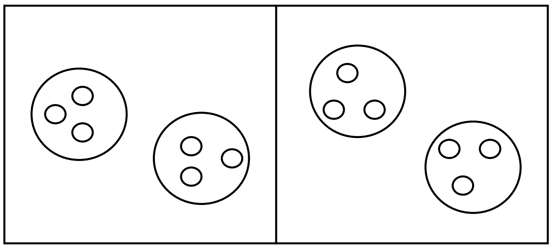
a) 1, 2, 5 e o próprio número:

b) 1, 3, 11, 33 e o próprio número:

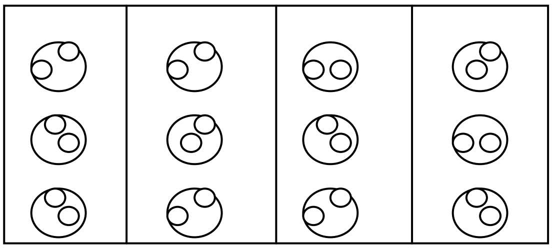
Anexo 2i: Etiquetas para o jogo de mensagem

Anexo 2j: Modelo de cartinhas do jogo da mensagem

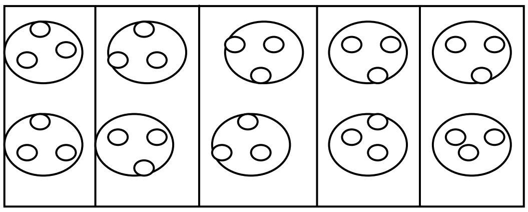
(1) 2 x 2 x 3



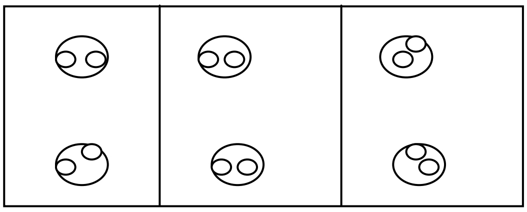
(2) 4 x 3 x 2



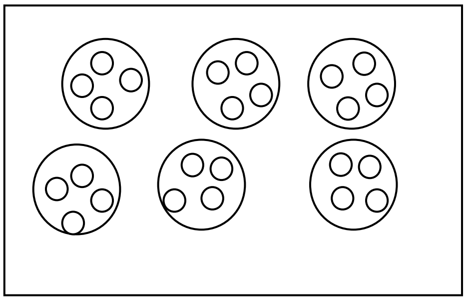
(3) 5 x 2 x 3



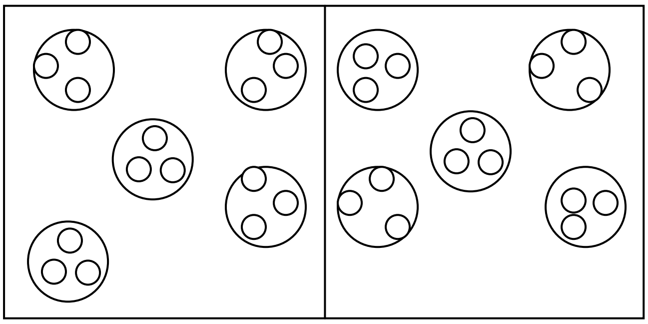
(4) 3 x 2 x 2



(5) 2 x 3 x 4



(6) 2 x 5 x 3



Anexo 2L: Exercícios complementares do jogo das mensagens

1) Para cada igualdade, obtenha outras duas:

a) 3 x 5 = 15 b) 123 : 3 = 41

2) Desenhe a cartinha de cada igualdade:

a) 3 x 5 x 2 = 30 b) 2 x 5 x 3 = 30

As cartinhas ficaram iguais ou diferentes? Por quê?

____

____

____

3) Agora pense nas embalagens de bombom. Que igualdade matemática pode expressar uma embalagem? E sete embalagens?

Anexo 2m: Exercício complementar do jogo do telegrama

"Agora é a sua vez de jogar sozinho (a)! Escreva os números abaixo como produto de primos." Em seguida, eram apresentados os números 90, 64, 144 e 945.

90	64	144	945

Anexo 2n: Segunda Avaliação Intermediária

Nas questões abaixo você tem 4 alternativas. Apenas uma delas é correta. Leia atentamente as quatro alternativas e assinale a resposta correta. Justifique sua resposta:

1) Observe atentamente a igualdade 910 : 14 = 65.
   a) 910 é múltiplo de 14 e de 65.
   b) 910 é múltiplo de 14 e não é múltiplo de 65.
   c) 65 é múltiplo de 910.
   d) 65 não é fator de 910.

2) Escrevendo 290 como um produto de números primos, encontramos:
   a) 2 x 145
   b) 2 x 7 x 29
   c) 2 x 5 x 29
   d) 1 x 10 x 29

3) Observe a expressão produto 175 = 5 x 5 x 7.
   a) 25 é divisível por 175.
   b) 25 é fator primo de 175.
   c) 25 é múltiplo de 175.
   d) 25 é fator de 175.

4) Os números 84 e 126 estão escritos como produto de números primos

   84 = 2 x 2 x 3 x 7 126 = 2 x 3 x 3 x 7

   Podemos dizer que:
   a) 4 é divisor de 84 e de 126.
   b) 6 é divisor de 84 e não é divisor de 126.
   c) 9 é divisor de 84 e de 126.
   d) 21 é divisor de 84 e de 126.

5) Abaixo escrevemos o conjunto dos fatores dos números 27, 47, 49 e 97.

   Fatores de 27: 1, 3, 9, 27 Fatores de 47: 1, 47

   Fatores de 97: 1, 97 Fatores de 49: 1, 7, 49

Analisando os fatores deste número podemos dizer:

a) 49 é número primo.
b) 97 e 47 são números primos.
c) 27, 47 e 97 são números primos.
d) 47 e 49 são números primos.

Para responder as questões 6 e 7 observe a decomposição em fatores primos dos números 294 e 210.

294 = 2 x 3 x 7 x 7
490 = 2 x 5 x 7 x 7

6) Dividindo 294 por 49 e 490 por 49, encontramos, respectivamente:
   a) 6 e 10
   b) 5 e 3
   c) 21 e 10
   d) 6 e 35

7) É certo dizer que:
   a) 2 x 3 x 5 x 7 é múltiplo de 490 e de 294.
   b) 3 x 5 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.
   c) 2 x 3 x 5 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.
   d) 2 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.

Anexo 2o: Complemento da atividade da árvore

Construa as árvores dos números 525 e 168, listar seus fatores e escrever, pelo menos, seis igualdades matemáticas.

Anexo 3

FICHAS ELABORADAS PELA PROFESSORA ANNA FRANCHI

Anexo 3a: Jogo dos Restos (1991, 1995)

Divisão Euclidiana
(Múltiplos e Fatores)

Material Didático

Para cada grupo de alunos:

Um recipiente com feijões
Um dodecaedro (12 faces) que tem o papel de dado.
Um conjunto de pequenos pratos.
Fichas de registro (uma para cada aluno)

<u>Desenvolvimento</u>

Cada aluno pega um punhado de feijão, sem contá-los. Um dos alunos do grupo joga o dado.

O número que aparece na face superior do dodecaedro determina o número de pratos que cada aluno deve pegar. Cada aluno deve então repartir os feijões do punhado que pegou nos pratos, respeitando duas regras.

Todos os pratos devem ter o mesmo número de feijões, eles devem receber o maior número possível de feijões.

Ganha a partida que ficar com o maior resto, após essa repartição.

Este jogo é repetido muitas vezes e os alunos devem comparar a soma dos restos obtidos para cada um deles. Isto permite decidir o vencedor do jogo.

Os números que intervêm no jogo de cada golpe são os seguintes:

D – Número de feijões do punhado pego pelo aluno; como os feijões não são contados, este número fica desconhecido a cada rodada do jogo.

A – Número que apareceu sobre o dado jogado, o qual corresponde ao número de pratinhos.

B – Número de feijões colocado em cada prato.

C – O resto.

Cada aluno recebe uma ficha (anexo 1) para notar os dados A, B, C, depois de cada jogada e determina a soma dos restos © no fim do jogo.

Durante o jogo são formulados as questões seguintes:

a) Na sua opinião de que depende a vitória no final de cada jogada?
b) Qual o maior resto possível, nesta vez (no momento da repartição do feijão nos pratos)

Uma atenção especial é dada ao caso onde é o número 1 que sai no jogo de dados, uma vez que a divisão pela unidade deixa o resto nulo.

A ficha de registro para cada aluno poderá ser:

Jogo dos restos				
Jogadas	Nº de pratinhos	Nº de grãos em cada prato	Resto	Nº total de grãos
1ª				
2ª				
3ª				
4ª				
5ª				

Total de grãos	Quantidade de pratinhos	Quantidade de grãos em cada prato	Sentença Matemática
16	8	2	

Total de grãos	Quantidade de pratinhos	Quantidade de grãos em cada prato	Sentença Matemática
24			

Anexo 3b: Ficha para o jogo de restos (1991)

No jogo dos restos, se tirarmos um total de 16 grãos para 8 pratinhos, podemos dividir colocando 2 grãos em cada prato.

Existem outras maneiras de dividirmos esses 16 grãos?

Tente descobrir todas as outras possibilidades.

TOTAL DE GRÃOS	
16	8 pratinhos, 2 grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
24	12 pratinhos, 2 grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
18	9 pratinhos, 2 grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
36	18 pratinhos, 2 grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.
_____	___ pratinhos, ___ grãos em cada prato.

Anexo 3c: Atividade de múltiplos I (1991)

Observando os esquemas da ficha anterior, complete:

a) 2 x 3 x 5 é múltiplo de 2 x 3.

_________ é múltiplo de _________.

2 x 3 x 5 é múltiplo de 3 x 5

_________ é múltiplo de _________.

30 é múltiplo de _____ e _____.

b) 2 x 5 x 7 é múltiplo de 2 x 7

_________ é múltiplo de _________.

2 x 5 x 7 é múltiplo de 2 x 5

_________ é múltiplo de _________.

c) 2 x 2 x 3 x 5 é múltiplo de 2 x 2 x 3

_________ é múltiplo de _________.

2 x 2 x 3 x 5 é múltiplo de 3 x 5.

_________ é múltiplo de _________.

2 x 2 x 3 x 5 é múltiplo de 3 x 5 x 2.

_________ é múltiplo de _________.

60 é o menor múltiplo de _____, ______ e ______.

d) 2 x 7 x 5 x 11 é múltiplo de 2 x 7.

_________ é múltiplo de _________.

2 x 7 x 5 x 11 é múltiplo de 2 x 7 x 5.

_________ é múltiplo de _________.

2 x 7 x 5 x 11 é múltiplo de 2 x 5 x 11.

_________ é múltiplo de _________.

770 é o menor múltiplo de 14, _____, _____ e _____.

e) 2 x 2 x 3 x 5 é múltiplo de 12

2 x 2 x 3 x 5 é múltiplo de 30.
60 é o menor múltiplo de _____ e _____.

f) Encontre os menores múltiplos comuns dos números 35 e 140.
g) Encontre o menor múltiplo comum de 75 e 100.
h) Calcule o m.m.c. dos números 18, 30 e 48.

Anexo 3d: A árvore (1992)

1) Decomponha os números abaixo em parcela. Utilize o sinal +:

   d) 28 =
   e) 18 =
   f) 57 =

2) Decomponha os números abaixo em fatores. Utilize o sinal x:

2 fatores	3 fatores
a) 28 =	c) 28 =
b) 100 =	d) 100 =

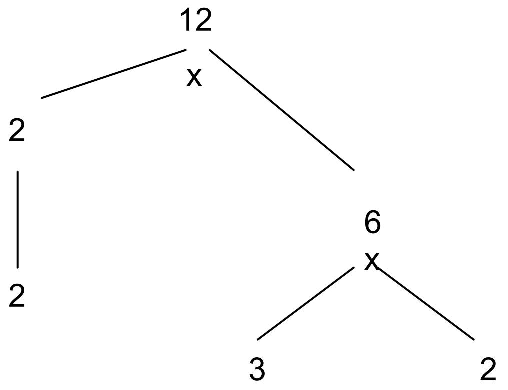
3) Decomponha em 2 fatores de todas as maneiras possíveis:

12 = _______ x _______ 18 = _______ x _______

(*) Introduzir paralelamente às atividades acima o Jogo do Resto.

4) Introdução da "Árvore de Fatores" (Trabalhar com fatores primos menores que 50).

Exemplo:



5) Propor a mesma atividade para:

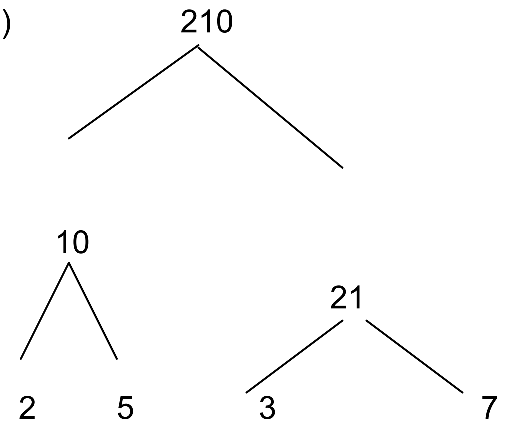
24, 18, 42, etc...

Após cada atividade, propor questões que levem os alunos a (Exerc. 4):

a) Enunciar os fatores do número.
b) Descrever os fatores encontrados nos últimos ramos da árvore como fatores primos.
c) Comparar 2 x 3 x 2 como 2 x 2 x 3, trabalhando a associatividade da multiplicação.
d) Fazer muito calculo mental sobre o suporte obtido.

Exemplo:

a)

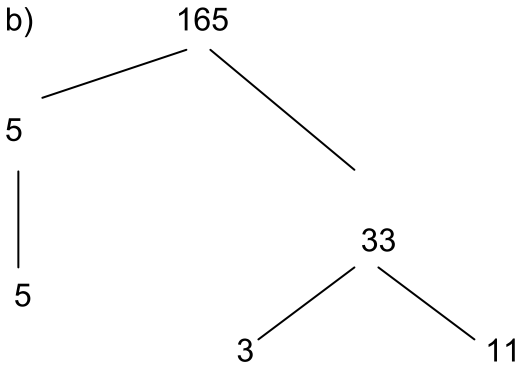


(fazer outras decomposições obtendo fatores de outra ordem)

210: 10 =	Sabendo que:	210 : 2 =
210: 21 =		
3 x 7 =	210 = 2 x(5x3x7)	210 = 2x7x5x3
21 x 10 =	210 = 2 x 105 =	210 : 14 =
	210:105 =	210 : 15 =

Fazer outras decomposições obtendo os fatores em outra ordem.

b)



5 x 3 x 11 = 165

5 x 33 = 165

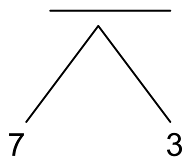
165 : 33 = 5

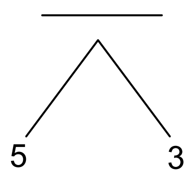
165 x 5 = 33

(fazer o caminho inverso)

Propor exercícios escritos que explorem a relação entre multiplicação e divisão.

6) Descobrir os números que faltam.





SUGESTÃO: Pensar um jogo para esse tipo de atividade.

Anexo 3e: Atividade de múltiplo II (1991)

1) Construir as retas com as tabuadas do 4, 6 e 8:
   O professor dará as instruções necessárias.

2) Complete:
   a) Existem múltiplos comuns a 4 e 6? ______________________________.
   b) Quais são os múltiplos comuns a 4 e 6? _________________________.
   c) Existem múltiplos comuns a 6 e 8? ______________________________.
   d) Quais são os múltiplos comuns a 6 e 8? _________________________.
   e) Existem múltiplos comuns a 4, 6 e 8? ___________________________.
   f) Quais são? ____.

3) Observe o exemplo e depois complete:
   40 é múltiplo de 4 porque 10 x 4 = 40.

   a) 8 é múltiplo de 4 porque ___________________.
   b) 42 é múltiplo de _____ porque ______________.
   c) _____ é múltiplo de 8 porque 2 x 8 = 16.
   d) _____ é múltiplo de ___ porque 6 x 8 = 48.
   e) _____ é múltiplo de ___ porque _____________.

4) Observe o exemplo e complete:
   5 é divisor de 15 porque 5 x 3 = 15.

   a) 8 é divisor de 40 porque _____________________.
   b) 28 é divisor de 28 porque ___________________.
   c) _____ é divisor de 13 porque ________________.
   d) 7 é divisor de ____ porque ___________________.
   e) 1 é divisor de ____ porque ___________________.

5) Observe o exemplo e complete:

5.9 = 45, então 45 é múltiplo de 9 e 5.

4.3 = 12, então ___ é múltiplo de ___ e ___.

7. __ = 28, então ___ é múltiplo de ___ e ___.

8. __ = 8, então ___ é múltiplo de ___ e ___.

5. __ = 0, então ___ é múltiplo de ___ e ___.

Fatore os números 42 e 70 e complete:

a) 42 é múltiplo de ____ porque 6 x 7 = 42.

b) ___ é múltiplo de ____ porque 7 x 6 = 42.

c) ___ é múltiplo de 21 porque 2 x 21 = ___.

d) ___ é múltiplo de 42 porque 1 x ___ = 42.

e) 70 é múltiplo de ____ porque 2 x 35 = 70.

f) ___ é múltiplo de ____ porque 5 x ___ = 70.

g) ___ é múltiplo de 7 porque 7 x ___ = 70.

h) ___ é múltiplo de ____ porque ____ x 35 = 70.

i) ___ é múltiplo de 14 porque 14 x ____ = 70.

j) ___ é múltiplo de 1 porque ____ x 70 = 70.

Anexo 3f: Atividades de uso da decomposição (1991)

Nas questões abaixo você tem 4 alternativas. Apenas uma delas é correta. Leia atentamente as quatro alternativas e assinale a resposta correta. Justifique sua resposta:

1) Observe atentamente a igualdade 910 : 14 = 65.

a) 910 é múltiplo de 14 e de 65.

b) 910 é múltiplo de 14 e não é múltiplo de 65.

c) 65 é múltiplo de 910.

d) 65 não é fator de 910.

2) Escrevendo 290 como um produto de números primos, encontramos:

a) 2 x 145

b) 2 x 7 x 29

c) 2 x 5 x 29

d) 1 x 10 x 29

3) Observe a expressão produto 175 = 5 x 5 x 7.

a) 25 é divisível por 175.

b) 25 é fator primo de 175.

c) 25 é múltiplo de 175.

d) 25 é fator de 175.

4) Os números 84 e 126 estão escritos como produto de números primos

84 = 2 x 2 x 3 x 7   126 = 2 x 3 x 3 x 7

Podemos dizer que:

a) 4 é divisor de 84 e de 126.

b) 6 é divisor de 84 e não é divisor de 126.

c) 9 é divisor de 84 e de 126.

d) 21 é divisor de 84 e de 126.

5) Abaixo escrevemos o conjunto dos fatores dos números 27, 47, 49 e 97.

Fatores de 27: 1, 3, 9, 27

Fatores de 47: 1, 47

Fatores de 97: 1, 97

Fatores de 49: 1, 7, 49

Analisando os fatores deste número podemos dizer:

a) 49 é número primo.
b) 97 e 47 são números primos.
c) 27, 47 e 97 são números primos.
d) 47 e 49 são números primos.

Para responder as questões 6 e 7 observe a decomposição em fatores primos dos números 294 e 210.

294 = 2 x 3 x 7 x 7
490 = 2 x 5 x 7 x 7

6) Dividindo 294 por 49 e 490 por 49, encontramos, respectivamente:
a) 6 e 10
b) 5 e 3
c) 21 e 10
d) 6 e 35

7) É certo dizer que:
a) 2 x 3 x 5 x 7 é múltiplo de 490 e de 294.
b) 3 x 5 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.
c) 2 x 3 x 5 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.
d) 2 x 7 x 7 é múltiplo de 294 e de 490.

Anexo 4

Anexo 4a: Jogo de restos

<u>**G**</u>**:** Mas, por que vocês estão fazendo assim?

Todos falam juntos.

<u>**G**</u>**:** Não estou entendendo nada. Pode falar um de cada vez?

Alguns levantam o braço.

<u>**L.A.**</u>**:** Porque não tem mais pratinhos para a gente ficar dando os feijões então só dou um para este e paro.

<u>**B.H.**</u>**:** É, não dá para distribuir. Para distribuir tem que ter mais pratos.

<u>**G**</u>**:** Quando você tem uma quantidade de coisas para distribuir para uma pessoa, o que você faz?

<u>**B.H.:**</u> Eu vou dando um para mim e um para ela.

<u>**G**</u>**:** Eu falei para repartir entre você e a pessoa?

<u>**B.H**</u>**.:** Foi, não foi?

<u>**G**</u>**:** Vou repetir. Você tem uma quantidade de coisas para distribuir para uma pessoa, o que você faz?

<u>**B.H.**</u>**:** Ah! Então é tudo para ela.

<u>**G**</u>**:** Agora pense nos feijões e em apenas um pratinho, o que você deve fazer?

<u>**B.H.:**</u> Vou colocar todos no pratinho.

<u>**G:**</u> Vai sobrar algum?

<u>**B.H.:**</u> Não.

G: Que história é essa? Um número pode ser melhor que outro?

Todos: Claro. Sim.

G: Um de cada vez, por favor. Como?

G.S.: O um é muito ruim. Nunca sobra nada.

L.G.: Quando é um, temos que dar tudo para o prato.

G: Há outros que vocês acham ruins?

B.H.: Pior que o um não tem, mas também tem outros meio ruinzinhos.

G: Pode dizer algum?

B.H.: O dois.

G: Qual é o problema do dois?

B.H.: São muitos números que não sobra feijão quando temos que distribuir com dois pratinhos. Se a gente ainda pudesse escolher os feijões depois do dado...

G: Com quais números não sobrou feijão quando vocês tiveram que distribuir entre dois pratos? Se pudessem, como vocês escolheriam a quantidade de feijão?

G.S.: 12, 18, 24, 22 e mais um monte.

B.H.: Os pares, os pares. É só assim: se deu dois no dado, pego um número ímpar de feijões.

G: Por quê?

B.H.: Porque aí pelo menos um feijãozinho ia sobrar.

G (aluna): Gabriela, Gabriela, olha aqui como é que o Higor "rouba".

G: Mas o que ele fez?

G: Aqui. Ele apagou e aumentou os restos dele.

H.: Não fiz nada disso...

Risos.

G: Estou vendo. Mas você não tem como controlar isso?

A aluna se mostra pensativa, mas não responde.

G: Pessoal, vamos conversar um pouco. Como podemos evitar que o adversário nos trapaceie no jogo?

Todos: Prestando atenção. Muita atenção em cada coisa que fizer.

G: Mas como podemos perceber agora se já sofremos algumas trapaças?

Silêncio.

G: Vamos ver esta situação da Gabi e do Higor. Ele tirou 5 no dado, colocou 11 feijões em cada pratinho e sobraram 6 feijões. Isto é possível?

B.H.: Não.

G.S.: Por que não?

B.H.: Porque ele ainda pode colocar um em cada prato e vai ficar com um na mão.

G: Vocês concordam?

Todos: Sim, sim.

G: Então vamos analisar as fichas de controle para detectarmos os problemas.

G: Como podemos descobrir o total de feijões?

Ma: É só contar quantos feijões colocou em cada prato e depois multiplicar.

J.P.: É. É...

G: Mas multiplicar, multiplicar por quanto?

Ma: Se forem dois pratos, multiplicar por 2. Se forem três pratos, multiplicar por 3. Se forem 4, por 4. Se forem 5, por 5. Se forem 6, por 6.

G: Mas e se for um prato só?

Ma: Não precisa multiplicar.

G: Você concorda, João?

J.P.: Concordo. Concordo...

G: Você acha que assim estão contando todos os feijões que pegaram?

J.P.: É, não é?

G: Mas e os feijões que sobraram e não foram colocados em nenhum prato?

Ma: Ih! Esquecemos deles.

J.P.: Ah! É só juntar.

Ma: É isso aí. A gente multiplica e depois soma.

G: Mas multiplica o que pelo quê? E soma com quê?

Ma: Ai! Tem que repetir?

G: Mas você ainda não me disse.

J.P.: Deixa que eu falo. Pega quantos foram os feijões no prato e multiplica por quantos pratos tiver. Depois soma os que sobraram.

Ma: Mas, se for um prato só, nem precisa multiplicar.

G: Durante o jogo, eu estava observando e vocês não estavam fazendo assim, estavam?

Ma: Não. Os pratinhos estavam na nossa frente e, aí, a gente contava.

J.P.: Contar é mais fácil que fazer conta

G: Luan, escreve lá no quadro os seus cálculos para obter o total de feijões.

O menino escreve no quadro *“3 x 7 = 21 + 2 = 23”.*

G: Agora explique para todo mundo por que você fez assim.

Lu: Eram sete feijões. Eram três pratos. Aí três vezes sete dá vinte e um. Como ainda tinha dois sem prato, vinte e um mais dois dá vinte e três.

G: Observando a igualdade 5 x 7 = 35, o que podemos afirmar sobre a divisão de 35 por 7?

La: Dá 5 e não sobra nada.

G: Como você sabe disso?

Le: Porque 5 vezes 7 dá 35.

La: Ou então porque o 35 é múltiplo de 7.

G: Que palavra é essa? O que ela significa?

La: Que o 35 está na tabuada do 7. Mas não tem só ela. Tem uma outra: divisor.

G: E, para você, quando um número é divisor de outro?

Le: É quando o número divide outro, né?

La: Assim, olha, o 35 dividido por 7 dá 5 sem sobras, então o 7 é divisor do 35.

La: Seis vezes oito dá quarenta e oito. Por isso o quarenta e oito é múltiplo.

G: Mas o quarenta e oito é múltiplo de que número?

La: O quarenta e oito é múltiplo porque é uma multiplicação. Se fosse uma divisão seria divisor.

B.H.: - Não é pra multiplicar o número de duplas? Depois o número de pratos?

G.: - O que vocês acham?

B.H.: - Olha só! Aqui dá 24. 2 x 3 = 6 x 4 = 24. Não tá certo?

G (aluna): - Ele multiplicou o número de feijões primeiro.

Câmera: - Qual foi o caminho que você seguiu?

L. G.: - Multiplica o número de feijão pelo número de prato e pelo número de duplas.

G.: - Eu tenho na mão 17 feijões. Vou colocar nos três pratinhos que eu tirei. Quantos feijões ia colocar?

B.H.: - Cinco. Ia sobrar dois.

G.: Ia sobrar 2. Que igualdade matemática, que conta, que sentença eu ia escrever nessa situação.

B.H.: 5 x 3.

G.: Mas cadê a igualdade? E os dois que sobraram onde entram nisso?

B.H.: Ah é. Falta colocar mais dois igual a dezessete.

G.: Agora, pessoal, 5 x 3 ou 3 x 5?

B.H.: - Tanto faz, o resultado é igual.

G.: - Mas olha só, quantas vezes eu tenho cinco feijões?

B.H.: 3.

Escrevemos no quadro a conta 3 x 5 e desenhamos os três pratos com 5 feijões em cada

G.: - São 3 x os 5 feijões mais os dois que sobraram. Ta certo? Deu pra lembrar como é a igualdade?

Todos: Seis em cada pratinho. Sobrava número fora?

Todos: - Não!

G.: - Qual igualdade eu poderia escrever?

Todos: 3 x 6

G.: Igual a?

Todos: 18.

G.: - Que outra conta eu poderia tirar daqui?

B.H.: 6 x 3.

L. G.: 18 ÷ 6.

G.: - Que dava?

L. G.: 3.

G.: - Imagina que a dupla do Igor e da G. fizeram essa distribuição de feijões e olha só que coincidência. A Michelle e a Laís também fizeram a mesma distribuição. Todo mundo concorda que eu tô botando a mesma coisa? Como é que eu posso representar essa situação. Duas duplas, cada dupla colocando 3 pratinhos e em cada pratinho colocando 6 feijões. Transformando em uma sentença matemática, que conta eu poderia colocar de uma só vez? Foram quantas duplas?

Todos: - Duas.

G.: - Que igualdade eu posso escreve aí? Se fosse uma dupla só ficava...

B.H.: 6 x 3.

G.: - E se você colocar duas duplas, como ficaria?

M: 2 x 18.

G.: - Que dá?

Todos: 36.

G.: - Então se eu quisesse escrever como uma conta de multiplicar por três números, quem poderiam ser esses números?

L. G.: 2 x 3 x 3.

G. (aluna): - Duas duplas com 3 pratinhos cada uma botando três feijões em cada prato.

BH: Já que todo mundo bota sempre a mesma coisa, é melhor a gente ver para pensar em contas diferentes.

JP: Mas aí vai terminar empatado de novo porque todos os grupos vão ter todas as contas diferentes.

G.: Como vocês estão fazendo para escolher os números?

Je: Estamos fazendo um monte de multiplicações até dar certo.

G.: Mas como vocês escolhem os números para fazer as multiplicações?

Je: A gente começa escolhendo números bem pequenos e vai crescendo.

G.: E quando vocês param?

Je: Quando fica grande demais. Quando passa.

G.: Quando passa o quê?

Je: Quando passa do número que você falou, a gente escolhe números menores.

R: 46? O 46 dá por 3. Olha lá, ele termina em 6.

G.: E o que é que tem isso?

R: Para dar por 3 tem que terminar em 0, 3, 6 e 9

J: Sessenta é três vezes vinte.

M: Eu achei seis vezes dez.

G.: Mas tem três números?

Coro: Não.

G.: O que foi pedido?

Coro: Multiplicação com três números.

G.: Alguma idéia?

Je: Posso fazer vinte mais vinte mais vinte?

G.: É multiplicação?

M: Não. Não pode, não. Você tá falando mais.

G: Bom, doze. Uma multiplicação que dá doze é três vezes quatro.

G.: O três é primo?

Coro: É!

G.: O quatro é primo?

Coro: Não.

G.: E agora, no que que ele pode mexer pra ficar só com primos?

L: Eu ia fazer três vezes três mais três.

B.H.: Eu! Dois vezes dois, vezes três. Que dá quatro vezes três.

G.: Você não concorda com a idéia do Luan?

B.H.: Não, porque na dele tem mais e tem que ser tudo vezes.

G.: E aí, Luan, o que você acha?

L: Mas o meu também ta certo, porque o meu só tem 3 e o 3 é primo.

G.: Mas qual foi a regra dessa rodada?

L: Tá bom, ta bom, que tinha que ter só multiplicação.

G.: O que você observou, Ben-Hur?

B.H.:: O quatro é igual a dois vezes dois. Dois vezes dois é igual a quatro. Então, ao invés do quatro, eu coloco dois vezes dois.

L: Ah, mas não valeu porque repetiu o dois.

G.: Mas quem foi que disse que não podia repetir? Naquela sua idéia do início só tinha três?

L: Pode?

G.: Pode, turma?

Coro: Pode.

Anexo 4b: Construção de retângulos

B.H.: Você pediu para fazer retângulos com os 12 quadradinhos e nós fizemos.

G: Mas você deve usar todos os quadradinhos no mesmo retângulo.

B.H.: Mas aí só vai dar para construir um sempre.

G: Não. Você monta um usando todos os quadradinhos, desenha para não esquecer cmo ficou. Depois você tenta montar um tipo diferente e assim vai.

B.H.: Ah! Você quer os tipos, né? Você não quer todos ao mesmo tempo?

B.H.: Olha só. Eles acharam o mesmo número de retângulos que nós.

J: É, mas se fosse assim, eu acharia mais que você. Eu ia fazer 6 retângulos com dois quadradinhos cada. É claro que isso não vale.

G. S.: Assim vai ficar sem graça. Todo mundo vai ganhar.

G: Mas será que do outro modo alguma dupla ganhava alguma coisa? Vamos corrigir o que foi feito até aqui para ver?

Neste momento, todos os alunos riam e nós continuamos:

G: Vamos ver o caso do 30, que vocês fizeram com toda pressa do mundo. Quem pode vir ao quadro desenhar os retângulos que construiu com 30 quadradinhos?

G. S.: Eu boto.

No quadro, o aluno desenhou os retângulos 3 x 10, 6 x 5 e 1 x 30 e nós perguntamos à turma:

G: Estes são todos os retângulos que ele poderia construir?

G: - Desenha lá o quadrado. Vocês ficaram o tempo todo pegando no quadradinho? Quem não pegou no quadradinho levanta o dedo. Então vamos começar lá. Gabriel Leal! O que você pensava pra fazer a conta sem pegar no quadradinho?

G. L.: - Pensei na conta de vezes.

G: - Que conta de vezes você fazia?

G. L.: - Assim, 36 eu fiz 6 x 6.

G. S.: - Multiplicava pra chegar no resultado.

G.: E você Ben Hur, como fazia?

B.H.: Eu dividia. Não é a mesma coisa?

G: Mas dividia o quê?

B.H.: Eu pensava: 36 dividido por 9 dá 4. Aí posso fazer o retângulo 4 por 9.

G: Mas vocês ficam dividindo a vida toda? Como fazem?

B.H.: Não. Tem uma hora que a gente para, né? Se não, a gente estaria até agora fazendo contas para o primeiro, concorda?

G: Mas, então, quando vocês resolvem parar?

M: Quando o número vai ficando muito grande. Quando passa da quantidade de quadradinhos que você fala.

G: Mas precisa ir realmente testando até chegar ao número que eu falei?

B.H.: Ah, eu não faço assim não. Quando vai chegando lá pela metade, eu já sei que posso pular para o próprio número.

G: Por quê?

B.H.: Porque, quando passa da metade, só dá 1, só dá 1, só dá 1... E tem resto.

G: O que só dá 1?

B.H.: As divisões.

G: Eu não vou dizer o número de quadradinhos que vocês vão pegar pra formar retângulos. Eu vou dizer assim: Eu quero que vocês consigam fazer três retângulos. Qual é o menor número de quadradinhos que vocês têm que pegar para conseguir formar três retângulos?

G. S.: 12.

G: - Por que 12?

G. S.: 3 x 4, 12 x 1 e 2 x 6.

G: - Com que números eu só consigo formar um retângulo?

R: 17.

M: 7.

L. A: 3.

B.H.: 2.

L: 9

G: - Nove serve?

M: 23.

B.H.: Nove dá pra formar quadrado: 3 x 3.

G: - Agora eu vou falar um tipo de número pra vocês me dizerem se dá um retângulo ou mais... Se o número for par, ele vai formar só um retângulo ou mais?

Todos: - Mais.

G: - Existe algum número par que só dá um retângulo?

Todos: - Dois!

G: - Por que depois do dois não tem mais nenhum?

B.H.: Porque sempre vai poder fazer assim: com o 4: 2 x 2, com o 6: 2 x 3, com o 8: 2 x 4 e assim vai.

G: E se for ímpar?

B.H.: Só dá um mesmo.

G: Tem certeza?

B.H.: Ah, não. Com o 25 dá para fazer o 5 x 5.

G: - Qual é o primeiro número de quadradinhos que eu pego que vai dar pra formar um quadrado?

B.H.: 2 x 2 que é 4.

G: - Depois do 4 qual é o próximo número?

B.H.: 3 x 3 que é 9.

G: - Estes números que dão pra formar quadrado são chamados de números quadrados. O 4 dá pra formar quadrado, o 9 dá pra formar quadrado. Mas será que o primeiro quadrado é 4?

B.H.: 1.

G: Por quê?

B.H.: Porque um quadradinho tem os quatro lados iguais.

G: - É com todo número que dá pra montar quadrado?

Todos: Não.

G: Com que números podemos montar quadrados?

J: 4, 9, 16, 25...

G: - Por quê?

J: Porque 2 x 2 dá 4, 3 x 3 dá 9, 4 x 4 dá 16, 5 x 5 dá 25.

G: Além do 25? Tem mais algum?

R: 36. 6 x 6 é 36.

G.: - Pra ter certeza que vai formar quadrado, qual número eu colocaria ali?

B.H.: 49.

G.: - Por que 49?

B.H.: 7 x 7 dá 49.

G. S.: Depois 64. 8 x 8.

<u>G.</u>: De onde saiu o 15? Como vocês o encontraram?

<u>M:</u> Ué, contando.

<u>G.S.</u>: Eu não contei. Eu fiz 5 x 3.

<u>G.:</u> E por que você não escreve isso no lugar do 15?

<u>G.S.</u>: Se eu já sei que o resultado é 15, pra que que eu vou escrever a conta? Pra gastar mais lápis?

Anexo 4c: Tábua de Pitágoras

G: 2, 4, 6, 8, 10, 12 etc. são múltiplos de que números?

Coro: Do 2.

G: E essa, olha, 9, 12, 15, 18, 21 etc. é a lista de que número?

Coro: Do 3.

G: Alguém pode me dizer uma lista só de múltiplos de 5?

L: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35. Pode parar?

G: 2, 5, 8, 11, 14, 17 é uma lista de múltiplos?

Coro: É, é.

G: Ah é. De que número?

L: Do 3.

G: Tem certeza? Por quê?

L: Porque está pulando de 3 em 3.

G: Vamos testar para ver se é mesmo?

G: Por que você colocou o 6 aqui?

R: Olha lá, se subir, cai no 3, se andar pro lado, cai no 2.

G: Tem outra casa onde você também pode colocar 6?

R: Tem. É só descer do 2 até o nível do 3.

G: Como você faz para saber que número deve colocar na casa vazia?

R: Eu faço o caminho, você não entendeu?

Anexo 4d: Jogo de mensagem

G.: Quantas bolinhas há em cada cartinha?
Todos: Trinta.

Sacudindo a cartinha 3, continuamos:
G.: Mas quantas pessoas vão ganhar um pedaço se eu recortar esta cartinha?
Todos: Cinco.

E, balançando a cartinha 6:
G.: E se eu recortar esta?
Todos: Duas.
G.: É a mesma coisa? Se vocês fossem escolher uma para recortar, qual vocês escolheriam?

Depois de muita confusão, porque todos falavam e justificavam suas escolhas ao mesmo tempo:
G.S.: Eu escolheria a primeira porque dava pra mais gente.
B.H.: Mas se a gente recortar os círculos, em vez dos pedaços, dá para dar pra dez pessoas nos dois jeitos e os círculos ainda são todos iguais.
G.: E agora, quantas bolinhas há em cada cartinha?
B.H.: Vinte e quatro nas duas.
G.: E se a gente recortar os círculos, vai dar o mesmo resultado nas duas?
B.H.: Ih! Não.
G.: Por quê? O que você está vendo?
B.H.: Porque numa tem 6 círculos com 4 bolinhas em cada um e na outra tem 12 círculos com 2 bolinhas em cada um. Nada dá igual.
G.: Que igualdade matemática, que conta, que sentença eu ia escrever nessa situação.
B.H.: 15 x 2, 2 x 15.
G.: 15 x 2 ou 2 x 15?
B.H.: - Tanto faz, o resultado é igual.

G.: Se vocês tivessem que informar a alguém de qual das duas cartinhas se trata sem desenhá-las, só usando igualdade matemática, que igualdade vocês escolheriam para cada uma?

B.H.: Pra que tá no quadro eu escolho 15 x 2 e pra que tá na minha mão, 2 x 15.

G.: Por quê?

B.H.: Porque nessa que você desenhou tem 15 pedaços com 2 círculos cada um e, nessa que tá na minha mão tem 2 pedaços e dentro de cada pedaço tem 15 bolinhas.

G. (aluna): - Você trocou.

B.H.: - Não, nem vem!

G.: - Peraí, o que ta acontecendo?