FLÁVIO LUIZ AMADEI

O INFINITO
UM OBSTÁCULO NO ESTUDO DA MATEMÁTICA

Mestrado em Educação Matemática

PUC/SP
São Paulo
2005

FLÁVIO LUIZ AMADEI

O INFINITO
UM OBSTÁCULO NO ESTUDO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Prof(a). Dr(a). Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

PUC/SP

São Paulo

2005

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

À minha esposa *Fernanda* e às minhas filhas, *Flávia* e *Nathália*, que sempre estiveram ao meu lado, mesmo durante as necessárias ausências, incentivando-me e auxiliando-me na consecução deste objetivo.

À Professora Doutora *Sonia Barbosa Camargo Igliori*, não somente pela orientação extremamente competente mas, principalmente, pela prova inequívoca de amizade, carinho, dedicação, incentivo e de incansável disposição em todas as fases deste trabalho.

Aos Professores Doutores *Ivo Machado da Costa* e *Benedito Antonio da Silva*, pelas valiosas contribuições dadas no exame de qualificação e pela disponibilidade em participar da banca examinadora.

Aos Professores do *Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP* pela competência, dedicação e amizade inquestionáveis demonstradas durante as aulas, nos seminários, nas palestras e nos encontros didáticos.

O Autor

RESUMO

A pesquisa aqui apresentada visa abordar a noção de infinito sob alguns pontos de vista, com o objetivo principal de indicar quão imbricada foi sua formação como conceito matemático e suas conseqüências para a aprendizagem da matemática. Esta pesquisa é desenvolvida a partir de estudo bibliográfico, apresentação e análise de textos sobre o assunto.

São apresentados alguns conceitos matemáticos introdutórios sobre a noção de infinito, alguns aspectos da evolução histórica dessa noção na matemática com destaque especial à obra “Os Paradoxos do Infinito” de Bolzano e resultados de pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

Análises que objetivam evidenciar relações existentes entre o processo epistemológico e histórico da noção de infinito, em especial de infinito atual e os processos do desenvolvimento do pensamento humano na aprendizagem da matemática, são apresentadas como fechamento.

Palavras chave: Infinito, Intuição, Noção Científica, Ensino da Matemática.

ABSTRACT

The research here presented approaches the notion of infinite under some different views, with the main purpose of indicating how imbricated was its formation as a mathematical concept and its consequences to the learning of mathematics. This research is supported by bibliographical study, presentation and analysis of the literature currently available on this subject.

Some introductory mathematical concepts are presented on the notion of infinite, some aspects of the historical evolution of this notion in Mathematics, with special consideration to Bolzano's work "The Paradoxes of Infinite", and data from other researches in the field of Mathematics Education.

Analysis that intent to underline relationships between the epistemological and historical process of the notion of infinite, specially actual infinite, and the developmental process of human thinking in the learning of Mathematics, are presented as a conclusion.

Key words: infinite – Intuition – Scientific Notion – Mathematics' learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao iniciar esta pesquisa, não poderíamos imaginar como esta iria se transformar com o decorrer do tempo e o aprofundamento de nossas leituras. Havíamos pensado, inicialmente, em abordar o infinito no simples sentido de diferenciá-lo como infinito potencial e infinito atual.

As informações preliminares que dispúnhamos davam-nos conta que o infinito potencial era aquele que se referia a um método processual (o do mais um), enquanto o infinito atual tratava os conjuntos infinitos como conjuntos completos.

Sabíamos que, desde os primórdios da matemática, o infinito potencial já trazia complicações e que os matemáticos da época já deslumbravam um infinito diferente, porém, impossível de ser analisado ou discutido por se contrapor aos padrões religiosos e pela forte rejeição da comunidade científica da época.

Mas, aquilo que somente seria um retrato da diferença entre os infinitos, com a respectiva correspondência à Educação Matemática, ganhou outras dimensões.

Assim, nesse nosso trabalho, fizemos uma retrospectiva histórico-matemática do infinito, desde o seu conhecido surgimento à época de Platão e seus discípulos até os mais recentes estudos desse fenômeno.

Logicamente, tivemos a necessidade de dar um tratamento matemático formal para conceituar o finito, o infinito e os diferentes tipos de infinitos. Ficou claro, entretanto, que a formalização matemática efetuada há pelo menos dois séculos, tinha justamente o objetivo de eliminar ou minimizar os problemas dos paradoxos advindos de interpretações indevidas ou pouco claras do infinito.

São nos paradoxos do infinito que nos detivemos, por julgá-los extremamente importantes na compreensão dos problemas da Educação Matemática.

O que seriam esses paradoxos? Segundo Kubrusly (2004), a descoberta de um verdadeiro paradoxo, indica que a estrutura lógica que suporta o sistema de articulação de idéias ou raciocínios desse universo, não dá mais conta de transformar em razão a complexidade desse sistema. Todo paradoxo indica a existência de “indecidíveis”: afirmações que não podem ser demonstradas e nem sequer negadas. Como solucionar os paradoxos? Poderiam ser solucionados, localmente, enfraquecendo a sua lógica ou algumas de suas leis básicas. Entretanto, esses paradoxos voltariam a aparecer em outra situação ou em outro tempo. Uma outra maneira seria a de romper com a causalidade, buscando um ponto de bifurcação com novas verdades igualmente coerentes e consistentes. Uma outra maneira, ainda, seria apelar a Deus, criador dos universos físicos e concretos, mas não de um universo de idéias.

Invariavelmente, encontramos na matemática termos como: nunca, sempre, assim sucessivamente, infinitamente, etc. O que dizer dos limites que tendem ao infinito, do quociente que tende ao infinito? Passamos por isso tudo sem, entretanto, nos deter.

Há um famoso paradoxo que aqui exemplificamos, como argumento para entender a sua “lógica“: “havia um barbeiro que pendurara na sua barbearia um cartaz com os seguintes dizeres: faço a barba de todos que não fazem a própria barba, e somente deles”. Não estando o barbeiro barbudo, o paradoxo surge da pergunta: quem faz a barba do barbeiro? O barbeiro faz a própria barba, se e somente se, não faz a própria barba. A afirmação: “o barbeiro faz a sua própria barba“ é verdadeira, se e somente se, é falsa e vice-versa.

Um dos mais famosos matemáticos de todos os tempos, Bernard Bolzano, dedicou anos de sua pesquisa tratando desses paradoxos. Dentre os seus importantes trabalhos, o mais conhecido deles é “Os Paradoxos do Infinito“. Sem dúvida alguma, podemos afirmar que este é a âncora do nosso trabalho.

Analisamos como Bolzano tratava estes paradoxos e fizemos um paralelo com alguns trabalhos de pesquisa na educação matemática, no sentido de tentar tornar mais amigável essa difícil convivência do infinito.

Logicamente, a leitura deste trabalho não é suficiente e nem tem a pretensão de esgotar o assunto, muito pelo contrário, destina-se apenas a despertar a atenção sobre o tema. Segundo Monaghan (1986) o pouco que se vê sobre o infinito, nos cursos introdutórios de Cálculo, não é suficiente para entendê-lo.

APRESENTAÇÃO

"A introdução do infinito
complica tudo no estudo da matemática!"
(Otte, M., 2004, PUC/SP)

As informações reunidas neste trabalho sobre a noção de infinito procuram evidenciar fatores epistemológicos e cognitivos geradores de dificuldades para a compreensão da noção de infinito. Objetivam dar ênfase à complexidade dessa noção para o pensamento humano e sua relevância na construção do conhecimento matemático e as implicações no processo do ensino e aprendizagem.

Sabendo-se que, para a Educação Matemática é fundamental avaliar como na evolução histórica da noção de infinito, os obstáculos foram sendo gerados e que o seu enfrentamento teve um caráter formativo para um modo de pensar em Matemática. O conflito entre a intuição e o conceito científico traz desafios para o processo do ensino e aprendizagem da Matemática, assim como trouxe aos pensadores de todas as épocas. Os obstáculos epistemológicos consagrados no desenvolvimento histórico da noção de infinito, e muito em particular da noção de *infinito atual,* são motivos de sobra para que as dificuldades na aprendizagem, advindas deles, sejam persistentes e de difícil trato no ensino.

Este estudo aborda alguns tópicos relacionados à noção de infinitos tendo por alvo a epistemologia e a cognição. São eles: formalização conceitual, referencial histórico, os infinitos na concepção de Bolzano e pontos abordados em pesquisas na área da Educação Matemática.

O desenvolvimento do trabalho foi realizado segundo a seguinte sistemática: levantamento bibliográfico; escolha e síntese dos textos e elaboração das análises de fechamento. Os alvos do estudo bibliográfico foram livros de História da Matemática e pesquisas de Educação Matemática. A importância de dois dos trabalhos sobre o tema e a ligação deste autor com a pesquisa de sua orientadora constituiu o critério da escolha dos textos que são sintetizados e analisados nesta dissertação. A essência do pensamento de Bolzano sobre os dois infinitos, *potencial* e *atual*, em sua obra “Os Paradoxos do Infinito” é registrada aqui com a apresentação de forma sintética da Introdução desse livro.

Procedimentos Metodológicos

Os procedimentos para a organização deste trabalho resumiram-se em levantamento bibliográfico buscando textos que tratassem, sob diversos ângulos, o tema do infinito e em especial dos dois infinitos, o potencial e o atual. Interessava-nos enfocar o conceito de infinito sob os prismas histórico, epistemológico e cognitivo. Assim sendo, nossos alvos foram artigos científicos, teses, dissertações e livros disponíveis.

Dadas as diferentes abordagens, tivemos que nos dedicar à leitura de um número significativo de textos, pois havia necessidade de identificar, sob diversos títulos: teoria dos conjuntos, teoria dos conjuntos infinitos, números transfinitos, transfinito, infinito atual, infinito potencial e infinito atual, números algébricos e transcendentais, teoria dos conjuntos transfinitos, álgebra transfinita, teoria dos números transfinitos e teoria dos conjuntos, aqueles que abrigavam estudos de nosso interesse.

O levantamento bibliográfico foi realizado através de consultas às bibliotecas virtuais das principais Universidades brasileiras (ao todo foram 252 consultas em teses e dissertações) e internacionais (americanas, canadenses, espanholas, inglesas, francesas e portuguesas) e por consultas diretas às bibliotecas das instituições de ensino na cidade de São Paulo. Não foi muito fácil encontrar o que pretendíamos. Entretanto, tendo em mãos o primeiro artigo "Infinito actual e inconsistencias" (Garbin, S. y Azcárate, C., 2002) pudemos, a partir dele, encontrar uma gama considerável de referências.

Visitamos diversos sítios via *internet*, como os de jornais e revistas científicas. No que tange aos livros, incluímos "Os paradoxos do Infinito" de Bolzano, por sua importância na conceituação matemática do infinito e pela discussão ali desenvolvida sobre as controvérsias do infinito atual. Estudamos os "Paradoxos" em duas versões, em espanhol e francês, optando por esta última para o trabalho.

O segundo passo foi recorrer às bibliotecas e disponibilizar os trabalhos necessários.

Após a análise preliminar dos documentos selecionados, coube-nos determinar o direcionamento do trabalho.

As escolhas dos textos foram realizadas em função da amplitude da apresentação do tema e reconhecimento dos autores. A inclusão do artigo de nossa orientadora foi motivada pela pesquisa cognitiva aplicada em estudantes brasileiros.

A complexidade do tema, aliado às dificuldades intrínsecas em superá-lo, direcionou nosso propósito na elaboração de uma espécie de coletânea que interligasse os aspectos epistemológicos, matemáticos, históricos e cognitivos, que pudesse contribuir com estudos sobre o assunto na Educação Matemática.

CAPÍTULO 1

A FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA DO CONCEITO DE CONJUNTO INFINITO

Teoremas e Corolários

Conjunto Infinito

Definição 1. Um conjunto F é finito quando é vazio ou quando existe para algum número natural *n* e uma bijeção f: $I_n = \{1, 2, ..., n\} \to$ F. O número *n* é considerado o número de elementos de F. O conjunto vazio tem zero elementos.

Definição 2. "Um conjunto não vazio I é infinito se, e somente se, qualquer que seja o número natural *n*, uma função f: $I_n = \{1, 2, ..., n\} \to$ I não será bijetora".

A definição 2 proposta como negação da definição 1, como acima, não viabiliza a verificação de infinitude de um determinado conjunto. Como é habitual na matemática, buscam-se suplantar essa impossibilidade por meio de condições de caracterização. Tem essa perspectiva, o que apresentamos a seguir:

Teorema 1. Sejam *n* um número natural qualquer, o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ e A uma parte não vazia de I_n. Se existir uma bijeção de I_n em A, então A = I_n.

Demonstração por indução finita sobre *n*.

- Para *n* =1, a implicação é obviamente verdadeira;
- Provemos que se a implicação é verdadeira para *n* = k, então, é também verdadeira para *n* = k + 1.

Suponhamos a implicação verdadeira para *n* = k e consideremos f: $I_{k+1} \to A$ bijetora, sendo A uma parte não vazia de I_{k+1}. Provemos que I_{k+1} = A:

- Tomemos $a \in$ A, tal que: f (k+1) = *a*
- Consideremos $f' = f / _{I_k}: I_k \to A-\{a\}$, ou seja: $f'(x)$ = f (x) para todo *x* pertencente a I_k, bijetora, portanto, por definição, duas possibilidades podem ocorrer:

1. A-$\{a\}$ é parte não vazia de I_k.

A bijetividade de f' e a hipótese de indução implicam que A-$\{a\}$= I_k ;
f' restrição de f e f (k+1) = *a* implicam que *a* = k+1 e conseqüentemente que A = I_{k+1}, como queríamos demonstrar.

2. A-$\{a\}$ não é parte de I_k .

A é uma parte não vazia de I_{k+1} e A-$\{a\}$ não é parte própria de I_k , então, k+1 é elemento de A-$\{a\}$ e conseqüentemente de A f: $I_{k+1} \to$ A é bijetora, logo, existe p $\in$ I_{k+1} : f(p) = k+1.

Definimos a seguir duas outras bijeções *g* e *h* como segue:
g: $I_{k+1} \to$ A tal que: g (x) = f (x), para $1 \leq x \leq k$ e, $x \neq p$ e $x \neq k+1$; g (p) = *a* e g (k+1) = k+1.
h: $I_k \to A - \{k+1\}$ tal que: h (x) = g (x).

A é parte não vazia de $I_{k+1,}$ conseqüentemente, A - $\{k+1\}$é parte de I_k e não vazia, pois, $a \neq$ k+1. Então, pela hipótese de indução A - $\{k+1\}$ = $I_{k.}$

Daí pode-se concluir que A = I_{k+1} como queríamos demonstrar.

Corolário do teorema 1. “Não pode existir uma bijeção f: F $\rightarrow$ J de um conjunto não vazio e finito F sobre uma parte própria não vazia J de F.” (Lima, 1975, p. 34)

Demonstração por absurdo:

Sejam F um conjunto finito não vazio e J uma parte própria não vazia de F. Suponhamos que exista uma função f: F$\rightarrow$J, bijetora. Verifiquemos que esta suposição contrariará o teorema 1, o que é absurdo.

De fato:

Se F é um conjunto finito e não vazio, existe por definição um número natural *n* e uma bijeçãoφ : In $\rightarrow$ F. Se f: F $\rightarrow$ J é bijetora, então, o conjunto A = $\varphi^{-1}(J)$ é parte própria não vazia de I_n .O esquema abaixo indica a existência de uma bijeção entre I_n e A, sua parte própria.

$$In \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{f} J \xrightarrow{\varphi^{-1}/J} A$$

A existência da bijeção, contrariamente ao teorema 1, foi acarretada por supormos que existisse a bijeção f. Assim, demonstramos que f não pode existir, como queríamos demonstrar.

Teorema 2. Se F é um conjunto finito então todo subconjunto de E de F também é finito e o número de elementos de E não excede o de F e só é igual quando E = F. (Lima, 1975, p 35)

A condição acima, enunciada no teorema 2, pode ser dita de outra forma: um conjunto finito tem sempre um número maior de elementos que qualquer uma de suas partes próprias. Isto expressa a *máxima* dos conjuntos finitos: “O todo é sempre maior que qualquer uma de suas partes”.

Teorema 3. “Um conjunto é infinito se e somente se está em bijeção com uma de suas partes próprias não vazias.” (Lima, 1975, p 35)

A implicação: se um conjunto I está em bijeção com uma de suas partes próprias não vazias então ele é infinito, é conseqüência imediata do corolário 1. Essa condição nos fornece a possibilidade de verificar a infinitude de conjuntos, como por exemplo:

– O conjunto N dos números naturais.

Isto, porque existem uma parte própria não vazia de N, o conjunto P dos números pares positivos e a bijeção $f: N \to P$, definida por $f(n) = 2n$.

Para demonstrar a implicação inversa: “Se F é infinito então existem uma parte própria não vazia A de F e uma bijeção $f: F \to A$” necessitamos da noção de conjunto enumerável e de outros resultados.

Conjuntos Enumeráveis

Um conjunto X é enumerável se é finito ou se infinito satisfaz a condição: existe uma função $f: N \to X$, bijetora. A função f, não necessariamente única, é denominada uma enumeração de X.

Exemplos de conjuntos infinitos enumeráveis:

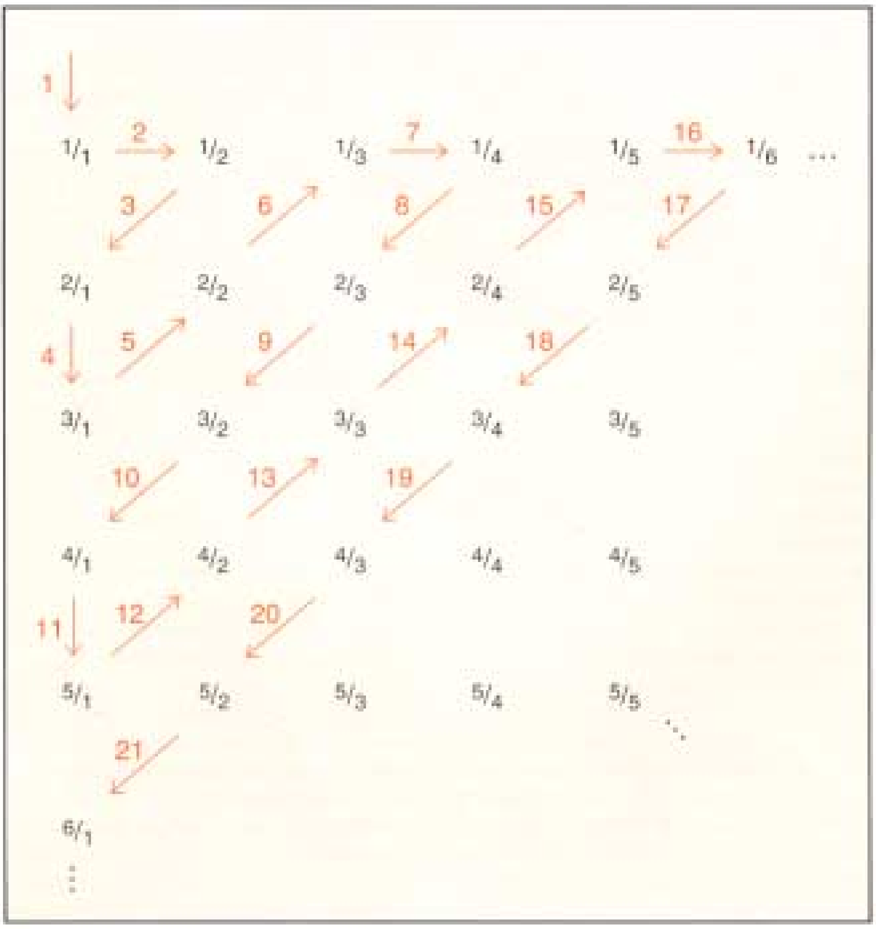
- O conjunto N dos naturais (existe a bijeção $I: N \to N$, I a função identidade);

- O conjunto Z dos inteiros (Z é enumerável pois existe a bijeção f: Z $\rightarrow$N definida por: f (z) = 2z, se z > 0 e f (z) = -2z+1, se z $\leq$ 0);
- O conjunto Q dos números racionais é enumerável.

– A demonstração é feita da seguinte forma: o conjunto Q+ é enumerável a partir do método da diagonalização de Cantor, o qual é obtido por meio dos seguintes procedimentos:

a) os racionais maiores que zero são alinhados, de modo que na linha l_i ficam aqueles cujos numeradores são i com i = 1,2,3,...

b) enumeram-se esses racionais pelo esquema:



Procedemos de forma análoga com o conjunto Q-. Para terminar a demonstração da enumerabilidade de Q, há necessidade de dois outros teoremas os teoremas 4 e 5.

Teorema 4."O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável." (Lima, 1975, p. 40)

Teorema 5. "A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável" (Lima, 1975, p.40)

Assim, como Q+ e Q- são conjuntos enumeráveis, temos pelo teorema 5 que $Q = Q_{+} \cup Q-$ é enumerável.

Teorema 6. "Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável". (Lima, 1975, p. 38)

De posse desses resultados, podemos provar a implicação: "Se F é infinito então existem uma parte própria não vazia A de F e uma bijeção f: $F \to A$". (Lima, 1975, p. 39)

Demonstração.

– Se X é infinito, pelo teorema 6, ele contém um subconjunto enumerável:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}.$$

Consideremos o conjunto Y = (X-A) U $\{a_2, a_4, a_6, ..., a_{2n}, ...\}$. Y é, evidentemente, uma parte própria de X. A função f: $X \to Y$ definida por: f(x) = x se $x \in$ (X-A) e $f(a_n) = a_{2n}$ é evidentemente bijetora, o que verifica o teorema.

Teorema 7. (de Cantor): “Nenhuma função Φ: X$\rightarrow \mathfrak{F}$ (X,Y) é sobrejetiva se X é um conjunto não vazio qualquer, Y é um conjunto com no mínimo dois pontos e $\mathfrak{F}$ (X,Y) é o conjunto das funções definidas em X e a valores em Y”. (Lima, 1975, p. 42).

Demonstração.

Indiquemos por Φ_x a função imagem de x $\in$ X, pela Φ. Construamos uma função f : X$\rightarrow$Y tal que f $\neq\Phi_x$, para todo x $\in$ X. Para tanto, basta associar para cada x $\in$ X um valor para f(x)$\neq$ Φ_x (x), o que é possível pois, Y tem no mínimo dois elementos.

A função f assim construída é um elemento de $\mathfrak{F}$ (X, Y), mas não da imagem de Φ. Logo Φ não é sobrejetiva.

Corolário. Existe um conjunto não enumerável.

O teorema de Cantor nos fornece, por exemplo, o conjunto.$\mathfrak{F}$ (N,N)

Teorema 8. (Teorema dos intervalos encaixantes): “A intersecção de uma seqüência decrescente de intervalos limitados e fechados da reta real tem intersecção não vazia.” (Lima, 1975, p.68)

Teorema 9. “O conjunto $\Re$ dos números reais é um conjunto não enumerável”. (Lima, 1975, p. 68)

Demonstração.

A demonstração se sustenta na seguinte propriedade. Se são dados os números reais, a, b com a< b, um intervalo limitado e fechado I = $[a,b]$ e um ponto x_o da reta real, então, existem os números reais *c* e *d* com c< d e J = $[c,d]$

intervalo fechado e limitado, tais que $J \subset I$ e $x_0 \notin J$. É fácil ver que basta tomar os pontos c,d convenientemente.

Consideremos um conjunto X = $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots\}$, subconjunto da reta real e tal que ele seja enumerável. Vejamos que necessariamente poderemos exibir um número real x que não pertence a X e, portanto, ele não poderá coincidir com o conjunto R, de todos os pontos da reta. Para tal, utilizando a propriedade acima repetidas vezes obteremos a coleção de intervalos limitados e fechados como segue: I_1 tal que $x_1 \notin I_1$, I_2, tal que $I_2 \subset I_1$, e $x_2 \notin I_2$, $I_3 \subset I_2$ e $x_3 \notin I_3$......e $I_n \subset I_{n-1}$, $x_n \notin I_n$. A partir daí, temos uma seqüência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ de intervalos limitados e fechados. Pelo teorema 9, existe x pertencente a intersecção de todos os I_i, i=1,2,...n,.... Mas $x_i \notin I_i$, qualquer que seja i= 1,2,...n....

Então, $x \notin X$ e conseqüentemente $X \neq \Re$ o que acarreta a não enumerabilidade de $\Re$.

Teorema 10. "Todo intervalo não degenerado da reta real é não enumerável" (Lima, 1975, p. 69)

Demonstração.

Com efeito, f: $]0,1[\to]a, b[$, definida por f(x) = (b-a) x + a é uma bijeção. Logo, se provarmos que $]0,1[$ é não enumerável resultará que nenhum intervalo não degenerado pode ser enumerável.

Ora, se $]0,1[$ fosse enumerável, $]0,1]$ também seria e, conseqüentemente, para cada $n \in Z$, o intervalo $]n, n+1]$ seria enumerável pois está em bijeção com $]0,1]$, sendo g a bijeção definida por g (x) = x + n. Mas $\Re = \bigcup_{n \in Z}]n, n=1]$, ou seja, união enumerável de conjuntos enumeráveis e portanto pelo teorema 5 enumerável, o que é absurdo.

Corolário do teorema 5. "O conjunto dos números irracionais é não enumerável". (Lima, 1975, p. 69).

$\Re$ = Q U ($\Re$-Q). Se ($\Re$-Q) for enumerável, então pelo teorema 5 e, pelo fato de Q ser enumerável, $\Re$ também seria contrariando o teorema 10.

Teorema 11 O conjunto dos números algébricos é enumerável (Niven, 1984, p. 199)

Corolário do teorema 11. O conjunto dos números transcendentes é não enumerável.

Observação.

A prova do teorema 11 é um pouco mais complicada do que a prova de que o conjunto dos racionais é enumerável.

Cardinalidade de Conjuntos

Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se existe uma correspondência biunívoca entre eles. A cada conjunto pertencente à classe de conjuntos que têm a mesma cardinalidade está associado um número cardinal denotado por: card A ou por |A|.

– O número cardinal de um conjunto vazio é zero. Isto é card $\varnothing = 0$ ou $|\varnothing| = 0$.

– O número cardinal de um conjunto finito, não vazio, é um número natural. Isto é, se F é finito e $F \neq \varnothing$ então card F= n ou |F| = n ou n é o número de elementos de F.

– O número cardinal de um conjunto enumerável E é $\aleph_0$. Isto é, card E = $\aleph_0$ ou $|E| = \aleph_0$.

– O número cardinal de $\Re$ é c. Isto é card $\Re$ = c ou $|\Re|$ = c, c de *continuum.*

Dois conjuntos A e B são equivalentes ou eqüipotentes se têm o mesmo cardinal. Isto ocorre quando existir uma bijeção entre eles.

Exemplos. N e Q; $\Re$ e um intervalo não degenerado qualquer de $\Re$.

Definição. Dois conjuntos A e B são tais que card (A) < card (B) se existir uma função f: A→B que seja injetiva, porém não existe uma função g: A→B que seja sobrejetiva.

O teorema 6 garante que: "Se X é um conjunto infinito então card (N) ≤ Card (X)". Assim $\aleph_0$ é o menor dos números cardinais dos conjuntos infinitos.

Teorema 12 "Qualquer que seja um conjunto A tem-se que card (A) < card $\wp(A)$. (Lima, 1975, p. 43).

Demonstração.

Sejam $\wp(A)$ o conjunto das partes de A e Y=$\{0,1\}$. Veremos que existe a bijeção: ξ : $\wp(A) \rightarrow \Im\{A, \mathrm{Y}\}$definida por: a cada conjunto X pertencente a $\wp(A)$ associa-se a *função característica* de

X, $\xi_X : A \rightarrow Y$. $\xi_X(x) = 1 \text{ se } x \in X \text{ e } \xi_X(x) = 0 \text{ se } x \notin X$.

Como Y tem dois elementos o teorema 7 de Cantor garante que não existe função sobrejetiva entre A e $\Im\{A, \mathrm{Y}\}$ e conseqüentemente não existe nenhuma função φ entre A e $\wp(A)$ sobrejetiva (porque senão $\xi \circ \varphi$ seria uma função entre A e $\Im\{A, \Upsilon\}$ sobrejetiva).

Mas, evidentemente a função f: A$\rightarrow\wp(A)$ definida por f(x) = $\{x\}$ é injetiva. Logo card A $<$ card$\wp(A)$.

Este resultado implica no fato de que o conjunto dos números cardinais é infinito.

Para finalizar esta síntese sobre a formalização matemática do conjunto infinito vale acrescentar a "Hipótese do continuum: Não existe nenhum número cardinal entre $\aleph_0$ e c."

A relação de ordem entre $\aleph_0$ e c gerou muita polêmica entre os matemáticos. Há os que a admitem e toma essa hipótese na fundamentação de sua matemática e outros que não, construindo uma matemática transfinita, isto é, a matemática dos números cardinais, em outras bases.

Evolução histórica

É na descoberta da existência de grandezas incomensuráveis que o infinito irrompe na matemática grega. Os geômetras gregos, em suas buscas por uma unidade de medida comum para todas as grandezas, foram capazes de assumir a divisibilidade ao infinito de grandezas. No entanto, essa idéia de infinito gera neles uma profunda confusão.

Se os gregos podiam realizar em suas teorias matemáticas, especulações sobre o infinito, na prática sempre tentavam contorná-lo e esvaziá-lo. A indisposição deles em explicitar as noções abstratas do infinito e do contínuo, em oposição às noções do finito e discreto, traduz-se de modo remarcável nos paradoxos de Zenão de Eléia. À época de Zenão (segunda metade do século V

A.C.), duas concepções se opunham: a concepção *continuista* que considera o número, o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis ao infinito e a concepção *atomista* que preconiza a existência de elementos primeiros indivisíveis. Para Zenão essas duas concepções são geradoras de impasses.

O paradoxo de *Aquiles e a Tartaruga* é um exemplo do impasse acarretado pela não divisibilidade ao infinito do espaço e do tempo, pela concepção *continuista*. O impasse é consignado da seguinte forma: Aquiles disputa uma corrida com a tartaruga e, como bom competidor, oferece a ela uma vantagem inicial. É dada a largada e a tartaruga percorre o espaço inicial e Aquiles fica parado. Enquanto Aquiles percorre esse espaço inicial, a tartaruga, por sua vez, avança um pouco. O espaço entre os dois se reduz, mas, a tartaruga conserva a vantagem. Quando Aquiles cobre a nova distância que o separa da tartaruga, ela avança mais um pouco e, assim, sucessivamente. Dessa forma, Aquiles jamais alcança a tartaruga. O impasse gerado em jogo nesse paradoxo é a dificuldade de considerar uma quantidade infinita de espaços cada vez menores e a impossibilidade de conceber intuitivamente que a soma do comprimento desses espaços possa ser finita.

O argumento fica mais explícito ainda na *dicotomia*: antes de poder percorrer uma linha inteira, um móvel deve, de início, cobrir a metade dessa linha, depois, a metade desta metade, e assim sucessivamente ao infinito. Zenão, na realidade, compõe mentalmente a série $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$ sem o domínio de convergência.

Com o *paradoxo da flecha,* o impasse é criado se for considerado que o espaço e o tempo sejam compostos de partes indivisíveis, digamos de “pontos” e de “instantes”.

A um “instante” de seu vôo, uma flecha ocupa, portanto, um “ponto” do espaço e então se encontra em repouso. Isto ocorrendo a cada instante de seu vôo, a flecha não pode estar em movimento. E assim, o movimento não poderia existir.

O que está aqui em causa é a noção de velocidade instantânea. Que valor atribuir à razão $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ da distância percorrida Δx no intervalo de tempo Δt se a quantidade Δt torna-se muito pequena? Os antigos atribuíam a essa razão o valor zero, incapazes de imaginar um mínimo não nulo.

Hoje a noção de limite fornece imediatamente a boa resposta: a velocidade instantânea é o limite da razão $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero. É, portanto, essa noção que virá a ser central no Cálculo Infinitesimal, que está em jogo nos paradoxos citados.

Os paradoxos de Zenão constituem os exemplos mais primitivos dos impasses causados pela noção de infinito na história. Tais paradoxos apontam para propriedades perturbadoras do infinito e para armadilhas que nos aguardam quando tentamos entender o sentido de processos ou fenômenos infinitos.

Mas, de fato, as raízes da noção de infinito estão no trabalho realizado há um século antes de Zenão por Pitágoras (569-500 A.C.). Dois milênios e meio depois de Pitágoras, os números irracionais desempenhariam um papel crucial na concepção de cardinalidade dos conjuntos infinitos.

Platão contribuiu muito com a história da matemática e seus discípulos fizeram avançar a idéia do infinito.

Dois dos maiores matemáticos da Antiguidade, Eudóxio de Cnido e Arquimedes de Siracusa (287-212 A.C.), deram continuidade à idéia de infinito elaborada por Zenão. Ambos fizeram uso das quantidades infinitesimais –

números infinitamente pequenos – com o objetivo de encontrar áreas e volumes. No livro V de *Os elementos* de Euclides está descrita a maior realização de Eudóxio, o método da exaustão, concebido para o cálculo de áreas e volumes. Ele demonstrou que não temos de pressupor a existência real de quantidades *infinitamente* múltiplas de pequenas, utilizadas nesse tipo de cálculo da área total de uma região plana limitada por uma curva. Tudo o que temos de presumir é que existem quantidades “tão pequenas quanto desejarmos” pela divisão continuada de qualquer magnitude total: trata-se de uma introdução ao conceito de infinito potencial que inspirou matemáticos do século XIX a introduzir o conceito de limite como fundamento do Cálculo.

Arquimedes expande as idéias de Eudóxio e utiliza o conceito de infinito potencial para elaborar métodos a fim de encontrar áreas e volumes, por meio das *quantidades infinitesimais*. Como aplicação desses métodos, resultou que: o volume de um cone inscrito em uma esfera com base máxima possível é igual a um quarto do volume.

Arquimedes mostrou como utilizar o infinito potencial para encontrar o volume de uma esfera e de um cone.

A descoberta da incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação ao seu lado acarreta o aparecimento de grandezas incomensuráveis. A teoria das proporções de Eudóxio é incluída no V livro de Euclides, como uma tentativa de dar um *estatus* a grandezas incomensuráveis e, de uma certa maneira, de admissão dos números irracionais no campo da matemática grega. Ela está norteada pelo método da exaustão que permitiria aos gregos resolver problemas que mais tarde constituiriam as bases do Cálculo Infinitesimal: cálculo de comprimento de curvas, de áreas ou volumes de superfícies delimitadas por curvas ou de sólidos delimitados por superfícies curvas, determinação de centro de gravidade, construção de tangentes, etc.

Os filósofos e os matemáticos gregos da Idade de Ouro, de Pitágoras a Zenão, Eudóxio e Arquimedes fizeram inúmeras descobertas a respeito do conceito de infinito.

Surpreendentemente, muito pouco se avançou no estudo de suas propriedades matemáticas durante os dois milênios seguintes.

Desde o início do século XVII até o século XIX, dois matemáticos fizeram importantes descobertas sobre a natureza do infinito: Galileu (1564-1642) e Bolzano (1781-1848). Com eles é desenvolvida a idéia de infinito atual. Até então, a noção de infinito restringia-se à noção de infinito potencial.

Durante um longo e triste confinamento, provocado pelo processo da Santa Inquisição, Galileu escreveu um tratado, *Diálogos sobre as duas novas ciências* (1638), no qual num diálogo complexo, discute diversas idéias filosóficas e matemáticas entre as quais, aspectos do infinito. Galileu explica a divisão de um círculo em "um número infinito" de triângulos infinitesimais. Argumenta que, ao "encurvar" um segmento de reta até formar um círculo, "reduz-se na forma do infinito atual aquele número de partes que na reta estavam contidas somente de modo potencial". E, então, o círculo pode ser pensado como um polígono com um número infinito de lados. Mais adiante nesse mesmo tratado, Galileu dá um passo além, o grande salto do *infinito potencial* – usado não só pelos antigos como igualmente pelos contemporâneos – para o *infinito atual*. Galileu estabelece uma correspondência biunívoca entre todos os números inteiros e todos seus quadrados, e diz: "devemos concluir que existem tantos quadrados quantos são os números". Demonstra assim que um conjunto infinito, o conjunto de todos os inteiros é igual "em número" ao conjunto de todos os quadrados dos números inteiros, sendo esse por sua vez um subconjunto próprio do conjunto dos números inteiros. Como poderia ser possível admitir que "o todo não é maior que uma de suas partes?" Tal fato seria absurdo no contexto dos conjuntos finitos. Galileu descobriu então que os conjuntos infinitos não se comportavam da mesma forma que os finitos. Apesar de ser sua essa descoberta, ficou bastante atrapalhado, pois lhe era muito estranho pensar que, se por um lado, para cada quadrado havia em correspondência biunívoca um número inteiro, esgotando-os, portanto, sobrariam ainda (infinitos) números – todos os inteiros que não fossem quadrados perfeitos.

O infinito é um conceito intimidador, pois conflita com nossa intuição. Galileu parou por aí, não obstante, tivesse empreendido uma tentativa de escrever um livro sobre o infinito. Aparentemente, o poder do infinito foi suficiente para dissuadi-lo de tal projeto. Galileu foi então o primeiro na história a introduzir *a infinidade atual*, mas a abordou entre os conjuntos enumeráveis. Ir além daqueles conjuntos de potência do *continuum*, mencionados pelos gregos em seus estudos de geometria e dos números irracionais que tanto perturbaram os pitagóricos seria trabalho para outro matemático: Bernard Bolzano. Dedicaremos um capítulo deste trabalho sobre sua obra “Os Paradoxos do Infinito”.

No final do século XIX, fatos sobre o infinito eram conhecidos, porém os matemáticos lhes dispensavam pouca atenção.

Bernhard Riemann (1826-66), talentoso matemático alemão, teve que considerar o problema do infinito quando desenvolveu um trabalho inovador em geometria e quando apresentou seu conceito de integral. A definição de integral apresentada por Riemann, como soma infinita de integrais de funções escalonadas, constituiu ponto de partida de Georg Cantor para o estudo do infinito. Riemann estendeu o princípio de Bolzano que apresenta conjuntos não enumeráveis ao demonstrar que os intervalos $[0,1]$ e $[0,2]$ têm o mesmo cardinal.

O trabalho de Weirstrass sobre a expansão de uma função em série de potências traz a idéia de infinito de modo crucial, uma vez que a soma das potências “coincide” com a função “no infinito”. Ele também desenvolveu em seus estudos sobre funções a aproximação de uma função por funções contínuas, fazendo uso do infinito na tradição Zenão e Eudóxio. O método da convergência de funções acarretou uma definição rigorosa dos números irracionais como limite de seqüências de números racionais.

Gauss acreditava no “infinito em potencial” – aquele que não se pode realmente atingir – um ideal, um lugar muito distante ou um número que não se materializa de fato.

Como exemplo, pode-se citar o caso do cálculo da área de regiões limitadas por *curvas suaves*, que para ele não havia necessidade de se “levar ao infinito”, como se faz hoje, as somas de áreas das regiões limitadas por funções *escalonadas* auxiliares construídas sob as curvas. A aproximação poderia ser feita com “boa precisão” em qualquer nível finito. Esse entendimento seria suficiente para Gauss e seus contemporâneos. Newton e Leibniz, que dois séculos antes introduziram as primeiras noções do Cálculo Diferencial e Integral, também se satisfaziam com a idéia de um infinito potencial, aquele que é inatingível.

Chegamos em Georg Ferdinand Ludwing Cantor, matemático russo que nasceu em 3 de março de 1845 em São Petersburgo.

A natureza do infinito havia sido sempre objeto de controvérsia. Os famosos paradoxos de Zenão de Eléia, que explicavam com inquietante lucidez que o movimento era impossível porque exigia que o móvel passasse por uma infinidade de pontos em um tempo finito, suscitaram problemas desde a antiguidade, como já nos referimos. O êxito da Física newtoniana é em grande parte, conseqüência de Newton ter introduzido o cálculo das taxas de variação do infinitamente pequeno. Em tempos modernos, têm aparecido novos problemas associados ao infinito na teoria de conjuntos abstratos, teoria que proporciona fundamento e sedimentação a praticamente à totalidade da matemática contemporânea. Ademais, a idéia do infinito tem estado sempre, através da história, carregada de tintas e matizes teológicos, que tem pesado na aceitação ou na rejeição desse conceito e das doutrinas matemáticas e filosóficas a ele associadas. Todas estas correntes de pensamento convergem na vida e obra de Cantor.

A obra a que Cantor dedicou sua vida é, em substância, muito conhecida. Ao desenvolver o que ele mesmo batizou “aritmética dos números transfinitos” dotou de conteúdo matemático o conceito de *infinito atual*. O mais notável feito de Cantor consistiu em demonstrar, com rigor matemático, que a noção de infinito não era uma noção indiferenciada. Nem todos os conjuntos infinitos eram de igual “tamanho” e, portanto, era possível ordenar seus “tamanhos”. O conjunto dos números irracionais, por exemplo, tem “tamanho maior” que “o” do conjunto dos números racionais.

Esses resultados eram tão chocantes à intuição humana que contemporâneos de Cantor como, por exemplo, Poincaré, condenaram a teoria dos números transfinitos como uma “enfermidade”. Kronecker, um dos professores de Cantor, classificou-o de “charlatão científico” “renegado” e “corruptor da juventude”.

Com dificuldades de saúde e tamanha rejeição de outros matemáticos proeminentes, ele mesmo resistiu a aceitar a existência de números transfinitos, convencido de que era impossível formular coerentemente a noção de *infinito atual* numa matemática rigorosa. Não obstante, de pronto superou seu “preconceito” com respeito aos números transfinitos, por achá-los indispensáveis para o desenvolvimento posterior de suas idéias matemáticas.

Como professor da universidade alemã de Halle, Cantor interessou-se pelo estudo das funções com base em métodos desenvolvidos por Weirstrass, pelas aproximações de funções por séries de potências, que o levou ao conceito de convergência. Envolveu-se profundamente com os métodos do *infinito potencial* utilizado em matemática desde os gregos antigos, depois aperfeiçoados e modernizados pelos analistas de Berlim. Um de seus colegas, Heinrich Eduard Heine, estava trabalhando com a aproximação de funções por meio das séries trigonométricas. Heine animou Cantor a atacar o difícil problema da unicidade de solução, isto é, a série trigonométrica que convergisse a uma determinada função, fosse única. Em 1872, com 27 anos, Cantor apresentou uma solução muito geral para o problema, na qual estava o germe da teoria dos conjuntos transfinitos. O problema que Heine sugeriu a Cantor era a continuação do trabalho do matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier. Em 1822, Fourier havia mostrado que o gráfico de qualquer curva "razoavelmente lisa" (com um número finito de pontos de descontinuidade) poderia representar-se em todo o intervalo de definição como soma de uma série trigonométrica infinita. Para justificar que a função podia ser substituída pela série, seria necessária a sua unicidade. Cantor começou buscando condições para a validade desse problema da unicidade. Em 1870, chegou ao primeiro resultado: a função deveria ser contínua em todos os pontos do intervalo de definição. Seu próximo passo foi o de relaxar a exigência de continuidade em todos os pontos passando a demonstrar que a unicidade da representação trigonométrica continuaria válida se a função tivesse um número finito de pontos de descontinuidade, pontos esses que Cantor chamava de "pontos especiais".

Buscando um enunciado mais geral para a sua teoria da unicidade, em 1872, Cantor publicou uma notável descoberta: desde que os "pontos especiais" estivessem distribuídos no intervalo de definição da função, de forma cuidadosamente específica, poderiam até ser em número infinito. O passo mais importante da demonstração consistia em descrever a forma específica de distribuição dos "pontos especiais" e Cantor compreendeu que necessitava de um método satisfatório para analisar o contínuo de pontos situado no intervalo de reta. Dessa forma, Cantor decidiu prestar mais atenção às relações entre os pontos do contínuo do que aos teoremas sobre séries trigonométricas. O que ficou provado por ele é que a forma específica tratava-se da enumerabilidade do conjunto dos “pontos especiais”.

O estudo direcionou-se depois para as propriedades dos números reais. Em um enfoque sob o ângulo sugerido pelo seu professor Karl Weirstrass, Cantor propôs que todo número irracional poderia ser representado por uma sucessão infinita de racionais. Não obstante suas vantagens, alguns matemáticos encontraram dificuldades em admitir o método de Cantor, pois pressupunha a existência de sucessões ou conjunto formado por infinitos elementos, a infinitude atual, rechaçada desde o tempo de Aristóteles.

Cantor não foi o único a estudar as propriedades do contínuo. Em 1872, no mesmo ano em que foi publicado o artigo de Cantor, também o matemático alemão Richard Dedekind publicou uma análise do contínuo baseado nos conjuntos infinitos. Em seu artigo, Dedekind expunha a idéia que, logo depois, Cantor deu forma mais rigorosa: “a reta é infinitamente mais rica em pontos individuais do que o domínio dos números racionais como pontos individuais”.

CAPÍTULO 2

BOLZANO E OS PARADOXOS DO INFINITO

Neste capítulo apresentamos a Introdução à obra de Bernard Bolzano "Os paradoxos do Infinito" constante na versão francesa escrita por Hourya Sinaceur. Nessa introdução, os autores apresentam de forma sintética as principais idéias dos "Paradoxos" obra na qual, Bolzano, o grande matemático do século XIX, um dos precursores do estudo matemático do infinito, desenvolve sua teoria a respeito. Nela é enfatizada a complexidade desse conceito para a matemática, como conseqüência da dificuldade para a mente humana.

Antes de apresentar a Introdução, descrevemos a organização do livro, tradução do alemão para o francês dos "Paradoxos" e esclarecemos algumas notações. A tradução do francês para o português da introdução aos "Paradoxos", que segue, foi por nós realizada.

A versão em francês dos "Paradoxos", traduzida por Hourya Sinaceur foi publicada com o auxílio do Centro Nacional das Letras. É uma edição do Seuil, situada na R. Jacob, número 27 em Paris VI^{o}. A edição é de abril de 1993 e compõe uma coleção denominada *Sources du savoir* (Fontes do saber). Na primeira página, são expostas as intenções desta coleção, quais sejam, colocar em circulação, apresentar, explicar e reinterpretar nos moldes atuais os textos fundamentais, as fontes do saber. Na segunda, há um agradecimento do autor da versão aos responsáveis pela coleção, indicando sua colaboração na leitura da introdução, da análise sobre a adequação da tradução de alguns termos em alemão, etc. A introdução inicia na página 11, com esclarecimentos de Sinaceur sobre a forma que utilizaria a indicação bibliográfica do texto. São eles: as obras de Bolzano seriam indicadas por um B, seguido da data da primeira publicação e a referência bibliográfica completa estaria indicada após a introdução.

Todas as aspas e letras em itálico que aparecem no texto são de Sinaceur. Os parágrafos indicados referem-se aos que compõem os “Paradoxos”. Nosso pronunciamento só aparece na apresentação dos cinco subtítulos que compõem a introdução. Não reproduzimos aqui neste trabalho as notas de rodapé indicadas na Introdução por entender que a ausência delas não prejudicaria em nada o conteúdo exposto por Sinaceur. Decidimos manter a indicação dos parágrafos para situar no texto as referências buscadas por Sinaceur na própria obra de Bolzano.

Após a introdução, da página 39 a 47, estão indicadas as referências bibliográficas que aparecem no texto. Na página 50 se inicia o texto dos “Paradoxos”, da edição póstuma devida a FR. PRIHONSKY, realizada em Leipzig, em 1851.

Na página de abertura dos “Paradoxos” há uma citação de Leibniz, que expressa todo o espírito de Bolzano ao defender, com veemência, o que ele próprio denomina de “o verdadeiro infinito”:

> *“Eu sou de tal forma pelo infinito atual, que no lugar de admitir que a natureza o despreza, como se diz vulgarmente, eu tenho para mim que ela o dissemina por toda parte, para melhor marcar a perfeição de seu Autor”.* (Leibniz, Opera *omnia sutdio ludov Dutens*, tome II, parte X, p.243).

Há nas páginas 51 e 52 a apresentação ao texto, escrita por Prihonský. Da página 53 a 56 estão indicados os temas desenvolvidos nos 70 parágrafos dos “Paradoxos”. Passamos a citá-los, pois os julgamos bastante explicativos.

§ 1: Porque o autor se interessa exclusivamente pelos paradoxos do infinito.

§§ 2-10: O conceito do infinito segundo os matemáticos. Discussão.

§ 11: O infinito segundo Hegel e outros filósofos.

§ 12: Outras definições do infinito e crítica.

§ 13: O conceito bolzaniano do infinito; prova de sua “objetualidade” com ajuda dos exemplos imputados ao domínio do não real. O conjunto das verdades e proposições em si é infinito.

§ 14: Respostas a algumas objeções levantadas contra este conceito.

§ 15: O conjunto dos números é infinito.

§ 16: O conjunto das grandezas quaisquer é infinito.

§ 17: O conjunto das partes simples que constituem o espaço e o tempo em geral é infinito; assim como o conjunto das partes simples compreendidas entre dois pontos arbitrariamente próximos do espaço ou do tempo.

§ 18: Não é verdade que toda grandeza que consideramos como a soma de um conjunto infinito de outras grandezas todas finitas seja ela mesma infinita.

§ 19: Há conjuntos infinitos que são maiores ou menores que outros conjuntos infinitos.

§ 20: Uma relação remarcável entre dois conjuntos infinitos: é possível emparelhar termo a termo os elementos desses dois conjuntos de modo que nenhum elemento de um ou do outro reste só, nem se encontre mais que um par por vez.

§ 21: Dois conjuntos infinitos, iguais em relação à pluralidade de suas partes, podem contudo ser desiguais em relação às suas pluralidades próprias.

§§ 22-23: Porque a situação é diferente com os conjuntos finitos e a razão desta diferença faz falta aos conjuntos infinitos.

§ 24: Duas grandezas, somas de dois conjuntos infinitos iguais, segundo a correspondência biunívoca existente entre seus elementos, não são automaticamente iguais, mas somente se os dois conjuntos têm os mesmos princípios de determinação.

§ 25: Um infinito existe também no domínio real.

§ 26: O princípio da determinação universal de todo real não contradiz esta afirmação.

§27:Os matemáticos que falam de intervalos de tempo infinitamente grandes ainda que limitados por duas extremidades ou, mais freqüentemente ainda, infinitamente pequenos, estão enganados, tanto aqueles que falam de distâncias infinitamente grandes ou infinitamente pequenas, quanto os físicos e metafísicos, que supõem ou afirmam a existência no universo de forças infinitamente maiores ou menores que outras forças.

§ 28: Principais paradoxos do infinito no domínio matemático; antes de tudo na teoria geral das grandezas, e em particular, na teoria dos números. Solução do paradoxo de um cálculo do infinito.

§ 29: Existe de fato um cálculo com o infinitamente grande.

§ 30: E da mesma forma um cálculo com o infinitamente pequeno.

§§ 31-32: Falsidade de alguns conceitos permeando o infinitamente grande e infinitamente pequeno, mesmo entre os matemáticos.

§ 33: Precaução em observar os cálculos com o infinito para evitar os erros.

§ 34: Determinação mais precisa do conceito do zero. Zero não deverá jamais intervir como divisor numa equação que não se reduz a uma pura identidade.

§ 35: Contradições que surjem da idéia, defendida cá e lá, que as grandezas infinitamente pequenas se anulam ou desaparecem quando a elas se juntam ou se retiram certas outras grandezas infinitamente pequenas.

§ 36: Alguns matemáticos que assimilam as grandezas infinitamente pequenas a zero, e consideram as grandezas infinitamente grandes como o quociente por zero de uma grandeza finita, não escapam dessas contradições.

§ 37: Como se deve construir o método de cálculo com o infinito, de modo que seja livre de toda contradição.

§ 38: Paradoxos do infinito na teoria aplicada das grandezas, a saber, na teoria do tempo e do espaço.

O conceito de um contínuo ou de uma superfície contínua parece já contraditório. Como dissipar esta aparência.

§ 39: Paradoxos no conceito do tempo.

§ 40: Paradoxos no conceito do espaço.

§ 41: Como a maior parte dos paradoxos da teoria do espaço encontra uma explicação no conceito de espaço estabelecido pelo autor.

§§ 42-43: Como uma concepção incorreta da teoria das grandezas infinitas tem produzido representações incorretas entre certos matemáticos.

§ 44: Cálculo por J. Schulz da grandeza do espaço infinito e localização precisa do erro neste cálculo.

§ 45: A teoria do infinitamente pequeno dá igualmente lugar a várias afirmações absurdas.

§ 46: O que é preciso pensar da proposição de Galileu segundo a qual a circunferência do círculo é tão grande quanto o centro do círculo.

§ 47: Exame do teorema segundo o qual a ciclóide ordinária tem uma curvatura infinitamente grande no ponto onde ela encontra sua linha de base.

§ 48: Explicação do fato que certas superfícies espaciais se estendam em um espaço infinito resultando numa grandeza finita; que outras, ao contrário, encerradas num espaço finito, têm uma grandeza infinita; que outras, enfim, conservam uma grandeza finita, mesmo que descrevam uma infinidade de circunvoluções em torno de um ponto.

§ 49: Algumas outras relações paradoxais nas superfícies espaciais que têm uma grandeza infinita.

§ 50: Paradoxos do infinito no domínio físico e metafísico. As verdades necessárias para julgar corretamente esses paradoxos.

§ 51: Quais preconceitos são necessários descartar para julgar corretamente os paradoxos próprios a este domínio.

§ 52: É um preconceito escolar de suposição proibida a hipótese de uma ação imediata de uma substância sobre uma outra.

§ 53: Da mesma forma, é um preconceito crer que uma ação imediata à distância não seja possível.

§ 54: É preciso anular categoricamente a existência de uma interpenetração das substâncias.

§ 55: O preconceito que consiste em inferir a absoluta não espacialidade dos seres espirituais, pelo fato que eles não podem ocupar sequer o lugar de um ponto.

As únicas diferenças entre as substâncias criadas são diferenças de grau.

§ 56: O grande paradoxo da relação entre substâncias espirituais e substâncias materiais é automaticamente resolvido quando se adota este ponto de vista.

§ 57: É um erro se representar o universo constituído somente de forças, sem substâncias.

§ 58: A criação divina não comporta nem um grau mínimo nem um grau máximo de existência.

§ 59: Que o espaço infinito seja continuamente preenchido de substâncias é foro compatível com a hipótese de uma densidade variável segundo os corpos e é inútil admitir a interpenetração das substâncias.

§ 60: Toda substância está em interação recíproca contínua com cada outra substância do universo.

§ 61: Existem substâncias dominantes, mas nenhuma dentre elas possui forças infinitamente superiores àquelas das substâncias dominadas.

§ 62: Sobre a questão do saber se uma coleção qualquer de substâncias comporta necessariamente uma substância dominante.

§ 63: Para além das substâncias dominantes, existe uma matéria no universo: o éter; esse não tem substâncias dominantes, preenche todo o resto do espaço universal e constitui um ligação entre todos os corpos. Fenômeno de atração e de repulsão das substâncias. Representação que tem o autor.

Explicação do fato que duas substâncias de forças diferentes, quer dizer cujas forças atrativas são desiguais, tem, no entanto, pesos absolutamente iguais; ou de outra forma, explicação do fato que os pesos das substâncias são proporcionais às suas massas.

§ 64: Modo de manifestação e efeitos da dominação de certas substâncias ou átomos sobre outras.

§ 65: Nenhuma substância dominante sofre uma mudança tal que a libere de todas as partes presentes em sua vizinhança imediata.

§ 66: Onde finda um corpo e começa um outro, ou questão da fronteira dos corpos.

§ 67: As condições para que dois corpos estejam em contato imediato entre si.

§ 68: Os diferentes modos possíveis do movimento no universo.

§ 69: Se um átomo do universo descreve em um momento qualquer uma linha reta ou uma curva perfeita.

Se a concepção do autor de um universo infinito dá uma idéia de um deslocamento do grande Todo numa direção dada qualquer ou de uma rotação deste Todo entorno de um eixo ou de um centro do mundo.

§ 70: Dois paradoxos tornados célebres por Euler.

A Introdução à versão francesa escrita por Hourya Sinaceur

Uma citação de Hilbert abre o texto e anuncia a importância e a necessidade do infinito ser elucidado:

> *"Mais que alguma outra questão, aquela sobre o infinito tem, desde sempre, atormentado a sensibilidade dos homens; mais que alguma outra idéia, aquela do infinito tem fecundado suas inteligências; mais que algum outro conceito, aquele de infinito requer ser elucidado"*. (Hilbert,1926, p. 46)

De Aristóteles a Leibniz, o infinito: nada além do que em potencial ou em ficção.

Desde suas origens, a matemática se confronta com o infinito como um problema crucial. A crise dos irracionais, os paradoxos de Zenão, o método de exaustão de Eudóxio, o axioma de Arquimedes testemunham isso. Os gregos se depararam com a dificuldade de não poderem exprimir racionalmente (por meio da razão entre dois números inteiros positivos) a medida do comprimento de uma linha contínua num sistema discreto de números. Eles perceberam a armadilha da "composição" do contínuo e de sua "divisibilidade ao infinito"; descobriram a possibilidade de medir segmentos de curva, aproximando-os infinitamente pelo comprimento de segmentos de reta (quadratura da parábola); souberam, assim, como a idéia do infinito se apresentava na geometria e na aritmética, ou na relação de uma com a outra. Apesar de ter sido Arquimedes quem tenha pensado no infinito como geometricamente demonstrável e fisicamente realizável "nos grãos de areia esparramada por toda a terra", é a análise de Aristóteles que prevaleceu. Essa análise negava toda existência física ao infinito, mas reconhecia que ele tinha uma necessidade matemática: considerar grandezas maiores (ou menores) que qualquer grandeza dada. Recorre esse fato ao infinito potencial, que não implica considerar totalidades infinitas acabadas ou ,*atualmente,* dadas.

No que resta, mesmo Arquimedes, em seu Tratado do Método, em que há a presença de “elementos infinitesimais”, não se utilizou no método de exaustão um modo de limitar suas operações ao finito para efetuar a quadratura da parábola?

Os gregos enfrentavam o infinito considerando-o como um obstáculo que necessitavam contornar com êxito. A necessidade de constituir *positivamente* um conceito matemático do infinito ocorre com a análise galileana do movimento e, sobretudo, com a invenção do Cálculo Infinitesimal por Leibniz e Newton. Esse novo cálculo, que introduz “elementos infinitesimais” com uma notação específica, o *dx* leibniziano que nós conservamos, desencadeia incessantes discussões entre os matemáticos, físicos e filósofos. A “querela” se portava menos sobre o Cálculo Infinitesimal, cuja eficácia se comprova em múltiplos trabalhos, que sobre sua justificativa. Não era a *utilização* de quantidades auxiliares não finitas nos cálculos com resultados expressos em quantidades finitas, mas o estatuto ontológico – metafísico – dessas entidades que causava problema. Na perspectiva familiar da época, em que número e quantidades tinham que ter um referente real (coleções finitas de objetos para os números inteiros, por exemplo, linhas, superfícies e volumes geométricos para as grandezas contínuas), as quantidades infinitamente pequenas ou infinitamente grandes pareciam evidentemente caiadas de “irrealidade”. Daí a escapatória imaginada por Leibniz de os apresentar como “ficções” instrumentos de cálculo sem realidade ontológica, mas “bem fundamentadas”, quer dizer, não introduzindo nenhuma irregularidade nos cálculos, uma vez que esses se restringiam às quantidades “ordinárias”. Noções ideais, que abreviavam o raciocínio, semelhantes ao que chamamos por raízes imaginárias na “análise comum”. Restava somente enunciar e aplicar regras fixas de cálculo para essas ficções: desprezar um infinitamente pequeno adicionado ou subtraído a uma quantidade finita, desprezar um infinitamente pequeno de ordem superior adicionado ou subtraído de um infinitamente pequeno de ordem inferior (por exemplo: $d^2x \text{ ou } \mathrm{d}^3x \text{ com relação a dx}$), desprezar um infinitamente grande de ordem inferior relativamente a um de ordem superior, etc. No entanto, a essas ficções correspondiam valores não fixos mas “fluentes”, “tendendo a”, 0 ou ∞. Isto dava lugar a uma dificuldade de outro tipo, relativa não mais ao estatuto de realidade ou de ficção dessas entidades, mas à modalidade atrelada a esse estatuto. A distinção aristotélica entre infinito em potência e em ação permanente também pertinente tanto às ficções quanto às entidades reais. Os infinitesimais são noções, às vezes, ideais, visto que sem referentes na realidade sensível e potenciais, à medida que representem processos de crescimento ou decrescimento, tendendo a um limite jamais alcançado. Bolzano vai tentar reverter, com muita convicção e mais ou menos de bom grado, esses dois artigos da doutrina do infinito. Nos “Paradoxos”, defende as seguintes idéias: 1) o infinito é um conceito também “objetual”, isto é, tão pouco vazio ou contraditório quanto àqueles de número inteiro, fração ou grandeza irracional, donde, pela primeira vez de maneira tão límpida, um mesmo estatuto *lógico* para o finito e para o infinito; 2) o infinito existe *matematicamente* no modelo “atual” e não somente “potencial” (exemplo geométrico simples, uma reta infinita), que decorre um mesmo estatuto *lógico* para o finito e para o infinito; 3) esta atualidade se verifica tão bem nos exemplos de coisas não reais, como o espaço e o tempo, como nos domínios dos seres, Deus por certo, mas também às criaturas: “mesmo no domínio do real, nós encontramos por toda parte o infinito” (§ 25) – e a identidade de estatuto *ontológico* do finito e do infinito.

Bolzano, o defensor do infinito

Nascido em Praga em 5 de outubro de 1781, Bernard Bolzano é, como seu mestre Leibniz, filósofo, teólogo, matemático, lógico e físico. Deve sua formação tanto aos professores da Universidade de Praga, onde entra em 1797, quanto às suas leituras pessoais. E, quanto à filosofia, estuda Gottfried Wilhelm Leibniz, de quem é filosoficamente próximo, e Emmanuel Kant, do qual se opõe constantemente. Em matemática, seus estudos vão desde *Os Elementos* de Euclides (sobretudo o 5º livro, consagrado à teoria das proporções) aos tratados de Abraham Kastner, às obras de Leonhard Euler e às memórias de Joseph-Louis Lagrange. É particularmente impressionado pelas *Anfagsgrunde de Mathemtik* de Kastner, porque o autor tem o cuidado de demonstrar proposições geralmente tomadas como evidentes. Conta, em sua Autobiografia, que abrindo ao acaso o manual de Kastner, deparou-se com uma página com linhas indicadas por asteriscos que despertaram sua curiosidade para o estudo da matemática, pensando encontrar aquilo que perseguia, sem êxito, na filosofia, desde há muito tempo. Kastner demonstra aí a base de um saber comum onde todo mundo é concorde, sem se deter.

Em abril de 1805, obtém a cadeira de Filosofia da Religião na Universidade de Praga, e é durante este primeiro período que escreve os cinco livros de matemática (B 1804; B 1810; B 1816; B 1817a; B 1817b) publicados enquanto vivo. A partir de 1815, é membro ativo da Sociedade das Ciências de Boemia, na qual os *Berichte* und *Abhandlungen* contém 34 conferências e 7 memórias publicadas.

Afastado de sua cadeira em 24 de dezembro de 1819 por “não ortodoxia” religiosa e política, passa os últimos vinte oito anos de sua vida numa solidão ativa, preenchendo milhares de páginas com suas reflexões sobre assuntos que vão da lógica à sociologia, passando pela matemática, física, filosofia, religião, etc.

Escreveu durante essa “aposentadoria” forçada, os quatro volumes da *Wissenschaftslshre* (B 1837), que contêm algumas idéias fundamentais da lógica moderna. Realiza também, a partir de 1830, a redação de um vasto tratado sobre o conjunto das matemáticas, destinado tanto a elucidar os fundamentos como em expor os seus diferentes ramos: aritmética, álgebra, geometria, teoria das funções, etc. Morre em 18 de dezembro de 1848, antes de tê-lo terminado, mas não sem ter tentado publicar algumas de suas partes, notadamente aquelas relativas à geometria (B 1843a). "Os Paradoxos do Infinito" são a última testemunha desse esforço, graças a F. Prinhonsky que localiza seus manuscritos na Biblioteca Nacional de Viena em 1851 e edita-os. Os demais escritos teológico-filosófico-físicos somente foram descobertos nos Arquivos do Museu de Literatura Tcheca, em Praga, a partir de 1920, depois que Jasek identificou o que seria publicado sob o título Functionenlehre, que continha o famoso exemplo de uma função contínua em todos os pontos e não derivável em nenhum deles e que K. Rychlik tivesse empresariado a dupla edição germano-tcheca das obras de Bolzano (B 930-1948), chamando a atenção sobre os trabalhos aritméticos.

Após 1969, a publicação da obra integral de Bolzano é assumida por Jan Berg, Friedrich Kambartel, Jaromír Louzil, Bob Van Rootselaar e Eduard Winter na *Gesamtausgabe* [B 1969]. Há de se considerar que a coerência interna dos "Paradoxos" é mal conduzida sob certos pontos. É evidente que o texto não se encontrava num estado de perfeição irretocável, principalmente pela notação, que não obedecia princípios fixos (por exemplo: no § 37, escreve-se $3y^2.\Delta y$ com um ponto indicando a multiplicação, enquanto, em $3y\Delta y^2$ não). Aliás, sabe-se que Prihonsky, seu editor, não tinha conhecimentos matemáticos suficientes e reconhecera em seu prefácio ter tido dificuldades em decifrar a escrita de Bolzano. Porém, a experiência aponta para a necessidade de se colocar em suspeição a autenticidade do texto ou desprezar passagens que não combinam com o restante da obra de Bolzano. É conhecido o problema da nota do § 37, julgada, a princípio, apócrifa, em razão de sua suposta contradição com o famoso exemplo da *Functionenlehre* [B 1930], de uma função contínua não derivável em cada ponto de seu intervalo de definição.Van Rootselaar chamou a atenção, em sua edição dos "Paradoxos", sobre o fato do raciocínio de Bolzano, nesta nota, só se aplicar às funções determináveis, isto é, monótonas por partes, o que torna a nota, incriminada, perfeitamente aceitável.

Somente os "Paradoxos" não dão uma justa idéia da genialidade matemática de Bolzano. É necessário ao menos citar, *Der binomische Lerhrsatz* [B 1816], *Die drey Probleme* [B 1817b], *Rein analystischer Beweis* [B 1817a], publicados em vida e as duas obras publicadas por K. Rychlík: *Functionenlehre* [B 1930] e *Zahlentheorie* [B 1931]. Mas, é sem dúvida, os "Paradoxos do Infinito" o livro o mais conhecido do grande público, por causa da fascinação perene pelo tema e dos elementos precursores da teoria dos conjuntos que contém. Georg Cantor, justamente, o tinha por "uma bela e rica obra" e seu autor "o mais decidido defensor do infinito propriamente dito".

Como bem exprimiu Hilbert no início de seu artigo sobre o infinito, a análise clássica está parcialmente ligada à teoria dos conjuntos de Cantor, a qual consagra o uso matemático do infinitamente grande "atual". A definição rigorosa dos números reais que os fundamentam, exige de fato a consideração do objeto infinitamente grande "atual" como o conjunto de todos os números racionais ou as classes das seqüências de Cauchy. Não é, portanto, um acaso se Bolzano (antes de Cantor e de outros) trabalhasse, às vezes, numa teoria dos números reais – não esqueçamos que ele se interessava particularmente, em Euclides, pela teoria das proporções – e pela matematização do conceito de conjunto infinito.

O "verdadeiro infinito"

Nos "Paradoxos" de Bolzano encontra-se uma doutrina do infinito cujos aspectos matemáticos, físicos e metafísicos se complementam. Essa "harmonia", mais perfeita que em Leibniz no qual há a disjunção entre o infinito na doutrina matemática e na doutrina da natureza, ainda é preservada na composição da obra, que procede de uma hierarquia, pois os aspectos matemáticos comandam os dois outros: elucidar o conceito matemático de infinito do infinito permite resolver três importantes questões físicas ou metafísicas e nos prepara, a saber "o que é o infinito em geral". Da matemática abstrata, que é uma *Zahlenlehre*, à metafísica, os "dois domínios essenciais de nosso conhecimento *a priori* (B 1810 § 9, p. 18), há um caminho contínuo, passando pela geometria (que é uma matemática aplicada) e pela física.

É o *mesmo conceito* de infinito que se realiza numa seqüência infinita de números, num segmento de reta, num intervalo de tempo, nos diferentes graus do ser ou da ação das forças. A matemática abstrata servirá, portanto, de propedêutica ao exercício de um pensamento direto nos outros domínios. A metafísica do infinito será estabelecida sob um prisma matemático, o que não impede, sem dúvida, a análise matemática de ser orientada por motivações metafísicas. Daí a tripartição dos "Paradoxos": 1) Após a introdução do conceito de coleção, de conjunto e de pluralidade, Bolzano analisa os paradoxos dos conjuntos infinitos e crê ter uma prova da existência de um conjunto infinito; esquematizando também um cálculo do infinitamente grande no interior do cálculo infinitesimal. 2) Estão examinados nesta obra os paradoxos da geometria a qual, não nos esqueçamos, é uma matemática aplicada, que objetivam uma definição do contínuo. 3) Das 185 páginas do "Paradoxos", 10 são reservadas para a exposição da concepção de Bolzano sobre a matéria, dos corpos físicos e de suas interações mútuas.

Não se encontra na primeira parte dos "Paradoxos" nenhum dos teoremas que nos ensine a teoria dos conjuntos. Mas, Bolzano tem o incomparável mérito de nele introduzir o conceito de conjunto infinito e de dar uma *legitimidade matemática* ao infinito atual, o "verdadeiro infinito". O que impedia os matemáticos de abordarem de frente o verdadeiro infinito? As dificuldades nas quais se mesclavam as justificativas do cálculo dos infinitamente pequenos, essas quantidades “que se esvaem”, “fluentes” entre “nada” e “qualquer coisa” que Bolzano evoca em três parágrafos dos “Paradoxos”. Ele sabia, desde longo tempo, no que concerne o infinitamente pequeno, que um perfeito rigor pode ser ganho por procedimentos analíticos. Com Cauchy e Weirstrass, Bolzano é, de fato, o pai da “aritmetização” da Análise, isto é, do método que consiste em repudiar as ilustrações ou descrições geométricas da continuidade das funções em prol de uma definição na qual só consideram os números e as operações racionais, assim como as inequações algébricas. Este feito o faz, portanto, um dos matemáticos que contribuíram em eliminar os infinitamente pequenos da linguagem da Análise. Esta “extraordinária sinfonia do infinito” é, na realidade, muda sobre os infinitesimais.

Não ficaremos, portanto, admirados em ver Bolzano saudar aqui, a notação inventada por Lagrange para as funções derivadas e insistir sobre sua vantagem: supor que as funções têm derivadas torna inútil supor que “as grandezas intervenientes no cálculo possam vir a ser *infinitamente pequenas*”. Mas, o que se pode inferir desse sucesso numa obra de defesa do infinito? Simplesmente que o infinito não é fonte de contradição em matemática, pois os paradoxos das quantidades inconscientes se dissipam em favor de conceito e de notação adequada. Não se pode generalizar e mostrar por uma elucidação do próprio conceito, de uma outra forma abstrata, que englobe todos os casos (tanto aqueles do infinitamente grande como aqueles do infinitamente pequeno) e que percorra todas as ciências, da matemática à metafísica, de forma que a contradição dos paradoxos matemáticos do infinito seja apenas aparente. Isto possibilita o direcionamento de uma doutrina *positiva* do infinito, isto e´, uma doutrina na qual se olhe o infinito “de frente” e não somente como o inverso do finito.

Admitir apenas o infinito potencial é determinar o infinito pelo finito, como aquele que não se alcança ou não se esgota jamais. Admitir apenas o infinito potencial é mesmo, de fato, não sair do finito. Isto é manifesto para o infinitamente grande. Como Bolzano escreveu claramente, “uma grandeza suscetível de ser sempre tão grande quanto se queira e de tornar-se maior que toda grandeza (finita) dada, pode apesar de tudo permanecer constantemente finita, como é o caso, em particular, de toda grandeza numérica 1, 2, 3, 4,....” (§ 11). É preciso considerar grandezas verdadeiramente infinitas, quer dizer, “maior que um número qualquer de unidades” ou “tão pequena que todo múltiplo delas mesmas fica inferior à unidade”. Notar que, do ponto de vista lógico, trata-se de uma simples inversão de quantificadores. Mas, esta inversão aceita, acarreta a rejeição do axioma de Arquimedes que propõe que, para duas grandezas desiguais existe sempre um múltiplo da menor superior à maior. Bolzano não entra nessas conseqüências e não menciona, de forma alguma, o axioma de Arquimedes. Ele vai, antes de tudo, na direção da idéia, de fazer admitir grandezas infinitamente grandes ou infinitamente pequenas. Esta idéia pressupõe que considere conjuntos infinitos como totalidades acabadas e não mais como sucessões não finitas. Nada se opõe logicamente a isso, tão logo que se admita que um conjunto infinito possa ser definido, não pela enumeração de todos os seus elementos, mas pelo dado de um “conceito”, isto é, o dado de uma ou várias propriedades características. (Esta reivindicação viria a ser uma das “leitmotive” da futura matemática abstrata: Dedekind, Cantor, Hilbert, etc.). Do ponto de vista conceitual ou abstrato, nada impede considerar o verdadeiro infinito, o infinito atual.

Geralmente, Bolzano não se contenta em argumentar a favor dos conjuntos infinitos atuais, chegando a dar uma determinação *intrínseca*: todo conjunto infinito pode ser posto em correspondência biunívoca com uma de suas partes próprias (ou um conjunto bijetivamente equivalente a ele). É a descoberta fundamental dos “Paradoxos”. Se Bolzano não tira daí todo o partido possível, nem por uma definição de um conjunto infinito como o faria Dedekind, nem em sua tentativa do cálculo infinito, a qual estaria bem longe de prefigurar a numeração transfinita de Cantor, ao menos, lhe coube o resultado do mérito de sua criação epistemológica. Até aí, só os teólogos tinham um conceito positivo do infinito, quer dizer, acordavam ao infinito uma anterioridade de direito em relação ao finito. Doravante, os matemáticos poderiam fazer o mesmo, sem crerem (como D'Alembert) na invasão das matemáticas pela metafísica, nem se protegeriam (como Leibniz ou Gauss) sob a idéia de um simbolismo representando objetos fictícios. Bolzano não pretende menos, aliás, quer provar a existência de um conjunto infinito. Qualquer que seja a falha – reconhecida longo tempo após e não por um espírito como aquele de Dedekind – desta prova tem o mérito de ser de natureza lógico-matemática e não teológica: a objetividade do conceito de infinito é independente da existência de Deus, simples confirmação para ela. E o próprio Deus somente é infinito porque há "pontos de vista sob os quais nós percebemos n'Ele uma pluralidade infinita, e que é justamente e somente sob um desses pontos de vista, que nós Lhe atribuímos a infinitude" (§ 11).

O infinito quantitativo

Influenciado pela combinatória de Leibniz e sua análise da relação de semelhança, Bolzano concebe de início a matemática como "ciência geral das formas" mais que. "ciência das grandezas". "Os Paradoxos", ao contrário, definem a matemática como ciência das grandezas e apresentam a atividade dos matemáticos como devotada quase exclusivamente à determinação numérica das grandezas em função de uma unidade homogênea a elas, quer dizer, devotada ao cálculo e à medida. Esta reviravolta não era nova à época da redação dos "Paradoxos", pois Bolzano empreende em torno de 1830 sua grande obra matemática sob o título *Grossenlehre* e começa por explicar sua definição. Aqui, ela é concorde com a vontade de subtrair o conceito de infinito às especulações dos filósofos, ao menos daqueles que, como Hegel, vêem aí uma determinação puramente qualitativa, ou daqueles que, como os céticos, buscam fazer ver por toda parte contradições. É necessário adotar um ponto de vista *quantitativo* para mostrar à positividade do infinito, seu caráter *diferenciado* e a *precisão* com a qual pode-se apreender esse caráter.

Não somente o infinito existe quantitativamente, mas ainda há vários infinitos diferentes uns dos outros, e mesmo, uma infinitude de infinitos. Mais que isso, é uma única coisa afirmar a *existência* do infinito e sua multiplicidade. Leibniz, que tanto fez pelo progresso do cálculo infinitesimal como dirigiu diferentes ordens de infinitamente pequenos, supunha dever manter a unicidade no domínio do infinitamente grande que gerava um absurdo: se houvesse um número infinitamente grande, ele seria *o maior número*; conclusão: não há número infinito. Bolzano, então, descobre que a condição de existência do infinito está na “multiplicidade”, isto é, “inerente ao seu conceito”. Desde que vós estejais de acordo, argumenta Bolzano (§ 29), com a existência das pluralidades infinitas, vós sois obrigados a reconhecer também a existência de pluralidades infinitas distintas por suas grandezas. São necessários diversos infinitos para estabelecer a existência positiva do infinito simplesmente; o infinito único leva a contradições, mas múltiplos infinitos nos fazem escapar do paradoxo do maior infinito. Ora, de fato, nada é mais simples que exibir conjuntos infinitos distintos. Como no finito, o número 6 não se confunde com o número 3, da mesma forma, se dois pontos *a* e *b* estão situados sobre uma semi-reta (infinita) orientada *ox*, de sorte que $ao < ob$, então não há razão para confundir as semi-retas (infinitas) *ax* e *bx*: *ax* ultrapassa *bx* pelo segmento *ab*. Mais geralmente, “todo conjunto infinito, e não somente aquele dos pontos de uma linha, pode ser decomposto em partes que contém, nelas mesmas, conjuntos infinitos que podem ter uma infinidade de tais partes” (§ 38). Bolzano estabelece uma certa simetria entre o finito e o infinito, mas uma certa simetria somente, pois todo o problema para os infinitos está em encontrar um meio de os comparar, isto é, de definir para eles uma relação de igualdade e uma relação de ordem. Qualquer que seja a dificuldade desse problema, colocá-lo implica a adoção de um ponto de vista quantitativo. O infinito do matemático é claramente um infinito quantitativo, que tem forçosamente a ver com as grandezas e as pluralidades. Mas, os conceitos matemáticos são normativos para outras disciplinas. É, portanto, *em geral,* que o infinito é quantitativo: “tudo o que nós temos por infinito não é senão porque nós percebemos nele um caráter suscetível de ser relacionado a uma pluralidade infinita” (§ 10). Em particular, o infinito do filósofo é quantitativo. “O que eu não admito, escreveu Bolzano, é simplesmente que o filósofo conheça um objeto ao qual possa atribuir o predicado de infinitude sem ter antes mostrado que este objeto é, por um de seus aspectos, uma grandeza ou, ao menos, uma pluralidade infinita” (§ 11). Da mesma forma o infinito do teólogo: mesmo a Deus nós só Lhe atribuímos a infinitude porque Ele tem capacidades em que cada uma delas tem uma grandeza infinita.

Assim, finito e infinito são dois caracteres dos conjuntos, das pluralidades e das grandezas. Eu denomino *conjunto* uma coleção a qual nós imputamos um conceito tal que, o arranjo das partes seja indiferente (no qual nada de essencial possa ser alterado para nós, desde que só o arranjo seja modificado); e eu denomino *pluralidade* A um conjunto no qual todas as partes são consideradas como *unidades* de uma certa espécie A, isto é, como objetos subordinados ao conceito A. E o que é uma grandeza? “Uma totalidade, na medida em que é constituída de várias partes iguais ou, mais geralmente, uma totalidade que possa ser determinada pelos números” (B 1810 p. 13). Conforme a definição euclidiana, os números são pluralidade de unidades, quer dizer, múltiplos de 1. Bolzano considera também as grandezas como elementos de tipos de objetos, cada tipo sendo totalmente ordenado pela relação de inclusão: duas entidades do mesmo tipo são sempre comparáveis, pode-se dizer se elas são iguais e, senão, qual é maior que a outra. Esta segunda definição, mais tardia, parece ser mais ampla que a primeira. Ela tem a vantagem de deixar lugar a uma distinção entre número e grandeza: uma grandeza não é forçosamente determinada por um número nem, *a fortiori*, por um número inteiro, se é que Bolzano distingue – o que ele nunca chega a dizer – entre número e número inteiro. Na perspectiva dos "Paradoxos", a distinção entre número e grandeza, ou a possibilidade deixada aberta de que uma grandeza seja determinada, não forçosamente por um número, é muito importante por no mínimo duas razões:

1. Ela permite definir as grandezas infinitamente grandes como aquelas que são maiores que todo número qualquer de unidades, isto é, aquelas as quais todo conjunto finito de unidades não constitui senão uma parte, e as grandezas infinitamente pequenas como aquelas as quais todo múltiplo fica inferior à unidade. Após essa definição, as grandezas infinitas são aquelas as quais não se pode nomear números inteiros *n* (nem fração $\frac{1}{n}$), por maior que seja *n*. Os números inteiros são grandezas; são grandezas finitas, mais precisamente pluralidades finitas. Mas há mais grandezas que números. De fato, as grandezas compreendem as frações (grandezas racionais), os irracionais (algébricos ou não) denotados pelas expressões $\sqrt{2}, \pi, e, etc.$ mais as infinitamente grandes e as infinitamente pequenas. Observemos bem que os irracionais como $\sqrt{2}\ ou\ \pi$ não são grandezas infinitas, mesmo sendo suas expressões compostas de um *conjunto* com infinitas partes. Voltaremos posteriormente à compreensão desta dualidade que faz certos objetos matemáticos finitos e infinitos segundo o ponto de vista sob o qual eles são considerados. Mas, o que é necessário ressaltar bem marcar aqui é que as grandezas compreendem: 1) os números inteiros ou pluralidades finitas; 2) as grandezas finitas que não são números: frações e grandezas irracionais; 3) as grandezas infinitas, que são, portanto aquelas as quais não se podem nomear nem um número inteiro, nem uma fração nem uma expressão irracional. Temos, assim, duas definições para as grandezas infinitas, estas e aquelas

que demos primeiro. É que a idéia de grandeza infinita pode ser apreendida sob um duplo ponto de vista de conjunto: uma grandeza infinita é um todo no qual todo conjunto finito é uma parte; e aritmética, uma grandeza infinita que não se exprime por nenhuma expressão inteira, racional ou irracional.

Há, no entanto, uma dualidade de um outro tipo na idéia de grandeza. Mesmo a idéia "matemática" de número comporta um aspecto concreto e um aspecto abstrato que se duplicam em número-objeto: o 1, o 2, o 3, etc. da aritmética elementar, e em um conceito, o de número inteiro. Mesmo a idéia de grandeza consiste numa parte das grandezas-objeto e, de outra, uma propriedade ou um conceito. Mesmo que as grandezas matemáticas concretas se repartam em vários gêneros, a extensão do conceito de grandeza constitui um conjunto, o conjunto das grandezas, mais precisamente o conjunto das grandezas abstratas. E, por isso, há mais grandezas que números, o conjunto das grandezas é maior que o conjunto dos números. Diríamos, em linguagem atual, que além dos números inteiros, esse conjunto compreende o que chamamos de números racionais, números irracionais e, enfim, os infinitamente grandes e os infinitamente pequenos. Em outros termos, o conjunto de números constitui uma extensão do conjunto dos *números* reais (que compreende os inteiros, as frações e os irracionais). com o acréscimo dos infinitamente grandes e os infinitamente pequenos.

2. A distinção entre número e grandeza, que permite conceber grandezas infinitas, e evitar o paradoxo do maior número de todos os números, é também aquele que impede Bolzano de conceber "números infinitos". Se o conceito de número pudesse ser ampliado de maneira a compreender tão bem os números finitos (os elementos de N), como os números não finitos (não pertencentes a N), agora poder-se-ia como o faria Georg Cantor, atribuir ao conjunto dos elementos de N o primeiro cardinal transfinito, denotado por $\aleph_0$. Invocamos esse resultado posterior aos "Paradoxos" para mostrar que

> Bolzano *não concebe* a extensão do conceito de número ao domínio do infinito: aquilo que “não deve chamar número” *não é* um número. Não mais que em Leibniz não há para ele números infinitos – mesmo ao plural –, mas somente pluralidades e grandezas infinitas que, por definição, não são determinadas pelos números. A idéia de número (cardinal) infinito é contraditória, mas a de grandeza não é. Há grandezas infinitas e essas dão lugar ao conceito de grandeza infinita, portanto, a um conceito de grandeza mais geral que o de número (os números são grandezas, mas a recíproca é falsa). Se a *Reine Zahlenlehre* [B 1976] fala da “expressão de número infinito” e de “conceito de número infinito” como do que corresponde, por exemplo, à soma da série dos números naturais: 1+2+3+..., nos “Paradoxos”, é acusado de modo radical a disjunção entre número e grandeza, não se autorizando, nem mesmo indiretamente, expressões compostas como *Zahlenausdruck* ou *Zahlenbegriff*, a associação entre os termos “número” e “infinito”.

Na falta de estabelecer às grandezas infinitas um número, ao menos, pode-se eventualmente lhes assegurar um valor. Bolzano diz agora que elas são determináveis ou *mensuráveis*. A existência de grandezas *infinitas mensuráveis* prova bem que não é absolutamente necessário assimilar, como se fazia numa concepção negativa, o infinito ao indeterminável. O exemplo mais corrente para ele de tais grandezas infinitas é aquela de uma série convergente, por exemplo, a série geométrica de razão $e < 1$. Este exemplo permite perceber a necessidade de dissociar dois pontos de vista: aquele no qual se considera o *conjunto infinito* de termos da série e aquele em que se tenta calcular a *soma* desses termos, que, no caso de uma série convergente, é finito. Em resumo, ao lado do ponto de vista aritmético ordinário do cálculo das séries, há o ponto de vista de uma *aritmética dos conjuntos* no qual Bolzano introduz o conceito.

Enquanto tal, o conjunto infinito dos termos de uma série não é numerável e não pode ser denotado por um *número infinito*. Pode somente ser "figurado" por um *símbolo literal*: assim N^0 "figura" o conjunto de todos os números naturais, e por N^0 é necessário entender uma soma *imprópria*, pois *infinita*, a "soma infinita" de termos todos iguais à unidade. Dessa forma, Bolzano escreve explicitamente:

$$N^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0 + (n+1)^0 + ... = 1+1+1+ ...$$

É bem uma soma particular na qual todos os fatores são iguais à unidade e que *figura* a "pluralidade" associada ao conjunto infinito dos inteiros naturais. Há outros exemplos de "somas infinitas" reconhecidas por Bolzano como somas – e não como pluralidades – apesar do caráter divergente da série que representem. Por exemplo, 1 + 2 + 3 + 4 + ... as quais são, para ele, somas "simbólicas", pois considera, de fato, a seqüência dos fatores assim adicionados, eles próprios, como uma notação e *somente* como uma notação, uma expressão ou uma *representação* de grandeza a qual não é certo, *a priori,* que corresponda verdadeiramente a uma grandeza e não são nada ("nenhum objeto", como diz Bolzano), nem, no caso em que corresponda a uma grandeza que seja *determinável* ou *mensurável*. Em termos modernos, dizemos que somente se a expressão considerada como a série que tem um limite, finito ou infinito, representa uma grandeza. As séries que não têm limite, por exemplo, as alternadas do gênero: 1 – 1 + 1 – 1 + ... não representam nenhuma grandeza, pois são expressões vazias ou "sem objeto". As séries que têm um limite representam, portanto, grandezas. Três casos se apresentam: 1) Essas grandezas podem ser finitas, quer dizer, determinadas *de maneira exata* por números inteiros, fracionários ou irracionais. É o caso da série geométrica de razão e< 1, exemplo de uma "expressão infinita de grandeza" representando uma grandeza finita. 2) As grandezas representadas por expressões infinitas podem também ser mensuráveis, quer dizer, podem ser expressas de *maneira aproximada* por números inteiros, frações ou grandezas irracionais. Por exemplo:

$\frac{1}{1+1+1+1...}$ é uma expressão infinita que representa uma grandeza vizinha do zero, portanto, mensurável. Em resumo, a uma expressão constituída de um conjunto infinito de termos, pode-se corresponder ou não, de maneira exata ou aproximada, uma grandeza finita. E a noção de medida aproximada implica, às vezes, as grandezas finitas e as grandezas infinitas. O exemplo de Bolzano é, vale destaque, aquele de um infinitamente pequeno e os infinitamente pequenos lhe são considerados grandezas comensuráveis e, portanto, torna-se um conjunto mais rico que nosso conjunto dos números reais. 3) Enfim, as grandezas representadas por expressões infinitas podem não ser mensuráveis: é o caso da soma da série dos números naturais "1+1+1+...*in inf*." e, mais geralmente, de todas as somas de séries divergentes. Posteriormente, mencionaremos as diferenças ou as relações finitas entre grandezas infinitas. Assim, Bolzano abandona o problema, de numerar um conjunto de termos "inumerável" e se volta para o cálculo das somas das séries convergentes, que correspondem, em sua linguagem, a grandezas finitas. Isto o faz abandonar o terreno do verdadeiro infinito, infinito atual e deixar de apresentar o conceito de número (cardinal) infinito. Mas, mostra-se-lhe a dupla face de certos objetos matemáticos: uma face finita e uma face infinita. De fato, e de maneira análoga ao que ocorre com as séries convergentes, todo segmento de reta é infinito, do ponto de vista do conjunto de seus pontos; finito, do ponto de vista de seu comprimento; mais geralmente toda expansão espacial dá lugar, por um lado, à consideração do conjunto de seus pontos, e por outro, a uma operação de medida. Geralmente, Bolzano faz a distinção entre as duas ordens de consideração, quando dá o exemplo de uma grandeza infinita ou de uma grandeza infinita "determinável": um segmento de reta, infinita pelo conjunto de seus pontos, não lhe é perfeitamente determinável pelo dado de suas extremidades? Infelizmente a confusão se estabelece desde que se comparem infinitos distintos sobretudo aqueles para os quais exista *um ponto de vista* sob o qual lhes corresponda, de modo exato ou aproximado, uma grandeza finita ou um sistema de grandezas finitas (o par de extremidades de um segmento de reta no plano cartesiano).

Calcular no infinito

1. O caso dos infinitos indetermináveis é fácil de dominar. A célebre série alternada: $1-1+1-1+1-1+\ldots$, oferece o exemplo de uma expressão de grandeza infinita “sem objeto”, não correspondente a nenhuma grandeza. Indeterminável é, portanto, um infinito *em si* indeterminado. Hoje, dizemos que esta série não tem soma, a seqüência σ_n das somas parciais $S_1 = 1$, $S_2 = 1-1$, $S_3 = 1-1+1,\ldots, S_n = 1-1+1+\ldots-1+1,\ldots$ não tem limite, dado que as somas parciais valem tanto 1 (se elas têm índice ímpar), quanto 0 (se elas têm índice par). Bolzano estabelece em sua própria linguagem, a de uma ontologia realista, esse caso de grandeza infinita indeterminável.

2. Mas, suponhamos que desejássemos comparar, como Galileu tinha já tentado fazer, as seqüências infinitas, que correspondem a grandezas infinitamente grandes:

$$S_1 = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$
$$S_2 = 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$$

   S_1 contém evidentemente todos os elementos de S_2 e ainda, uma infinidade de elementos que não pertencem a S_2; o conjunto dos elementos de S_2 é, portanto, um sub-conjunto próprio do conjunto dos elementos de S_1. Ora, cada inteiro natural, tendo um quadrado e reciprocamente cada quadrado sendo o quadrado de um inteiro natural, existe uma bijeção entre o conjunto S_1 sobre S_2. Após ter sido tentado a dizer que há tantos quadrados quantos inteiros naturais em virtude da correspondência um a um, Galileu se deteve na idéia de que as relações de igualdade e de ordem não podiam caber entre conjuntos infinitos; não se podia, portanto, comparar conjuntos infinitos e a correspondência um a um consistiria num paradoxo do infinito.

Bolzano considera a correspondência um a um não como um paradoxo, mas como uma característica dos conjuntos infinitos. Está aí sua grande originalidade em relação a todos os seus precursores. E mais, não hesita em se fundamentar na existência de uma tal correspondência para afirmar que, eles têm o *mesmo conjunto de elementos*. Do ponto de vista do conjunto de seus elementos, esses dois conjuntos representam *o mesmo infinito*, mesmo que o segundo seja uma parte própria do primeiro. Por sua vez, Bolzano admite, contra Euclides, Aristóteles e toda tradição, que há um ponto de vista no qual a parte é igual ao todo.

3. Bolzano nem sempre exalta os paradoxos. O exemplo da bijeção dos inteiros naturais e o conjunto de seus quadrados, donde ele conclui, à primeira vista, a identidade dos conjuntos considerados, constitui um texto dos “Paradoxos”, no § 20, onde aparece de início essa propriedade. Seu argumento, ao contrário, diz que conjuntos em correspondência biunívoca podem ter entre eles “ as mais variadas relações de grandeza”. Por exemplo, o conjunto dos pontos do intervalo $[0,5]$ da reta real é “menor” que o conjunto dos pontos do intervalo $[0,12]$, pois está estritamente contido nele. O autor define, portanto, uma relação de ordem por inclusão estrita, ao invés de construir uma aritmética do infinito sobre essa relação de ordem. A partir disso, preocupa-se com *muitos* infinitos diferentes, pois desde que um conjunto esteja contido estritamente em outro, aquele é “menor” que este. Para que conjuntos infinitos sejam iguais é preciso, no limite, e Bolzano não recua diante desta estreiteza, que sejam idênticos. Contrariamente a isso que admitimos após Cantor, a bijeção entre dois conjuntos infinitos não é suficiente. Bolzano, ao definir o que chama da “igualdade perfeita”, ou seja, aquela que tem lugar em condições

parecidas entre conjuntos finitos, salienta que é preciso que a pluralidade dos termos seja “a mesma” nos dois conjuntos. Isto é enunciado no § 24 como um teorema; mas o desconsidera no § 33, quando diz que o conjunto dos inteiros naturais e o conjunto de seus quadrados são o “mesmo conjunto”. Van Rootselaar (carta à Hourya Sinaceur de 18 de novembro de 1991) pensa que a identidade desses dois conjuntos repousa não sobre a existência de uma bijeção entre eles, mas sobre os mesmos princípios de determinação, de causa. Os termos “namlich”, “derselbe” e “ gleich” são, aliás, utilizados como absolutamente sinônimos no § 22 e como distintos no § 24. É que a *identidade* e *a igualdade* são *intercambiáveis somente* no finito. No infinito, Bolzano põe que a *igualdade perfeita* dos conjuntos não é assegurada, a não ser pela identidade de suas pluralidades. A correspondência um a um pode passar por uma espécie de igualdade, uma tênue igualdade dos pares. Mas, a igualdade perfeita é a igualdade das pluralidades, como no finito. A relação de igualdade definida para os conjuntos infinitos é a mais fina possível, pois se confunde com a relação de identidade. De um certo modo, o infinito matemático não escapa mais do princípio dos indiscerníveis do que as entidades dos mundos físico e metafísico: *cada* conjunto infinito determina uma grandeza infinita, no lugar das categorias e das classes de conjuntos infinitos que nos permitem *seriar* as grandezas infinitas. Temos, portanto, quantidades ilimitadas de infinitos diferentes uns dos outros. Esta situação, simétrica daquela que consistia em admitir um único infinito, nos conduz à mesma dificuldade: não podemos organizar os conjuntos infinitos em categorias, nem estabelecer o cálculo do infinito atual. Acrescentemos que a razão da dificuldade é também a mesma, é o axioma “o todo é maior que as partes”, geralmente respeitada por Bolzano, salvo no § 33, como já havíamos sublinhado.

4. Mas a prática do cálculo das séries e do cálculo diferencial e integral mostra que se pode ter um cálculo do infinito fundamentado na distinção de diferentes

ordens de grandeza no infinitamente pequeno e no infinitamente grande. Bolzano vai, então, procurar uma solução por esse lado, pois pensa que é preciso ter um cálculo se se deseja verdadeiramente matematizar o infinito. O cálculo dos infinitamente grande se *deduz* pela simples inversão dos procedimentos do cálculo infinitesimal. Esse cálculo, não considera portanto, em uma *contagem* semelhante àqueles que fazemos no finito, "uma contagem da pluralidade infinita nela mesma", mas na determinação da relação de dois infinitos, exatamente como o fazemos no cálculo diferencial e integral. Isso significa que Bolzano não visa uma teoria cardinal dos infinitos, uma teoria de cardinais infinitos – nem, aliás, uma teoria ordinal, pois não distingue número cardinal de número ordinal. Não se pode reprová-lo, apesar de não ter atingido seu objetivo. Em outros termos, não devemos julgar Bolzano do ponto de vista de Cantor. É certo, mas nós voltamos à pratica existente, *que consiste em pegar do infinito só o que se exprime no finito.*

4.1. A relação entre dois infinitos distintos pode ser *finita,* caso em que se pode ser determinado por um número no sentido de Bolzano, quer dizer um número inteiro positivo. Por exemplo, pode-se determinar de *maneira finita a diferença entre duas somas infinitas.Assim, a diferença* $N^0 - N^n = n$ onde

$$N^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0 + (n+1)^0 + ... \text{ e}$$
$$N^n = (n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + ...$$

Bolzano dá ainda outros exemplos de "determinação finita" do infinito: uma reta é perfeitamente determinada por dois de seus pontos (§ 11 e 26). A relação das grandezas de dois intervalos, no espaço ou no tempo, é "puramente finito, perfeitamente determinável por puros conceitos" (§ 27 e 43). É evidente que aqui se trata não de uma determinação por números finitos (elementos de N), mas por grandezas finitas, isto é, em outras palavras, números racionais ou reais. Bolzano considera, como vimos antes, os irracionais entre as grandezas finitas, mesmo sendo elas constituídas, como $\sqrt{2}$, de um conjunto infinito de grandezas finitas. Enseja explicitamente a possibilidade que a razão de dois infinitos pudesse ser racional ou irracional. Bolzano fala, portanto, mais freqüentemente, nos "Paradoxos", da determinação finita de um infinito ou da razão finita de dois infinitos quando se pode atribuir a esse ou àquele uma grandeza ou um sistema de grandezas inteiras, racionais ou irracionais. Quando a determinação é finita, é dito também que ela é "perfeita" (§ 35). Mas é possível, como já visto, que ele associe a determinabilidade à mensurabilidade; trata-se agora de determinação por grandezas infinitamente próximas de grandezas finitas.

Não nos faltou ocasião, aliás, de assinalar a dificuldade representada pelos seguintes conjuntos dos pares de conceitos dos "Paradoxos": determinável e mensurável, perfeitamente (ou completamente) determinável e determinável por puros conceitos, finito e perfeitamente determinável por puros conceitos, determinável por puros conceitos, perfeitamente determinável e determinável por uma razão finita. Se em cada par os termos são sinônimos, como deixa supor a redação de Bolzano, e pode-se fazer jogar a transitividade da redação de sinonímia, então é claro que o primeiro par se distingue do conjunto dos outros. De fato, por transitividade obtém-se neste conjunto: perfeitamente determinável = determinável por puros conceitos = determinável pelo finito; enquanto que mensurável = determinável mas de maneira não perfeita (não exata). Dever-se-ia então compreender que mensurável ou determinável, de maneira não perfeita, equivaleria a não determinável por puros conceitos? A questão é colocada em razão das desigualdades abaixo.

4.2. Pode-se perceber, claramente, que a razão de dois infinitos é maior que 1, sem poder determiná-lo precisamente. É o caso das séries, que representam somas infinitas:

$$\sum\nolimits_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$
$$\sum\nolimits_2 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$$

Como se pode majorar cada termo de $\sum_1$. por um termo de $\sum_2$ e que os conjuntos S_1 = , 1, 2, 3, 4, ... e S_2 = $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ tenham o mesmo conjunto de termos? Bolzano conclui (§ 33) que o infinito representado pela soma $\sum_2$ é bem maior que o representado pela soma $\sum_1$., em outros termos, que a razão entre $\sum_2$ e $\sum_1$. é bem maior que 1. Ainda que $\sum_1$. e $\sum_2$ representem, para Bolzano, grandezas não mensuráveis, é fácil reconhecer qual dessas grandezas ultrapassa a outra. Sem admitir a noção de soma de uma série divergente, dizemos que $\sum_2$ diverge mais rápido que $\sum_1$.

4.3. A razão de dois infinitos pode ser infinita. Bolzano dá vários exemplos: aquele das grandezas indicadas pelos símbolos $\left(\overset{0}{N}\right)^2$ e $\left(\overset{0}{N}\right)^3$ (§ 29); aquele das séries $\sum_2$ e $\sum_1$., cuja razão é evidentemente maior que 1, e que Bolzano se esforça em mostrar que é infinita, não chegando a precisar a ordem de grandeza deste infinito – poder-se-ia esperar esta precisão, pois Bolzano repete suficientemente que não há um infinito, mas uma infinidade de infinitos. Um terceiro exemplo é o do segmento que contém um conjunto infinito de conjuntos infinitos de pontos (§ 49). De forma mais geral, "todo conjunto infinito pode ser decomposto em partes contendo conjuntos infinitos e, pode, ter uma infinidade de tais partes" (§ 38). Como medir a infinidade de uma parte infinita em relação a infinitude do todo? Dir-se-ia, em concordância com o axioma do todo e da parte, geralmente aceito por Bolzano, que a primeira é inferior à segunda? Aqui reside o ponto mais falho dos “Paradoxos”, aquele no qual se percebe que as tentativas de cálculo, mais ou menos coerentes entre elas, malogram ao estabelecer uma escala que concretizaria, matematicamente, a idéia de que há, no infinitamente grande e no infinitamente pequeno, “uma infinidade de ordens de grandezas” (§ 30). Isto conduz Bolzano a procurar, por todos os meios, retornar ao finito, tirando partido dos diferentes modos possíveis de determinação. Isto é, procurando determinar as grandezas infinitas, senão numericamente, pois isto ele se proíbe, ao menos de uma outra maneira. É então que se introduzem as confusões, com Bolzano tentando estabelecer uma aritmética infinita valendo-se de noções estranhas à aritmética, em particular noções recuperadas da geometria. Conceitos ou razões métricas: distância de dois pontos, comprimento de um segmento, área de um círculo, triângulos iguais etc., são utilizados para tentar determinar ‘conceitualmente”, como diz, de maneira puramente lógica, a grandeza de um infinito ou a razão de dois infinitos. Além do fato que isto indica que determinar é determinar segundo a lógica do finito. Bolzano é acuado a violar seu próprio princípio de estabelecer uma hierarquia das disciplinas das matemáticas, coroada pela aritmética, aplicável outras disciplinas, mas não constituída a partir delas. Procurando definir uma igualdade dos conjuntos de pontos, Bolzano recorre, de fato, ao que se chama uma “igualdade geométrica”, quer dizer, uma coincidência total que se traduz em geometria plana pela superposição. Isto é bem entendido por todos que tivessem, de antemão, considerado como uma “falta intolerável” a confusão entre aritmética, álgebra, análise e matemáticas aplicadas, em particular a geometria.

O que dizer, em definitivo, desses Paradoxos? Que se encontram na *bifurcação* da história das matemáticas do infinito. Desfiguradas entre as normas e as práticas, advindas do Cálculo Diferencial e Integral, as quais visavam eliminar todos os traços dos infinitamente pequenos na expressão analítica de seus processos e dar um reconhecimento matemático ao infinito atual. Vítimas da assimetria, instaurada pelos paradoxos na tentativa de anulá-la, entre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande.

Se, não se chegou a uma aritmética dos infinitamente grandes atuais, ao menos lhes foram assegurados existência matemática e inscrição em uma escala quantitativa com diferentes degraus. As expressões de grandezas infinitamente grandes não são jamais vazias, mesmo que cheguemos a representá-las como grandezas não mensuráveis. Seu estatuto, do ponto de vista realista, é, portanto mais invejável que o do zero ou o dos imaginários, entidades puramente simbólicas!

O infinitamente pequeno tem uma situação bem menos clara: existe como infinito atual e tem tanto de "realidade" quanto o infinitamente grande, e tanto quanto as grandezas usuais, inteiras, racionais, irracionais. Tão logo, ele é admitido apenas como infinito potencial e somente para avaliar a razão de dois infinitamente pequenos. Enfim, diz-se que a hipótese de existência de um infinitamente pequeno é contraditória. Agora, nos outorgam os méritos do cálculo das derivadas de Lagrange, o matemático mais obstinado em algebrizar os conceitos da Análise, ou, em outras palavras, em reduzir o infinito ao finito. Na seqüência, aliás, Bolzano não fala mais senão de acréscimos finitos de uma função, quando inicialmente usava a idéia e a expressão de acréscimos infinitamente pequenos. Em resumo, todas as proposições dos "Paradoxos" relativas ao infinitamente pequeno não são logicamente compatíveis. Bolzano é colocado no meio da confluência de duas correntes igualmente fortes: a de constituição da Análise clássica, como negação do infinitamente pequeno, aí compreendida sua forma potencial, e, como rejeição da intuição geométrica ou cinemática em proveito dos procedimentos algébricos de cálculo; e, a corrente que fazia irromper, *no afã da abstração que levava a aritmetização da análise*, os conjuntos infinitos. Esta disjunção de estatuto, entre infinitamente pequeno atual e infinitamente grande atual, Bolzano não assumia, explicitamente, como Cantor. Ele oscila entre uma posição lógica de princípio: afirmar simultaneamente a existência dos infinitamente grandes e dos infinitamente pequenos atuais, e a impossibilidade prática na qual ele se encontra de anular seus próprios trabalhos, *Rein analytischer Beweis (B 1817 a) e die drey Probleme (B 1817 b),* mas também a *Reine Zahlenlehre* (B 1976) no qual a “mensurabilidade” repousa sobre um processo de aproximação correlata da admissão de grandezas variáveis crescentes ou decrescentes indefinidamente, isto é sobre uma concepção potencial denegrida nos “Paradoxos” em proveito de uma concepção atual.

CAPÍTULO 3

PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE INFINITO

Três artigos resultantes de pesquisas em Educação Matemática são analisados neste capítulo: Young Peoples' Ideas of Infinity de John Monaghan, Tacit Models And Infinity de Efraim Fischbein e Conhecimentos de Concepções Prévias dos Estudantes Sobre Números Reais: Um suporte para a melhoria do ensino-aprendizagem, de Benedito Silva e Sonia Igliori. A tradução dos dois primeiros, do inglês para o português, foi realizada por nós.

O artigo de Monaghan

Monaghan descreve uma pesquisa realizada por ele com jovens pré-universitários (em geral, com menos de 19 anos) sobre suas percepções do infinito. Nela, evita lidar com noções como a de limite e de infinito na visão cantoriana, mesmo assumindo que tal opção implicaria em dificuldade. Seu interesse por esses sujeitos estava exatamente na possibilidade de poder explorar um senso "puro" do infinito, embora reconhecesse que ninguém é tão "puro" a tal ponto que suas experiências de vida não se relacionassem com os significados dos temas a serem tratados.

Nas quatro seções do artigo de Monaghan, são desenvolvidos assuntos candentes relativamente à cognição e conceito de infinito. São abordados: armadilhas potenciais a que poderiam estar sujeitas as pesquisas em educação matemática sobre o infinito; o trabalho de Piaget sobre o assunto; a contraditória natureza do infinito; o infinito como um processo e como um objeto; números infinitos. São descritas situações nas quais idéias infinitas possam emergir ou serem estabelecidas e atividades de pesquisa que busquem entender visões de jovens sobre o infinito. As referências para o artigo são basicamente aquelas que apresentam estudos empíricos com jovens.

Na secção que trata das armadilhas, a principal questão explorada é como saber o que significa conceito de infinito. Pergunta-se se há como inferir que um primeiro nível de entendimento possa ser o da percepção de processos que nunca acabam, como por exemplo, a subdivisão contínua de um segmento de reta, de seqüências intermináveis de números como a dos números naturais ou, da possibilidade de alguma operação poder continuar indefinidamente. Ou, ainda, na percepção de coleções não limitadas.

Um dos problemas, constatado de pronto, é o de como abordar o jovem se a pretensão é identificar se ele tem um conceito de infinito e se consegue esclarecer o que é esse conceito. A armadilha a que o pesquisador pode estar sujeito infere-se no fato do mundo real ser aparentemente finito e, conseqüentemente, faltam referências reais para um discurso sobre o infinito. O que, muito provavelmente ele faz, é buscar um contexto do qual não faz necessariamente sentido para o jovem. Se indicar que tal contexto não faz sentido para ele ou, se o próprio pesquisador identificar este agrave, isso é bom. No entanto, para dizer "eu não entendo" requer do estudante uma certa confidência. Um perigo real existe quando o jovem não entende, mas apresenta uma resposta aparentemente com sentido, ou, quando ele entende alguma coisa distinta do que o pesquisador pretende e o pesquisador não identifica essa incompreensão do jovem.

É evidente, diz Monaghan, que tais problemas não são específicos de pesquisas sobre conhecimento de percepções de jovens sobre o infinito, mas reforça ainda sua opinião de que, pesquisas nessa direção parecem particularmente propensas a esses problemas. Relacionado a esse primeiro problema, expõe um segundo que envolve a linguagem utilizada quando se fala com jovens. Chama a atenção para o fato de que professores de matemática ou educadores matemáticos não vêem problemas ao falar que uma série "continua sempre" ou ainda que, ela "continua sempre e tem uma resposta", como é o caso do exemplo da série: 0,1 + 0,01 + 0,001+... Argumenta que isso ocorre porque o mundo matemático, em que esses professores vivem, é um mundo a-temporal no qual pode se efetuar sem referência, a tempo, uma adição com infinitas parcelas. "*Isto, no entanto é estranho e não devemos esquecer que é estranho. Isto não ocorre como no mundo real*" (2001, p. 240). Inclui no problema de linguagem a questão de se perguntar, por exemplo: pode-se adicionar 0,1, 0,01, 0,001... sem parar e obter uma resposta? E, completa: *fora do mundo da matemática pura, a resposta é não* porque não há como continuar somando para sempre... já que se morre antes. Parece a Monaghan que, Nunes (1994) caiu nessa armadilha quando formula a jovens de 8 a 14 anos: "imaginem que queiramos ir de um lado ao outro de uma mesa. Para isso, primeiro vamos até a metade do caminho e depois, até metade do que sobrou e depois até a metade do que sobrou na segunda etapa e assim sucessivamente. Nós vamos algum dia atingir o outro lado da mesa?" (ib. p. 370). Pode ser que Nunes tivesse a pretensão de explorar o paradoxo de Zenão, para um treinamento matemático dos jovens, mas o paradoxo somente existe quando o problema é visto sob dois pontos de vista. Não será um paradoxo para alguém que não conhece as complicações matemáticas. Em defesa de Nunes, pode-se atribuir o fato de que ele havia investigado como crianças de diferentes idades, usavam argumentos *finitistas* e *infinitistas*. Mas, Monaghan julga que aqui pode haver o perigo de interpretação dada pelo pesquisador com origem na linguagem que é utilizada.

O trabalho de Piaget, referentemente à natureza contraditória do infinito, é questionado por Monaghan que considera um dos problemas dos piagetianos o desejo que tem de ver os conceitos das crianças de forma hierárquica em estágios, como internamente consistentes mas, de fato, no que tange ao infinito, muitos dos conceitos que as crianças têm, são internamente contraditórios O ponto de partida para contrapor o paradigma piagetiano, ocorre quando Fischbein e seus colegas passam a utilizar referenciais teórico pós-piagetiano tomando a natureza contraditória dos conceitos que os jovens têm de limite e infinito, como fundamental em suas análises. O exame da intuição tem um importante papel no trabalho de Fischbein. Para isso, é preciso que se conceitue o que vai considerar por intuição, por ser, como muitos dos *constructos* psicológicos, muito difícil de se definir. Ele vai usar o termo intuição por algo direto, ou formas de conhecimento evidentes em si mesmo (Fischbein, 1979, p. 5). A principal hipótese por ele considerada é que a nossa intuição do infinito é intrinsecamente contraditória, pois, os nossos esquemas lógicos estão naturalmente adaptados aos objetos e eventos finitos. Evidência que é indicada pela larga discrepância em respostas entre raciocínios infinitistas (aceitando divisibilidade infinita de uma reta e, em geral, continuação infinita de uma operação) e de raciocínio finitista (não aceitando continuação infinita de uma operação ou usando esquemas lógicos finitos, como por exemplo, *o todo deve ser maior que a parte*). Os sujeitos participantes da pesquisa de Fischbein tinham mais idade (470 estavam entre 10 a 15 anos e tinham diferentes níveis de desenvolvimento) do que os de Piaget (11-12) (1956, p. 125-149) e de Task (1975), (8-12). Fischbein inclui, além das questões clássicas de subdivisão como as de Piaget e Task, outras sobre correspondência um a um buscando verificar a existência de relação entre as respostas e o desenvolvimento escolar.

Fischbein *et al*. observam que respostas de caráter finitistas e infinitistas podiam ser norteadas pelo concreto ou por argumentos abstratos (*constructos* matemáticos). O efeito do ensino variava contribuindo tanto para respostas finitistas quanto infinitistas, o que não os surpreenderam, dada a natureza contraditória do infinito.

Para questões fora de padrão, para as quais os estudantes não tinham informações específicas, esperavam altas porcentagens de respostas (erradas) finitistas, mesmo em detrimento de treinamento geral matemático mais avançado (e algumas vezes, como um efeito indireto justamente desse treinamento matemático (ib. p. 37).

Monaghan (1986) investigou visões dos estudantes ingleses do nível A (pré-universitários, de 16 a 18 anos, alguns estudando matemática nível A e outros não), sobre conceitos de limite e infinito. O estudo direcionava ao que pode ser chamado de concepções implícitas, em oposição a detalhes técnicos, isto é, não concernentes a respostas certas ou erradas e evitou conceitos e notações matemáticos mais avançados. Os focos específicos incluíram: infinito como processo e como objeto; infinito como um número; infinitesimais; seqüência e séries infinitas; números reais; a linguagem do infinito; raciocínio com o infinito; contextos (numéricos/geométricos, contagem/medição, estático/dinâmico; o efeito do ensino). Cinqüenta e quatro estudantes (27 estudando matemática nível A) da mesma escola responderam um questionário inicial, acompanhado de entrevistas estruturadas com 13 estudantes. Um questionário, revisado em alguns pontos, foi subseqüentemente aplicado a 190 estudantes nível A (114 estudante matemática nível A) de escola com característica similar à primeira.

Os principais achados no que se refere às concepções sobre o infinito podem ser resumidos como seguem: o foco primário dos estudantes sobre o infinito configurava-se numa perspectiva de um processo, algo que *continua e continua*. Uma visão do infinito como objeto era revelada para alguns estudantes, referindo-se a um número muito grande ou o reconhecimento de coleções contendo mais que algum número finito de elementos. O conceito de infinito dos estudantes é inerentemente contraditório e variável. O primeiro ano de um curso de cálculo tem efeito desprezível nas concepções dos estudantes sobre o infinito.

O curso de cálculo utilizou, como esperado, conceitos e notações matemáticos concernentes com infinito, exemplo, soma infinita com o símbolo ∞ (de infinito) sobre o símbolo de somatória. Monaghan estabeleceu que estaria preocupado com jovens que não tivessem sido ensinados como os matemáticos lidam formalmente com o infinito. Afirma que não considera curso introdutório de cálculo como "lidar formalmente com o infinito", embora, é claro, que isto possa possibilitar aos estudantes, vivenciar experiências que contribuam com o desenvolvimento deles sobre a noção de infinito. O que é interessante ressaltar é que essas experiências parecem ter tido efeito pequeno sobre concepções implícitas do infinito.

Nesse artigo é evidenciado que, como muitos conceitos matemáticos, o infinito pode ser visto tanto como um processo, como no princípio da indução ou *loopping* infinitos na linguagem dos computadores e como um objeto, como um grande número ou a cardinalidade de um conjunto.

É importante chamar a atenção que esta dualidade processo/objeto em Educação Matemática tem se estabelecido num campo de pesquisa. Os mais recentes artigos são Gray e Tall (1994), Dubinsky (1991), Sfard (1991). O infinito é simplesmente um, mas, interessantemente, um recente aspecto da matemática para ser analisado nessa direção.

Monaghan (1986, 280) ainda observa que a linguagem de uma criança ao falar sobre infinitude a reflete como um processo: “Isto que continua e continua é infinito”, vendo infinitude não como coisa, mas como o ato de ir continuando e continuando”. Não usam a infinitude como processo apenas para a definir, mas também como um esquema de validação para determinar quando uma questão tem uma resposta infinita:

Isto continua e continua.
Infinito significa continuar e continuar.
Então isto é infinito (adjetivo ou substantivo).

O jovem, às vezes, usa expressões como “uma infinidade” mas, pode-se inferir que neste contexto infinidade seja um objeto?

Embora a dualidade processo-objeto esteja aqui apresentada, pode não ser bem definida na mente do jovem. Constitui-se um perigo estabelecer fronteira entre processo e objeto nessa polarização.

O jovem usa em outras situações o termo infinito, indicando que algo continua e continua. Os dois termos “infinito” e “infinidade” são freqüentemente intercambiáveis nas falas do jovem.

Essa dualidade processo-objeto pode levar a contradições quando se compara a cardinalidade de conjuntos. Considerando, digamos, o conjunto dos números naturais e o dos números pares e a infinidade como um processo, como um esquema de avaliação, pode-se levar a respostas diferentes:

Como ambos continuam e continuam, então há o mesmo nos dois;
Como ambos continuam e continuam, então não se pode compará-los.

Ambas respostas estão de acordo com a explicação relacionada à explanação todo-parte: os pares são menores porque são um subconjunto próprio dos números naturais.

Mas, infinidade também aparece como sendo um objeto. Evidência imediata pode ser vista em Monaghan (1986, p. 133-140) nas respostas ao número de questões sobre cardinalidade. Exemplo: podemos pensar 1, 2, 3, ... como um único conjunto? (147 de 190 responderam sim). Tais questões requerem a comparação de conjuntos com um número infinito de elementos e somente um número pequeno de estudantes não fez comparações como "mais em" e "o mesmo em ambos".

Um conjunto como uma unidade pode ser olhado como um objeto e nenhum dos jovens com mais idade nesse estudo parece ter dificuldade para falar sobre o número de elementos de um conjunto infinito. Também, quando questionados, se o ∞ era um enorme número, 31% de 190 (p. 116) disseram sim. Em entrevistas, entretanto, os jovens que disseram isso geralmente qualificaram isto com explicações como "nós pensamos nisso como um número para simplificar coisas" ou "não realmente uma coisa específica mas..." (ibid. p. 204-205). Monaghan alerta que se tenha cuidado com esse tipo de questão para que não se caia na armadilha, discutida na sessão de problemas potenciais de descrever conceitos na forma de palavras que as pessoas usam, pois isso, pode ir além dos conceitos que elas têm.

O artigo de Fischbein

Em seu artigo, Fischbein analisa diversos exemplos de influências tácitas exercidas por modelos mentais na interpretação de vários conceitos matemáticos no domínio do infinito atual. Segundo Fischebein: "O conceito de infinito como é bem conhecido, tem tido uma longa e dramática história na filosofia e na matemática. Filósofos gregos já usavam o termo infinito. Aristóteles rejeitou a noção de infinito atual, mas aceitou a do infinito potencial. Em matemática, o infinito aparece implícita ou explicitamente nos trabalhos dos primeiros grandes matemáticos. Tornou-se evidente que o conceito de infinito leva a contradições inerentes. Galileu e Gauss concluíram que infinito atual não podia ser incluído num pensamento lógico e consistente. Kant em suas antinomias se refere ao infinito do espaço e tempo e conclui que o intelecto humano não consegue aceitar nem o finito e nem o infinito do mundo (em ambos os aspectos – espaço e tempo). Para Kant, esse é um argumento que prova que espaço e tempo não têm existência no mundo externo em si, mas são propriedades projetadas, externalisadas por nossa mente em seus esforços de cognição- organização.

Filósofos e matemáticos distinguiam o infinito potencial do infinito atual. O que nossa inteligência acha difícil, mesmo impossível, para entender é o *infinito atual*: a infinitude do mundo, a infinitude dos números de pontos de um segmento, a infinitude dos números reais como *existentes*, como *dados*, etc. Nossa mente é essencialmente adaptada à realidade finita do tempo e espaço a qual temos que lidar em nosso comportamento adaptativo. Nossa lógica, com todas as suas leis, pode lidar consistentemente somente com conceitos expressando realidades finitas e chegar a conclusões objetivas consistentes com premissas dadas somente se uma idéia é for dada com objetos finitos ou com conjunto finitos de elementos.

No momento que começamos a tratar com o infinito, no sentido de infinito atual, parecemos cair em contradições. Galileu dá o exemplo dos quadrados de números naturais *todo número natural tem seu quadrado e vice-versa, o que significa que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos seus quadrados são equivalentes*, mas por outro lado, o conjunto de quadrados é um subconjunto, uma parte, do conjunto dos números naturais. Isto significaria que um conjunto e o seu subconjunto podem ser equivalentes, ou seja, que o todo e uma parte dele podem ser equivalentes. Esta conclusão não é consistente com a nossa lógica natural. A fonte do paradoxo parece estar no uso do conceito de infinito (atual). A conclusão natural, em concordância com Galileu, é banir o infinito atual da matemática se quisermos conservar a consistência do nosso raciocínio lógico.

Por outro lado, alguém inventou o conceito de infinito potencial (ou dinâmico). Não é um infinito existente, um dado. Tratamos com uma forma dinâmica do infinito quando consideramos processos, que são, a cada momento, finitos, mas que continuam indefinidamente. Não podemos conceber o conjunto total dos números naturais, mas podemos conceber a idéia que depois de cada número natural, não importa quão grande ele seja, existe ainda um outro número natural maior. Não temos dificuldade em entender que um segmento de linha pode se estender indefinidamente (em nossa imaginação). Uma criança de doze anos entende e responde corretamente quando lhe perguntam esse tipo de problema. Alguém possui $\frac{1}{3}$ de algo, é facilmente aceito que $\frac{1}{3}$ equivale a 0,333... O número 0,333... representa o infinito dinâmico. Em contraposição os estudantes questionam se o 0,333... é igual a $\frac{1}{3}$ ou tende a $\frac{1}{3}$. Quando se pergunta isso aos estudantes, geralmente respondem que o 0,333... tende a $\frac{1}{3}$, o que matematicamente não é correto**.** Voltemos à noção de infinito atual. Como dito, ele leva a contradições e paradoxos. Foi Cantor, no século XIX, que resolveu o problema do infinito atual. O que Cantor fez foi usar sistematicamente o conceito de correspondência um a um para decidir sobre a equivalência dos conjuntos. Se tivermos que comparar dois conjuntos infinitos, não poderemos contar seus elementos como contamos grupos de objetos finitos. Temos que determinar a equivalência ou não-equivalência de dois conjuntos por meios formais. É fácil provar que o conjunto de números naturais e o conjunto dos números pares são equivalentes.

1, 2, 3, 4,...

2, 4, 6, 8, ...

O conjunto de números pares está contido no conjunto dos números naturais, mas se usarmos o critério de equivalência, baseado na correspondência um a um, concluímos que o conjunto dos números naturais e o seu subconjunto (o conjunto dos números pares) têm a mesma cardinalidade, a mesma magnitude.

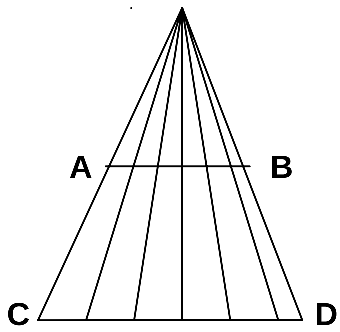


Figura 1

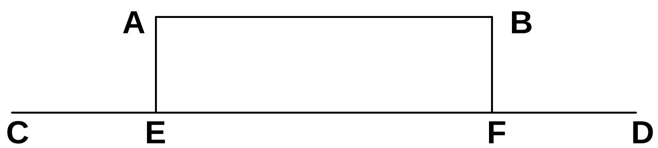


Figura 2

Da mesma forma, pode-se provar, por exemplo, que os segmentos AB e CD (veja Figura 1) contêm o mesmo número de pontos. Parece estranho, mas o critério da correspondência um a um mostra que os dois conjuntos de pontos são equivalentes.

Para nossa inteligência finita, tal conclusão parece inaceitável. Um estudante, certa vez, perguntou o seguinte: "dados dois segmentos AB e CD (veja Figura 2), eu desenho as perpendiculares por A e por B a CD. Então, acrescentamos ao segmento EF, que é igual a AB, os pontos dos segmentos CE e FD, que não estão contidos em EF. Como é possível a equivalência?

Formalmente, o estudante continuou, você pode estar correto, mas visualmente, intuitivamente, parece ser inaceitável que se tenha a mesma quantidade de pontos em AB e CD. Há algum truque aí? Sim, há um truque. Se evitarmos essa discussão, podemos criar confusão nas mentes dos estudantes e esse truque será considerado na seqüência".

Fischbein diz que pensar em termos de modelos é substituir certos conceitos originais que, usualmente, são muito abstratos ou muito complexos e as respectivas realidades, muito grandes ou muito pequenas, em relação à nossa capacidade de entendê-las. Para ele, os modelos são substitutos que nos ajudam a resolver várias classes de problemas.

Define o termo modelo, como utilizado no texto, assim: considerando dois sistemas A e B, B é definido como modelo de A se é possível transferir propriedades de A em termos de B para produzir descrições consistentes de A em termos de B ou para resolver problemas – originalmente formulados em termos de A – utilizando uma tradução em termos de B.

Ainda segundo Fischbein (2001, p. 312), *"o conceito de modelo mental se refere a representações mentais que substituem*, *no processo de raciocínio, as entidades originais, usualmente para simular e facilitar o processo de solução de um problema".*

Modelos podem ser abstratos ou figurais, analógicos, paradigmáticos ou diagramáticos, tácitos ou explícitos. A fórmula $s = \frac{1}{2}gt^2$ é o modelo abstrato da relação entre espaço e tempo numa queda livre. A representação de Bohr do átomo é baseada numa analogia com o sistema planetário. Uma parábola é um modelo pragmático (protótipo) de cônicas.

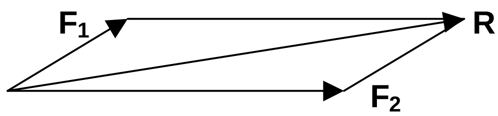


Figura 3

Mas vamos focar na dicotomia: o modelo tácito ou explícito. Se considerarmos duas forças tendo o mesmo ponto de aplicação e quisermos determinar a força resultante, pode-se utilizar a representação geométrica de vetores (Figura 3). Usando tal modelo, esta representação geométrica, poderíamos ensinar qual seria a direção e magnitude da força resultante. Força é um conceito abstrato. Sua representação intuitiva é o sentido de esforço. Sua representação objetiva, geométrica e explícita usa a representação geométrica de vetores. Uma vez que o problema de determinação da força resultante, adição de duas forças F1 e F2, é traduzida em termos geométricos vetoriais, consegue-se o resultado: a força resultante. A solução é obtida em termos geométricos. Essa solução pode ser reproduzida em termos do problema original, que é determinar a magnitude e a direção da força resultante, por exemplo, em dínamos. Por analogia e generalização, você pode resolver um problema no qual diversas forças devem ser adicionadas. Todas essas operações são feitas consciente, intencional e explicitamente. Na ciência, na matemática, na física, na química, na biologia e na ciência do comportamento etc uma ampla variedade de modelos são usados: analogias, protótipos, diagramas etc. Uma ampla variedade de modelos também é utilizada na didática de ciências e matemática.

Mas, no processo de raciocínio também intervêm modelos para os quais não estamos alertas e que substituem *tacitamente* alguns dos componentes originais do processo de raciocínio. Tais modelos podem ter sido inicialmente conscientes, mas mais tarde essa origem consciente pode ter sido esquecida. Esses modelos continuam a agir e influenciar o processo de raciocínio sem que o indivíduo se aperceba da sua origem e do seu efeito. Por exemplo: o axioma euclidiano que diz que *dois pontos determinam uma reta*. Os termos geométricos *ponto* e *reta* são abstrações. Um ponto não tem dimensão, uma reta tem apenas uma dimensão. Tais objetos não existem na realidade e não podem ser representados como tais mentalmente. Utilizamos modelos pictoriais, uma pequena mancha para um ponto e um fino risco desenhado para as linhas geométricas. Com esses modelos em mente, pode-se formular um número de axiomas e vários teoremas. Por exemplo, para as questões:

"Quantos pontos duas linhas podem ter em comum?" A representação visual, *o modelo*, nos mostra a resposta: nenhum, um ou uma infinidade de pontos (se as duas linhas coincidem). Qual é a menor distância entre dois pontos? *Visualmente*, concluímos que a menor distância entre dois pontos é obtida pela medida do segmento de reta que une esses pontos. Sem a ajuda visual, sem algum modelo pictorial, isto seria muito difícil, senão impossível, formular axiomas e construir teoremas. Os modelos pictoriais, apesar de serem apenas *modelos*, têm um papel essencial para o raciocínio geométrico, apesar do fato de que os objetos originais mentais da geometria são abstrações.

Apesar de sabermos perfeitamente que os pontos matemáticos não têm dimensões, continuamos a pensar tácita e inconscientemente em termos de pequenas manchas. Psicologicamente, não conseguimos nos livrar dessas imagens. Certamente, comparando os dois conjuntos (figura 2) em termos de pequenas manchas de igual tamanho, os dois conjuntos não são equivalentes. Temos que abandonar absolutamente o modelo e usar somente o abstrato. Processos cantorianos.

Na realidade, enquanto seguimos os caminhos de pensamentos abstratos formais, concluímos que os dois conjuntos são equivalentes. O modelo intuitivo figural, constituído de pequenas manchas, continua a interferir no processo de raciocínio. Um sentimento de dificuldade, de contradição, de paradoxo, aparece e não conseguimos nos livrar dele. O mesmo sentimento de desconforto aparece relacionado a todas as comparações de conjuntos infinitos. É impossível imaginar que o conjunto de pontos de um segmento, de um quadrado, de um cubo sejam equivalentes. Comparamos os conjuntos de pontos, de figuras, tendo diferentes números de dimensões: uma, duas, três. Apesar disso, os conjuntos são equivalentes. Em termos matemáticos elementares, isto quer dizer que o número de pontos de um segmento, de um quadrado, de um cubo é o mesmo. O modelo tácito das manchas, dos pontinhos continua a interferir no nosso processo de pensamento e nos impede de alcançar um sentimento genuíno de consistência lógica, apesar do fato de que, formalmente, não deveríamos nos basear nas considerações figurais. Mas, as coisas são ainda mais complicadas. Para eliminar esse sentimento de contradição, podemos simplesmente declarar que todos esses conjuntos são infinitos e, portanto, equivalentes, mas as coisas não são tão simples. Dois conjuntos podem ser infinitos e não serem equivalentes no sentido de Cantor e esta foi uma de suas grandes descobertas, pois o conjunto dos números naturais e o conjunto de pontos de um segmento de reta, embora infinitos, não são equivalentes. Cantor provou que os dois conjuntos não podem ser colocados em correspondência biunívoca, uma vez que o infinito do conjunto de pontos em um segmento de reta é mais rico, infinitamente mais rico que o conjunto infinito dos números naturais ou, de modo geral, racionais. Em outros termos, a tentativa de resolver intuitivamente os paradoxos acima de um modo mais sutil, não adianta. Desistindo do modelo figural de ponto de pequenas manchas, substituímos a estratégia do primeiro modelo intuitivo por um modelo mais complexo, mas ainda intuitivo, em que infinito é igual a infinito. Como sabemos, esta estratégia também não ajuda mais. Não é verdadeiro que infinito seja igual a infinito em todos os casos. Na teoria cantoriana pode-se assumir a existência de uma escala infinita de conjuntos infinitos não-equivalentes, isto é, com cardinais diferentes, a primeira das quais sendo representada por um conjunto de números naturais e a segunda pelo conjunto de números reais.

A principal observação a respeito do que foi dito acima não é a existência e a influência dos modelos tácitos em nosso pensamento quanto ao domínio do infinito atual. A principal observação é, em nossa opinião, a persistência e o impacto de tais modelos pictoriais mesmo em indivíduos já altamente treinados em matemática e que conhecem a natureza abstrata dos objetos matemáticos. A enorme dificuldade que Cantor teve no seu tempo, quando expôs os seus achados a respeito do infinito atual, veio de matemáticos altamente treinados que não conseguiam se livrar do impacto dos modelos pictoriais tácitos primitivos em seus raciocínios matemáticos. Nenhum desses matemáticos pôde admitir para si que um ponto é genuinamente uma pequena mancha, no entanto, rejeitaram o que Cantor disse sobre a equivalência do conjunto de pontos de um segmento, de um quadrado e de um cubo. Disseram, apenas, que isto seria impossível ao considerar o número diferente de dimensões desses objetos.

Escrevemos acima sobre alguns dos modelos pictoriais de conceitos aos quais o infinito está relacionado – pontos, linhas, etc. Esses modelos, portanto, podem ter um impacto inconsciente no processo matemático.

O segundo aspecto relacionado à interpretação intuitiva do infinito, refere-se ao que podemos chamar de capacidade inesgotável do infinito. Como iremos ver, essa propriedade do infinito foi tacitamente assumida e tem conseqüências consideráveis para o raciocínio matemático dos estudantes.

Conforme pesquisas realizadas, Fischbein, Tirosh e Hess (1979) fizeram a seguinte pergunta: C é um ponto arbitrário ocupando algum lugar de um segmento de reta AB. Se dividirmos o segmento AB primeiro em duas metades e depois continuarmos a dividir cada segmento da mesma maneira, não chegaremos a uma situação na qual um dos pontos de divisão vai coincidir com o ponto C?

Os sujeitos dessa pesquisa eram estudantes que estavam nas quintas, sextas, sétimas, oitavas e nonas séries. As porcentagens de estudantes que responderam afirmativamente (ou seja, que um dos pontos de divisão vai coincidir alguma hora durante o processo de divisão com o ponto C) seguem abaixo:
82,6 (quinta); 91,4 (sexta); 81,6 (sétima); 67,3 (oitava) e 88,1 (nona).

Como podemos ver, a grande maioria dos estudantes respondeu afirmativamente. Começando pela sétima série, os estudantes tinham visto alguma coisa sobre números racionais e irracionais. Mesmo assim**,** não levaram em conta que um ponto irracional não pode ser alcançado por tal divisão e que nem todos os pontos racionais podem ser alcançados. Nossa explicação é que infinito aparece intuitivamente como sendo equivalente à inesgotabilidade, isto é, se continuar o processo de divisão indefinidamente, todos os pontos podem ser alcançados.

Na nossa opinião, essa interpretação do infinito é a razão essencial pela qual intuitivamente há apenas um tipo e um nível de infinito. Um infinito que é equivalente com inesgotabilidade não pode ser ultrapassado por um infinito maior, mais rico. Com referência à questão mencionada acima (se um dos pontos de divisão do segmento AB vai alcançar o ponto C), a lógica da inesgotabilidade, característica do infinito, implica que, no limite, a divisão sucessiva de segmentos vai cobrir todos os pontos do segmento e que isto já é o infinito atual.

Segue um importante aspecto do problema do infinito atual. Identificamos acima dois modelos tácitos básicos que têm um impacto no manejo do conceito de infinito quando se trata de subgrupos de pontos e outras figuras geométricas. Primeiro, a persistência dos modelos pictoriais de pontos (manchas) e traços de tinta que, no caso de infinito, são capazes de distorcer conclusões racionais, (por exemplo, que o número de pontos em dois segmentos de diferentes comprimentos é diferente; que o número de pontos em duas figuras de diferentes dimensões também é diferente, etc.). Por outro lado, se o infinito é equivalente, intuitivamente, com inesgotabilidade, todos os conjuntos infinitos são equivalentes. Sendo assim, o conjunto dos números naturais e o conjunto de pontos de um segmento de reta são equivalentes e o conjunto dos pontos de dois segmentos de reta com diferentes comprimentos são equivalentes, etc. O efeito é que o conceito de infinito atual é intuitivamente contraditório. As duas intuições tendem a ser conflitantes entre si.

Baseados nessa análise formulamos a hipótese de que os sujeitos vão optar espontaneamente por uma das duas alternativas. Considerando o caso mais simples de dois segmentos de comprimentos diferentes (Fischbein, Tirosh e Hess, 1979), a cada nível de idade as respostas são distribuídas em dois grupos opostos: aqueles que consideram que os conjunto de pontos são equivalentes e os que consideram que não são. Para a primeira opção – os conjuntos são equivalentes – obtivemos as seguintes porcentagens, de acordo com as classes: 27,3 na quinta série; 49,1 na sexta; 33,6 na sétima; 24,5 na oitava e 29,7 na nona série. Para a segunda opção – os conjuntos não são equivalentes – obtivemos as seguintes porcentagens: 59,1 na quinta; 43,6 na sexta; 53,8 na sétima; 64,3 na oitava e 60,4 na nona série. As respostas foram, então, divididas em duas categorias. Assim, houve menos sujeitos que estimaram, intuitivamente, que em ambos os conjuntos existem uma infinidade de pontos (cerca de 30 a 40%) e mais sujeitos que consideraram no segmento de reta de maior comprimento haver mais pontos. Ao serem solicitados a comparar o conjunto de pontos de um segmento e de um quadrado, tivemos um resultado similar. Falando no geral (todas as classes juntas), 26,7% estimaram que os conjuntos eram equivalentes e 73.3% estimaram que não eram equivalentes. Sendo assim, houve mais sujeitos para os quais o impacto figural era mais forte do que a idéia mais abstrata de equivalência de infinitos (infinito como inesgotável), logo, a idade não parece ter um impacto consistente e forte na distribuição das respostas.

Um ponto adicional interessante: durante a entrevista foi sobre a solicitação de uma criança de 13 anos a comparar os conjuntos de pontos de dois segmentos de diferentes comprimentos. A criança inicialmente hesitou, mas, finalmente, concluiu como segue: "Há o mesmo número de pontos nos dois segmentos. Os dois conjuntos são infinitos, mas os pontos no segmento maior são maiores".

Generalizando os achados acima, pode-se concluir que pelo menos em relação ao infinito, pode-se identificar mais de um modelo tácito para o mesmo tipo de questão, que age por trás da cena, levando a duas tendências opostas de resolução do problema. Entretanto, mais pesquisas são necessárias para o entendimento da dinâmica de tais modelos conceituais.

Verificamos que ao tratar de conceitos altamente abstratos ou complexos, nosso raciocínio tende a substituí-los por substitutos mais familiares, mais acessíveis e mais facilmente manipuláveis, que são os modelos mentais. Algumas vezes, os modelos mentais são usados intencionalmente, conscientemente, mas, outras vezes, não percebemos sua presença ou impacto: são os modelos tácitos que têm um efeito considerável em nosso pensamento estratégico e em nossas conclusões. O modelo é parcialmente diferente do original e, por isso, sua relevância é necessariamente limitada. O modelo traz consigo, também, propriedades que não são relevantes para o original. Os modelos tácitos não controlados conscientemente podem levar a distorções nas interpretações e conclusões.

Em seu artigo, Fischbein analisa os efeitos dos modelos tácitos no raciocínio com o infinito e os principais modelos foram: pequenas manchas de tinta para pontos, traços finitos para linhas, propriedades parciais para interpretação e medição do tempo (especialmente com referência ao paradoxo de Zenão). O aspecto adicional considerado foi a interpretação do infinito como equivalente com o inesgotável. Percebemos que o impacto tácito dos modelos de figura, na lógica dos conceitos geométricos abstratos, quando se trata do infinito, pode levar a interpretações erradas ou contraditórias.

Nessa questão, o autor acima sugere que no ensino da geometria, na teoria dos números, na teoria dos conjuntos, os estudantes devam estar atentos ao impacto dos modelos tácitos (geralmente de figuras) nos seus processos de raciocínio para que sejam auxiliados a controlar melhor seu raciocínio matemático e evitar possíveis armadilhas.

O artigo de Igliori e Silva

Trata-se de um estudo diagnóstico realizado de forma comparativa sobre a concepção de números reais, entre alunos iniciantes e finalistas de cursos de exatas. O estudo foi realizado pela análise de um questionário aplicado a 50 estudantes sendo 36 iniciantes e 14 finalistas.

Houve, por parte dos pesquisadores, a intenção de conhecer: quais das concepções consagradas em estudos diagnósticos realizados em outros países (concepções que revelam a existência de obstáculos de ordem epistemológica, de ordem didática ou construídas nas experiências de vida) apareciam entre aqueles estudantes brasileiros e quais delas persistiam entre alguns deles, os finalistas, mesmo tendo passado por um curso de Análise Real.

Os autores destacam que o processo de elaboração do conceito de número real foi conflituoso trazendo em seu bojo noções que, durante séculos, criaram dificuldades para a construção da matemática: noções como incomensurabilidade de grandezas, de infinito atual e potencial, de contínuo, de limite, etc. Recorrem à história para subsidiar suas análises observando que a irracionalidade e a existência de grandezas incomensuráveis muito incomodaram os gregos (300 anos A.C) e levaram Eudóxio a propor dissociação completa dos campos algébricos e numéricos e, que as concepções de infinito deixaram atormentados pensadores como Aristóteles e Galileu, os quais não aceitavam a noção de infinito atual. Está aí, nosso interesse nesse artigo. Nele são tratados temas ligados à cognição e a noção de infinito. Escolhemos no questionário aplicado e nas análises realizadas o que explicitamente relacionava-se à noção do infinito.

O questionário continha 9 questões, sendo a questão Q9 proposta para avaliar as concepções dos alunos quanto à comparação de conjuntos infinitos.

Q9) Compare os conjuntos A e B, em cada caso, quanto à "quantidade de elementos". Coloque um X na coluna escolhida.

$|A|$ indica a “quantidade” de elementos de A.

$|B|$ indica a “quantidade” de elementos de B.

		$\|A\| = \|B\|$	$\|A\| < \|B\|$	$\|A\| > \|B\|$
a) A é o conjunto dos números impares	B é o conjunto dos números pares			
b) A é o conjunto dos pontos da reta	B é o conjunto dos números reais			
c) A é o conjunto dos naturais	B é conjunto dos números pares			
d) A é o conjunto dos números racionais	B é o conjunto dos números irracionais			
e) A é o conjunto dos números naturais	B é o conjunto dos números racionais			
f) A é o conjunto dos pontos de um segmento de reta	B é o conjunto dos pontos da reta			
g) A é o conjunto dos racionais	B é o conjunto dos reais			
h) A é o conjunto dos naturais	B é o conjunto dos pontos de um segmento de reta			
i) A é o conjunto dos números inteiros	B é o conjunto dos naturais			

No quadro abaixo está indicado o total de respostas dadas a cada item da Q9 pelas duas categorias de estudantes:

	Iniciantes			Finalistas		
	$\lvert A\rvert = \lvert B\rvert$	$\lvert A\rvert < \lvert B\rvert$	$\lvert A\rvert > \lvert B\rvert$	$\lvert A\rvert = \lvert B\rvert$	$\lvert A\rvert < \lvert B\rvert$	$\lvert A\rvert > \lvert B\rvert$
a)	27	5	4	10	4	0
b)	28	5	3	11	0	2
c)	9	7	20	4	1	9
d)	16	10	7	4	5	2
e)	12	15	6	0	8	4
f)	12	20	1	1	10	1
g)	11	15	6	2	9	1
h)	8	9	15	1	6	5
i)	16	9	8	2	2	9

Observação.

Alguns estudantes não responderam determinados itens.

A análise diagnóstica indica que: alunos iniciantes utilizaram, para tomar decisão, mais de um critério ao mesmo tempo, mesmo os contraditórios, sem causar incômodo a eles. A situação mais significativa foi, por exemplo, num determinado item utilizarem o critério da infinitude para decidirem pela mesma cardinalidade de dois conjuntos e, em outro, o princípio “do todo e das partes”.

No que tange à comparação entre as respostas dos estudantes que iniciavam o curso e os finalistas, os autores avaliaram que, apesar de ter havido evolução relativamente no índice de acertos, muitas das concepções “inadequadas” persistiram após um curso introdutório de Análise Real.

O problema de mudar “concepções” dos estudantes num processo de ensino tem sido alvo dos pesquisadores da Educação Matemática.

No artigo de Igliori e Silva são referenciados Viennot, Mortimer que afirmam: *“Os estudos realizados sob essa perspectiva revelam que as idéias alternativas de crianças e adolescentes são pessoais, fortemente influenciadas pelo contexto do problema e bastante estáveis e resistentes à mudança, de modo que é possível encontrá-las mesmo entre estudantes universitários. Realizadas em diferentes partes do mundo, as pesquisas mostram o mesmo padrão de idéias em relação a cada conceito investigado”* (1998).

Os autores revelam que estudos de concepções, embasados em reações às teorias piagetianas, têm resultado em propostas construtivistas de ensino. E que pesquisadores em Educação Matemática como Robinet (1989), Tirosh (1995) e Fischbein (1995), atestam que se pode obter melhorias no processo de ensino quando o professor conhece as idéias conceituais dos estudantes bem como aquelas que são persistentes após um estudo mais sistematizado. Segundo Igliori e Silva, “as concepções prévias dos estudantes sobre um conceito é um dos pontos a ser investigado, dada a complexidade envolvida no processo de ensino/aprendizagem, entendendo que a mudança conceitual não ocorre pela simples substituição das idéias alternativas do estudante por idéias científicas”.

As respostas apresentadas pelos estudantes investigados por Igliori e Silva indicam a existência de concepções assemelhadas à dos matemáticos através dos tempos. A seguir, algumas das justificativas às respostas da forma como os estudantes as apresentaram, por item:

- Itens a) e b): As cardinalidades são iguais, pois os conjuntos são infinitos; *O conjunto dos pares é maior que o dos ímpares, pois tem o zero a mais.*
- Item c): *A cardinalidade de N é maior, pois, os naturais são pares e ímpares; A cardinalidade de B é menor porque B é subconjunto de A.*

- Itens b), c), d), e), f), i): *Os conjuntos são infinitos, sendo assim não dá para saber quantos números existem neles; Infinito é igual a infinito, portanto os dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos.*
- Item f): *O segmento de reta é limitado, a reta tem infinitos pontos, logo a cardinalidade da reta é maior; O segmento é finito, portanto menor que um conjunto infinito.*
- Item i): *A inclui os negativos o que não ocorre com B, assim A tem mais elementos que B.*

Os autores afirmam que, basicamente, os estudantes finalistas indicaram possuir concepções de mesmas características que os iniciantes e, a diferença era somente de certa coerência nas respostas, mantinham o mesmo critério para todos os itens da questão. Os critérios utilizados pelos estudantes finalistas foram sinteticamente assim apresentados:

- Itens c), d) e), f), g): $A \subset B \ (|A|<|B|)$;
- Item i): $B \subset A \ (|A|>|B|)$;
- Item b): *A reta tem infinitos pontos* $(|A|>|B|)$;
- Item e): *A é infinito e B não* $(|A|>|B|)$;
- Item f): *O segmento é limitado e a reta não* $(|A|<|B|)$;
- Item g): *Os reais contêm os racionais* $(|A|<|B|)$;
- Item h): *O conjunto dos naturais é infinito e o segmento não*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar este trabalho, vale relembrar seu objetivo principal, o de elaborar um material sobre o infinito com enfoques variados: matemático, epistemológico, histórico e educacional. A organização visou evidenciar as relações existentes entre os diversos tratamentos do tema com o objetivo de contribuir com pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

Ao mergulharmos nos diversos aspectos do tema infinito, deparamo-nos com nossas próprias dificuldades e pudemos constatar com este estudo que há a necessidade de um conhecimento profundo sobre este assunto o qual tem sido pouco desenvolvido pouco desenvolvido nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, podendo ser fonte de entraves no ensino dessas disciplinas.

A questão dos dois infinitos, *potencial* e do *verdadeiro* infinito, o *atual,* é ausente nos livros didáticos brasileiros. Levando-se em conta a grande importância epistemológica desses conceitos reforçada neste estudo, tal ausência é um dos pontos que indica o que expressamos acima.

A noção do infinito, que causou dificuldade permanente na construção da Matemática, é um dos alvos privilegiados dos educadores matemáticos e deve também sê-lo do professor de matemática. A essencialidade abstrata desse objeto matemático e sua importância fundamental na constituição dos conceitos como número, limite, etc. justificam.

Todo este trabalho indicou que há relação bem forte entre os aspectos históricos, epistemológicos e cognitivos. O que segue é uma síntese dos principais pontos que constituem essa relação:

1. A concepção finitista é entrave para aceitar o infinito

A idéia do infinito tem estado, através da história, carregada de tintas e matizes teológicos que têm pesado na aceitação ou na rejeição desse conceito e das doutrinas matemáticas e filosóficas a ele associadas.

Os paradoxos de Zenão de Eléia configuram-se de uma forma marcante a resistência dos gregos em explicitar as noções abstratas do infinito e do contínuo, em oposição às noções do finito e discreto.

Numa consideração epistemológica, há que se considerar que o fato de Zenão constituir mentalmente a série $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...$ sem o domínio de convergência, isto é, sem a capacidade de intuir essa operação realizada com infinitos termos, o impede de conceber o valor conhecido por ele, o da soma da série.

O infinito constituiu-se, então, num conceito intimidador, conflitante com nossa intuição, causou o espanto de Galileu ao descobrir que os conjuntos infinitos não se comportavam da mesma forma que os finitos (o caso da correspondência biunívoca entre quadrados perfeitos e números inteiros positivos), sendo um bom exemplo para revelar o efeito do infinito na constituição do saber matemático.

A introdução dos “elementos infinitesimais” por Leibniz e Newton na invenção do Cálculo Infinitesimal desencadeia incessantes discussões entre os matemáticos, físicos e filósofos. Não pela utilização nos cálculos de quantidades auxiliares *não finitas*, cujos resultados eram expressos em quantidades *finitas*, mas pelo *estatuto ontológico,* ou seja, *metafísico dessas quantidades*. Na perspectiva familiar à época, em que número e quantidades tinham que ter um referente real (coleções finitas de objetos para os números inteiros, por exemplo, linhas, superfícies e volumes geométricos para as grandezas contínuas), as quantidades infinitamente pequenas ou infinitamente grandes pareciam evidentemente marcadas de “irrealidade”.

Bolzano é concorde com a vontade de retirar o conceito de infinito das especulações dos filósofos, ao menos daqueles que, como Hegel, vêem aí uma determinação puramente qualitativa, ou daqueles que, como os céticos, buscam, por toda parte, contradições. É necessário adotar um ponto de vista *quantitativo* para mostrar a positividade do infinito, seu caráter *diferenciado* e a *precisão* com a qual pode-se apreender esse caráter.

A avaliação do ponto de vista educacional é apresentada no artigo de Fischbein quando diz: nossa mente é essencialmente adaptada à realidade finita do tempo e espaço que lidamos em nosso comportamento adaptativo. Nossa lógica com todas as suas leis pode lidar consistentemente apenas com conceitos, que expressam realidades finitas, chegando a conclusões objetivas, consistentes com premissas dadas desde que uma idéia seja apresentada com objetos finitos ou com conjunto finito de elementos. Sua principal hipótese é que a nossa intuição do infinito seja intrinsecamente contraditória, pois, os nossos esquemas lógicos estão naturalmente adaptados aos objetos e eventos finitos.

Em Monaghan encontramos a análise da armadilha a que o educador matemático pode estar sujeito ao investigar concepções de estudantes sobre o infinito, pelo fato do mundo real ser aparentemente finito e, conseqüentemente, faltarem referências reais para um discurso sobre o infinito.

2. A transposição de propriedades do finito para o infinito

Como forma exemplar da referida transposição indicamos um dos grandes obstáculos epistemológicos para a construção do conceito de infinito, a transposição da propriedade válida para os conjuntos finitos: **o todo é sempre maior que suas partes**, para os conjuntos infinitos.

A força deste obstáculo pode ser avaliada na condição estabelecida pela matemática para que um conjunto seja infinito: “Um conjunto é infinito se e somente se está em bijeção com uma de suas partes próprias não vazias”.

Na epistemologia histórica vamos encontrar este obstáculo quando Galileu estabelece uma correspondência biunívoca entre todos os números inteiros e todos seus quadrados, e diz: “Devemos concluir que existem tantos quadrados quantos são os números”. Demonstra assim que um conjunto infinito, o conjunto de todos os inteiros, é “igual em número” ao conjunto de todos os quadrados dos números inteiros, sendo esse por sua vez um subconjunto próprio do conjunto dos números inteiros. Como poderia ser possível admitir que “o todo não é maior que uma de suas partes?” Tal fato seria absurdo no contexto dos conjuntos finitos. Galileu não consegue ultrapassar tal dificuldade a qual o impede de avançar na teoria dos infinitos.

Bolzano chega a dar ao infinito uma determinação *intrínseca*: todo conjunto infinito pode ser posto em correspondência biunívoca com uma de suas partes próprias (ou a um conjunto bijetivamente equivalente a ele). É a descoberta fundamental dos “Paradoxos”. Se Bolzano não tira daí todo o partido possível nem para uma definição de um conjunto infinito como o fez Dedekind, nem de sua tentativa do cálculo infinito, que está bem longe de prefigurar a numeração transfinita de Cantor, ao menos, coloca em destaque seu alcance epistemológico.

Há nos paradoxos dificuldades apresentadas por Bolzano em razão do axioma “o todo é maior que as partes”, geralmente respeitado por ele.

No artigo de Igliori e Silva (1998), as respostas dos estudantes relacionadas a seguir indicam a transposição que eles fazem da propriedade “do todo e suas partes”, válida para os conjuntos finitos para os infinitos. São respostas expressas assim: a cardinalidade do conjunto N é maior que a do conjunto dos pares, pois, o conjunto dos naturais contém os números pares e ímpares; a cardinalidade do conjunto B é menor porque B é subconjunto do conjunto A; o conjunto A inclui os negativos, o que não ocorre com o conjunto B, assim o conjunto A tem mais elementos que o conjunto B.

3. A necessidade de dissociar o conceito de número do de grandeza

Ao tratar dessa dissociação, Bolzano afirma que finito e infinito são dois caracteres dos conjuntos, das pluralidades e das grandezas. Mas o que é uma grandeza para ele? “Uma totalidade na medida em que é constituída de várias partes iguais ou, mais geralmente, uma totalidade que pode ser determinada pelos números”, os números na concepção euclidiana das pluralidades de unidades, quer dizer, dos múltiplos de 1. Considera também as grandezas como elementos de tipos de objetos. Cada tipo sendo totalmente ordenado pela relação de inclusão: duas entidades do mesmo tipo são sempre comparáveis, podendo dizer que são iguais e, senão, qual é maior que qual. Esta segunda definição, mais tardia, parece, ser mais ampla que a primeira. Tem a vantagem de dar lugar a uma distinção entre número e grandeza: uma grandeza não é forçosamente determinada por um número, nem *a fortiori*, por um número inteiro, se é que Bolzano distingue – o que ele nunca chega a dizer – entre número e número inteiro. Na perspectiva dos “Paradoxos”, a distinção entre número e grandeza ou, ao menos, a possibilidade deixada aberta que uma grandeza seja determinada sem ser forçosamente por um número, é muito importante ao menos por duas razões:

1) Permite definir as grandezas infinitamente grandes como aquelas que são maiores que todo número qualquer de unidades, isto é, aquelas as quais todo conjunto finito de unidades constitui apenas uma parte, e as grandezas infinitamente pequenas como aquelas as quais todo múltiplo fica inferior à unidade. Após essa definição, as grandezas infinitas são aquelas as quais não se pode atribuir um número inteiro n (nem fração $\frac{1}{n}$), por maior que seja n. Os números inteiros são grandezas, grandezas finitas, mais precisamente, pluralidades finitas. Mas, há mais grandezas que números. De fato, as grandezas compreendem as frações (ou grandezas racionais), os irracionais (algébricos ou não) denotadas pelas expressões $\sqrt{2}, \pi, e, etc.$ mais as infinitamente grandes e as infinitamente pequenas (§ 16). Observemos bem que os irracionais como $\sqrt{2}$ *ou* π não são grandezas infinitas, mesmo se suas expressões são compostas de um *conjunto* infinito de partes. Mas, o que é necessário destacar aqui é que as grandezas compreendem: 1) os números inteiros ou pluralidades finitas; 2) as grandezas finitas que não são números: frações e grandezas irracionais; 3) as grandezas infinitas que são, portanto, aquelas as quais não se podem atribuir nem um número inteiro, nem uma fração e nem uma expressão irracional. Temos assim duas definições para as grandezas infinitas: a de que a grandeza infinita pode ser apreendida sob um duplo ponto de vista, o de conjunto (uma grandeza infinita é um todo no qual todo conjunto finito é uma parte) e aritmética (uma grandeza infinita é um todo no qual todo conjunto finito é uma parte) e a

aritmética, uma grandeza infinita não se exprime por nenhuma expressão inteira, racional ou irracional.

Há, no entanto, uma dualidade de um outro tipo na idéia de grandeza. Da mesma forma que a idéia *matemática* de número comporta um aspecto concreto e um abstrato, duplicando-se em número-objeto: o 1, o 2, o 3, etc. da aritmética elementar, e em um conceito, o de número inteiro, assim também a idéia de grandeza consiste, numa parte, das grandezas-objetos; e de outra, uma propriedade ou um conceito. Bem que as grandezas matemáticas concretas se repartam em vários gêneros, a extensão do conceito de grandeza constitui *um* conjunto, o conjunto das grandezas, mais precisamente, o conjunto das grandezas abstratas. E, por isso, há mais grandezas que números, o conjunto das grandezas é maior que o conjunto dos números. Diríamos, em linguagem atual, que além dos números inteiros esse conjunto compreende o que nós chamamos números racionais, os números irracionais, e enfim os infinitamente grandes e os infinitamente pequenos. Em outros termos, o conjunto das grandezas constitui uma extensão de nosso conjunto dos *números* reais (que compreende os inteiros, as frações e os irracionais) acrescentando-se os infinitamente grandes e os infinitamente pequenos.

2) A distinção entre número e grandeza permite resolver o paradoxo do maior número e outros do mesmo tipo. O conjunto, hoje denotado por N, de todos os números inteiros é o exemplo de uma grandeza (pluralidade) infinita que não é um número, pois, um número é uma “pluralidade numerável”, uma grandeza finita. Bolzano pensa, com justiça, que o conjunto dos elementos de N não é, ele mesmo, elemento de N. Deduz-se que não se pode atribuir a este conjunto nenhum número: “não se pode chamar *número* esta pluralidade infinitamente grande”. Mas é bem “um exemplo incontestável de grandeza infinitamente grande”.

A distinção entre número e grandeza, que permite conceber grandezas infinitas e evitar o paradoxo do número de todos os números, é também aquela que impede Bolzano de conceber "números infinitos". Se o conceito de número pudesse ser ampliado de modo a compreender tão bem os números finitos (os elementos de N), como os números não finitos (não pertencentes a N), poder-se-ia então, como faria Georg Cantor, atribuir ao conjunto dos elementos de N o primeiro cardinal transfinito, denotado por $\aleph_0$. Invocamos esse resultado posterior nos *Paradoxos* a não ser para mostrar que Bolzano *não concebe* a extensão do conceito de número ao domínio do infinito: aquilo que "não deve chamar número" *não é* um número. Não mais que em Leibniz, não há para ele números infinitos – mesmo no plural –, mas somente pluralidades e grandezas infinitas que, por definição, não são determinadas por números. A idéia de número (cardinal) infinito é confusa, mas a de grandeza infinita não é. Existem grandezas infinitas, que dão lugar ao conceito de grandeza infinita, portanto, a um conceito de grandeza mais geral que o de número (os números são grandezas, mas a recíproca é falsa). Falam-se da "expressão de números infinitos" e de "conceito de número infinito" como do que corresponde, por exemplo, à soma da série dos números naturais: 1 + 2 + 3 + ... *in inf*. , nos "Paradoxos", acusa de modo radical a disjunção entre número e grandeza, não autorizando a associação entre os termos "número" e "infinito".

Parece tratar-se de indissociação entre número e grandeza às respostas dadas pelos estudantes no estudo de Igliori e Silva quando dizem: o conjunto dos naturais é maior que o segmento de reta, pois o primeiro é infinito e o segundo, não; o segmento de reta é limitado, a reta tem infinitos pontos, logo, a cardinalidade da reta é maior; o segmento é finito, portanto, menor que um conjunto infinito.

4. A unicidade do infinito

Na Matemática, a diferenciação dos conjuntos infinitos é feita por meio de suas cardinalidades. Consideram-se dois conjuntos com a mesma cardinalidade se existe uma correspondência biunívoca entre eles. A cada conjunto pertencente à classe de conjuntos que tem a mesma cardinalidade está associado um número cardinal denotado por: card A ou por $|A|$. E, dois conjuntos têm cardinalidade diferente se existir uma função injetiva entre eles, não existindo, porém, uma função sobrejetiva.

Na história, é referenciado que o mais notável feito de Cantor consistiu em demonstrar, com rigor matemático, que a noção de infinito não era uma noção indiferenciada. Nem todos os conjuntos infinitos são de igual "tamanho" e, portanto, é possível ordenar seus "tamanhos". O conjunto dos números irracionais, por exemplo, tem "tamanho maior" que "o" do conjunto dos números racionais. Esses resultados eram tão chocantes à intuição humana que contemporâneos de Cantor como, por exemplo, Poincaré, condenaram a teoria dos números transfinitos como uma "enfermidade". Kronecker, um dos professores de Cantor, classificou-o de "charlatão científico" "renegado" e "corruptor da juventude".

Bolzano considera a correspondência um a um não como um paradoxo, mas como uma característica dos conjuntos infinitos. Está aí sua grande originalidade em relação a todos os seus precursores. E mais, não hesita em se fundamentar na existência de uma tal correspondência para afirmar que, eles têm o *mesmo conjunto de elementos*. Bolzano considera que, nesse caso, os dois conjuntos representam *o mesmo infinito*, embora o segundo seja uma parte própria do primeiro. Por esta vez, Bolzano admite contra Euclides, Aristóteles e toda tradição, que há um ponto de vista no qual a parte pode ser igual ao todo.

No § 20, onde aparece de início essa propriedade, seu argumento contraria aquele que diz que conjuntos em correspondência biunívoca podem ter entre eles “as mais variadas relações de grandeza”. Por exemplo, o conjunto dos pontos do intervalo $[0,5]$ da reta real é “menor” que o conjunto dos pontos do intervalo $[0,12]$, desde que, esteja estritamente contido nele. Define, portanto, uma relação de ordem por inclusão estrita e trabalha para construir uma aritmética do infinito sobre essa relação de ordem. A preocupação, agora, é com *muitos* infinitos diferentes, pois, desde que um conjunto esteja contido estritamente em outro, aquele é “menor” que este. Para que conjuntos infinitos sejam iguais, é preciso, no limite, e Bolzano não recua diante desta estreiteza, que sejam idênticos. Contrariamente a isso, admitimos após Cantor, que a bijeção entre dois conjuntos infinitos não é suficiente. Bolzano, ao definir o que chama da “igualdade perfeita”, ou seja, aquela que tem lugar em condições parecidas entre conjuntos finitos, salienta que é preciso que a pluralidade dos termos seja “a mesma” nos dois conjuntos. Isto é enunciado como um teorema, mas o desconsidera em parágrafos superiores, quando diz que o conjunto dos inteiros naturais e o conjunto de seus quadrados são o “mesmo conjunto”.

Nos artigos da educação matemática numa exploração didática que leve em conta o modelo figural de ponto é indicada a seguinte preocupação: numa abordagem em que se utiliza um modelo figural de ponto de pequenas manchas corre-se o risco de substituir a estratégia do uso de um modelo intuitivo por um modelo mais complexo, mas ainda intuitivo, no qual o infinito é igual a infinito.

Fundamental para os pesquisadores da educação matemática não é a existência e a influência dos modelos tácitos em nosso pensamento no domínio do infinito, mas que a persistência e o impacto de tais modelos pictoriais precipite um efeito de tomar o infinito como único, mesmo em indivíduos já altamente treinados em matemática e que conheçam a natureza abstrata dos objetos matemáticos. Explicam que a enorme dificuldade que Cantor teve no seu tempo, quando expôs os seus achados, a respeito do infinito atual, veio de matemáticos altamente treinados que não conseguiam se livrar do impacto dos modelos pictoriais tácitos primitivos em seus raciocínios matemáticos. Nunca nenhum desses matemáticos pôde admitir que um ponto é genuinamente uma pequena mancha, no entanto, rejeitaram o que Cantor disse sobre o conjunto de pontos de um segmento, de um quadrado e de um cubo serem equivalentes.

Um outro aspecto levantado é que se o infinito é equivalente, intuitivamente, com inesgotabilidade, todos os conjuntos infinitos podem ser considerados equivalentes.

No artigo de Igliori e Silva as respostas: os conjuntos são infinitos, sendo assim, não dá para saber quantos números existem neles; infinito é igual a infinito, portanto, os dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos, relacionam-se com a suposta unicidade do infinito, concepção existente entre os estudantes investigados.

5. A noção de infinito em potencial dificulta a concepção de infinito atual, ou a concepção do verdadeiro infinito.

Na introdução dos paradoxos, Sinaceur – o tradutor da escrita em alemão para o francês – apresenta como um dos problemas no estudo do infinito o fato de ter sido considerado desde Aristóteles a Leibniz, como algo em potencial ou como ficção. É com Arquimedes, no cálculo do volume de uma esfera e de um cone, que se tem a noção de infinito em potencial.

Nos "Paradoxos", Bolzano defende idéias sobre o infinito ser um conceito também "objetual", isto é, como o de número inteiro, de fração ou de grandeza irracional, decorrendo pela primeira a atribuição de um mesmo estatuto *lógico* para o finito e para o infinito. Também afirma que o infinito existe *matematicamente* sob o modo *atual* e não somente *potencial* (exemplo geométrico simples, uma reta infinita), do que decorre um mesmo estatuto matemático para o finito e para o infinito. Esta *atualidade* se verifica tanto nos exemplos de coisas não reais, como o espaço e o tempo, quanto nos domínios dos seres*, Deus, com certeza, e também as criaturas: "mesmo no domínio do real, encontramos por toda parte o infinito" donde a identidade do estatuto ontológico do finito e do infinito.*

Bolzano tem o incomparável mérito de introduzir, de fato, o conceito de conjunto infinito e de dar uma *legitimidade matemática* ao infinito atual, o "verdadeiro infinito". Admitir o infinito potencial, para ele, é determinar o infinito a partir do finito, como aquele que não se alcança ou que não se esvai jamais. **Admitir apenas o infinito potencial é, de fato, não sair do finito.** Apesar de tudo isso, assim como Galileu, não consegue ultrapassar a força do infinito potencial e utilizar a noção de infinito atual para caracterizar, definitivamente, os conjuntos infinitos como só vai ocorrer com Cantor.

Nas pesquisas da educação matemática, a dualidade do conceito potencial e atual se expressa por meio da consideração de um conceito como processo e como objeto. No artigo de Monaghan, por exemplo, essa dualidade é citada como elemento de estudo das concepções dos estudantes. É aí evidenciado que, como muitos conceitos matemáticos, o infinito, pode ser visto tanto como um processo, no princípio da indução ou *loopping* infinitos na linguagem dos computadores, quanto como objeto, como um grande número ou a cardinalidade de um conjunto. É observado por Monaghan que a linguagem de uma criança ao falar sobre infinitude, a reflete como um processo: o que continua e continua é infinito, realizando a infinitude não como algo, mas como o ato de continuar sempre. Para os estudantes, a noção de processo é também usada como um esquema de verificação, se uma questão dada tiver uma resposta infinita. O fato de um jovem utilizar expressões como o infinito, não permite ao pesquisador inferir que aquele considere infinidade como um objeto, ou seja, que tenha a noção de infinito atual.

A dualidade processo-objeto pode apresentar contradições quando se compara a cardinalidade de conjuntos. Infinidade como um processo, como um esquema de avaliação, pode levar a respostas diferentes: se dois conjuntos são tais que continuam e continuam, então, há o mesmo número de elementos nos dois; se dois conjuntos são tais que continuam e continuam, então não se pode compará-los.

A infinidade também aparece como sendo um objeto. Evidência imediata pode ser vista nas respostas afirmativas dadas por 147 dos 190 estudantes, sujeitos da pesquisa de Monaghan à questão: podemos pensar 1, 2, 3, ... como um único conjunto? Ou quando questionados 60 dos 190, responderam afirmativamente à questão: é o ∞ um número enorme? Os jovens oscilavam em suas convicções, demonstrando nas entrevistas que suas concepções do infinito como objeto, ou de forma atual, não correspondiam ao que as respostas afirmativas pareciam indicar.

Aos cinco pontos elencados, poderíamos, ainda acrescentar muitos outros, como por exemplo, o da incomensurabilidade de grandezas, todos com significativa interferência no desenvolvimento da matemática e igualmente causadores de dificuldades no processo de ensino e aprendizagem.

O importante é colocar em questão que se tais conceitos perturbaram os homens por tanto tempo, não pode ser tratado entre os jovens sem que se leve em consideração sua complexidade.

A história e a epistemologia dos conceitos matemáticos não se constituem os únicos elementos que permitem estudar o processo de ensino e aprendizagem de um conceito matemático, mas podem contribuir para o conhecimento de concepções que os estudantes possam trazer de forma prévia e, com as quais, é preciso se defrontar para suplantá-las.

BIBLIOGRAFIA

ACZEL, Amir O. *O mistério do Aleph, a matemática, a cabala e a procura pelo infinito*. Editora Globo. 2003.

BOLZANO, Bernard. *Las paradojas del Infinito*. Servicios Editoriales de la Faculdad de Ciencias, UNAM. México. 1991.

BOLZANO, Bernard. Les paradoxes de l'infini. Paris. Éditions du Seuil. 1993.

BROLEZZI, Antonio Carlos. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática*. FEUSP, 1997. Tese de doutorado em Educação.

DAHAN-DALMENICO, Amy e PEIFFER, J. *Une histoire des mathématiques*. Paris. Éditions du Seuil. 1986.

DAUBEN, Joseph W. *Georg Cantor.* Investigacion y Ciencia. Prensa Cientifica S.A. Muntaner. Barcelona (98). 1995.

DIAS, Marisa da Silva. *Reta real: conceito imagem e conceito definição*. São Paulo, PUC-SP, 2002. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática.

FISCHBEIN, Efraim. *Tacit models an infinity*. Educational Studies in Mathematics (An International Journal). V. 48, n. 2 e 3 (309-329), 2001.

GARBIN, S. y AZCÁRATE, C. *Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años.* Enseñanza de las Ciencias, 20(1), 87-113, 2002.

HOURYA, Sinaceur. Les Paradoxes de l'infini- Introduction et les notes. Paris. Éditions du Seuil. 1993.

IGLIORI, Sonia B. C. e SILVA, Benedito A. *Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino-aprendizagem*. 21ª Reunião Anual da Anped. 1998.

JAHNKE, Hans Niels. *Cantors' cardinal and ordinal infinities: an epistemological and didactic view.* Educational Studies in Mathematics (An International Journal). V. 48, n. 2 e 3 (175-197), 2001.

KLEINER, Israel. *History of the Infinitely small and the infinitely large in calculus*. Educational Studies in Mathematics (An International Journal). V. 48, n. 2 e 3 (137-174), 2001.

KUBRUSLY, Ricardo S. *Paradoxos & Matemática & Psicanálise*. Extraído do *site* http://www.dmm.im.ufrj.br/nsk/.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise. São Paulo. Ed. Edgard Blücher. 1976

MONAGHAN, John. *Young people's ideas of infinity.* Educational Studies in Mathematics (An International Journal). V. 48, n. 2 e 3 (239-288), 2001.

MORENO, Luis E. e WALDEGG, G. *The evolution of actual mathematical infinity.* Education Studies in mathematicas. V. 22 (211-231), 1991.

MORENO, Luis E. e WALDEGG, G. *The intuitions of infinity.* Education Studies in mathematicas. V. 10 (3-40), 1991.

NAVARRO, Pedro Dias. *Reflexiones sobre El Concepto de Infinito*. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. 2003.

NIVEN, Ivan. *Números Racionais e Irracionais*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 1984

O'CONNOR, J. J. and ROBERTSON, E. F. *A history of set theory*. School of Mathematics and Statistics – University of St. Andrews, Scotland. 1996.

ORTIZ, José Ramón. *El concepto de infinito*. Associação Matemática Venezolana. Boletin Vol I, nº 2, Año 1994.

SALVITTI, Reinaldo. *Os paradoxos na construção da matemática*. Educação matemática em revista. Nº 5, ano 3.

SANTOS, Vinício de Macedo. *Infinito, concepções e conseqüências pedagógicas*. FEUSP, 1995. Tese de doutorado em Educação.

TALL, David e TIROSH, Dina. *The never ending struggle guest editors*. Educational Studies in Mathematics (An International Journal). V. 48, n. 2 e 3 (129-136), 2001.

TALL, David. *Natural and formal infinities.* Educational Studies in Mathematics (An International Journal). V. 48, n. 2 e 3 (199-238), 2001.

TIROSH, Dina. *The role of student's intuitions of infinity in teaching the Cantorian Theory.* Advanced Matematical Thinking (Kluver Academic Publishers). (199-214).

TSAMIR, Pessia. *When “the same” is not perceived as such: the case of infinite sets.* Educational Studies in Mathematics (An International Journal). V. 48, n. 2 e 3 (289-307), 2001.

WALDEGG, G. *Esquemas de respuesta ante el infinito matemático*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México. Doctoral disertación. 1988.