

**CARLOS EDUARDO DA SILVA**

**A NOÇÃO DE BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL É  
TRABALHADA COMO “FERRAMENTA EXPLÍCITA” PARA  
OS ASSUNTOS DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO?**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PUC/SP  
São Paulo  
2005**

**CARLOS EDUARDO DA SILVA**

**A NOÇÃO DE BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL É  
TRABALHADA COMO “FERRAMENTA EXPLÍCITA PARA  
UM CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO”?**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado**

**PUC/SP  
São Paulo  
2005**

**Banca Examinadora**

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

*A minha família  
pelo apoio na busca  
dessa realização*

---

## **AGRADECIMENTOS**

---

A *Jeová Deus*, pela nossa existência.

A minha orientadora, *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado*, por seu estímulo, compreensão e críticas construtivas, que possibilitaram o desenvolvimento dessa dissertação e o meu crescimento como aprendiz de pesquisador.

As professoras da banca examinadora, *Professora Doutora Bárbara Lutaif Bianchini* e a *Professora Doutora Marlene Alves Dias*, pela atenção e pelas valiosas contribuições.

A *todos os Professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP*, pela atenção e pelos conhecimentos adquiridos.

A *todos os meus amigos*, que de uma ou de outra maneira contribuíram para a realização deste projeto. Em especial, ao amigo *Marcelo Branco de Almeida*, que me encorajou a seguir por este caminho.

A **CAPES**, pela ajuda financeira para concluir esta pesquisa.

À **UNISA**, instituição que me acolheu, e a todos os meus colegas professores dessa instituição.

A todos os *colegas da PUC-SP e da UNISA*, pelo companheirismo e carinho durante esse percurso.

*O Autor*

---

## **RESUMO**

---

Este trabalho visou obter informações sobre a utilização da noção de base de um espaço vetorial em assuntos de outras disciplinas que não a Álgebra Linear de um curso de Ciência da Computação. Para isso levou-se em conta o resultado de sete entrevistas com professores deste curso. A análise dessas entrevistas utilizou como suporte teórico os trabalhos do grupo francês composto por Dorier, Robert, Robinet e Rogalski, sobre recursos-meta, assim como também a dialética ferramenta-objeto de Régine Douady. Concluiu-se que a noção de base é utilizada implícita ou explicitamente em quatro assuntos abordados no curso de Ciência da Computação. Essa conclusão, fornece os elementos necessários para a elaboração de seqüências didáticas que incorporem essas situações como recursos-meta para facilitar a compreensão do aluno sobre a noção de base em aula de Álgebra Linear.

**Palavras-chave:** Álgebra Linear, base de um espaço vetorial, recursos–meta, ferramenta–objeto, Ciência da Computação.

---

## **ABSTRACT**

---

This research aimed the investigation of the utilization of basis' notion of vectorial space in matters of other classes than Algebra Linear of a course of Computation Science. To achieve this, the results collected in seven interviews with professors of this course were analyzed. The analysis of the interviews supported by Dorier, Robert, Robinet and Rogalski ideas about meta resources and the Douady's dialectic tool-object. As result, it was concluded that basis' notion of vectorial space is utilized as tool in the sense of Douady, principally in four matters of Computation Science. This conclusion, give us the necessary elements for the construction of didactic sequences that incorporates this situations as meta resources to student's better comprehension about basis' notion in Linear Algebra classes.

**Key-words:** Linear Algebra, basis of a vectorial space, meta-resource, tool-object, Computation Science.

---

## **ÍNDICE**

---

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	10
<b>CAPÍTULO 1 .....</b>	12
<b>Problemática e Objetivo .....</b>	12
<b>CAPÍTULO 2 .....</b>	19
<b>Referenciais Teóricos e Metodológicos .....</b>	19
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	42
<b>Entrevistas .....</b>	42
<b>Descrição e análise das entrevistas .....</b>	55
Professor Alves .....	55
Professor Braga .....	56
Professor Castro .....	58
Professor Dante .....	61
<b>Conclusão parcial .....</b>	64
Professor Freire .....	66
Professor Esteves .....	69
Professor Fonte .....	77
<b>Conclusão parcial .....</b>	80
<b>CAPÍTULO 4 .....</b>	84
<b>Considerações Finais .....</b>	84
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	91

---

## **INTRODUÇÃO**

---

A relevância do tema é a de que a Álgebra Linear consta do currículo do curso de Ciência da Computação e algumas pesquisas apontam-na como uma das disciplinas que mais reprovam. Esta afirmação está refletida em pesquisa da UNICAMP que visou levantar as disciplinas-problema desta e de outras Instituições Públicas do Estado de São Paulo, e apontou a Álgebra Linear como um dos exemplos. (CELESTINO, 2000)

Segundo Dorier, as questões que nos parecem hoje naturais necessitaram decênios de reflexões. Este fato nos ajuda a compreender as dificuldades envolvidas no ensino/aprendizagem da Álgebra Linear.

Após diversas investigações, Dorier e outros pesquisadores franceses concluíram que não existem situações-problema próprias para a introdução desses conceitos elementares em um primeiro curso de Álgebra Linear, o que os levou a sugerir aos investigadores da Educação Matemática dois caminhos às pesquisas sobre Álgebra Linear: a busca de alavancas-meta e de recursos da informática. Essa pesquisa está inserida em um projeto que vem trilhando esse primeiro caminho sugerido.

No capítulo 1 trago a problemática e o objetivo dessa pesquisa. No capítulo 2 falo sobre o quadro teórico utilizado sobre alavanca-meta de Dorier e outros pesquisadores franceses, e a dialética ferramenta-objeto de Régine Douady, além de um apanhado dos resultados das outras pesquisas já realizadas nesse mesmo projeto no qual se insere minha pesquisa. Neste mesmo capítulo exponho os procedimentos metodológicos necessários ao longo dessa pesquisa.

No capítulo 3 trago os roteiros de entrevistas utilizados, com suas respectivas alterações e análises à priori. Também apresento informações e/ou trechos da transcrição das entrevistas selecionados pela pertinência e contribuição aos objetivos de minha investigação. Essas informações e/ou trechos selecionados da transcrição das entrevistas vêm acompanhados por uma análise.

No capítulo 4 trago as considerações finais, destacando quais situações de um curso de Ciência da Computação necessitam da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta.

---

## CAPÍTULO 1

---

### Problemática e Objetivo

Lecionei matemática no Ensino Médio durante seis anos e leciono no Ensino Superior há quatro anos. Minha preocupação com as dificuldades que detectei no ensino médio e que pude perceber, persistiam no Ensino Superior, fez-me buscar o Programa de Pós-graduação da PUC-SP em Educação Matemática, pois supunha que de alguma forma poderia melhorar as minhas aulas e, talvez, atingir um número maior de alunos.

Quando entrei no programa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, escolhi participar das reuniões do grupo denominado G5 cujo tema é a Educação Algébrica. Participando das reuniões deste grupo demonstrei interesse em pesquisar o ensino e aprendizagem da Álgebra no Ensino Superior.

Nessa ocasião, foi-me sugerido presenciar as reuniões do grupo liderado pela Dra. Silvia Dias Alcântara Machado. Esse grupo trabalhava desde 2002 no projeto “*Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial*”.

Dorier em seu livro *On the teaching of Linear Algebra* (2000), conta que ao conhecer Plancherel, numa conferência em Zurich, o mesmo afirmou que o curso de Álgebra Linear, entre os cursos que havia lecionado parecia ser o mais difícil. Afirmação esta, refletida em pesquisa da Unicamp que apontou a Álgebra Linear como uma das disciplinas “problema” dessa e de outras Instituições públicas (cf: pesquisa Unicamp, in Celestino, 2000).

O projeto de pesquisa “*Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial*” está voltado para a busca de **recursos-meta** que auxiliem no ensino e aprendizado do **conceito de base de um espaço vetorial**. Embora essa noção seja um dos conceitos elementares de Álgebra Linear, nem por isso podemos afirmar que seja simples, natural, isto é, de fácil compreensão para o aluno de um primeiro curso de Álgebra Linear, pois de acordo com Jean Luc Dorier<sup>1</sup>:

...os conceitos, os mais elementares da Álgebra Linear necessitaram decênios de reflexões em torno de questões que nos parecem, hoje, tão naturais. (Dorier, 2000, p. 5)

O reconhecimento de que os conteúdos de Álgebra Linear, os mais elementares, demoraram muito tempo para serem desenvolvidos na forma como se encontram hoje em dia e de que constituem problema para a compreensão dos alunos, justificam a importância de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de noções elementares da Álgebra Linear, como por exemplo, a noção de base de um espaço vetorial.

---

<sup>1</sup> As traduções foram realizadas pelo autor desta pesquisa e sempre que necessário, o autor colocou entre parênteses e itálico o que acrescentou para esclarecimento sobre o que está sendo traduzido.

Os recursos-meta são recursos sobre o conhecimento matemático que têm por objetivo auxiliar o aprendizado do objeto matemático em estudo e quando atingem esse objetivo são chamados de alavancas-meta, termo introduzido por Aline Robert. No capítulo 2, serão fornecidos mais esclarecimentos sobre recursos-meta e alavancas-meta, no discurso da fundamentação teórica.

É importante esclarecer que o que entendemos por desenvolvimento da noção de base não é simplesmente sua definição, mas sim vários assuntos diretamente relacionados da Álgebra Linear que são abordados antes da base, a saber, espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear, dependência linear e sistema de geradores, até chegar à noção de base.

Quando ingressei no projeto do grupo G5, “*Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial*”, este já contava com resultados de pesquisas de outros integrantes do grupo. A pesquisa de Marcos Roberto Celestino, 2000, intitulada “Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: As pesquisas brasileiras na década de 90” apresenta o estado da arte das pesquisas brasileiras sobre Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear. Em seu estudo Celestino concluiu que, embora houvesse um pequeno número de obras brasileiras, estas apresentavam resultados coerentes com as pesquisas “mundiais”, algumas vezes contribuindo com resultados inéditos; além disso, apontavam sugestões para outras investigações na área do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

A pesquisa realizada por Claudia Araújo no âmbito do projeto foi a primeira a investigar os recursos-meta utilizados no desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial. Araújo investigou os recursos-meta em livros didáticos e apresentou sua pesquisa na dissertação de título “A metamatemática no livro

didático de Álgebra Linear”, finalizada em 2002. Na conclusão de seu trabalho, a autora afirma que dos três livros didáticos de Álgebra Linear mais usados em cursos de graduação das principais universidades de São Paulo há pouquíssimas situações que apresentam recursos-meta capazes de se transformar em “alavancas-meta”, quando do estudo da noção de base de um espaço vetorial.

Ao me incorporar ao grupo de pesquisa, havia duas investigações sendo feitas. Zoraide Padredi realizava entrevistas com professores de Álgebra Linear de diversas universidades de São Paulo, procurando captar os recursos-meta presentes nos discursos dos professores, quando eles falavam sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial. Ela concluiu que a noção de base foi destacada como prioritária pelos professores e que duas formas de abordagens diferentes dessa noção, destacadas em seus discursos, constituíram-se recursos-meta. Além desses, outros recursos identificados pela autora, que não tratam diretamente da noção de base, mas estão correlacionados com a mesma, foram mencionados em sua dissertação. Padredi aponta esses recursos-meta encontrados no discurso dos professores, sugerindo que são passíveis de se tornarem alavancas-meta para a compreensão dos alunos. O número de recursos-meta encontrados por Padredi supera em muito a quantidade de recursos-meta encontrados em livros didáticos por Araújo.

Outra pesquisa já finalizada e que estava em andamento na época de minha integração ao projeto é a de Luis Carlos Barbosa de Oliveira defendida em fevereiro de 2005 e intitulada “Como funcionam os Recursos-Meta em aula de Álgebra Linear?”. A intenção de Barbosa de Oliveira nessa investigação era a de confrontar o discurso de um professor de Álgebra Linear em sala de aula com a concepção desenvolvida por seus alunos sobre a noção de base de um espaço

vetorial. Por meio dessa “confrontação” o autor pretendia verificar se os recursos-meta utilizados pelo professor contribuíram efetivamente para o aprendizado dos alunos, tornando-se, portanto alavancas-meta para os mesmos.

Barbosa de Oliveira verificou a efetividade de alguns dos recursos-meta utilizados, através das entrevistas com os alunos que freqüentaram a aula do professor observado. O autor sugere em sua conclusão que tais recursos-meta tiveram ação de alavanca-meta para alguns alunos.

Um dos recursos-meta citado como possível alavanca-meta para os alunos é o da interação de domínios e dialética ferramenta-objeto (1987). Essas idéias foram criadas por Régine Douady, que ao pesquisar o desenvolvimento de concepções matemáticas de estudantes, elaborou a teoria da dialética ferramenta-objeto (1987). No desenvolvimento dessa teoria assumiu que:

“Saber matemática reveste um duplo aspecto. De uma parte é ter disponibilidade funcional de certas noções e teoremas matemáticos para resolver problemas, interpretar novas questões (...). Num tal funcionamento científico, as noções e teoremas matemáticos tem um estatuto de ferramenta. (...) Saber matemática é também identificar as noções e teoremas como elementos de um corpo cientificamente e socialmente reconhecido. É também formular definições, enunciar teoremas desse corpo e demonstrá-los. Dizemos então que esses saberes têm estatuto de objeto (...) Ensinar, para um professor, é criar as condições que produzirão um saber entre os alunos. E, aprender, para um aluno, é se engajar numa atividade intelectual, pela qual se produza a disponibilidade de um saber com seu duplo estatuto de ferramenta e objeto. (Maranhão, 1999 p. 4, apud Douady, 1993).

Assim, tendo por base a teoria da dialética-ferramenta-objeto de Douady, considero que as condições produzidas pelos professores para propiciar a

aprendizagem dos alunos muitas vezes se constituem de recursos-meta. Tais recursos podem envolver situações que possibilitam tanto uma compreensão da noção como objeto quanto como ferramenta. Toda noção matemática deve ser ampliada, aprofundada, via utilização dessa noção em diferentes contextos, tanto intra-matemática quanto extra-matemática.

Barbosa de Oliveira (2005), como já se viu, estudou as concepções dos alunos sobre base, imediatamente após haverem concluído a disciplina de Álgebra Linear, onde essa noção foi tratada intra-matemática, ao tratar, por exemplo, das transformações lineares.

Considerei então, interessante investigar a concepção de base dos alunos após terem cursado uma ou mais disciplinas específicas de sua área que exigissem em seus programas a Álgebra Linear como co ou pré-requisitos. Neste caso estaria verificando o uso feito da noção de base em situações extra-matemáticas.

Pretendo com esta investigação responder as seguintes questões:

- O aluno de Ciência da Computação, após ter cursado disciplinas que exigem a Álgebra Linear como pré ou co-requisito, tem a oportunidade de ampliar, aprofundar sua concepção de base de espaço vetorial, utilizando essa noção como ferramenta explícita?
- Quais as situações dessas disciplinas que propiciam a utilização da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta?

- Tais situações podem ser transformadas em recursos-meta para melhor compreensão de base de um espaço vetorial em qualquer curso de Álgebra Linear?

Espero que as respostas a essas questões possam contribuir para o projeto maior, indicando possíveis assuntos de Ciência da Computação que utilizam a noção de base como ferramenta, propiciando assim a construção de recursos-meta para melhor compreensão dessa noção pelos alunos.

---

## CAPÍTULO 2

---

### Referenciais Teóricos e Metodológicos

#### Introdução

Neste capítulo apresento as principais idéias, teorias que embasaram minha pesquisa seguida da metodologia que possibilitou responder as questões do presente trabalho.

#### Quadro Teórico

A seguir discorro sobre os trabalhos dos pesquisadores Jean Luc-Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert e Jacqueline Robinet que produziram pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear. Em seguida, apresento a teoria da Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady que também me auxiliou na análise dos dados desta investigação. Finalizo com a apresentação das pesquisas realizadas no âmbito do projeto “Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial”.

## Pesquisas francesas sobre ensino-aprendizagem de Álgebra Linear

O livro “On the teaching of Linear Algebra”, editado por Jean Luc-Dorier (2000), apresenta diferentes pesquisas no âmbito do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, algumas do próprio Dorier, outras de colegas seus como Mark Rogalski e de pesquisadores estrangeiros, como Guerson Harel sobre o mesmo tema.

A preocupação dos pesquisadores franceses por esse tema fundamenta-se na percepção que têm sobre o fato de haver uma **aparente** simplicidade, naturalidade nos conceitos da Álgebra Linear, embora conforme já citei anteriormente, esses conceitos necessitaram “decênios de reflexões” para serem estabelecidos.

Após diversas investigações, esses pesquisadores concluíram que não existem situações-problema próprias para a introdução desses conceitos elementares em um primeiro curso de Álgebra Linear. Isto se dá porque as situações encontradas ou necessitam de conhecimentos que os alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear ainda não dispõem, ou podem ser resolvidas com o auxílio de conhecimentos adquiridos anteriormente sem necessidade de apelar para a Álgebra Linear.

A constatação da não existência de situações-problema adequadas para o desenvolvimento das noções elementares da Álgebra Linear levou esses pesquisadores a sugerir a investigadores da Educação Matemática dois caminhos

às pesquisas sobre Álgebra Linear: a busca de alavancas-meta e de recursos da informática.

Detalharei o primeiro caminho que corresponde ao do projeto que abarca este trabalho: a busca de recursos-meta que possam tornar-se alavancas-meta para melhor compreensão dos estudantes, uma alternativa para suprir a ausência de situações-problema.

Marc Rogalski, em trecho do livro *L'enseignement de L'Algèbre Linéaire en Question* (1997), evidencia a importância dos recursos-meta da seguinte forma:

Possuir recursos no ensino, em momentos propícios e bem determinados, para reflexões ou atividades de ordem meta, é uma maneira de levar em conta a natureza particular dos conceitos de álgebra linear. Um dos objetivos é de esclarecer a natureza desses conceitos (o que é uma equação linear geral? Relação entre posto de vetores e posto de equações, etc). Outra finalidade é o de provocar nos estudantes uma atividade de reflexão sobre certos conceitos matemáticos (por exemplo: qual é o papel dos axiomas de espaços vetoriais?) (ROGALSKI in DORIER et al (1997), p. 164)<sup>2</sup>

Desta forma Rogalski explicita duas características de um recurso-meta que justificam sua aplicação: primeiramente, o uso adequado desse recurso pelo professor “é uma maneira de evidenciar a natureza particular dos conceitos de Álgebra Linear” e, em segundo lugar, o fato de que pode “provocar nos estudantes uma atividade de reflexão sobre certos conceitos matemáticos”.

---

<sup>2</sup> Avoir recours dans l'enseignement, à des moments propices et bien déterminés, à des réflexions ou des activités d'ordre meta, est une manière de tenir compte de la nature particulière des concepts de l'algèbre linéaire . Un des objectifs est d'éclaircir la nature particulière de ces concepts (qu'est-ce qu'une équation linéaire générale? rapport entre rang de vecteurs et rang d'équations, etc). Un autre but est de provoquer chez les étudiantes une activité de réflexion sur certains concepts mathématiques (par ex.: quel est le rôle des axiomes des espaces vectoriels?)

De acordo com Robert e Robinet (1996) os recursos-meta aparecem nos diversos contextos sob várias formas: nos métodos, nas estruturas e organização do conhecimento matemático, nos jogos de quadros, nos questionamentos, nos exemplos e contra-exemplos.

Esses recursos, segundo as autoras, são geralmente usados por professores que desconhecem este termo. Exemplificando essa afirmação, as autoras consideram que os professores estão utilizando recursos-meta quando utilizam elementos relativos ao conhecimento do aluno sobre o conhecimento a ser estudado, ou quando na fase de institucionalização o discurso matemático vem acompanhado de outro, sobre a matemática, de modo a contextualizar os novos conhecimentos em estudo.

O uso que um professor faz da interação de domínios (jogos de quadros) ao trabalhar com os alunos sistemas lineares, lançando mão de representações algébrica e geométrica para obter a solução desejada constitui um exemplo de recurso-meta. Esse recurso-meta pode gerar no aluno uma reflexão sobre o conceito em estudo, de modo a contribuir para o seu aprendizado. Outros exemplos serão descritos a seguir na parte em que discorro sobre as pesquisas já desenvolvidas no projeto “Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial”.

As mesmas autoras afirmam que “os metaconhecimentos”, neste trabalho denominados recursos-meta, aparecem incorporados aos conhecimentos dos alunos mais experientes, justificando assim a introdução desses recursos-meta como tentativa de ajudar o aluno que apresenta mais dificuldade ou é iniciante, na compreensão do objeto de estudo enfocado.

Os recursos-meta podem auxiliar a aprendizagem, e quando isso efetivamente ocorre os denominaremos de alavancas-meta. Jean Luc Dorier explica que:

A expressão “alavanca meta” (ou simplesmente ‘meta’) designa o uso, no ensino, de informação ou conhecimento SOBRE matemática. Isto pode envolver operações matemáticas, seu uso, o aprendizado de matemática, e isso pode ser de seus elementos gerais ou particulares. (Dorier, 2000, p. 151).

Neste trabalho adoto o termo alavanca-meta conforme especificado por Dorier, mas não utilizarei sua outra denominação ‘meta’ por julgar que isso pode confundir o leitor.

A seguir apresento como Dorier caracteriza de forma minuciosa o termo alavanca-meta:

(1) (*O uso de*) Informações sobre o que constitui o conhecimento matemático (métodos, estruturas, (re) organização). Métodos são definidos como procedimentos aplicáveis a um conjunto de problemas semelhantes em um dado campo: os métodos designam o que há de comum na resolução de problemas e não a técnica propriamente (o algoritmo). Isto implica uma certa classificação de problemas a serem resolvidos e a identificação de ferramentas e técnicas disponíveis. (2) (*O uso de*) Informações sobre o que constitui uma operação matemática: por exemplo, informação sobre o papel da interação de domínios na solução de problemas (*Regine Douady*), o papel do questionamento, exemplos e contra-exemplos, o papel da identificação de parâmetros em questões matemáticas, o papel do teste, etc. (Dorier, 2000, p. 151)

São muitas as formas de intervenção meta, as quais identificaremos pela expressão recursos-meta, e assumo, como os pesquisadores franceses, que esse tipo de recurso, quando atinge seu objetivo, será denominado de alavanca-meta.

É importante apresentar a seguinte observação dos pesquisadores franceses:

Contudo a distinção entre matemática e recurso-meta, no ensino de matemática, não é considerada absoluta: reconhecendo que o caráter de alavanca-meta de certo conhecimento, depende da experiência a priori do estudante confrontado com esse conhecimento. Assim certos métodos podem se constituir em alavanca-meta para estudantes que ainda não conhecem completamente suas aplicações, enquanto para o professor ou alunos mais avançados isso é (considerado) praticamente matemática. Para esses (*últimos*) a distinção é irrelevante. (Dorier 2000, p. 152)

Este trecho torna explícito que embora seja relativamente fácil perceber os recursos-meta matemáticos utilizados por um professor, o mesmo não acontece com a identificação das alavancas-meta, pois um recurso pode se constituir em alavanca-meta para uns e não para outros. Assim a detecção das alavancas-meta é um objetivo difícil e bastante delicado.

Finalizando, os pesquisadores franceses acrescentam que:

Em outras palavras, a palavra (*alavanca*)-meta será usada se um elemento contribuiu para (*um conhecimento de*) matemática ser aprendida, conhecimento ainda parcialmente não adquirido. Isto explica a impossibilidade da assimilação desses elementos à matemática, ou ao menos a inutilidade de distinguí-los do conhecimento matemático ordinário.(Dorier 2000, p. 152)

Isto reitera a dificuldade em reconhecer se certo recurso-meta tornou-se uma alavanca–meta para algum aluno, pois implica em saber o que o aluno conhecia anteriormente e o que aprendeu por meio da exposição àquele recurso-meta utilizado pelo professor. É oportuno comentar que embora haja dificuldade em

reconhecer que dado recurso-meta transformou-se em alavanca para alguns alunos, fato esse reiterado por Marlene Dias durante minha qualificação de mestrado, Barbosa de Oliveira (2005), em sua dissertação que detalharei mais adiante, traz exemplos de recursos que se tornaram alavancas-meta para alguns alunos observados em entrevistas.

## **Dialética Ferramenta-Objeto de Régine Douady**

Régine Douady, ao pesquisar o desenvolvimento de concepções matemáticas de estudantes, elaborou uma teoria sobre a dialética ferramenta-objeto (1987). No desenvolvimento dessa teoria assumiu que:

"Saber matemática reveste um duplo aspecto. De uma parte é ter disponibilidade funcional de certas noções e teoremas matemáticos para resolver problemas, interpretar novas questões (...). Num tal funcionamento científico, as noções e teoremas matemáticos têm um estatuto de ferramenta. (...) Saber matemática é também identificar as noções e teoremas como elementos de um corpo científicamente e socialmente reconhecido. É também formular definições, enunciar teoremas desse corpo e demonstrá-los. Dizemos então que esses saberes têm estatuto de objeto. (...) Ensinar, para um professor, é criar as condições que produzirão um saber entre os alunos. E, aprender, para um aluno, é se engajar numa atividade intelectual, pela qual se produza a disponibilidade de um saber com seu duplo estatuto de ferramenta e objeto. (Maranhão, 1999 p. 4, apud Douady, 1993).

A dialética ferramenta-objeto é um processo no qual a cada nova utilização de um objeto matemático como ferramenta, este ganha mais significado, tornando as concepções dos alunos mais profundas.

Quando os alunos entram em contato com um novo conhecimento, em um processo de ensino-aprendizagem, esse novo conhecimento pode ter estatuto de objeto em determinado momento e de ferramenta em outro:

Dialética ferramenta-objeto: é um processo cílico organizando os papéis respectivos do professor e dos alunos, no decorrer do qual os conceitos matemáticos desempenham alternadamente o papel de ferramenta para resolver um problema e de objeto participando da construção de um saber organizado.(Douady, 1984, p. 5)<sup>3</sup>

É esse ‘processo cílico’ que permite ao aluno aprofundar seu conhecimento, e incrementar suas concepções sobre as noções em estudo. As reutilizações de um objeto matemático podem ser feitas tanto em aplicações dentro da própria matemática, quanto em aplicações em outras ciências.

Para um maior esclarecimento do que vem a ser uma ferramenta e um objeto, precisamos entender dois dos pontos importantes nos quais Régine Douady fundamentou sua teoria. Ela estudou o desenvolvimento das concepções matemáticas dos estudantes, e também observou o trabalho realizado pelos especialistas matemáticos. Douady (1984) comenta que os matemáticos se deparam com problemas que ninguém sabe resolver, e no percurso de resolução eles formulam questões, criam ferramentas conceituais, as quais se associam com ferramentas técnicas. Para atender a necessidade de que essas ferramentas conceituais sejam transmitidas à comunidade científica, os conceitos criados devem ser integrados a um corpo de conhecimentos já constituídos, adquirindo assim estatuto de objeto. Ao passo que, dizemos que um conceito é ferramenta

---

<sup>3</sup> Dialectique outil-objet: c'est un processus cyclique organisant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, au cours duquel les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé.

quando nosso interesse é focalizado no uso que se faz dele para resolver um problema.

Douady observou que no trabalho do matemático um conceito pode em determinado contexto ter estatuto de objeto e em outro, estatuto de ferramenta. A partir disso desenvolveu sua teoria sobre o processo de ensino-aprendizagem conhecida como dialética ferramenta-objeto.

Um aluno faz uso de uma ferramenta de duas maneiras, a saber, implícita ou explícita. Uma ferramenta será considerada implícita ou explícita, dependendo do fato do aluno saber ou não justificar o emprego das noções das quais faz uso. Quando um aluno usa uma ferramenta e as justificativas do procedimento em uso são noções que ele não sabe explicitar, às quais ele recorre somente em termos de ações, dizemos que se trata de uma ferramenta implícita. Caso contrário será considerada uma ferramenta explícita.

No processo de ensino-aprendizagem, no qual o aluno tem contato com o conhecimento matemático, ora com estatuto de objeto e ora com estatuto de ferramenta, ele se engaja numa atividade intelectual que poderá conter recursos-meta, pois o professor na tentativa de produzir as condições adequadas para disponibilizar um saber para o aluno, usa esse tipo de recurso para tentar gerar reflexão a respeito do objeto de estudo em foco e esclarecer a noção envolvida. Portanto, a dialética ferramenta-objeto justifica a busca de novos recursos-meta (possíveis alavancas-meta) que sejam úteis para o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial junto à alunos que se engajaram em novas atividades intelectuais, envolvendo essa noção, como ferramentas implícitas ou explícitas,

em contextos extra-matemáticos, visto que em contexto intra-matemático já foi investigado na pesquisa de Barbosa de Oliveira (2005).

É importante também ressaltar que essas novas atividades intelectuais envolvendo a noção de base de um espaço vetorial em contextos extra-matemáticos, provavelmente serão disponibilizadas em disciplinas específicas do curso de Ciência da Computação que necessitam da Álgebra Linear como pré ou co-requisitos. Assim sendo, a dialética ferramenta-objeto de Régine Douady fornece embasamento para a investigação de recursos-meta relativos ao desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial, como ferramentas implícitas ou explícitas utilizadas em contextos extra-matemáticos nessas disciplinas do curso de Ciência da Computação.

## **Projeto “Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial”**

Como já citado anteriormente, esta pesquisa está inserida em um projeto denominado “Sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial”. Assim torna-se essencial para a compreensão da mesma apresentar os resultados de pesquisas concluídas no âmbito desse projeto.

As investigações realizadas por Celestino (2000), Araújo (2002), Padredi (2003) e Barbosa de Oliveira (2005) serviram de “guia”, sugeriram e condicionaram a problemática e questões da presente investigação, o que me leva a evidenciar suas conclusões, pois estas são fundamentais para melhor compreensão desta pesquisa.

Celestino (2000) faz um levantamento das pesquisas realizadas por brasileiros na década de 90 sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear. O autor afirma que encontrou apenas seis trabalhos com a característica citada, sendo que quatro deles são de uma mesma autora, Marlene Alves Dias, um de Amarildo Melchiades da Silva e o outro de Rute Silva.

Dos quatro textos científicos de Marlene Dias, três abordaram a flexibilidade entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico e o quarto averigua a utilização do método de Gauss (1993).

Amarildo Melchiades da Silva fez um estudo histórico epistemológico, que evidencia como vários matemáticos construíram a noção de base a partir de referenciais distintos.

A contribuição do trabalho de Rute Silva foi a de evidenciar o grau de liberdade do professor na escolha da metodologia e na forma de abordar o seu curso.

Estas pesquisas mencionadas por Celestino compõem um panorama do que já havia sido pesquisado na área de Educação Matemática na década de 90 sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, de modo a contribuir para a determinação de um “caminho” para as pesquisas ligadas a um dos projetos do grupo de trabalho “G5-Educação Algébrica”, voltado a pesquisas no ensino superior.

A primeira pesquisa desse projeto que buscou indicar recursos-meta capazes de se tornar alavancas-meta para a compreensão dos alunos foi a de Cláudia Araújo (2002) intitulada “A metamatemática no livro didático de Álgebra

Linear". A autora apresenta uma análise qualitativa dos três livros didáticos mais utilizados em cursos de Álgebra Linear nas principais universidades de São Paulo.

Ao fazer a análise de um dos livros didáticos, a autora enfatiza um dos recursos-meta encontrados, e que pode se tornar uma alavanca-meta:

Apesar do discurso metamatemático do prefácio do livro, há apenas um único momento no texto em que é apresentada uma metamatemática, passível de se constituir uma alavancas meta, que é o momento onde após a definição de combinação linear, os autores mostram a equivalência entre as operações de adição e multiplicação por escalar de vetores do espaço representados por segmentos orientados e as mesmas operações algébricas no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ . (Araújo, 2002, p. 62)

Conforme se percebe, por um lado o discurso do prefácio promete, segundo a autora, a existência de recursos-meta no corpo do livro, por outro, poucos recursos foram encontrados no resto do texto. A autora destaca um exemplo de recurso-meta encontrado na parte que apresenta a definição de combinação linear. Tal recurso constitui-se de tratar as operações de adição e multiplicação por escalar de vetores em dois domínios diferentes, o dos segmentos orientados e o do  $\mathbb{R}^3$ . A interação de domínios é um recurso que pode gerar reflexão sobre o assunto em estudo, e contribuir para o seu aprendizado, constituindo, portanto um recurso-meta.

Em suas considerações finais, a autora chega a uma conclusão semelhante para os três livros. Assim, como já foi destacado acima, após a análise dos prefácios dos três livros que prenunciam a existência de recursos-meta através de diversas referências, os textos apresentam raríssimos exemplos

de possíveis alavancas-meta para o desenvolvimento de base. A pesquisa de Araújo mostrou o que os principais livros didáticos de Álgebra Linear trazem de recursos-meta, quando do desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial.

De posse dos resultados de Araújo, Zoraide Padredi (2003) decidiu investigar os recursos-meta evidenciados no discurso do professor sobre como este desenvolve a noção de base de um espaço vetorial em suas aulas de Álgebra Linear. Essa pesquisa é apresentada em sua dissertação de mestrado, defendida em 2003 com o título: “As alavancas-meta no discurso do professor de Álgebra Linear”.

Desta forma, levando em conta a conclusão de Araújo, de que há poucos recursos-meta no desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial nos livros didáticos, Zoraide Padredi foi à busca desses recursos no discurso de professores, fundamentando-se na possível interferência do professor na transposição didática:

Se por um lado essa constatação de Araújo tenha dado conta da quase inexistência de possíveis alavancas meta nesse “veículo” importante da transposição didática, por outro lado, as considerações de BEHAJ/ARSAC sobre a possível interferência do professor na transposição da álgebra linear sugerem que haja possibilidade de se encontrar possíveis alavancas meta do assunto, desenvolvidas pelos professores. (Padredi, 2003, p. 15).

Em conformidade com as considerações de BEHAJ/ARSAC, Padredi percebeu que o fato de haver poucos recursos-meta nos livros didáticos, de forma alguma anularia a possibilidade de encontrar no discurso do professor recursos

diferentes dos já encontrados nos livros, ou até mesmo, em maior quantidade. Portanto, ela passou a entrevistar professores para analisar seus discursos.

Nas entrevistas realizadas por Padredi os professores descreveram partes de suas aulas, em diferentes momentos, dependendo da pergunta realizada pela autora. Em sua dissertação, após comentar e destacar trechos de cada entrevista realizada, ela redigiu uma conclusão parcial, dando enfoque sobre o que havia detectado de recurso-meta no discurso do professor. Em uma dessas conclusões parciais afirma:

Convém destacar também o trabalho do professor com as atividades que propõe que sejam feitas ora em grupo, para proporcionar o auxílio mútuo, a discussão das noções necessárias à resolução dos exercícios entre eles e consequente reflexão sobre essas noções, ora individualmente, em que procura, através de uma analogia com uma história “que tem começo, meio e fim”, ocasionar a apresentação das resoluções dos problemas propostos, de maneira formal, com argumentos matemáticos, explicitando e favorecendo uma reflexão sobre o conteúdo dos mesmos. Os recursos descritos acima podem se tornar alavancas-meta para o ensino/aprendizagem da noção de base de um espaço vetorial. (Padredi, 2003, p. 55).

Neste comentário, a autora apontou a forma do professor agir, sua atitude ao conduzir as atividades com os alunos, como sendo um recurso que gera reflexão e, portanto, um recurso-meta passível de se tornar uma alavanca-meta. Também mencionou um tipo de analogia que o professor usou sobre a história que tem começo, meio e fim, com o objetivo de ajudar o aluno a refletir sobre a forma de apresentar as resoluções dos problemas propostos, a perceber a importância de escrever de uma maneira formal, organizar seu pensamento, favorecendo uma reflexão sobre o conteúdo dos mesmos, constituindo assim, outro recurso-meta.

Em suas conclusões finais Zoraide Padredi afirma:

A noção de base foi destacada como prioritária para um primeiro curso de Álgebra Linear pela maioria dos entrevistados. Surgiram três abordagens diferentes dessa noção no discurso dos professores: como um sistema de geradores minimal, como um sistema maximal linearmente independente e como uma justaposição de um sistema de geradores com um conjunto linearmente independente. A idéia de um sistema de geradores minimal pode gerar reflexões dos alunos sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, induzindo-os a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes. A idéia de um conjunto maximal de vetores linearmente independentes pode gerar reflexões sobre a necessidade de se conseguir o maior conjunto linearmente independente que dará origem ao espaço, surgindo daí naturalmente a noção de sistema de geradores. Tanto uma idéia como outra explicitam, entre as duas noções, vetores linearmente independentes e sistema de geradores dando origem ao conceito de base. São recursos “meta” passíveis de se tornarem alavancas meta (Padredi, 2003, p. 117).

A autora destacou duas formas de abordagem de base de um espaço vetorial, que podem gerar reflexão e por isso são recursos-meta. Uma dessas abordagens é a de trabalhar a noção de base de um espaço vetorial a partir da idéia de um sistema de geradores minimal, que pode gerar reflexões sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, conduzindo o aluno à necessidade de que os vetores sejam linearmente independentes. Essa idéia do sistema de geradores minimal pode ajudar o aluno a valorizar a base de um espaço vetorial por perceber que essa é a forma mais econômica e prática de gerar o mesmo, constituindo um recurso-meta por propiciar esse tipo de reflexão sobre a importância desse conceito. Outra abordagem seria a idéia de um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, gerando reflexão sobre

a idéia de um conjunto linearmente independente que dará origem ao espaço. Essa outra abordagem ajuda o aluno a perceber as características de um sistema de geradores. Ambas as idéias dão origem ao conceito de base, sem partir de uma maneira tradicional por meio da definição de base de um espaço vetorial, mas conduzem ao conceito, gerando reflexão sobre características peculiares das noções envolvidas no conceito de base de um espaço vetorial.

Valendo-se dos resultados das pesquisas do grupo feitas anteriormente, Luis Carlos Barbosa de Oliveira passou a investigar os recursos-meta utilizados por um professor em suas aulas de Álgebra Linear ao desenvolver a noção de base de um espaço vetorial. Essa pesquisa é apresentada em sua dissertação de mestrado defendida em 2005, cujo título é “Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra linear?”.

Nas aulas do professor de Álgebra Linear que Barbosa de Oliveira assistiu, ele identificou muitos recursos-meta quando do desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial. Destes, o autor selecionou nove, e verificou se estes tinham se transformado em alavanca-meta para uma amostra de alunos que freqüentaram as aulas observadas.

Um dos recursos-meta usados pelo professor observado constituiu-se na utilização da interação de domínios feita ao trabalhar com sistemas de equações lineares em que discutia a solução dos sistemas nos domínios algébrico e geométrico. Para verificar se este recurso havia se tornado uma alavanca-meta, o autor elaborou uma das questões de suas entrevistas semi-estruturadas realizadas com cada um dos alunos de uma amostra, apresentando sistemas lineares nas suas representações algébricas e geométricas e pedindo que

verificassem se havia alguma relação entre eles. Pela forma como os alunos estabeleciam ou não as relações, utilizando o recurso-meta visado em todos ou em parte da questão, o autor decide se o recurso representou ou não uma alavanca-meta para cada um dos alunos. Outro recurso-meta bastante utilizado pelo professor foi o do questionamento, quando respondia as questões dos alunos com perguntas, fazendo assim a devolução.

O autor também destaca como recurso-meta a utilização pelo professor dos três princípios da aprendizagem de Guerson Harel (2000): da concretização, da necessidade e da generalização. Na tentativa de levar os alunos a refletirem sobre a necessidade de **generalizar** a estrutura dos espaços vetoriais o professor partiu de espaços mais “concretos” para os alunos, como o dos vetores da Geometria Analítica e o das Matrizes Reais  $m \times n$ . Na abordagem de combinação linear, ele utilizou vetores da Geometria Analítica como uma situação **concreta**, e as matrizes  $2 \times 2$  para criar a **necessidade** de uma técnica de verificação das combinações lineares.

Barbosa de Oliveira verificou que quase todos os recursos-meta selecionados para serem testados com os alunos tornaram-se alavancas-meta. Dentre os nove recursos-meta selecionados para verificação de seu efeito na fala dos estudantes durante as entrevistas, só um deles não se constituiu em alavanca-meta para essa amostra de alunos, e a causa desse único recurso foi, provavelmente, a forma pela qual a questão foi proposta.

O recurso de interação de domínios ao abordar a interpretação da solução de um sistema de equações lineares foi incorporado no discurso de cinco dos sete alunos entrevistados, sendo que dois deles utilizaram explicitamente o

recurso, possibilitando a afirmação de que se tornou alavanca-meta para eles. Outro recurso-meta que se tornou explicitamente utilizado por cinco dos sete alunos foi o de utilizar o fato da existência de um vetor como combinação linear de outro ou de outros bastar para decidir pela dependência linear de um conjunto. Todos os outros recursos testados foram incorporados no discurso de um ou mais alunos entrevistados.

Conforme descrito acima, o autor constatou que em geral os recursos se tornaram alavancas para alguns alunos, sendo que apenas um não o constituiu.

Barbosa de Oliveira investigou o efeito dos recursos-meta em alunos que tinham estudado a noção de base de um espaço vetorial em um primeiro curso de Álgebra linear, quando tiveram oportunidade de utilizar certamente essa noção como uma ferramenta, como por exemplo, ao estudar transformações lineares. Dessa forma, a noção de base foi utilizada como uma ferramenta intra-matemática.

Assim a questão sobre a existência de situações extra-matemáticas que propiciem a utilização da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta e que demonstrem a necessidade do conhecimento dessa noção ainda está sem resposta. É importante considerar que se ocorrerem tais situações em disciplinas posteriores ao primeiro curso de Álgebra Linear em um curso de Ciência da Computação, essas situações poderão se converter em recursos-meta e, possivelmente, poderão auxiliar a melhor compreensão da noção de base de um espaço vetorial, tornando-se alavancas-meta. Desta forma, decidi enveredar pelo caminho da busca de novos recursos-meta para a melhor compreensão dos alunos sobre a noção de base de um espaço vetorial, em disciplinas do curso de

Ciência da Computação que exibem em seus programas a exigência de Álgebra Linear como co ou pré-requisito.

## Procedimentos metodológicos

Após revisão bibliográfica sobre o assunto passei a investigar as ementas das disciplinas do mesmo curso de Ciência da Computação da pesquisa de Barbosa de Oliveira, com o intuito de encontrar quais dessas ementas indicavam a necessidade de Álgebra Linear para desenvolvimento dos conteúdos a serem ministrados.

Resolvi entrevistar professores das disciplinas que continham em suas ementas indicações da utilização de Álgebra Linear. Decidi entrevistar os professores dessas disciplinas ao invés de ir diretamente às bibliografias de referência das ementas pelo fato de que as pesquisas anteriores do grupo tinham mostrado que houve um maior número de dados oferecidos por entrevistas (Padredi, 2003) do que em análise de livros didáticos (Araújo, 2002). Além disso, conforme LÜDKE e ANDRÉ, 1986, a entrevista é um dos principais itens na coleta de dados de pesquisas qualitativas:

Ao lado da observação, a entrevista representa um dos instrumentos básicos para a coleta de dados, dentro da perspectiva de pesquisa que estamos desenvolvendo nesse livro (*pesquisa qualitativa*) (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 33).

Elaborei então, um roteiro para as entrevistas a serem efetuadas, as quais seriam do tipo semi-estruturada, que de acordo com LAVILLE & DIONE trata de uma:

Série de perguntas abertas feitas oralmente em uma ordem prevista, mas na qual o entrevistador tem a possibilidade de acrescentar questões de esclarecimento. (LAVILLE & DIONNE, 1997, p. 333)

Foram selecionados dois professores das disciplinas Otimização e Simulação (OS) e Tópicos Especiais da Computação (TEC). Além dessas duas disciplinas selecionadas por meio das ementas, pensei que talvez outras utilizassem as noções de Álgebra Linear sem citá-la na ementa. Desta forma, iniciei a elaboração do roteiro de entrevista semi-estruturada com esperança de obter dados sobre a utilização da Álgebra Linear em geral e mais especificamente da noção de base, como ferramentas extra-matemáticas nessas disciplinas ou em outras indicadas pelos professores entrevistados ou outros membros da comunidade de Ciência da Computação.

Realizei uma entrevista “piloto” com o professor de Estruturas Algébricas, por julgar que talvez essa disciplina trabalhasse com espaço vetorial como exemplo de uma estrutura algébrica, embora sua ementa não mencionasse nada. Os resultados dessa entrevista juntamente com uma análise a priori, contribuíram para perceber a importância de algumas alterações relevantes no roteiro de entrevistas.

Após a entrevista piloto, passei a me informar sobre os docentes que ministravam as duas disciplinas, selecionadas por meio das ementas, a fim de solicitar-lhes um horário para a realização das entrevistas.

Um dos professores foi entrevistado por minha orientadora por ter também uma posição administrativa importante na universidade o que o tornava inacessível a mim. O professor da outra disciplina foi entrevistado por mim.

Além desses dois professores acatei a sugestão do professor de TEC, de entrevistar o professor coordenador do curso de Ciência da Computação que, possivelmente, teria mais informações sobre a utilização da Álgebra Linear nas disciplinas desse curso. Aquiesci com essa sugestão porque julguei que o coordenador na condição de articulador do curso, pessoa que em geral propicia a interdisciplinaridade, deveria ter uma visão abrangente do curso e das disciplinas aí ministradas, podendo, portanto contribuir com informações relevantes para minha investigação.

Com intuito de registrar os dados obtidos, gravei as três entrevistas que realizei. Ao discorrer sobre as vantagens das gravações Lüdke e André afirmam:

...A gravação tem a vantagem de registrar todas as expressões orais imediatamente, deixando o entrevistador livre para prestar toda a sua atenção ao entrevistado... (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 37)

Após realizar as entrevistas e gravá-las, fiz as transcrições e somente depois passei a analisá-las.

A entrevista realizada por minha orientadora não foi gravada, sendo registrada apenas por meio de notas:

...as notas já representam um trabalho inicial de seleção e interpretação das informações emitidas. O entrevistador já vai percebendo o que é suficientemente importante para ser tomado nota e vai assinalando de alguma forma o que vem acompanhado com ênfases, seja do lado positivo ou negativo (LÜDKE e ANDRÉ 1986, p. 37)

Tais notas deram conta de informações pertinentes ao objetivo da pesquisa. Em reunião do grupo do projeto no qual minha pesquisa está inserida, Zoraide

Padredi sugeriu-me que verificasse as entrevistas realizadas por ela e apresentadas em anexo em sua dissertação de Mestrado, pois afirmou que alguns entrevistados discorriam sobre aplicações da Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação. Passei então a reler as transcrições das entrevistas realizadas por Padredi com o objetivo de verificar quais dos professores entrevistados por ela falavam sobre possíveis aplicações da Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação. Localizei uma das entrevistas onde havia menção a essas aplicações e passei a considerá-la e analisá-la juntamente com as quatro outras entrevistas que realizamos.

Após o exame de qualificação decidi buscar mais informações sobre o uso da Álgebra Linear em disciplinas de Ciência da Computação por meio de entrevistas com mais professores da área. Isso se deu por diferentes razões: sugestão da banca de qualificação, pelo fato de não estar satisfeito com o resultado das primeiras entrevistas realizadas, e pela análise da transcrição da entrevista com o professor Freire, entrevistado por Padredi. Essa análise provocou em mim a esperança de encontrar situações da Ciência da Computação que utilizassem a noção de base como ferramenta.

Adaptei o roteiro das entrevistas já realizadas, incorporando informações obtidas da análise da transcrição da entrevista do professor Freire.

Após obter informações sobre professores do mesmo curso de Ciência da Computação que trabalhavam com a teoria dessa área, passei a contatá-los e agendei horário com dois deles para as entrevistas previstas. As entrevistas foram gravadas e transcritas para possibilitar uma análise delas.

Finalmente elaborei a conclusão final embasado nas conclusões parciais apresentadas ao longo do texto.

---

## CAPÍTULO 3

---

### Entrevistas

#### Introdução

Somente duas ementas (Otimização e Simulação e Tópicos Especiais da Computação, respectivamente nomeadas OS e TEC) do curso de Ciência da Computação pesquisado exigem a Álgebra Linear (AL) como co/pré-requisito. No entanto, pensei que talvez outras utilizassem as noções de AL sem citá-la na ementa. Desta forma, iniciei a elaboração do roteiro de entrevista semi-estruturada, com a esperança de obter dados sobre a utilização da Álgebra Linear em geral e mais especificamente da noção de base como ferramentas extra-matemáticas nessas duas disciplinas e, quiçá em outras, indicadas pelos professores dessas duas disciplinas e outros membros da comunidade de Ciência da Computação.

Elaborei um primeiro roteiro da entrevista semi-estruturada e realizei uma entrevista “piloto” com o professor de Estruturas Algébricas que se prontificou para tal. Depois disso, fiz alterações no roteiro, auxiliado por uma análise a priori e pelo resultado da entrevista-piloto.

Iniciamos, minha orientadora e eu as entrevistas seguindo o roteiro estabelecido, com os professores de OS e TEC. O professor da disciplina OS foi entrevistado por minha orientadora e o de TEC por mim.

O professor de TEC sugeriu que entrevistasse o professor coordenador do curso. Acolhi a sugestão considerando que o coordenador, provavelmente, teria uma visão abrangente do curso, por ter a incumbência, em tese, de articular e incentivar a interdisciplinaridade e assim teria a possibilidade de fornecer informações relevantes para minha investigação.

Zoraide Padredi, componente do projeto de pesquisa do qual minha investigação faz parte, sugeriu que analisasse duas entrevistas realizadas e transcritas por ela em sua dissertação de mestrado “As Alavancas Meta no discurso do professor de Álgebra Linear”, pois julgava que encontraria nelas algumas aplicações e utilização da noção de base de um espaço vetorial em assuntos do curso de Ciência da Computação. Após análise das mesmas, julguei uma delas, a do professor FREIRE, interessante para compor o conjunto das entrevistas por mim realizadas.

Não totalmente satisfeito com o resultado das quatro entrevistas realizadas, e amparado nos dados obtidos na transcrição da entrevista com FREIRE, realizada por Padredi, resolvi realizar entrevista com algum professor da Ciência da Computação que fosse pesquisador dessa área. Assim, fui informado sobre dois professores do mesmo curso que tinham essa característica.

Adaptei o roteiro das entrevistas semi-estruturadas já realizadas, incorporando informações de FREIRE, e realizai mais duas entrevistas.

Passo, então, a apresentar os roteiros das entrevistas com as respectivas análises a priori seguidos da transcrição e análise de trechos das mesmas.

Os nomes dos professores são fictícios para preservar o anonimato. Passarei a chamar os professores de Estruturas Algébricas, OS e TEC, o professor coordenador do curso, o professor entrevistado por Padredi, e os dois professores que trabalham com a teoria da Ciência da Computação, respectivamente de Alves, Braga, Castro, Dante, Freire, Esteves e Fonte.

## Roteiros e Análises

A seguir apresento o roteiro da entrevista piloto:

**1<sup>a</sup> Questão:** *O conceito de base de um espaço vetorial é estudado nas disciplinas estruturas algébricas I e II?*

**2<sup>a</sup> Questão:** *De que modo os conceitos de Álgebra Linear são reforçados pelo estudo de estruturas algébricas?*

**3<sup>a</sup> Questão:** *O conceito de base de um espaço vetorial, está subjacente a algum dos conteúdos ministrados nas disciplinas de estruturas algébricas I e II?*

**4<sup>a</sup> Questão:** *Qual é a importância do conceito de base de um espaço vetorial para o curso de Ciência da Computação?*

**5<sup>a</sup> Questão:** *Como você definiria a importância das estruturas algébricas, incluindo especificamente a estrutura algébrica espaço vetorial para a formação do aluno de Ciência da Computação?*

Esse primeiro roteiro de entrevista, conforme já mencionado, somente foi utilizado para realização da entrevista com o professor de estruturas algébricas. Pude perceber após sua utilização que para conduzir melhor as futuras entrevistas, além de alterar algumas questões, também seria necessária uma análise à priori das possíveis respostas a serem dadas pelos entrevistados. Apresento agora o roteiro de entrevista, com sua respectiva análise à priori, que foi utilizado para entrevistar os professores de OS. e TEC.

**1ª Questão:** *O senhor utiliza algumas noções de Álgebra Linear ao lecionar a disciplina TEC/OS?*

**Objetivo da questão:** Verificar se o professor tem consciência de que utiliza noções de AL, e se espontaneamente o professor se refere à noção de base.

**Tipos de respostas possíveis:** a) Sim, várias não citando base,  
b) Sim, várias citando base.  
c) Não, acho que não.

Se o professor respondeu algo do tipo 1.a. (Sim, várias **não** citando base).

**2ª Questão:** *Em algum momento do curso de TEC/OS o senhor ou o aluno tem de recorrer à noção de base? Se sim, em quais situações?*

**Objetivo da questão:** verificar se estimulado, o professor lembra de situações de seu curso de TEC em que usa a noção de base.

**Tipos de respostas possíveis:** i) Não

- ii) Sim, de modo implícito em tal situação ou situações, ou explicitamente em tal situação ou situações.

Se o professor respondeu 1.b. (Sim, várias, citando base).

**3ª Questão:** *Como e quando a noção de base de um espaço vetorial é utilizada em TEC/OS?*

**Objetivo da questão:** Possibilitar o conhecimento de como e quando a noção é utilizada.

**Tipos de respostas possíveis:** Várias...

Se o professor respondeu 1.c. (Não)

**4ª Questão:** *Embora o senhor não utilize noções da Álgebra Linear nesse curso TEC/OS, a noção de base de um espaço vetorial foi utilizada pelos “cientistas” no desenvolvimento teórico dos assuntos de TEC/OS?*

**Objetivo da questão:** Verificar se as teorias desses cursos (TEC/OS), embora não explicitado no discurso do professor em classe, têm a noção de base de um espaço vetorial como uma idéia subjacente em algum de seus conteúdos.

**Tipos de respostas possíveis:** i) Não.

- ii) Sim, de modo implícito em tal conteúdo, ou de modo explícito em tal conteúdo.

Se o professor respondeu não a 2ª questão

**5<sup>a</sup> Questão:** Embora o senhor não utilize a noção de base em TEC/OS, a noção de base de um espaço vetorial foi utilizada pelos “cientistas” no desenvolvimento teórico dos assuntos de TEC/OS?

**Objetivo da questão:** Verificar se as teorias desses cursos (TEC/OS), embora não explicitado no discurso do professor em classe, têm a noção de base de um espaço vetorial como uma idéia subjacente em algum de seus conteúdos.

**Tipos de respostas possíveis:** i) Não.

ii) Sim, de modo implícito em tal conteúdo, ou de modo explícito em tal conteúdo.

Se o professor respondeu que recorre a noção de base...

**6<sup>a</sup> Questão:** Que livros didáticos, ou não, em português ou inglês, o senhor indicaria para uma pesquisa mais profunda sobre as situações, onde a noção de base de um espaço vetorial ou outras de Álgebra Linear aparecem de forma implícita, ou explícita?

**Objetivo da questão:** Buscar fontes de informações sobre o assunto.

**7<sup>a</sup> Questão:** O senhor conhece outra disciplina do curso Ciência da Computação que aborda a noção de base um espaço vetorial e de que forma?

**Objetivo da questão:** Verificar se outra disciplina do curso utiliza a noção de base de um espaço vetorial.

**8<sup>a</sup> Questão:** Como o senhor justifica a inclusão de Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação?

**Objetivo da questão:** Verificar, através da resposta do professor, a importância de AL no currículo do curso.

Após a utilização desse roteiro para entrevistar os dois professores cujas respostas apontavam a Álgebra Linear como co/pré-requisito, o mesmo passou por algumas modificações e uma nova análise à priori, de modo a adequá-lo para entrevistar o professor coordenador do curso.

Apresento a seguir como ficaram o roteiro e a análise:

**1<sup>a</sup> Questão:** Como o senhor justificaria a inclusão da disciplina Álgebra Linear, no currículo do curso de Ciência da Computação?

**Objetivo da questão:** Verificar a importância da Álgebra Linear para o curso de Ciência da Computação.

**Tipos de respostas possíveis:** a) Desenvolver o raciocínio matemático  
b) Pré-requisito para....  
c) Não sei qual é a importância....

Se o professor respondeu algo do tipo 1.a. (desenvolver o raciocínio matemático)

**2<sup>a</sup> Questão:** Por que para desenvolver o raciocínio matemático foi escolhido especificamente a Álgebra Linear?

**Objetivo da questão:** verificar que relação o raciocínio matemático necessário para o aluno de Ciência da Computação tem especificamente com a Álgebra Linear

**Tipos de resposta possíveis:** i) Não sei

ii) Várias possibilidades

Se o professor respondeu 1b pré-requisito para...

**3ª Questão:** Entre essas disciplinas que o senhor relacionou como tendo a Álgebra Linear como pré-requisito, quais conteúdos delas, estão diretamente relacionados com a A.L.?

**Objetivo da questão:** Verificar quais conteúdos das disciplinas tem a Álgebra Linear como pré-requisito.

**Tipos de respostas possíveis:** i- Não sei

ii- Várias respostas possíveis

Se o professor respondeu 1c: Não sei.

**4ª Questão:** A importância da A.L. não seria talvez para desenvolver o raciocínio matemático do aluno de Ciência da Computação? Em caso afirmativo você poderia falar sobre a forma como isso acontece?

**Objetivo da questão:** Verificar se a importância da A.L. para o curso de Ciência da Computação é para desenvolver o raciocínio matemático do aluno, e em caso afirmativo como isso acontece.

**Tipos de respostas possíveis:** i) Não sei.

ii) Várias respostas possíveis.

## **Seqüência para as questões 2 ou 4**

**5ª Questão:** A Álgebra Linear é utilizada no desenvolvimento teórico de alguns conteúdos de algumas disciplinas do curso de Ciência da Computação?

**Objetivo da Questão:** Verificar se no desenvolvimento de algumas disciplinas do curso de Ciência da Computação a Álgebra Linear é utilizada.

**Tipos de respostas possíveis:** i) Não.

ii) Sim,....

## **Seqüência para as questões 3 e 5.**

Se o professor respondeu conhece alguma disciplina onde a noção de base de um espaço vetorial é necessária...

**6ª Questão:** Que livros didáticos, ou não, em português ou inglês, o senhor indicaria para uma pesquisa mais profunda sobre as situações, onde a Álgebra Linear aparece de forma implícita, ou explícita?

**Objetivo da questão:** Buscar fontes de informações sobre o assunto.

Após a entrevista realizada com o professor coordenador desse curso de Ciência da Computação, e após a escolha da entrevista com o professor Freire realizada por Padredi em sua dissertação de mestrado, alterações foram realizadas nesse roteiro de entrevistas, com algumas contribuições do conteúdo contido na transcrição dessa entrevista, e também de acordo com o que julguei

necessário, por se tratar de um outro perfil de entrevistado. Algumas das primeiras questões não sofreram alterações. Passo a apresentar o novo roteiro de entrevistas e sua respectiva análise à priori:

**1ª Questão:** *Como o senhor justificaria a inclusão da disciplina Álgebra Linear no currículo do curso de Ciência da Computação?*

**Objetivo da questão:** Verificar qual a importância da Álgebra Linear para o curso de Ciência da Computação.

**Tipos de respostas possíveis:**

- a) Para desenvolver o raciocínio matemático
- b) Como pré ou co-requisito para outras ou tais disciplinas
- c) Não sei.

Se o professor respondeu algo do tipo 1.a. (desenvolver o raciocínio matemático)

**2ª Questão:** *Por que para desenvolver o raciocínio matemático foi escolhido especificamente a Álgebra Linear?*

**Objetivo da questão:** Verificar que relação o raciocínio matemático, necessário para o aluno de Ciência da Computação, tem especificamente com a Álgebra Linear.

**Tipos de resposta possíveis:**

- i) Não sei
- ii) Várias possibilidades

Se o professor respondeu 1b pré-requisito para alguma disciplina... (Computação Gráfica, Introdução à Computação etc).

**3<sup>a</sup> Questão:** Nessa(s) disciplina(s) que o senhor relacionou como tendo a Álgebra Linear como pré-requisito, existe algum assunto, conceito que necessite da noção de base de um espaço vetorial?

**Objetivo da questão:** Verificar que conteúdos das disciplinas necessitam da base de um espaço vetorial.

**Tipos de respostas possíveis:** i- Não sei

ii- Várias respostas possíveis

Se o professor respondeu 1c

**4<sup>a</sup> Questão:** A Álgebra Linear é utilizada no desenvolvimento teórico de algum assunto do curso de Ciência da Computação?

**Objetivo da questão:** Dar oportunidade do entrevistado rever sua resposta à primeira questão, qual seja: indicar no desenvolvimento de assuntos do curso de Ciência da Computação o uso da Álgebra Linear.

**Tipos de respostas possíveis:** i) Não.

ii) Sim,....

**seqüência para a questão 3**, caso o entrevistado tenha mencionado as disciplinas ou áreas da Ciência da Computação que necessitam da base de um espaço vetorial, porém sem descrever como se dá o seu uso. Ou **seqüência para a questão 4** caso o entrevistado tenha mencionado alguma parte da C.C. onde a Álgebra Linear foi utilizada no seu desenvolvimento teórico, mas não mencionou o uso da base em situações específicas.

**5<sup>a</sup> Questão:** Você poderia exemplificar como a base de um espaço vetorial é usada em situações específicas desses assuntos (disciplinas)?

**Objetivo da questão:** Verificar como se dá o uso da noção de base de um espaço vetorial em situações específicas do curso de Ciência Computação.

**Tipos de respostas possíveis:** Várias possibilidades.

**Seqüência para 2i ou qualquer outra hipótese na qual o professor ainda não tenha mencionado a utilização da noção de base** de um espaço vetorial para assuntos específicos do curso de Ciência Computação.

**6<sup>a</sup> Questão:** Um professor sugeriu que a razão de se incluir Álgebra Linear no curso é porque ela é pré-requisito para:- Computação Gráfica;- Grafos;- Autômatos e Programação Linear. Você concorda?

**Objetivo da questão:** Verificar se o professor estimulado fala sobre conteúdos específicos da Ciência da Computação que necessitam da Álgebra Linear.

**Tipos de resposta possíveis:** - Não porque (não necessitam)  
- Sim.

**Observação:** Nessa questão entregarei para o professor uma folha onde estará escrito Computação Gráfica, Teoria dos Grafos, Programação Linear e Autômatos, para que o mesmo visualizando as áreas, possa refletir sobre cada uma delas.

Se professor respondeu a questão 6 afirmando que concorda, porém sem descrever como se dá o uso da Álgebra Linear nas mesmas, mais especificamente o uso de base.

**7<sup>a</sup>Questão:** *Você poderia descrever como se dá o uso da base de um espaço vetorial nessas áreas que precisam da A.L.?*

**Objetivo da questão:** Verificar se as áreas da Ciência da Computação que necessitam da Álgebra Linear precisam da noção de base, e de que forma se dá esse uso.

**Tipos de respostas possíveis:** a) Não.

b) Sim, de tal forma...

Se o professor respondeu que conhece alguma disciplina ou área da Ciência Computação onde a noção de base de um espaço vetorial é necessária...

**8<sup>a</sup> Questão:** *Que livros didáticos ou científicos o senhor indicaria para uma pesquisa mais profunda sobre as situações onde a Álgebra Linear aparece de forma implícita ou explícita?*

**Objetivo da questão:** Buscar fontes de informações sobre as situações do curso de Ciência da Computação que utilizam a noção de base de espaço vetorial.

## **Descrição e Análise das Entrevistas**

É importante relembrar que os professores entrevistados pertencem ao corpo docente de um mesmo curso de Ciência da Computação, sendo que apenas um deles não pertence ao departamento que leva o nome.

A seguir apresento as informações e/ou trechos da transcrição das entrevistas selecionados pela pertinência e contribuição aos objetivos de minha investigação. A tais informações e/ou descrições acrescento uma análise das mesmas.

As entrevistas foram realizadas nas dependências da instituição que abriga o curso e todas elas foram realizadas sem sofrer interrupções.

### **Professor Alves**

O professor Alves é professor do curso de Ciência da Computação, e pertence ao departamento de Matemática e ministra a disciplina denominada Estruturas Algébricas.

A entrevista durou cerca 20 minutos e pode ser gravada.

O professor explicou que sua disciplina enfoca principalmente tópicos de Teoria dos Números, assim obtive poucos dados sobre a pertinência de Álgebra Linear nesse curso. Dentre as informações obtidas nessa entrevista destaco que o professor Alves mencionou a computação gráfica como uma aplicação da

Álgebra Linear, enfatizando a importância das transformações lineares do  $R^3$  para essa área.

O entrevistado falou sobre a computação gráfica como uma aplicação da Álgebra Linear, mas não mencionou nenhuma situação específica do curso de Ciência da Computação que necessite da Álgebra Linear, e especificamente a noção da base. Ele citou os operadores lineares do  $R^3$  que podem ser dados por meio de uma das bases do  $R^3$  e que seriam tratados em computação gráfica. Considero, no entanto, que somente o uso dos operadores do  $R^3$  na computação gráfica não justificaria a presença da Álgebra Linear no currículo do curso de Ciência da Computação, pois não seria difícil incorporar esse assunto a um curso de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.

Por outro lado, essa entrevista foi realizada como um “piloto” das outras e não se poderia esperar maiores contribuições vindas de um membro de fora do departamento da especialidade observada.

## **Professor Braga**

O professor Braga pertence ao departamento de Ciência da Computação e ministra o curso de Otimização e Simulação (OS).

A entrevista não pode ser gravada, e durou cerca de 30 minutos. Dentre as informações obtidas destaco apenas o que teve relação com o objetivo de minha pesquisa.

Braga afirmou que os alunos chegam ao 3º ano do curso de Ciência da Computação com dificuldade em identificar um sistema de equações lineares quando representado na forma matricial do tipo  $AX = B$ , com A matriz do tipo  $n \times m$ , X matriz do tipo  $m \times 1$  e B matriz do tipo  $n \times 1$ .

É interessante notar que quando o entrevistador comentou que a ementa da disciplina OS apresenta como pré-requisito a Álgebra Linear, o entrevistado se surpreendeu e disse que isso estava errado.

O professor de OS ficou surpreso ao saber que na ementa estava escrito que a Álgebra Linear era pré-requisito para sua disciplina. Isto é explicado pelo fato de que, muitas vezes, a ementa de uma disciplina não é elaborada pelo professor que a ministra. Durante a entrevista esse professor lembrou que seus alunos *apresentam dificuldades na resolução de sistemas lineares quando na sua forma matricial*, dando a entender que sua disciplina necessitava da Álgebra Linear somente pelos conhecimentos, ou técnicas de resolução de sistemas lineares na forma matricial e *no desenvolvimento da habilidade de manipular operações que envolvam matrizes*. O professor não se mostrou consciente da necessidade da Álgebra Linear para a sua disciplina e não indicou a utilidade desta para os tópicos específicos que leciona na mesma. Vale observar aqui que o fato dos alunos não saberem resolver os sistemas lineares em suas representações matriciais, não significa que estes desconheçam como resolvê-los, pois desde o ensino médio, os alunos tratam da resolução de sistemas lineares. Aparentemente esse professor que utiliza seus conhecimentos de Computação como ferramenta de trabalho profissional, em suas aulas, não vê necessidade de se aprofundar nos conceitos e significados de OS dando prioridade para as técnicas.

## **Professor Castro**

O professor Castro é professor do departamento de Ciência da Computação e leciona a disciplina Tópicos Especiais da Computação (TEC).

A entrevista foi gravada e durou cerca de 20 minutos. Inicialmente, Castro afirmou utilizar algumas noções da Álgebra Linear ao lecionar a disciplina TEC.

Ao responder se em algum momento da disciplina recorria à noção de base de um espaço vetorial, Castro disse:

Na hora da implementação do algoritmo, por exemplo, se eu quero fazer alguma coisa visual, eu preciso da matemática para fazer essa parte da aplicação, equação da reta, por exemplo, é pegar a equação e dali você parte para o algoritmo para desenhar a reta,... Se você quiser fazer rotação, escala, você parte da matemática, daquelas coisas da Álgebra Linear.

O professor não indicou a utilização da base de um espaço vetorial como uma ferramenta explícita para os conteúdos específicos de sua disciplina. No entanto, ao mencionar o operador rotação, fica subtendida a utilização de uma base do espaço vetorial  $R^3$  para realizar a rotação pretendida. Contudo essas bases do  $R^3$ , em tese, não necessitam de todo uma disciplina, Álgebra Linear, para terem condições de utilizá-las, bastando apenas que tenham cursado Geometria Analítica conforme já observado quando na análise da entrevista piloto.

É importante ressaltar aqui, que o algoritmo ao qual o professor se refere é específico do curso de Ciência da Computação. Diferente dos algoritmos

matemáticos, esses algoritmos são estratégias ou procedimentos de resolução de problemas computacionais que são desenvolvidos especificamente para um determinado problema computacional que é necessário resolver. Lisbete Madsen Barbosa (2001) descreve esse algoritmo:

Um algoritmo é, em geral, uma descrição passo a passo de como um problema é solucionável. A descrição deve ser finita, e os passos devem ser bem definidos, sem ambigüidades, e executáveis computacionalmente. Diz-se que um algoritmo resolve um problema P se este algoritmo recebe qualquer instância I de P e sempre produz uma solução para esta instância I. Diz-se, então, que o algoritmo resolve I, e que I é um dado de entrada do algoritmo, e a solução é um dado de saída do algoritmo. Enfatizamos que, para qualquer dado de entrada I, o algoritmo deverá ser executável em tempo finito e, além disso, produzir uma solução correta para. (Barbosa, 2001, p. 25)

O professor Castro respondeu à pergunta: - Como e quando a noção de base de um espaço vetorial é utilizada em TEC? -, da seguinte forma:

Praticamente na disciplina inteira, nessa parte de transformação geométrica, elementos baseados em retas, sistema de coordenadas utiliza dessa base aí.

Aqui vale o mesmo comentário relativo ao trecho anterior da entrevista, quando Castro discorreu sobre transformações geométricas no plano ou no espaço. Nesses casos não são necessários conhecimentos de Álgebra Linear, porque serão utilizadas bases de R-espacos vetoriais de dimensão 1,2 ou 3; esse assunto geralmente é trabalhado na disciplina de Calculo Vetorial e Geometria Analítica.

Questionado se haveria outra disciplina do curso de Ciência da Computação que abordava a noção de base de um espaço vetorial, o professor Castro disse que não se lembrava e sugeriu que fizesse essa pergunta ao coordenador do curso, o professor Dante.

Quando questionado sobre como justifica a inclusão da Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação, Castro declara:

Acho importante principalmente para a minha disciplina, pois é através dela (que) eu consigo caminhar bem na minha disciplina sem precisar entrar em detalhes, e em conceitos básicos, eu vou direto na parte de visualização que é a parte mais importante para mim...

Castro justifica a inclusão da disciplina Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação, explicando que o fato dessa disciplina já ter introduzido o estudo das noções básicas possibilita utilizar essas noções em disciplinas como a sua, TEC, diretamente como uma ferramenta, confirmando assim, o uso das noções de Álgebra Linear extra-matemática.

Embora o professor não caracterize explicitamente a noção de base de um espaço vetorial como ferramenta para os conteúdos específicos de TEC, o fato de apontar o uso de noções de Álgebra Linear quando aborda os operadores lineares do  $\mathbb{R}^3$ , como rotação e transformações geométricas, indica implicitamente o uso dessa noção.

Castro sugere que a Álgebra Linear é importante para o curso de Ciência da Computação por ser importante para sua disciplina, para que ele possa trabalhar *a parte de visualização*, que julga ser a mais importante, sem se

preocupar com as *noções básicas*, que ficariam no caso por conta da disciplina Álgebra Linear.

## **Professor Dante**

O professor Dante é membro e atual coordenador do curso de Ciência da Computação.

A entrevista foi gravada e durou cerca de 20 minutos.

Ao ser questionado sobre o “por que” da Álgebra Linear no currículo do curso de Ciência da Computação, o professor Dante destaca como razões principais:

...porque a computação, ela veio como uma herança da matemática, então todo pensamento matemático, a forma de você enxergar, assim, abstrair para poder trabalhar, isso tudo é muito importante, o rigor, o formalismo na hora de você escrever,...

Assim, Dante justifica a presença da Álgebra Linear no curso que coordena como *herança da matemática*, isto é, pelo fato do curso de Ciência da Computação ter sido “gerado” no departamento de Matemática, o que, segundo ele já justificaria sua inclusão no curso de Ciência da Computação.

A seguir, ao responder à segunda questão: - a Álgebra Linear é pré-requisito para alguma disciplina do curso de Ciência da Computação – o professor aparentando dúvida, sugere:

...Só se for alguma matéria mais, especificamente... que envolva muito a matemática, como é o caso da computação gráfica, mas aí já seria uma área específica da computação, não a computação em geral.

Essa resposta revela a falta de clareza de Dante com respeito aos pré-requisitos das disciplinas do curso do qual é coordenador. Sua sugestão de que a Álgebra Linear poderia ser pré-requisito para a área específica de computação gráfica remete à disciplina TEC. A entrevista com o professor Castro, que leciona TEC, já foi descrita.

Na seqüência, o entrevistado fala da importância da Álgebra Linear:

Raciocínio Matemático, acho isso importantíssimo. Porque eu acho que é o melhor, é a melhor forma de você exercitar o raciocínio, ter essa habilidade.

Dante enfatiza que o raciocínio matemático exigido na aprendizagem da Álgebra Linear é a melhor forma de exercitar o raciocínio em geral.

Diante dessa afirmação do entrevistado achei pertinente perguntar: Por que para exercitar o raciocínio matemático foi escolhida especificamente a Álgebra Linear e não outra parte da matemática? O professor então declara:

Depende, isso aí eu teria de falar com o professor de Álgebra Linear. Eu não sei exatamente quais os pontos específicos. Mas o caso da Álgebra,... isso eu não vou saber responder.

Pela resposta fica evidente que o professor Dante estava refletindo sobre o assunto, aparentemente pela primeira vez naquele momento, tanto que ele próprio fala da necessidade de contatar o professor de Álgebra Linear para obter uma resposta mais argumentada.

Ao discorrer sobre a utilização da Álgebra Linear no desenvolvimento teórico de algum(ns) assunto(os) tratados por disciplinas do curso por ele coordenado, Dante menciona:

...Não, porque aqui ela está um pouco à parte, a gente não aplica diretamente, na verdade a gente utiliza mais na habilidade, mas de uma forma não muito objetiva, não aplica diretamente, só naquele caso que eu te falei, numa disciplina específica como a computação gráfica que envolve muito a matemática, aí acabam precisando, fora isso não é utilizada.

Nessa resposta fica configurada a impressão do professor de que a Álgebra Linear só tem “utilidade” para a computação gráfica, pois afirma que *fora isso não é utilizada*.

Finalizando o professor Dante comenta que não conhece livros didáticos da Ciência da Computação que descrevam situações onde a Álgebra Linear seja empregada de forma explícita ou implícita.

A partir das informações contidas nessa entrevista podemos concluir segundo o professor Dante, que a Álgebra Linear, é de maior importância para a disciplina TEC (computação gráfica) e para desenvolver o raciocínio matemático do aluno do curso de Ciência da Computação, porém em nenhum momento o professor descreve de forma explícita, em quais conteúdos dessa disciplina a Álgebra Linear é, pode ser utilizada como ferramenta e muito menos, a noção de base de um espaço vetorial.

É importante ressaltar que embora nessa entrevista o professor coordenador tenha afirmado que a Álgebra Linear é importante para a computação gráfica, assunto esse abordado na disciplina TEC, Castro que a

leciona não foi capaz de esclarecer em quais conteúdos de sua disciplina utiliza a noção de base de um espaço vetorial, como ferramenta.

## Conclusão parcial

Dos quatro entrevistados, dois, Alves e Dante, informam que a Álgebra Linear é utilizada como ferramenta em computação gráfica. Castro o professor de TEC, disciplina encarregada de trabalhar a computação gráfica, afirma que utiliza a noção de base *praticamente na disciplina inteira*; no entanto, na hora em que o entrevistado especifica esse uso, indica que utiliza somente as bases do  $R$ ,  $R^2$ ,  $R^3$  sobre  $R$ . Essa utilização, diga-se de passagem, na realidade não necessita de todo um primeiro curso de Álgebra Linear para ser desenvolvida, pois a Geometria Analítica, disciplina usual desse curso dá conta do assunto ao estudar o plano e o espaço.

É importante notar que em um primeiro momento, imaginei que as entrevistas com esses quatro professores me forneceriam os dados necessários para atingir o objetivo deste trabalho. No entanto, após análise das entrevistas, ficou claro que os dados obtidos eram insuficientes para meu intento. Tanto os professores que lecionam as disciplinas que julguei estar correlacionadas à Álgebra Linear, como o professor coordenador forneceram poucas informações sobre a utilização da noção de base no curso.

As respostas dadas pelos quatro entrevistados me sugerem que esse curso exige somente conhecimentos de Geometria Analítica, e que essas noções

têm a oportunidade de passar pelo processo ferramenta-objeto principalmente na disciplina TEC, contexto certamente propício a essa dialética.

Nenhum dos entrevistados indicou a necessidade dos conhecimentos específicos de Álgebra Linear como a noção de base no desenvolvimento teórico de assuntos de Ciência da Computação.

Dessa forma, concluímos que nas duas únicas disciplinas que explicitam em suas ementas requererem conhecimentos de Álgebra Linear, pouca coisa ou quase nada é utilizado das noções tratadas exclusivamente nessa disciplina. Assim, essas noções não têm a oportunidade de passar pelo processo dialético ferramenta-objeto nessas disciplinas, conforme depoimento dos professores que as ministram.

## **Sugestão do Grupo de Pesquisa**

Ao expor aos membros do grupo de pesquisa do qual participo minha decepção com o resultado da análise dessas quatro entrevistas, Zoraide Padredi sugeriu que analisasse duas das seis entrevistas realizadas e transcritas por ela em sua dissertação de mestrado “As Alavancas Meta no discurso do professor de Álgebra Linear”. A colega argumentou que encontraria nelas mais informações sobre aplicações e utilização da noção de base em Ciência da Computação. Após análise das mesmas, julguei uma delas, a do professor FREIRE, interessante para compor o conjunto das entrevistas por mim analisadas. Embora as

entrevistas realizadas por Padredi tivessem um intento diferente do meu essa entrevista trazia informações relevantes para meu tema.

A seguir apresento trechos retirados da transcrição feita por Padredi (2003) e análise que fiz sobre os mesmos.

## **Professor Freire**

O professor Freire, nome fictício, pertence ao departamento de matemática de uma Instituição do Ensino Superior e foi entrevistado por Zoraide Padredi.

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo de Padredi era a busca de recursos-meta no discurso do professor de Álgebra Linear, sobre o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial em suas aulas, mas em parte da entrevista, esse professor falou sobre a utilidade da Álgebra Linear para o curso de Ciência da Computação.

Ao ser questionado se utiliza livro didático em suas aulas, o entrevistado afirma:

...eu sempre usei outros tipos de coisas, principalmente, por que sempre fui apaixonado pela parte de matemática aplicada, então sempre eu queria ligações com aplicativos, dentro de Álgebra Linear. Ainda hoje, a gente trabalha com aplicativos, dentro da Álgebra Linear... a própria computação gráfica é todinha Álgebra Linear, praticamente só trabalha com Álgebra Linear.(Padredi, 2003, p.157)

Freire afirma que sempre utiliza outros materiais devido a sua busca por aplicações, ou seja, o professor não ministra um curso voltado somente para aplicações intra-matemáticas, mas utiliza situações ou aplicações para desenvolver os conteúdos da Álgebra Linear. Para exemplificar os aplicativos que utiliza em suas aulas o professor menciona a computação gráfica dizendo que **essa área só trabalha com a Álgebra Linear.**

A seguir ao ser questionado se está dando aula atualmente, o professor Freire diz:

...Mais na computação. Estou na computação. Mas é,... por exemplo, computação gráfica é toda Álgebra Linear, mais matemática, Álgebra Linear Aplicada, Álgebra Linear Aplicada. Mas, agora temos a parte de Álgebra muito pesada também na parte de Ciência da Computação, na área de autômatos... então a Álgebra Linear é um instrumento para mim como se fosse o Cálculo, como se fosse o Cálculo, entendeu, a mesma coisa. Então transformações lineares, bases, dimensões, o espaço, espaços gerados, essas coisas, são coisas corriqueiras, coisas comuns, sem os quais eu não faria nada mesmo, nada, nada, nada. (Padredi, 2003, p.157)

A analogia que Freire faz da utilização da Álgebra Linear com a do Cálculo, revela a idéia subjacente de que existem situações problema da área de Ciência da Computação que para sua solução necessitam da Álgebra Linear.

O professor Freire passa então a falar sobre a importância da Álgebra Linear para a formação do aluno, e no seu discurso volta a mencionar a computação gráfica:

...como é que a gente vai falar em aplicação da... em aplicação de Álgebra Linear na computação gráfica, se a gente não avançar na computação gráfica. Então, a gente acaba perdendo... acaba...quem dá aula de Álgebra Linear, acaba perdendo o escopo da Álgebra Linear, porque tem que dar um curso de Álgebra Linear, não pode dar um curso de computação gráfica.(Padredi, 2003, p.158)

Esse comentário do professor Freire reafirma a computação gráfica como uma área muito fértil para utilizar a Álgebra Linear como ferramenta. A maneira como Freire colocou que o professor que leciona Álgebra Linear perde o escopo da mesma, porque não pode ministrar um curso de computação gráfica, sugere que há uma forte correlação dessas disciplinas no curso de Ciência da Computação. Desta forma, concluo, existem situações da computação gráfica que exigem o uso de noções de Álgebra Linear como ferramenta.

O professor Freire afirmou que a computação gráfica é toda Álgebra Linear chegando até mesmo a chamar a computação gráfica de Álgebra Linear Aplicada. Ele aponta a área de autômatos como sendo uma parte do curso de Ciência da Computação que necessita muito da Álgebra Linear. Esse professor não aprofundou seus comentários sobre aplicações da Álgebra Linear dentro do curso de Ciência da Computação, mas como havia sido dito anteriormente, a entrevista de Padredi não foi realizada com esse objetivo. Contudo, ao chamar a computação gráfica de Álgebra Linear Aplicada, o professor deu indícios de que nessa disciplina trabalha-se com aplicações da Álgebra Linear. Ele também fala com propriedade sobre aplicações da Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação, quando até mesmo menciona a área de autômatos, afirmando utilizar a Álgebra Linear ao invés de, simplesmente, sugerir aplicações intramatemáticas.

A análise da entrevista de Freire fez ressurgir a esperança de conseguir mais informações sobre o uso da Álgebra Linear e mais especificamente da noção de base no desenvolvimento de assuntos de Ciência da Computação; porém, desta vez, com professores que trabalham com esses assuntos privilegiando um olhar mais teórico.

Assim tive informação de que havia dois professores do departamento de Ciência da Computação da mesma instituição, dos quatro previamente entrevistados, que se preocupavam com a parte teórica da Ciência.

A seguir passo as entrevistas realizadas com esses dois professores.

## **Professor Esteves**

O professor Esteves é professor do departamento de Ciência da Computação e leciona disciplinas sobre Teoria da Computação.

A entrevista foi gravada e durou cerca de 20 minutos.

Ao ser questionado – como justificaria a inclusão da disciplina Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação – o entrevistado comenta:

A primeira justificativa que eu tenho para oferecer é que a Álgebra Linear é uma ferramenta fundamental para muita coisa, a parte elementar, digamos assim, da Álgebra e como ferramenta de raciocínio... Para **desenvolver raciocínio** já justificaria a presença dela no curso por si só.

Esteves destaca primeiramente a importância da Álgebra Linear como ferramenta de raciocínio, no sentido de desenvolvê-lo, enfatizando que por si só

esse argumento já justificaria seu ensino. Nessa resposta o entrevistado utiliza o argumento previsto na análise a priori de que o ensino da Álgebra Linear desenvolve o raciocínio matemático, dando a entender que julga muito importante o conhecimento de matemática em Ciência da Computação. A seguir o professor acrescenta:

O curso de Álgebra Linear, eu acho que, também é importante porque **o aluno começa a lidar com estrutura...** o primeiro curso que o aluno começa a lidar um pouco com estrutura, que é espaço vetorial né...

Essa observação de Esteves a respeito da importância de lidar com uma estrutura algébrica, espaço vetorial, não havia sido prevista na análise a priori dessa questão, e julgo muito importante como enriquecimento dos argumentos para o ensino de Álgebra Linear. A seguir o entrevistado justifica a razão desse comentário:

**...você lida com curso de estruturas em determinados espaços e você consegue construir resultados mediante a presença dessas estruturas que você não consegue em outros lugares, então isso é uma coisa assim super “invasiva” em Ciência da Computação...**

Neste trecho Esteves evidencia que a importância do estudo das estruturas algébricas em Ciência da Computação é possibilitar a *construção de resultados* que não seriam possíveis sem as mesmas. Ao afirmar que isso é uma coisa super “invasiva” em Ciência da Computação, provavelmente ele quer dizer que isso acontece com freqüência em situações desse curso, por estarem subjacentes à teoria.

A seguir o professor Esteves fala sobre a relação da Álgebra Linear com problemas que envolvem programação:

...é comum e acontece bastante em problemas que envolvem programação, é a **resolução de sistemas lineares**, por exemplo, que é uma coleção de algoritmos, LOP, algoritmo..., eliminação gaussiana, obviamente na teoria de sistemas lineares que é Álgebra Linear, um pedaço da Álgebra Linear...

Conforme destacado, a resolução de sistemas lineares, o método de eliminação gaussiana assuntos integrantes da Álgebra Linear, constituem ferramentas para solucionar problemas que envolvem programação linear. Embora Esteves não tenha feito menção à palavra ferramenta, ela é perfeitamente cabível, pois segundo Douady, (ver página 25 deste trabalho) a disponibilidade funcional de certas noções e teoremas matemáticos para resolver problemas constituem um aspecto do saber matemático que ela chama de ferramenta que contribui para o aprofundamento da noção estudada.

A seguir, em termos gerais, o entrevistado descreve um problema de otimização:

...um pedaço do curso da Ciência da Computação envolve problemas de otimização. Então em geral um problema de otimização, a gente quer maximizar ou minimizar uma função objetiva, sujeita a uma coleção de restrições.

Esses problemas de otimização, segundo o entrevistado, também necessitam da Álgebra Linear para solucioná-los. O livro didático, Introdução a Programação Linear de SPIVEY (1975), descreve esse tipo de problema como a busca da melhor entre as soluções possíveis de um sistema de equações e inequações lineares. Ainda de acordo com o apresentado nesse livro didático, a função objetiva é a “lei” que engloba as soluções possíveis para um determinado problema. Esta lei poderá estar associada a um conjunto de restrições ou

condições, que direcionarão a busca da melhor solução que caracterizará um processo de maximização ou de minimização.

O entrevistado continua:

...então no fundo ele está usando um ponto de ótimo para função objetiva, que vai ser atingido em algum ponto dentro dessa estrutura, dessa região viável tem uma estrutura, muito bem comportada, que a gente chama de um poliedro, que é formado por vértices... Existe uma solução ótima num vértice do poliedro **e todas as demonstrações e todos os resultados a gente faz com ferramentas da Álgebra Linear...**

Para compreender a fala do professor nesse trecho, senti necessidade de conhecer melhor do que trata um problema de otimização. Novamente recorri ao livro já citado de SPIVEY, (1975). Nesse manual encontrei na página 86 no item: O problema geral de programação linear:

Maximizar a função linear:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \text{ para } x_i \geq 0, (i = 1, \dots, n)$$

sujeita a:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

no sub-item: Solucionando um problema de programação linear, na página 102 da mesma obra, é explicado o seguinte:

...um problema de programação linear envolvendo desigualdades pode ser modificado para um problema envolvendo equações lineares de variáveis não negativas, pelo uso de variáveis de folga. Enunciaremos agora um problema de programação linear na forma modificada...

Primeiramente, é comum estabelecer o problema em termos de um sistema correlato de igualdades lineares e não em termos de desigualdades. Cada desigualdade é convertida em uma igualdade pelo acréscimo de uma variável denominada variável de folga. Passando a resolver o sistema correlato de igualdades é usado um teorema que diz:

*Se existirem r vetores linearmente independentes  $P_1, \dots, P_r$  (no espaço de requisitos) tais que  $x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_rP_r=P_0$ , então  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r \ 0 \ \dots \ 0)^T$  no espaço de soluções tendo r coordenadas positivas e  $n - r$  coordenadas nulas é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis S do problema de programação linear.*

A importância de achar um ponto de extremo é que o conjunto de soluções viáveis é convexo, portanto o ponto máximo, caso exista, será desse tipo. Esse conjunto de soluções viáveis na sua representação gráfica é o poliedro mencionado por Esteves.

A utilização da noção de base nesse problema de programação linear é explícita, pois para maximizar ou minimizar a função dada é necessário encontrar vetores linearmente independentes e que gerem o espaço solução.

A situação de maximização ou minimização de uma função linear em Programação Linear é importante não só para Ciência da Computação como pode servir de pista para a criação de um problema “real” que exija uma compreensão maior do que está envolvido na noção de base, isto é, essa situação pode ser desenvolvida como um problema acessível a qualquer curso de Exatas, constituindo-se em um recurso-meta para ensino/aprendizado da noção de base numa aula de Álgebra Linear.

O professor Esteves também mencionou a Computação Gráfica como necessitando da Álgebra Linear, citando *ortogonalização e ortonormalização de base*.

A segunda questão pedia para o entrevistado um exemplo do uso da noção de base em algum assunto específico da Ciência da Computação, ao que ele respondeu:

Programação Linear,..., há um funcional linear positivo que eu quero maximizar, com uma coleção de restrições, são inequações lineares digamos assim,..., existe uma solução ótima, no vértice do poliedro que é a solução básica, ou seja, aquela solução através de uma base no espaço vetorial...

Esse funcional linear positivo, já mencionado e exemplificado, é uma lei que abrange as respostas possíveis. As inequações lineares são os delimitadores que direcionarão a busca da melhor solução, por meio de um sistema de inequações.

Esteves continua dizendo que:

...o Matróide é na realidade uma generalização de Álgebra Linear, conceito de base de um matróide e de conjuntos independentes num matróide, ele está generalizando exatamente o conceito de base e de independência linear...

Assim, Esteves apresenta mais um dos conceitos utilizados em Ciência da Computação que se originou na idéia de base de um espaço vetorial. Segundo Sandra Kingan (<http://cs.hbg.psu.edu/~srk1/matroids/>):

:

Matróides são uma abstração de vários objetos combinatórios, dentre eles grafos e matrizes. A palavra matróide foi cunhada por Whitney em 1935 em seu notável artigo “Sobre as propriedades abstratas de dependência linear”. Ao definir um matróide Whitney tentou capturar as

propriedades fundamentais de dependência que são comuns aos grafos matrizes. ...A teoria dos matróides fornece uma estrutura na qual os problemas de otimização combinatória, pesquisas operacionais e teoria dos grafos se tornam mais simples para compreender.

É interessante destacar que não só a Álgebra Linear é ferramenta para a Ciência da Computação como também seus conceitos têm servido de inspiração para a construção de conceitos dessa ciência.

A seguir Esteves fornece mais detalhes sobre a relação de um matróide com a idéia de base de um espaço vetorial:

...então se a gente tiver um problema, que a gente consegue descrever desse jeito, através de um matróide ou através da intersecção de dois matróides, a gente tem uma técnica algorítmica que a gente chama de gananciosa ou gulosa, que é uma técnica bastante simples e que garante que a gente ache a solução ótima em tempo bom digamos assim, em tempo polinomial, **então o conceito da base aparece fortemente nesses dois lugares.**

Essa fala reforça a observação feita anteriormente sobre a idéia de base de um espaço vetorial.

Esteves afirma que a computação gráfica não é sua área, porém sugere que:

...computação gráfica... eu sei que lá o conceito de base é importante para fazer projeção de imagem de dimensão menor.

Esteves, como outros entrevistados, aponta que a computação gráfica utiliza a Álgebra Linear como ferramenta.

No que diz respeito à noção de base, falou sobre problemas de otimização em programação linear, e também sobre matróides, como exemplos de assuntos específicos que fazem uso dessa noção.

Esteves também contribuiu com a indicação de bibliografia:

Tem um livro, eu não lembro o nome do autor agora, da McGraw Hill, que é “Álgebra Linear e suas Aplicações”, (o autor se refere ao livro de MOSTOW) não lembro o nome do autor agora, é um livro de Álgebra Linear que ele coloca algumas aplicações computacionais, resoluções de sistemas lineares, aliás, em geral qualquer livro que você pegue de cálculo numérico ou análise numérica vai ter um pouco dessa história, interpolação de polinômios, resolução de sistemas lineares, tudo isso tem a ver.

Esteves indica um livro de Álgebra Linear que traz aplicações computacionais. Na hora ele não se lembrou do nome do autor, mas via e-mail complementou algumas informações sobre a bibliografia indicada. Portanto o livro mencionado nesse trecho é de MOSTOW (1969).

Esteves continua:

Na parte de otimização, um livro de programação linear bom, introdutória né, mas está mais voltado para parte de programação linear mesmo, você vê que os conceitos da Álgebra Linear aparecem dispersos ou num capítulo lá que ele faz aplicação geométrica, o livro lá do CHVATAL, “Linear Programming”, que é da Ed. Freeman & Co, que é um livro de 83, é um livro muito bom.

Coerente com as informações fornecidas, Esteves indica agora um livro de programação linear, que foi uma das áreas que ele já apontara, como sendo fértil para encontrar a utilização da noção de base de um espaço vetorial.

Esteves conclui sua contribuição dizendo:

Se você quer ver uma carga mais teórica para você ver que a Álgebra Linear vai aparecer com força ali em um pedaço, é o “The Theory of Linear and Integer Programming”, do Alexander Schrijver é um livro da John Wiley & Sons, o livro também é antigo de 1986, quer dizer antigo, é muito bom, é um livro excepcional da área, e ele foca exatamente do ponto de vista teórico da coisa, está tudo demonstrado, tá tudo muito bem feito lá ele inclusive tem um pequeno capítulo, o capítulo 3, de Álgebra Linear Computacional, acho que é o capítulo 3, o capítulo 2 ele faz algumas revisões, aí tem lá parte 3 do livro, quando ele vai para teoria de programas lineares, daí ele fala, constrói os poliedros... método de eliminação de ....fica latente a intersecção com a Álgebra Linear.

Segundo Esteves este livro é indicado para pesquisar um ponto de vista mais teórico, ou seja, o livro é mais apropriado para buscar um entendimento do desenvolvimento da teoria programação linear. Além da indicação do livro, Esteves reafirma sua fala anterior da relevância da Álgebra Linear para esta área da Ciência da Computação.

## **Professor Fonte**

O professor Fonte é professor do departamento de Ciência da Computação e leciona disciplinas sobre Teoria da Computação.

A entrevista foi gravada e durou cerca de 20 minutos.

Ao ser questionado – como justificaria a inclusão da disciplina Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação – o entrevistado responde:

Acho que eu tenho duas explicações, a primeira para os alunos **ganham maturidade teórica, formal, matemática que vale a pena**. Só essa eu acho que seria o suficiente, mas eles têm outros cursos depois como, por exemplo, **otimização e simulação, curso de computação gráfica que usam diretamente o conteúdo**.

O professor Fonte indica duas razões para a inserção da Álgebra Linear em um curso de Ciência da Computação. Primeiro para que o aluno amadureça conhecendo a importância do significado e da forma de expressão dos conceitos matemáticos. Assim, Fonte acrescenta ao desenvolvimento do raciocínio matemático, razão prevista na análise a priori da questão, o aprendizado do formalismo matemático. Segundo, pelo fato de que em outras disciplinas do curso, tais quais, Otimização e Simulação, e Computação Gráfica, os alunos usam a Álgebra Linear como ferramenta nos assuntos trabalhados nas mesmas.

A seguir o professor Fonte é questionado se algum assunto específico do curso de Ciência da Computação necessita da noção de base de um espaço vetorial, momento em que declara:

Sim, por exemplo, na disciplina de Otimização existem **métodos para resolver problemas de programação linear**, e **estão diretamente relacionados com** tudo: operações com matrizes, **bases**, aliás, você resolve usando isso, você resolve o problema usando essas coisas, então está diretamente ligado. No caso de **computação gráfica** tem **tudo a ver com a mudança das coordenadas, quando você vai fazer rotação, fazer translação, você está mexendo com a base do espaço** e fazendo operações, então eu acho que é aplicação direta desse negócio,...

Desta forma Fonte corrobora a fala de Esteves sobre as técnicas de resolução de problemas de programação linear, utilizadas na disciplina de Otimização, que

necessitam da noção de base de um espaço vetorial. O entrevistado confirmou o que já foi mencionado por outros entrevistados, que a noção de base de um espaço vetorial é utilizada como ferramenta em computação gráfica.

Diante da apresentação da folha com o nome das quatro áreas: Computação Gráfica, Grafos, Autômatos e Programação Linear, acompanhada de minha fala sobre o fato dessas áreas terem sido apontadas por outros entrevistados como utilizadoras das noções de Álgebra Linear, Fonte declara:

**Programação linear** é o que tem em Otimização e Simulação. Para Grafos a manipulação de matrizes, tanto em Grafos como Autômatos, tem manipulações de matrizes nas representações das coisas, mas eu diria assim: que **ela é mais direta nas outras duas, do que em Grafos e Autômatos...**

O entrevistado indica que a utilização mais explícita de noções de Álgebra Linear dá-se em Programação Linear e Computação Gráfica, e que nas outras duas, Grafos e Autômatos é menos *direta*, menos explícita. A forma de o professor analisar a frase está relacionada com o fato de ele estar lendo os nomes das áreas no papel.

Ao ser solicitada uma descrição sobre o uso da base de um espaço vetorial em alguma área da Ciência da Computação, o entrevistado comenta:

Então o que eu falei, por exemplo **a resolução de programação linear usa direto a idéia de base em construção**. Inclusive a **solução você fala solução básica, solução não básica, porque você está mexendo com a base na hora de resolver**, em geral...

O entrevistado destaca o uso de base de um espaço vetorial nas soluções de problemas de programação linear, salientando inclusive que o uso da própria terminologia atribuída à solução, básica ou não básica, diz respeito ao uso da noção de base de um espaço vetorial na mesma. Mais uma vez Fonte corrobora declarações de Esteves, desta vez elas até mesmo se complementam, pois Esteves fala sobre a solução básica de um problema de programação linear, e Fonte explicita que a solução básica está relacionada ao uso da noção de base de um espaço vetorial.

Quanto à bibliografia para aprofundamento da compreensão das situações que necessitam da noção de base o entrevistado sugere:

...livros de programação matemática, livros de programação linear, vão falar um monte de base, por exemplo, acho que esse é um caminho legal, e de computação gráfica também...

Fonte não especifica nome de livros, mas sugere literatura sobre programação linear e computação gráfica.

## Conclusão Parcial

O fato dos recursos-meta encontrados por Padredi no discurso do professor ter superado em muito a quantidade de recursos-meta encontrados em livros didáticos de Álgebra Linear por Araújo (p. 15 deste trabalho) levou-me a acreditar que as entrevistas com professores me esclareceriam melhor sobre as possibilidades de encontrar recursos-metas relativos à noção de base do que a simples análise de livros didáticos da área de Ciência da Computação.

Acredito que minha persistência nesse caminho rendeu bons frutos, pois fui agraciado com as informações desejadas nestas duas últimas entrevistas. Ambas fornecem informações relevantes sobre a necessidade do estudo de Álgebra e, especificamente, de Álgebra Linear no curso de Ciência da Computação e sobre a utilização da noção de base como ferramenta para assuntos dessa área.

Fonte e Esteves salientam a importância do estudo da Álgebra Linear para o desenvolvimento do raciocínio matemático, inclusive ampliando essa razão. Fonte afirma que a *Álgebra Linear é importante para ganhar maturidade teórica, formal, matemática*; e Esteves toca no fato de que espaço vetorial é a primeira estrutura algébrica a ser estudada pelo aluno, enaltecendo a necessidade do estudo dessas estruturas para a compreensão de Ciência da Computação. Esteves discorre sobre Programação Linear, diz que as *demonstrações e resultados* (de parte da **teoria** desse assunto) *são feitos com ferramentas da Álgebra Linear*. As entrevistas com esses dois professores sugerem que os alunos de Ciência da Computação necessitam de Álgebra Linear para ganhar maturidade teórica e para poder utilizá-la como ferramenta, isto é, conhecendo a teoria dos espaços vetoriais que está subjacente a teorias de sua área de interesse, o aluno será mais competente em sua utilização.

Os problemas de otimização constituem-se em exemplos de situações em que a noção de base é utilizada de forma explícita. Ao falar sobre um problema de otimização, Esteves fala de *uma função objetiva associada a uma coleção de restrições*, onde há *uma busca do ponto de ótimo*, e por fim disse que todas as *demonstrações e todos os resultados são feitos com ferramentas da Álgebra Linear*. Portanto, ao falar sobre problemas de otimização em programação linear, Esteves foi além da menção da necessidade da noção de base de um espaço

vetorial como ferramenta, apontando a Álgebra Linear como sendo importante para o desenvolvimento teórico dessa parte da programação linear.

Ambos, Esteves e Fonte citam o uso explícito de base de um espaço vetorial no desenvolvimento de programação linear. Fonte diz que a *resolução de problemas de programação linear usa, direto, a idéia de base em construção, inclusive quando você fala em solução básica, é porque você está mexendo com a base na hora de resolver*; enquanto Esteves descreve em vários momentos da entrevista a utilização de base em programação linear tanto para resolver problemas quanto para inspirar a criação de novas noções como a de matróide.

Esteves citou também a computação gráfica como necessitando da noção de base de um espaço vetorial, por utilizar *ortogonalização e ortonormalização de bases de espaços vetoriais* e por ser uma ferramenta utilizada para *projeções de imagens de dimensões menores*.

Em harmonia com essa afirmação de Esteves, o professor Fonte menciona a utilização da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta ao dizer que *computação gráfica tem tudo a ver com a mudança de coordenadas; quando você vai fazer rotação, fazer translação, você está mexendo com a base do espaço*.

Por fim, Esteves menciona mais uma parte da Ciência da Computação que utiliza a noção de base de um espaço vetorial como inspiração para o desenvolvimento do que se denomina **matróide**, que segundo o entrevistado utiliza a idéia de obter elementos ‘independentes’ de um certo conjunto em analogia com o conceito de base de um espaço vetorial.

De acordo com Douady a utilização de noções e teoremas matemáticos na resolução de problemas constitui-se no que ela denomina de ferramentas, o que é segundo a autora um dos estatutos do saber matemático. A utilização do conhecimento matemático como ferramenta de resolução de problemas poderá, ainda de acordo com Douady, aprofundar as concepções dos estudantes. Portanto essas situações apontadas por Esteves e Fontes, que necessitam da própria noção de base de um espaço vetorial como ferramenta, ou como inspiração para construção de noções análogas, adaptadas ao campo em que trabalham, podem contribuir para aprofundar a concepção dos alunos sobre a noção de base de um espaço vetorial. Assim sendo, essas situações apontadas acima, podem ser consideradas recursos-meta, extra-matemáticos para o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial.

Rogalski corrobora essa idéia quando afirma que uma das finalidades do recurso-meta é provocar nos estudantes uma atividade de reflexão sobre certos conceitos (página 21). Essa finalidade da utilização de um recurso-meta destacada acima se enquadra no caso da utilização de um determinado conceito em estudo como ferramenta, visto que a utilização de um conceito matemático com esse estatuto conduz a um aprofundamento do mesmo por parte do estudante, esse uso deve ter levado o estudante a **refletir** para depois amadurecer suas concepções.

Assim sendo, conforme dito acima, foram muitas as contribuições de Esteves e Fonte para investigação da utilização da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta para assuntos da Ciência da Computação.

---

## **CAPÍTULO 4**

---

### **Considerações Finais**

A disciplina Álgebra Linear faz parte da maioria dos cursos de Ciência da Computação oferecidos no Brasil e consta também do currículo do curso de Ciência da Computação enfocado neste trabalho onde é ministrada no segundo ano. Os alunos deste curso têm, nos anos posteriores, duas disciplinas que em suas ementas indicam necessitar de conhecimentos de Álgebra Linear. A ementa da primeira disciplina - Otimização e Simulação OS - aponta a Álgebra Linear como um pré-requisito; a outra ementa de Tópicos Especiais de Computação TEC descreve alguns temas referindo a necessidade da Álgebra Linear. Há ainda no currículo, além da disciplina Álgebra Linear, uma outra matéria de Matemática denominada Teoria das Estruturas Algébricas, que embora não conte com ementa tópicos de Álgebra Linear, imaginei em um primeiro momento, que poderia utilizar a estrutura de Espaço Vetorial como um dos exemplos de Estruturas Algébricas e eventualmente tocar na noção de base de um espaço vetorial.

A primeira questão de meu projeto inicial de pesquisa foi: O aluno de Ciência da Computação, após ter cursado disciplinas que exigem a Álgebra

Linear como pré ou co-requisito, tem oportunidade de ampliar, aprofundar sua concepção de base de um espaço vetorial, utilizando essa noção como ferramenta explícita? Para responder a essa questão seria necessário investigar quais disciplinas do curso de Ciência da Computação utilizavam a Álgebra Linear como ferramenta e na seqüência entrevistar alunos que tivessem cursado tais disciplinas. No entanto, de acordo com as informações coletadas nas entrevistas realizadas com os professores que ministram tais disciplinas, constatei que não evidenciavam em suas aulas o uso de base de um espaço vetorial como ferramenta explícita para os assuntos tratados. Embora o professor de TEC, disciplina encarregada de trabalhar a computação gráfica, afirme que utiliza a noção de base *praticamente na disciplina inteira*, a utilização exemplificada por ele se dá somente com bases do plano e do espaço, em casos trabalhados em Geometria Analítica que não abordam a noção de base de um espaço vetorial de forma ampla, geral.

Dessa forma concluímos que nas duas únicas disciplinas que explicitam em suas ementas requererem conhecimentos de Álgebra Linear, pouca coisa ou quase nada é utilizado das noções tratadas exclusivamente nessa disciplina.

Essa conclusão remeteu-me à resposta da segunda questão, inicialmente proposta qual seja: Quais as situações dessas disciplinas que propiciam a utilização da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta? De acordo com o exposto anteriormente, os dados obtidos não permitem perceber situações propiciadas pelos assuntos tratados nessas disciplinas que dêem oportunidade de ampliação da compreensão da noção de base por servirem à dialética ferramenta-objeto.

As respostas dadas permitem afirmar que esse curso exige conhecimentos de Geometria Analítica, e que essas noções têm a oportunidade de passar pelo processo dialético ferramenta-objeto principalmente, na disciplina TEC, contexto certamente propício à dialética.

Na disciplina de Álgebra Linear, conforme Barbosa de Oliveira (2005), o professor utiliza conhecimentos anteriores dos alunos sobre Geometria Analítica para introduzir idéias e noções. O autor refere que segundo Harel, a Geometria Analítica em Álgebra Linear representa o ‘concreto’ que constitui um recurso-meta intra-matemático. Mas, depois da introdução, via Geometria Analítica, o professor passa à ‘generalização’, do conceito de base que se constitui em uma das noções elementares e fundamentais de Álgebra Linear.

A entrevista com o professor coordenador do curso foi realizada porque imaginei que como articulador do curso com a missão de proporcionar e incentivar a interdisciplinaridade poderia contribuir com informações relevantes sobre a importância da Álgebra Linear no currículo do curso que coordena. O coordenador sugeriu que a Álgebra Linear consta do currículo do curso de Ciência da Computação porque o curso foi desenvolvido pelo Departamento de Matemática, após o que refletiu que serve para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a disciplina TEC. Assim, dessa entrevista também não pude obter pistas sobre onde encontrar as situações pretendidas, pois o professor de TEC já havia sido entrevistado, conforme já exposto.

As primeiras entrevistas parecem indicar que o coordenador e os primeiros professores entrevistados, privilegiam mais as técnicas do que a teoria dessa Ciência, o que dificultou obter as informações de que necessitava.

Essa conclusão forçou-me a rever o planejamento inicial da pesquisa. Não haveria condições de responder a primeira questão, pois para tal, deveria entrevistar os alunos que já tivessem cursado TEC e OS, a fim de saber se a noção de base de um espaço vetorial havia sido ampliada pelos mesmos depois de havê-la utilizado como ferramenta extra-matemática em tais disciplinas, pois verifiquei que essa noção não foi utilizada como ferramenta explícita pelos professores em suas aulas.

Assim sendo, a questão inicial de minha pesquisa tem como resposta: No curso investigado, embora haja ementas que contém a Álgebra Linear como co ou pré-requisito, o aluno não teve oportunidade nas disciplinas relativas a essas ementas, de tratar, de lidar com essa noção como ferramenta extra-matemática.

Persisti nesta investigação, tentando encontrar respostas para as demais questões propostas, após análise da transcrição das entrevistas realizadas por Zoraide Padredi quando buscava os recursos-meta no discurso de diferentes professores de Álgebra Linear de diversas conceituadas Instituições. As informações fornecidas pelo professor a quem Padredi chamou de Freire, motivaram-me a entrevistar professores que trabalhassem com a teoria da Ciência da Computação.

Decidi, então, entrevistar professores do mesmo curso onde entrevistara os primeiros quatro professores. Esta decisão foi tomada após o exame de qualificação, de modo que percorri esse caminho de acordo com sugestões dos professores que participaram da banca de qualificação de mestrado.

Localizei dois professores desse curso de Ciência da Computação que trabalham com a Teoria da Computação e os contei para realizar as entrevistas.

Por meio dessas entrevistas pretendia obter dados necessários para responder as duas outras questões iniciais de minha pesquisa: Quais as situações dessas disciplinas que propiciam a utilização da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta? Tais situações podem ser transformadas em recursos-meta para melhor compreensão de base de um espaço vetorial em qualquer curso de Álgebra Linear?

A primeira dessas questões necessitou uma pequena adequação, dado o histórico do processo e a segunda permaneceu igual:

- Quais as situações que disciplinas não matemáticas de um curso de Ciência da Computação propiciam a utilização da noção de base de um espaço vetorial como ferramenta explícita?
- Tais situações podem ser transformadas em recursos-meta para melhor compreensão de base de um espaço vetorial em qualquer curso de Álgebra Linear?

É importante destacar as informações fornecidas pelos professores de Teoria da Computação, Esteves e Fonte, sobre a relevância da inserção da disciplina Álgebra Linear no currículo curso de Ciência da Computação.

Fonte e Esteves salientam a importância do estudo da Álgebra Linear para o desenvolvimento do raciocínio matemático, inclusive ampliando essa razão. Fonte afirma que a *Álgebra Linear é importante para ganhar maturidade teórica, formal, matemática*. Esteves toca no fato de que espaço vetorial é a primeira estrutura algébrica a ser estudada pelo aluno, enaltecendo a necessidade do estudo dessas estruturas para a compreensão de Ciência da Computação. Esses professores sugerem que os alunos de Ciência da Computação necessitam da

Álgebra Linear para ganhar maturidade teórica e para poder utilizá-la como ferramenta. Portanto, conhecendo a Álgebra Linear que está subjacente a teorias de sua área de interesse, o aluno será mais competente em sua utilização.

Essas entrevistas forneceram as situações que utilizam a noção de base de um espaço vetorial como ferramenta explícita nos assuntos do curso de em Ciência da Computação que são, segundo Esteves e Fonte, a resolução de problemas de Programação Linear, matróides, situações de computação gráfica, autômatos e teoria dos grafos.

O problema de otimização, dentre os cinco assuntos, foi o mais bem explorado. Trata-se da busca da melhor solução para um sistema de equações ou inequações que utiliza um teorema, envolvendo diretamente a noção de base de um espaço vetorial.

Quanto à computação gráfica, segundo Esteves, a ortonomalização e ortogonalização de bases de espaços vetoriais são usadas como ferramentas nessa área.

Já a matróide, segundo Esteves, é um conceito derivado do conceito de base de um espaço vetorial.

Autômatos e Grafos foram mencionados por Fonte como áreas que também necessitam da Álgebra Linear, embora não tenha apontado alguma situação específica que necessite da noção de base de um espaço vetorial.

A resposta à segunda questão (Tais situações podem ser transformadas em recursos-meta para melhor compreensão de base de um espaço vetorial em qualquer curso de Álgebra Linear?) ainda é parcial. Tenho consciência de que se

deve trabalhar muito ainda na investigação e desenvolvimento dessas situações para que ela seja respondida totalmente.

Acredito que essas situações podem ser transformadas em recurso-meta, pois o professor conhecendo os tópicos que envolvem essa noção matemática pode tentar produzir as condições adequadas para disponibilizar esse saber para o aluno, e que necessitem desse objeto de estudo como ferramenta, que ao ser colocada ao aluno pode gerar uma reflexão sobre a mesma, e auxiliar no seu aprendizado, constituindo-se em um recurso-meta (página 23 desse trabalho).

As situações extra-matemáticas a serem utilizadas em aula de Álgebra Linear deverão ser bem analisadas para que possam contribuir realmente para o aprendizado da noção estudada. Isto se constitui ainda em um desafio às pesquisas da área de Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear.

---

## BIBLIOGRAFIA

---

ARAUJO, C. V. B. **A metamatemática no livro didático de álgebra linear.** Dissertação de Mestrado do Programa de Educação Matemática da PUC-SP. 2002.

BARBOSA, L.M. **Ensino de Algoritmos em cursos de Computação.** São Paulo: Educ, 2001.

CELESTINO, M. R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: As pesquisas brasileiras na década de 90.** Dissertação de Mestrado do Programa de Educação Matemática da PUC-SP. 2000

DORIER, J. L. et al. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.** França: La Pensée Sauvage Editions, 1997, capítulo 3.

DORIER, J. L. et al. **On the teaching of Linear Algebra.** Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000, capítulo 4.

DOUADY, R. Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, França, vol. 7, p. 5-31, 1986.

GRANGEAT, M. et al. **A Metacognição, um apoio ao trabalho dos alunos.**  
Portugal: Porto Editora Ltda, 1999.

LAVILLE, C e DIONNE, J. **A Construção do Saber.** Artmed.1999. Porto Alegre.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas. Coleção Temas Básicos de Educação e Ensino.** São Paulo: EPU Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1986.

KOCHE, J. C. **Fundamentos de Metodologia Científica.** Editora Vozes.  
Petrópolis, 1997.

MARANHAO, M. C. **Dialética-Ferramenta-Objeto.** In Educação Matemática: uma introdução. Org.: Silvia Dias Alcântara MACHADO. São Paulo: EDUC, 1999.

OLIVEIRA, L. C. B. **Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear?.** Dissertação de Mestrado do Programa de Educação Matemática da PUC-SP, 2005.

PADREDI, Z. L. N. **As “Alavancas meta” no discurso do professor de Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado do Programa de Educação Matemática da PUC-SP, 2003.

ROBERT, A.; ROBINET, J. **Prise en Compte du Méta en Didactique des Mathématiques.** IREM, Université Paris VII, vol. 16, p. 145-176, 1996.

SCHRIJVER, A. **Theory of Linear and Integer Programming.** Tilburg:  
Netherlands. John Wiley & Sons Ltda, 1986.

SPIVEY, W. A. **Introdução à Programação Linear.** Tradução de Amâncio F. Pulcherio. São José dos Campos, São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.