LOURIVAL PEREIRA MARTINS

Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

LOURIVAL PEREIRA MARTINS

Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud***

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

AGRADECIMENTO

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta ajudaram na elaboração deste trabalho em especial:

A minha esposa Maria Inês Buso Martins e minhas filhas Cristina Martins e Andréa Martins pela paciência e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor Saddo Ag. Almouloud pelas contribuições que permitiram o desenvolvimento da pesquisa e elaboração desta dissertação.

Aos alunos do Colégio Monsenhor pela participação nas atividades que permitiram a elaboração das pesquisas

Ao Colégio Monsenhor que permitiu a aplicação das atividades experimentais em seu recinto.

Às professoras Doutoras Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Arlete de Jesus Brito por aceitarem participar de minha banca e pelas contribuições dadas ao trabalho durante a qualificação.

RESUMO

Este trabalho parte da constatação das dificuldades apresentadas pelos alunos na utilização do conceito de função como ferramenta na resolução de problema. Nele procuramos confirmar a validade de uma estratégia de ensino baseada na dialética ferramenta–objeto que crie as condições para a introdução deste conceito a partir de conhecimentos que os alunos já possuem. Com este objetivo, desenvolvemos e aplicamos uma seqüência didática baseada em situações – problema para alunos da oitava Série do Ensino Fundamental, série em que esse conceito é normalmente introduzido no nosso sistema de ensino. Para fundamentar a elaboração dessa seqüência desenvolvemos um estudo sobre: Os mecanismos utilizados pelo indivíduo para a manipulação dos objetos matemáticos procurando compreender quais as estratégias envolvidas nessa manipulação e como se dá a apropriação desse conhecimento; a forma com que esse conceito deva ser trabalhado com nossos alunos, segundo a visão dos documentos oficiais, e a maneira com que é tratado em algumas coleções de livros didáticos; como se deu o desenvolvimento histórico do conhecimento matemático que permitiu a formulação desse conceito, quais as idéias envolvidas nessa formulação. A seqüência elaborada é apresentada e analisada no quarto capítulo desta dissertação. Essa análise se dá em duas etapas: uma antes de sua aplicação, análise a prióri, procurando compreender o funcionamento de cada atividade, quais os conhecimentos necessários para a sua realização e quais os objetivos que desejamos atingir; uma segunda análise é realizada após a aplicação da atividade, análise a posteriori. Nela descrevemos como foi o desenvolvimento, quais as dificuldades apresentadas pelos alunos e quais os objetivos atingidos. Por fim, no quinto capítulo, desenvolvemos uma análise geral buscando responder as questões de pesquisa formulada tomando como base as análises realizadas no capítulo anterior.

Palavras chave: função, dialética ferramenta – objeto, construção de conceito

ABSTRACT

This work starts from the verification of the difficulties presented by the students in the use of the function concept as tool in the problem resolution. We tried to confirm the validity of a teaching strategy based in the dialectics tool-object that creates the conditions for the introduction of that concept starting from knowledge that the students already possess. With that I aim at, we developed and we applied a didactic sequence based in situations-problem for students of the eighth grade of the Elementary School grade in that concept it is usually introduced in our education system. To base the elaboration of that sequence we developed a study about: the mechanisms used by the individual for objects mathematician's manipulation, trying to understand which strategies involved in that manipulation and how is the appropriation of that knowledge; the form with that that concept should be worked with our students, according to the vision of official documents, and the way with this concept is treated in some collections of text books; how was the historical development of the mathematical knowledge that allowed the formulation of that concept, which the ideas involved in that formulation. The elaborated sequence is presented and analyzed in the fourth chapter of that dissertation. That analysis occurs in two stages, one before the sequence application, analysis a priori, trying to understand the operation of each activity, which the necessary knowledge for the accomplishment and which objectives that we wanted to reach. The second analysis is accomplished after the application of the activity, analysis the posteriori. In this part we described how the development was, which the difficulties presented by the students and which the reached objectives. Finally, in the fifth chapter, we developed a general analysis looking for answer the subjects of formulated research, taking as base them analysis accomplished in the previous chapter.

Keywords: function, dialectics tool - object, concept construction

SUMÁRIO

Introdução 9
Capítulo I – Problemática e Procedimentos Metodológicos 11
1.1 Problemática e questão de pesquisa. 11
1.2 Procedimentos Metodológicos 17
Capítulo II - Fundamentação teórica 22
2.1 Fundamentação 22
2.2 Considerações fundamentais: Situação, problema e conceito. 23
2.3 A dialética ferramenta objeto. 26
2.4 Quadro e os registros de representações semióticas. 29
Capítulo III - O objeto de pesquisa 34
3.1 Análise do conceito segundo os documentos oficiais 35
3.2 Análise do desenvolvimento do conceito de função nos livros didáticos. 38
3.2.1 Definição dos critérios de análise 39
3.2.2. Justificativa da escolha dos critérios. 40
3.2.3 Análise dos livros didáticos 44
3.3 Visão histórica da formação e superação de obstáculos relativos ao conceito de função. 54
3.3.1 A formação do conceito de função. 59
3.4 O conceito de função na vida do aluno 68
Capítulo IV - Experimentação e Análises 70
4.1 Procedimentos Metodológicos da Experimentação 70
4.2 Análise do pré-teste 72
4.3 Análise das atividades segundo a dialética Ferramenta-Objeto. 75
4.4 Análise das Atividades 76
4.4.1. Primeira atividade. 76
4.4.1.1 Análise a priori da primeira atividade 77
4.4.1.2 Análise a posteriori da primeira atividade. 85
4.4.2. Segunda atividade. 89
4.4.2.1 Análise a priori da segunda atividade 91
4.4.2.2 Análise a posteriori da segunda atividade. 98
4.4.3. Terceira Atividade 100
4.4.3.1 Análise a priori da terceira atividade 101

4.4.3.2 Análise a posteriori da terceira atividade 109
4.4.4 Quarta atividade 113
4.4.4.1 Análise a prióri da quarta atividade 115
4.4.4.2 Análise a posteriori da quarta atividade. 122
4.4.5 Quinta Atividade 127
4.4.5.1 Análise a prióri da quinta atividade 128
4.4.6 Sexta atividade 140
4.4.6.1 Análise a prióri da sexta atividade. 142
4.4.6.2 Análise a posteriori da sexta atividade 147
4.4.7 Sétima atividade 152
4.4.7.1 Análise a prióri da sétima atividade. 153
4.4.7.2 Análise a posteriori da sétima atividade. 160
4.4.7.3 Análise da solução do problema. 161
Considerações finais 165
Conclusões: 168
Referências Bibliográficas: 174
Anexo 1 179
Anexo 2 180
Anexo 3 181
Anexo 4 182

Introdução

O conceito de função "desempenha papel importante para descrever e estudar o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia". (PCNs. Ensino Médio, 1998, p. 44, 45). Entretanto, da forma com que vem sendo trabalhado com nossos alunos, não assume significado para uma grande maioria impedindo-os de utilizá-lo como ferramenta na solução de problemas. Essa observação se baseia em minha experiência com mais vinte anos de magistério, ministrando aulas nos Ensinos Fundamental, Médio e Superior e em resultados de pesquisas sobre o tema. Aparentemente, os alunos não conseguem compreender as idéias envolvidas numa relação funcional, considerando a palavra "função" como um termo inserido nos enunciados de exercícios, sem que isto interfira no desenvolvimento do mesmo. Aplicam o conceito de função de uma forma que Kieran (1992) define como processual, em que a entrada de valores de x resultam em valores de y ou *f(x).*

Nossa pesquisa tem por objetivo verificar a validade de uma proposta baseada na dialética ferramenta–objeto, desenvolvida por Régine Douady (1984) que permita uma melhor compreensão do objeto matemático função por parte dos alunos. Cremos que com a estratégia utilizada podemos criar as condições para que este objeto se torne uma ferramenta na resolução de problemas. Partimos do princípio de que os conhecimentos necessários à formação desse conceito já são de domínio dos alunos e que podem ser mobilizados por meio de uma seqüência didática, de forma a generalizá-los abrindo a possibilidade para a definição do novo objeto matemático.

A metodologia utilizada na pesquisa toma como base os princípios da engenharia didática, que exige uma fundamentação sólida permitindo a comparação dos resultados obtidos com a análise a teórica desenvolvida anteriormente, análise a priori. Seguindo tais princípios, desenvolvemos um estudo da forma pelo qual o conceito é trabalhado em documentos oficiais e em algumas coleções de livros didáticos colocados à disposição pelas Editoras na região da Grande São Paulo. Buscando uma melhor compreensão do objeto função, desenvolvemos um estudo sobre como se deu o desenvolvimento histórico do conhecimento matemático que permitiu a formulação do conceito, as idéias envolvidas na formulação e os obstáculos que dificultavam a sua construção.

Para verificar a validade de nossas hipóteses, desenvolvemos e aplicamos uma seqüência didática para alunos da Oitava Série do Ensino Fundamental. Na elaboração, levamos em consideração as diferentes formas de representação do objeto e das conversões entre estas representações. A aplicação das atividades se deu em duas fases: a primeira em forma de pré-teste visando ao aprimoramento e correção de possíveis falhas; a segunda, como o nosso objeto de pesquisa, visando à verificação da validade de nossas hipóteses.

Organizamos esse texto em cinco capítulos que cremos permitir mostrar o desenvolvimento de nossa pesquisa. No primeiro, expomos os motivos que nos levaram a buscar a validação da proposta, pois atividades semelhantes já tinham sido desenvolvidas de forma empírica e os resultados eram animadores. No segundo desenvolvemos a fundamentação teórica baseada na dialética ferramenta–objeto, de Régine Douady (1984), em sua tese de doutorado, usando como ponto de apoio as teorias dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993) e dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (2003). O terceiro capítulo é para a compreensão do objeto matemático função, as propostas dos documentos oficiais sobre a utilização do mesmo em sala de aula; à evolução histórica, os obstáculos enfrentados, nosso ponto de vista em relação ao objeto. Tomamos como base a definição formulada por Lejeune Dirichlet para o objeto matemático estudado visto que julgamos ser esta a que está mais de acordo com nossa proposta e com o público alvo a que ela se destina. No quarto capítulo, apresentamos a seqüência construída para esta pesquisa e desenvolvemos as análises a prióri e a posteriori de acordo com os princípios da engenharia didática. O quinto e último capítulo é para as análises finais e a conclusões que julgamos coerentes com nossa pesquisa.

Apresentamos também um adendo que julgamos corroborar nossas conclusões. Nele relatamos observações sobre o comportamento de três alunos envolvidos na solução de um mesmo problema que utiliza o conceito de função como ferramenta.. Esses dados foram colhidos em dois instantes distintos, sendo um dos alunos participante da fase pré–teste e os outros dois da segunda fase da pesquisa. Ambos os casos foram observados um ano após a aplicação da seqüência e as soluções apresentadas parecem validar nossa pesquisa.

Capítulo I – Problemática e Procedimentos Metodológicos

1.1 Problemática e questão de pesquisa.

É evidente a preocupação com o ensino no Brasil nas últimas décadas. Exemplo disso podemos encontrar em documentos como os relatórios pedagógicos publicados pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais), órgão do Ministério da Educação, entre os anos de 1998 a 2002, que analisa os resultados da prova do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) realizada nos referidos anos. Nesses relatórios explicitam-se os critérios que foram utilizados na formulação dessas avaliações. Definem como estrutura básica para sua elaboração a avaliação das Competências e Habilidades desenvolvidas pelos alunos ao longo de sua vida escolar. A concepção de competências e habilidades utilizadas nessas publicações estão definidas no relatório anual de 1998, que explicita competência como sendo “as modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que se utilizam para estabelecer relações entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer” (RELATÓRIO ENEM 1998 p. 9). As habilidades, de acordo com o mesmo relatório “decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do "saber fazer". Através das ações e operações, as habilidades aperfeiçoam-se e articulam-se, possibilitando nova reorganização das competências” (ibidem).

Dentre as competências, destacamos a classificada como a primeira: “Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens **matemática**[1], artística e científica” (RELATÓRIO ENEM 2002, p 16). Ao destacar a linguagem matemática, essa avaliação demonstra uma das maiores preocupações no ensino dessa disciplina: a de dar ao aluno instrumentos que permitam não só representar matematicamente, mas também compreender um texto em que a simbologia matemática esteja presente.

Dentre as habilidades, identificamos a segunda: “Em um gráfico cartesiano de variável socieconômica ou técnico-científica, identificar e analisar valores das variáveis, intervalos de crescimento ou decréscimo e taxas de variação”. (RELATÓRIO ENEM 2001, p 12). Observamos nessa habilidade a preocupação de

---

[1] grifo nosso

relacionar os conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento humano, dando a ele um caráter muito mais de ferramenta do que o estudo dos conceitos matemáticos voltados para a própria matemática.

Preocupação semelhante encontramos também em outros países. Ao analisar os relatos sobre a quarta avaliação realizada pelo National Assessment of Education Progress (NAEP), Kieran (1992) observa que os alunos aplicam regras algébricas sem a aparente compreensão das mesmas. Para driblar as dificuldades relacionadas com a compreensão do significado das estruturas algébricas "os alunos recorrem à memorização de regras e procedimentos e finalmente acabam acreditando que essa atividade representa a essência da Álgebra" (KIERAN 1992 p 1). Em nossa experiência em sala de aula, observamos situações que parecem corroborar essa idéia. Observamos alunos que desenvolvem corretamente a expressão $(a + b)^2$, mas lêem a mesma como sendo, "a" mais "b" ao quadrado, demonstrando não dar atenção ao fato da existência de parênteses envolvendo essa soma.

Entre os objetos da álgebra que os alunos não compreendem e acabam por fazer uso de estratégias de memorização temos o conceito de função. Em sua dissertação de Mestrado, Oliveira (1996) levou a efeito uma pesquisa diagnóstica sobre as deficiências dos alunos ingressantes no Ensino Superior, identificando que estes tinham dificuldades em relação "ao conceito de função, bem como o reconhecimento de uma função linear, constante, quadrática, modular, exponencial, seno, co-seno"(OLIVEIRA. 1996, p 62).

Observação semelhante é levantada por Sierpinska no relatório On Understanding The Notion of Function publicado em 1992 pela Mathematical Association of America sobre o título The Concept of Function. Nesse relatório a autora destaca que os alunos "tem dificuldades de fazer distinção entre as diferentes representações de função: fórmulas, gráficos. diagramas, descrição das relações através de palavras, interpretação de gráficos; manipulação da simbologia relativa ao conceito de função" (SIERPINSKA 1992, p. 25, Tradução nossa). A nossa percepção em sala de aula, com alunos do Ensino Médio, corrobora essas informações. Temos a impressão de que ao finalizar o estudo do conceito de função, os alunos acabam por desenvolver um mecanismo que Kieran (1992) define como processual, onde a entrada de valores de x resultam em valores de y ou f(x). O "conceito de valor da função é relacionado com a atividade de computar o valor de x para uma fórmula determinada" (Ibidem p. 25).

As características estruturais do conceito de função parecem não ser assimiladas pelos alunos, o que acaba por gerar dificuldades quando se deparam com situações em que existe a necessidade de comparar duas ou mais funções. Exemplo desta dificuldade pode ser identificada na terceira questão do ENEM 2002. A referida questão apresentava para análise um gráfico e uma tabela envolvendo funções lineares. A representação gráfica relacionava o excesso de peso de um atleta com sua altura e a tabela com a forma que esse excesso de peso interfere no seu desempenho em diversas categorias de atletismo. A questão solicitava aos alunos para "estimar, em que as condições de peso ideal, teria melhorado seu desempenho na prova" (RELATÓRIO ENEM 2002, p 93), A resposta correta foi assinalada por apenas 32% dos alunos. A interpretação do relatório é de que o alto índice de erro se deve "possivelmente por interpretações incorretas da tabela ou do gráfico, ou ainda de ambos. É possível também que os participantes tenham apresentado dificuldades em associar a relação linear entre as variáveis e a proporcionalidade" (RELATÓRIO ENEM 2002, p 94).

Essa dificuldade em perceber as relações de dependência entre duas variáveis talvez seja uma das razões que não permita ao aluno fazer uso do objeto função como ferramenta de trabalho em situações práticas, como obter a altura máxima atingida por um corpo num lançamento oblíquo. Parece não perceber que por trás desse tipo de movimento está uma relação funcional. O tratamento dado à função no contexto escolar, notadamente no Ensino Fundamental, deveria enfatizar mais a relação entre grandezas do que a relação entre números. Kieran (1992), assinala que os alunos são submetidos a dois conceitos de função: um conceito visto nas aulas de Ciências, trabalhado "como relação de dependência entre variáveis." (KIERAN 1992, p 39), e outro conceito dentro da Álgebra, onde o "ensino de funções ... não parece capitalizar nenhuma ... experiência pregressa " (ibidem).

Na análise dos livros didáticos que desenvolvemos para a presente dissertação constatamos que em sua maioria o conceito de função é trabalhado como descrito por Kieran. Não se leva em consideração os conhecimentos anteriores dos alunos. O conceito é trabalhado como a relação entre dois conjuntos numéricos, sendo a relação de dependência citada na introdução do capítulo ou em pequenos textos onde o autor procura mostrar a importância do conceito.

A partir destas constatações, propomos uma forma diferente de introduzir o referido conceito para alunos que não tenham trabalhado formalmente com o mesmo. Desenvolvemos essa introdução com o uso de situações-problema, que levem os alunos a discutir e elaborar o conhecimento na resolução da situação.

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; (PCNs-EF 1998 p. 40),

Para Vergnaud (1993), são as situações que dão significado ao conceito, podendo estas serem apresentadas em forma de problemas. Uma situação-problema não é um exercício comum de sala de aula. Ela consiste em "questões abertas ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou mais quadros". (HENRY, 1991, apud ALMOULOUD 2000, p 108). São questões capazes de mobilizar os conhecimentos dos alunos, mas que não se enquadram em modelos pré-definidos e que permitem ao aluno reconhecer quase que imediatamente as estratégias de solução. "Um problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada "(PCN 1998 p. 41).

A defesa do ensino da matemática por meio da resolução de problemas é destacada pelos PCNs. De acordo com esse documento, devemos fazer uso de situações-problema que levem o aluno a construir conceitos matemáticos como o de função. "A simples reprodução de procedimentos e o acúmulo de informações" (PCN. 1998 p. 39), não tornam significativo ao aluno o conceito trabalhado. No máximo mecanizam estratégias e técnicas de trabalho que passam a impressão de levar à compreensão do conceito a eles relacionados. Consideramos que o conceito se tornará significativo se for incorporado à estrutura cognitiva do aluno (BRITO, 2001 p. 75) com este utilizando-o com desenvoltura na solução de problemas. Para superar essa dificuldade "educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática." (PCN. 1998 p. 39). É nesse sentido que definimos como tema central de pesquisa a **Análise da dialética ferramenta objeto no Ensino do conceito de função**.

Na dialética ferramenta-objeto, desenvolvida por Régine Douady (1984, 1986), uma situação-problema deve partir de conhecimentos dominados pelos alunos, conhecimentos antigos, que servirão de ferramenta a partir da qual o professor encaminhará a aquisição de um novo conceito, o objeto de estudo, que uma vez adquirido torna-se ferramenta para a aquisição de novos conceitos (novos objetos)

As questões que se propõem então em nossa pesquisa são:

Se colocado frente a uma seqüência didática que utilize como ferramenta conhecimentos cotidianos, como a dependência entre duas grandezas proporcionais e escolares, como a representação gráfica de uma equação, o aluno será capaz de:

- Estabelecer a dependência e a correspondência como característica comum a esses conhecimentos?
- Ser induzido a generalizar a dependência e a correspondência como relação entre duas variáveis?
- Fazer uso desta generalização na formulação de um novo conhecimento (objeto matemático)?
- Perceber a necessidade de restrições, no domínio, que garantam o aspecto funcional dessa dependência?
- Fazer uso desse novo conhecimento como ferramenta de trabalho em novas situações?

As relações de dependência entre duas grandezas já tinham sido percebidas e registradas na Antigüidade. Exemplo de registros em tabela que parecem indicar relações entre lados de um triângulo retângulo é encontrada na tableta de número 322 da “Plimpton Collection na Columbia Universty. A tableta data do período babilônio antigo (1900 a 1600 A.C aproximadamente” (BOYER 1974 p 25). Entretanto, a dependência funcional evolui ao longo do tempo ”tendo uma formulação clara somente por volta do século XVII por Descartes” (YOUSCHESVITCH 1976 p 55). Para que essa formulação fosse possível muitos obstáculos próprios a esse conceito, obstáculos epistemológicos, tiveram que ser vencidos.

A noção de obstáculo epistemológico foi inicialmente desenvolvido por Gaston Bachelard em 1938, e trazido para a didática da matemática por Brousseau (2004). Segundo esse autor, um obstáculo é um “conhecimento que se apresenta verdadeiro em um certo domínio mas revela-se falso ou inadequado em um domínio novo ou num domínio mais vasto” (BROUSSEAU. 2004 p 18 tradução nossa). Muitos dos erros cometidos pelos alunos poderiam ser explicados por esses obstáculos. A presença de um conhecimento, válido num certo domínio, induziria o aluno a cometer erros num domínio mais amplo, ou o impediria de obter avanço dentro desse conhecimento. Essa visão permite um novo enfoque sobre a origem do erro. Ele não seria uma falha do aluno, mas sintoma de um conhecimento mal adaptado “por conseguinte é vão ignorar um obstáculo. É necessário rejeitá-lo explicitamente, integrar a sua negação na aprendizagem do novo conhecimento, nomeadamente sob a forma de contra-exemplos. Neste sentido, é constitutivo do saber” (ibidem p 19). Outro obstáculo identificado por Bachelard (1938) é o que denominou de “obstáculo pedagógico” (BACHELARD, 1996 p. 23) ao analisar a forma com que os professores de ciências trabalham o equilíbrio dos corpos flutuantes. Segundo o autor, justifica-se a capacidade de alguns corpos flutuar a propriedades desse “corpo que flutua, ou melhor ao corpo que nada. .... Não é costume atribuir-se essa resistência à água” (ibidem). A esses obstáculos, relacionados com as escolhas do professor denominaremos de obstáculo didático, seguindo a linha definida por Brousseau (2004).

Em nosso contato diário com alunos observamos que esses fazem uso com freqüência de tabelas envolvendo grandezas, como a quantidade de convites de formatura que cada um pretende adquirir relacionada com a dívida com a comissão organizadora do evento. Isso parece demonstrar que possuem um domínio pelo menos parcial desse conhecimento. Nessas tabelas, o aluno, estabelece uma relação entre duas ou mais informações, como o nome do colega, quantos convites de formatura esse deseja comprar e quanto deverá pagar por esses convites. Com elas os alunos organizam suas informações, mas isso não significa dizer que estes sejam capazes de perceber nessa representação a relação de dependência entre as grandezas envolvidas. A essa capacidade de organizar os dados, sem que necessariamente compreenda todas as informações envolvidas é que denominaremos de domínio parcial desse conhecimento.

O nosso objetivo é o de utilizar os conhecimentos citados acima, entre outros, para responder as questões formuladas. Procurando despertar em nossos alunos a necessidade de uma generalização, que leve a formulação do conceito de função, construímos e aplicamos, para alunos da oitava série do Ensino Fundamental, uma seqüência didática em forma de situações-problema envolvendo grandezas dependentes entre si, como a medida do lado de um quadrado e sua área. Essa seqüência é formada por cinco situações com a utilização de quatro conjuntos de grandezas diferentes procurando mostrar a variação como idéia a ser generalizada. Com isso tentamos superar o que cremos ser um obstáculo epistemológico, que dificultava a construção desse conceito. Esse obstáculo, que Bachelard denomina de “experiência primeira” (BACHELARD, 1996 P. 29) está associado a busca de compreender somente as propriedades envolvidas numa relação entre duas grandezas, como a variação da velocidade em relação ao tempo. Conhecer essas propriedades seria suficiente para se compreender o fenômeno estudado, não sendo necessário nos aprofundarmos na variação como objeto de pesquisa para essa compreensão. Ao se deparar com quatro conjuntos de grandezas que apresentam a variação como fenômeno em comum esperamos criar as condições para que esse obstáculo seja superado.

Partimos do princípio de que uma seqüência que faça uso de conhecimentos que os alunos já possuem, pode ser utilizada para levá-los a perceber:

- As características comuns a esses conhecimentos;
- A possibilidade de generalizar estas características;
- A utilização dessa generalização como um novo conhecimento;
- A necessidade de restrições para tornar este conceito funcional.

1.2 Procedimentos Metodológicos

Em nosso ponto de vista, a confirmação ou não de nossas hipóteses poderá ser realizada com a elaboração de uma seqüência na qual os conhecimentos dos alunos servirão de base para construir o conceito desejado. Cremos ser necessário que a seqüência desperte o interesse dos alunos, levando-os a se envolverem na resolução das situações apresentadas, tomando para si os problemas formulados. Para atingir esse objetivo procuramos utilizar as condições que Sierpinska (1992 p. 57) julga que são fundamentais para a aprendizagem do conceito de função:

- As situações devem ser motivadoras para os alunos e formuladas num contexto introdutório interessante para eles;
- Encadeamento das situações de forma a permitir ao aluno observar a variação como fenômeno;
- Observar os conhecimentos prévios, notadamente os relacionados à álgebra, de modo que o aluno possa perceber e verbalizar não só as variáveis, mas principalmente a variação;

- Levar o aluno a utilizar os diferentes quadros matemáticos e as diferentes formas de representações associadas ao objeto função;
- Direcionar as atividades para a formulação de uma definição de acordo com o capacidade cognitiva dos alunos. Concordamos com Sierpinska que considera as "definições informais como a formulada por Dirichlet" (ibidem) suficientes para a introdução do conceito de função, na série desejada.

Na seqüência elaborada e aplicada para alunos da oitava série do Ensino Fundamental, procuramos levar em consideração esses princípios. Para tanto, desenvolvemos um conjunto de atividades em ordem crescente de dificuldades, partindo de situações elementares como a proposta no Parâmetro Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental na página 117.

Na formulação dessa seqüência fizemos uso dos princípios da Engenharia Didática, expressão utilizada na didática da matemática desde do início da década de 1980, designando "uma forma de trabalho didático equiparável com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto determinado, se baseia em conhecimentos científicos de seu domínio e aceita apenas um controle do tipo científico" (ARTIGUE 1995; p.33). A construção de um projeto que siga os princípios dessa engenharia passa por etapas bem definidas que se constituem em:

- Uma análise preliminar;
- Análise a prióri das situações propostas;
- A experimentação
- A análise a posteriori e evolução das atividades.

Na análise preliminar, o pesquisador tem a necessidade de estabelecer uma fundamentação clara com base nas teorias da didática da matemática e da didática geral.

Para essa fundamentação é necessário a definição de um referencial teórico que permita:

- compreender as interações internas à sala de aula na relação professor aluno;
- compreender como o objeto matemático é visto segundo as diversas correntes que atuam no sistema educacional;
- compreender de que forma o conceito deveria ser trabalhado em sala de aula e a forma que realmente é trabalhadá;

- prever as variáveis externas e internas que possam vir a interferir na pesquisa;
- prever, da melhor forma possível, quais as possíveis reações dos alunos frente as situações propostas;
- comparar os resultados observados nas atividade práticas com as previsões.

Buscando estabelecer essa fundamentação, realizamos inicialmente um estudo das propostas oficiais, destacando os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, publicado pela Secretaria do Ensino Fundamental em 1998. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, publicado pela Secretaria de Educação Média e Tecnológica em 1998, a proposta curricular para o ensino de matemática primeiro grau, publicado pela Coodenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria de Estado da Educação – São Paulo, em 1988 na sua terceira edição, a proposta curricular para o ensino de matemática Segundo grau, publicado pela mesma Coodenadoria, em 1992, na sua terceira edição. Nesses documentos procuramos identificar as propostas oficiais para o ensino de função. Procurando compreender a forma com que o conceito é trabalhado em nosso sistema escolar, realizamos uma análise de diversas coleções de livros didáticos, destinados ao Ensino Fundamental, confrontando com as propostas oficiais.

Para identificar os obstáculos que devem ser levados em consideração em nossas atividades elaboramos um breve estudo histórico de forma a compreender como se deu a evolução do conceito e quais foram os obstáculos que tiveram de ser superados ao longo dessa evolução. A interferência desses obstáculos na aquisição do conhecimento é destacada por vários pesquisadores da didática da matemática entre eles Artigue (1992 p. 111), Brousseau (1999), Sierpinska (1992 p 27). Se tomarmos a concepção de obstáculos adotada por esses autores, muito dos erros cometidos por nossos alunos parecem indicar a presença desses obstáculos. São obstáculos, que devemos enfrentar e superar para que esta aquisição seja possível, visto que não indicariam a falta de um conhecimento, mas sim um conhecimento insuficiente para necessidades atuais.

O uso da dialética ferramenta-objeto, como base de sustentação para nossa pesquisa, leva em consideração a existência desses obstáculos e visa à superação dos mesmos. Ao utilizar os conhecimentos dos alunos, para com eles construir um novo saber, consideramos também a existência de esquemas mentais. O conceito de esquemas mentais foi inicialmente desenvolvido na teoria psicogenética de Piaget. De acordo com essa teoria, o sujeito possui esquemas mentais que permitem sua interação com o meio e desta forma construir seu conhecimento. Usaremos mais precisamente a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, 1993) que parte do princípio da existência de um conjunto de esquemas associados a um determinado conhecimento formando um campo de conceitos. Pretendemos construir situações–problema que favoreçam a mobilização de esquemas mentais relacionados à noção de variação entre duas grandezas, esquemas de contagem entre outros para construir um novo campo de conceitos, ou seja, definir o conceito de função.

Passamos para a segunda etapa da engenharia, onde se realiza uma análise a priói da seqüência elaborada na qual o pesquisador toma a decisão sobre quais variáveis vai levar em consideração na formulação das situações-problema. "Estas são as variáveis de comando que ele percebe como pertinente com relação ao problema estudado" (ARTIGUE, 1995, p 41). Analisamos cada atividade individualmente, buscando identificar quais obstáculos deveriam ser levados em consideração de forma que a superação por parte dos alunos permitisse atingir os objetivos desejados. Consideraremos o modo como o aluno conduzirá as informações, se as representará graficamente, se fará uso de tabelas e quais as institucionalizações locais serão elaboradas ao final de cada atividade. Essa análise e comparação ao longo do experimento, criará as condições para que se façam correções das falhas que serão detectadas durante o desenvolvimento. Uma análise a posteriori nos permitirá validar ou não as hipóteses construídas a partir da questão de pesquisa.

Numa fase preliminar, elaboramos e aplicamos uma seqüência de atividades formadas por sete situações-problema que satisfizeram as condições desejadas. Essa aplicação se deu para um público alvo semelhante ao de nossa pesquisa, alunos da oitava série do ensino fundamental e consideramos que esse seja um pré-teste de nossa pesquisa. Nas séries anteriores foram trabalhados com os alunos conhecimentos básicos como proporcionalidade, representação gráfica, expressão algébrica entre outros requisitos que Sierpinska (1992) considera como sendo fundamentais para a compreensão do conceito de função. Entretanto a formalização do conceito de função ainda não foi realizada. O pré–teste teve por objetivo identificar a viabilidade da aplicação das situações elaboradas para o público alvo.

Verificar se as situações propostas estavam de acordo com o público a que se destinavam, se eram capazes de estimular os alunos de maneira que os mesmos se apropriassem do problema e verificar se a forma com que foram elaboradas era compreensível para os alunos. O resultado do pré–teste mostrou a viabilidade dessa seqüência apresentada. Pelo desempenho apresentado na pré-experimentação acreditamos que os alunos já possuam os conhecimentos necessários para o desenvolvimento das atividades.

A experimentação, terceira etapa da engenharia, se deu através da aplicação das atividades com alunos voluntários de uma escola na região da Grande São Paulo. Para registro e coleta de dados foram utilizados, além das observações do pesquisador durante o experimento, as folhas de anotações dos alunos e uma gravação em vídeo. Essa gravação auxiliou na análise dos eventos ocorridos durante a experimentação. Essa análise foi realizada após a aplicação de cada atividade procurando compreender os fatos observados, contrapondo com a análise a prióri desenvolvida na etapa anterior, buscando identificar:

- As possíveis falhas ocorridas durante a aplicação da atividade;
- Se as respostas dos alunos, a aplicação da atividade, estavam de acordo com o previsto na análise a prióri;
- A ocorrência de fatores não previstos na análise anterior;
- Se houve compreensão por parte dos alunos, das questões propostas na atividade.
- Como evoluiu o processo de aprendizagem

A quarta etapa da engenharia se deu com a “análise a posteriori”, realizada ao final da aplicação das atividades. Nela comparamos a análise a prióri com as análises internas a cada atividade. Cremos que a validação de nossas hipóteses ocorreria se os alunos conseguissem estabelecer a relação de dependência entre as grandezas apresentadas em cada situação. Esperamos que sejam capazes de perceber a dependência não como um caso particular de cada relação, mas um caso geral. Essa generalização abre a possibilidade de estabelecermos a definição de um novo conceito matemático, relacionado com a dependência entre duas grandezas. Esse novo conceito que denominaremos de função será definida de forma semelhante a dada por Dirichlet, como uma relação de dependência entre duas variáveis x e y em que para cada valor de x estará associado um único correspondente y.

Capítulo II - Fundamentação teórica

2.1 Fundamentação

Em nossa pesquisa, partimos do princípio de que o sujeito trás consigo uma grande quantidade de informações que pode utilizar para interagir com seu meio. Essa interação leva ao surgimento de problemas cuja solução gera novas informações e consequentemente novos conhecimentos. Essa convicção que encontra respaldo na teoria psicogenética de Jean Piaget e na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud define a base de nosso trabalho. Muitas são as pesquisas nessa linha com resultados significativos demonstrando sua validade. No estudo que estamos desenvolvendo não pretendemos verificar a validade dessa afirmação, mas sim buscar uma alternativa que permita a construção do conhecimento por parte do aluno, com o uso da dialética ferramenta-objeto (dialectique outil-objet) desenvolvida por Régine Douady e a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

A dialética ferramenta-objeto é um processo cíclico que organiza os pólos do professor e os alunos, ao longo do qual os conceitos matemáticos desempenham alternativamente o papel de instrumento para resolver um problema e de objeto que toma lugar na construção de um saber organizado" (DOUADY, 1986 p. 5 tradução nossa). Neste processo o aluno é levado a mobilizar como ferramenta seus conhecimentos de forma a solucionar uma seqüência de situações-problema com o objetivo de construir um novo conhecimento, o objeto.

Nesse capítulo discutiremos alguns conceitos que servirão de base para nossa pesquisa. Analisaremos as concepções de situação como definido por Vergnaud e Brousseau, escolhendo a que acreditamos estar de acordo com nossa proposta. Julgamos que essa análise seja necessária pois faremos uso de atividades que cremos ser situações apresentadas em forma de problemas. Com essas situações pretendemos proporcionar as condições que permitam aos alunos mobilizar seus conhecimentos para a resolução das situações propostas. Definimos a Dialética Ferramenta-Objeto como sendo a fundamentação básica de nossa pesquisa, descrevemos as etapas dessa dialética e por fim apresentamos uma breve discussão sobre os conceitos de Quadros e Registros de Representação que são fundamentais nessa dialética para compreensão e solução das situações propostas.

2.2 Considerações fundamentais: Situação, problema e conceito.

Ao se planejar qual a melhor forma de ensinar um novo conteúdo matemático, estamos diante de escolhas que poderão dificultar a compreensão do aluno pondo a perder todo um trabalho. Entre as diversas estratégias para essa introdução, podemos fazer uso de uma seqüência didática explorando situações-problema em que se dê “atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento” (PCN, 1998, página 37) não só “ pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas.” (ibidem), mas também pela capacidade de mobilizar esses conhecimentos para solução desses problemas.

A concepção de situação tem sido utilizada em vários trabalhos de pesquisa em Educação Matemática e em documentos oficiais. Guy Brousseau considera uma situação didática como sendo um conjunto de relações entre o aluno e um meio estabelecido com o objetivo de criar “as condições que governem a difusão e a aquisição do conhecimento” (BROUSSEAU 2002 p.3 Tradução nossa) por parte dele. Para Vergnaud (1994) o conceito de situação não assume o mesmo significado, “mas com o sentido de tarefas” (VERGNAUD 1996 p. 167) a serem executadas pelo sujeito, como calcular a área de uma horta que se deseja construir. Para o autor são as situações que dão sentido ao conceito.

Um problema é, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, “uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado”. (PCN-EF 1998 p. 41). Como já observamos no capítulo anterior, para os PCN, um problema não é um exercício de execução mecânica, mas que exige do aluno a superação de dificuldades dentro das suas capacidades cognitivas. “Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la” (ibidem.). Para Vergnaud (1996) a resolução de problemas pode adquirir mesmo sentido que o dado pela execução de uma tarefa na significação de um conceito, nesse sentido consideramos que a aquisição de conhecimento pode ser moldada por situações e problemas.

Segundo Douady (1986), numa situação escolar de aprendizagem, um problema deve responder a quatro questões:

> - O enunciado (contexto e perguntas) tem que ter sentido para os alunos;
> - Tendo em conta seus conhecimentos, os alunos podem dar início à resolução, mas não podem resolver completamente o problema;
> - Os conhecimentos visados pela aprendizagem (conteúdos e métodos) são os instrumentos adaptados ao problema;
> - O problema pode ser representado em pelo menos dois quadros. (DOUADY, 1986, p.13 tradução nossa).

Para Vergnaud (1996) para que se torne um problema para o indivíduo é necessário que ele tenha conhecimentos que o tornem capaz de considerá-lo como tal, mas que esse não "veja" a solução de forma imediata. Dessa forma um problema fechado em que todos os dados estão presentes, bastando ao aluno a tarefa de interpretar e resolver, seguindo uma receita pronta, não constitui verdadeiramente um problema. Da mesma maneira que um problema que esteja além das capacidades dos alunos impedirá que estes o tomem para si como um problema.

Na seqüência didática que elaboramos para o presente trabalho procuramos criar situações que levam em consideração os conceitos que servirão de ponto de partida para o desenvolvimento da atividade de acordo com o público alvo de nossa pesquisa. Utilizamos o conceito de situação como proposta por Vergnaud, um conjunto de tarefas a serem realizadas pelos alunos, que seguem os critérios definidos por Douady. As situações propostas envolvem variação entre duas grandezas solicitando aos alunos que executem uma seqüência de tarefas bem estabelecida, como o preenchimento de uma tabela ou a construção de um gráfico. A execução dessas tarefas é acompanhada por questionamentos que procuram colocar em discussão o fenômeno estudado. Esta discussão busca pôr em evidência a variação e a correspondência como sendo os pontos centrais da atividade e com elas dar sentido ao conceito de função a ser definido.

Usaremos a concepção de conceito dada por Vergnaud (1993, 1996) na teoria dos campos conceituais. Segundo o autor não se pode restringir um conceito a uma mera definição e para sua caracterização devemos levar em consideração a terna de conjuntos C=(S,I,R), em que:

S: é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência)

I: conjunto de invariantes, (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidas e usadas pelo indivíduo para enfrentar a situação. (Significado)

R: é um conjunto de representações simbólicas, (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais) que servem para representar as situações e ajudar a resolver problemas. (Significante)

Em nossa pesquisa pretendemos trabalhar o campo conceitual relacionado com o conceito de função, cuja capacidade de conexão com outras áreas do conhecimento é destacado pelos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Esse campo é formado por conceitos como o de variação, dependência e correspondência entre variáveis dependente e independente, entre outros, que podem ser mobilizados em situações ”S”, como a variação da área de uma figura plana em função de seus lados. O conjunto de situações a ser explorado, em nosso projeto, tem por objetivo colocar o aluno em ação e assim mobilizar seus conhecimentos. Na elaboração das atividades procuramos diversificar as situações trabalhando em outras áreas de conhecimento além da matemática. A variação da temperatura da água no decorrer do tempo, à medida que esta é aquecida por uma fonte externa de calor, é um exemplo de situação relacionada com a Física. Dentro da matemática analisaremos a variação da área de uma horta, relacionando com a variação de sua largura e a área de um quadrado em relação à variação de seu lado. Em cada uma dessas situações existe um conjunto de invariantes I, que darão significado ao conceito.

O conjunto das representações “**R**”, relacionado ao campo conceitual de função, é formado por diversas formas de representação do objeto matemático. Dentre essas representações temos, a linguagem natural, tanto falada quanto a escrita, os registros em forma de tabelas onde podemos relacionar medidas como os lados e a área do quadrado, a representação gráfica dos dados obtidos e tabelados na representação anterior, a expressão algébrica que permita calcular a área a partir de seu lado. Para compreender as interações entre esses registros tomaremos por base os conceitos envolvendo os registros de representações semióticas de Raymond Duval.

Julgamos que as diversas situações em que o conceito de função pode ser posto em ação, na realização de tarefas, se enquadra na teoria desenvolvida por Vergnaud. Cremos que a eficiência de nossa proposta poderá ser verificada se conseguirmos levar os alunos a ela submetidos, a mobilizarem diferentes conceitos em situações a eles relacionadas e com eles desenvolver um novo campo conceitual relacionado ao conceito de função.

2.3 A dialética ferramenta objeto.

Desenvolvida por Régine Douady, a dialética ferramenta objeto é um instrumento que pode nos auxiliar na elaboração de atividades com os alunos visando ao desenvolvimento de novos conceitos. Seu princípio básico consiste em fazer uso dos conhecimentos dos alunos como ferramenta. Estas servirão de base para desenvolver novos conhecimentos, denominados por Douady de objeto que uma vez desenvolvido, servirão de ferramenta em novas situações, num processo cíclico.

Para Douday um conceito matemático assume o estatuto de ferramenta quando é utilizado na solução de um problema ou formulação de um novo conceito. Não seria o conceito isolado em si, mas todo o campo conceitual que o envolve. Nesse projeto utilizaremos como ferramentas conceitos como o da proporcionalidade, da variação do lado de uma figura plana e a correspondente variação na área dessa figura, da variação da temperatura entre outros. Cada um dos conceitos utilizados é constituído por um campo conceitual rico, que esperamos ser capazes de levar os alunos a mobilizarem como ferramentas em nosso projeto, para a construção do objeto função. A defesa do uso de conceitos como a proporcionalidade e a variação da área em relação ao lado de uma figura plana, para o desenvolvimento do conceito de função, pode ser encontrada na Proposta Curricular para o Estado de São Paulo de 1988. A observação de que uma alteração em uma grandeza tem como conseqüência a variação numa outra a ela relacionada, nos permite mobilizar os conhecimentos relacionados à dependência entre elas. Esses conceitos não serão trabalhados de forma explícita, mas servirão de base para o desenvolvimento das discussões envolvendo a variação como noção a ser estudada e o estabelecimento de critérios que permitam a definição da relação funcional.

Um objeto é, segundo Douady, um saber científico reconhecido socialmente pela comunidade científica em um dado momento. O conceito de função é um dos objetos fundamentais da matemática para compreensão de conceitos em diversas áreas do conhecimento humano. É também uma ferramenta poderosa na solução de problemas nessas diversas áreas. Percebe-se então que um mesmo ente pode assumir estatuto de ferramenta ou objeto dependendo da situação em que está inserido. Podemos considerar que o aluno já dominou o conhecimento relativo a um objeto quando este se torna disponível como ferramenta para a aquisição de um novo conceito, ou seja um novo objeto.

O desenvolvimento de atividades que utilizem os princípios da dialética ferramenta–objeto, proposta por Douady (1986), deve levar em consideração a existência de seis etapas por ela descrita da seguinte forma**:**

a) **Conhecimento antigo:** são aqueles conceitos matemáticos utilizados pelos alunos como ferramentas explícitas para resolver, pelo menos parcialmente o problema. Os alunos buscam a solução do problema e para tanto realizam um certo modo de pesquisa.
b) **Pesquisa-novo implícito:** As dificuldades encontradas pelos alunos levam a buscar novos meios de resolver o problema. Na tentativa de encontrar a solução para o problema, novas ferramentas são criadas de forma implícita pelos alunos a partir das ferramentas anteriores sem que ele tenha a exata noção desta evolução.
c) **Explicitação-institucionalização local**: As discussões sobre as estratégias utilizadas na fase anterior mostram a importância de algumas das ferramentas utilizadas na solução do problema. Através da discussão e análises os alunos são levados a perceber as novas ferramentas "novo explícito". Esta discussão permite homogeneizar e institucionalizar o saber em sala de aula.
d) **Institucionalização-estatuto de objeto:** utilizando como ponto de partida os resultados anteriores, o professor expõe o que é novo e define as convenções. Organiza, estrutura as definições, teoremas, demonstrações, apontando o que é essencial e o que é secundário. Dessa forma atribui um estatuto de objeto aos conceitos usados como ferramenta pelos alunos, disponibilizando-os para que possam ser utilizados na resolução de outros problemas.
e) **Familiarização-reutilização numa situação nova:** o professor propõe questões que exijam a aplicação dos novos objetos como ferramenta de trabalho. Na resolução dessas questões os alunos aplicam as convenções, de forma a desenvolverem hábitos e habilidades permitindo que assimilem esses conhecimentos. O novo conhecimento passa a ser utilizado como ferramenta explícita dando a ele o estatuto de conhecimento **antigo**.

f) **Complexificação de tarefa ou novo problema**: o professor propõe, para os alunos, situações em que o antigo objeto seja mobilizado como ferramenta (conhecimento antigo) para a solução de novos problemas. Desta forma um novo ciclo da dialética ferramenta – objeto se inicia.

As quatro primeiras etapas da dialética são recorrentes no desenvolvimento das atividades. Existe a necessidade da elaboração ou formulação de conceitos intermediários até que se atinja o objeto desejado. Nesta dissertação desenvolvemos atividades com o objetivo de levar à formulação da noção de dependência entre duas grandezas. As cinco primeiras atividades terão por objetivo ressaltar essa dependência em diferentes situações envolvendo diferentes tipos de grandezas.

Na busca da solução dos problemas apresentados, os alunos desenvolverão uma pesquisa coletando dados em um gráfico, calculando a área de um objeto ou medindo a sombra gerada por uma haste. Os dados assim obtidos serão representados em diversos quadros da matemática como no numérico, através da elaboração de uma tabela, da geometria analítica, com a construção do gráfico que representa a variação estudada ou a determinação da expressão algébrica que descreve essa variação. A forma com que a atividade está sendo elaborada incentiva a discussão por parte dos alunos da variação e suas formas de representação. Esta coleta de dados e discussão se referem à segunda etapa da dialética. Após a resolução da atividade, será destinado um momento para discussão das conclusões de cada grupo, coordenada pelo professor. Esse debate se refere à terceira etapa da dialética (explicitação – institucionalização local).

A quarta etapa (Institucionalização – estatuto de objeto) dar-se-á com o professor finalizando a aula com a formalização dos conceitos mais importantes e a definição das convenções pertinentes. Nas cinco primeiras atividades estaremos trabalhando as quatro primeiras etapas da dialética. Espera-se que os alunos reorganizem seus conhecimentos ampliando aqueles que já dominam e que formulem novos ao final dessas atividades criando as condições para a formação de um novo campo conceitual relacionado com o conceito de função. O objetivo é o de procurar levar o aluno a perceber a relação de dependência presente em todas elas como um novo objeto matemático. Para isto é necessário uma definição clara para que possa ser utilizado como tal. Essa definição, juntamente com as convenções e suas formas de representação serão trabalhadas na sexta atividade. Não se espera que os alunos formulem sozinhos esse conceito, mas que sejam induzidos pelo professor, através das discussões que envolvam as atividades.

Na análise histórica, que será desenvolvida no próximo capítulo, observamos a evolução das definições e de suas representações relacionadas ao conceito de função. As discussões desenvolvidas por matemáticos como Descartes, Euler, até chegar a definição dada Dirichlet servem de inspiração para discutir a construção de um conceito matemático. Parece-nos que essa construção segue em suas linhas gerais um caminho semelhante ao da dialética ferramenta objeto.

2.4 Quadro e os registros de representações semióticas.

Para Douady (1986) na formulação de um problema é fundamental que este "seja representado em pelo menos dois quadros". (DOUADY, 1986, p.13 tradução nossa). A mudança de quadro permite a mudança de ponto de vista o que pode facilitar a compreensão e a resolução do problema. A autora considera "que um quadro é constituído pelos objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, e as várias imagens mentais associados a esse objeto dentro desse quadro" (ibidem p. 11 Tradução nossa). Um mesmo objeto visto em dois quadros distintos é descrito de forma diferente, gerando imagens mentais diferentes necessárias para a compreensão desse objeto. O interesse "não está nos quadros, mas nas relações que eles podem mobilizar sobre as propriedades de um mesmo conceito, pelos jogos entre as diferentes propriedades que esses sistemas de representação podem mobilizar" (BALACHEFF 2002 p. 3 tradução nossa). Douady postula que o problema deve ser formulado de forma a permitir ao aluno transitar pelos quadros, se possível de forma espontânea, mas se necessário induzido pelo professor.

Entretanto um mesmo objeto pode ter diferentes formas de representação num mesmo quadro. O objeto função pode ser representado de diversas formas dentro do quadro algébrico. Para a função linear, por exemplo, podemos fazer uso de uma lei de formação que pode ser registrada como $y = ax + b$ ou $f(x) = ax + b$ ou na sua forma implícita como uma equação algébrica $ax – y + b = 0$.

Raymond Duval (2003) denominou de registro de representação semiótica as diferentes formas de representações criadas pelos matemáticos para que o sujeito tenha acesso aos objetos matemáticos. Segundo o autor, apesar dos objetos matemáticos, normalmente, terem sua construção a partir de problemas concretos, estes são, no entanto abstratos cuja existência ocorre basicamente no mundo das idéias. A sua compreensão e manipulação só são possíveis se partimos de suas representações. Isso leva à necessidade da criação de sistemas de representação simbólicos que consigam expressar essas idéias. O registro de representação é um sistema semiótico que tem funções cognitivas fundamentais em nível consciente do indivíduo. Um mesmo objeto matemático possui várias formas de representações que foram sendo construídas durante o desenvolvimento da matemática. Assim por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação

Segundo Duval, quando a mudança na forma de representação é interna a um registro temos um tratamento. A representação do número 0,5 pode ser realizada sob a forma 0,50 ou 0,500, não ocorrendo mudança na estrutura da escrita do decimal. Estaríamos dentro do mesmo sistema semiótico. Já a escrita do decimal 0,5 em sua forma fracionária, $\frac{1}{2}$ implica numa mudança na estrutura de representação o que Duval chamou de conversão de registro, ambos ocorrendo no quadro numérico.

Mudar o ponto de vista, através de um tratamento, conversão de registro ou mudança de quadro facilitaria a compreensão do objeto matemático por parte do aluno. O domínio sobre um conceito só ocorre quando ele for capaz de distinguir o objeto de suas representações. Assim se o aluno for capaz de perceber, por exemplo, que o valor do dobro de um número mais um pode ser expresso algebricamente em sua forma explícita por $y = 2x +1$ que eqüivale na sua forma implícita $2x – y + 1= 0$. Que podemos representar a mesma idéia na forma gráfica, como a indicada na (figura 1), terá criado as condições que permitirão perceber a variação como uma noção a ser estudada estabelecendo as bases para a compreensão do objeto matemático chamado função[2]

A conversão de registro, entretanto, pode ocorrer sem que haja a mudança de quadro, como o observado para a função linear. Para Douady, na resolução de um problema é importante que se possa observar os dados apresentados sobre

---

[2] É importante ressaltar que uma função pode não ter representações em alguns, ou na maioria dos quadros, da matemática. A função, “quando x é racional, ponha-se y = c, e quando x irracional ponha-se y = d ≠c” (BOYER, 1974 p. 405) definida por Dirichlet, por exemplo, não pode ser representada graficamente.

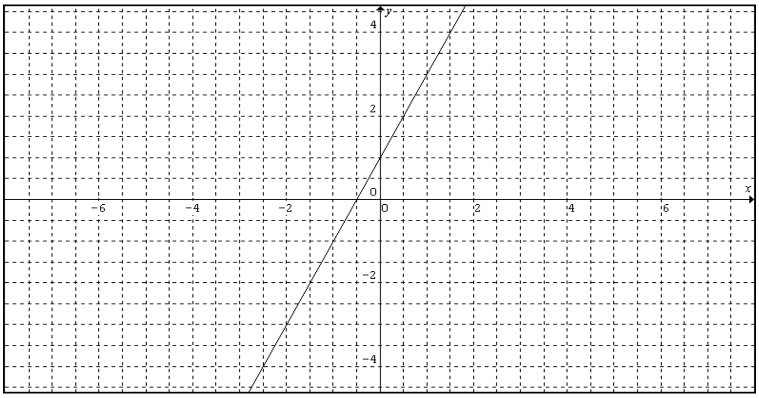


Figura 1: gráfico da função 2x – y + 1 =0

outros ângulos. É o que faz um aluno experiente quando se depara com um problema que precise resolver. Por exemplo, ao ser colocado frente a uma situação que envolva uma figura geométrica expressa na linguagem natural como: “Determinar a área máxima de um retângulo inscrito num triângulo retângulo de catetos 4 cm e 6 cm”, o aluno tem a necessidade de buscar uma outra representação para a situação apresentada, visto que da forma que foi proposto o problema não tem solução imediata. A tendência natural esperada desse aluno é a de representar geometricamente a situação proposta (figura 2). Dessa forma, o aluno muda o modo de ver o problema buscando as propriedades implícitas na figura que permitirá uma melhor visualização.

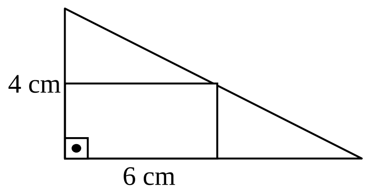
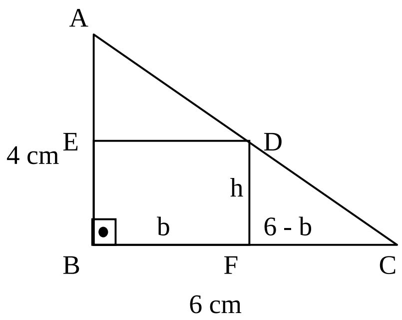


figura 2: representação geométrica da situação proposta.

Essa mudança de quadro abre a possibilidade do aluno mobilizar seus conhecimentos relacionados à geometria, estabelecendo relações entre os lados do retângulo e dos triângulos semelhantes obtidos na figura. Isto cria as condições para o aluno aplicar teoremas que aparentemente nada tem a ver com a solução do problema inicial (figura 3). A definição das razões entre os lados da figura leva o problema para o quadro algébrico, permitindo obter a área em função de um dos lados do retângulo.

A solução da situação acima pode ser obtida dentro do quadro algébrico, com a aplicação de propriedades da função do segundo grau como a determinação do vértice da parábola, ou com uma nova mudança para o quadro da Geometria Analítica representando a função obtida graficamente (figura 4).



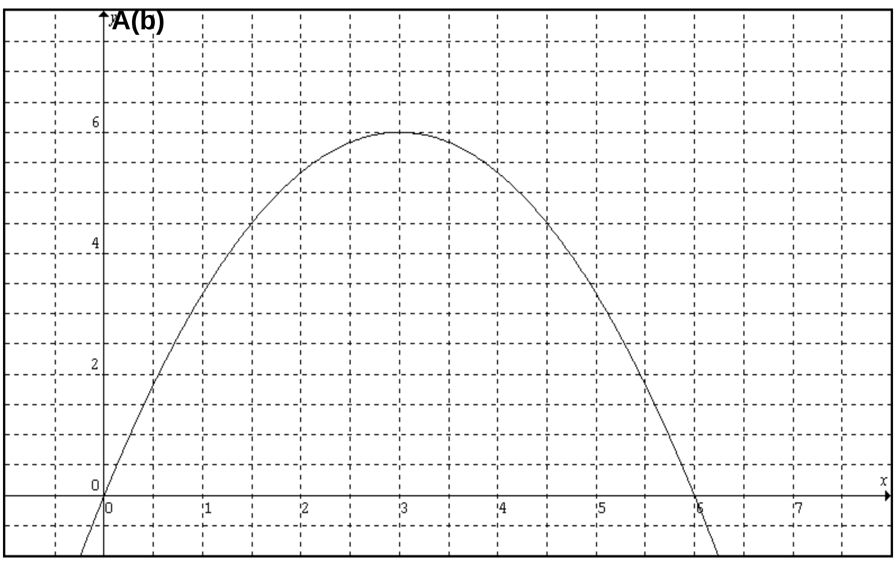
ΔABC ~ ΔDFC logo $\frac{4}{6}=\frac{h}{6-b} \Rightarrow 6\,h = 4(6-b)$

portanto $h=\frac{4(6-b)}{6}=\frac{2(6-b)}{3}=4-\frac{2b}{3}$

Como A = b . h temos A(b) = $b\left(4-\frac{2b}{3}\right)=4b-\frac{2b^2}{3}$

figura 3: mudança do Quadro Geométrico para o Quadro Algébrico com a aplicação da semelhança de triângulos

Dessa maneira, o aluno, estará traduzindo o problema apresentado por meio da linguagem natural para o quadro da geometria. Essa mudança de quadro permite ao aluno aplicar os teoremas da geometria plana obtendo representações



logo área máxima 6 cm^2

figura 4: Solução gráfica da situação proposta

algébricas, criando as condições para obter a solução do problema dentro do quadro algébrico ou com uma nova mudança de quadros, representando graficamente os dados obtidos.

Na elaboração das atividades para esta dissertação levamos em consideração os conhecimentos dos alunos. As situações foram elaboradas de forma a fazer uso de diversas formas de representação de um mesmo objeto matemático. Propomos, por exemplo, situações que induzam o aluno a representar graficamente grandezas associadas à quantidade e questionar sobre a possibilidade de unir ou não os pontos; situações que levem o aluno a transitar por diversos quadros da matemática e registros de representação com a utilização de tabela, gráfico, expressões algébricas, entre outras, de uma relação entre duas variáveis dependentes entre si. Daremos preferência ao uso de números inteiros e racionais na forma decimal, em detrimento da representação na forma fracionaria, uma vez que não estamos focados no trabalho com operações entre números. Formulamos as atividades fazendo uso de perguntas direcionadas, procurando evidenciar a variação como objeto comum a todas as situações. Cremos que essas escolhas estão de acordo com o nosso objetivo de levar a definição de um novo objeto de conhecimento, o conceito de função.

Capítulo III - O objeto de pesquisa

É comum ouvir reclamação dos professores de matemática sobre alunos que questionam a utilidade do conteúdo ensinado. Embora essa pergunta não seja cativa das aulas de matemática, é nela que tal questionamento ocorre com maior freqüência. Ela funciona como “um balde de água fria” para o professor, que julga ter respondido a questão antes de ter sido formulada. Na tentativa de responder, o professor normalmente evoca exemplos que o conhecimento trabalhado poderá ser utilizado. Alguns exemplos são futuristas com o professor usando o argumento de que será importante para a vida profissional do aluno. O aluno normalmente acata a resposta mas, certamente, não se dá por convencido. O professor sabe que o aluno não ficou convencido, mas encerra ali seus argumentos, provavelmente por não conseguir ter uma resposta melhor. Arrisco dizer que talvez nós nem saibamos a resposta. Acreditamos que a matemática dota o indivíduo de ferramentas que deverão estar disponíveis quando necessário. Mas que na maioria das vezes parece que não estão. Aparentemente o sujeito sobrevive sem essas ferramentas dando a impressão de que realmente não fez a menor diferença ter sido ou não trabalhada com ele. Esta aparente falta de serventia dos conhecimentos matemáticos esconde na prática uma das maiores deficiências de nosso sistema de ensino que gera a figura do analfabeto funcional, indivíduo que lê um texto, aplica regras matemáticas, disserta sobre um determinado assunto, mas aparentemente não compreende o que está fazendo ou estabelece relação entre as informações utilizadas. Indícios dessa deficiência podem ser encontrados nos relatórios publicados pelo INEP. Ao analisar as respostas da questão quarenta e oito da prova do ENEM de 2001 (anexo 1) esse relatório pondera que

> os que escolheram a alternativa B, provavelmente não consideraram que o problema a ser resolvido é o da determinação do peso mínimo, segundo dados do gráfico. As demais escolhas devem-se possivelmente a uma compreensão parcial do texto ou ao cálculo incorreto da máxima variação anual do peso do peixe. (Relatório INEP 2001, p. 118).

Conceitos como o de função ou a relação de dependência parecem não ser compreendidos pelos alunos, assim, situações que envolvem esses conceitos tornam-se incompreensíveis para eles.

O nosso projeto tem como tema central o uso da dialética ferramenta objeto no estudo do conceito de função. Procurando tornar claro o que entendemos por função, quais as idéias envolvidas neste conceito, suas aplicações e formas de representação, faremos uma análise do conceito a ser ensinado, de forma a ter uma visão clara do seu significado. Começaremos esse capítulo, buscando compreender quais as propostas oficiais para o trabalho com o conceito de função, como o conceito está sendo trabalhado nos livros didáticos e qual a importância desse no cotidiano do aluno.

Consideramos que, sempre que possível, “O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução”(PCN-EF. 1998 p.7). Que “o contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo”(ibidem). Buscaremos compreender como o conceito evoluiu fazendo uma breve análise histórica e epistemológica da construção do mesmo.

3.1 Análise do conceito segundo os documentos oficiais

Como já foi dito no primeiro capítulo desta dissertação, as instituições que coordenam os diversos níveis da Educação Brasileira demonstram estar preocupadas com as dificuldades encontradas por alunos e professores no ensino e aprendizagem da matemática. As avaliações institucionais evidenciam a baixa eficiência do ensino dessa disciplina, fato indicado pelos “resultados obtidos nos testes de rendimento em Matemática, aplicados em 1993 pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (SAEB)”(PCN- EF terceiro e quarto ciclo p 24).

O relatório do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2002, destaca:

> Em relação aos conteúdos matemáticos, os participantes demonstram não reconhecer características do gráfico cartesiano quando apresentado em forma diferente da tradicionalmente trabalhada na escola, não sendo capazes de transpor e aplicar o conceito às novas formulações apresentadas na prova” (Relatório ENEM 2002, p 172).

Na mesma página encontramos referências das dificuldades observadas pelos alunos quanto à comparação de potências de mesma base, o cálculo envolvendo taxas percentuais, entre outros conteúdos trabalhados formalmente durante sua vida escolar. A capacidade de enfrentar situações-problema é uma das competências que, segundo esse relatório, é utilizada na elaboração dessa avaliação. Destacam que os conteúdos a serem ensinados em matemática devem ser “um veículo para o desenvolvimento de uma série de idéias fundamentais”(Proposta Curricular - SP 1º grau 1986 p.11). e

> “ De modo análogo, aprender MATEMÁTICA é mais do que aprender técnicas de utilização imediata; é também interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, sensibilizar-se para perceber problemas, tanto quanto prepara-se para equacionar ou resolvê-los, desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de conceber, projetar, transcender o imediatamente sensível.(Proposta Curricular - SP 1º grau 1986 , p. 13)

Segundo essa proposta, a matemática e a linguagem natural desempenham no currículo um papel muito semelhante, “na escola básica, nem uma nem outra representam conteúdos em si mesmos, ... , são conjuntamente, condições de possibilidade do conhecimento, em qualquer área”(Proposta Curricular - SP 1º grau 1986 p.13). A crítica à compartimentalização da matemática em tópicos isolados é evidente, sendo sugerido a criação de mecanismos que permitam dar significado ao que está sendo trabalhado com o aluno.

Na Proposta Curricular para o Estado de São Paulo, encontramos sugestões comentadas de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula. Nas sugestões envolvendo o trabalho com a proporcionalidade, desenvolvidas entre as páginas 108 à 112 dessa proposta, podemos observar uma crítica ao modelo utilizado em nosso ensino de se trabalhar conteúdos, como a proporcionalidade do cálculo de perímetro e área, como um fim em si mesmo. A proposta desenvolve toda uma seqüência em que a relação de dependência entre duas variáveis é o objetivo central, criando assim as bases para introdução das noções que envolvem a relação funcional. O texto sugere o uso de diferentes formas de representações no desenvolvimento das atividades. Defendem a organização das informações em tabelas e a posterior representação gráfica. Segundo o documento, a visualização do comportamento dessa variação daria ao aluno uma compreensão melhor da relação algébrica relacionada à dependência estudada. O uso das informações obtidas nas situações propostas e suas representações podem ser utilizadas como ferramenta para a discussão da proporcionalidade. Assim cria-se o que os PCNs. definem como um fio condutor que na “etapa seguinte deverá levar o aluno a observar as grandezas que variam segundo as leis do tipo $y = kx+b$” (Proposta Curricular - SP 1º grau 1986 p. 110), permitindo a generalização em forma de uma relação de dependência. A mesma estratégia deveria ser utilizada para trabalhar as grandezas inversamente proporcionais e não proporcionais de forma a permitir generalizações semelhantes possibilitando uma definição de função a partir dessas situações e não a partir de uma relação entre dois conjuntos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, para o Ensino Fundamental e Médio, encontramos uma proposta abrangente onde se procura definir as diretrizes da educação no Brasil. Ressalta a importância de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento. A ênfase dessa proposta está na resolução de problemas, na exploração de conceitos matemáticos a partir de situações vivenciadas em seu cotidiano. A interdisciplinaridade, com o uso de situações-problema originárias de outras disciplinas, são pontos que esse documento destaca, demostrando a preocupação com uma aprendizagem significativa por parte do aluno.

No capítulo em que analisa “o aluno e o saber matemático”, alerta que a

> necessidade de tornar o conhecimento matemático significativo resulta das necessidades cotidianas que fazem com que os alunos tenham que desenvolver as capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, que lhes permitam reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. ...
>
> Por isso é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo.
>
> O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano. (PCN 1998 p. 37)

O documento ressalta, ainda, a importância do trabalho com grandezas que podem ser medidas, como comprimento, massa, temperatura, entre outras destacando a relevância social do estudo dessas grandezas na vida do aluno. O conhecimento e as potencialidades na compreensão das noções de variação e correspondência entre elas, a facilidade de obtenção de dados com a utilização de instrumentos acessíveis aos alunos, como régua, termômetro e balança da medição e a utilização das ferramentas de representação matemática como, tabelas, gráficos criam as condições para a construção de uma matemática viva mais próxima da realidade do aluno. No trabalho com a álgebra podemos considerar as diversas conexões entre essas grandezas permitindo a definição de novas grandezas obtidas a partir da razão entre duas, como velocidade, densidade ou do produto entre elas, a capacidade.

A preocupação com capacidade de resolver problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões, por parte dos alunos que concluem o Ensino Médio, são, segundo os documentos oficiais, os princípios básicos levados em consideração nas avaliações institucionais. O Relatório Pedagógico do Enem 2002 na sua página 17, descreve quais seriam os critérios na formulação e correção das avaliações. Define como princípios norteadores na elaboração da avaliação, cinco competências e vinte e uma habilidades. De acordo com este documento

> Competências são modalidades de estruturas da inteligência, ou melhor, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre objetos, situações , fenômenos e pessoas que desejamos conhecer. As habilidades são especificações das competências estruturais em contextos específicos, decorrem das competências adquiridas e referem-se ao saber fazer" (Informativo Enem, 2003, p. 17)

O foco nas capacidades descritas no tópico "o aluno e o saber matemático" pelos PCN – EF página 37, pode ser observado na competência III "Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados em diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema." (Informativo Enem, 2003, p. 17) e na competência IV "Reconhecer informações representadas em diversas formas e conhecimento de disponíveis em situações concretas para construir argumentação consistente" (Informativo Enem, 2003, p. 17). A importância de desenvolver no aluno a capacidade de ler e interpretar corretamente as diversas formas de representações, resolver uma situação-problema, fazer analogias, entre outras, parece ser um dos objetivos principais definidos nos documentos oficiais.

O conceito de função neste sentido tem papel fundamental, uma vez que como destaca os PCNs - EM,

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia (PCN.-EM, 2000 p. 44)

Fica evidente na análise dos documentos oficiais a necessidade de introduzir o conceito de função de forma a permitir ao aluno estabelecer, não só relações com outros conteúdos internos à matemática, mas também com as outras áreas do conhecimento humano.

3.2 Análise do desenvolvimento do conceito de função nos livros didáticos.

De acordo com os princípios da engenharia didática, conhecer a forma com que o objeto de pesquisa está sendo trabalhado é fundamental na elaboração de uma proposta de ensino. A análise que desenvolvemos dos livros tem este objetivo. Não temos a pretensão de emitir um juízo de valor nessa análise, essa se refere apenas à forma com que o conceito de função é trabalhado na maioria dos livros que tivemos acesso. Na escolha das coleções, demos preferência aos livros mais adotados pelos professores na região em que atuamos, região do grande ABC, como as coleções “Matemática e Realidade” da editora Moderna, a “Conquista da Matemática” da editora FTD entre outras. Escolhemos também algumas coleções que não são tão difundidas na região mas que estampam na capa um selo de recomendação pelo Plano Nacional de Livro Didático. entre elas a coleção “Praticando Matemática” da editora do Brasil. Analisamos um total de seis coleções completas[3], buscando acompanhar a evolução das idéias relacionadas à noção de variação, como descreveremos nos critérios de avaliação utilizados para essa análise.

A escolha desses critérios toma por base a fundamentação teórica de nossa proposta. Levando em consideração as propostas oficiais, analisamos toda a coleção, procurando identificar como os autores utilizaram as sugestões apresentadas nas mesmas. Na análise de tópicos que permitem o trabalho com a noção de dependência entre duas grandezas, como a proporcionalidade o estudo da área de um polígono, procuramos verificar se existe a preocupação em relacionar as variáveis envolvidas e se o estudo de equações não se limita a técnicas de resolução, mas se está voltada para a idéia de dependência.

3.2.1 Definição dos critérios de análise

De acordo com a dialética ferramenta–objeto, a construção das situações deve ser de tal forma que permita ao aluno mobilizar o objeto matemático em diferentes quadros. O uso como ferramenta das habilidades de leitura e interpretação de textos, tabelas e gráficos, das representações em diferentes quadros, de diferentes registros de um mesmo objeto matemático, permitirão ao aluno evoluir na construção dos novos conceitos.

Como já dissemos, a construção de conhecimento não ocorre de forma linear. Essa construção evolui com avanços e recuo e superação de obstáculos. Os alunos ao realizarem suas tarefas cometem erros que parecem ser conseqüências desses obstáculos. A sua superação é importante na aquisição do conhecimento. Utilizar como referência os problemas e situações que levaram à superação dos mesmos e a formalização do conceito pode ser uma estratégia importante na construção de situações que permitam ao aluno perceber a matemática não como um objeto

[3] A relação das coleções de livros utilizados para análise consta da Bibliografia.

acabado, mas como parte de um conhecimento universal desenvolvido pela atividade humana. Uma proposta didática que leve em consideração tanto a superação das dificuldades históricas como as diversas formas de representação do objeto, pode facilitar a aprendizagem e a compreensão por parte do aluno. Nos critérios de análise dos livros didáticos consideramos:

- Seqüência adotada para definição e desenvolvimento do conceito;
- Uso de referências a fatos relacionados ao cotidiano do aluno;
- Uso da evolução histórica da construção do conceito;
- Uso de diferentes quadros e conversões de registro.

Na análise que desenvolvemos procuramos verificar a forma com que o autor direcionou os conhecimentos necessários à construção do conceito de variação e função, a preocupação em criar situações que auxiliem na formação do conhecimento por parte do aluno. Julgamos que essa construção se torne possível se for dado ao aluno a oportunidade de resolver problemas e não apenas reproduzir técnicas prontas que lhe são apresentadas.

3.2.2. Justificativa da escolha dos critérios.

a) Seqüência adotada para construção e definição do conceito:

A seqüência utilizada para a introdução de um conceito pode auxiliar ou dificultar a aquisição do mesmo por parte do aluno. Este é, portanto, um dos fatores que mais deve preocupar o professor no momento em que procura planejar a elaboração de uma atividade. As escolhas realizadas na formulação da seqüência, com uma ordenação lógica, os exemplos utilizados, entre outras variáveis didáticas, são fundamentais para permitir ao professor um controle mínimo da forma com que os alunos possam compreender os objetivos definidos.

Conceitos como o de razão, equação, variáveis, entre outros, são fundamentais para formulação do conceito de função. Julgamos ser fundamental que esses conhecimentos, bem como os campos conceituais a eles relacionados, tenham sido trabalhados de forma a tornarem-se significativo para que o aluno possa mobilizá-los como ferramenta nas atividades a serem propostas, visando à definição do conceito função.

Na dialética ferramenta–objeto, a proposição de um problema parte da identificação dos conhecimentos que os alunos já possuem para que sejam mobilizados como ferramenta na sua solução. O objetivo do problema proposto deve ser claro e sua solução deve permitir a construção, pelo menos parcial, de um novo conhecimento, o objeto de trabalho, que servirá de ferramenta para a solução de novos problemas. Da mesma maneira, ao optar por um livro didático, o professor deve se preocupar com a forma pela qual a construção do conceito foi elaborada, quais os caminhos utilizados pelo autor para atingir este objetivo, pois o livro servirá aos alunos como referência do conteúdo trabalhado em sala de aula. Um livro cuja seqüência considere as capacidades e conhecimentos dos alunos, poderá auxiliar o professor lhe permitindo fazer uso do mesmo para introduzir o conceito desejado.

b) Uso de referências a fatos relacionados ao cotidiano do aluno:

A compreensão do aluno poderá ser facilitada quando observa em seu cotidiano situações que envolvem o conceito que está sendo trabalhado em sala de aula. Observar que os fenômenos, como o parcelamento da compra de um tênis ou as formas da pipa que empina, tem suporte na matemática que aprende em sala de aula, pode levá-lo a ter maior interesse por essa disciplina. Isto pode facilitar sua compreensão ao mesmo tempo que dá sentido ao que aprende.

A análise de situações concretas, como a escolha entre duas propostas de parcelamento na compra de um tênis, oferece a oportunidade para que se abra discussão sobre os custos de um financiamento e a matemática envolvida, ao mesmo tempo que permite o desenvolvimento do trabalho com grandezas proporcionais e a introdução de noções de dependência. Uma seqüência que leve o aluno a perceber que o preço total a ser pago está diretamente relacionado como a taxa de juros cobrada nesse parcelamento e o tempo de financiamento, abrirá o caminho para a compreensão da relação funcional existente na dependência. O uso de temas como o descrito é uma das propostas dos PCN. que ressalta "Valorizar esse saber matemático cultural e aproximá-lo do saber escolar em que o aluno está inserido, é de fundamental importância para o processo de ensino e aprendizagem".*(*PCN. 1998, p.32). Entretanto na tentativa de trazer para a matemática as situações relacionadas ao cotidiano do aluno corremos o risco de estabelecer relações que na realidade não estejam de acordo com o conceito proposto criando uma falsa contextualização. Exemplos de situações em que isto ocorre pode ser observado em problemas envolvendo o crescimento de uma colônia de bactérias. Segundo esses problemas essas colônias se duplicariam em intervalos regulares passíveis de serem previsíveis através de uma expressão simples. Uma análise elementar nos mostraria que essa situação, se ocorresse na prática já teria exterminado a espécie humana do planeta.

O conceito de função, por estar presente em quase todos os fenômenos que nos envolvem, é uma das ferramentas mais importantes da matemática. A utilização de fenômenos, pelo livro didático, como a variação da temperatura ao longo do dia, a estatura média de acordo com a idade entre outros fenômenos do cotidiano, permite ao aluno vivenciar a matemática como parte de sua vida e não um apanhado de técnicas isoladas.

c) Uso da evolução histórica da construção do conceito:

A falta de compreensão dos objetos da matemática e de suas formas de representação é, sem dúvida, uma das maiores fontes de erro por parte dos alunos. A percepção de que esses erros não ocorrem ao acaso, mas que podem ser originários de obstáculos relacionados à construção do conceito, já foi analisada anteriormente. Conceitos considerados superados podem adquirir novos significados sendo reincorporado ao saber científico. A construção do conhecimento com o aluno deve levá-los em consideração na proposição de situações que os façam refletir sobre suas práticas, questioná-las tomando consciência de seus erros de forma que possam corrigi-los e superá-los. O livro didático pode auxiliar nessa reflexão, considerando o processo desse desenvolvimento e quais as estratégias utilizadas para a sua superação.

Uma proposta didática que faz uso da evolução histórica envolvida na formulação do objeto matemático dá a oportunidade ao aluno de perceber a matemática como um conhecimento dinâmico e não um produto pronto e acabado. Um livro didático que considere essa evolução histórica abre a perspectiva do professor mostrar a matemática como um constante desafio. O aluno pode entrar nesse desafio e perceber que seu papel frente à matemática é maior que o de um simples aplicador de regras.

d) Uso de diferentes quadros e as conversões de registro.

Centrar o estudo de um determinado conceito sobre uma única forma de representação dificulta a aprendizagem do aluno, isto pode levá-lo a associar a representação trabalhada como sendo o objeto matemático. O conceito de função é um dos exemplos mais nítidos de que isto pode ocorrer. O uso excessivo de diagramas na tentativa de tornar mais clara sua definição poderá levar o aluno à incompreensão do objeto matemático função, tornando-se difícil a eles reconhecerem uma função quando representada em outros registros.

Segundo Duval (2001), para que ocorra a aprendizagem é fundamental a distinção entre o objeto e sua representação. Logo, ao introduzir um conceito, devemos fazer uso de diferentes formas de representação do mesmo. Para Douady (1986), o problema deve ser proposto de forma que o aluno mobilize pelo menos dois quadros da matemática. Para a autora, essa mobilização deve ser preferencialmente espontânea, mas se necessário pode ser induzida pelo professor. Essa mudança da forma com que se observa o objeto matemático facilitaria a apropriação do mesmo. Isso permitiria ao aluno se apropriar do conhecimento e suas formas de representação, tornando-o disponível como ferramenta de trabalho para a aquisição de novos objetos.

A análise que desenvolvemos teve como um dos enfoques verificar as formas de representações utilizadas pelo autor, os quadros da matemática em que o conceito de função foi explorado, as transformações entre estes quadros que são estimuladas pelo livro didático. Portanto nessa análise pretendemos identificar se o autor faz uso de:

- registro da linguagem natural: em que se propõe o problema através de um texto na língua natural, no nosso caso a língua Portuguesa de acordo com as normas acadêmicas aceitas no Brasil;
- registro figural: que permita ao aluno visualizar a situação apresentada em forma de figura geométrica;
- registro algébrico: com a utilização de expressões algébricas que permitam ao aluno interagir com a situação apresentada
- registro de tabelas: solicitando ao aluno para que represente os dados obtidos em forma de tabela;

- registro gráfico: propondo a leitura e interpretação de dados apresentados graficamente ou solicitando essa representação para os dados obtidos.

3.2.3 Análise dos livros didáticos

Os livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental são publicados em forma de coleções subdivididas de maneira a distribuir seu conteúdo ao longo do curso, sendo cada livro elaborado para uma série específica. Na análise que realizamos, procuramos dar atenção na forma como o autor constrói as noções de variáveis e as representações relacionadas ao conceito de função, como por exemplo, representação gráfica, tabelas e expressões algébricas, ao longo dos quatro volumes que compõem as séries finais, de quinta a oitava séries do Ensino Fundamental. Nosso objetivo é observar se estes se adequavam, tanto aos documentos oficiais, aqui analisados, quanto aos princípios teóricos defendidos em nossa pesquisa. Julgamos que a construção das idéias relacionadas à variação ocorrem ao longo desses quatro anos e não somente na oitava série onde o conceito é normalmente apresentado. Já numa primeira análise se percebe a influência positiva desses documentos e das pesquisas em Educação Matemática nas coleções publicadas a partir do ano 2000. Percebemos a preocupação de dar condições para que o aluno construa seu conhecimento, fato enfatizado principalmente nos manuais dos professores nos livros analisados.

a) Análise da seqüência adotada para construção e definição do conceito.

O conceito de função é fruto da evolução de uma série de idéias que foram construídas ao longo da história da humanidade com a superação de obstáculos que dificultavam a compreensão da relação de dependência como um objeto matemático. A análise histórica, desenvolvida ainda nesse capítulo, nos mostra que conceitos como o de razão, da forma como foi definido por Eudoxo, as idéias sobre o movimento de um corpo defendidas por Aristóteles se constituíram em obstáculos que dificultavam essa compreensão. As grandezas proporcionais já eram de domínio dos povos babilônios, como parecem demonstrar os primeiros registros em forma de tabela. Entretanto, esses estudos envolvendo a dependência entre grandezas, eram realizados de forma isolada, não havendo conexão entre eles.

A utilização da proporcionalidade, como instrumento, para o início do trabalho com a noção de variáveis, já era defendida pela proposta curricular do Estado de São Paulo, de 1988, para o Primeiro Grau, atual Ensino Fundamental (na página 108). De acordo com esta proposta, devemos pedir aos alunos que elaborem tabelas relacionando tanto as grandezas diretamente proporcionais como as inversamente proporcionais. O objetivo é o de levar o aluno a ter uma melhor compreensão da proporcionalidade, dando ao mesmo tempo a oportunidade de o aluno observar a dependência entre as variáveis envolvidas. Cabe ao professor destacar a dependência enfatizando como a variação em uma delas interfere na variação da outra. A introdução das técnicas que permitam o cálculo envolvendo a proporcionalidade só deve ocorrer após a compreensão do aluno sobre o efeito que o aumento ou diminuição em uma grandeza tem sobre outra.

Nos livros didáticos analisados o conceito de proporcionalidade é trabalhado, especificamente, nos livros de sexta série. A sugestão da proposta curricular do estado de São Paulo só pôde ser observada em duas das coleções analisadas. As demais apresentam a idéia de proporcionalidade através de exemplos, como: “Um posto de gasolina oferece um desconto de R$ 1,00 para cada 10 litros de gasolina. Se uma pessoa colocar 50 litros de gasolina no carro, que desconto irá obter?” (GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI Jr., 2002 p 239) seguidos de explicações considerando a noção como sendo algo simples e já de domínio do aluno. A seguir introduzem as estratégias de cálculo seguidas da aplicação de uma série de exercícios. As grandezas inversamente proporcionais são apresentadas em forma de exemplos, seguida de uma definição. Em quatro coleções não se observou a proposição de situações que levassem o aluno a refletir sobre a proporcionalidade. As atividades propostas se limitam a solicitar que o aluno classifique como direta ou inversamente proporcionais, seguida da introdução do conceito de regra de três.

O conceito de razão, fundamental no estudo da proporcionalidade, é definido em todas as coleções, mas a maior ênfase é dada apenas no aspecto referente ao estudo das porcentagens. Noções como razão entre espaço e tempo, número de objetos (balas, figurinhas etc..) pela quantidade em que será dividida (criança, pacotes etc..) um dos grandes obstáculos que tiveram que ser superados, não são trabalhadas formalmente, mas aparecem em questões ditas problemas em que se espera que o aluno expresse algebricamente essas razões.

"Os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com o auxílio de instrumentos" (Duval 2003 p15), são idéias cujo acesso só se torna possível com o auxílio de representações criadas ao longo da evolução histórica da humanidade. A equação, definida como igualdade entre duas sentenças matemáticas em que esteja presente pelo menos um valor desconhecido, também denominado incógnita, é um desses objetos cuja existência só adquire significado a partir de construções elaboradas pelo gênio humano e cujo acesso só se torna possível com o auxílio de suas representações. Essas representações, entretanto não adquirem significado apenas pela sua existência. É necessário que se consiga estabelecer uma relação entre a representação e a idéia representada. Dificilmente essa relação ocorrerá com a simples apresentação da idéia e a representação a ela associada. É preciso que ela seja construída ao longo da vida escolar do aluno, da mesma forma que foi construída ao longo da evolução da humanidade. A maneira que o conceito de equação é trabalhado ao longo da vida escolar do aluno pode dificultar que perceba uma equação com duas variáveis como representando uma função na sua forma implícita. A falta da compreensão do aluno de que a sentença matemática, com duas variáveis, representa um conjunto de soluções que associa dois valores dificultará a percepção do objeto matemático função. A proposta do Estado de São Paulo propõe o desenvolvimento do trabalho com equações de forma a encaminhar as soluções literais para as fórmulas da área, número de diagonais de um polígono, etc.. A utilização de fórmulas relacionadas às figuras geométricas, pode servir de instrumento para que se possa dar significado ao conceito de variável, tornando-o mais significativo para o aluno.

O conceito de equação, tanto como o de proporcionalidade são formalmente apresentados na sexta série. De forma geral, as equações são introduzidas através de exemplos envolvendo a igualdade entre expressões numéricas com a posterior substituição de um dos valores por uma letra, normalmente a letra "x". Segue uma série de exemplos, e em alguns casos, contra-exemplos em que o autor apresenta expressões numéricas alertando que a igualdade não representa equação mas sim uma expressão numérica seguida de seu valor. Na seqüência, inicia-se a descrição das "regras" operatórias que permitem obter a solução de uma equação, seguido de exercícios. Situação interessante encontramos na coleção “Praticando Matemática” em que o autor introduz o estudo das equações com uma situação em que apresenta uma seqüência de “carinhas” (anexo 2) questionando “Quantas carinhas terá uma figura numa posição qualquer? Escrevam em seus cadernos” (ADRIANI; VASCONCELLOS, 2002 6ª Série p. 173). Na seqüência, faz uso da imagem de dois alunos “Lúcia e Marcelo”, que teriam registrado respectivamente: “O dobro da posição somado a um e 2.p + 1”(ibidem). Entretanto a seqüência adotada para continuar o desenvolvimento do trabalho com equação é feita usando vários exemplos de como resolver as equações perdendo de vista a introdução inicial.

Na coleção “Matemática Hoje é Feita Assim” a introdução do conceito de equação é feita tendo como imagem a balança de dois pratos. Procurando mostrar a equação como uma igualdade em que devemos manter o equilíbrio entre os dois lados da balança, essa coleção procura dar significado ao conceito. A seqüência de exercícios explora a relação de dependência, com a utilização de relação “o dobro de um número”, propondo a elaboração de uma tabela e discussão entre os alunos. Na mesma coleção, temos a introdução da representação cartesiana no livro destinado à sexta série para representar uma igualdade entre a medida do lado do quadrado e seu perímetro. Reproduzimos aqui a proposta apresentada devido a importância que julgamos ter essa situação. “Na matemática, o sistema cartesiano é utilizado para várias finalidades, como por exemplo representar relações entre grandezas. Veja: ..... A relação entre a medida do lado de um quadrado e seu perímetro” (BIGODE 2000 6ª série p. 201). Entretanto o potencial da situação não é explorado apresentando a tabela completa e a representação gráfica pronta seguida de comentários sobre o que se poderia ler nessa representação. Nenhuma questão foi colocada para que os alunos pudessem trabalhar ou elaborar um gráfico semelhante.

O estudo de equações com duas variáveis seguido do sistema de equações é realizado no volume destinado à sétima série em todas as coleções. Para a solução do sistema são trabalhados os métodos denominados de Substituição e Adição. Três coleções trabalham a solução gráfica, entretanto esta solução tem por objetivo simplesmente de justificar o porquê de um sistema ter ou não solução determinada. A preocupação com a solução usando o método funcional foi observada na coleção “Pensar Matemática” com o conceito de função sendo introduzido no livro destinado à sétima série, e retomado com mais ênfase na oitava, visando ao relacionamento de uma equação de primeiro grau com duas variáveis com a função de primeiro grau. O autor faz uso de representação gráfica dessa função, procurando mostrar a correspondência entre os valores do par (x, y) como sendo os que satisfazem a função. Entretanto ao trabalhar, no capítulo 6 página 111 do mesmo livro, com o tópico “Problemas e equações do 1º grau a duas incógnitas” (NETO, 2001 7ª Série p. 111), não estabelece relação entre as equações de primeiro grau com duas variáveis com a função trabalhada no item anterior. A solução de equações literais e dos sistemas de equações acabam sendo trabalhadas como um fim em si mesma em exercícios como “Resolva o sistema $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 6x - 3y = 36 \end{cases}$ (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2000 7ª Série p.261), não sendo explorado o potencial de discussões sobre a dependência entre os termos desconhecidos envolvidos.

Apesar das idéias centrais relacionadas com o conceito de função serem trabalhadas em toda a vida escolar do aluno, em todas as coleções analisadas, seu estudo formal é efetuado na oitava série. A forma de apresentação, que vigorou até o final dos anos 90, partia do produto cartesiano entre dois conjuntos de números inteiros. Definia-se o conceito de relação binária, como sendo um subconjunto desse produto cartesiano, seguida da representação gráfica dessa relação. O conceito de função era definido como um caso particular deste tipo de relação. Na tentativa de não deixar dúvidas recorria-se aos diagramas de Venn, para mostrar exemplos e contra-exemplos das relações que se enquadrem na definição. Passava-se a impressão de que função é uma relação particular representada pelo diagrama, confundindo assim a representação com o objeto matemático estudado.

A reformulação dos livros didáticos com base no que propõem os documentos oficiais demonstra a necessidade de se fazer uso de situações que permitam ao aluno construir seu conhecimento. Na tentativa de se adequar às novas propostas observamos que a introdução do conceito função nos livros analisados segue duas linhas distintas:

- Uma linha mais tradicional em que o autor procura reformular sua proposta para se adequar aos PCNs. Entretanto acaba por voltar ao modelo parecido com o anterior, em que o uso do diagrama é o ponto central da definição.
- Na segunda linha já temos a presença do uso de situações-problema cujo objetivo é o aluno construir o conceito de função.

A primeira linha, adotada por quatro das seis coleções analisadas, não leva o aluno a trabalhar com a relação funcional. Essas coleções apresentam uma introdução onde o autor propõe situações em que tenta mostrar ao aluno a presença da noção de função. Quatro das coleções fazem uso de definições formais de função tomando como base a definição: “Sendo A e B dois conjuntos não vazios, uma relação entre A e B é chamada função quando cada elemento x do conjunto A está associado a um único elemento y do conjunto B” (GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI Jr. 2002 8ª Série p. 131), usando a linha da matemática moderna, introduzida na década de 60. A segunda linha, adotada pelas outras duas coleções analisadas, procuram propor situações envolvendo a relação funcional para que os alunos analisem e discutam-na. Entretanto não se preocupam com a da existência de relações de dependência que não são funções. Fica a impressão de que toda a relação que pudesse ser definida algebricamente caracterizaria uma função.

A utilização de situações como a conversão entre as escalas de temperaturas Farenheit para Celsius para dar significado ao conceito de função é encontrada nas coleções “Matemática Hoje é Feita Assim” e “A Conquista da Matemática”. Nas demais coleções essa utilização raramente foi observada, muito embora já se perceba a procura de mostrar sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Percebe-se uma tentativa desse relacionamento através de pequenos textos onde se discute o uso das funções na Física, Medicina entre outros ramos do conhecimento. Apesar da função ser um conceito unificador, são raras as tentativas de associar o novo conhecimento e os abordados anteriormente, como no cálculo do número de diagonais de um polígono, desenvolvido na coleção “A Conquista da Matemática”. Um trabalho procurando usar o cálculo do perímetro ou área de uma figura plana como funções só aparece em raros exercícios de aplicação. O uso de situações que busquem mostrar a utilização do conceito de função, geralmente é efetuado dentro da matemática fazendo uso de relações entre conjuntos numéricos.

b) Uso de referências a fatos relacionados ao cotidiano do aluno.

Inserir o conhecimento matemático no contexto social do aluno poderia dar significado para o que está sendo trabalhado em sala de aula. Entretanto nas coleções analisadas o uso de referências a fatos relacionados ao cotidiano do aluno, quando aparecem, seguem em geral o mesmo modelo fazendo uso de exemplos como o da corrida de táxi, situação que não é comum à maioria dos alunos do Ensino Fundamental. Procura-se sempre trabalhar com modelos padrões onde a variação é sempre constante, não abrindo espaço para fenômenos que mudem de comportamento ao longo de sua análise. Não são trabalhadas em nenhuma das coleções de livros analisados, nem nos exercícios propostos situações envolvendo relações de dependências, comuns nas ciências naturais, como peso e altura de um indivíduo, expectativa de vida em relação ao tempo de estudo, entre outros.

Observamos uma tentativa de realizar a contextualização como proposta, tanto nos PCNs, quanto na proposta curricular do Estado de São Paulo. Entretanto a tentativa dessa contextualização leva a elaboração de atividades como a apresentada na seguinte situação: "Vamos examinar a função dada pela tabela que mostra o consumo de gás por um lampião em 6 horas. Ele gasta 100 g por hora e, antes de ser acendido, perde 40 g. em vazamentos" (NETO. 2001. 8ª Série p. 51). A situação proposta desconsidera o fato que o vazamento também depende de quanto tempo o lampião não estiver sendo usado, além do mais, não se pode dizer que o lampião seja algo que faça parte do cotidiano do aluno. Outras situações são propostas nas coleções analisadas, mas devemos destacar que as informações, representadas em tabelas, gráficos são fornecidas prontas aos alunos no decorrer do texto, não permitindo a verdadeira descoberta por parte dos mesmos da dependência entre as variáveis envolvidas nas relações apresentadas.

c) Uso da evolução histórica da construção do conceito.

Fazer uso da referência à história da matemática não é necessariamente contar a história da matemática, mas sim buscar situações históricas que permitiram essa construção, procurar compreender as condições e quais foram os problemas e dificuldades enfrentados pela ciência no desenvolvimento desse conhecimento. A variação como objeto matemático foi sendo construída ao longo da história graças a estudos de variações entre grandezas, como espaço tempo, variação de temperatura e tempo de aquecimento, variação da área ou perímetro em relação aos lados de uma figura plana, entre outras, realizadas com o objetivo de conhecer o comportamento dessas grandezas. É lógico supor que da mesma forma a construção dessa idéia com os alunos poderá ser facilitada se for dada a oportunidade desses alunos terem o contato com o maior número possível dessas variações. Na análise desenvolvida não observamos a proposição de situações envolvendo, por exemplo, a variação da velocidade ou da temperatura de aquecimento de um corpo. As atividades que envolvem variação entre grandezas em sua grande maioria trabalham com seqüências numéricas.

A análise da variação da área de uma figura matemática foi observada na coleção “Matemática Hoje é feita Assim”, já no volume destinado a quinta série, quando o autor inicia o estudo de medidas de superfície e cálculo de área. Para essa introdução faz uso de figuras representando dois terrenos retangulares em que questiona “Qual terreno é maior? Em qual deles eu vou conseguir plantar mais?” (BIGODE 2000 5ª Série p. 250). Nesse trabalho, o autor procura estabelecer a relação (fórmula) entre a área e os lados de figuras elementares como retângulo, quadrado e triângulo. A utilização de figuras tem seqüência no volume da sexta série em que elabora uma tabela e representa graficamente a relação lado e perímetro de um quadrado. No volume destinado à sétima série, retoma o trabalho com áreas e perímetro na introdução ao estudo dos polinômios, relacionando a representação algébrica com a área e o perímetro de figuras planas. Uma estratégia semelhante é observada na introdução do conceito de função. Nas demais coleções analisadas, as idéias envolvendo o perímetro ou a área são utilizadas principalmente para dar significado às expressões algébricas, principalmente nos produtos notáveis, e como aplicação do conceito e não com o objetivo de construir a noção de variação.

Na mesma coleção observamos um trabalho que parece indicar a utilização da evolução histórica das idéias de variação. Percebe-se a preocupação do autor com essas idéias em atividade como: “Copie a tabela no seu caderno, preenchendo as colunas 10%, 20% e 50% com o valor das respectivas porcentagens em relação a cada total” (ibidem, p. 278). A utilização da representação gráfica de grandezas variáveis na sexta série já foi indicada nesta dissertação. Observamos uma contextualização interna à matemática, mas julgamos que o objetivo principal do autor, além de dar significado aos conteúdos que estavam sendo trabalhados, também era o de construir a idéia de variação juntamente com os alunos.

Na proposta pedagógica que acompanha essa coleção podemos observar referências históricas em que se destacam pequenos textos extraídos de livros sobre a história da matemática. Isto demonstra a preocupação, por parte do autor, com a necessidade de se conhecer essa história e as dificuldades enfrentadas ao longo da construção do conceito. Dessa forma, o autor procura auxiliar o professor na busca da compreensão das dificuldades encontradas pelos alunos em sua aprendizagem.

Na coleção “Matemática” dos autores Imenes e Lellis, observamos uma seqüência semelhante. Na introdução do conceito de função, os autores constroem atividades de exploração envolvendo várias grandezas como o custo de uma corrida de táxi em relação à distância percorrida e seqüências de pontos formando figuras segundo um padrão estabelecido. Nessas atividades procuram levar os alunos a obter a lei de formação da seqüência, uma expressão algébrica que permita calcular o preço do táxi ou a quantidade de pontos a serem distribuídos em uma determinada posição. Acreditamos que os autores levaram em consideração os aspectos históricos da evolução do conceito.

O desenvolvimento do conceito em quatro das coleções parece não considerar o desenvolvimento histórico. Todas apresentam uma situação em que procuram destacar o papel da variação como elemento importante na formulação do conceito, mas via de regra propõem apenas uma, mesmo que informal, seguidos de exemplos e exercícios de fixação, logo após a situação proposta. Apresentam a função como uma maneira de se obter uma resposta a partir de uma informação dada, desconsiderando toda a discussão sobre a relação de dependência.

d) Uso de diferentes quadros e as conversões de registro.

As formas de representação de um objeto matemático é outro tópico que merece atenção especial nesta análise. Segundo Duval (2001) a aprendizagem só ocorre se o aluno for capaz de transitar por diversas representações de um mesmo objeto, sendo capaz de separar o representante do representado. Nesse sentido buscamos analisar as formas relacionadas com o objeto matemático função que estão sendo utilizadas pelos livros didáticos analisados. De acordo com Doaudy (1986) é importante que ocorra a mudança de quadros de forma a permitir ao aluno observar o objeto matemático de outro ângulo, portanto analisamos as mudanças de quadros propostas nos livros, buscando compreender como é trabalhado pelo autor.

As conversões entre as diversas formas de representações de um objeto matemático já podem ser encontradas nos manuais destinados ao professor. O esquema abaixo é apresentado no manual do professor da coleção “Matemática Hoje é Feita Assim”, demonstrando a percepção por parte do autor da necessidade dessas conversões. O autor afirma fazer uso de dois tipos de esquemas de representação:

fórmula → Tabela → Gráfico

Relação →

ou

Tabela → Fórmula → Gráfico

(Bigode, 2000, manual do professor página 43)

Uma das formas mais importantes de representação do conceito de função e que parece ter tido grande interferência na formulação do conceito é a gráfica. Esta forma de representação aparece em todos os livros das coleções analisadas. A primeira distinção entre objeto e representação é observada quando se solicita aos alunos que representem graficamente uma função expressa por uma lei algébrica. Essa mudança solicitada pelo autor cria, provavelmente, as condições para que o aluno possa perceber que a função não é nem a expressão algébrica e nem a figura gerada pela representação gráfica, mas sim a idéia que está por trás dessas representações.

A mudança de quadro utilizada com maior freqüência é a do quadro algébrico para o quadro da geometria analítica. Todos os livros analisados propõem sentenças matemáticas que deverão ser utilizadas para se obter pontos a serem representados graficamente. A conversão contrária só foi encontrada na coleção "Praticando Matemática", demonstrando as primeiras tentativas de se aplicar as recomendações dos PCNs. É nessa coleção que encontramos o maior número de conversões entre registros de representação, entre elas conversão gráfico-tabela não explorada nos outros livros didáticos analisados. Nas demais coleções, as situações em que se solicita a obtenção da expressão algébrica, a apresentação dos dados é feita em tabelas onde o aluno deve identificar a regularidade que gera a seqüência representada traduzindo-a para a forma algébrica, ou a apresentação de um texto em linguagem natural que deve ser traduzido para a linguagem matemática.

A conversão de registro algébrico para o registro numérico, em forma de tabelas, aparece em raras situações, sendo mais freqüentes como uma etapa intermediária entre a passagem entre o algébrico e o gráfico, com a construção de uma tabela de valores associando x e y. Não foi encontrado nenhuma situação em que fosse solicitado aos alunos a construção e análise de tabela partindo de uma expressão algébrica para identificar se representava ou não uma função.

A valorização do papel do aluno na construção do conhecimento matemático, levando em conta seus conhecimentos prévios, parece ocorrer em apenas duas das coleções analisadas. Essa preocupação não é evidente nas demais coleções. A ênfase está na aplicação do conceito de função para o cálculo da imagem de um ponto. Isto pode dificultar a compreensão do conceito por parte do aluno não permitindo a atribuição de significado ao novo conhecimento.

3.3 Visão histórica da formação e superação de obstáculos relativos ao conceito de função.

Fenômenos que apresentam variação são comuns em nosso cotidiano influenciando em nossas vidas desde a mais remota antigüidade. O conhecimento dos ciclos naturais, como os períodos de chuva, foi fundamental para desenvolvimento de atividades como a agricultura e a criação de animais necessários para a sobrevivência do ser humano. Entre esses fenômenos temos as freqüentes enchentes nas várzeas dos rios, a posição das estrelas entre outros que provavelmente foram registrados ao longo de nossa história. Esses registros podem ser considerados como as primeiras evidências de relações, cujas características funcionais podem ser detectadas podendo ser encontrados logo no início da evolução histórica da humanidade. Porque então o conceito de função só começou a ser discutido no século XVIII? Que obstáculos dificultaram a visualização da variação como um objeto matemático? Porque o conceito de função não foi elaborado a partir dessas relações naturais? De acordo com Bachelard (1996), a busca das respostas a questões como essas devem ser feitas dentro do próprio conhecimento. Segundo esse autor, é nele que podemos encontrar as “causas de estagnação, e até regressões, ... causas de inércia”(BACHELARD. 1996 p 17) que dificultam a evolução do conhecimento.

A idéia da relação funcional parece, entretanto, estar presente muito cedo na história da humanidade. As primeiras informações envolvendo relações funcionais na Antigüidade estariam relacionadas a "tabelas que podemos associar com a matemática desenvolvidas na Mesopotâmia por volta de 1900 a 1600 AC". (BOYER, 1974, p 25). Essas tabelas parecem indicar a relação entre ângulos com o quadrado de secante dos mesmos. Outras referências ao uso de tabelas desenvolvidas pelos babilônios podem ser encontradas no mesmo texto. Ao que parece estes já tinham domínio da relação de dependência entre duas variáveis. A visão prática desta forma de apresentação de informações, deve ter sido de grande auxílio para os povos babilônios, que passaram a ter acesso a resultados já determinados de informações importantes para sua sociedade. Da mesma forma que na atualidade é útil a um tapeceiro dispor de tabelas em que se apresenta a quantidade de tecido necessário para revestir um estofado, para os povos antigos esta praticidade também é evidente.

As evidências de noção que podemos associar à relação funcional, na Antigüidade não aparecem somente em forma de tabelas. Do Egito antigo temos informações sobre o uso de regras que permitiam o cálculo do volume de tronco de pirâmides de bases quadradas (Eves 1992), demonstrando terem desenvolvido uma certa noção de correspondência entre as medidas dos lados das bases e a altura com o volume da mesma.

Foram muitas as contribuições da matemática grega, principalmente, no que se refere à geometria. A predominância dos aspectos geométricos da matemática grega passa a impressão de que em nada contribuíram para o desenvolvimento do conceito de função. Entretanto, se considerarmos a idéia de dependência, muitas são as referências que podem ser coletadas. A começar pelos estudos envolvendo o "comprimento e altura da nota emitida por cordas de mesma espécie, pinçadas com tensões iguais ... típicas da procura de interdependência quantitativa de várias quantidades físicas," (YOUSCHKEVITCH 1976 p 11). Os estudos envolvendo a trigonometria, sobre as seções cônicas, são exemplos que demonstram a idéia funcional presente na matemática grega. Arquimedes, com seu método de exaustão, apresentou soluções para problemas que só foram resolvidos com o uso do cálculo. Sabemos que uma das necessidades básicas para o estudo do cálculo é o pleno domínio do conceito de função.

“A álgebra grega conforme foi formulada pelos pitagóricos (c. 540 a.C) e por Euclides (c. 300 a.C) era geométrica ... somos tentados a dizer que, para os gregos a^2 era realmente um quadrado”(BAUMGART 1992, p 6), isso trouxe dificuldades devido a natureza estática de elementos como o ponto. “Arquimedes chegou às leis da alavanca por meios estáticos apenas, sem recorrer ao argumento cinemático Aristotélico” (BOYER 1974, p 89). Entretanto o fato da geometria grega trabalhar com segmento sem medida definida, permite a generalização de seus resultados que reverteram em grandes avanços na matemática.

Como destaca Youschkevitch, não existe ainda uma noção geral da idéia de variável. O que se observa é o estudo de casos particulares envolvendo duas ou mais grandezas. Fenômeno semelhante pode ser observado hoje, com nossos alunos que organizam suas informações em forma de tabela, realizam estudo de casos particulares de variação, como o número de diagonais de um polígono, mas apresentam dificuldades em compreender a variação como objeto de estudo. A busca da compreensão dos fenômenos naturais, que visa ao entendimento das relações entre as grandezas envolvidas, parece não permitir a identificação da variação como um objeto em si mesmo gerando um obstáculo epistemológico que Sierpinska (1992) denominou de “mudança como fenômeno, foco nas coisas que mudam, ignorando as variações como fenômenos”*. (*SIERPINSKA 1992 p. 36, tradução nossa). De acordo com a autora, o objeto de estudo para compreender o fenômeno são as grandezas envolvidas e o foco está nas “coisas” que sofrem mudanças, dificultando a formação da idéia de variação. O início da superação desse obstáculo parece estar relacionado com busca de respostas a questões como: “Se um objeto se move com velocidade variável, até que ponto se moverá num dado tempo? Se a temperatura de um corpo varia de uma parte para outra, quanto calor há nesse corpo?” (BOYER 1992 p. 8).

Da mesma forma que os filósofos antigos, a atenção dos alunos parece estar na compreensão do fenômeno estudado não havendo a necessidade do um aprofundamento na variação como objeto. Cremos que a superação desse obstáculo poderá ser feita com a proposição de situações envolvendo fenômenos diferenciados, como a variação da área em relação ao lado, da temperatura em relação ao tempo de aquecimento entre outros e a insistente discussão sobre a variação como elemento comum a todas as situações.

Apesar dos avanços obtidos por Arquimedes nos estudos das regiões limitadas por curvas, e suas contribuições para o avanço da Física, é provável que a influência do raciocínio geométrico tenha dificultado a compreensão da idéia geral de variação com reflexos diretos no estudo das razões. Para a matemática grega a razão é uma característica entre grandezas de mesma espécies. “O conceito de razão de Eudoxo ... esclarece o que se entende por grandezas de mesma espécie. Um segmento de reta por exemplo, não pode ser comparado, em termos de razão, com uma área; nem uma área com um volume” (ibidem p. 66). Essa restrição é compreensível se analisada dentro de uma ótica puramente geométrica. Não temos significado para a razão entre área e comprimento ou volume e área. Mas o mesmo não se pode dizer da razão espaço tempo. Para Aristóteles a velocidade era proporcional à razão entre a força impulsora e a força resistente, aparentemente ele não concebia a razão espaço tempo. Essa razão, que aparenta ser tão evidente para os Matemáticos e Físicos modernos, não parece ser tão evidente para nossos alunos. Em minha experiência em sala de aula já me deparei com a situação de alunos que aparentam não compreender o significado dessas razões, mesmo que algumas delas, como espaço tempo, já tenha sido trabalhada formalmente nas aulas de Ciências ou Física. O mesmo pode ser dito de problemas tradicionais envolvendo a razão entre o número de balas e o de crianças para as quais serão distribuídas essas balas.

A busca de soluções de problemas envolvendo a quadratura das curvas parece ter desviado a atenção para a possibilidade do aprofundamento de razões envolvendo grandezas de natureza diferente. O foco geométrico da matemática parece ter impedido a discussão e análise de tais razões dentro da matemática, gerando o obstáculo da homogeneidade nas razões. A superação desse obstáculo também parece ter sua origem por volta do século XIV com as discussões buscando compreender as idéias de Aristóteles sobre o movimento. Importantes contribuições são dadas principalmente pelas escolas filosóficas de Oxford e Paris. Partindo das discussões sobre *a* “quantificação das formas[4] variáveis, um conceito de Aristóteles” (Boyer 1974 p. 192), filósofos como Thomas Bradwardine procuram compreender as idéias sobre o movimento. De acordo com os postulados Aristotélicos, o movimento só ocorreria quando uma força motriz (F) estivesse presente e fosse

[4] O termo forma parece estar associado a “qualquer espécie de variável à qual se possível atribuir-se o conceito de intensidade e extensão” (BARON 1985 p. 58)

superior à força resistente (R), que se oporia a qualquer movimento, ou seja F>R. A velocidade adquirida pelo corpo seria proporcional à razão entre a força motriz e a força resistente (V α F/R). O questionamento desses postulados levou à formulação do que se convencionou chamar de regra de Merton, em alusão ao Merton College da Universidade de Oxford. De origem indefinida essa

> regra diz essencialmente que se um corpo move-se com movimento uniformemente acelerado, então a distância coberta será igual à que seria percorrida por outro corpo que se deslocasse com movimento uniforme durante o mesmo intervalo de tempo com velocidade igual à do primeiro no ponto médio do intervalo de tempo. (ibidem p. 190)

Por quase um século esses filósofos estudaram o que se convencionava chamar de qualidade das formas variáveis, aproximadamente igual ao conceito de quantidade das formas desenvolvidas por Aristóteles. Entre tais formas temos a velocidade de um objeto móvel e a variação de temperatura, de ponto para outro, num objeto com temperatura não uniforme (ibidem p. 192). As discussões sobre essas variações parecem ter criado as bases para se compreender o seu significado abrindo espaço para a construção da idéia de relação.

Na França, Nicole Oresme procura dar uma representação geométrica para essas variações, criando uma das primeiras representações gráficas. Para Oresme, tudo que é mensurável pode ser imaginado "na forma de quantidades contínuas" (Ibidem p. 192). Partindo desse princípio

> traçou um gráfico velocidade - tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitudes) cujo comprimento representava a velocidade (Ibidem p. 192)

A figura gerada (figura 5) eqüivale a um triângulo retângulo cuja área é equivalente à distância percorrida neste intervalo de tempo, " *forneceu assim uma verificação*

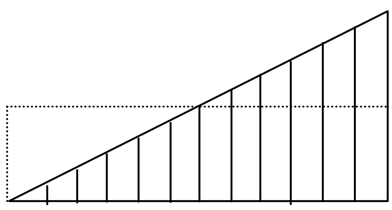


Figura 5: Representação gráfica criada por Nicolas Oresme. As barras verticais representam a velocidade de um corpo no instante indicado no eixo horizontal. A área do triângulo eqüivale a distancia percorrida pelo móvel e é equivalente a área limitada pelo retângulo tracejado de altura no instante médio

geométrica para a regra de Merton" (ibidem p. 193).

Com os estudos da qualidade das formas procurava-se descrever as variações das grandezas Físicas em relação ao tempo, estabelecendo as bases para a construção do conceito de função, criando as condições para a superação do obstáculo da homogeneidade. Entretanto, a falta de representações matemáticas mais apropriadas impedem o desenvolvimento do conceito, sendo as relações funcionais tratadas como casos isolados. As relações funcionais que eram descritas na forma de tabelas ou pelas suas propriedades ganham uma nova forma de representação, a gráfica.

3.3.1 A formação do conceito de função.

A invenção da imprensa por Johannes Gutenberg, em 1440, possibilitou a difusão dos conhecimentos da época. As idéias dos filósofos são difundidas pela Europa. As pesquisas desenvolvidas por Galileu Galilei, sobre a queda dos corpos, aparentemente sofreram grande influência dos trabalhos de Oresme. Auxiliado pelos avanços nos instrumentos de medidas, com os quais muito contribuiu com a invenção do compasso, Galileu realizou experimentos em que procurava medir com precisão as variações ocorridas no movimento. A "insistência em estudar os movimentos de um modo quantitativo, pela intervenção da experimentação, grandemente contribuiu à evolução da noção de função" (COTRET. 1988 p 13). A representação dos dados experimentais, por parte de Galileu, permitiu a comprovação dos modelos que eram mais teóricos devido a falta de medições precisas.

Uma nova etapa na formulação do conceito de função acontece com o desenvolvimento da notação algébrica com grande impulso a partir dos trabalhos de François Viète estabelecendo as bases para uma nova forma de representar as relações de dependências. O objetivo da nova representação era o de representar as equações. Viète sugere o uso das vogais para representar uma quantidade supostamente desconhecida ou indeterminada, e uma consoante para representar grandezas ou números supostamente conhecidos ou dados. Desta forma abre caminho para representar uma expressão geral como $A = BE + C$, que traduzimos numa notação moderna por $y = a x + b$, e representa toda uma família de funções classificadas com de primeiro grau.

As relações funcionais que até então eram comunicadas verbalmente, com a identificação de suas propriedades, graficamente ou por tabela, passam a ter uma nova forma de representação. Os estudos de Descartes procurando dar resolução geométrica na solução de problemas e equações algébricas, levaram a formular a primeira referência envolvendo a dependência funcional.

> Tomando sucessivamente infinitas grandezas diversas para a linha y, encontra-se dessa maneira infinitas grandezas diversas para a linha x, portanto tem-se uma infinidade de pontos tais que aquele que é marcado C, por meio do qual descreve-se a linha curva requerida"(Descartes 1903, p386, apud YOUSCHKEVITCH 1976 p 25)

A união da notação algébrica com a representação geométrica, desenvolvida por Descartes, cria as condições para o desenvolvimento do pensamento funcional, permitindo se pensar na variação como objeto dissociado das grandezas envolvidas na variação.

Observamos, a partir de Galileu, uma mudança na forma de ver os objetos envolvidos na variação. Enquanto a escola grega representada por Aristóteles olhava a figura formada buscando obter um quadrado de área equivalente, Descartes passava a ver a curva formada pelo movimento. Analisou, por exemplo, a curva formada por “um polígono “rolando” ao longo de uma reta e descrevendo uma seqüência de arcos circulares” (BARON (2) 1985 p. 39). Essa nova forma de ver a figura leva a busca pela obtenção da tangente à curva em um ponto e ao desenvolvimento de formas de representar a variação dessa tangente. “Torricelli procura relacionar tangentes e quadraturas diretamente através do conceito de movimento” (BARON (2) 1985 p. 40). A busca de uma representação algébrica para as tangentes leva ao aprimoramento da simbologia com a introdução dos expoentes inteiros por Descartes (SLOYEN 1992 p. 80). Essa nova maneira de organizar as idéias permite uma compreensão maior facilitando não só essa compreensão como a comunicação das informações. Isto cria as condições para a superação de um obstáculo ao estudo da variação relacionado a essa organização e transmissão do que está sendo estudado. O desenvolvimento da representação algébrica foi fundamental para a conceituação da noção de função.

Newton e Leibniz, de forma independente e quase que simultaneamente, desenvolveram as bases para o conceito de função. Newton em seu método das fluxões, foi quem primeiro distinguiu as noções de variáveis dependentes e independentes. Denominou de fluentes a variável independente e de quantidade correlata à quantidade dependente. Entretanto coube a Leibniz a primazia de cunhar a palavra função (functiones) em seus manuscritos, “em agosto de 1673, em particular, naquele denominado O método inverso das tangentes ou sobre as funções (Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus).” (YOUSCHKEVITCH 1976 p 30) “Devemos lembrar que o verbo latino fungor, functus sum, fungi, significa executar preencher, realizar uma obrigação, etc.” (ibidem p. 30).

Youschkevitch identifica uma das primeiras definições para função em artigos publicados em 1692 e em 1694, por Leibniz como sendo “segmentos de retas obtidos pela construção de retas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma curva” (ibidem p 31). Da mesma forma que a representação gráfica veio facilitar a representação do movimento, permitindo uma melhor visualização, essa parece ter criado as condições para o estabelecimento de um novo obstáculo relacionado com o foco nas coisas que variam, a função estaria associada à figura formada pelos segmentos de reta. O movimento representado é semelhante a figura obtida. A queda de um corpo parece descrever a mesma curva dada pela representação gráfica. Essa primeira definição de função atribuída a Leibniz parece refletir esse obstáculo que identifica a função como sendo a curva. Entretanto sua superação parece ter ocorrido logo nos primórdios da evolução do conceito e cremos ser capaz de evitar seu surgimento em nossa pesquisa. Com esse objetivo trabalhamos com diversas representações em nossas atividades. Acreditamos que essa diversidade de representação evitará o relacionamento da idéia de função como sendo somente as que podem ser representadas graficamente, sendo a curva gerada na representação gráfica uma das formas de representar uma função.

A superação do obstáculo citado acima aparece logo no início das discussões que levam ao desenvolvimento do conceito nas correspondências entre Leibniz e Jean Bernoulli. Nelas, Bernoulli define função como “uma grandeza variável relacionada de alguma maneira com outra grandeza variável e uma constante”(BERNOULLI, 1742 apud YOUSCHKEVITCH 1976 p 35 Tradução nossa). Essa pode ser considerada a primeira definição de uma função em termos que se possa associar como uma expressão algébrica e, também o prenúncio de um novo obstáculo epistemológico que persiste até hoje em nossos bancos escolares assumindo as características de obstáculo didático, toda função pode ser expressa por uma expressão algébrica. A ênfase dada à busca de uma expressão algébrica e a limitação do estudo de funções a casos particulares em nosso ensino pode levar o aluno a concluir que toda função possa ser expressa por esse tipo de representação.

Coube a Leibniz a introdução de forma generalizada dos termos ”constante e variável, coordenadas e parâmetros, no sentido de uma quantidade ou de um segmento constante arbitrário” (ibidem p. 32).

Desenvolvendo estudos que acabam por resultar na análise matemática, Euler definiu função como “qualquer expressão analítica formada daquela variável e de números ou quantidades constantes” (BOYER. 1974, p 327). O conceito de função assim formulado ressalta o papel da expressão algébrica, que se estabelece como obstáculo epistemológico, presente em várias décadas. Para Euler, uma curva representaria uma função contínua se definida por uma única expressão algébrica. Essa concepção dificulta a compreensão da continuidade ou descontinuidade de uma função. As discussões entre Euler e D’ Alembert, envolvendo a solução dos problemas das cordas vibrantes indicam essa falta de clareza quanto a conceituação da continuidade.

> Para Euler a continuidade significava a invariabilidade da lei algébrica que determina a função para todos os valores do domínio, nesse caso a descontinuidade de uma função significava uma mudança na lei analítica, a existência de leis diferentes em dois ou mais intervalos do seu domínio,. As “curvas descontínuas”, “são compostas por partes “contínuas” e por este motivo são chamadas de mistas ou irregulares”(YOUSCHKEVITCH 1976 p 40)

Euler defende que a solução do problema das cordas vibrantes pode ser expressa pela soma de duas funções arbitrarias determinada pelas condições iniciais das cordas. D’Alembert restringiu as condições impostas obtendo uma delas representada por uma única equação, logo contínua na concepção de Euler. Isso o levou a classificar as funções em funções algébricas, representadas por uma única expressão e não algébricas expressas por mais de uma expressão. Cauchy, muito mais tarde introduziu um exemplo simples de função mista, logo descontínua, que poderia ser representada por uma única expressão algébrica e, desta maneira torna-se contínua. Comparável a atual função modular o exemplo dado por Cauchy pode ser definida da seguinte maneira,

y = $|x| \Rightarrow \quad y = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$ que pode ser expressa pela função $y = \sqrt{x^2}$ para qualquer x tal que $-\infty < x < \infty$. Essa função coloca em cheque o critério de continuidade definido por Euler. O mesmo obstáculo podemos encontrar em nosso ensino com os alunos tendo dificuldades em compreender uma relação definida por várias sentenças como podendo representar uma função contínua ou uma única função. Em nossa pesquisa não discutimos a continuidade, uma vez que nosso objetivo é o da introdução do conceito de função para alunos da oitava série do Ensino Fundamental. Entretanto, trabalhamos com uma atividade envolvendo a variação temperatura da água em função do tempo de aquecimento, cuja representação algébrica é constituída por três sentenças.

Youschkevitch destaca, o papel de Euler na definição do conceito de função, atribuindo a ele uma nova definição encontrada no prefácio da obra

> "Institutions calculi differentialis", publicada em 1755([50], p. 4:
> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal maneira que se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então se tem o hábito de nomear essas quantidades funções das últimas; essa denominação tem o mais amplo entendimento e contém em si mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se por conseqüência, x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, não importando qual a maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de função de x (EULER, 1913 apud YOUSCHKEVITCH 1976 p 49)

Essa nova definição ressalta a noção de dependência e descaracteriza de certa forma a necessidade da existência de uma expressão algébrica, para definir a função, marcando o início da superação do obstáculo epistemológico que condicionava o conceito de função a ser representado por uma expressão algébrica. Entretanto traz indício de outro obstáculo que Bachelard chamou de obstáculo verbal (BACHELARD 1996 p. 91), o uso da palavra função na sua forma coloquial. Esse obstáculo pode surgir na busca da contextualização do conceito, sendo observado em pesquisa apresentada no VIII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) na seguinte citação:

> Nas fichas, inicialmente, os alunos foram convidados a observar frases, onde aparece a palavra função, do tipo: "João é dependente químico. Ele vive em função da droga", ou "A cada dia menos mulheres vivem em função dos seus maridos". A seguir, com o objetivo de levar o aluno a concluir que função tem significado de dependência, foi perguntado em que sentido a palavra função foi empregada. (CHAVES 2004 p. 10)

Essa tentativa de relacionar o conceito de função com o significado coloquial da palavra pode levar o aluno a concluir que basta ocorrer a dependência para que tenhamos uma função.

A nova definição de Euler começa a ganhar adeptos, sendo Condorecet um dos primeiros a reconhecer a importância dessa definição em seu trabalho "traité du calcul intégral", por volta de 1778 em que revê a necessidade da existência de uma expressão algébrica para caracterizar uma função, apresentando a seguinte definição "Suponha que eu tenho um certo número de quantidades x, y, z,.... f, e que para todo valor determinado de x, y, z,.. etc., existe um ou vários valores determinados como respostas: Eu digo que f é uma função de x, y, z..."

(YOUSCHKEVITCH, 1976 p. 57 Tradução nossa). Buscando tornar mais clara a sua definição distingue três tipos de funções:

> (1) as funções cuja forma é conhecida (nós dizemos funções explicitas)
> (2) as funções introduzidas por equações não resolvidas entre F e x, y, z (funções implícitas)
> (3) as funções dadas somente por certas condições (por exemplo, por equações diferenciais). (ibidem)

A evolução e aceitação desta visão sobre o conceito culminou com a definição mais ampla formulada em 1834 por Lobatchevisky

> A concepção geral exige que uma função de x seja denominada um número que é determinado para todo x e que mude gradualmente ao mesmo tempo que x. O valor da função pode ser dado por uma expressão analítica, ou por uma condição que dá um meio de testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente a dependência pode existir mas permanece desconhecida. (LOBATCHEVISKY, 1834 p. 48, apud YOUSCHKEVITCH, 1976 p 59)

e por Lejeune-Dirichlet em 1837

> Designemos por a e b dois valores fixos e por x uma grandeza variável, que esta situada entre a e b. Se para todo x corresponde um valor finito y = *f(x),* que varia de maneira contínua, sempre que x varia, também de maneira contínua de a até b, então nós diremos que y é uma função contínua neste intervalo. Aqui, não é mais necessário que y se exprima em função de x segundo uma mesma lei em todo o intervalo; também não é necessário considerar uma expressão algébrica explicitamente x e y. De um ponto de vista geométrico, isso quer dizer examinar x e y como abscissa e ordenada de um ponto onde para cada valor de x do intervalo considerado corresponde um único valor y (DIRICHLET 1889, p. 135-136 apud YOUSCHESVITCH, 1976 p 60).

Ambas as definições ressaltam a dependência, procurando deixar claro a possibilidade da existência de funções que não possam ser definidas por uma expressão analítica, ou melhor, que a expressão ainda é desconhecida, ou definida por mais de uma expressão. Elas marcam a superação do obstáculo relacionado à necessidade da existência de uma expressão algébrica dentro da matemática. Entretanto esse obstáculo ainda persiste em nosso ensino assumindo uma característica didática devido à ênfase dada na utilização de funções expressas por expressões algébricas e o estudo de casos particulares de função, como a do primeiro e segundo graus. Uma versão da definição de Dirichlet mais simples e que adotamos como sendo a definição básica de nosso trabalho é formulada como: “se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado então diz-se y função de variável independente x “(BOYER. 1974, p 405). Essa definição permite a aplicação do conceito a problemas envolvendo outras áreas do conhecimento, como a Física, Química ou Economia e assim evitar o surgimento do obstáculo de natureza didática identificado por Sierspinska “Leis

Físicas e funções matemáticas não tem nada em comum, pertencem a domínios diferentes do conhecimento*"(*SIERPINSKA 1992 p. 42 Tradução nossa)*.* Em nossa seqüência apresentamos três situações envolvendo objetos da Física, a variação da temperatura em função do tempo de aquecimento, o movimento do sol e a sombra gerada ao longo do dia e o lançamento de um corpo. Com essas atividades esperamos evidenciar algumas das leis que regem os fenômenos físicos como funções, evitando o estabelecimento desse obstáculo ou criando as condições para sua superação. A atividade envolvendo a sombra gerada por uma haste também é utilizada para questionar o obstáculo didático relacionado com a concepção segundo a qual toda função deva ter uma expressão algébrica. A quantidade de variáveis envolvidas nesse fenômeno, posição relativa da terra em relação à direção norte–sul, localização da haste sobre a superfície terrestre, relação entre ângulos e lados em um triângulo retângulo, entre outras, inviabilizam a formulação de uma expressão. Com ela, questionamos a necessidade da existência da expressão algébrica ao mesmo tempo que reforçaremos o papel das representações dos objetos matemáticos, mais especificamente os relacionados ao conceito de função.

O desenvolvimento da teoria dos conjuntos por George Cantor, traz um novo elemento que influirá na definição de função utilizada nos dias de hoje em nossos bancos escolares, como uma relação entre dois conjuntos A e B. Numa pesquisa nos livros didáticos utilizados no Brasil encontramos a seguinte definição “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma relação que a cada elemento x de A faz corresponder um único elemento y de B”. (MACHADO, 1988. p. 69), Essa definição, que pouco se assemelha às definições de Euler ou Dirichlet está relacionada com a teoria dos conjuntos, introduzida pelo advento da chamada Matemática Moderna na década de 60 no Brasil. A utilização da definição do conceito de função em termos da relação entre elementos de dois conjuntos, no Ensino Fundamental, cria um obstáculo de natureza didática que dificulta a visualização por parte do aluno da dependência entre as variáveis envolvidas. A própria variação parece prejudicada, visto que o aluno tende a relacionar os elementos do conjunto domínio com sua correspondente imagem no contra domínio, perdendo de vista a noção de variação.

É compreensível que a visão relacionada à teoria dos conjuntos seja a predominante em nosso sistema escolar. A introdução do conceito de função no Ensino Básico, atual Ensino Fundamental e Médio, relaciona-se mais as necessidades do ensino do cálculo e análise, do que à preocupação com a capacidade integradora deste conceito. As primeiras referências a sua inclusão no ensino estão em notas de aulas elaboradas por Lagrange para a École Polytechnique (BOYER, 1974, p.359). Entretanto a introdução deste conceito parece que efetivamente se deu a partir das reformas no ensino da matemática na Europa no início do século XX. Liderada por matemáticos como Christian Felix, Henri Poincaré, Jules Tannery, entre outros, essa reforma buscava unir no ensino da matemática seus diversos ramos até então trabalhados separadamente.

A campanha desenvolvida por Klein na Europa teve reflexos no Brasil durante a reforma Francisco Campos. A defesa da introdução desse conceito no Ensino Nacional foi feita por Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, tomando como ponto de partida os argumentos utilizados por Klein. Propõe e implanta suas idéias no Colégio Pedro II no Rio de Janeiro, em 1929, com a introdução do estudo de funções na quinta série “última série do Ensino Fundamental do curso secundário” (CARVALHO, 2003, p. 86). Segundo Roxo, a noção de função deveria "ser adotada como idéia axial no ensino da matemática” (ROXO 1937, apud VALENTE 2003, p. 180) , sendo "o elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária de modo a ser a alma do corpo em que se organiza a matéria” (ibidem). Isso daria “mais vida e interesse, permitindo não só tratar questões de maior realidade para o aluno, como estabelecer conexões a outras matérias mais concretas” (ibidem p. 181).

A presença dos obstáculos citados ao longo dessa análise pode ser percebida no ensino do conceito de função em nosso sistema de ensino. Pesquisas envolvendo o ensino do conceito de função tem demonstrado a falta de compreensão por parte dos alunos do real significado desse conceito. Na pesquisa desenvolvida por Oliveira (1996), para sua dissertação de Mestrado ficou evidente a confusão entre o objeto função e as suas representações. O objeto matemático parece não ter significado para os alunos. Isto parece demonstrar a forte presença de obstáculos citados anteriormente.

De acordo com Sierpinska esses obstáculos se relacionam com diversas condições necessárias para se entender o conceito de função entre os quais identificamos:

- Discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas, que às vezes, descreviam sua lei. . .(SIERPINSKA 1992 p. 46 Tradução nossa).
- Discriminação entre meios diferentes de representar funções e as funções dessas representações .(ibidem p 53)

- Síntese dos diferentes modos de se representar e descrever funções. .(ibidem p 54)
- Discriminação entre o dependente e as variáveis independentes. .(ibidem p 38)

Pesquisa desenvolvida por Moretti (1998) em sua dissertação de Mestrado, com o objetivo de identificar quais seriam os conceitos prévios que os alunos teriam para a aquisição do conceito de função parece confirmar que sua aquisição por parte do aluno tende a seguir o desenvolvimento histórico. Segundo a autora as primeiras percepções envolvendo as relações funcionais tendem normalmente a ser expressas em forma de tabelas, como parece indicar as primeiras representações que podemos associar à relação funcional. Entretanto essa simples organização não permite o aprofundamento nas propriedades dessa relação. Nas tabelas temos uma seqüência que permite a percepção da existência da relação, mas por si só não permite obter essa relação. A tabela foca o problema apenas nas grandezas envolvidas gerando alguns dos obstáculos descritos. Percebe-se que alunos focalizam as grandezas e não a variação. A representação gráfica não aparece de forma natural, o que também é identificado por Sierpinska que salienta "O conceito de gráfico é difícil. Alguns estudantes nunca usariam espontaneamente um gráfico bidimensional para representar uma relação funcional" (SIERPINKA 1992 p 52 Tradução nossa). Essa representação, que tem papel fundamental na compreensão das propriedades do objeto função, parece não estar associado de forma natural com a relação entre grandezas. Sierpinska ressalta que "a noção de função não aparece aos estudantes como uma possível ferramenta para tentar responder questões sobre a variabilidade, ela parece sem sentido fora da aulas matemática" (SIERPINSKA 1992 p 56 tradução nossa).

Em nossa pesquisa não buscamos a superação de todos os obstáculos identificados nessa análise histórica. Centramos nossa atenção na superação do obstáculo foco nas coisas que mudam procurando disponibilizar o objeto função como ferramenta na solução de problemas envolvendo a variação. Acreditamos que essa superação poderá ocorrer se o aluno for colocado diante de várias situações envolvendo a variação entre grandezas, diversificando o tipo de grandeza de forma a perceber a variação como elemento em comum a essas situações. Se essas atividades forem elaboradas de forma a induzir a utilização das diversas formas de representação desse objeto matemático, podemos levá-los a distinguir o objeto de suas representações evitando muito dos obstáculos citados.

3.4 O conceito de função na vida do aluno

O conceito de função é sem dúvida um dos que apresenta maior interferência nas relações sociais na atualidade. Em suas atividades no dia-a-dia, no trabalho e convívio social, o ser humano faz uso de variáveis interdependentes de forma corriqueira e nem se dá conta desse uso e das interferências que estas variáveis tem em sua rotina.

O uso das diversas formas de representações funcionais, como tabelas, gráficos e expressões algébricas, são difundidas em larga escala nos meios de comunicação. Em nossa sociedade, a habilidade de analisar essas formas de representações dá ao sujeito meios para competir em condições de igualdade com seus pares. O aluno necessita interagir com as novas formas de comunicação, "hoje a computação gráfica é um recurso bastante estimulador para compreensão e análise do comportamento de gráficos de funções como as alterações que estes sofrem quando ocorrem mudanças nos parâmetros de suas equações."(PCNs - EF p 45). Espera-se que o aluno ao ter terminado o Ensino Fundamental e Médio tenha desenvolvido Competências e Habilidades que permitam essa interação.

O aluno faz uso de fórmulas para calcular a área de uma figura plana, sem se dar conta da relação de dependência envolvida, discute tabelas de valores nutricionais dos alimentos, que permitem prever quantas calorias estará ingerindo ao tomar um sorvete. Dietas são criadas e divulgadas, fazendo uso de relações entre a massa corpórea e a altura, tabelas relacionando peso ideal com a altura ou idade são comuns em revistas e conversas entre amigos e parentes. Nas aulas de Geografia, os alunos analisam gráficos envolvendo a densidade populacional de uma certa região do pais, compara esses gráficos com a degradação do meio ambiente nas aulas de ciências. Todos esses exemplos demonstram o uso das relações funcionais por parte dos alunos sem que o objeto função seja explicitado, e suas propriedades consideradas. O que impede o uso desta ferramenta com todo o seu potencial?

Como já observamos anteriormente o objeto matemático função, da forma que é ensinado, está associado mais à relação entre os elementos de dois conjuntos. Esse enfoque, exclusivamente matemático, ganha importância, quando passamos para a matemática superior, mas pouco tem a ver como os fenômenos vivenciados pelo aluno no seu cotidiano. A caraterística principal do conceito de função relacionado com este cotidiano tem a ver com a dependência entre duas variáveis que se comportam de acordo com regras que permitam garantir a unicidade da resposta. As propriedades de uma função podem ser analisadas com base em princípios matemáticos precisos com comportamento previsível, permitindo uma ação conveniente sobre variável independente de forma a se obter a resposta desejada na variável dependente. A mudança na forma de introduzir o conceito de função procurando relacioná-la à noção de variação, que parece ser uma das tendências observadas nos livros didáticos analisados, permitirá colocar à disposição do aluno um instrumento capaz de auxiliá-lo na tomada de decisão sobre qual a melhor opção no momento de se decidir entre, por exemplo, um financiamento ou a compra de um bem a vista, preparando-o para enfrentar as decisões deverá que tomar em seu dia-a-dia.

Capítulo IV - Experimentação e Análises

4.1 Procedimentos Metodológicos da Experimentação

Como já foi dito no primeiro capítulo, a verificação da validade ou não de nossas hipóteses só será possível se colocada em prática. Para tanto torna-se necessário construir uma seqüência didática à luz dos princípios de uma engenharia da forma definida por Artigue (1995). É fundamental o estabelecimento de um referencial teórico consistente e o conhecimento dos trabalhos relacionados ao objeto de pesquisa. Buscando atingir esses objetivos já desenvolvemos uma análise dos documentos oficiais e livros didáticos. Procuramos fundamentar nossa pesquisa na dialética ferramenta-objeto desenvolvida por Douady (1984). Estabelecida essa fundamentação passamos a descrição do método utilizado na validação, ou não, da pesquisa.

Numa etapa preliminar construímos uma seqüência e aplicamos como pré-teste, para um público semelhante ao público alvo, no ano letivo de 2004. A aplicação das atividades ocorreu durante as aulas de matemática, numa sala com 24 alunos da oitava série do Ensino Fundamental. Nesse capítulo faremos uma análise dos resultados dessas atividades e das alterações que julgamos necessárias para confirmação, ou não, de nossas hipóteses. Faremos a análise a prióri das atividades construídas que julgamos darão suporte a nossa pesquisa e por último uma análise a posteriori de acordo com os princípios da engenharia didática.

A parte experimental se deu com alunos voluntários fora do horário normal de aula. Esta é uma escolha didática que tem a finalidade de trazer alunos que se empenhem totalmente nas atividades e que serão propostas em forma de situações-problema, atividades estas que serão descritas e analisadas na análise a prióri, ainda neste capítulo. Para esse experimento previmos a realização de sete seções de uma hora e quarenta minutos, tendo o próprio pesquisador como professor. As cinco primeiras seções serão divididas em três etapas:

- Primeira etapa: Destinamos para essa primeira etapa cerca de uma hora para a resolução das atividades por parte dos alunos.
- Segunda etapa: reservamos trinta minutos para a discussão entre os alunos de suas conclusões e troca de informações entre eles.

- Terceira etapa: reservamos vinte minutos para a institucionalização pelo professor.

Essa distribuição tem como base os princípios da dialética ferramenta objeto. Na primeira etapa temos as duas primeiras fases desta dialética. Durante a resolução das atividades, os alunos aplicam seus conhecimentos antigos. Procurando resolver as situações propostas, espera-se que os alunos desenvolvam novos conhecimentos (Pesquisa-novo implícito). A segunda etapa tem por objetivo a homogeneização (Explicitação-institucionalização local) do conhecimento desenvolvido na etapa anterior, tornando comum a todos os participantes da atividade as novas ferramentas. Durante essas duas primeiras etapas a ação do professor será a de direcionar as atividades, procurando não intervir no desenvolvimento das mesmas. As atividades serão registradas em folhas próprias recolhidas ao final da primeira hora e gravadas em vídeo para consulta posterior. Na primeira hora o professor deve posicionar-se de forma a observar a forma de interagir dos alunos, as opiniões e contribuições dadas na resolução, procurando coletar e registrar o máximo de informações pertinentes ao desempenho dos participantes da atividade. Na segunda etapa, o professor deverá instigar o debate, incentivando os alunos a se exporem ao máximo, explicitando suas idéias. A terceira etapa será destinada para fechamento da sessão pelo professor (Institucionalização-estatuto de objeto), que deverá selecionar e formalizar, dentre os novos conhecimentos, gerados na etapa anterior, aqueles pertinentes aos objetivos da sessão.

A sexta sessão será destinada à Familiarização-reutilização numa situação nova. Essa sessão, correspondente à sexta atividade da seqüência, deverá ser dividida em duas etapas. A primeira em que os alunos serão incentivados a discutirem e explicitarem as idéias envolvidas nas atividades anteriores e tentar a formulação de uma definição relacionada com essas idéias. Ao final dessa etapa ocorrerá a Explicitação-institucionalização local, onde o professor deverá atuar procurando direcionar na construção de uma definição coletiva. Na segunda etapa apresentaremos a definição de função segundo Dirichlet e a comparação com a definição coletiva. Fechando a atividade, um texto formaliza as convenções relativas ao conceito e apresentando alguns exercícios de fixação.

A experimentação se encerra na sétima sessão com a proposição de um problema que visa verificar se os alunos serão capazes de resolver um problema utilizando o conceito de função como ferramenta “Complexificação de tarefa ou novo problema”. Com esse objetivo a atividade se iniciará com a proposição de situações que reforcem a institucionalização. Finalizando a atividade, logo após a discussão das questões anteriores, será apresentado uma situação–problema, que julgamos exigir como ferramenta em sua solução a utilização do raciocínio funcional. Cremos que a aplicação desse raciocínio pelo aluno desse raciocínio valide nossas hipóteses.

4.2 Análise do pré-teste

Buscando observar a necessidade de possíveis correções e ajustes, a seqüência foi aplicada, pelo próprio pesquisador, para os alunos de um colégio particular da região da Grande São Paulo. Para o desenvolvimento das atividades foram formados grupos de dois ou três alunos, que receberam as folhas de atividades, mais uma folha quadriculada. Essas folhas foram recolhidas ao final da atividade como forma de documentar o desenvolvimento da mesma. As observações foram realizadas pelo próprio pesquisador. As aulas eram intercaladas sendo uma aula de uma hora e quarenta minutos (aulas duplas) e outra de cinqüenta minutos. Procurando seguir a metodologia proposta no desenvolvimento do experimento, utilizamos as aulas duplas, de uma hora e quarenta minutos, na resolução e debate entre os alunos, de suas conclusões; dessa forma procuramos desenvolver a primeira e segunda etapa da metodologia proposta. Na aula de cinqüenta minutos era retomada a atividade com a discussão dos alunos e realizada as institucionalizações pertinentes. Esse grupo de alunos já estavam habituados a atividades diferenciadas. Entretanto nunca tinham trabalhado com seqüências longas, o que provocou uma certa inquietação no decorrer da aplicação. Tal situação reforçou um comportamento que sempre esteve presente em atividades desse tipo nesse grupo de alunos, sendo possível identificar três comportamentos distintos:

- Alunos que se empenharam até o final de cada atividade, efetuando todos os cálculos e conferindo os resultados entre si. Oito alunos se portaram dessa forma.

- Alunos que se empenharam parcialmente acompanhando e auxiliando a realização dos cálculos pelos colegas, mas não se envolvendo diretamente na resolução. Onze alunos se portaram dessa forma.

- Alunos que simplesmente esperavam pelo resultado dos cálculos sem se aplicar o suficiente. Cinco alunos se portaram dessa forma.

As atividades foram aplicadas entre os dias vinte e sete de setembro a dezessete de novembro de dois mil e quatro, num total de vinte e uma aulas em treze sessões, oito aulas duplas, ocorrendo nesse período três feriados o que constituiu, no que podemos considerar um obstáculo pedagógico. Essas interrupções provocaram desmotivação nos alunos que mostravam apáticos na aula seguinte, prejudicando o desenvolvimento da atividade. Em duas das sessões, as atividades, embora computadas, não tivemos rendimento significativo devido a baixa presença de alunos. Essas aulas foram aproveitadas para o aprofundamento das discussões entre os alunos, não sendo aplicadas as atividades planejadas. Essas interferências foram identificadas pelos próprios alunos, que se posicionaram sobre esse prejuízo, ao exporem suas opiniões em conversas informais com o professor.

Apesar desses fatos, as atividades transcorreram sem maiores problemas, com dificuldades normais de interpretação em menor ou maior grau. Os alunos do último grupo, indicado anteriormente, foram os que demonstraram maior dificuldade nesse item, solicitaram com freqüência o auxílio de seus colegas na interpretação do enunciado. Foram os alunos desse grupo que apresentaram maior índice de faltas durante as atividades. Esse pré-teste evidenciou a necessidade da reformulação das situações propostas e o planejamento das mesmas podendo ser destacado:

- Aplicação da atividade em períodos que não ocorram interrupções freqüentes.
- O desenvolvimento completo de cada atividade deve ocorrer no mesmo dia, incluindo os debates e conclusões. Logo o professor deve coordenar as atividades prevendo tempo para o desenvolvimento de cada tópico. Preferencialmente devemos estipular um tempo para que os dados referentes à atividade sejam obtidos, ao final deste a troca de informações e discussões das condições a que todos os alunos finalizem a atividade.
- Em atividades que levem a generalização através de uma expressão algébrica, devemos induzir os alunos a obter essa expressão no momento em que estão preenchendo a tabela com a obtenção dos dados na forma numérica. A busca dessa informação ao longo da discussão da atividade, como foi proposta inicialmente, exige a retomada de um raciocínio que já havia sido elaborado prolongando o tempo necessário para finalização da atividade.

- A necessidade de insistir na justificação por parte dos alunos de suas opiniões pedindo que registrem as mesmas.

Durante a aplicação das atividades, a noção de dependência já começava a ser delineada. Observamos a tendência, por parte dos alunos, de confundir a representação com o objeto representado. Quando questionados sobre quais as características comuns às atividades, as primeiras respostas estavam sempre relacionadas ao estudo das representações, tanto na forma de tabela quanto à gráfica. É interessante destacar uma das condições para se entender o conceito, enunciado por Sierpinska (1992). A “distinção entre os diferentes meios de representar funções e as funções dessas representações” (Sierpinska 1992 p. 52). Essas confusões foram desfeitas durante as discussões e análise das atividades permitindo que os alunos compreendessem a diferença entre as representações e as informações que elas transmitem. As informações contidas em cada forma de representar um objeto é um dos itens destacados por Duval (2003 p 22). A mudança de registro implica de certa forma em mudar o conteúdo da representação do objeto representado. Esse pode ser considerado um dos obstáculos à construção do conceito como saber científico. Como vimos em nossa análise histórica uma primeira definição só se tornou possível após a construção das formas de representação desse objeto.

A observação do andamento e o encerramento de cada atividade com uma discussão geral permitiu identificar quais pontos deviam sofrer correções. A re-elaboração das mesmas bem como o desenvolvimento de novas é uma das conclusões inferidas neste pré-teste. Os resultados da aplicação desta seqüência foram significativos, tanto na aplicação das questões que procuravam identificar o resultado imediato quanto em avaliações posteriores. O índice de aproveitamento foi superior às médias nas avaliações levadas a efeito na sala como parte da avaliação institucional do curso. O mais gratificante entretanto foi reservado em uma das atividades em que se analisava as representações gráficas. Foi proposto a representação da parábola $y^2 = x$ e questionado se representava uma função de x sobre y. Após uma breve discussão, a sala foi unânime em identificar que não seria função, sendo destacado por um dos alunos que se invertendo a relação teríamos uma função de y sobre x.

O mais expressivo pode ser observado com esses alunos na seqüência do curso. Ao se trabalhar com o conceito de função na primeira série do Ensino Médio, notou-se uma diferença significativa entre os alunos que trabalharam com a seqüência e os alunos oriundos de outras instituições no ano letivo de 2005. Os alunos, que trabalharam com a seqüência, não apresentaram a menor dificuldade no trabalho com o conceito. Demonstraram habilidade no uso das diversas representações do objeto função. Conseguiram identificar funções em situações diversas propostas pelo material didático sem a necessidade de grande esforço por parte do professor na explanação do conceito. Demonstraram ter domínio do objeto função adquirido com a atividade desenvolvida na série anterior.

4.3 Análise das atividades segundo a dialética Ferramenta-Objeto.

Função é como salientam os PCN um conceito que apresenta um amplo número de possibilidades como eixo temático. A quantidade de situações que dão significado a este conceito, tanto no campo da matemática como nos outros ramos das ciências, auxiliam o desenvolvimento de atividades segundo os princípios da dialética ferramenta-objeto. O conhecimento da evolução histórica, dos obstáculos superados ao longo da construção do conceito são importantes na formulação de situações que reproduzam esses obstáculos. A superação dos mesmos pode se tornar uma ferramenta poderosa para sua aquisição por parte do aluno.

As diferentes formas de representar o objeto função, como gráfico, tabelas, expressão algébrica etc.. a utilização da mudança de quadros, da conversão entre diversos registros, pode facilitar a aquisição do conceito por parte do aluno “quanto maior for a mobilidade com diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto”(Damm 1999 p. 144).

A simples conversão entre registro, entretanto, não leva à apreensão dos objetos, matemáticos. É necessário que o aluno visualize as propriedades intrínsecas de cada representação e sua relação com o objeto matemático. Isto nos leva à definição das variáveis didáticas de forma a permitir a interação do aluno com a atividade. Variáveis que destaquem as propriedades desejadas, que permitam não só mudar a representação, mas leve o aluno a compreender as informações contidas na nova representação. Cabe, então, ao professor organizar as mudanças entre essas diferentes representações de forma a facilitar ao aluno a aquisição do conceito pretendido.

A criação e desenvolvimento de uma atividade pelo professor deve levar em consideração as capacidades cognitivas de seus alunos. Como já destacamos anteriormente, partimos da hipótese que, uma seqüência didática em que se procure considerar os mesmos obstáculos enfrentados na elaboração desse conceito e que utilize os conhecimentos dos alunos pode ser utilizada para levá-los a perceber:

- A variação como característica comum a esses conhecimentos;
- A possibilidade de generalizar essa característica como um novo conhecimento;
- A necessidade da definição dos intervalos de validade, para uma variação particular, para tornar este conceito funcional.

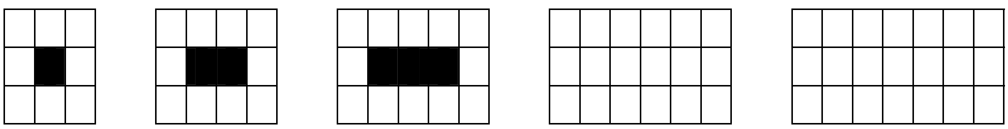
Neste sentido as escolhas do professor são fundamentais para atingir os objetivos desejados. Desenvolveremos uma análise de cada atividade subdividida em duas partes. Numa primeira, efetuaremos uma análise a priori da atividade buscando evidenciar as escolhas realizadas, identificando quais os conhecimentos julgamos que os alunos devam possuir e mobilizar na resolução do problema proposto, quais as mudanças de quadros e quais os conhecimentos a serem desenvolvidos em cada atividade.

Na segunda, desenvolveremos uma análise a posteriori procurando descrever o comportamento dos alunos no decorrer da atividade, que observações podemos coletar tanto das discussões quanto dos registros por eles elaborados durante a realização do trabalho. Analisaremos também a participação dos alunos na segunda etapa da atividade, buscando entender como eles se posicionaram perante as discussões e quais as considerações e institucionalização devem ser realizadas pelo professor durante todo o desenrolar da mesma.

4.4 Análise das Atividades

4.4.1. Primeira atividade

Observando a seqüência complete as duas últimas figuras de maneira a manter a seqüência lógica.



1) Com o que se observa na seqüência acima complete a tabela abaixo

Número de quadradinhos coloridos	1	2	3	4	5	6	7	8	10	15	20	n
Número de quadradinhos não coloridos												

Na tabela temos os dados que relacionam o número de quadradinhos coloridos com o número de quadradinhos não coloridos.

a) Podemos dizer que o número de quadrados coloridos depende do número de quadradinhos não colorido? Por quê?

b) E o número de quadradinhos não coloridos, depende do número de quadradinhos coloridos? Por quê?

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?

d) Podemos considerar os valores acima como parte de conjuntos! Quais seriam seus elementos?

2) Represente graficamente os dados da tabela obtida no item 1:

a) Posicionado o número de quadradinhos coloridos no eixo das abscissas.

b) Posicionado o número de quadradinhos não coloridos no eixo das abscissas.

c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

3) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinho não coloridos partindo do número de quadradinhos coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

4) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinhos coloridos partindo do número de quadradinhos não coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

5) É sempre possível obter o número de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos?

6) E o contrário é sempre possível?

4.4.1.1 Análise a priori da primeira atividade

Parte 1- Análise geral

As seqüências numéricas despertam a curiosidade da humanidade desde a antigüidade. As tentativas de se obter uma regra que permitisse a geração de todos os números primos, os números figurativos, triangulares, quadrados, pentagonais, entre outras configurações que os gregos associavam a números, as descobertas de Pitágoras sobre as notas musicais, a seqüência de Fibronacci são exemplos que demonstram o interesse despertado pelas seqüências.

Nessa atividade fizemos uso de uma seqüência gerada por figuras básicas, sugeridas pelos PCN e livros de iniciação à álgebra. Sua estrutura elementar a torna interessante para a introdução de nosso trabalho com os alunos, como demonstrou o pré - teste aplicado anteriormente. Com ela pretendemos dar início à discussão sobre a relação existente entre duas variáveis dependentes. Procuramos pôr em evidência o fato de que o aumento do número de quadrinhos coloridos leva ao aumento no número de quadradinhos não coloridos segundo uma regra previsível, que nos permita calcular a quantidade de quadradinhos não coloridos para qualquer quantidade de quadradinhos coloridos. Dessa forma julgamos estar mobilizando conhecimentos que consideramos básicos como a habilidade de contar e a idéia de seqüência e seus respectivos campos conceituais. Esses conhecimentos antigos estão sendo utilizados como ferramenta para dar início à formulação de um novo conhecimento, a noção de dependência entre as quantidades de quadradinhos. Além das noções destacadas acima pretendemos mobilizar conhecimentos envolvendo:

- Preenchimento de uma tabela;
- Definição de uma expressão algébrica na forma de uma equação com duas variáveis;
- Representação cartesiana;
- Noção de continuidade;
- Operação com números inteiros.

A escolha dessa atividade como a introdutória ao nosso projeto levou em consideração uma variável didática e epistemológica, a utilização de números naturais e a distinção entre números e quantidades. Sendo a habilidade de contar uma das mais elementares da matemática, julgamos que também possa ter sido uma das primeiras em que tenha sido observada e registrada a dependência entre duas variáveis, como parece demonstrar os números figurativos. Consideramos o fato de que estaremos trabalhando com os números Naturais, obtidos a partir da quantidade de quadradinhos envolvida na atividade e cuja ordem de grandeza está de acordo com a capacidade cognitiva dos alunos. Na construção da atividade procuramos explorar essas características levando os alunos a transitar pelos quadros:

- Geométrico, representação da seqüência na forma figural;
- Lógico, manter o padrão definido na construção da seqüência;

- Algébrico, construindo a expressão algébrica que determina a quantidade de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos;
- Numérico, representado os dados numéricos em uma tabela;
- Geometria analítica, representando os dados obtidos graficamente.

As questões formuladas começam por explorar a relação de dependência entre as duas variáveis. Essas questões procuram evidenciar o fato de que é mais prático obter o número de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos do que a relação contrária. A noção de conjunto também começa a ser destacada, com o objetivo de uma definição posterior descontextualizada. Como a escolha recaiu sobre uma seqüência formada por número naturais, não é possível a ligação de dois de seus pontos por um traço. Este fato é destacado na segunda questão da atividade, quando se analisa a construção dos gráficos solicitados, com a questão “Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?”. O objetivo é colocar em discussão o significado da união de dois pontos numa representação gráfica e o fato de estarmos fazendo uso da noção de quantidade que só pode ser expressa por números inteiros e naturais. Com essa discussão esperamos colocar em evidência, para os alunos, o significado da representação gráfica e que idéias pretendemos transmitir ao usar essa representação. Cremos estar colocando frente ao aluno um obstáculo epistemológico relacionado à continuidade. Qual o significado da união de dois pontos na representação gráfica? Essa questão se baseia em dados relatados por Oliveira (1996 p. 100) em sua dissertação de Mestrado. Para a elaboração de seu trabalho, a autora, desenvolveu uma pesquisa visando à identificação dos conhecimentos envolvendo o campo conceitual relacionado ao conceito de função, com alunos do primeiro ano do curso de Engenharia, identificando as dificuldades desses alunos no trabalho com grandezas discretas. Segundo a autora, ao ser solicitado a elaboração de um gráfico envolvendo essas grandezas vários alunos uniram os pontos obtidos na representação. Ao serem questionados se deviam ou não unir esses pontos, mesmo os alunos que não tinham unido no item anterior, não conseguiram dar uma justificativa satisfatória para a resposta que haviam formulado.

A discussão sobre a dependência entre as duas variáveis é a chave dessa atividade. As diversas formas de representar o mesmo problema tem dois objetivos:

- reforçar a idéia das formas de representar um objeto matemático;

- ressaltar a dependência entre as duas variáveis. Cremos que dessa forma estamos ampliando o campo conceitual relacionado com as variações.

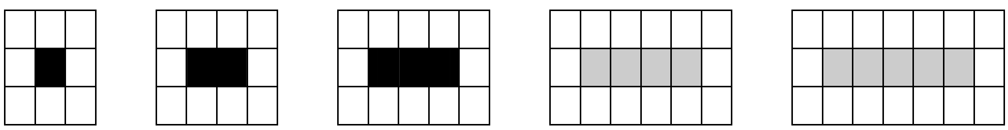
Com isto julgamos estar induzindo discussões que darão origem à segunda etapa da dialética "Pesquisa - novo implícito". A terceira etapa Explicitação-institucionalização local se definirá com as discussões entre os grupos, buscando evidenciar a percepção da dependência entre as duas grandezas envolvidas. A formalização pelo professor da dependência e a discussão sobre as representações utilizadas fechará a quarta etapa Institucionalização-estatuto de objeto.

A mudança do quadro geométrico para o quadro numérico, através da construção da tabela, procura evidenciar exatamente as relações existentes na seqüência gerada. A passagem para o quadro da geometria analítica com a elaboração dos gráficos tem a preocupação de reforçá-la, tomando o cuidado de observar a impossibilidade de unir os pontos obtidos.

Para induzir a percepção futura, por parte do aluno, da idéia de Domínio e Imagem, questiona-se qual das relações é a mais evidente e quais os conjuntos envolvidos. Com essa questão estamos colocando em discussão quais são os elementos que interferem na relação entre as duas variáveis, números naturais, procurando estabelecer as condições para uma definição do conceito de função. No pré-teste, observou-se que esses objetivos foram atingidos. Os alunos conseguiram visualizar que a relação entre o número de quadradinhos coloridos condiciona o número dos não coloridos. Nas discussões parece ter ficado evidente que a relação inversa também é possível, mas apresenta problemas práticos. Para qualquer quantidade de quadradinhos coloridos é sempre possível obter o número de quadradinhos não coloridos. Mas o inverso não é verdadeiro, para se prever quantos são os quadrados coloridos a partir dos não coloridos, estes devem estar em quantidade par maior ou igual a oito. O que restringe a previsão, observação importante para que se discuta na seqüência a noção de domínio.

Parte 2 - Resolução e análise da atividade

Observando a seqüência complete as duas últimas figuras de maneira a manter a seqüência lógica.



1) Com o que se observa na seqüência acima complete a tabela abaixo

Número de quadradinhos coloridos	1	2	3	4	5	6	7	8	10	15	20	n
Número de quadradinhos não coloridos	*8*	*10*	*12*	*14*	*16*	*18*	*20*	*22*	*26*	*36*	*46*	*2n + 6*

A situação se inicia propondo como tarefa que os alunos completem a seqüência de figuras e fazendo uso das informações dadas pela seqüência. As cinco primeiras colunas a serem completadas tem as informações contidas na própria seqüência, bastando ao aluno contar o número de quadradinhos não coloridos. As demais colunas tem por objetivo levar o aluno a prever o número de quadradinhos de forma que se obtenha a expressão que calcula o número de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos.

Possíveis estratégias de obtenção dos dados a serem usados na tabela:

- Dentro do quadro geométrico. Construindo as demais figuras e contando o número de quadradinhos não coloridos.
- Dentro do quadro numérico. Observando que a segunda linha é formada por uma seqüência de números pares e consecutivos.
- Dentro do quadro algébrico. Observando que o número de quadradinhos não coloridos é o dobro do número de quadradinhos coloridos mais seis quadradinhos não coloridos, três em cada extremo.

A determinação da expressão gerada no quadro algébrico é um dos objetivos dessa primeira questão e que será utilizada ao longo da atividade. A resolução da tarefa dentro dos quadros geométricos e numéricos pode dificultar a obtenção dessa expressão, embora seja a estratégia esperada para a realização da tarefa.

Na tabela temos os dados que relacionam o número de quadradinhos coloridos com o número de quadradinhos não coloridos.

a) Podemos dizer que o número de quadrados coloridos depende do número de quadradinhos não coloridos? Por quê?

Resposta: Podemos, pois para acrescentar um quadradinho colorido temos que acrescentar dois não coloridos para que se mantenha a seqüência.

b) E o número de quadradinhos não coloridos, depende do número de quadradinhos coloridos? Por quê?

Resposta: Também depende, pois a cada dois quadrados não coloridos temos que acrescentar um quadrado colorido entre eles.

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?

Resposta: Embora as duas dependências sejam possíveis a mais evidente é a dos quadradinhos não coloridos dependendo dos coloridos, pois sempre podemos acrescentar um quadradinho colorido enquanto os não coloridos só poderão ser um número par maior que oito.

d) Podemos considerar os valores acima como parte de conjuntos! Quais seriam seus elementos?

Resposta: Podemos, os elementos desses conjuntos seriam:

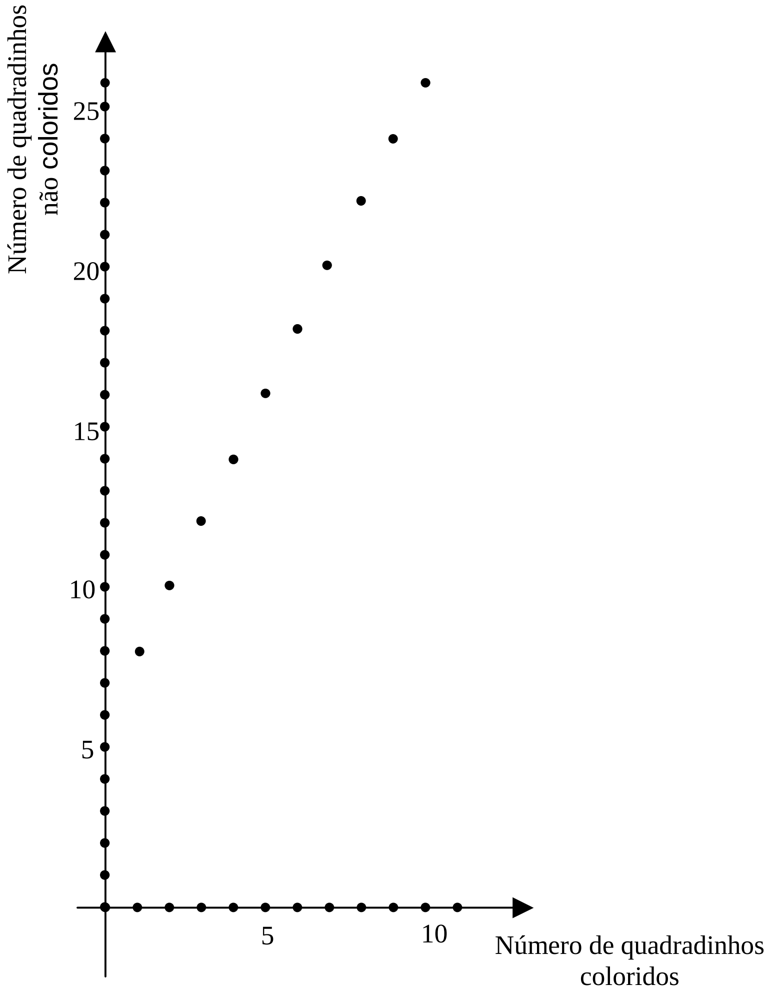
Quadradinhos coloridos = { 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Quadradinhos não coloridos = { 8, 10, 12, 14, 16 ....}

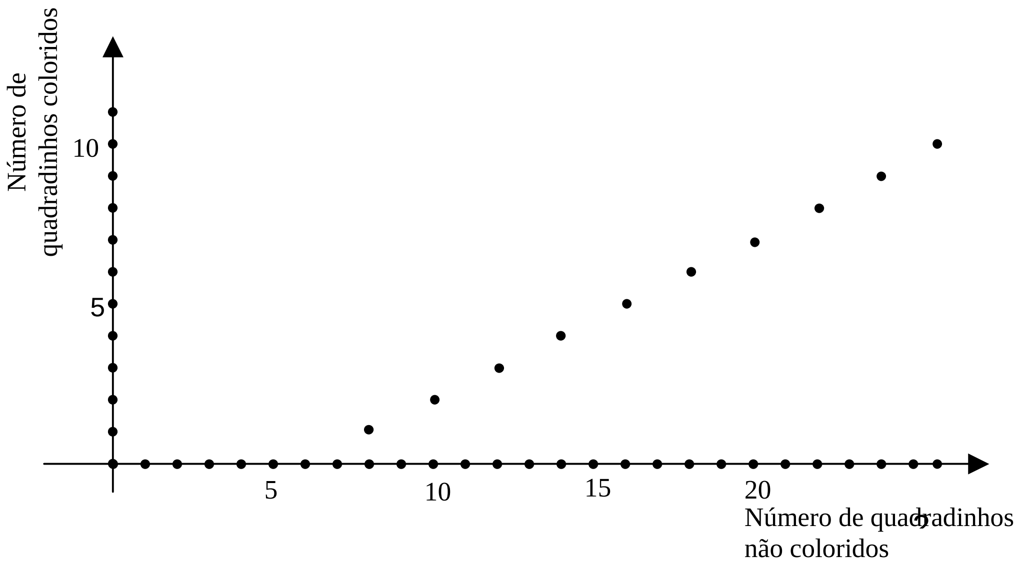
Essa primeira questão leva o aluno a realizar uma mudança de quadro passando do quadro geométrico, representado pelas figuras, para o numérico, através dos dados na tabela. Essa mudança, à primeira vista, tem por objetivo auxiliar a resolução da atividade, mas consideramos que a sua função seja muito maior que é a de construir juntamente com o aluno a forma de representação do objeto função. As questões são formuladas procurando introduzir a discussão envolvendo a dependência entre grandezas variáveis. Usamos o caso particular da variação da quantidade de quadradinhos não coloridos em relação aos quadradinhos coloridos. Mas formulamos as questões destacando a variação e não simplesmente a solução de um problema numérico em que se deseja obter uma resposta para um valor determinado. Ao mesmo tempo preparamos a noção de domínio e Imagem a ser definida futuramente, com a discussão sobre qual das dependências é mais evidente e quais os conjuntos envolvidos.

2) Represente graficamente os dados da tabela obtida no item 1:

a) posicionado o número de quadradinhos coloridos no eixo das abscissas.



b) Posicionado o número de quadradinhos não coloridos no eixo das abscissas.



c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

Resposta: Não, pois os dados obtidos representam quantidade de quadradinhos tanto no eixo das abscissas como no das ordenadas. A união dos pontos passaria a informação de que existem frações de quadrados o que não ocorre.

Com a segunda questão provocamos uma nova mudança na forma de ver o objeto estudado representando graficamente os dados obtidos na tabela anterior. Nosso objetivo com essa questão é reforçar o trabalho com as diversas formas de representações de um mesmo objeto matemático criando as condições para que o aluno faça distinção entre o objeto e suas representações. Solicitamos que os alunos elaborassem duas representações gráficas, uma posicionando o número de quadradinhos coloridos no eixo das abscissas e outro o número de quadradinhos não coloridos no mesmo eixo. Com essas duas representações estamos focando as futuras definições e convenções relacionados com o objeto função. Esperamos evidenciar a praticidade de se representar a variável independente no eixo das abscissas, pois isso nos permite analisar o comportamento gráfico da função tomando como referência a reta que representa os números Reais na horizontal. Esta forma de análise parece estar mais de acordo com a forma de leitura em nossa cultura, que segue esse padrão de escrita e leitura. Nossa escrita é realizada no sentido horizontal da esquerda para direita.

O item c dessa questão discute o fato de não ser possível a ligação dos pontos através de um segmento de linha uma vez que estamos representando somente com números naturais e essa ligação traria como informação a existência de valores intermediários, entre dois pontos o que não ocorre.

2) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinhos não coloridos partindo do número de quadradinhos coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

Resposta: Existe. Considerando "y" o número de quadradinhos não coloridos e "n" o de quadradinhos coloridos a expressão que permite obter o número de quadradinhos não coloridos a partir dos coloridos será: $y = 2n + 6$

4) Existe uma expressão algébrica que permita obter o número de quadradinhos coloridos partindo do número de quadradinhos não coloridos? Se existe, qual é essa expressão?

Resposta: Existe. Considerando "y" o número de quadradinhos não coloridos e "n" o de quadradinhos coloridos a expressão que permite obter o número de quadradinhos coloridos a partir dos não coloridos será: $n = \frac{y-6}{2}$, com y par e maior ou igual a oito.

5) É sempre possível obter o número de quadradinhos não coloridos a partir do número de quadradinhos coloridos?

Resposta: Sim, é sempre possível, pois a cada quantidade de quadradinhos coloridos sempre teremos 2n +6 não coloridos.

6) E o contrário é sempre possível?

Resposta: Somente se a quantidade de quadradinho não colorido for par maior que oito.

As quatro questões que fecham essa atividade procuram reforçar a idéia da dependência dos quadrinhos não coloridos em relação aos coloridos ao mesmo tempo que trabalha a representação algébrica que permite prever o número de quadradinhos não coloridos dentro da seqüência. Nosso objetivo é que o aluno perceba a variação como fenômeno a ser estudado distinguindo-a das formas de representação. A distinção entre o objeto, variação entre as grandezas envolvidas, e suas formas de representação será um dos itens definidos na etapa destinada a institucionalização dessa atividade.

4.4.1.2 Análise a posteriori da primeira atividade.

Dezessete alunos foram autorizados pelos pais e participaram da primeira atividade envolvendo a pesquisa. Estes se subdividiram em seis grupos, sendo cinco de três alunos e um com dois. A formação dos grupos foi espontânea, sem a interferência do professor que apenas limitou a quantidade máxima de três componentes por grupo. Foi utilizada uma sala ampla que permitisse o posicionamento da câmera de vídeo de forma a focalizar todos os grupos.

A atividade se iniciou como planejado. O professor, no caso, o próprio pesquisador, introduziu os trabalhos com instruções gerais, entre as quais a solicitação de que os alunos explicitassem o máximo suas idéias, evitando respostas curtas do tipo sim ou não. Entre essas instruções foi definido o tempo disponível para resolução da atividade, como exposto nos procedimentos metodológicos. Durante a resolução dos exercícios que compunham a atividade houve uma boa interação entre os componentes dos grupos. Dos seis grupos, dois não completaram plenamente a atividade, deixando de analisar as questões finais.

Todos os grupos completaram a tabela para os valores numéricos, mas ao contrário do pré–teste nenhum grupo encontrou, nessa primeira etapa, a lei de formação da seqüência. Isso nos permite concluir que conseguimos mobilizar como ferramenta os conhecimento envolvendo estratégias de contagem. As questões do primeiro item da atividade, em que se buscava evidenciar a dependência entre a quantidade de quadradinhos, provocou a divisão de opiniões entre os grupos mas a maioria (quatro dos seis grupos), concluiu que o número de quadradinhos coloridos depende do número de quadradinhos não coloridos.

Na questão sobre quais seriam os valores que formariam os conjuntos, dois grupos evidenciaram o fato da quantidade de quadradinhos não coloridos ser definido apenas por números pares maiores que oito. Apenas um grupo uniu os pontos na representação gráfica, embora nenhum dos grupos tenha conseguido explicitar, nessa etapa, o porquê de não se unir esses pontos. Apesar de não encontrar a expressão algébrica que determina a relação entre o número de quadradinhos coloridos e não coloridos, quase todos os grupos foram unânimes em dizer que se poderia prever a quantidade de quadradinhos não coloridos sabendo o número de quadradinhos coloridos. O motivo dessa certeza ficou evidenciado, na segunda etapa, quando os alunos expuseram verbalmente a regra utilizada para definir o número de quadradinhos não coloridos, quando se tem vinte quadradinhos coloridos. De acordo com os alunos “basta multiplicar vinte por dois e somar os seis que estão na ponta”. Percebe-se que os alunos tinham todas as informações para elaborar uma expressão algébrica, só não conseguiam representá-la. Isto nos permite concluir que não conseguimos mobilizar, plenamente, os conhecimentos relacionados às representações algébricas. Como vimos em nossa análise histórica, as dificuldades de se representar uma sentença matemática foi um dos grandes obstáculos que tiveram que ser superados para que o conceito de função fosse formalizado. Este obstáculo parece estar presente nos alunos participantes dessa pesquisa.

Finalizada a primeira etapa da atividade demos início à segunda parte, coordenada pelo professor, que buscou instigar os alunos no sentido de exporem suas conclusões na resolução da atividade. O objetivo claramente definido era o de homogeneizar o conhecimento na sala obtendo a “explicitação–institucionalização local” do conhecimento gerado. A tabela e os gráficos foram reproduzidos na lousa por dois alunos indicados pelo professor.

Iniciadas as discussões, o professor solicitou a um dos grupos que comentasse a sua resposta na primeira questão. O número de quadradinhos não coloridos dependeria ou não dos quadradinhos coloridos? A posição do grupo foi clara em relação a esta dependência, mas não concordaram com a dependência contrária, se os quadradinhos coloridos dependeriam dos não coloridos. Auxiliados pelos demais alunos, que alertaram para o fato de que “para acrescentar quadrados coloridos temos que acrescentar não coloridos”, concluíram pela dependência.

Neste ponto o professor intervém e questiona sobre qual das duas dependências seria mais evidente. Após um breve intervalo de reflexão um dos alunos defende que a primeira, o número de quadradinhos não coloridos dependeria do número de quadradinhos coloridos, é mais evidente, no que é apoiado pelos colegas. A questão sobre o porquê de não se poder unir os pontos obtidos nos gráficos foi levantada pelo professor. Inicialmente os alunos não conseguiram se posicionar, mas quando questionados, pelo professor se existiria meio quadradinho, uma posição começou a se definir. O professor interveio novamente e iniciou parte da institucionalização. Relembrou das atividades em sala de aula em que se trabalhou o significado da união de dois pontos na representação gráfica. Aproveitando-se da abertura da discussão enfatizou que tanto a tabela quanto o gráfico seriam formas de “tentar” representar a mesma idéia associada à seqüência gerada na atividade.

A institucionalização anterior serviu de base para que se iniciasse a discussão sobre a expressão algébrica que permitiria a obtenção do número de quadradinhos não coloridos a partir dos coloridos. Como já foi destacado anteriormente os alunos não conseguiram definir essa expressão na primeira etapa da atividade. Reproduzimos a seguir os diálogos, extraídos da gravação realizada durante a atividade, que permitiram aos alunos obter a expressão. Nesse diálogo, identificamos por “P” as falas do professor e A as falas dos alunos .

P: Como eu posso saber quantos são os não coloridos quando tenho 50 coloridos?,

A: cento e seis

P: Como eu faço para encontrar o 106?

A: O dobro de 50 mais seis.

P Como eu posso escrever a expressão o dobro mais seis.

A: Eu tenho que escrever 2n + 6.

P: Logo, tenho como saber o número de não coloridos se tiver o número de colorido.

P: Se NC for o número de quadradinhos não coloridos como podemos escrever essa expressão?

A: NC = 2n + 6

Observamos que os questionamentos do professor sobre como obter o número de quadradinhos não coloridos, quando temos cinqüenta quadradinhos coloridos, permitiu a percepção, por parte dos alunos, que essa regra na prática definia a expressão que permite calcular o número de quadradinhos não coloridos caso se tenha o número de quadrinhos coloridos. Situação semelhante pode ser observada em Moretti (1998 p. 108) em sua dissertação de Mestrado ao analisar a interação entre os alunos na determinação da expressão algébrica que permitisse obter a generalização de uma seqüência de pontos. Somente um dos 62 alunos pesquisados por Moretti, tinha conseguido obter a expressão, mas a interação entre eles permitiu que essa compreensão fosse possível para todos, reforçando a idéia de que o obstáculo citado anteriormente continua presente em nossos alunos.

O professor questionou sobre a possibilidade de obtenção do número de quadradinhos não coloridos para qualquer quantidade de quadradinhos coloridos. Os alunos afirmaram que isto seria possível, mostrando os dados da tabela. A formulação, pelo professor, da pergunta se poderíamos obter o número de quadradinhos coloridos conhecendo o número dos não coloridos provocou uma divisão entre os alunos. Alguns defendiam que sim, outros que não. Um dos alunos intervém mostrando na tabela que só seria possível se a quantidade de quadradinhos não coloridos fosse par e maior que seis e desta forma conseguiu convencer seus colegas. Quando questionado se poderíamos obter uma expressão que permitisse encontrar o número de quadradinhos coloridos, a partir dos não coloridos, um aluno questiona “Mas não é só isolar n na anterior” e após uma breve discussão obtém-se a expressão $n = \frac{NC - 6}{2}$. Cremos que um novo componente foi acrescido ao campo conceitual, como apresentado na página 25, relacionado à dependência entre duas grandezas: a importância de ter como prever o número de quadradinhos não coloridos a partir de qualquer quantidade de quadrinhos coloridos.

Finalizadas as discussões o professor, institucionalizou os objetos de trabalho da atividade. Definiu as relações de dependência entre as duas variáveis como sendo o objetivo principal da mesma. Procurou evidenciar que as duas dependências são possíveis, mas como os alunos já haviam concluído, a dependência dos quadradinhos não coloridos em relação aos coloridos se destaca. Institucionalizou as formas de representações utilizadas na atividade. Enfatizou que as formas de representações, tabela, gráfico e expressão algébrica tentavam dar sentido à idéia de dependência entre os dois conjuntos de valores gerados pela seqüência, mas a idéia principal era a dependência e não as representações.

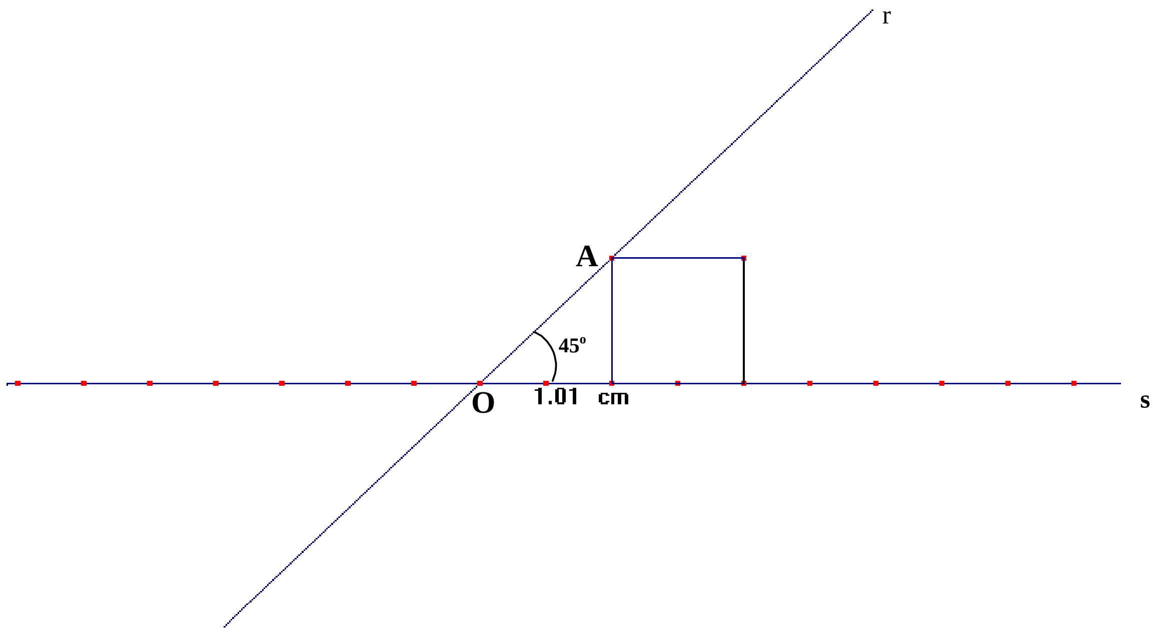
Observando o resultado do desenrolar da atividade podemos destacar:

- Os alunos parecem ter mobilizado como ferramenta os conhecimentos que permitiram a contagem dos quadradinhos, a representação dos dados nos quadros numérico, na forma de tabela e da geometria analítica, na forma da representação gráfica.
- Os alunos tiveram dificuldades em expressar algebricamente a relação apresentada, mas conseguiram representar os dados graficamente sem grandes dificuldades.
- Os alunos fizeram uso dos dados, notadamente os representados na tabela, em suas análises e discussões
- A relação de dependência entre os dois conjuntos de valores parece ter sido percebida por eles.

A relação de dependência e as distinções entre as formas de representá-la são as novas ferramentas que cremos estejam disponíveis para os alunos para serem mobilizadas nas próximas atividades.

4.4.2. Segunda atividade

São dadas as retas $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$ que formam entre si um ângulo de 45^o. Considere $\overrightarrow{Os}$ uma reta numerada em , e um ponto A, qualquer de $\overrightarrow{Or}$. Considere o quadrado formado com um dos lados sobre $\overrightarrow{Os}$ cujo medida do lado seja a distância do ponto A a $\overrightarrow{Or}$ como o indicado na figura.



Admitindo que o ponto A se desloca na semi-reta $\overrightarrow{Or}$ e que a distância entre o ponto A e $\overrightarrow{Os}$ seja o indicado na primeira linha da tabela abaixo.

1) Calcule a área do quadrado e complete a tabela

Medida do lado em cm	1,0 cm	1,5 cm	2,0 cm	2,5 cm	3,0 cm	3,5 cm	4,0 cm	5,0 cm	quadrado de lado *l*
Área em cm^2									

Os valores da tabela acima representam uma relação entre o lado do quadrado e sua área.

a) Podemos dizer que a área do quadrado depende da medida do seu lado? Por quê?

b) E medida do lado depende da área do quadrado? Por quê?

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente? Por quê?

d) Podemos considerar os valores representados na tabela acima como conjuntos? Identifique esses conjuntos. As características dos conjuntos são as mesmas dos da primeira atividade? Discuta com seu colega e justifique a resposta .

2) Represente graficamente os dados da tabela acima posicionando:

a) O lado do quadrado no eixo das abscissas.

b) A área do quadrado no eixo das abscissas.

c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

3) Qual a expressão algébrica que permite obter a área do quadrado a partir da medida de seus lados?

4) E a que permite obter o lado a partir de área?

5) Sendo o ponto A móvel ele poderia ser posicionado abaixo da reta s. Admitindo a figura como parte de um sistema cartesiano qual seria a medida do lado e da área do quadrado quando o ponto A tiver coordenada (-2,-2)?

6) Se tivesse que optar por uma das relações de dependência acima qual delas daria preferência? Por quê?

4.4.2.1 Análise a priori da segunda atividade

Parte 1 - Análise geral

A atividade proposta é uma escolha didática para facilitar a passagem entre as grandezas discretas e as contínuas. Essa escolha leva em consideração o fato da área ser uma das relações de dependência mais antiga na história da matemática e que podemos mobilizar os conhecimentos envolvendo o cálculo com área como ferramenta. Estamos levando em conta também o fato dessa ser uma das relações funcionais mais utilizadas dentro do ensino da matemática, sem que este aspecto seja considerado. Nas coleções analisadas é comum a utilização do cálculo de área das figuras geométricas em exercícios propostos para o aprofundamento de conceitos, como o de operações com polinômios, ou resolução de equações.

Na situação elaborada utilizaremos duas retas, $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$, concorrentes entre si formando 45°. A reta $\overrightarrow{Or}$ é admitida como numerada em e servirá de suporte para um quadrado com vértice num ponto A qualquer de $\overrightarrow{Os}$. Como o ângulo entre elas é de 45°, a distância de A a $\overrightarrow{Or}$ eqüivale ao módulo da abscissa de A definindo a medida do lado do quadrado. Sendo A como um ponto móvel sobre $\overrightarrow{Os}$, a mudança de sua posição, leva a variação na medida do lado do quadrado, fato que esperamos seja observado pelos alunos, uma vez que pretendemos explorar a noção de continuidade. A tarefa será a de calcular a área do quadrado assim formado registrando na tabela correspondente. Pelo exposto acima, são vários os campos conceituais que parecem estar sendo mobilizados nessa atividade, dentre os quais, destacamos os campos conceituais relacionados com a continuidade, ao movimento de um objeto, à variação no comprimento de um segmento; à medida que o ponto A se move sobre $\overrightarrow{Os}$ e o próprio campo conceitual relacionado com a medida de superfície, que admitiremos como sendo, pelo menos, de domínio parcial, para o aluno.

Esperamos que a situação-problema sirva de base para que os alunos mobilizem como ferramenta conhecimentos antigos relacionados aos campos conceituais destacados acima mais especificamente os conhecimentos sobre:

- Objetos da geometria, ponto e reta;
- Posição relativa entre um ponto e uma reta;
- Distância entre um ponto e uma reta;
- Propriedades do quadrado;
- Cálculo da área de um quadrado;
- Representação cartesiana;
- Operação com números Reais.

A conversão do registro da língua natural para o registro figural já foi efetuada para facilitar a compreensão por parte do aluno. Esta “ajuda” foi considerada necessária, levando em conta os aspectos cognitivos das representações envolvidas, o público ao qual se destina a atividade e o tempo disponível para o desenvolvimento da mesma. As pesquisas em Educação Matemática indicam que mudança de registro da língua natural para o registro figural, através de representação geométrica, deveria ser realizada pelo próprio aluno para tornar mais significativa a apropriação do problema por parte deste. A proposição da mesma atividade em situações em que tivéssemos à disposição mais tempo para o desenvolvimento da atividade por parte dos alunos tornaria esta conversão possível se não desejável.

A relação de dependência é aprofundada, procurando ampliar seu campo conceitual. A situação faz uso de uma relação envolvendo grandezas que não sofrem variação linear, dificultando ainda mais a inversão da mesma. Em muitas das relações envolvendo grandezas desse tipo, a inversão só se torna possível com restrição no domínio, embora não seja esse o caso da situação proposta na atividade. No pré teste esse problema não envolvia a reta numerada. Eram utilizadas simplesmente duas retas concorrentes. Mas as discussões ao longo da atividade mostraram a possibilidade da exploração de situações em que embora a área seja positiva, o quadrado poderia estar posicionado de forma a ter uma coordenada negativa. Ao posicionar o quadrado sobre a reta numerada, ampliamos as possibilidades de discussão, uma vez que o quadrado de área 4 u^2 poderá estar tanto sobre o eixo O*x*, como abaixo dele. O fato de não se admitir lado de figura plana com medida negativa restringe os elementos trabalhados. O ponto A poderá estar abaixo do eixo x, na posição (-2, -2), mas a medida do lado do quadrado continuará a ser 2 u. Na discussão da quinta questão da atividade tentaremos explorar essa característica, questionando aos alunos sobre qual a medida do lado de uma figura em que A estivesse abaixo da reta x e qual a sua área.

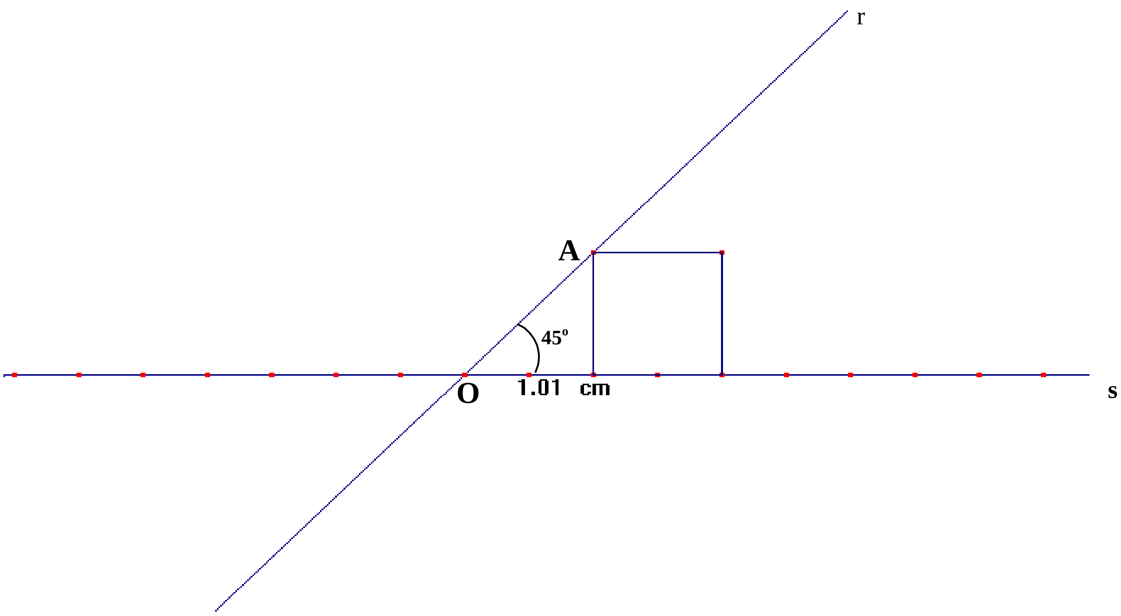
Na segunda questão, solicitamos aos alunos que elaborem duas representações gráficas, uma posicionando o lado no eixo Ox e outra posicionando a área nesse eixo. Com essa questão estamos criando as condições para futura convenção envolvendo a representação gráfica do conceito de função. Embora nessa atividade as duas representações, no domínio $_{+}$, representem função, nas atividades seguintes teremos situações em que ocorrerá duplicidade de valores impedindo a inversão da representação gráfica como convencionado para essa representação. A continuidade é enfatizada no item c, quando questionamos se “faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos”. Com ela buscamos principalmente reforçar o papel das representações do objeto matemático pondo em discussão seu significado.

A conversão de registro para forma algébrica é solicitada na terceira e quarta questões pedindo aos alunos que definam a expressão algébrica que permita obter a área ou a medida dos lados do quadrado. As mudanças de quadros e as discussões estimuladas pela atividade procuram demonstrar a dependência entre as duas variáveis, lado x área. Cremos estar enfatizando a variação como o conhecimento “Pesquisa-novo implícito”*,* gerada na atividade anterior, dando condições de aprimorar ainda mais esse campo conceitual . Esperamos que a discussão entre os alunos, ao final da atividade leve a “Explicitação-institucionalização local” desse conhecimento que será formalizado pelo professor, Institucionalização, dando à variação o estatuto de objeto. Finalizando com a definição das restrições de existência da relação e as convenções envolvidas. Entre estas convenções, temos a que se refere à medida do lado do quadrado que deve sempre ser positiva, logo l > 0 o que terá implicação futura na definição do conceito de domínio.

A relação de dependência e a distinção entre as formas de representar essa dependência são as ferramentas desenvolvidas na atividade anterior que procuramos mobilizar e aprofundar nessa atividade. Procuramos analisar grandezas diferentes das analisadas na primeira atividade, visto que como salienta Sierpinska (1992), um dos obstáculos epistemológicos importante à aquisição do conceito função é a tendência de concentrar o estudo nas variáveis que estão sofrendo a variação e não na variação como fenômeno. Nosso objetivo é destacar a variação e a correspondência como ponto central na atividade não apenas a dependência criando as condições para a futura definição do objeto função.

Parte 2 - Resolução e análise da atividade

São dadas as retas $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$ que formam entre si um ângulo de 45°. Considere $\overrightarrow{Os}$ uma reta numerada em , e um ponto A, qualquer de $\overrightarrow{Or}$. Considere o quadrado formado com um dos lados sobre $\overrightarrow{Os}$ cujo medida do lado seja a distância do ponto A a $\overrightarrow{Or}$ como o indicado na figura.



Admitindo que o ponto A se desloca na semi-reta $\overrightarrow{Or}$ e que a distância entre o ponto A e $\overrightarrow{Os}$ seja o indicado na primeira linha da tabela abaixo.

1) Calcule a área do quadrado e complete a tabela

Medida do lado em cm	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	quadrado de lado l
Área em cm^2	*1,00*	*1,25*	*4,00*	*6,25*	*9,00*	*12,25*	*16,00*	*25,00*	l^2

Os valores da tabela acima representam uma relação entre o lado do quadrado e sua área.

a) Podemos dizer que a área do quadrado depende da medida do seu lado? Por quê?

Resposta: Sim, a medida da área do quadrado depende da medida de seu lado pois variando a medida do lado a área também sofre variação.

b) E medida do lado depende da área do quadrado? Por quê?

Resposta: Também depende uma vez que a variação na medida da área do quadrado implica na variação da medida do seu lado.

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente? Por quê?

Resposta: A dependência da área em relação ao lado, pois para que ocorra variação na medida da área temos que fazer variar a medida do seu lado.

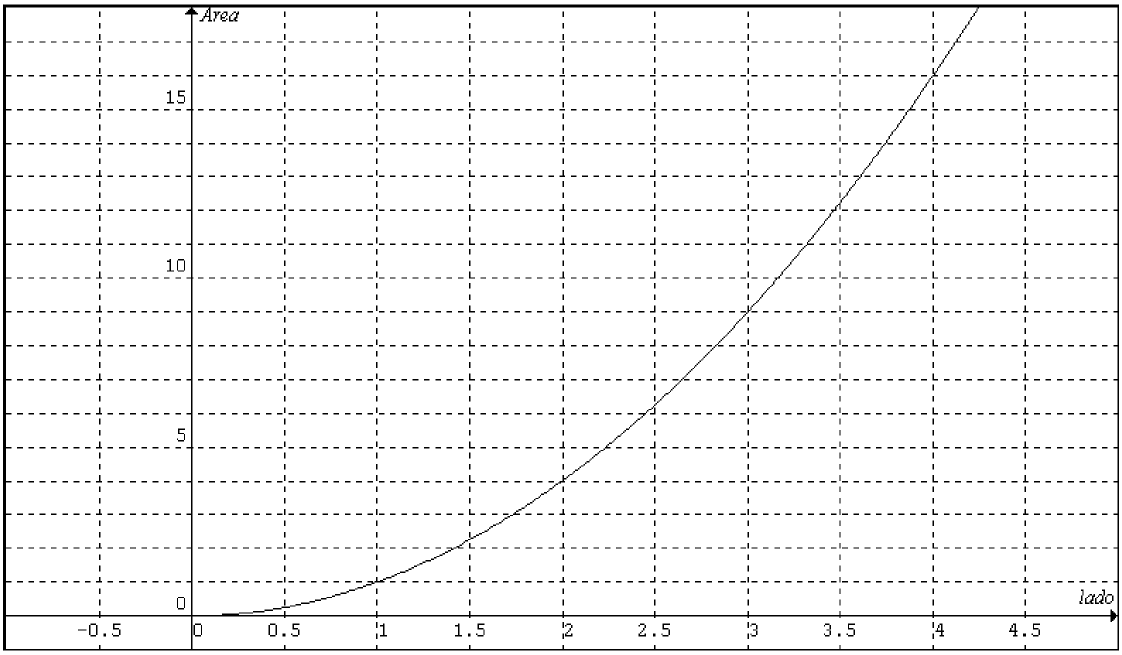
d) Podemos considerar os valores representados na tabela acima como conjuntos? Identifique esses conjuntos. As características dos conjuntos são as mesmas dos da primeira atividade? Discuta com seu colega e justifique a resposta .

Resposta: Sim, tanto a medida dos lados quanto a medida da área são expressas por número Reais positivos. Entretanto as características não são as mesmas pois os elementos dos conjuntos da primeira atividade eram formados por número Naturais enquanto dessa atividade são número Reais.

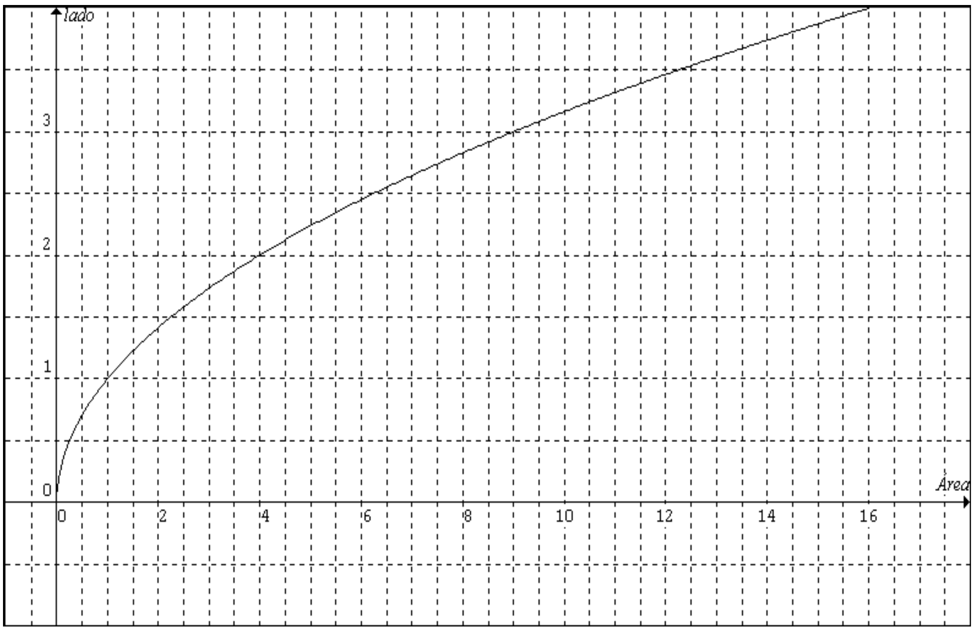
A situação proposta induz o aluno a realizar uma mudança do registro geométrico para o numérico com o preenchimento dos dados na tabela como solicitado. A forma com que a atividade foi elaborada procura dar ênfase na variação do lado do quadrado, que ocorre com a mudança na posição do ponto A. Esperamos como estratégia de solução a aplicação da fórmula da área de um quadrado, visto que sua aplicação é relativamente comum em nosso meio escolar. Nos itens a, b e c da primeira questão procuramos enfatizar a dependência como objeto de estudo ressaltando que a área depender do lado é de mais fácil compreensão que a dependência inversa. Novamente colocamos em discussão a idéia dos valores obtidos como elementos de um conjunto visando à futura institucionalização do conceito função.

2) Represente graficamente os dados da tabela acima posicionando:

a) O lado do quadrado no eixo das abscissas.



b) A área do quadrado no eixo das abscissas.



c) Faz sentido unir os pontos obtidos nos dois gráficos? Por quê?

Reposta: Sim, uma vez que a medida dos lados do quadrado e da área são grandezas contínuas.

3) Qual a expressão algébrica que permite obter a área do quadrado a partir da medida de seus lados?

Resposta: $A = l^2$

4) E a que permite obter o lado a partir de área?

Resposta: $l = \sqrt{x}$

As três questões acima tem por objetivo levar o aluno a representar a situação proposta no registro gráfico, questão dois e no registro algébrico, questão 3 da primeira atividade, colocando em discussão o fato dos conjuntos envolvidos serem formados por grandezas contínuas o que implica na necessidade da ligação dos pontos representados para expressar essa continuidade.

5) Sendo o ponto A móvel ele poderia ser posicionado abaixo da reta s. Admitindo a figura como parte de um sistema cartesiano qual seria a medida do lado e da área do quadrado quando o ponto A tiver coordenada (-2,-2)?

Resposta: A medida do lado do quadrado será 2 u e da área 4 u^2.

Com essa questão, utilizamos a variação do ponto A como estratégia para variar a medida do lado do quadrado e dessa forma discutir a variação como objeto de estudo. A variação do ponto sobre a reta, como formulado nas atividades possui atributos, como:

- O ponto A pode assumir qualquer posição, logo podemos pôr em discussão a continuidade.
- O ponto A pode assumir, no plano cartesiano, a posição (-2, -2), mas a grandeza, medida do lado de polígonos, no caso, o quadrado, é expressa apenas por valores positivos.

Esperamos que esses atributos sejam colocados em discussão, pelos alunos, na segunda etapa da atividade, caso isto não ocorra a questão deverá ser levantada pelo professor.

6) Se tivesse que optar por uma das relações de dependência acima qual delas daria preferência? Por quê?

Resposta: A dependência da área em relação ao lado do quadrado, pois para variar a medida da área temos que variar o tamanho do lado.

Com essa questão, fechamos a atividade, reforçando a dependência da área em relação ao lado do quadrado, que terá grande influência na futura institucionalização do conceito de função na definição do conceito de Domínio, Contra Domínio e Imagem de um função.

4.4.2.2 Análise a posteriori da segunda atividade.

Dos dezesseis alunos que participaram da primeira atividade, dois não compareceram, sendo formado quatro grupo de três alunos e um grupo de dois. Os trabalhos foram iniciados da mesma forma que na atividade anterior, com a definição dos tempos de resolução das questões propostas, discussão entre os alunos e fechamento por parte do professor. A dificuldade inicial dos alunos se relacionou com o fato do ponto A ser móvel sobre $\overrightarrow{Or}$. Mas após uma rápida interação entre os grupos a dificuldade foi superada. Não se pode afirmar que tenham mobilizado conhecimentos relacionados com a distância entre um ponto e uma reta. Aparentemente a forma com que a tabela foi proposta, fornecendo valores para a medida do lado do quadrado, parece ter agido como uma efeito topázio[5], não sendo necessário grande esforço por parte do aluno no sentido de iniciar a atividade.

A expressão algébrica envolvida na atividade já era conhecida o que auxiliou o início e desenvolvimento da mesma. Isso nos permite concluir que os alunos foram capazes de mobilizar conhecimentos relacionados ao campo conceitual envolvendo a área do quadrado, fazendo uso desses conhecimentos como ferramenta na obtenção dos dados que permitiram completar a tabela proposta. Ao serem questionados sobre qual a relação de dependência mais evidente foram unânimes em afirmar que a área depender do lado era a mais evidente que a relação contrária, reforçando assim nossa convicção sobre a mobilização desse campo conceitual. Os registros dos alunos indicam que dois grupos concluíram que não se poderia fazer a união dos pontos na representação gráfica, como na atividade anterior. Entretanto no decorrer das discussões na segunda etapa da atividade foram convencidos da necessidade da união por seus colegas, que destacaram que a medida do lado do quadrado poderia assumir valores decimais, o que não poderia ocorrer na primeira atividade.

---

5 O efeito Topázio é descrito como um dos efeitos do contrato didático em que o professor procurando ajudar o aluno que não consegue responder satisfatoriamente a uma questão formulada fornece pequenas "dicas" com o objetivo de auxiliar o aluno nesta resposta

A quinta questão foi a que gerou maior discussão durante toda a sessão, envolvendo todos os alunos participantes da pesquisa na busca de identificar qual seria a medida do lado de um quadrado que tivesse o ponto A na coordenada (-2,-2). A questão só foi resolvida com a intervenção do professor que alertou para que os alunos observassem qual o ângulo formado entre r e s. Essa informação permitiu a percepção por parte dos alunos de que a medida do lado quadrado eqüivaleria, em módulo, aos valores da coordenada. Logo, num quadrado cujo vértice A estivesse posicionado na coordenada (-2,-2) a medida do lado seria 2 u e a área 4 u^2. Para chegar a essa conclusão, um dos alunos, observou que 45^o é o ângulo formado pela bissetriz, do quadrado e imaginado o segmento $\overline{OA}$ como sendo essa bissetriz definiríamos um triângulo retângulo isósceles, obtendo assim a informação desejada. Essa observação nos permite concluir, que pelo menos esse aluno, conseguiu mobilizar o campo conceitual relacionado aos quadriláteros.

As discussões na segunda etapa da atividade foram rápidas uma vez que não houve grande divergência entre as conclusões dos grupos. A questão envolvendo a união ou não dos pontos gerou uma pequena discussão, mas resolvidas rapidamente, pois um dos alunos lembrou aos colegas que podemos usar decimais para a medida do lado do quadrado. Esse mesmo aluno questionou do professor se a figura gerada era “um tipo de parábola”, e foi retrucado por outro colega que disse “não ela dá uma reta”. Nesse instante o professor intervém e pede para que os alunos observem a forma como a área e o lado variam, tanto na tabela, quanto na representação gráfica. Após essa análise, o aluno que defendia que seria uma reta afirma: “É, parece que vai ser uma curva”. O professor finaliza a discussão institucionalizando, “realmente temos uma figura que descreve uma curva, essa figura que eqüivale ao ramo direito de uma curva maior denominada de parábola”.

A variação foi posta em discussão pelo professor, não gerando grandes discussões, os alunos foram unânimes em afirmar que o lado do quadrado aumentava ou diminuía à medida que o ponto A era deslocado sobre r. Ao serem questionados, qual a medida do lado e a área quando o ponto A estivesse por abscissa (– 4), afirmaram que seriam “lado 4 u e área 16 u^2”, o que permite concluir que os objetivos envolvendo a variação e a medida do lado do quadrado foram atingidos. A fórmula da área já era de domínio dos alunos, tanto que esses não encontraram a menor dificuldade para expressar algebricamente essa relação.

Aproveitando-se dessa facilidade, o professor introduz a notação $A(l) = l^2$, definindo as convenções relativa à representação.

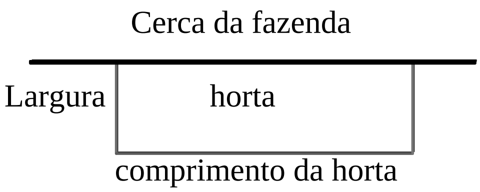
Na terceira etapa da atividade, relativa à institucionalização, o professor definiu a variação entre o lado quadrado e a área como a idéia central da mesma. Destacou o fato de que só podemos fazer uso de números positivos quando trabalhamos com grandezas envolvendo lado e área de figuras planas. Procurou mostrar as formas de representações envolvidas na atividade. Ressaltou a distinção entre as representações e a idéia relacionada à variação.

Da análise do que foi exposto acima podemos inferir que os alunos, além dos conhecimentos mobilizados na atividade anterior parecem ter:

- Utilizado como ferramenta os conhecimentos envolvendo o cálculo da área de um quadrado.
- Expressado corretamente na forma algébrica a relação entre o lado e a área.
- Percebido a relação de dependência da área em relação ao lado.
- Percebido que a dependência do lado em relação a área envolve dificuldades maiores que a anterior.

4.4.3. Terceira Atividade

Dispondo de 28 m de tela para cercar uma área, um fazendeiro pretende construir para sua horta e querendo ganhar espaço irá fazer uso de uma das cercas de sua fazenda obtendo uma horta como o modelo abaixo



1) Complete a tabela abaixo

Largura (em m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
comprimento (em m)														
Área da horta (A)														

Os valores da tabela acima representam uma relação entre largura e a área da horta.

a) Podemos dizer que a área da horta depende da largura? Por quê?

b) E a largura, depende da área da horta? Por quê?

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?

d) Qualquer que seja a medida da largura a medida da área é única?

e) Qualquer que seja a medida da área a medida da largura é única?

f) Para que não se fique com dúvida sobre qual o resultado a ser obtido é melhor calcular a área conhecendo-se a medida da largura da horta ou calcular a largura conhecendo-se a área? Por quê?[6]

g) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Identifique seus elementos.

2) Represente graficamente os dados da tabela acima, que relacionam largura e área.

a) Posicionado a largura no eixo das abscissas.

b) Posicionado a largura no eixo das ordenadas.

c) Faz sentido unir os pontos obtidos no gráfico

d) Em qual dos dois gráficos, elaborados acima, a análise é mais simples? Por quê?

e) Na sua opinião numa relação entre duas variáveis, a unicidade (resposta única) para qualquer valor de uma delas é fundamental para que não haja dúvida quanto a validade do resultado encontrado?

f) Poderíamos ter certeza da medida escolhida numa relação em que a variável pode apresentar dois valores distintos para uma mesma correspondência?

3) Qual a expressão algébrica que permite calcular a área da horta?

4) A atividade foi apresentada através de um texto e uma figura e os dados obtidos representados em forma de tabela, gráfico e uma expressão matemática. Podemos dizer que todas essas representações eqüivalem ao mesmo problema (objeto de trabalho). Qual ou quais, os mais indicados para responder as questões abaixo.

a) Existem valores que se repetem?

b) Existe um valor máximo?

c) Qual a área para uma largura de 4,5 m na cerca da horta?

d) A que se refere o problema?

4.4.3.1 Análise a priori da terceira atividade

Parte 1- Análise geral

A questão proposta é tradicionalmente encontrada nos livros didáticos como aplicação do estudo dos pontos críticos de uma função do segundo grau. O

---

[6] A questão foi reformulada considerando as observações tanto do orientador, como da banca de qualificação, sobre a subjetividade da expressão “confiável”. Originalmente a questão era a seguinte: Para se estabelecer uma relação “confiável”, qual das duas é a mais indicada?

problema geralmente é trabalhado como exercício de aprofundamento, partindo-se do princípio de que o aluno já domine o conceito e as propriedades da função estudada. Mas na prática a experiência tem demonstrado que isto não é verdadeiro e geralmente tal problema é incompreensível para a maioria dos alunos para os quais o problema é proposto.

A escolha do exercício e o momento de sua utilização na seqüência deve-se à necessidade do aprofundamento na direção da conceituação da função. As grandezas envolvidas são as mesmas da atividade anterior, variação da área em função de seu lado. Entretanto, a situação proposta inclui uma propriedade nova, a da repetição de valores da área, à medida que variamos a largura da horta. Esta nova propriedade é o foco das discussões desta atividade. O fato de ocorrer a repetição na medida da área dificulta a previsão sobre sua largura. É essa dificuldade de previsão que pretendemos destacar como inconveniente para a formulação do novo objeto matemático, o conceito de função.

Na quarta questão da atividade procuramos destacar os atributos da forma de representação utilizada na mesma. Nela questionamos, por exemplo, qual a representação mais indicada para se visualizar o valor máximo para a área da horta. Com isso, objetivamos não só mostrar a utilidade de cada forma de representação, como colocar em discussão o fato que não são as formas de representações nosso objeto de estudo, na situação proposta, mas a variação entre o lado da horta e sua área. Para reforçar essa distinção formulamos a pergunta, item d da quarta questão, “A que se refere o problema?”. Com ela pretendemos voltar o aluno a refletir sobre o enunciado inicial abrindo a possibilidade de discussão na segunda etapa sobre do verdadeiro objetivo da atividade. A relação de dependência entre duas variáveis e a variação como elemento comum a essas relações.

Nesse problema os alunos mobilizarão como ferramenta conhecimentos antigos envolvendo a área de retângulo. A variação na largura da horta possibilitaria a exploração das dependências envolvendo não só a área, mas também o comprimento. Procuramos enfatizar a relação entre a largura e a área devido a duplicidade de valores na largura para uma mesma área. Além do conceito de área do retângulo, esperamos mobilizar também os seguintes conhecimentos:

- conceito de diferença;
- operação com números Reais;
- noção de largura e comprimento (dimensão);

- propriedades do retângulo;
- cálculo da área de um retângulo;
- preenchimento de uma tabela;
- representação cartesiana;
- representação algébrica,
- relações de equivalência na igualdade.

As mudanças nas formas de representação utilizadas na atividade reforça a característica de levar o aluno a analisar a questão sobre vários pontos de vista. Atenção especial é dada quando se levanta a questão sobre a dificuldade apresentada na análise da representação, quando a área é posicionada no eixo das abscissas. A duplicidade de valores para uma mesma área fica evidenciada reforçando a futura conceituação e a definição das convenções associadas ao conceito de função como relação de “confiança”.

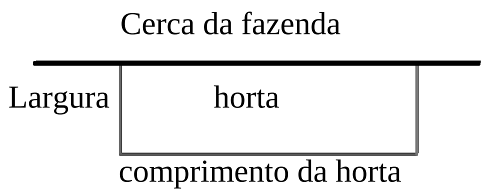
No pré-teste aplicado como parte do projeto de elaboração da atividade, esta característica foi observada pelos alunos que destacaram a necessidade de resposta única para que haja confiança em uma relação.

O novo-implícito que esperamos que os alunos desenvolvam refere-se à falta de “confiabilidade” da relação quando existe duplicidade de valores, elemento fundamental no conceito moderno de função. A percepção gráfica desta duplicidade é outro novo implícito que desejamos explorar. No pré-teste, quando apresentamos o gráfico da equação $x – y^2 = 0$, na sétima atividade da seqüência, observamos a importância desta representação. Essa certeza se deve ao posicionamento de um dos alunos durante o desenvolvimento dessa atividade quando trabalhamos a quinta atividade na etapa da dialética “Familiarização-reutilização numa situação nova”, que afirmou textualmente. “No gráfico, y não está em função de x, mas podemos considerar que x está em função de y”.

A terceira etapa “Explicitação-institucionalização local” dos novos conhecimentos se dará com a discussão entre os alunos das conclusões a que chegaram. Isto permitirá a homogeneização destes conhecimentos. O fechamento da atividade ocorrerá com a “Institucionalização-estatuto de objeto” pelo professor que formalizará, entre as diversos conhecimentos gerados, aqueles que deverá descontextualizar. Nessa atividade em particular, esperamos estar trabalhando a unicidade e as idéias associadas à noção de imagem de um dado valor da medida do lado, que serão úteis para a definição final de função. Uma nova informação será acrescentada com a introdução, durante a institucionalização da notação $A(l)=28.l - l^2$ para expressar a área do horta em função de seu lado, que se espera irá facilitar a introdução futura das notações envolvendo o novo conceito.

Segunda parte – Resolução e análise da atividade

Dispondo de 28 m de tela para cercar uma área, um fazendeiro pretende construir para sua horta e querendo ganhar espaço irá fazer uso de uma das cercas de sua fazenda obtendo uma horta como o modelo abaixo



1) Complete a tabela abaixo

Largura (em m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
comprimento (em m)	*26*	*24*	*22*	*20*	*18*	*16*	*14*	*12*	*10*	*8*	*6*	*4*	*2*	*0*
Área da horta (A)	*26*	*48*	*66*	*80*	*90*	*96*	*98*	*96*	*90*	*80*	*66*	*48*	*26*	*0*

O problema é apresentado em linguagem natural ocorrendo a primeira mudança na representação fazendo uso de uma figura geométrica. Justificamos essa "ajuda" tomando como base os mesmos argumentos utilizados na segunda atividade. Em seguida induz-se a uma nova mudança na forma de representação pedindo aos alunos que completem a tabela que já apresenta os valores para medida da largura, cabendo ao aluno obter a medida do comprimento e da área da horta. Da forma que foi proposta a tabela induzimos a estratégia a ser utilizada pelo aluno dentro do quadro numérico fazendo uso das seguintes etapas:

- calcular a medida do comprimento subtraindo do comprimento da tela duas vezes a largura.
- calcular a medida da área aplicando a fórmula da área do retângulo.

A mesma situação poderia ser resolvida dentro do quadro algébrico (funcional) , com o aluno obtendo a expressão para a área $A = l.(28 - l)$ cuja solução estaria mais coerente com o estudo envolvendo funções. Entretanto esta estratégia não é esperada uma vez que nosso objetivo é exatamente disponibilizar essa nova ferramenta, portanto consideramos que essa não seja de domínio de público alvo, alunos da oitava série do Ensino Fundamental.

Os valores da tabela acima representam uma relação entre largura e a área da horta.

a) Podemos dizer que a área da horta depende da largura? Por quê?

Resposta: Sim, variando a largura da horta a área também varia.

b) E a largura, depende da área da horta? Por quê?

Resposta: Também depende, pois só consigo alterar a área da hortas se também alterar a sua largura, uma vez que o tamanho da tela é sempre o mesmo.

c) Se as duas dependências forem possíveis, qual a mais evidente?

Resposta: A mais evidente é a área dependendo da largura.

d) Qualquer que seja a medida da largura a medida da área é única?

Resposta: Sim, para cada valor da largura temos uma única medida para a área.

e) Qualquer que seja a medida da área a medida da largura é única?

Resposta: Não, Existe medida de área, como a de 60 m^2, que apresenta dois valores diferentes para a medida da largura.

f) Para que não se fique com dúvida sobre qual o resultado a ser obtido é melhor calcular a área conhecendo-se a medida da largura da horta ou calcular a largura conhecendo-se a área? Por quê?

Resposta: Calcular a medida da área conhecendo-se a largura da horta pois a medida da área obtido é única.

g) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Identifique seus elementos.

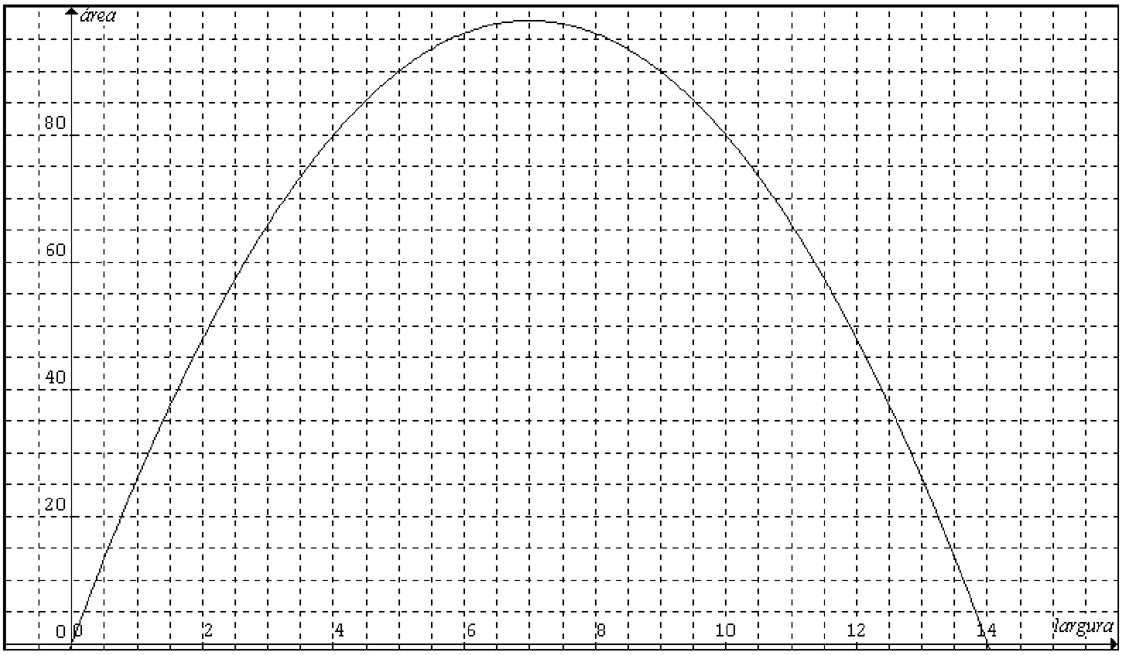
Resposta: $largura = \{l \in \quad / \quad 0 \leq l \leq 14\}$

$Área = \{A \in \quad / \quad 0 \leq A \leq 98\}$

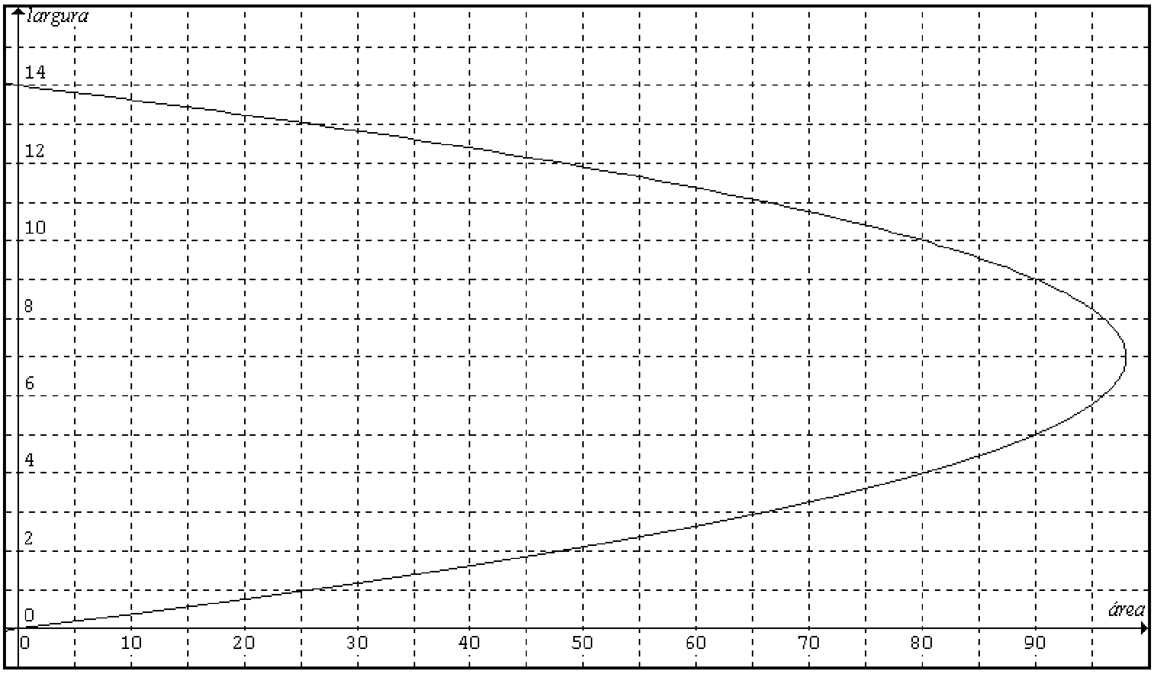
Como nas atividades anteriores, a primeira questão procura pôr em discussão à dependência como fenômeno a ser estudado, e não a variação da área em relação a largura da horta. Entretanto esse problema apresenta um dado novo que é o da repetição de medidas na grandeza área do retângulo. Nosso objetivo é o de induzir o aluno a perceber a importância de uma única correspondências para qualquer que seja o valor assumido pelos elementos do conjunto que será definido como domínio da função. Estamos tentando por em evidência a unicidade no domínio como condição básica para a futura formulação do conceito de função.

2) Represente graficamente os dados da tabela acima, que relacionam largura e área.

a) Posicionado a largura no eixo das abscissas.



a) Posicionado a largura no eixo das ordenadas.



b) Faz sentido unir os pontos obtidos no gráfico?

Resposta: Sim, pois tanto a largura quanto a área são grandezas contínuas

c) Em qual dos dois gráficos, elaborados acima, a análise é mais simples? Por quê?

Resposta: No gráfico em que a largura está na horizontal, pois qualquer valor da abscissa apresenta área única e podemos observar que a área aumenta até atingir a largura 7 m e depois diminui.

d) Na sua opinião, numa relação entre duas variáveis, a unicidade (resposta única) para qualquer valor de uma delas é fundamental para que não haja dúvida quanto a validade do resultado encontrado?

Resposta: Sim, pois se a relação apresentar mais de um valor se correspondendo com uma mesma variável teremos dificuldade em qual delas escolher para fazer uso como resposta.

e) Poderíamos ter certeza da medida escolhida numa relação em que a variável pode apresentar dois valores distintos para uma mesma correspondência?

Resposta: Não.

Como nas atividades anteriores a segunda questão têm por objetivo trabalhar as representações do objeto função criando as condições para o estabelecimento do quadro funcional. Nessa atividade esperamos estabelecer as bases para as futuras convenções relativas a essa representação, elementos do conjunto Domínio posicionados no eixo das abscissas. Para induzir o raciocínio do aluno formulamos a questão "*Em qual dos dois gráficos, elaborados acima, a análise é mais simples? Por quê?*" no item "d". Com ela estamos fechando um trabalho iniciado na primeira atividade, em que procurava mostrar que a leitura dos dados na representação gráfica fica facilitado se a análise da variação ocorrer na mesma direção e sentido de nossa escrita, horizontal e da esquerda para a direita.

As perguntas formuladas nos itens "e" e "f" procura reforçar essa futura convenção. Esperamos que os alunos percebam que o gráfico que apresenta a medida da largura no eixo das abscissas mostram as propriedades da variação à medida que deslocamos o olho da esquerda para a direita acompanhando o eixo Real. Percebe-se nesse movimento que a função é crescente até atingir um valor máximo, para a largura $l = 7\ m$, passando a ser decrescente a partir desse ponto.

1) Qual a expressão algébrica que permite calcular a área da horta?

Resposta: $A(l) = l\,(28 - 2l)$

Com essa questão estamos solicitando que os alunos realizem uma mudança na forma de representação expressando algebricamente a área da horta. A estratégia que esperamos seja utilizada pelos alunos é a da composição da fórmula da área do retângulo com a relação que esses consigam estabelecer entre o tamanho da tela, a largura e o comprimento da horta, assim:

Considerando por "*A*", a área da horta. "*l*" sua largura e "*c*" seu comprimento, temos que: $A = l \cdot c$

Como $c = 28 - 2l$, temos: $A = l \cdot (28 - 2l)$, definindo assim a expressão desejada. Procurando construir as condições para o estabelecimento de um novo quadro, o quadro funcional será introduzido na terceira etapa dessa atividade, relativa a institucionalização, a representação $A(l) = l. (28 - 2l)$.

4) A atividade foi apresentada através de um texto e uma figura e os dados obtidos representados em forma de tabela, gráfico e uma expressão matemática. Podemos dizer que todas essas representações eqüivalem ao mesmo problema (objeto de trabalho). Qual ou quais, os mais indicados para responder as questões abaixo.

a) Existem valores que se repetem?

Resposta: A tabela e o gráfico.

b) Existe um valor máximo?

Resposta: O gráfico

c) Qual a área para uma largura de 4,5 m na cerca da horta?

Resposta: A expressão algébrica.

d) A que se refere o problema?

Resposta: A apresentação do problema em linguagem natural.

Com essa questão, fechamos a atividade, pondo em discussão os atributos de cada representação do objeto estudado. Esperamos que essa questão leve os alunos a refletirem sobre essas representações e o papel que cada uma delas desempenham na compreensão do objeto estudado. O desenvolvimento de estratégias de representações que permitissem a manipulação do objeto função foi um dos grandes obstáculos epistemológicos à construção desse conceito. Temos consciência de que não será essa questão que evitará o surgimento desses obstáculos, mas cremos que ela será o ponto de partida para o enfrentamento que esperamos ser capazes de propor aos alunos com o objetivo de buscar sua superação. Buscando a superação, pelo menos parcial desses obstáculos, retomaremos esses tipos de questões nas próximas atividades.

4.4.3.2 Análise a posteriori da terceira atividade

Doze alunos participaram dessa atividade, formando quatro grupos de três alunos. Não se observaram dificuldades de interpretação da atividade por parte dos alunos que conseguiram completar corretamente os dados solicitados na tabela. Julgamos que isto, em parte, se deveu a observações realizadas no pré-teste com alterações na construção da tabela. Na proposta original a primeira linha da tabela era denominada de largura x e a segunda linha largura l. As alterações na estrutura da tabela, com a utilização dos termos largura comprimento em vez de largura x e largura l parece ter sanado essa dificuldade de interpretação. Dessa forma as dificuldades observadas no pré-teste com referência à determinação do comprimento da horta não ocorreu facilitando o desenrolar da atividade. A percepção de que o valor da área, que inicialmente aumentava, diminuía a partir de um certo valor, provocou uma certa inquietação nos alunos. Fato que foi superado com a confirmação pelos cálculos por todos os grupos, evidenciando que não havia erro. A segurança foi maior quando perceberam que uma das questões levantava exatamente essa possibilidade.

As questões envolvendo a dependência entre as grandezas também não geraram problemas de interpretação, uma vez que já haviam sido trabalhadas nas atividades anteriores. Mas a questão envolvendo a confiabilidade[7] de uma relação que apresentasse duas correspondências, questão esta que não apresentou problemas de compreensão no pré-teste, não foi compreendida pelos alunos envolvidos na atividade. A compreensão só foi obtida quando foram questionados pelo professor sobre qual seria o significado da expressão “confiar em um resultado”. Após uma breve discussão, concluíram, de forma quase unânime, que a relação que apresentava maior confiança nos resultados era a área dependendo da largura. Instados a se posicionar sobre a importância da unicidade para que não exista dúvida sobre a validade da previsão, os alunos foram categóricos na necessidade dessa unicidade. A definição da expressão algébrica que determina a área a partir da largura da horta só foi obtida por um dos grupos. Os demais não obtiveram a expressão desejada, o que nos leva a concluir que nem todos alunos conseguiram

[7] Como observamos na análise a prióri re-elaboramos a atividade buscando maior rigor na formulação do enunciado da questão. Entretanto mantemos em nossa análise a situação que realmente foi proposta para os alunos uma vez que essa alteração pode ter interferência nos resultados dessa pesquisa.

mobilizar plenamente os conhecimentos envolvendo as representações algébricas e as relações de equivalência nessa atividade.

Um dos grupos não conseguiu finalizar a quarta questão. Dos três grupos que finalizaram dois não parecem ter lido com atenção o enunciado, visto que em vez de responder à questão formulada, deram como resposta valores numéricos. A resposta do item "d" da quarta questão, em que se questionava "A que se referia a atividade" entretanto pode ser considerada satisfatória, com o grupo que obteve a expressão algébrica, explicitando que a atividade analisava a variação da área da horta à medida que variamos sua largura.

A segunda etapa da atividade, equivalente à terceira fase Explicitação-institucionalização local da dialética, foi coordenada pelo professor que leu os enunciados das questões e solicitou para que os alunos expusessem suas respostas. As questões iniciais não apresentaram dificuldade, com os alunos tendo obtidos os dados da tabela com facilidade e elaborado as representações gráficas solicitadas. Durante as discussões, todos alunos concordaram que tanto a área dependia da largura, quanto a largura dependia da área mas "A área dependendo da largura é mais evidente", afirmaram os alunos. O debate sobre a confiabilidade em uma relação que apresenta mais de uma correspondência para uma determinada variável parece ter atingido o objetivo desejado. Aparentemente os alunos compreenderam a necessidade de se ter resposta única para que se possa confiar no resultado.

Na questão referente a qual dos gráficos a análise era mais simples, apenas três grupos responderam e de forma breve sem justificar sua posição. Dois dos grupos optaram pela primeira representação, em que a largura está disposta no eixo das abscissas e o terceiro pela segunda representação. Registramos a seguir o diálogo entre o professor e os alunos na discussão envolvendo essa questão. Identificaremos por "AD" os alunos que compunham o grupo que mais participou dessa discussão, o mesmo grupo que obteve a expressão algébrica para a área, e por "A" os alunos dos demais grupos.

P: Em qual dos gráficos a análise é mais simples?

A: Os dois são equivalentes, a idéia é a mesma.

P: Mas os gráficos estão em posição diferentes. Essa mudança de posição não altera nada?

A: Não, muda só a forma da figura.

P: Em qual dos gráficos a relação é a mais “confiável”?

AD: Na primeira. Mostrando com a mão o gráfico com a largura na abscissa.

P: No segundo gráfico temos as mesmas variáveis, então por que o primeiro é o mais confiável?

A: Porque ela dificulta um pouco a visão, parece que vai para frente.

P: Analisando os dois gráficos, qual deles parece me trazer mais informação?

A: Esse. (apontando para gráfico com a largura na abscissa)

P: Todos concordam que o gráfico com a largura na abscissa é melhor para analisar?

A: Sim.

AD: O segundo gráfico (com a largura no eixo das ordenadas) confunde um pouco, porque quando a x = 48 tem dois valores iguais.

P: Qual ponto?

AD: O ponto de abscissa dois tem o mesmo valor que no de abscissa doze. (Se referindo ao gráfico em que a largura está na abscissa.)

P: Então em qual dos dois gráficos a análise é mais simples.?

AD: No primeiro.

Observa-se desse diálogo que inicialmente consideravam que as duas representações eram equivalentes, aparentando não terem compreendido a questão, mas à medida que vão sendo questionados cria-se a percepção, por parte dos alunos envolvidos na discussão, que analisar o gráfico em que a variável largura está disposta no eixo das abscissas parece trazer mais informações que a representação contrária.

Como observamos da análise dos registros referentes à primeira etapa da atividade, apenas um dos grupos obteve a expressão que permite obter a área da horta. No desenvolvimento das discussões, esse grupo teve papel fundamental para uma determinação coletiva dessa representação, visto que a primeira resposta sobre qual era essa expressão foi: Área igual a base vezes altura. Ao serem questionados qual seria base para a largura 8 m responderam rapidamente: 12 m. registando-se o seguinte diálogo:

P: Como eu posso saber que a base mede 12 m.

AD: Porque a base é 28 - l

P: Todos concordam com o AD.

Silêncio!

P: Se usarmos 8 m teremos 28 – 8 = 20 m. e não 12 m. Por que não deu certo?

AD: Duas vezes o lado.

P: Logo como fica a fórmula.

A: $A = l\ (28 - 2\ l)$.

A conclusão final não foi do grupo “AD” cujos alunos participavam ativamente das discussões, mas não se pode dizer que não tenha sido um de seus componentes que tenha passado a informação para os demais colegas. Este diálogo permitiu a homogeneização do conhecimento como proposto pela terceira fase da dialética. O debate envolvendo a quarta questão também foi decisivo, visto que como comentado anteriormente, não parece ter ficado clara a questão para alguns alunos. A intervenção do grupo que respondeu corretamente a questão, direcionou a discussão de forma a atingir o objetivo desejado. Isso permitiu ao professor institucionalizar a idéia da variação como a chave da atividade e as representações como formas de se trabalhar essa idéia.

Na fase final da atividade, o professor institucionalizou a dependência da área da horta em função de sua largura. Destacou a importância da confiança nos resultados como elemento importante para se efetuar previsão num fenômeno envolvendo variação. Ressaltou também que além da necessidade da correspondência ser única, existe a necessidade de se ter certeza da existência dessa correspondência para qualquer valor envolvido no fenômeno. Embora não se tenha formalizado a relação funcional, já estamos preparando as bases para que isto seja feito nas atividades seguintes. Cremos estar seguindo os passos da superação dos obstáculos históricos. A relação funcional parece ter sua base construída a partir dos estudos das relações envolvendo variação pelos filósofos de Oxford e Paris. Aliado a esse estudo temos a criação de uma representação gráfica para estas variações por Oresme e o desenvolvimento da representação algébrica por Viète. Considerando estes aspectos, o professor, na institucionalização, introduziu a notação $A(l)$ na expressão que permitia calcular a área da horta e dessa forma fez uso da expressão $A(l) = l\ (28-2l)$.

Na institucionalização, o professor reafirmou o papel das representações dos objetos matemáticos como forma de se ter acesso a eles, mas procurou evidenciar a variação entre a área da horta dependendo da variação da largura como sendo o objetivo principal da atividade.

Considerando os resultados da aplicação da terceira atividade parece que podemos inferir que as alunos tenham:

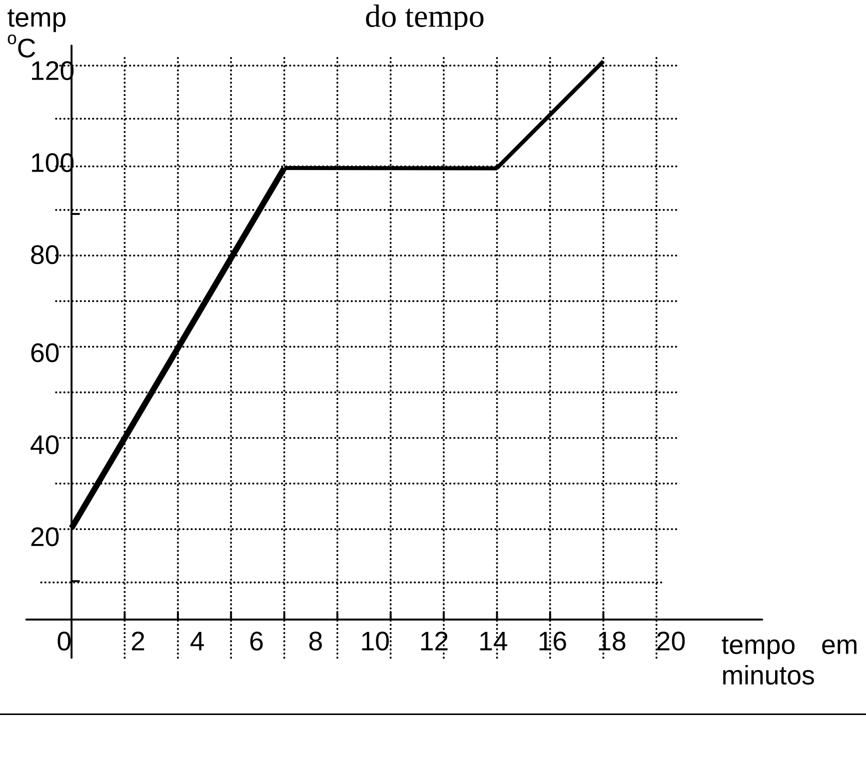
- Mobilizado como ferramenta os conhecimentos envolvendo o cálculo da área de um retângulo, embora não de forma plena, visto que boa parte dos grupos não obtiveram a expressão geral que definisse a área da horta;
- Percebido a relação de dependência da área em relação ao lado;
- Percebido que a dependência do lado em relação à área envolve dificuldades maiores que as da atividade anterior, visto que apresenta duplicidade de resposta para a maioria das áreas da horta;
- Compreendido a necessidade de que qualquer que seja o valor que se deseja definir, a correspondência deva existir e seja única.

A unicidade na correspondência e a distinção entre esta e as formas de representação da dependência são as ferramentas que procuramos enfatizar nesta atividade. Procuramos fazer uso de uma variação em que uma das variáveis apresentava dupla correspondência, uma mesma área correspondendo a dois valores para a largura da horta. Desta forma procuramos pôr em discussão a falta de "confiança" em se determinar a medida do lado a partir da área.

4.4.4 Quarta atividade

Uma amostra de água é aquecida em recipiente hermeticamente fechado tendo a variação representada no gráfico abaixo.

Variação da temperatura de uma amostra de água no decorrer do tempo



1) Com base nos dados representados no gráfico acima, complete a tabela.

tempo (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
temperatura ^{o}C											

2) Analisando os dados apresentados, tanto na tabela quanto no gráfico, responda as questões abaixo.

a) Qual a temperatura da água após 3 minutos do início do aquecimento?
b) Qual a temperatura da água após 7 minutos do início do aquecimento?
c) Qual a temperatura da água após 13 minutos do início do aquecimento?
d) Qual a temperatura da água após 17 minutos do início do aquecimento?
e) Para qualquer valor que você escolher do tempo, a temperatura será única?
f) E se você escolher uma temperatura o tempo sempre será único?
g) Existe dependência entre as variáveis tempo e temperatura?
h) O tempo de aquecimento, sempre interfere na temperatura?
i) A temperatura, sempre, interfere no tempo de aquecimento?
j) Poderíamos dizer que a variação da temperatura é sempre proporcional ao tempo?
k) E o tempo é sempre proporcional à variação da temperatura?
l) Se você fosse definir uma relação de dependência, por qual das duas você optaria?
m) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Liste seus elementos.

3) É possível definir uma única expressão algébrica para representar a variação acima?

4) Encontre as expressões algébricas que permitam obter a temperatura da água, indicando qual a faixa do conjunto que esta é válida.

5) Para ter um valor aproximado no instante 5,5 minutos, qual das representações você consultaria? Qual seria esta temperatura?

6) Para obter a temperatura exata no instante 5,5 minutos, qual das representações é a mais indicada? Qual seria esta temperatura?

7) Liste as características em comum entre relações das quatro atividades últimas até aqui desenvolvidas.

8) Destaque quais destas características seriam as mais importantes.

9) Existe alguma característica que poderia ser estudada independente do problema envolvido? Qual?

4.4.4.1 Análise a prióri da quarta atividade

Parte 1- Análise geral

A atividade em questão se baseia na evolução histórica do conceito de função. Apesar das relações de dependência já estarem presentes com os babilônios, a compreensão e formulação mais precisa da idéia envolvida no conceito parece que só começou a se delinear por volta do século XV. Os estudos realizados nas escolas filosóficas de Oxford e Paris envolvendo fenômenos naturais como calor, luz, cor, distância, velocidade etc. criaram as condições que permitiram a percepção da variação como elemento comum a esses fenômenos. A observação de que as leis quantitativas da natureza eram relações de dependência que modernamente associamos como relação funcional começava a ser estabelecida. Simultaneamente Nicole Oresme (1323-1382) desenvolvia uma representação que podemos considerar como a precursora da representação gráfica das funções. Nessa atividade faremos uso de uma situação envolvendo um fenômeno físico, no caso, o comportamento de uma amostra de água quando submetida à ação do calor. Julgamos que o uso desse fenômeno nos permitirá mostrar a relação dependência da mesma forma que as observadas nos exemplos puramente matemáticos das atividades anteriores.

A construção da atividade a partir de sua representação gráfica tem por objetivo diversificar as formas de obtenção dos dados. Apesar de não serem reais, os dados estão de acordo com o conhecimento científico que envolve a mudança de fase no aquecimento de uma substância na fase líquida, no caso a água. Como não se faz referência ao volume da amostra, pressão atmosférica e nem a capacidade calórica da fonte de energia, podemos considerar que esses dados podem ser considerados como próximo do real. Ao mesmo tempo estaremos fazendo uso de uma mudança de quadro que não foi utilizada até aqui em nossa seqüência. Mudamos a forma de ver o objeto, observando-o sobre outro ponto de vista, de modo a não condicionar o raciocínio do aluno numa única forma de apresentação. As questões formuladas, procuram destacar a leitura e interpretação da representação apresentada, de maneira a levar o aluno a perceber que a relação tempo X variação de temperatura é uma relação funcional, muito embora esta noção ainda não esteja sendo trabalhada de forma explícita, mas implicitamente. Outro fator levado em consideração na escolha das grandezas envolvidas nas atividades é a dependência da temperatura em relação ao tempo de aquecimento. Essa dependência é clara como também é claro o fato do tempo não depender da temperatura. Julgamos que impossibilidade de se inverter as relações será fundamental no momento de se definir a noção de dependência.

A propriedade da matéria de manter a temperatura constante durante a passagem do estado líquido para o gasoso é colocado em discussão através da representação gráfica. Cremos que essa informação permite a discussão não só da unicidade mas também da possibilidade da existência de mais de uma lei para definir a relação funcional.

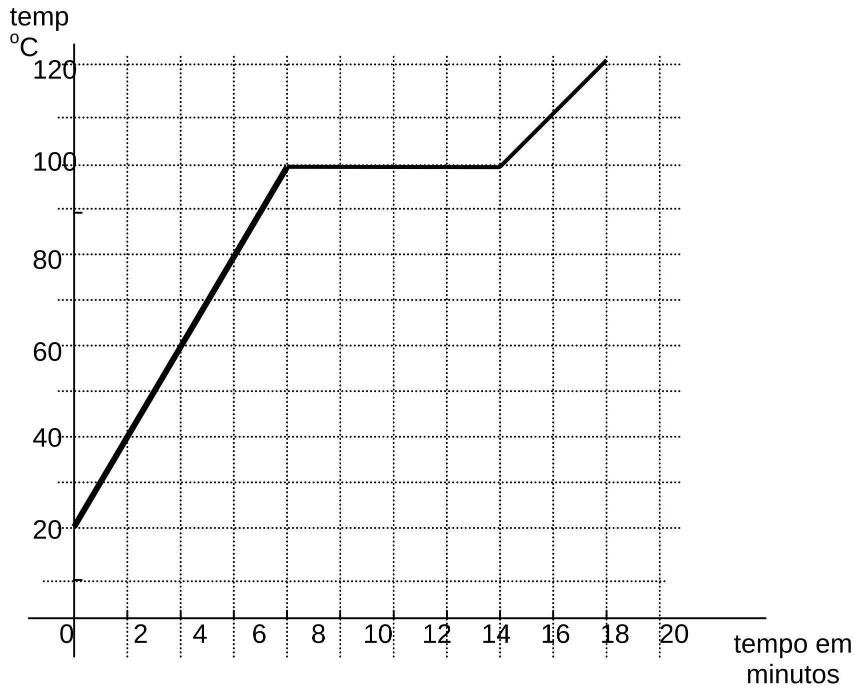
Da forma que a atividade foi elaborada estamos induzindo o aluno a transitar do quadro da geometria analítica ➔ quadro numérico ➔ quadro algébrico. Os dados são apresentados no quadro da geometria analítica, sobre a forma de um gráfico cartesiano. O aluno deverá ler os dados relacionados neste gráfico e preencher a tabela já indicada na seqüência da atividade. Dessa forma estamos passando do quadro da geometria analítica para o quadro numérico. A forma com que a tabela foi elaborada visa ao destaque do fato de que a temperatura sofre uma variação constante nos intervalos de 0 a 8 minutos a taxa de 10 graus por minuto, que é constante no intervalo de 8 a 16 minutos e volta a variar após 16 minutos a taxa de 5 graus por minutos. Essas informações serão de grande importância na definição das expressões algébricas que estabelecem a próxima mudança de quadro solicitada. As mudanças de quadro são exploradas com intensidade nessa atividade. Ao transitar do quadro da geometria analítica para o numérico, usando a representação em forma de tabela, e do quadro numérico para o quadro algébrico, procuramos mostrar as diferentes formas de representar o mesmo fenômeno físico.

Com essa atividade estaremos mobilizando conhecimentos já trabalhados nas outras anteriores com destaque para a leitura e interpretação de dados representados graficamente. Nela destacamos o fato da variação não ocorrer de forma homogênea em todo intervalo analisado. Esse fato torna necessária a definição de intervalos de validade para um determinado comportamento da relação de dependência, gerando um novo implícito. A percepção da necessidade de definição de mais que uma sentença para descrever o fenômeno estudado, além da relação de dependência entre as grandezas envolvidas é que desejamos trabalhar nessa atividade. Dessa forma estamos preparando o terreno para o conceito de domínio e imagem a serem definidos posteriormente. A necessidade da definição do intervalo de validade da relação será fundamental para definirmos o conceito de função

Parte 2 - Resolução e análise da atividade

Uma amostra de água é aquecida em recipiente hermeticamente fechado tendo a variação representada no gráfico abaixo.

Variação da temperatura de uma amostra de água no decorrer do tempo



1) Com base nos dados representados no gráfico acima, complete a tabela.

tempo (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
temperatura °C	*20*	*40*	*60*	*80*	*100*	*100*	*100*	*100*	*100*	*110*	*120*

A atividade é proposta partindo da representação gráfica procurando diversificar as formas de apresentação dos problemas. Na primeira questão solicitamos aos alunos para que completem a tabela constante da atividade induzindo dessa forma uma mudança de quadro, passando da representação gráfica para a numérica. A escolha dos valores posicionados na primeira linha, referente ao tempo de aquecimento, em minutos, facilita a leitura dos dados para a temperatura uma vez que as informações estão perfeitamente definidas pelas linhas tracejadas que identificam as coordenadas. Basta ao aluno aplicar seus conhecimentos sobre representação cartesiana de um ponto.

2) Analisando os dados apresentados, tanto na tabela quanto no gráfico, responda as questões abaixo.

a) Qual a temperatura da água após 3 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 30 graus Celsius.

b) Qual a temperatura da água após 7 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 90 graus Celsius.

c) Qual a temperatura da água após 13 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 100 graus Celsius.

d) Qual a temperatura da água após 17 minutos do início do aquecimento?

Resposta: 105 graus Celsius.

e) Para qualquer valor que você escolher do tempo, a temperatura será única?

Resposta: Sim. Qualquer que seja o instante escolhido a temperatura será única.

f) E se você escolher uma temperatura o tempo sempre será único?

Resposta: Não. A temperatura de 100 ^oC. é a mesma entre os instantes 8 e 16 segundos.

g) Existe dependência entre as variáveis tempo de aquecimento e temperatura?

Reposta: Sim. Quanto maior o tempo de aquecimento maior a variação da temperatura.

h) O tempo de aquecimento, sempre interfere na temperatura?

Resposta: Sim. Mesmo no intervalo de 8 a 16 segundos em que a temperatura mantém-se constante podemos considerar que o tempo de aquecimento interfere na temperatura.

i) A temperatura, sempre interfere no tempo de aquecimento?

Resposta: Não. O tempo de aquecimento não depende da temperatura.

j) Poderíamos dizer que a variação da temperatura é sempre proporcional ao tempo?

Resposta: De acordo com o representado no gráfico sim mas mudança no comportamento de acordo com a faixa de tempo considerado.

k) E o tempo é sempre proporcional à variação da temperatura?

Resposta: Não, o tempo varia de forma contínua independente da variação ou não da temperatura.

l) Se você fosse definir uma relação de dependência, por qual das duas você optaria?

Resposta: Pela relação temperatura dependendo do tempo.

m) Quais são os conjuntos envolvidos nesta atividade? Liste seus elementos.

Resposta: considerando T o conjunto que representa as medidas do tempo de aquecimento, t, em minutos, o instante de aquecimento, U, o conjunto das temperaturas e u, em graus Celsius, a temperatura num certo instante t temos:

T = { t ™ / 0 < t < 20}

U = { u ™ / 20 < u< 120}

Na segunda questão, levantamos uma série de perguntas procurando induzir o aluno a realizar uma análise dos dados representados, tanto no gráfico como na tabela. Com esse objetivo pedimos que identifique temperaturas em instantes que não constem da tabela, como a 3 minutos de aquecimento. A obtenção dessa informação pode ser feita das seguintes formas:

- Por estimativa. Observando no gráfico a posição “aproximada” da coordenada temperatura no instante três minutos. Cremos que essa será a estratégia utilizada pelos grupos.
- Aplicando a proporcionalidade direta. Como o tempo indicado está na metade de 2 e 4, a temperatura será a metade entre 40^o e 60^o logo 50^o
- Utilizando segmentos proporcionais: $\dfrac{u-40}{3-2}=\dfrac{60-40}{4-2}$, logo $u = 50^o$, onde *u* é a temperatura no instante 3 minutos.

A análise da seqüência com a formulação de uma série de questões que procuram explorar a variação como objeto de estudo da mesma forma que nas atividades anteriores.

3) É possível definir uma única expressão algébrica para representar a variação acima?

Não. A temperatura sofre variação de três formas diferentes ao longo do tempo de aquecimento.

4) Encontre as expressões algébricas que permita obter a temperatura da água, indicando qual a faixa do conjunto que esta é válida.

Resposta: $u(t) = \begin{cases} 20^o + 10^o t, \text{ se } 0 < t < 8 \\ 100^o, \text{se } 8 < t < 16 \\ 20^o + 5^o t, \text{ se } 16 < t < 20 \end{cases}$

Com a terceira e quarta questões colocamos em discussão o fato da variação não ocorrer de forma constante em todo intervalo analisado, mas possuindo três comportamentos claramente definidos pela linha que descreve a variação da temperatura em função do tempo. As expressões podem ser obtidas das seguintes formas:

No intervalo de 0 a 8 minutos:

- Interpretação imediata da leitura dos dados no gráfico. Como a temperatura no instante *t = 0* eqüivale a 20^o e sofre variação de 10^o a cada minutos temos a expressão: $u(t) = 20^o + 10^o\, t$, sendo essa a estratégia esperada.
- Utilizando segmentos proporcionais. $\frac{u-40}{t-2} = \frac{60-40}{4-2}$, logo $u(t) = 10^o t + 20$

No intervalo de 8 a 16 minutos:

- Leitura imediata da temperatura constante $u = 100^o$

No intervalo de 16 a 20:

- Interpretação imediata da leitura dos dados no gráfico. Como a temperatura no instante *t = 16* eqüivale a 100^o e sofre variação de 5^o a cada minutos temos a expressão: $u = 100^o + 5^o\,(t - 16)$, logo $u(t) = 20^o + 5^o\, t$, sendo essa a estratégia esperada.
- Utilizando segmentos proporcionais. $\frac{u-100}{t-16} = \frac{120-100}{20-16}$, logo $u(t) = 5^o t + 20^o$

A definição das três expressões que determinam o comportamento da variação da temperatura nos permite colocar em discussão o fato de elas representarem um único fenômeno que não sofre interrupção ao longo do tempo de observação. Portanto podemos considerar que as três sentenças representam única relação de dependência, logo, uma única função. As funções definidas por mais de uma sentença foram alvo de intensos debates, constituindo um dos obstáculos epistemológicos relativo à formulação de uma definição ao conceito de função, principalmente no que se refere à noção continuidade. Embora não discutiremos com nossos alunos os problemas envolvendo a continuidade, esperamos criar as condições para compreensão por parte dos alunos da possibilidade de se definir uma única função a partir de duas ou mais expressões algébricas, desde que se identifique corretamente o domínio de validade de cada uma delas, dentro de um domínio maior de validade para toda função.

5) Para ter um valor aproximado, para a temperatura, no instante 5,5 minutos, qual das representações você consultaria? Qual seria esta temperatura?

Resposta. Para se obter um valor aproximado podemos fazer uso tanto da representação gráfica quanto da expressão algébrica. A temperatura seria 75 ^oC.

6) Para obter a temperatura exata, da temperatura, no instante 5,5 minutos, qual das representações é a mais indicada? Qual seria esta temperatura?

Resposta. Para obter o valor exato temos que fazer uso da expressão algébrica, sendo a temperatura dada por:

$u(5,5) = 20^o + 10^o . (5,5) = 75^oC$

Com a quinta e sexta questões damos seguimento a análise dos atributos das representações, da mesma forma que nas atividades anteriores.

7) Liste as características em comum entre relações das quatro atividades últimas até aqui desenvolvidas.

Resposta: Em todas as quatro atividades temos:

- *dois conjuntos de grandezas dependentes entre si;*
- *variação entre grandezas;*
- *a variação pode ser representada graficamente, em forma de tabela, por expressões algébricas e expressa pela linguagem natural.*

8) Destaque quais destas características seriam as mais importantes.

Resposta: Todas são importantes, mas para nosso estudo a variação de uma grandeza em função da outra é a mais importante.

9) Existe alguma característica que poderia ser estudada independente do problema envolvido? Qual?

Resposta: A variação, a dependência de uma grandeza em relação a outra e a correspondência entre seus valores são as idéias comuns a todos os problemas podendo ser estudado de forma independente

Com essas três últimas questões, cremos estar criando as condições para a superação do obstáculo epistemológico relacionado com o foco nas coisas que variam ampliando assim o campo conceitual relacionado as variações de forma a permitir a futura formalização e definição do conceito de função. Nelas procuramos dar ênfase na variação e na dependência como sendo as características comuns a todas as situações apresentadas. Não esperamos que as respostas já indiquem a compreensão da variação e dependência como sendo os objetivos centrais de nosso estudo, mas cremos que podemos conduzir as discussões na segunda etapa da atividade de forma a direcionar para esses objetivos. As conclusões obtidas a partir dessas discussões serão utilizadas para a formalização, na terceira etapa da atividade, da variação e dependência como objetos de estudo estabelecendo as bases para a definição do conceito de função.

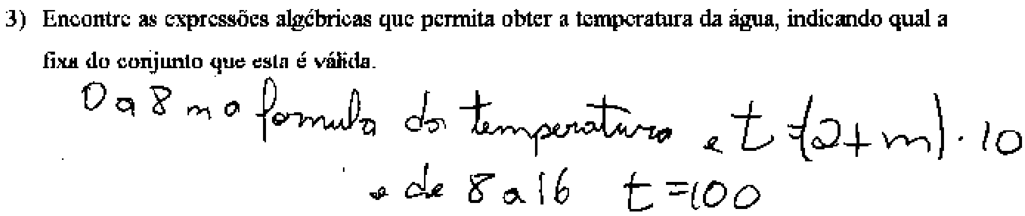
4.4.4.2 Análise a posteriori da quarta atividade.

Participaram dessa sessão 12 alunos que se subdividiram em 4 grupos de 3 alunos cada um. A formação dos grupos não tem se alterado no decorrer das atividades, o que nos permite acompanhar sua evolução no decorrer das atividades. Essa é a atividade em que ocorreu o maior envolvimento por parte dos alunos, com todos os grupos completando-a no prazo definido e participando das discussões.

Uma observação interessante no início dessa sessão está relacionado à posição da sala em que se desenvolve as atividades. No período da tarde, a incidência do sol descreve o formato da janela no piso, desenhando uma figura que varia no decorrer do tempo em que estava sendo desenvolvida a atividade. Observando esse fato e prevendo a próxima sessão o professor traçou com giz o contorno de uma das figuras formadas exatamente no momento em que os alunos ingressavam na sala, doze horas e cinqüenta e quatro minutos, alertando os alunos para tal registro. Esse registro despertou tanta atenção dos alunos que eles mesmos se incumbiram de registrar a figura a cada dez minutos. A observação da variação na figura ocorreu até as quatorze horas e quarenta minutos, quando se encerrou a sessão. Esse registro, gravado em vídeo pelos próprios alunos ao final da atividade nos deu oportunidade de discutir o conceito de variação de forma significativa no decorrer da mesma.

Não houve dificuldade na leitura do gráfico, a conversão do quadro da geometria analítica para o numérico, com o preenchimento da tabela ocorreu sem dificuldades. As respostas ás questões formuladas foram seguras observando-se que alguns alunos já desenvolveram a habilidade de interpretar as informações neste tipo de registro. Tal segurança se baseia nas anotações dos alunos quando se solicita qual a temperatura em instantes cuja representação gráfica não evidencia diretamente. Por exemplo ao serem questionados sobre “Qual a temperatura da água após 7 minutos do início do aquecimento”, dois grupos responderam “aproximadamente 90 graus”. O fato de não afirmarem taxativamente que era de 90 graus parece indicar o desenvolvimento da habilidade na análise dessa representação. A escolha das grandezas envolvidas mostrou-se acertada com os alunos percebendo que a temperatura da água depende do tempo de aquecimento, mas o inverso não ocorre. Esse fato, que desejávamos destacar, parece ter ficado claro para os alunos que participavam da atividade.

A passagem para o quadro algébrico foi realizada de forma plena por apenas um dos grupos envolvidos na atividade, que definiu de forma clara os intervalos de validade para o intervalo de 0 a 8 minutos e entre 8 e 16 minutos, conforme figura 6.

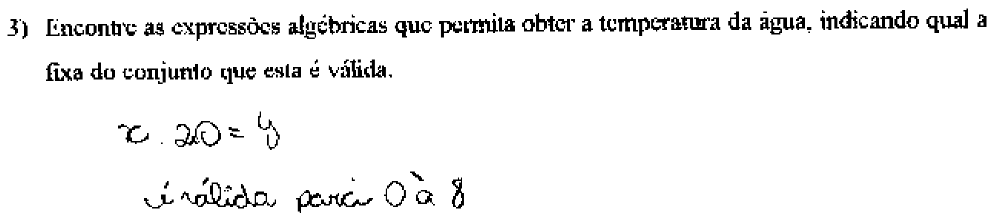

3) Encontre as expressões algébricas que permita obter a temperatura da água, indicando qual a fixa do conjunto que esta é válida.

0 a 8 no formula do temperatura e $t = (2+m) \cdot 10$
e de 8 a 16 $t = 100$

figura 6: Definição do intervalo de tempo e da expressão algébrica nas duas faixas iniciais da variação de temperatura da água em função do tempo definido por alunos da oitava série.

Dois grupos não conseguiram definir as expressões corretas para determinar a variação da temperatura mas de suas anotações observa-se a percepção de que o fenômeno tem comportamento diferente num determinado intervalo, logo, a lei que define a variação deve ser específica para esse intervalo, Figura 7. O quarto grupo pulou esta questão.

O papel de cada representação parece ter sido compreendido, mas não fica evidente nos registros dos alunos. Quando questionados qual a representação mais indicada para se obter a temperatura no instante 5,5 minutos são taxativos escolhendo a expressão algébrica. De acordo com os alunos “O gráfico fica confuso, devemos usar a expressão”. A percepção de que a idéia central da atividade relaciona-se com a dependência entre duas grandezas aparece nas discussões, mas também não é observada nesses registros. Quando questionados sobre qual a característica mais importante são unânimes em considerar as representações.



3) Encontre as expressões algébricas que permita obter a temperatura da água, indicando qual a fixa do conjunto que esta é válida.

$x \cdot 20 = y$

é válida para 0 à 8

figura 7: A necessidade de definição de uma relação especifica no intervalo de 0 a 8 minutos é observada pelo grupo de alunos, embora a expressão algébrica esteja incorreta

A segunda etapa da atividade, relativa à Explicitação- institucionalização local da dialética iniciou-se como previsto. A maioria das respostas referente à primeira questão formam iguais em todos os grupos e de acordo com o previsto na análise a prióri. Somente nos itens “e” e “f”, em que se questionava sobre a unicidade da temperatura em relação ao tempo de aquecimento observou-se variação nas respostas. Dois grupos defenderam que a temperatura não depende do tempo de aquecimento, mas não conseguiram argumentos para convencer seus colegas. Um dos grupos entretanto defendeu sua posição argumentando que “nem sempre o tempo de aquecimento interfere na temperatura” mostrando que no gráfico, os instantes de 8 a 16 minutos em que a temperatura não sofre variação. Tal posicionamento gerou dúvidas nos demais colegas, sendo necessário o esclarecimento, por parte do professor, sobre o comportamento de uma substância pura durante a mudança de fase. O fato demonstra a interferência de uma variável externa à matemática já prevista na escolha das variáveis didáticas e epistemológicas pelo professor. Um dos alunos perguntou “Será que não abaixaram o fogo?”, quando questionado pelo professor “Mas podemos afirmar que isso ocorreu?”, o aluno comenta, “é a temperatura poderia cair”. Após os esclarecimentos sobre a propriedade da substância na mudança de fase, a maioria dos grupos concluíram que a temperatura dependia do tempo de aquecimento, entretanto um dos grupos defendeu que tempo de aquecimento também dependeria da temperatura. Ao serem questionados sobre essa posição, não conseguiram dar uma justificativa, acatando posição dos demais colegas. Aparentemente esses alunos não compreenderam o porquê da temperatura não poder interferir no tempo de aquecimento onde se conclui que a noção de dependência ainda não é ferramenta disponível para todos os alunos como pressuposto assumido no início da atividade.

Dos quatro grupos, três perceberam que uma única expressão não seria suficiente para descrever o fenômeno representado no gráfico, como foi destacado na primeira etapa desta análise. O professor solicitou ao grupo que obteve as leis para as duas primeira fases do fenômeno para que expusessem o raciocínio utilizado para obter a expressão. Segundo os alunos “bastava observar que entre zero e oito minutos a temperatura variava de dez em dez graus e começava no vinte”. A expressão seria obtida colocando o dez em evidência. Questionados por que não determinaram a expressão para a variação acima de 16 segundos alegaram que esqueceram. Buscando encontrar esta expressão, o professor estimulou a discussão com os alunos afirmando que “a variação agora é de cinco em cinco graus, sugerindo a expressão t = 5m + 100”. Questionados se realmente era esta a lei foram levados a testar a validade para m = 20 minutos, o que permitiu observarem a falha no raciocínio. Devido a falta de tempo para alongar as discussões, o professor alertou que deveriam se lembrar de que temperatura acima de 100 graus ocorria após o décimo-sexto minuto de aquecimento. Portanto a expressão deveria ser t = 5(m-16) + 100 ou seja t = 5m + 20 levando os alunos a registrar:

t = 10 (2+m), para temperatura entre 0 a 8 minutos,

t = 100, para temperaturas entre 8 e 16 minutos e

t = 5m + 20, para temperaturas acima de 16 minutos.

A discussão envolvendo as questões finais foi prejudicada pela falta de tempo no desenvolvimento da segunda etapa da atividade, não sendo aprofundada o suficiente. Entretanto destacamos uma parte do diálogo na discussão que julgamos terem sido muito positivos.

P: Liste as características em comum entre relações das quatro atividades últimas até aqui desenvolvidas?.

A: As representações. tabela gráfico expressão

A: São fenômenos reais

P: São situações que podem ser reais.

A: Todos apresentam proporção.

P: Variação proporcional.

P Quais seriam as caraterísticas mais importantes?

A: A tabela e o gráfico.

AD: Não. a variação é mais importante.

P: Existe alguma característica que poderia ser estudada independente do problema envolvido? Qual?

A: A variação.

P: Isto. Na prática o que estamos mais interessados é em estudar a variação como fenômeno. Observem como variou a figura formada pelo sol no piso da sala. .....

AD. A sombra vai ficar em função do sol.

P: Não a sombra depende do momento em que será feito o registro, portanto ela parece ser função do tempo.

Observamos do diálogo acima que a idéia da variação como fenômeno a ser estudadoi já está sendo delineado, principalmente no grupo que denominamos de AD em nossos diálogos, por razões já esclarecidas. Entretanto os demais grupos indicam inicialmente que o mais importante seriam as representações em forma de tabela e gráfica. Podemos atribuir essa concepção a um obstáculo didático que aparentemente nós mesmos tenhamos criado na elaboração das atividades. Em todas elas essas formas de representação estão presentes.

Restando apenas dez minutos para finalizar a sessão e tendo o compromisso assumido de liberar os alunos às quinze horas e quarenta minutos, o professor se viu forçado a realizar a institucionalização. Formalizou a dependência da temperatura em relação ao tempo de aquecimento. Fazendo uso das notações criadas na sessão anterior redefiniu as anotações anteriores utilizando a notação *t(m)* em vez de apenas t. Ressaltou que as informações nos permitiam prever o comportamento até o instante 20 minutos reescrevendo as informações acima:

$t(m) = 10\ (\ 2 + m),$ para temperatura entre 0 e 8 minutos,

$t(m) = 100$, para temperaturas entre 8 e 16 minutos e

$t(m) = 5m + 20$, para temperatura entre 16 e 20 minutos, logo o intervalo total de observação do fenômeno seria de 0 a 20 segundos.

Finalizou a formalização destacando a distinção entre as representações e o papel de cada uma delas e o objetivo da atividade, que é o de estudar a variação da temperatura da água, dependendo do tempo de aquecimento, ou seja em “função” do tempo de aquecimento, introduzindo o termo função. Antes de liberar os alunos, solicitou-les que se tivessem possibilidade que realizassem o registro da sombra no decorrer de um dia. Retomou a seqüência de figuras definida pela janela no piso da sala, comentando sobre a variação nessa figura no decorrer da atividade. Variação esta acompanhada pelos alunos e gravada ao final da mesma.

Da análise da atividade, podemos concluir que os alunos mobilizaram como ferramenta:

- A leitura e interpretação de uma representação gráfica.
- Perceber a necessidade de uma única correspondência para caracterizar a dependência.
- A influência da ação do aquecimento da água no decorrer do tempo.

Elaborando como conhecimento de forma implícita as noções de:

- Dependência da variação da temperatura em relação ao tempo de aquecimento,
- A necessidade da definição de Intervalo de validade da expressão algébrica que descreve o fenômeno,

A necessidade da definição de intervalos de validade para a expressão algébrica e a dependência da variação da temperatura em função do tempo de aquecimento são as ferramentas que procuramos enfatizar nessa atividade. Utilizamos um fenômeno em que uma das variáveis, a temperatura, não interfere o comportamento da outra, o tempo. A escolha dessas variáveis teve como objetivo pôr em questão o papel da dependência de uma variável em relação à outra. Introduzimos a expressão "em função de" como uma analogia à expressão na sua forma usual dentro da linguagem natural, embora saibamos que esta não parece ter sido a origem do termo função dentro da matemática.

4.4.5 Quinta Atividade

Acompanhando e registrando a sombra de uma pequena haste durante o período de um dia obtivemos figura em anexo (anexo 3). Considerando por sombra, em nossa atividade, apenas a figura gerada sobre uma superfície pela sua luz do sol quando incide sobre um objeto.

1) Meça o comprimento da sombra registrando na tabela abaixo a hora e o comprimento encontrados.

hora											
comprimento da sombra											

2) Represente graficamente o tempo em horas e o comprimento da sombra da haste.

3) Discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:

a) O comprimento da sombra depende da hora em que foi feita a medida?

b) E a hora em que foi feita a medida depende do comprimento da sombra?

c) Na representação gráfica, qual variável você colocou no eixo das abscissas? Por quê?

d) A inversão dos eixos não poderia resultar num gráfico mais compreensível? Por quê?

e) Podemos efetuar previsões únicas sobre o tamanho da sombra em determinado instante?

f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado tamanho serão únicas.

g) É sempre possível determinar o tamanho da sombra? Por quê?

h) Qual seria, em nossa região, o tamanho desta sombra às 3 horas (da madrugada)? e às 22 horas (10 horas da noite)?

h) Como poderíamos garantir a previsão do tamanho da sombra, em nossa região?

4) Considerando que alem do comprimento o ângulo em relação à direção leste–oeste também sofre variação, discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:

a) O ângulo formado pela sombra na direção leste - oeste, depende da hora em que foi feita a medida?

b) E a hora em que foi feita a medida depende do ângulo formado pela sombra?

c) Podemos efetuar previsões únicas sobre do ângulo formado pela sombra em determinado instante?

f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado ângulo formado pela sombra serão únicas?

g) Seria possível determinar o ângulo formado pela sombra em qualquer instante? Por quê?

h) Como poderíamos garantir a previsão do ângulo da sombra?

5) Na atividade anterior, procuramos destacar as características em comum das relações envolvidas. Estas características continuam presentes?

6) Qual a idéia central em todas as seis atividades analisadas até agora?

7) Como garantir com segurança que a previsão efetuada a partir desta idéia não possa ser questionada?

4.4.5.1 Análise a priori da quinta atividade

Parte 1 – Análise geral

Como na atividade anterior, procuramos trabalhar com um fenômeno físico observável cujo comportamento tem seu interesse despertado desde a antigüidade. A forma com que a sombra de um objeto se projeta no decorrer do dia apresenta uma excelente oportunidade, tanto no aspecto físico como no matemático, para o desenvolvimento de atividades envolvendo outras áreas, não só da matemática, como também da geografia. Os dados coletados nessa atividade também poderão ser utilizados para a elaboração de atividades de geometria, envolvendo a determinação do ângulo de incidência dos raios solares, entre outras que podem ser elaboradas com esses dados.

A coleta dos dados deverá ser realizada preferencialmente pelos alunos. Será pedido que obtenham esse registro marcando sobre uma folha de papel sulfite a sombra gerada por uma haste presa verticalmente no centro da folha. A folha deverá ficar fixa sobre uma superfície durante todo o período do registro, pois qualquer deslocamento na mesma irá interferir nos resultados. Esse registro deverá ser feito traçando-se o segmento formado pela sombra sobre a folha e o instante em que esse foi marcado. Nas anotações deverão constar também a data e a região em que os dados formam obtidos. Essas informações são variáveis fundamentais para o desenvolvimento da atividade e muito contribuirão nas discussões das mesmas. Para garantia da existência dos dados no momento do desenvolvimento da atividade, temos o registro feito pelo professor (Anexo 3). Esperamos a participação do aluno nesse registro pois julgamos que a coleta dos dados realizada por eles será de grande utilidade tanto para validar os dados, como mostrar a aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos.

A tabulação dos dados dar-se-á com os alunos medindo o comprimento da sombra e anotando na tabela correspondente. Estes servirão de base no desenvolvimento da atividade com a confecção e análise dos gráficos, procurando evidenciar a funcionalidade das relações envolvidas. É pedido aos alunos que representem graficamente os dados obtidos, sem a definição de que variável deve ser posicionado em qual eixo. Essa formulação é proposital visando à verificação de qual eixo os alunos irão posicionar a variável tempo e o porquê de sua opção. Essa escolha será foco de debate buscando a formulação de uma convenção ao representar o gráfico de uma função. Nessa convenção definiremos o posicionamento da variável independente como o eixo das abscissas ressaltando que os aspectos práticos desta convenção não invalidam uma representação diferente, desde que devidamente indicada. A passagem para o quadro algébrico não será realizada devido a falta de conhecimentos não só geométricos como geográficos necessários para essa formulação. Com a coleta dos dados, seu tabelamento e representação gráfica estamos levando os alunos a transitar do quadro, que convencionaremos chamar de natural, (pois envolve um fenômeno natural) para o quadro geométrico (formado pelos segmentos de retas dispostos sobre a folha). Nova mudança de quadro é feita para numérico, com a confecção da tabela e finalmente para o quadro da geometria analítica com a elaboração do gráfico que representa a variação do fenômeno observado. O quadro natural é externo à matemática formal, mas estamos fazendo uso de uma analogia semelhante a utilizada por Douady (1984) em sua tese de Doutorado. Nessa tese, Douady relaciona como quadro material do jogo "le cadres matériel du jeu" ao conjunto de círculos concêntricos, a bola, os jogadores, as diferentes regras do jogo" (Douady 1984, p 102).

Como nas atividades anteriores, procuramos levar a análise da mesma na direção da formulação do conceito de função pelos alunos de forma semelhante a definida por Dirichlet. Para tanto retomamos as discussões iniciadas na atividade anterior sobre o intervalo de validade da relação à correspondência e à dependência do comprimento em relação ao instante de coleta da informação. Esta discussão se dará nas questões g, h e i onde perguntamos:

g) É sempre possível determinar o tamanho da sombra? Por quê?

h) Qual seria o tamanho desta sombra às 3 horas? e às 22 horas?

i) Como poderíamos garantir a previsão do tamanho da sombra. Com estas questões recolocamos a necessidade de se estabelecer o domínio para definição da função ao mesmo tempo que reforçamos a importância da unicidade para esta definição.

Nas discussões sobre o ângulo formado pela sombra em relação a direção leste - oeste, iniciamos a Explicitação-institucionalização local. Através da discussão e análise da variação dos ângulos formados pela sombra, procuramos levar o aluno a perceber a nova ferramenta, a idéia de dependência funcional, de forma a poder dar a ela o estatuto de objeto. Buscando institucionalizar o saber, ainda na forma implícita, reforçamos o papel tanto da unicidade na relação como a definição do intervalo de validade na mesma. Com este objetivo formulamos as questões.

- Podemos efetuar previsões únicas sobre do ângulo formado pela sombra em determinado instante?
- As previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado ângulo formado pela sombra serão únicas?
- É sempre possível determinar o ângulo formado pela sombra? Por quê?
- Como poderíamos garantir a previsão do ângulo da sombra?

Com essas questões, fechamos a seqüência de atividades envolvendo variação entre grandezas que servem de preparação para a Institucionalização onde daremos ao conceito de função o estatuto de objeto. No desenvolvimento da atividade mobilizaremos como conhecimento antigo as noções de:

- Medidas de um segmento,
- Representação de um número na sua forma decimal.
- Movimento aparente do sol no decorrer do dia.

Mobilizando esses conhecimentos pretendemos levar o aluno a discutir a variação no comprimento da sombra no decorrer do dia. Destacamos o período em que a ausência do sol não gera sombra, definindo que se nesse intervalo a sombra não existe. Os conhecimentos implícitos que julgamos estar induzindo o aluno a formular se relacionam com esse intervalo e ao fato que para qualquer que seja o instante o comprimento da sombra será único. Para enfatizar esse conhecimento estimulamos o aluno a discutir qual seria o comportamento do ângulo formado pela sombra em relação à direção leste–oeste. Dessa forma colocamos em discussão uma situação que apesar de real só estará sendo trabalhada teoricamente. A **i**nstitucionalização dessas informações ocorrerá ao final da atividade dando ênfase na unicidade e nos intervalos de definição de cada relação que permita prever o comprimento da sombra.

Cremos que podemos direcionar as análises no sentido de mostrar:

- A variação como fenômeno, permitindo a superação do obstáculo do foco nas coisas que variam;
- As diversas formas de representação do objeto função permitindo a superação dos obstáculos relacionados à figura gerada pelo gráfico e à equação como sendo a função;
- A distinção entre o objeto função e suas representações. Com o encerramento dessa atividade cremos estar prontos para formalizar o conceito de função na próxima sessão. Dessa forma estaremos dando a idéia de variação o estatuto de objeto matemático denominado função.

Parte 2 – Resolução e análise da atividade.

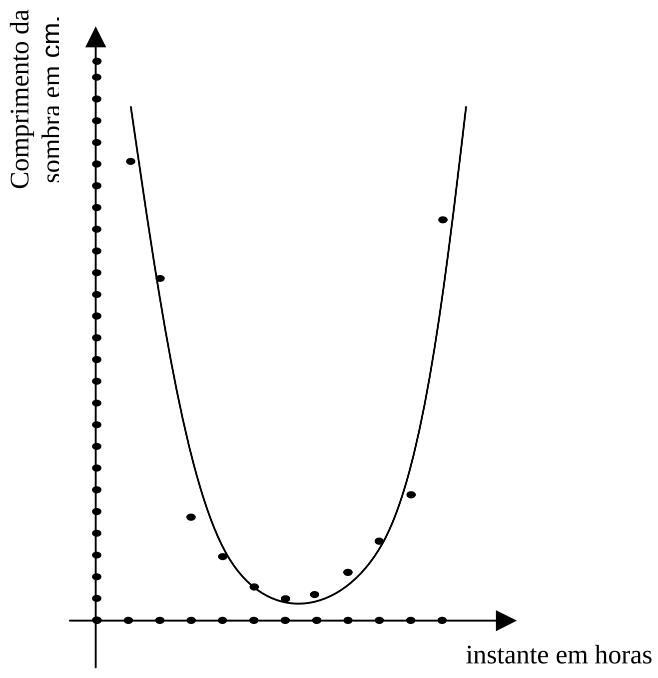
Acompanhando e registrando a sombra de uma pequena haste durante o período de um dia obtivemos a figura em anexo (anexo 3). Considerando por sombra, em nossa atividade, apenas a figura gerada sobre uma superfície pela sua luz do sol quando incide sobre um objeto.

1) Meça o comprimento da sombra registrando na tabela abaixo a hora e o comprimento encontrado.

hora	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
comprimento da sombra (cm)	*42,5*	*31,5*	*9,5*	*6,0*	*3,5*	*2*	*2,5*	*4,5*	*7,5*	*11,5*	*36,5*

Obs. Dados foram obtidos em 09 de fevereiro de 2005 em Santo André São Paulo, fazendo uso de uma haste de 8,5 cm de altura.

2) Represente graficamente o tempo em horas e o comprimento da sombra da haste.



A situação proposta segue o mesmo princípio das outras atividades, trabalhar a variação envolvendo um conjunto de grandezas diferentes das utilizadas anteriormente. Os dados usados nessa resolução tomam por base o registro obtido pelo professor pesquisador em dia e hora indicadas na solução. A tarefa dos alunos será a de medir e registrar na tabela indicada a hora e o comprimento da sombra e representá-la graficamente. Esperamos que nessa representação os alunos posicionem a grandeza tempo no eixo das abscissas. Essa informação servirá de base para a definição das futuras convenções envolvendo esse tipo de representação.

3) Discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:

a) O comprimento da sombra depende da hora em que foi feita a medida?

Resposta: Sim. O comprimento da sombra sofre variação, tendo medida diferente em instantes diferentes.

b) E a hora em que foi feita a medida depende do comprimento da sombra?

Resposta: Não O instante em que foi realizado o registro não sofre interferência do comprimento da sombra, é só mudar o tamanho da haste para que a sombra tenha o comprimento diferente no mesmo instante.

c) Na representação gráfica, qual variável você colocou no eixo das abscissas? Por quê?

Resposta: O instante de registro. Esta disposição facilita observar que o comprimento da sombra diminui até por volta da metade do dia e volta a aumentar.

d) A inversão dos eixos não poderia resultar num gráfico mais compreensível? Por quê?

Resposta: Não, pois a figura gerada seria uma curva que apresenta duplicidade de valores, nas grandezas comprimento, para um mesmo instante.

e) Podemos efetuar previsões únicas sobre o tamanho da sombra em determinado instante?

Resposta. Podemos, pois a cada instante a sombra para essa haste será única.

f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado tamanho serão únicas?

Resposta: Não, pois temos sombra que apresenta o mesmo comprimento no período da manhã e no período da tarde.

g) É sempre possível determinar o tamanho da sombra? Por quê?

Resposta: Se tivermos os registros de seu comportamento sim.

h) Qual seria, em nossa região, o tamanho desta sombra às 3 horas (da madrugada)? e às 22 horas (10 horas da noite)?

Resposta: Nesses instantes, o sol não incide sobre os objetos em nossa região, logo não forma sombra como convencionado em nossa atividade. Podemos convencionar esse comprimento como zero.[8]

i) Como poderíamos garantir a previsão do tamanho da sombra, em nossa região?

[8] A definição do comprimento da sombra sendo zero é uma mera convenção e dependerá das conclusões dos alunos ao longo da atividade.

Resposta: Restringindo a validade dos dados no intervalo de iluminação da haste pelo Sol e convencionando um comprimento nos momentos em que essa iluminação não ocorre.

4) Considerando que além do comprimento o ângulo em relação à direção leste–oeste também sofre variação, discuta com seu colega de grupo e responda as questões abaixo:

a) O ângulo formado pela sombra na direção leste-oeste depende da hora em que foi feita a medida?

Resposta: Sim. Da mesma forma que o comprimento, o ângulo definido pela sombra em relação será único.

a) E a hora em que foi feita a medida depende do ângulo formado pela sombra?

Resposta: O instante não depende da existência da sombra, logo não depende do ângulo formado.

c) Podemos efetuar previsões únicas sobre o ângulo formado pela sombra em determinado instante?

Resposta: Sim.

f) E previsões sobre o instante em que a sombra terá um determinado ângulo formado pela sombra serão únicas?

Resposta: Sim

g) Seria possível determinar o ângulo formado pela sombra em qualquer instante? Por quê?

Resposta: Sim, desde que se tenha os registros da sombra em diversos instantes em que foi gerada.

h) Como poderíamos garantir a previsão do ângulo da sombra?

Resposta: Definindo o intervalo de existência dos registros e uma medida e uma convenção, para o intervalo em que esses registros não são válidos, desde que coerente com esses registros.

Os dois conjuntos das questões acima mantêm a mesma estrutura das atividades anteriores, que é o de discutir a atividade focalizando na variação como fenômeno e as condições que nos permitirão definir o conceito de função. As grandezas envolvidas na atividade possuem um comportamento que nos auxiliará na definição da relação de dependência. Tanto o comprimento da sombra quanto o ângulo por ela definido na direção leste - oeste dependem do instante do registro, mas o contrário não é verdadeiro. Este atributo é discutido na questão quatro item b, quando questionamos “se a hora em que foi feito o registro depende do ângulo formado pela sombra?”. É evidente que a grandeza hora não depende da existência da sombra logo não dependerá do ângulo formado. Essa informação será fundamental nas discussões envolvendo a noção dependência criando as condições para que se evidencie o conceito de domínio não como uma simples convenção que indica o sentido da relação funcional, mas a grandeza, ou o conjunto de valores, que definem a relação de dependência. Cremos que se o aluno desenvolver essa percepção estará em condições de dar significado ao conceito de função criando as condições que permitirão o estabelecimento desse novo campo conceitual. Dessa forma o conjunto de situações trabalhadas, juntamente com uma grande quantidade de situações envolvendo dependência de duas variáveis, passarão a integrar o conjunto de situações **S** que darão significado a esse campo.

5) Na atividade anterior procuramos destacar as características em comum das relações envolvidas. Estas características continuam presentes?

Resposta: Sim. Em todas as atividade desenvolvidas até agora temos presentes:

- *Duas grandezas variáveis,*
- *Medidas que se correspondem,*
- *Variação com comportamento previsível.*

6) Qual a idéia central em todas as seis atividades analisadas até agora?

Resposta: A variação entre duas grandezas.

7) Como garantir com segurança que a previsão efetuada a partir desta idéia não possa ser questionada.

Resposta: Definindo a relação de maneira que a reposta obtida seja única e restringindo o intervalo de validade de variação de cada uma das grandezas.

As três questões que finalizam a atividade procuram reforçar a variação como objeto de estudo e a necessidade de se construir as condições que permitam realizar previsões envolvendo essas variações. Na quinta questão voltamos à discussão sobre quais as características em comum nas cinco situações propostas. Esperamos que os alunos já estejam em condições de identificar a variação e a correspondência como uma dessas características. Para a sexta questão, cremos já ter conseguido criar as condições que permitam aos alunos identificar a variação como idéia central, conseguindo superar o obstáculo do foco nas coisas que variam. Por fim, na sétima questão intensificamos a discussão sobre as condições que permitirão tornar disponível para o aluno o novo objeto como ferramenta para a solução de problemas. Essas condições se tornar-se-ão explícitas na próxima atividade com a definição do conceito de função como proposto em nossa pesquisa. Entretanto a simples definição não será suficiente para tornar o objeto função como ferramenta na solução de problemas. É necessário que todo o campo conceitual a ele relacionado seja desenvolvido, incluindo o conjunto de representações **R** que foram trabalhadas ao longo de todas as atividades. Cremos que ao final dessa quinta atividade já estamos em condições de discutir com os alunos como construir essa definição.

4.4.5.2 Análise a posteriori da quinta atividade.

Dez alunos participaram dessa sessão com a formação de quatro grupos, sendo que apenas um aluno trouxe o registro solicitado na sessão anterior. Convém destacar que entre as duas atividades tivemos o feriado de 24 de maio de 2005 numa quinta feira, com emenda na sexta, dia em que se realizavam as seções da atividade. Ao serem questionados sobre o motivo da não elaboração do registro solicitado, alegaram que se esqueceram devido ao feriado. Como já estava prevendo essa possibilidade, o professor apresentou o registro por ele elaborado em 9 de fevereiro de 2005, anexado no presente trabalho sobre número três. Solicitou ao aluno que realizou o registro que expusesse a estratégia utilizada na sua elaboração. Segundo ele, foi fixado um prego no centro da folha presa em uma tábua de madeira. A cada intervalo de uma hora o aluno procurava marcar o extremo da sombra. De acordo com o aluno o registro foi prejudicado, pois teve que se ausentar por um período muito longo e quando retornou o tempo estava nublado. Mesmo assim foi solicitado a ele que fizesse uso de seu material, mas este deu preferência a utilizar o fornecido pelo professor. De qualquer forma a presença desse registro permitiu validar os dados coletados pelo professor, mostrando que as informações não eram fruto de uma mera possibilidade teórica.

A transcrição dos dados para a tabela não apresentou dificuldades para os alunos. A solicitação de apenas uma representação gráfica gerou a questão sobre qual eixo se devia posicionar o tempo. O professor deixou bem claro que isto estava a critério dos grupos. Dos quatro gráficos gerados na atividade apenas um posicionou o tempo nos eixos das ordenadas. Quando questionados, na segunda etapa da atividade, sobre o motivo dessa opção, não souberam justificar a escolha.

Dois grupos alegaram ter escolhido posicionar o comprimento na vertical para melhor acomodar na folha quadriculada. De acordo com esses alunos a sombra assume valores maiores que os do tempo. O terceiro grupo também não soube justificar sua escolha. Quando questionados se a mudança no posicionamento dos eixos poderia resultar num gráfico mais compreensível, um dos grupos que posicionou o tempo no eixo das abscissas, alegou que "não pois assim era mais lógico". Os demais grupos que posicionaram o tempo no eixo horizontal limitaram-se a responder não, sem justificar e o grupo que havia posicionado o comprimento na abscissa não respondeu.

Nas questões em que se discutia qual das variáveis dependeria da outra apenas um dos grupos considerou que o tempo dependeria do comprimento da sombra e na sua justificativa fez alusão ao relógio de sol. Essa justificativa parece indicar a presença de um obstáculo epistemológico, não previsto em nossa análise. Os poucos conhecimentos dos alunos, sobre o relógio de sol usado na antiguidade, parece ter impedido o grupo de visualizar que além do comprimento da sombra também é necessário se observar sua posição em relação ao eixo leste-oeste para indicar o instante desejado. Infelizmente, tal observação não surgiu na segunda etapa da discussão, pois permitiria uma discussão interessante.

As questões envolvendo a unicidade também não apresentaram dificuldades. Já as que envolvia a possibilidade de sempre se prever o comprimento da sombra gerou divergência. Dos quatro grupos apenas um afirmou que sempre seria possível prever o tamanho da sombra. Dois dos grupos afirmaram que nem sempre se poderia determinar o comprimento da sombra uma vez que esta muda no decorrer do ano. Já o quarto limitou-se a responder sim, sem justificar sua posição. Quando questionados sobre qual seria a sombra às três horas da madrugada e às vinte e duas horas ou dez horas da noite, um dos grupos apresentou um valor numérico (quatro centímetros e nove centímetros). Ao serem questionados sobre a estratégia utilizada para obterem essa informação alegaram que os dados constavam da tabela, referindo-se às leituras às quinze horas e às dez horas da manhã. Um dos grupos afirmou que não se poderia determinar o tamanho da sombra e os outros dois não responderam a questão.

As respostas às questões envolvendo a variação do ângulo formado pela sombra em relação à direção leste–oeste apresentaram comportamento semelhante às relacionadas ao comprimento.

Quando questionados sobre quais as características comuns às atividades anteriores dois grupos deram ênfase na representação gráfica e na tabela, demonstrando a presença do obstáculo didático já mencionado na análise da atividade anterior. Entretanto foram unânimes em afirmar que a idéia central das atividades era a variação nas relações de dependência, A definição do intervalo de existência da sombra durante o dia só foi identificado por um dos grupos. Três não responderam a última questão sobre como garantir a previsão da sombra.

O professor iniciou a segunda parte da atividade relembrando a figura formada pela janela na atividade anterior. Comentou que da mesma forma que a figura variou durante aquela sessão, a sombra de uma haste também varia durante o dia a seguir pediu para que os alunos comentassem a construção da tabela e o gráfico por eles elaborados. Como já foi descrito nessa análise, apenas um dos grupos posicionou o comprimento da sombra no eixo das abscissas. Questionado sobre o motivo desta escolha o grupo não soube responder. Entretanto quando os componentes desse grupo observaram o gráfico dos demais colegas, concluíram que a análise do gráfico ficaria mais simples se tivessem posicionado o tempo no eixo das abscissas. Um dos alunos observou que essa disposição, tempo no eixo das abscissas, permitia ver claramente que a sombra diminuía à medida que o tempo se aproximava do meio do dia e aumentava no período da tarde. A dependência do comprimento da sombra e do ângulo formado em relação ao instante em que é realizado a medida foi discutida entre os alunos com esses concordando com esta dependência. Quando questionados se o instante em que foi feito o registro depende do comprimento da sombra um dos alunos do grupo AD levanta a seguinte questão:

AD: Se eu mudar o tamanho da haste não vai mudar o tamanho da sombra? Essa observação encerrou a discussão com todos os alunos concordando que a variável tempo não dependeria das variáveis comprimento ou ângulo formado pela sombra.

A pergunta "É sempre possível obter o comprimento da sobra? Por quê? teve resposta imediata de um dos grupos:

A: Mas a noite não tem sombra.

O professor insiste "Então qual seria o comprimento da sombra às três horas da madrugada?, registrando-se o seguinte diálogo:

A1: Quatro centímetro.

AD: A noite não tem sombra.

P: Por que quatro centímetros?

A1: Pelos dados da tabela.

A2: Mas na tabela são três horas da tarde.

P: Qual seria o comprimento da sombra nestas condições? Após uma breve discussão os alunos concluíram que não havendo sombra, seu comprimento poderia ser considerado zero centímetros.

A discussão sobre a variação do ângulo permitiu a confirmação das conclusões desejadas na atividade. É interessante observar que os alunos não fizeram uso do que haviam registrado nas folhas de anotações e passaram a responder a partir das novas informações. Desta forma concluíram que:

- O ângulo da sombra dependeria do instante de medida;
- Qualquer que seja o instante em que fosse realizada essa medida do ângulo seria única;
- A previsão da medida do ângulo apesar de ser única, nem sempre seria possível ser encontrada, pois dependeria da presença do sol para seu registro.

A última conclusão foi fruto de um debate, com alguns alunos inicialmente defendendo que seria possível obter essa medida. Ao serem questionados pelo professor de qual seria a estratégia utilizada para essa determinação perceberam que não teriam outra estratégia a não ser através dos registros, figura, tabela ou gráfico do ângulo formado pela sombra e das dificuldades de se obter uma expressão algébrica para essa previsão.

Na análise de quais idéias envolvidas nesta e nas atividades anteriores a maioria dos alunos defenderam inicialmente as formas de representação em forma de tabela e representação gráfica. Entretanto um dos alunos acrescentou a variação do comprimento e do ângulo formado pela sombra. Isto permitiu ao professor dar início a institucionalização dos conceitos trabalhados na atividade. Nesta fase final o professor formalizou a variação como idéia central da atividade. Destacou o papel das representações no estudo desta idéia. Comentou que apesar de não se ter obtido as expressões algébricas que descrevem o fenômeno essas são possíveis de determinar, mas dependem de conhecimento de outras ferramentas e variáveis não consideradas na atividade. Entre essas variáveis estaria a relacionada com a inclinação do eixo da terra em relação a trajetória do sol. Essa inclinação interfere não só no comprimento e ângulo da sombra em relação à direção leste – oeste, mas também na determinação do momento em que se o sol “nasce” e se “põe”, dando início e finalizando o dia. Levar em consideração essas variáveis e novas ferramentas que só estarão disponíveis no futuro permitiria a definição das expressões, como fazem os astrônomos.

Prevendo que a próxima sessão será destinada para o fechamento da seqüência o professor deixou questões como quais as características comuns e qual a idéia central para serem aprofundadas no penúltimo encontro. Entretanto da análise acima já podemos observar que o grupo formado pelos alunos AD, já perceberam que as grandezas comprimento e ângulo formado pela sombra dependem da grandeza tempo, sendo essa a grandeza que define a relação. Essa informação será fundamental para a futura definição de domínio e imagem de uma função, mas cremos que possui aspectos cognitivos mais profundos na compreensão do conceito de função.

4.4.6 Sexta atividade

Leia com atenção o texto abaixo, discuta com seu colega as questões propostas, redigindo as respostas de forma mais clara possível.

As relações de dependência que analisamos nas atividades anteriores desenvolvidas anteriores demonstram que, apesar de trabalharmos com a relação entre grandezas de natureza, diversas como, quantidades, comprimento e área, tempo e temperatura, tempo e sombra ou ângulo formado pela sombra, existe um princípio comum a todas elas.

1) Discuta com seu grupo e procure responder:

a) Qual seria este princípio?

b) Qual o papel da unicidade nesse princípio?

c) Qual o papel do intervalo de definição da relação nesse princípio?

d) Como poderíamos formular uma definição que tornasse claro esse princípio?

A definição:

> "*Dizemos que uma variável y está em função de uma variável x quando cada valor de x do intervalo de definição, possui um único correspondente em y*"

Está de acordo com este princípio?

2) Considerando a definição acima podemos dizer que o lado do quadrado da terceira atividade é função da área desse quadrado? E a área do quadrado é função do seu lado?

3) Na primeira atividade, poderíamos definir uma função? Em caso afirmativo, qual seria a relação funcional, número de quadradinhos coloridos x número de quadradinhos sem colorir ou o inverso?

4) Na quinta atividade “a variação da temperatura da água no decorrer do tempo” existe alguma função? Em caso afirmativo qual?

5) E na sexta atividade, a sombra projetada pela haste durante o dia?

Função é uma das ferramentas da matemática que apresenta grande diversidade de aplicação, ao analisar o preço da gasolina, por exemplo, temos uma relação que nos permite calcular o valor a pagar em função do volume de gasolina adquirida. Esta função pode ser obtida por uma lei matemática expressa por:

Valor a pagar = (valor de um litro). (quantidade adquirida), tal expressão em matemática é dada por $V(l) = P.\, l$, onde P é o preço de um litro de gasolina, portanto se em um determinado posto o preço da gasolina é de R$ 1,95 teremos a expressão.

$V(l) = 1{,}95\ .l$, assim se o consumidor adquirir 3 litros de gasolina o valor a pagar $V(l)$ será $V(3) = 1{,}95\ .\ 3 = 5{,}85$ Reais. Observe que a expressão não tem significado para valores negativos de l, sendo lógico definir que a expressão assume significado quando $l > 0$

A este conjunto denominamos de domínio da função e o valor a pagar chama de imagem de l, assim representar V(3) = 5, 85, estamos indicado que a imagem de $l = 3$ é 5,85.

Assim o Domínio desta função pode ser indicada por $D_{(V)} = {}_{+}$ e a imagem $I_{(V)} = {}_{+}$

Com base no que foi definido acima responda:

a) Qual o valor a pagar se forem consumidos 8 litros de combustível?

b) Na segunda atividade o numero de quadradinhos não coloridos é dado pela fórmula

NC = 2 c + 6, o que poderia ser expresso pela lei f (c) = 2c + 6. Quantos são os quadradinhos não coloridos quando nossa figura tiver 18 coloridos. Ou seja, qual é f(18) e quando a figura tiver 32 coloridos.

c) Na quarta atividade a área da horta é dada pela fórmula $A(l) = l\ (\ 28 - 2\ l)$, onde l é a largura da horta em m. Logo podemos escrever $f(l) = l\ (\ 28 - 2l)$. Qual a área da horta quando a largura for de 3 m?

d) Qual a área da horta quando l for 10 m?

e) Qual a largura da horta para que esta tenha 98 m^2 de área?

4.4.6.1 Análise a priόri da sexta atividade.

Parte 1 – Análise geral

Com a sexta atividade pretendemos realizar a Institucionalização do conceito de função dando a ele estatuto de objeto. Uma vez formalizada a definição e estabelecida as convenções esperamos que sejam utilizados pelos alunos na resolução de problemas. Procurando levar o aluno a discutir e buscar ele mesmo uma possível definição dividiremos esta sessão em duas partes. Na primeira, com tempo previsto de 20 minutos, solicitaremos a leitura e discussão entre os alunos seguido de 10 minutos de debate com a participação do professor. Essa questão será apresentada separada do restante da atividade, uma vez que logo a seguir apresentamos a definição proposta por Dirichlet e uma de nossas propostas é o de construir essa definição juntamente com os alunos. O contato com essa definição antes da discussão coletiva poderia induzir a linha de raciocínio dos alunos. Não se espera que os alunos formulem essa definição, mas julgamos que podemos construir juntamente com eles durante a discussão da atividade.

Daremos início à primeira parte solicitando aos alunos que discutam entre si com o objetivo de identificar o que há em comum entre as diversas situações apresentadas. Recordaremos as diversas variáveis trabalhadas, quantidades de quadradinhos, medida do lado do quadrado e sua área, tempo de aquecimento da água e a variação da temperatura e por último o momento em que a sombra da haste gerava certo comprimento. Afirmaremos que existe um princípio comum a todas elas, onde por princípio entendemos existência de uma relação dependência entre duas variáveis. A variação de uma depende da variação da outra. O que é destacado em questionamentos como, na terceira atividade:

"Os valores da tabela acima (referindo-se à tabela elaborada pelos alunos durante a atividade) representam uma relação entre largura e a área da horta onde uma variação da largura leva a uma variação na área da horta.

Podemos dizer que a área da horta depende da largura?

E a largura depende da área da horta?

Qual das duas dependências é mais evidente?", com a expressão "mais evidente" queremos levantar a discussão sobre qual é a variável que determina o comportamento da relação, ou na quarta atividade onde questionamos:

"*Existe dependência entre as variáveis tempo e temperatura?*

O tempo de aquecimento, sempre, interfere na temperatura?

E a temperatura, sempre, interfere no tempo de aquecimento?" .

Insistimos nas atividades que a correta previsão do comportamento da relação só é possível quando, todos os valores da variável "dominante" apresenta unicidade, portanto apresenta apenas uma correspondência com variável "dependente". Com objetivo de institucionalizar estas noções levantamos as seguintes questões:

"*Qual o papel da unicidade nesse princípio?*

Qual o papel do intervalo de definição da relação nesse princípio?

Como poderíamos formular uma definição que tornasse claro este princípio?", dando a oportunidade aos alunos de tentarem elaborar sua própria definição de função.

Finalizada a primeira etapa apresentamos a definição. "*Dizemos que uma variável y está em função de uma variável x quando cada valor de x do intervalo de definição possui um único correspondente em y*", colocando-a em discussão com os alunos. Em seqüência, apresentamos uma revisão das atividades propostas ao longo do projeto solicitando que os alunos reconheçam as funções utilizadas. Dessa forma julgamos estar contribuindo para a formação de um novo Campo Conceitual, de acordo com os princípios definidos por Vergnaud (1990).

A seguir apresentaremos as convenções relacionadas ao objeto matemático fazendo uso de um texto em que analisamos a compra de gasolina. A escolha por esse produto se relaciona com a possibilidade de se elaborar raciocínios envolvendo a continuidade. É fácil argumentar que a quantidade de combustível colocado pela "bomba" no tanque não ocorre em quantidades inteiras, mas segue um fluxo contínuo. Consideramos também o fato do nosso público alvo serem alunos de classe média, com a família possuindo pelo menos um carro, logo abastecer o carro não é uma atividade estranha para eles. Como estamos trabalhando com o valor "*V"* a pagar de uma quantidade "*l* " de gasolina em litros, introduzimos a notação *V(l),* como analogia da *f(x).* Com essa notação, procuramos evidenciar a variável dependente "*V"*, valor a pagar, e a variável independente litro "*l".* Apresentaremos também a definição formal do Domínio e Imagem de uma função.

Dessa forma julgamos estar descontextualizando o conceito de função, dando a ele o status de objeto científico, dentro do edifício do saber matemático. Segue a

atividade apresentando uma série de situações em que a nova notação é utilizada. Com esses exercícios estaremos procurando fixar as convenções definidas na atividade permitindo ao aluno se familiarizar–reutilizando em novas situações, o que caracteriza a quinta fase da dialética ferramenta objeto. São propostas questões que trabalham com as expressões algébricas estudadas ao longo da seqüência. Como por exemplo nos item c, onde apresentamos a seguinte situação
"*Na quarta atividade a área da horta é dada pela fórmula A(l) = l (28 – 2 l), onde l é a largura da horta em m. Logo podemos escrever f(l) = l (28 – 2l). Qual a área da horta quando a largura for de 3 m?"* ou no item d *"Qual a área da horta quando l for 10 m"* A compreensão e manipulação destas notações são fundamentais na compreensão do conceito de função. Julgamos que o aluno esteja apto ao final desta atividade a perceber que *f(3)* significa o valor da função quando *l* = 3, logo a área da horta será dado por *f(3).*

Segunda parte – Resolução e análise da atividade.

Leia com atenção o texto abaixo, discuta com seu colega as questões propostas, redigindo as respostas de forma mais clara possível.

As relações de dependência que analisamos nas atividades anteriores desenvolvidas anteriores demonstram que, apesar de trabalharmos com a relação entre grandezas de natureza, diversas como, quantidades, comprimento e área, tempo e temperatura, tempo e sombra ou ângulo formado pela sombra, existe um princípio comum a todas elas.

1) Discuta com seu grupo e procure responder.

a) Qual seria este princípio?

Resposta: A variação entre duas grandezas

b) Qual o papel da unicidade nesse princípio?

Resposta: Ela garante que não haverá mais que uma correspondência para um mesmo valor do domínio.

c) Qual o papel do intervalo de definição da relação nesse princípio?

Resposta: Ele nos informa quais valores podemos utilizar em nossos cálculos evitando resultados absurdos ou incorretos.

d) Como poderíamos formular uma definição que tornasse claro este princípio?

Resposta vide definição abaixo

A definição:

> *"Dizemos que uma variável y está em função de uma variável x quando cada valor de x do intervalo de definição, possui um único correspondente em y"*

Está de acordo com esses princípios?
Resposta: Sim, pois garante a existência da correspondência para todo x que pertença ao intervalo de definição do domínio e essa correspondência deve ser única.

A primeira questão coloca em discussão os princípios básicos para a definição do conceito de função. Todas a questões já foram trabalhadas em algum momento na seqüência e nosso objetivo é o de institucionalizar o conceito sem que uma definição seja dada pelo professor. Esperamos que no momento da discussão sejamos capazes de construir essa definição com os alunos. A definição, que consta da questão, não fará parte da mesma sendo entregue aos alunos somente após uma definição, pelo parcial, seja construída a partir da contribuição dos alunos.

2) Considerando a definição acima podemos dizer que o lado do quadrado da segunda atividade é função da área desse quadrado? E a área do quadrado é função do seu lado?
Resposta: Tanto a área do quadrado é função de seu lado como o lado do quadrado é função de sua área, uma vez que ambas são grandezas que só admitem valores positivos .
3) Na primeira atividade, poderíamos definir uma função? Em caso afirmativo, qual seria a relação funcional, número de quadradinhos coloridos x número de quadradinhos sem colorir ou o inverso?
Resposta: Sim, o número de quadradinhos não coloridos é função do número de quadradinhos coloridos.
4) Na quarta atividade "a variação da temperatura da água no decorrer do tempo" existe alguma função? Em caso afirmativo qual?
Resposta: A variação da temperatura é função do tempo de aquecimento, embora o comportamento dessa função não seja o mesmo durante todo o período de tempo estudado.
5) E na quinta atividade, o comprimento da sombra projetada pela haste durante o dia é função do instante em que foi realizado o registro?
Resposta: o comprimento da sombra é função do instante em que o registro foi realizado, uma vez que a cada instante temos apenas uma medida para esse comprimento em todo período do registro.

Essas quatro questões tem por objetivo ver a definição tomando como base as situações trabalhadas nas seqüências. Com ele iniciamos o fechamento das quatro etapas inicias da dialética ferramenta-objeto, com a intitucionalização do conceito e sua fixação fazendo uso das situações já conhecidas. Dessa forma estamos formalizando essas situações parte do conjunto das situações S que dão significado ao conceito de função em seu campo conceitual. As convenções e definições que complementam a quarta etapa será realizada na seqüência da atividade com o texto proposto abaixo.

Função é uma das ferramentas da matemática que apresentam grande diversidade de aplicação, ao analisar o preço da gasolina, por exemplo, temos uma relação que nos permite calcular o valor a pagar em função do volume de gasolina adquirida. Esta função pode ser obtida por uma lei matemática expressa por:

Valor a pagar = (valor de um litro).(quantidade adquirida), tal expressão em matemática é dada por $V(l) = P.\ l$, onde P é o preço de um litro de gasolina, portanto se em um determinado posto o preço da gasolina é de R$ 1,95 teremos a expressão.

$V(l) = 1{,}95\ .l$, assim se o consumidor adquirir 3 litros de gasolina o valor a pagar $V(l)$ será V(3) = 1,95 . 3 = 5,85 Reais. Observe que a expressão não tem significado para valores negativos de l, sendo lógico definir que a expressão assume significado quando $l > 0$

A este conjunto denominamos de domínio da função e o valor a pagar chama de imagem de l, assim representar V(3) = 5, 85, estamos indicado que a imagem de $l = 3$ é 5,85.

Assim o Domínio desta função pode ser indicada por $D_{(V)} = \ _+$ e a imagem $I_{(V)} = \ _+$

Com base no que foi definido acima responda.

a) Qual o valor a pagar se forem consumidos 8 litros de combustível?

Resposta: V(8) = 1,95 . 8 = 15, 60 Reais.

b) Na segunda atividade o número de quadradinho não colorido é dado pela fórmula NC = 2 c + 6, o que poderia ser expresso pela lei $f(c) = 2c + 6$. Quanto são os quadradinhos não coloridos quando nossa figura tiver 18 coloridos. Ou seja qual é *f(18)* e quando a figura tiver 32 coloridos?

Respostas:

f(18) = 2 . 18 + 6 = 42 quadradinhos sem colorir

Se a figura tiver 32 quadradinhos coloridos representamos por f(32) = 2 . 32 + 6 = 70 quadradinhos sem colorir.

b) Na terceira atividade a área da horta é dada pela fórmula *A(l) = l (28 – 2 l),* onde l é a largura da horta em m. Logo podemos escrever *f(l) = l(28 – 2l).* Qual a área da horta quando a largura for de 3 m?

Resposta: Se a largura da horta for de 3 m temos f(3) = 3 (28 – 2 . 3) = 66 m^2 *de horta.*

d) Qual a área da horta quando *l* for 10 m?

Resposta: Se a largura da horta for de 10 m temos f(10) = 10 (28 – 2 . 10) = 80 m^2 *de horta*

e) Qual a largura da horta para que esta tenha 98 m^2 de área?

Resposta: Se a área for de 90 m^2*, temos f(x) = 98, logo*

98 = l (28 – 2l), portanto l = 7 m

Com essas questões, fechamos a quarta etapa da dialética e iniciamos o trabalho dentro da quinta etapa, com a reutilização em situações novas já aplicando as convenções envolvendo o conceito de função. Para a elaboração das questões continuamos fazendo uso das situações propostas na seqüência, ao mesmo tempo que formalizamos uma nova representação para a imagem de um elemento do domínio. Essa nova representação, juntamente com as representações já trabalhadas na seqüência formam o conjunto de representações R desse campo conceitual.

4.4.6.2 Análise a posteriori da sexta atividade

Ao contrário das duas seções anteriores, em que tivemos uma grande ausência, nessa todos os alunos participantes do projeto estavam presentes. Como planejado, o professor distribuiu a folha constando a primeira parte da atividade e definiu o tempo de vinte minutos para discussão da mesma. Apesar de ter sido solicitado a formação de grupos com no máximo três alunos observou-se a interação entre eles que culminou com a fusão de dois deles. Dois grupos apresentaram relatórios separados, mas com conclusões idênticas. A variação não apareceu inicialmente como sendo a idéia central desenvolvida nas atividades. Nas anotações referente à pergunta, "Qual seria o princípio comum às atividades?", as respostas giraram em torno das estratégias utilizadas na resolução das situações propostas. Um dos grupos respondeu que o princípio era o de "*Mostrar diversas formas de resolver e representar um problema*" , dois grupos apresentaram a mesma resposta "*Tentar resolver os problemas de uma forma mais prática. Juntar todos os pontos* *possíveis".* Quanto a unicidade os alunos ressaltaram a importância de se ter resposta única na correspondência entre duas variáveis pois "*podemos resolver o problema de diferentes formas e ter certeza de que a resposta será a mesma*".

Quanto a necessidade de se conhecer o intervalo de validade da relação os alunos responderam que é fundamental "*saber como a relação se comporta, podendo ter comportamento diferente em intervalos diferentes como na quarta atividade*" Nenhum grupo conseguiu formular uma definição para a idéia trabalhada na atividade. A variação como idéia central não apareceu em nenhuma das tentativas de definição. Essas tentativas se restringiram à parte resolutiva dos problemas. Um dos grupos propôs a seguinte frase como definição. "*Devemos fazer uso de tabelas e gráficos para resolver os problemas"*. O grupo de alunos que não faltou a nenhuma das seções e que denominamos seus componentes por AD nos diálogos são os que parecem mais se aproximar da noção de dependência. De acordo com eles "*nos exercícios, sempre há dados diferentes, mas dependentes entre si".*

Para dar início à discussão nessa primeira etapa o professor colocou as três questões na lousa.

- Qual seria este princípio?
- Qual o papel da unicidade neste princípio?
- Qual o papel do intervalo de definição da relação neste princípio?

Registando-se o seguinte diálogo:

P: O que nós estamos estudando nessas atividade são os gráficos, a tabela, as expressões algébricas?

AD: A dependência para obter as respostas.

P: Então o que vocês acham?

A: Poderia ser para compreender a lógica por trás das atividades.

P: É, todos os problemas possuem uma lógica própria. Mas o que todas essas atividades tem em comum?

A: Todas tem o gráfico.

P: Todas tem o gráfico, a expressão algébrica, a tabela, mas será que é isso que queremos estudar?

AD: Todas tem algo mais.

A: A relação que tem é que quando muda uma muda a outra.

P: Certo. O gráfico, a tabela as expressões algébricas, o modo com que o problema é apresentado são as formas de representar as idéias envolvidas. Mas qual seria a idéia central?

AD: A variação.

P: Então. O princípio que está por trás de todas as atividades é a variação. A medida que uma grandeza varia isto leva a uma variação na outra. Observe que trabalhamos em cinco atividades e nas cinco as grandezas eram diferentes. Mas a idéia central sempre permanecia a mesma. À medida que uma delas variava a outra também sofria variação.

P: É importante que eu consiga prever como ocorrerá essa variação?

AD: É

P: É importante que essa previsão seja única?

A: Sim, se for única é mais fácil para trabalhar.

P: E saber que valores utilizar?

A: É necessário

Observamos que inicialmente os alunos se concentram na resolução do problema mudando o foco para as formas de representação utilizada nas atividades. A percepção de que o objetivo estava na variação só é apresentada após o questionamento por parte do professor de qual seria a idéia central por trás das atividades. A importância de se prever o comportamento da variação a unicidade para qualquer que seja o valor escolhido no intervalo de definição da variação parece ter ficado mais claro para os alunos. Das respostas formuladas, o professor pediu que os alunos procurassem redigir uma única resposta que representasse todas as que foram apresentadas, concluindo-se ao final da discussão que a *"unicidade é importante para se garantir que a resposta seja a mesma, independente de como tenha sido obtida."* O intervalo de definição da relação de acordo com os alunos nos permite "*definir quais valores podemos utilizar para procurar a resposta desejada"*. Finalizando essa primeira etapa o professor institucionalizou que uma relação de dependência que apresentava resposta única num intervalo previamente definido é chamado de função dentro da matemática.

Pediu então aos alunos que propusessem uma definição para este novo conceito matemático. Como nenhum grupo apresentasse sua definição o professor relembrou algumas característica do novo objeto anotando na lousa:

- Apresenta variação entre duas grandezas.
- Queremos prever como se dará a variação.
- É importante que a previsão tenha resposta única.

- Definir os valores que serão usados nessa previsão.

Dando início ao seguinte diálogo:

P: função é.....

A: uma relação de dependência de um x

P: pode ser e o que mais?

A: por um y.

P: Então na atividade dos quadradinhos quem seria o x?

A: O x seriam os quadradinhos não coloridos.

P: De acordo com a definição o x são os quadradinhos não coloridos e o y os quadradinhos coloridos, é ele que define a relação

P: Então função é uma dependência de um valor x por um valor y?

P: Na atividade do aquecimento da água quem está em função de quem?

AD: A temperatura em função do tempo.

P: Como podemos melhorar essa definição. ...

P: Será que esta definição está satisfatória, a unicidade está sendo considerada.

A: função é uma dependência de um valor x para cada valor y.

P: Não poderia ser: Função é uma dependência entre duas grandezas com correspondência única para cada x e seu correspondente valor de y?

A: pode ser.

P: Que mais? Na terceira atividade, poderíamos ter uma horta com quinze metros de largura?

AD: Não, a largura máxima era 13 metros.

P: Então.

AD: Função é uma correspondência válida dentro de intervalos definidos em dois conjuntos.

P. Mas e a unicidade

AD: Função é uma relação de dependência entre duas grandezas de modo que se tenha correspondência única entre todos os valores em um intervalo definido da primeira como os valores da segunda.

Observamos que as definições foram sendo construídas ao longo das discussões com participação tanto do professor quanto dos alunos As opiniões dos alunos eram anotadas, discutidas e questionadas pelo professor.

Ao final da primeira versão o professor levantou a questão sobre a unicidade não estar sendo considerada Esse alerta levou à reestruturação da primeira versão dando origem uma segunda com o professor contribuindo na sua elaboração. Nessa versão ainda não existe a preocupação com a definição do domínio da função no que são alertados sobre o que ocorreria, por exemplo, caso desejássemos uma horta com largura de quinze metros Os alunos retomaram a terceira atividade e identificaram que a largura máxima seria próximo de 14 metros, gerando uma discussão que resultou na terceira versão. Observamos que os alunos se esqueceram da variação nesta definição, o que foram alertados pelo professor, dando origem à quarta versão da definição. Percebe-se dessas discussões, envolvendo a primeira parte da atividade, que o alunos, principalmente o grupo AD, já possuem um certo domínio das informações básicas para a compreensão do conceito de função, embora não consigam explicitá-la espontaneamente.

Para leitura e resolução das questões na segunda parte da atividade, em que apresentava a definição de função e as convenções para este novo objeto, foram destinados trinta minutos. As discussões da etapa anterior resultou na reorganização dos alunos resultando na formação de apenas dois grupos. Como as discussões internas aos grupos envolvia a participação de quase todos os alunos, o professor julgou por bem não intervir nessa nova formação. Os dois relatórios apresentados ao final parecem demonstrar a compreensão da discussão anterior com todas as respostas podendo ser consideradas satisfatórias. A última questão em que se solicita o cálculo de algumas imagens utilizando a nova notação teve os quatro primeiros itens realizado corretamente pelos dois grupos, sem que tenha sido pedido auxílio ao professor. O uso dessa notação já tinha sido realizada nas atividades anteriores, o que nos permite explicar a facilidade na sua utilização por parte dos alunos. O item “e”, onde se questionava, “Qual largura da horta para que se tenha 98 m^2 de área?” foi o único que apresentou resolução diferente nos dois relatórios. Ambos os grupos parecem ter compreendido que $f(l) = 98$, como foi registrado por um dos grupos em seu relatório, entretanto esse fez uso desse valor também para l numa das variáveis da função, registrando: 98 = x(28 – 2 . 98), desenvolvendo a equação resultante. O segundo incluindo os alunos do grupo identificado por AD em nossos diálogos, realizou as substituições de forma correta mas não explicitou os cálculos realizados apresentando apenas o resultado final, $l = 7$ *m*.

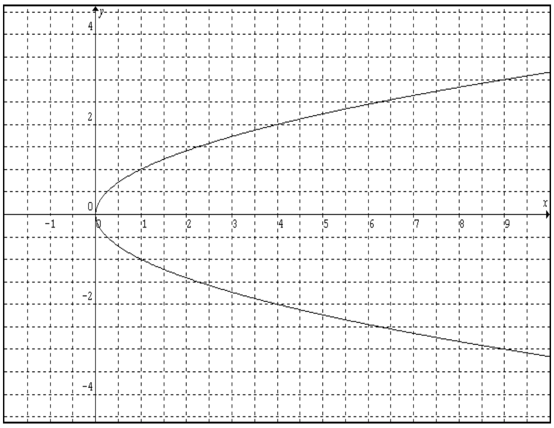
Finalizado o prazo, o professor deu início às discussões utilizando as respostas dos alunos para realizar a institucionalização final. Dessa forma deu ao conceito de função o status de saber científico, passando assim para a quinta etapa da dialética ferramenta objeto a familiarização-reutilização numa situação nova de forma a fixar o conceito disponibilizando como ferramenta para solução de novos problemas.

4.4.7 Sétima atividade

1) Uma função definida com domínio no conjunto dos Reais sobre os Reais é dada pela expressão matemática *f(x)* = $-3x + 4$. Determine as imagens da função para valores de x ={-2,1,3,4}.

Dizemos que uma função é crescente quando a medida que aumenta o valor de x, aumenta também o valor de f(x), se o aumento de x leva a diminuição de f(x) dizemos que a função é decrescente. A função acima é crescente ou decrescente?

2) O gráfico abaixo representa a equação $x - y^2 = 0$

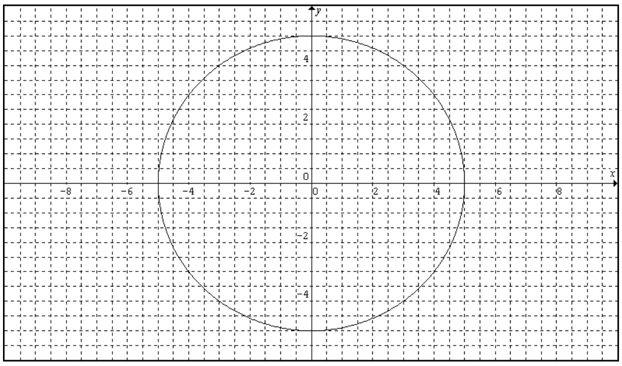


a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

b) E x está em função de y? Por quê?

c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

3) O gráfico abaixo representa a equação $x^2 + y^2 = 25$



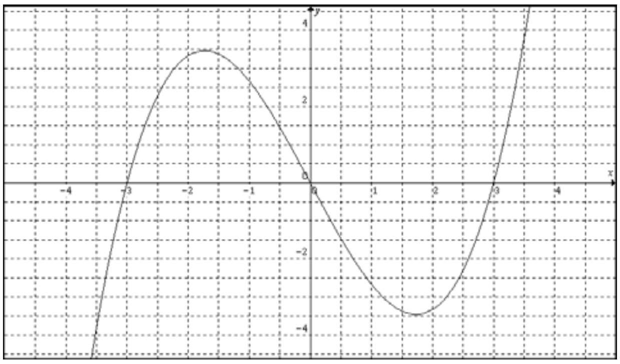
a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

b) E x está em função de y? Por quê?

d) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

d) Se em nenhuma das opções temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria equação uma função?

4) O gráfico abaixo representa a equação $x^3 - 9x - 3y = 0$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?
b) E x está em função de y? Por quê?
c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?
d) Se em nenhuma das opções não temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria a equação uma função?

5) Em física o movimento de um corpo em lançamento de um corpo é dado pela expressão $h = 40\,t - 5\,t^2$ onde a altura h é dado em metros e t, tempo decorrido após o lançamento em segundos.

a) Identifique o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

b) Identifique a altura máxima

4.4.7.1 Análise a priori da sétima atividade**.**

Esta última atividade tem por objetivo continuar a familiarização e avaliar a eficiência de nossa proposta através da proposição de situação nova em forma de problema. Com o último problema trabalharemos a etapa final da dialética ferramenta–objeto, a complexificação, uma vez que sua solução faz uso do conceito de função como ferramenta. A atividade será subdividida em duas partes sendo a primeira, com tempo estimado de oitenta minutos, destinada ao aprofundamento da reutilização – familiarização e a segunda com previsão de 20 minutos para a resolução do problema citado.

A primeira fase é composta por quatro exercícios sendo solicitada nos três últimos uma análise de três gráficos, e que apenas o último é uma função de x. A primeira questão foi elaborada utilizando-se uma função de primeiro grau e um pequeno texto definindo o conceito de função crescente e decrescente. Esperamos que os alunos mobilizem como ferramenta os conhecimentos envolvendo as novas convenções relacionadas ao conceito de função, particularmente a obtenção da imagem *f(x)* para um x conhecido.

As três próximas questões se referem à análise de equações representadas graficamente, com o objetivo de identificar as que representam uma função. A primeira representação gráfica é a da equação $x – y^2 = 0$. Essa equação não é uma função de x, mas esperamos que os alunos percebam que representa uma relação que corresponda a uma função em y. Esse fato já foi observado pelos alunos submetidos ao pré-teste desenvolvido para esta dissertação. O segundo gráfico representa a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 25$. Ela também não expressa uma função, mas podemos restringir o domínio da relação no intervalo de [-5, 5] e contra domínio em $_{+}$ ou $_{-}$. Estas restrições permitem classificar a representação como uma função no domínio e contra domínio definido. Esperamos que estes aspectos sejam colocados em discussão pelos alunos. Por último proporemos para análise o gráfico da equação $x^3 –9x – 3y =0$, que representa uma função em x. A análise desses três gráficos fecha a seqüência e tem por objetivo colocar em discussão a definição de função a partir do quadro da geometria analítica. Esperamos que os alunos desenvolvam habilidade suficiente para discutir a representação sem a necessidade de estabelecimento de "regras" que permitam identificar se o gráfico representa ou não uma função.

Finalizando a atividade propomos um problema de física envolvendo o lançamento de um corpo. Com ele esperamos que os alunos mobilizem o raciocínio funcional desenvolvido ao longo da seqüência como ferramenta para sua resolução. Essa última questão, como já dissemos, compõe a sexta etapa da dialética ferramenta objeto complexificação de tarefa ou novo problema. O problema:

Em física o movimento de um corpo em lançamento de um corpo é dado pela expressão $h = 40\ t – 5\ t^2$ onde a altura h é dado em metros e t, tempo decorrido após o lançamento em segundos.

a) Identifique o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

b) Identifique a altura máxima

A questão envolve a variação da altura do corpo em função do tempo. Em sua solução esperamos que os alunos calculem qual será a altura do corpo em diversos instantes, representem graficamente esses dados analisando e identificando o instante e altura solicitados. Cremos que agindo dessa forma estarão aplicando o novo conhecimento como ferramenta explícita, dando a ele o estatuto de conhecimento antigo. Essa convicção se baseia na distinção entre as noções de quantidades desconhecidas e variáveis propostas por Sierpinska (1992), ao analisar as condições para que se entender o conceito de função. "Discrição entre os dois modos de pensamento matemático: um em termos de quantidade conhecida e quantidade desconhecida, outro em termos de variável e quantidades constantes"(Sierpinska 1992. p 37). Para identificar qual a altura máxima atingida pelo corpo o aluno tem a necessidade de pensar em termos de variáveis, o que caracterizaria a presença do raciocínio funcional. Essa distinção na forma de pensar segundo a autora tem suas origens em obstáculos epistemológicos, mais especificamente o obstáculo classificado por ela como "pensamento em termos de equações e da obtenção de um termo desconhecidos a partir dela".(Sierpinska 1992 p. 37).

Dessa forma fechamos o ciclo da dialética ferramenta-objeto. Se os alunos forem capazes de apresentar a solução envolvendo o raciocínio funcional podemos considerar validados as nossas hipóteses.

Parte 2 – Resolução e análise da atividade.

1) Uma função definida com domínio dos Reais sobre os Reais é definida pela expressão matemática $f(x) = -3x + 4$. Determine as imagens da função para valores de x ={-2,1,3,4}

Dizemos que uma função é crescente quando a medida aumenta o valor de x, aumenta também o valor de f(x), se o aumento de x leva a diminuição de f(x) dizemos que a função é decrescente. A função acima é crescente ou decrescente?

Respostas:

f(-2) = -3 . (-2) + 4 = 10 + 4 = 14

f(1) = -3 . (1) + 4 = (-3) + 4 = 1

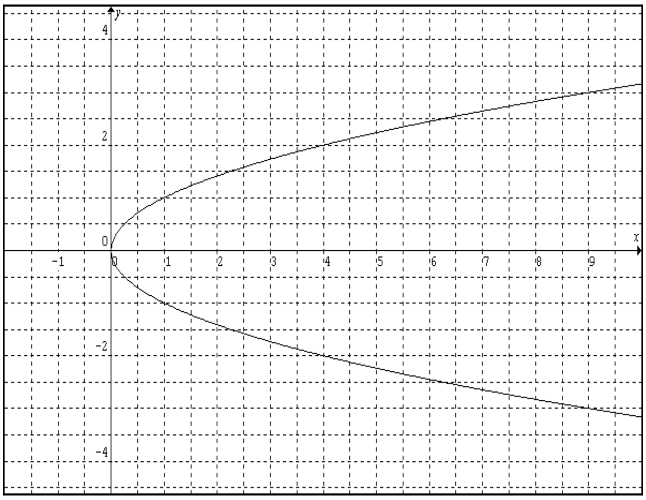
f(3) = -3 . (3) + 4 = (-9) + 4 = -5

f(4) = -3 . (4) + 4 = (-12) + 4 = -8

A função é decrescente, pois à medida que o valor de x aumenta, o valor de f(x) diminui.

A questão é uma aplicação imediata da nova representação e dá seqüência a reutilização da nova ferramenta. A classificação solicitada busca mostrar uma das características dessa nova ferramenta, que é o de permitir a análise do comportamento da variação.

1) O gráfico abaixo representa a equação $x - y^2 = 0$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

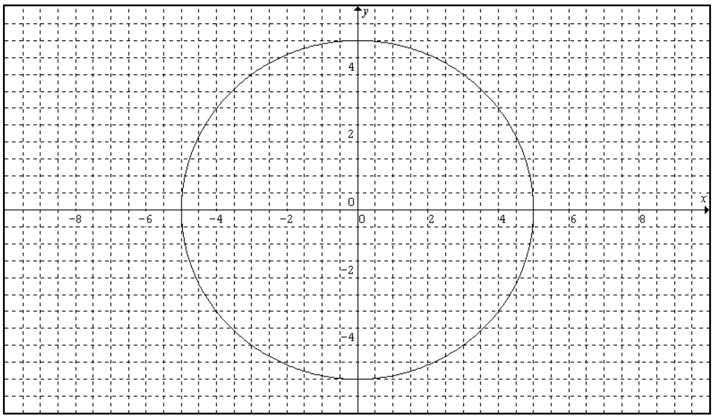
b) E x está em função de y? Por quê?

c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

Resposta: A equação não representa um função de y em x, pois para x = 4 temos y = - 2 e y = +2, o que não está de acordo com a definição de função. Mas podemos considerar que x está em função de y, pois para todo valor y de , temos um único x como correspondente, o que está de acordo com a definição.

A questão solicita uma análise de um gráfico que não representa função na forma da definição convencional, mas podendo ser classificada como função se considerada a relação inversa. Esperamos que os alunos identifiquem essa possibilidade, como já ocorreu na atividade aplicada no pré teste.

2) O gráfico abaixo representa a equação $x^2 + y^2 = 25$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre as variáveis x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

b) E x está em função de y? Por quê?

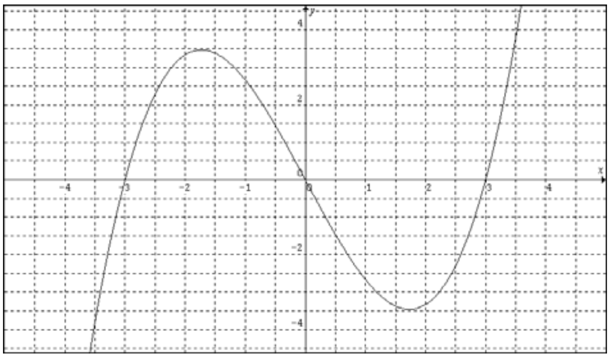
c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

d) Se em nenhuma das opções não temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria equação uma função

Resposta: A equação não representa uma função em nenhuma das situações propostas, mas se restringirmos o Domínio no intervalo [-5,5[e o contra-domínio a $_{+}$ *ou* $_{-}$ *teremos a definição de funções . Considerando a função com contra-domínio em* $_{+}$*, a função será crescente no intervalo de [-5,0] e crescente de [0,5]. Já no contra–domínio* $_{-}$*, a função é crescente no intervalo de [0,5] e crescente de [-5,0]*

Da mesma forma que a anterior essa equação não representa uma função de acordo com a convenção para a representação e nem para a relação inversa. Entretanto a definição de domínio e contra–domínio conveniente, como destacado nas respostas nos permitirá a definição de relações funcionais.

4) O gráfico abaixo representa a equação $x^3 - 9x - 3y = 0$



a) Na expressão temos uma relação de dependência entre x e y! Poderíamos dizer que y está em função de x? Por quê?

Resposta: Na equação acima, y está em função de x, pois qualquer que seja x no domínio Real existe um único correspondente y no contra–domínio.

b) E x está em função de y? Por quê?

Resposta: Na equação acima, não representa função de x em , pois para y = 0 temos x= -3, x=0 e x = +3, logo três correspondências.

c) Se em uma das opções a expressão representa uma função para que valores ela é crescente ou decrescente?

Resposta a função é crescente nos intervalos de { x ∈ / x < -1,7ou x > 1,7} e decrescente para { x ∈ / -1,7 < x < 1,7}

d) Se em nenhuma das opções não temos uma função, haveria uma faixa de valores que tornaria a equação uma função.

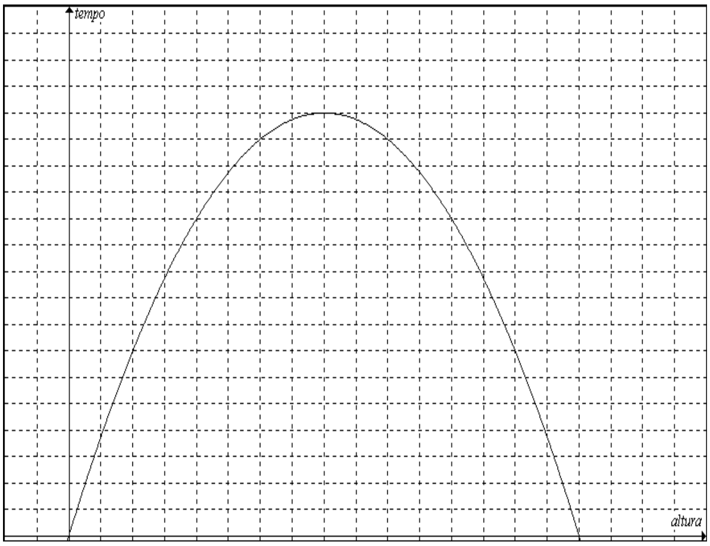
Resposta: A equação representa uma função de y em x

O terceiro gráfico é o único em que temos representação de uma função de y em x. Entretanto a relação inversa não representa função, o que esperamos que seja identificado pelos alunos.

5) Em física o movimento de um corpo em lançamento de um corpo é dado pela expressão $h = 40\,t - 5\,t^2$ onde a altura h é dada em metros e t, tempo decorrido após o lançamento em segundos.

a) Identifique o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

Resposta: Sabemos que a trajetória corpo será a indicada no gráfico abaixo, esperando-se que o tempo subida seja o mesmo gasto na trajetória de queda, logo será a metade do tempo *para sair da altura h = 0 metros e voltar a altura h = 0 metros, portanto basta resolver a equação 0 = 40 t – 5 t^2, cujas soluções são 0 e 8 segundos.*



logo, o instante para atingir a altura máxima será $t_{h_{max}} = \frac{0+8}{2} = 4$ *segundos*

b) Identifique a altura máxima

Resposta: logo para t = 4 então h = 40 . 4 – 5 . 4^2 = 80 m. portanto a altura máxima será de oitenta metros.

A solução apresentada acima é a que julgamos ideal uma vez que se enquadraria dentro de uma perspectiva analítica, própria do quadro funcional. Levamos em consideração que os alunos não conhecem as propriedades da função do segundo grau, logo não teriam condições de obter o ponto máximo da parábola e o instante para esse ponto máximo, fazendo uso dessas propriedades. Entretanto devido a estrutura das atividades desenvolvidas no projeto cremos que uma possível solução será a apresentada a seguir:

Como h = 40 t – 5 t^2.

Se t = 1 então h = 40 .1 – 5 . 1^2 = 35 m

Se t = 2 então h = 40 . 2 – 5 . 2^2 = 60 m

Se t = 3 então h = 40 . 3 – 5 . 3^2 = 75 m

se t = 4 então h = 40 . 4 – 5 . 4^2 = 80 m.

se t = 5 então h = 40 . 5 – 5 . 5^2 = 75 m

Se t = 6 então h = 40 . 6 – 5 . 6^2 = 60 m

Se t = 7 então h = 40 . 7 – 5 . 7^2 = 35 m., logo o instante que o corpo atinge a altura máxima é t = 4 segundos, portanto *a altura máxima será de oitenta metros.*

Essa solução com características funcionais pode ser complementada com a representação dos cálculos acima no plano cartesiano e a interpretação dos dados a partir dessa representação. Cremos que esse enfoque se enquadraria melhor na perspectiva do quadro funcional da forma com que trabalhamos ao longo de nosso projeto.

4.4.7.2 Análise a posteriori da sétima atividade.

Doze alunos participaram da última atividade, formando quatro grupos de três componentes cada um. Como previsto foi feita a distribuição pelo professor da folha de atividade com as quatro primeiras questões. Estipulou-se um prazo de, no máximo, cinqüenta minutos para resolução e discussão do exercício, destinando cerca de trinta para discussão e correção geral das questões propostas na atividade. A primeira questão não apresentou dificuldades na sua resolução. Dos quatro grupos apenas um não substituiu o valor de x na notação *f(x),* mas fez a substituição correta na expressão. Os quatro grupos calcularam todos os dados solicitados, como mostra a figura 8. Entretanto apenas o grupo cujos componentes denominamos por AD respondeu explicitamente a questão, classificando a função como decrescente.

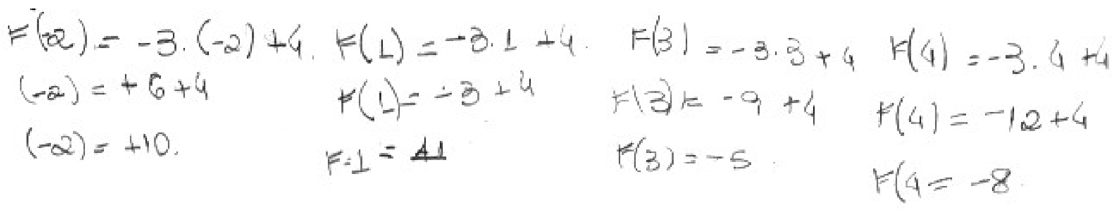


figura 8: Determinação da imagem de f(x) = -3x + 4, fazendo uso da nova notação pelos alunos da oitava série.

A representação gráfica, entretanto, não apresentou o mesmo resultado observado na parte algébrica. Questionados, se na primeira representação, y estava em função de x apenas o grupo já identificado acima respondeu corretamente, afirmando que não, mas ao justificar a resposta não foi possível perceber se tinham dominado o conceito corretamente. Entretanto o mesmo grupo respondeu corretamente as três representações, o que parece indicar que já possuem esse domínio. Essa conclusão se reforça ao se observar que esse grupo percebeu que no gráfico da equação $x - y^2 = 0$, y não está em função de x mas x está em função de y.

Os outros três grupos responderam que todos os gráficos representavam função argumentando que “uma variável depende da outra”.

A institucionalização local, através da discussão das soluções dos grupos ocorreu como planejado, com a exposição de suas conclusões por parte dos grupos. Como todos os grupos haviam resolvido satisfatoriamente a primeira questão foi pedido que discutissem os itens referentes aos gráficos. O professor solicitou aos alunos que expusessem suas respostas e o motivo que os levou a essa conclusão. Somente o grupo que respondeu corretamente as três questões é que conseguiu dar uma justificativa coerente para sua resposta, argumentando sobre a duplicidade de valores y para um determinado valor de x nos gráficos da segunda e terceira questões, fato que não ocorria no gráfico da quarta questão. A restrição no domínio, entretanto, não foi observada por nenhum dos grupos. Questionados se no gráfico da primeira equação poderíamos considerar que x estava em função de y, o grupo anterior afirmou que “sim, pois cada y se correspondia com apenas um x”. Os demais grupos se omitiram nessa discussão, simplesmente concordando com a colocação dos colegas. Não podemos afirmar que esses alunos tenham compreendido a observação, ou se concordaram apenas por não conseguirem contrapor o colega, ou para encerrar a discussão. Quando questionados se existiria a possibilidade de restringir parte do gráfico da terceira questão, segundo gráfico da atividade, de forma a ter a representação de uma função o mesmo grupo observou: “AD: Tem que pegar um quarto do gráfico. Qualquer quarto que pegar é função”, ou seja em qualquer um dos quadrantes x teria correspondência única, entretanto não perceberam que havia a necessidade de definir o domínio nesse quadrante.

As discussões se alongaram mais do que o programado, mas julgo que foram importantes para esclarecer dúvidas referentes às propriedades que identificam se um gráfico representa ou não uma função. Como as institucionalizações foram ocorrendo ao logo da discussão, o professor optou por passar à etapa seguinte da atividade solicitando que os alunos resolvessem a última questão. Dessa forma fechamos a experimentação.

4.4.7.3 Análise da solução do problema.

A resolução da quinta questão, proposta com o objetivo de verificar a validade ou não de nossas hipóteses, foi desenvolvida nos vinte minutos finais como planejado.

Sendo os alunos menores de idade e os trabalhos referentes à pesquisa realizada fora do período normal de aulas, havia a necessidade de que o encerramento ocorresse exatamente às quatorze horas e quarenta minutos. Essa limitação mostrou-se prejudicial ao desenvolvimento da atividade, pois segundo os alunos, não foi possível a todos os grupos terminarem o exercício proposto. Para essa resolução o professor colocou à disposição dos alunos folhas de sulfite, papel almaço pautado e de papel almaço quadriculado, deixando a cargo dos alunos a escolha do tipo de papel que utilizariam. É importante destacar que em nenhum momento houve a participação do professor nessa resolução. Dos quatro grupos apenas o grupo dos alunos denominados de AD terminaram a resolução do problema, que apresentamos resumidamente a seguir.

Inicialmente os alunos desenvolveram o cálculo da altura do corpo para os instantes variando de 2 a 7 segundos (figura 9). Esses cálculos parecem indicar a presença do raciocínio envolvendo a variação e correspondência entre as duas

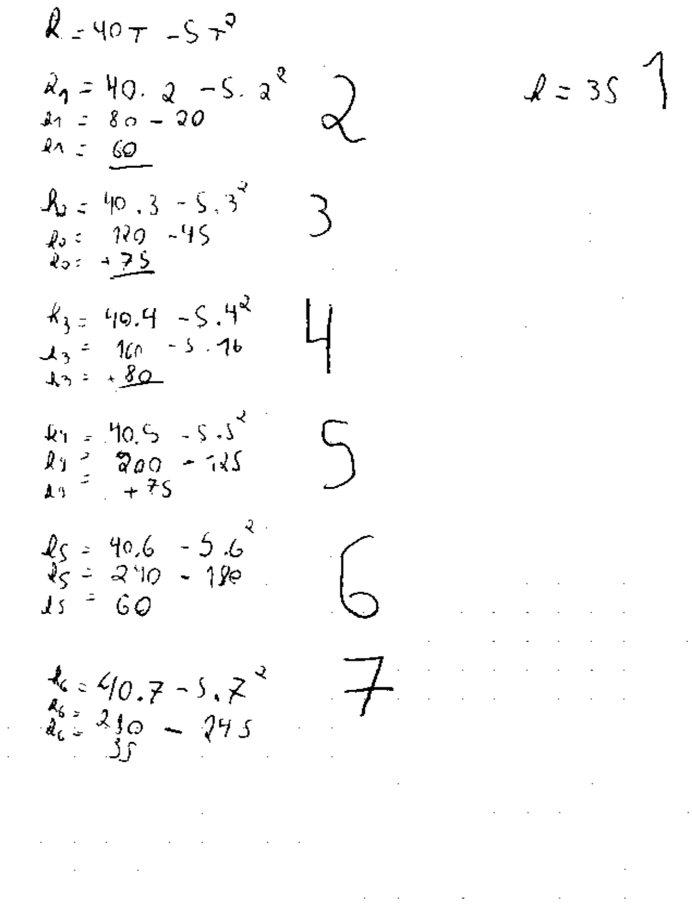


figura 9: Cálculos desenvolvidos pelos alunos do grupo que apresentou a solução do problema

grandezas sendo realizado em forma seqüencial. Apesar da indicação h_1 em vez da notação algébrica h(x), percebemos a preocupação em se identificar o instante a que se refere a altura pela indicação a direita do cálculo desse instante. Esses cálculos já permitiriam a formulação da resposta, entretanto observamos a elaboração da representação gráfica (figura 10) o que parece ser resultante do

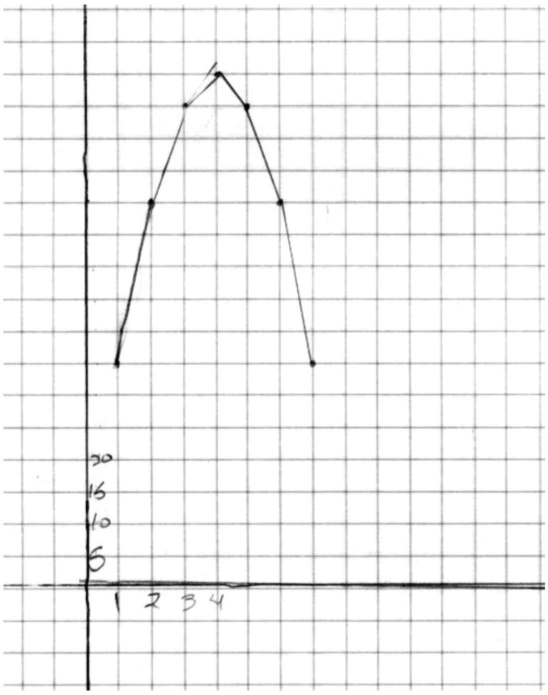


figura 10: Gráfico elaborado pelos alunos para resolução do problema envolvendo o lançamento de um corpo

contrato didático construído ao longo do projeto. Todas as situações em que se obtinham os dados numéricos eram representados graficamente, logo se espera que o mesmo deva ser feito nesse problema. Por fim apresentaram a resposta (figura 11). Do exposto podemos concluir que os alunos desse grupo conseguiram

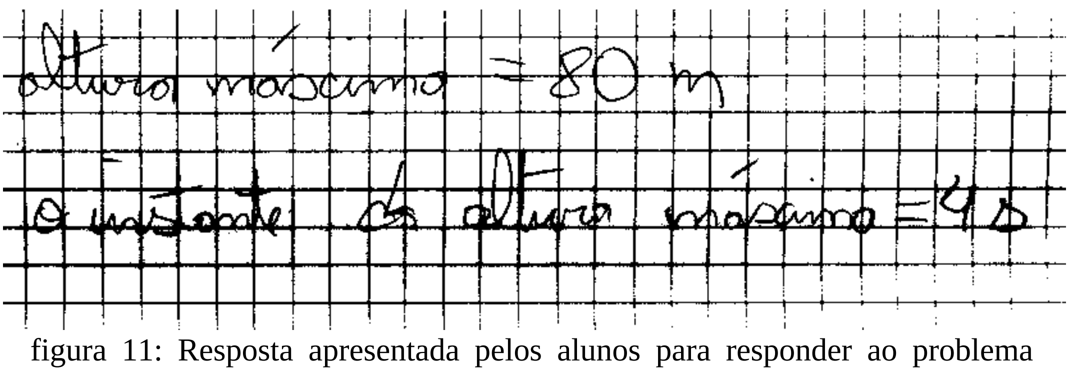


figura 11: Resposta apresentada pelos alunos para responder ao problema formulado observando a utilização do conceito de função como ferramenta na sua solução, complexificação - reutilização.

responder o problema proposto. Aplicaram os princípios de variação e correspondência calculando a altura do corpo em diversos instantes e representaram esses dados graficamente.

Os demais grupos não conseguiram resolver plenamente o problema proposto, com a representação gráfica e a apresentação dos resultados. Entretanto deram início ao desenvolvimento do raciocínio necessário para sua solução, como podemos observar na (figura 12). Os cálculos parecem indicar uma falta de organização nas idéias desses alunos, Parecem calcular de forma aleatória as alturas do corpo em

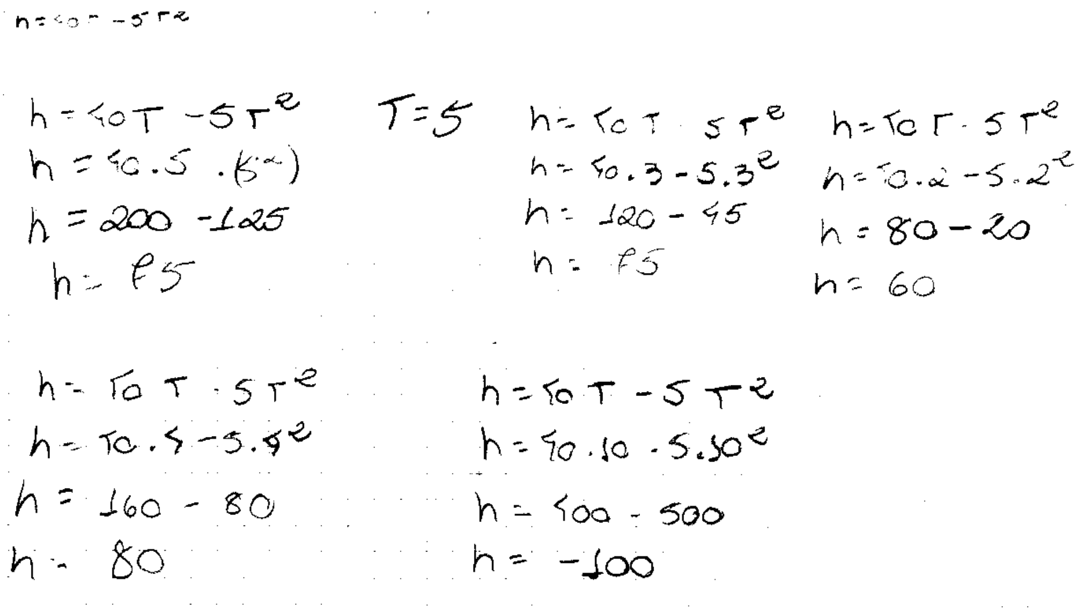


figura 12: Cálculos desenvolvidos por alunos que não conseguiram resolver completamente o problema proposto para complexificação - reutilização.

diversos instantes demonstrando possuir certo domínio da noção de dependência e correspondência entre as grandezas, tempo e altura do corpo. Observamos que apesar de não obterem a solução do problema proposto, por falta de tempo, segundo os alunos, o desenvolvimento desses cálculos da altura e sua representação, tanto na forma gráfica como em forma de tabela, permitiria a apresentação da solução desejada.

Considerações finais

Nossa pesquisa partiu da constatação das dificuldades enfrentadas pelos alunos, na utilização do conceito de função, como ferramenta de trabalho na resolução de problemas. Essas dificuldades estariam relacionadas com a falta de significado desse conceito para ele, uma vez que o modo que o conceito é trabalhado em nosso sistema de ensino não cria as condições para a formação do campo conceitual a ele relacionado. O conceito é definido a partir de exemplos centrados basicamente na teoria dos conjuntos, seguido de estudos envolvendo casos particulares de famílias de funções como as do primeiro e segundo graus. As situações que poderiam dar significado a esse conceito são trabalhadas de forma isolada, não havendo a preocupação com o desenvolvimento de idéias importantes como as de dependência e correspondência.

Tomando como ponto de partida essas constatações, elaboramos nossa pesquisa com o objetivo de verificar a validade de uma estratégia de ensino, que possa tornar esse objeto matemático significativo para o aluno. A nossa estratégia se baseia na dialética ferramenta-objeto desenvolvida por Régine Douady. Como analisada no desenvolvimento de nossa dissertação, “a dialética ferramenta objeto é um *processo cíclico que organiza os pólos do professor e do aluno, ao longo do qual os conceitos matemáticos desempenham alternativamente o papel de instrumento para resolver um problema e de objeto que toma lugar na construção de um saber organizado”* (DOUADY, 1986 p. 5 tradução nossa). Partindo desse princípio formulamos as seguintes questões de pesquisa.

Se colocado frente a uma seqüência didática que utilize como ferramenta conhecimentos cotidianos, como a dependência entre duas grandezas proporcionais e escolares, como a representação gráfica de uma equação, o aluno será capaz de:

- Estabelecer a dependência e a correspondência como característica comum a esses conhecimentos?
- Ser induzido a generalizar a dependência e a correspondência como relação entre duas variáveis?
- Fazer uso desta generalização na formulação de um novo conhecimento (objeto matemático)?

- Perceber a necessidade de restrições, no domínio, que garantam o aspecto funcional dessa dependência?
- Fazer uso desse novo conhecimento como ferramenta de trabalho em novas situações?

As questões formuladas acima partem do princípio de que os elementos básicos que permitem a formulação do conceito de função estão inseridos em nosso cotidiano. A nossa dificuldade em perceber as relações funcionais estaria relacionada à presença de obstáculos como o foco nas coisas que mudam ou ao desenvolvimento de métodos que nos permitam representar a variação. Admitindo como válidas essas afirmações, formulamos como hipóteses que uma seqüência didática que faça uso de conhecimentos que os alunos já possuem, pode ser utilizada para levá-los a perceber:

- As características comuns a esses conhecimentos;
- A possibilidade de generalizar essas características;
- A utilização dessa generalização como um novo conhecimento;
- A necessidade de restrições para tornar esse conceito funcional.

Buscando confirmar ou não as hipóteses formuladas acima, desenvolvemos e aplicamos, para alunos da oitava série do Ensino Fundamental, uma seqüência baseada nos princípios da engenharia didática. Os resultados foram animadores como pude comprovar em duas observações. A primeira refere-se a uma aluna que participou da fase pré-teste no ano de dois mil e quatro e outra com dois alunos submetidos à seqüência descrita nesta dissertação em dois mil e cinco. Em ambos os casos foi proposto o mesmo problema: Determinar a área máxima de um retângulo inscrito num triângulo retângulo de lados menores 4 e 8 centímetros. O problema foi proposto em contextos diferentes, gerando formas de registros diferentes, mas muito esclarecedores no que se refere à solução apresentada.

Na primeira observação, a proposta foi colocada em sala de aula na primeira série do Ensino Médio, ao final do estudo, envolvendo a função do segundo grau e a solução apresentada, que se encontra no anexo 4 desta dissertação.

A segunda observação foi realizada com um grupo de três alunos, dois dos quais participantes do projeto, ambos do grupo AD, no último dia de aula do primeiro semestre de dois mil e seis. Devemos destacar que esses alunos ainda não trabalharam formalmente com a função do segundo grau. Para dar início à resolução, os alunos rascunharam um triângulo retângulo (figura 10) e aplicaram a razão de semelhança, registrando: $\frac{4-h}{4}=\frac{b}{8}$, dando início ao seguinte diálogo:

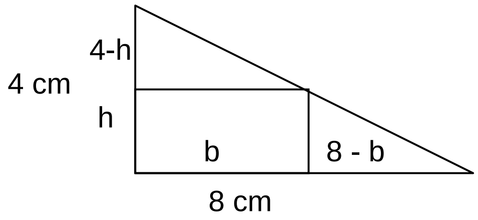


figura 10: triângulo desenhado pelos alunos para a resolução do problema proposto.

A1: Quando b diminui h aumenta.

A2: É, parece que a área vai aumentando.

A1: Vamos ver se b for 5, quanto dá h.

Após os cálculos concluem que h= será 1,5 cm, a área 7,5 cm^2 e concluem:

A2: Se b for 4 a área será 8 cm^2.

A3: Como você sabe?

A2: Porque é a metade da base então h será a metade de 6 cm.

A2: Já Sei. A área máxima é oito.

A1: Por quê?

A2: A área está aumentando, quando b passar de 4 começa a diminuir.

A2: Professor, a área máxima é 8 cm^2.

P: Por quê?

A2: Porque a base e altura estão na metade.

P: Tem certeza? O que me garante que a área máxima do retângulo será quando sua base for a metade da base do triângulo?

A2: Tenho. Se eu mexo com a base partindo daqui (apontando para o vértice agudo do triângulo) a área vai aumentando até chegar no meio, aí começa a diminuir.

P: Como podemos confirmar essa informação?

Após alguns instantes de reflexão. A1 propõe.

A1: Vamos calcular a área se a base for 3.

Após os cálculos, observam que a altura será 2,5 cm e a área 7,5 cm^2 e concluem:

A2: Então a área máxima é oito centímetros ao quadrado que está exatamente no meio.

P: Mas isso é suficiente para se afirmar que a área máxima é oito?

Após um breve silêncio, A1 responde “parece que é, porque a área, quando a base mede 5 cm e 3 cm é a mesma de 7,5 cm^2 e quatro está exatamente no meio”.

Observamos nessa resolução que os alunos iniciaram o problema realizando mudanças espontâneas na forma de representar o problema, passando para o quadro geométrico com a construção do triângulo e aplicando as propriedades de semelhança. A seqüência de todo o raciocínio se deu com o apoio da razão entre os lados e a fórmula da área. Em nenhum momento elaboraram uma expressão que fornecesse a área do retângulo em função de seu lado, mas a forma de raciocínio dessa dependência implícita, quando A2 afirma: “Se eu mexo com a base partindo daqui (apontando para o vértice agudo do triângulo) a área vai aumentando até chegar no meio, então começa a diminuir”. Essa informação parece tão clara para o aluno que ele não vê a necessidade de realizar mais nenhum cálculo para sua comprovação. O socorro vem de A1 que sugere calcular a área para a base de três centímetros. O resultado obtido parece confirmar a conclusão anterior. Entretanto, o professor questionou se isso era suficiente para afirmar que a área máxima era de oito centímetros quadrados, com o aluno respondendo com argumento que para eles era lógico.

Conclusões:

Os resultados observados no decorrer da atividade reforçam a convicção em nossa proposta parecendo demonstrar sua validade. A utilização da seqüência construída, seguindo os princípios da engenharia didática, permitiu a confirmação das hipóteses formuladas.

- A mobilização dos conhecimentos antigos ocorreu de forma satisfatória, com todos os grupos envolvidos no projeto, demonstrando habilidade para a obtenção dos dados solicitados o que nos permite concluir que os alunos já eram detentores desses conhecimentos como pressuposto.
- Os alunos conseguiram observar as características comuns aos conhecimentos trabalhados, destacando a variação e a correspondência como aquela que poderia ser generalizada na definição de um novo conhecimento.

- Que existia a necessidade da definição de restrições para tornar este conceito funcional.

A percepção dessas características por parte dos alunos demonstra que a utilização de seus conhecimentos, como ponto de partida na elaboração do conceito função, parece ter criado as condições para formação de um novo campo conceitual relacionado a esse conceito e a superação dos obstáculos que dificultavam essa formulação. A utilização das diversas formas de representação do mesmo objeto deu origem inicialmente a um novo obstáculo, agora com características didáticas, mas que parece ter sido superado no decorrer das discussões, envolvendo a construção da definição do conceito.

A dificuldade dos alunos ocorreu no momento em que se solicitava a representação dos dados na forma algébrica. Apenas dois grupos conseguiram mobilizar satisfatoriamente seus conhecimentos envolvendo o quadro algébrico. Desses dois um deles formado pelos três alunos identificados em nossos diálogos por AD, realizou essa mudança plenamente. Esse fato parece indicar que os obstáculos relacionados ao desenvolvimento desse tipo de estratégia para representar o objeto função só foram superados por esses alunos. A falta de domínio do quadro algébrico parece dificultar o desenvolvimento do quadro funcional. Na penúltima atividade, cujo objetivo era a institucionalização, dando ao conceito de função o estatuto de objeto matemático, ficou evidente a presença desse obstáculo. Entretanto destacamos as características positivas dessa atividade com a formulação de uma definição para o objeto função em conjunto com os alunos. Isto nos permite concluir pela superação, pelo menos parcial do obstáculo foco nas coisas que mudam, principalmente pelos dois grupos de alunos já identificados.

A última atividade tinha por objetivo a reutilização e a complexificação do conceito numa situação nova. O desempenho dos alunos nessa atividade nos permite concluir que a maioria, nove dos doze participantes desenvolveram um domínio pelo menos parcial do conceito, aplicando de forma automática as novas representações. Entretanto não foram capazes de analisar as representações na forma gráfica. Apenas os três alunos do grupo AD, parecem ter dominado plenamente esse conceito. Nossa convicção parte da constatação de que todos os grupos de alunos aplicaram corretamente as novas convenções, tanto no primeiro exercício em que essa aplicação foi solicitada de forma explícita quanto no último problema, cujo objetivo era o da aplicação do conceito como ferramenta. Entretanto somente o grupo AD respondeu corretamente a análise gráfica. Não podemos argumentar que esses alunos tivessem dificuldades na análise de representações gráficas. Essa habilidade foi demonstrada, principalmente na quarta atividade, em que trabalhamos com a variação da temperatura da água a partir dessa representação.

A análise do desempenho dos alunos na resolução da última questão parece confirmar a conclusão do domínio, pelo menos parcial, do conceito. Como já foi destacado, todos os grupos apresentaram relatórios com cálculos envolvendo altura do corpo segundo o que foi proposto pelo problema. Entretanto, apenas os componentes do grupo identificado por AD realizaram esse cálculo em forma seqüencial, indicando compreender as idéias de variação e correspondência entre as variáveis tempo e altura do corpo representando graficamente os dados obtidos.

As observações descritas nas considerações finais parecem comprovar o desenvolvimento do campo conceitual relacionado ao conceito de função com os dois alunos que participaram do projeto, uma vez que os argumentos utilizados faziam uso da idéia de variação da dependência da área em relação ao lado do retângulo e da correspondência entre a medida do lado e a área do quadrado.

A dialética ferramenta–objeto mostrou-se eficiente permitindo a construção, pelo menos, parcial do conhecimento desejado. As situações formuladas permitiram a mobilização de conhecimentos antigos por parte dos alunos na execução das tarefas propostas. Dessa forma, novos conhecimentos parecem ter sido criados permitindo a sua utilização na formulação do novo conceito. A troca de informações entre os alunos, através das discussões desenvolvidas na terceira etapa da dialética, explicitação–institucionalização local, permitiu que esses expusessem esses conhecimentos tornando-os comuns a todos que participavam da atividade. A institucionalização final, realizada pelo professor, dava a esses conhecimentos o estatuto de objeto matemático tornando-os disponíveis como ferramenta para a próxima atividade.

A familiarização mostrou-se eficiente, mas creio que esta deveria ter tido um espaço maior de forma a permitir uma melhor assimilação do novo objeto pelos alunos. O problema proposto a título de complexificação demonstrou que os alunos desenvolveram um domínio pelo menos parcial do objeto matemático.

De acordo com o exposto, acreditamos que podemos responder positivamente a quatro das cinco questões formuladas em nossa pesquisa.

- Os alunos foram capazes de estabelecer a variação e a dependência como as características em comum aos conhecimentos mobilizados pelas situações propostas.

Esta conclusão aparenta ter ocorrido de forma espontânea em pelo menos três dos doze alunos que finalizaram o projeto, demonstrando que esses alunos parecem ter superado o obstáculo do foco nas coisas que mudam. Essa convicção se baseia nos relatórios apresentados e nas discussões envolvendo as duas últimas atividades.

- A generalização das relações de dependência, variação e correspondência entre duas variáveis permitiu a construção do novo objeto matemático chamado função, como observado nos diálogos que levaram à formulação para definir esse objeto. A necessidade da definição dos intervalos de validade para o domínio de uma função foi observada durante o desenvolvimento das atividades.

- Os três alunos, que espontaneamente perceberam a variação e a dependência, como fatores em comum às situações propostas como problemas, conseguiram fazer uso do novo conhecimento como ferramenta de trabalho na resolução do problema proposto. Os demais alunos desenvolveram um raciocínio parcial que poderia levá-los à resolução do mesmo, mas a solução não foi obtida por eles. Não poderíamos afirmar que os mesmos mobilizaram o novo objeto como ferramenta na resolução do problema apresentado. A aplicação da noção de correspondência parece ter existido, com o cálculo da altura do corpo em diversos instantes, mas ocorreram de forma aleatória.

Os dados obtidos parecem confirmar a validade de nossa proposta entretanto algumas questões surgem do desenvolvimento dessas atividades:

- A reelaboração das atividades dando menor ênfase nas representações teria evitado o surgimento do obstáculo didático a elas relacionado?

Acreditamos que essa questão poderia ser investigada propondo situações representadas em diversos quadros sem que seja solicitada a mudança na forma de representação. Entretanto novas questões se abririam. Conseguiriam os alunos mobilizar essas representações espontaneamente? Deveríamos trabalhar as representações e seus significados antes ou após a formulação do conceito?

- O que levou ao melhor desempenho dos alunos que compunham o grupo AD? Que variáveis interferiram não permitindo um melhor desempenho dos demais alunos participantes da experimentação?

É importante relembrar que os alunos que compõem esse grupo participaram de todas as atividades e estavam envolvido em todas as discussões relacionadas as mesmas. Isto parece indicar um maior empenho desses alunos no desenvolvimento dessas atividades. Situação semelhante foi observada no pré-teste com o surgimento dos três comportamento descritos na página setenta e dois. Os participantes dos demais grupos se empenharam parcialmente na solução e discussão das atividades. Entretanto uma resposta a essas questões exigiria um melhor aprofundamento com o desenvolvimento de atividades sem a presença do componentes do grupo AD buscando identificar:

- Qual o envolvimento dos demais alunos sem a presença de seus colegas?
- Haveria o surgimento dos mesmos comportamentos dentro desse sub-grupo?
- Haveria um maior envolvimento desses alunos com a atividade?
- Haveria um melhor desempenho desses alunos sem a presença dos componentes do grupo AD?

Cremos que a respostas a essas questões pode nos auxiliar na compreensão da diferença no desempenho dos alunos em nossa pesquisa.

- Ocorreu realmente a construção de um novo conhecimento com a formação de um novo campo conceitual ou a solução apresentada pelos alunos se deve ao fato de o problema ter sido apresentado logo após o conceito ter sido trabalhado?

A resposta a essa questão exigiria o desenvolvimento de nova pesquisa subdividida em duas etapas. A primeira, como a que desenvolvemos, em que se buscava disponibilizar o objeto função como ferramenta na solução de problemas; uma segunda etapa, comparativa entre alunos que participaram e que não participaram da primeira etapa da pesquisa, com a proposição de situações-problema que façam uso do conceito de função como ferramenta. Nesse sentido tenho a felicidade de acompanhar alguns dos alunos participantes de nossa pesquisa na primeira série do Ensino Médio, obtendo resultados promissores como relatado nas considerações finais. Essas observações não são fruto de uma pesquisa formal, mas a comparação tanto do desempenho dos alunos que responderam satisfatoriamente ao problema relativo à complexificação, quanto aos que resolveram parcialmente, são animadores quando comparados com alunos que não participaram de nosso projeto. Creio estar aberta uma linha de pesquisa que possa confirmar minhas observações.

As perspectivas de ensino com uso da dialética ferramenta-objeto são alentadoras para o ensino de matemática. O uso dessa dialética, na introdução de um novo conceito, permite ao aluno enfrentar as dificuldades colocadas pela situação-problema proposta e na busca de sua solução levá-los a fazer uso de seus conhecimentos, discutir com seus colegas dando significado ao conhecimento gerado.

Referências Bibliográficas:

ANDRIANI, Álvaro e VASCONCELLOS, Maria José. **Novo Praticando Matemática**. São Paulo. 2002 Editora do Brasil.(Coleção Praticando Matemática)

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Educação Matemática:** Fundamentos da Didática da Matemática. 2000. 220p. Apostila. Didática da Matemática. PUC-SP. São Paulo.

ARTIGUE, Michele. FUNCTION FROM AN ALGEBRAIC AND GRAPHIC PONT OF VIEW: **Cognitive Difficulties and Teaching Practices**. in Harel, Guershon and Dubinsky Ed. The concept of function Aspectes of Epistemology and Pedadogy, USA. MAA Notes. Volume 25. 1992. pp 109 - 132

ARTIGUE, Michele. (Ed.) **Ingeniería didáctica en educación matemática**, "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en México. 1995. pp. 33-59.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito Científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**.** Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro. Editora Contraponto, 1996 316 p.

BALACHEFF, Nicolas. **Cadres, registre et conception.** Note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique. Les cahiers du laboratoire Leibniz, GRENOBLE France, n. 58, p. 1-19, sep 2002

BARON, Margaret E**. Curso de Historia da matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo. A matemática Grega. Trad. José Raimundo Braga Coelho et all Brasília- Editora Universidade de Brasília. 1985. p. 63

BARON (2), Margaret E**. Curso de Historia da matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo. Indivisíveis e Infinitésimos. Trad. José Raimundo Braga Coelho et all Brasília- Editora Universidade de Brasília. 1985. p. 63

BAUMGART, Jhon K. **Tópicos de História da Matemática** – Álgebra. Atual Editora –São Paulo - 1992 p. 112p.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática Hoje é Feita Assim.** São Paulo. 2000. Editora FTD. (Coleção Matemática Hoje é feita Assim)

BOYER; Carl B. **História da Matemática.** São Paulo. Ed. Edgar Blücher Ltda. 1974. 488p.

BOYER; Carl B. **Tópicos de História da Matemática** para uso em sala de aula – Cálculo. trad. Hygino H. Domingues. Atual Editora –São Paulo - 1992 91 p.

BRAGA, Ciro. **O processo inicial da disciplinarização de função na matemática do Ensino Secundário Brasileiro**. 2003. 177p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 2003.

BRASIL, Exame Nacional do Ensino Médio 1998, **Relatório Pedagógico**, disponível no site www.inep.gov.br/download/enem/1998

BRASIL, Exame Nacional do Ensino Médio 2002, **Relatório Pedagógico**, disponível no site www.inep.gov.br/download/enem/2002/relatorio_pedagogico_2002/rp2002_6.pdf

BRASIL, Exame Nacional do Ensino Médio 2003, **Relatório Pedagógico**, disponível no site www.inep.gov.br/download/enem/2003/

BRASIL, Informativo ENEM 2003

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental: **Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental., Brasília : MEC / SEF, 1998.148 p.

BRASIL, Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio: **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnológicas** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 58 p.

BRADWARDINE, Thomas: **Mathematical Representations of Motion**, trans. H. Lamar Crosby Jr., annotated by Edward Grant, *A Source Book in Medieval Science*, ed. Edward Grant, Harvard University Press, Cambridge, 1974; pp.292-305.

BRITO, Regina F. de. **Aprendizagem Significativa e a Formação de Conceitos na Escola**: in BRITO, Regina F. de (org.) .Psicologia da Educação Matemática. Santa Catarina. 2001. Ed. Insular 280 p.

BROUSSEAU, Guy. **Estude locale des processus d'acquisition en situations scolaires.** Estudes sur l' enseignement élemenatireBordeaux: IREM et Université de Bordeaux I. Editours' Barcelona. 1977. Cahier 18, pp7-21.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et methodes de la didactique de la mathématique**. Recherches en Didactique de la Mathematique, 7, 33-115. 1987

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. Capítulo 1, in BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa. Instituto Piaget. 1966. p 35 - 113

BROUSSEAU Guy: **La théorie des situations didactiques;** Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de **Docteur Honoris Causa** de **l'Université de Montréal** A paraître dans « Interactions didactiques » (Genève) 2002 (texto disponível em http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf acesso em 29/12/2004

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática.** in Valente, Wagner Rodrigues. São Paulo SBEM, 2003. pp86-158

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. FORMALIZAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQÜÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM. Anais do VIII ENEM. Encontro de Educação Matemática – 2004.

COTRET, Sophie Rene. **Un estude sur les representations Graphique du Mouvement comme Moyer D'Acceder au Concept de Fontion ou de Variable Dependant**. I.R.E.M de Genoble in "petit x" n^{o} 17 pp. 5 à 27, 1988.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação.** in Machado, A. Educação Matemática uma introdução. São Paulo. EDUC. 1999 pp. 135-154.

DOUADY, Régine. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l' enseignement des mathématiques.** Thèse de Doctorat d'Etat (specialité didactique des mathematiques). Paris, Univerdité Paris VII**,** 1984

DOUADY, Régine. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet.** 1986, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2 pp. 5-31 ed. o Pensamento Selvagem

DOUADY, Régine. (Ed.). La ***Ingeniería didáctica u la evolución de su relación com el conocimiento*** pp. 61-97. 1995. "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica**.** Impreso en México.

DUVAL, Raymond. **Registro de Representações Semióticas e funcionamento Cognitivo** da Compreensão em Matemática. in Aprendizagem em Matemática. São Paulo Ed. Papirus 2003 pp 11-33

DUVAL, Raymond. **Como descrever e analisar a atividade matemática?** Quadro e registro, (2003) disponível na internet no endereço http//tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/Douz.pdf visita em 15/01/2005

EVES, Howard. **História da Geometria.** Tópicos de História da Matemática, Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo. Atual 1992. 77 p.

FRANCHI, Anna. **Considerações sobre a teoria dos campos conceituais.** in Machado, A. Educação Matemática uma introdução. São Paulo. EDUC. 1999 pp 155-195

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo vol. 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livro técnicos e Científicos Editora S.A., 2003, 632 p.

GIOVANNI, José Ruy. CASTRUCCI, Benedito. GIOVANNI Jr., José Ruy **A conquista da Matemática.** São Paulo 2002 Ed. FTD. (Coleção A conquista da Matemática)

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade**. ed. reformulada São Paulo. 2000. Editora Atual (Coleção Matemática e Realidade).

IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo**. A noção de "obstáculo epistemológico**" e a Educação Matemática. in: Educação Matemática uma introdução. São Paulo: educ, 1999, p 89-114

IMENES, Luiz Márcio. LELLIS, Marcelo. **Matemática.** São Paulo 1997. editora scipione (Coleção Matemática)

KEIRAN C. **The Learning and Teaching of School Algebra**. Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning, cap XVII Ed. NCYM-MacMillan Publishing Co- NY, USA 1992

KENNEDY, Joe e REGAN, Ester in. BAUMGART, Jhon K. **Tópicos de História da Matemática** - Álgebra Atual Editora –São Paulo - 1992 112p.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática Temas e Metas:** 1. Conjuntos Numéricos e Funções. 2 ed. São Paulo: Atual Editora, 1988, 248 p.
MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. **Dialética-Ferramenta-Objeto.** in: Educação Matemática uma introdução. São Paulo: educ, 1999, p 115-134

MOREIRA, Marco Antônio. **A teoria dos Campos Conceituais de VERGNAUD**. O Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. Porto Alegre, 2002 Disponível em www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_nl_al Acesso em 13 nov. de 2004 as 17:25 horas

MORETTI, Vanessa Dias. **O conceito de função**: os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadoras da aprendizagem 1998, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Dissertação de Mestrado

NETO, Scipione Di Pierro. **Pensar Matemática**, Para o Ensino Fundamental. São Paulo 2001. editora scipione. (Coleção Pensar Matemática).

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função**: Uma abordagem do Processo de Ensino Aprendizagem 1996, 137p. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SÃO PAULO, **Proposta Curricular para o Ensino de matemática 1º grau**, 140 p. Secretaria de Estado da Educação, São Paulo, 1988, 3º Edição

SÃO PAULO, **Proposta Curricular para o Ensino de matemática 2º grau**, 414 p. Secretaria de Estado da Educação, São Paulo, 1992, 3º Edição

SIERPINSKA, Anna. **ON UNDERSTANDING THE NOTION OF FUNCTION** in Harel, Guershon and Dubinsky Ed. The concept of function Aspectes of Epistemology and Pedadogy, USA. MAA Notes. Volume 25. 1992. pp 25 – 58

SLOYEN, M. Stephanie. **Álgebra na Europa, 1200 - 1850.** in BAUMGART, Jhon K. Tópicos de História da Matemática – Álgebra. tradução Hygino H. Domingues. Atual Editora –São Paulo - 1992 p. 112p.

SMITH. David Eugene. **History of Mathematics**. Volume II Dover Publications, Inc. New York . 1953 703 p.

TORRINHA, Francisco. **Dicionário Latino Português**. Porto Editora, LDA Empresa Literária Fluminense, LDA Livraria Arnado, LDA. Porto 1942 2ª Edição p. 945p

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Euclides Roxo e o movimento de modernização internacional da matemática escolar.** São Paulo: SBEM, 2003. pp 46-85

VERGNAUD. Gerard. **A teoria dos Campos Conceituais** – Anais do primeiro Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro – 1993. 18 p.

VERGNAUD, Gerard. A teoria dos Campos Conceituais, Capítulo 3, in BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa. Instituto Piaget. 1966. p 155 -191

YOUSCHKEVITCH, Adolf Pavlovich. **The concept of Function Up to middle pf the Century, Archive for History of Exact Sciences,** volume 16 (1976), pp 37-85

coleções analisadas para o presente trabalho

ANDRIANI, Álvaro e VASCONCELLOS, Maria José. **Novo Praticando Matemática**. São Paulo. 2000 Editora do Brasil.(Coleção Praticando Matemática)

.BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática Hoje é Feita Assim.** São Paulo. 2000. Editora FTD. (Coleção Matemática Hoje é feita Assim)

GIOVANNI, José Ruy. CASTRUCCI, Benedito. GIOVANNI Jr., José Ruy **A conquista da Matemática.** São Paulo 2002 Ed. FTD. (Coleção A conquista da Matemática)

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade**. ed. reformulada São Paulo. 2000. Editora Atual (Coleção Matemática e Realidade).

IMENES, Luiz Márcio. LELLIS Marcelo. **Matemática.** São Paulo 1997. editora scipione (Coleção Matemática)

NETO, Scipione Di Pierro. **Pensar Matemática**, Para o Ensino Fundamental. São Paulo 2000. editora scipione. (Coleção Pensar Matemática).

Anexo 1

Questão 48 Prova Enem2001

A pesca não predatória pressupõe que cada peixe retirado de seu hábitat já tenha procriado, pelo menos uma vez. Para algumas espécies, isso ocorre depois dos peixes apresentarem a máxima variação anual de seu peso.
O controle de pesca no Pantanal é feito com base no peso de cada espécie.

Idade (anos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Peso (kg)	1,1	1,7	2,6	3,9	5,1	6,1	7	7,8	8,5	8,9	9,1	9,3	9,4

A tabela fornece o peso do *pacu*, uma dessas espécies, em cada ano.
Considerando esses dados, a pesca do *pacu* deve ser autorizada para espécimes com peso de, no mínimo,

(A) 4 kg.
(B) 5 kg.
(C) 7 kg.
(D) 9 kg.
(E) 11 kg.
PERCENTUAIS DE RESPOSTA

A B C D E

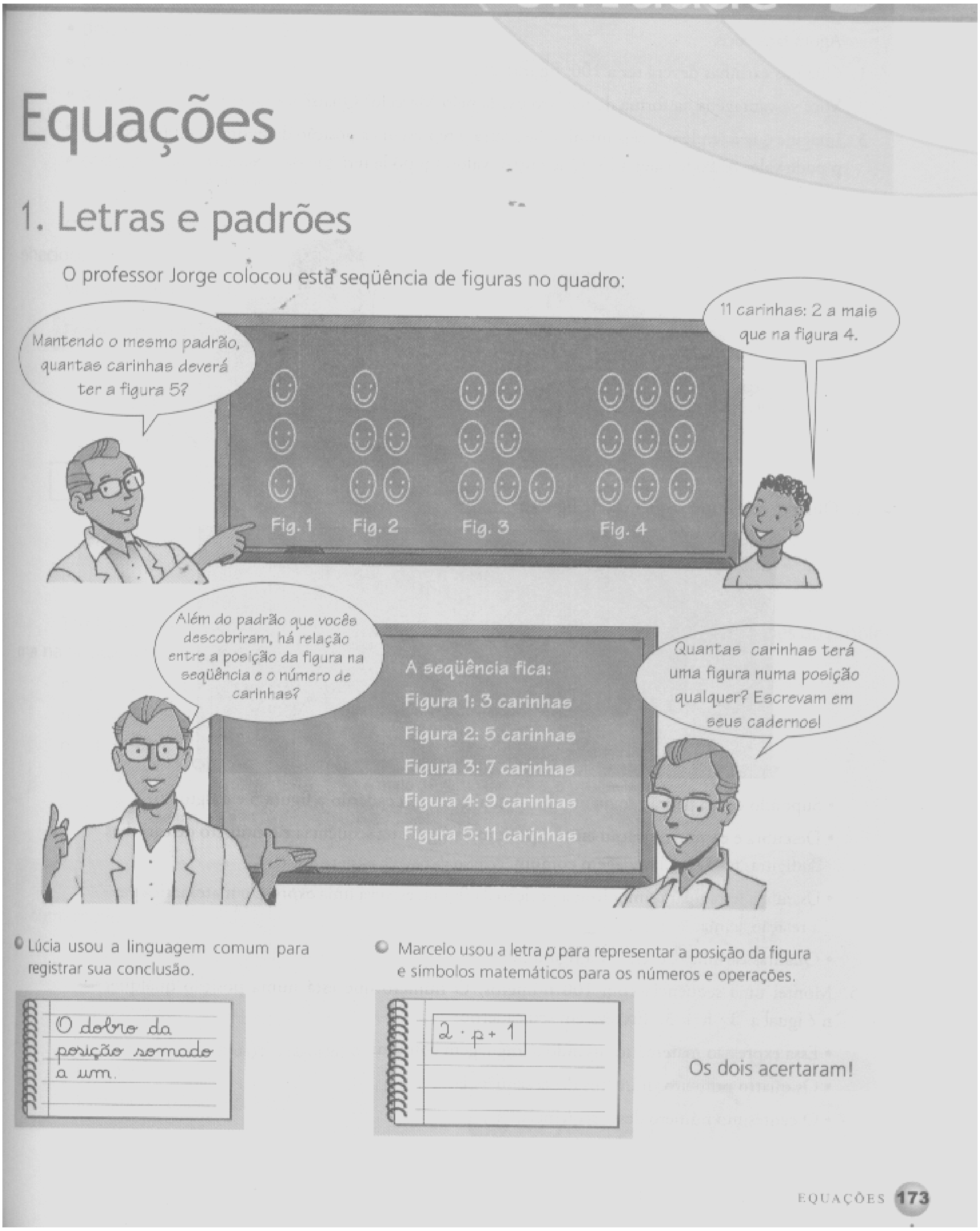
32 23 25 13 5

Habilidade: 1

Esta questão exige do participante a compreensão das informações fornecidas no texto para a correta identificação da variável que deve ser determinada com os dados da tabela, permitindo a escolha correta da alternativa que traz o peso mínimo do pacu para permitir sua pesca não-predatória. O participante deve verificar, com os dados da tabela, que a maior variação de peso é de 1,3kg e se dá do terceiro para o quarto ano de vida do peixe. Assim, com um peso mínimo de 4 kg é mais provável que o pacu já tenha procriado.
Cerca de um terço dos participantes assinalou a alternativa correta. Os que escolheram a alternativa B, provavelmente não consideraram que o problema a ser resolvido é o da determinação do peso mínimo, segundo dados do gráfico. As demais escolhas devem-se possivelmente a uma compreensão parcial do texto ou ao cálculo incorreto da máxima variação anual do peso do peixe.

Anexo 2

Introdução ao trabalho com equações na coleção Praticando Matemática



Equações

1. Letras e padrões

O professor Jorge colocou esta seqüência de figuras no quadro:

- Lúcia usou a linguagem comum para registrar sua conclusão.

O dobro da posição somado a um.

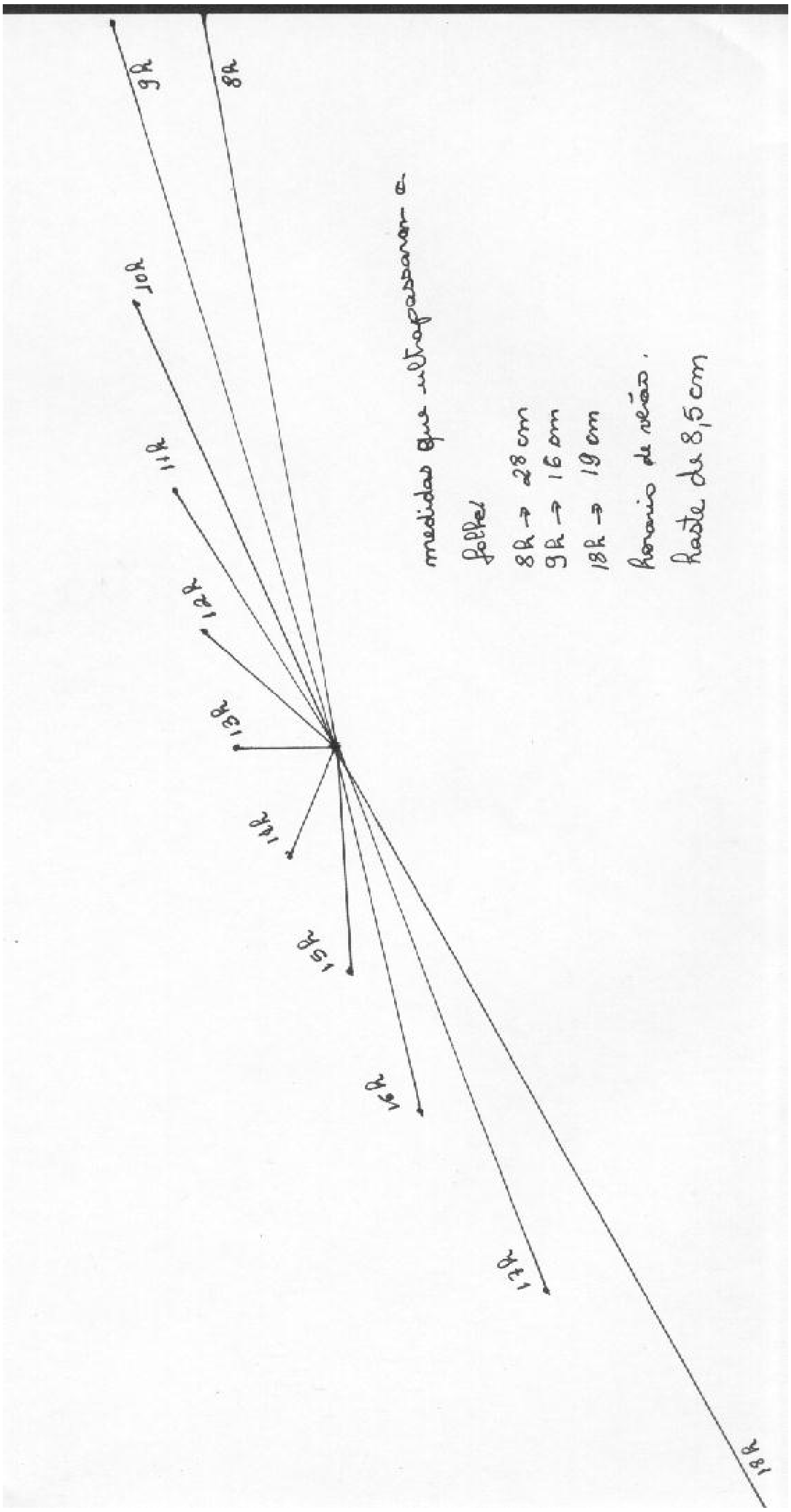
- Marcelo usou a letra *p* para representar a posição da figura e símbolos matemáticos para os números e operações.

$\boxed{2 \cdot p + 1}$

Os dois acertaram!

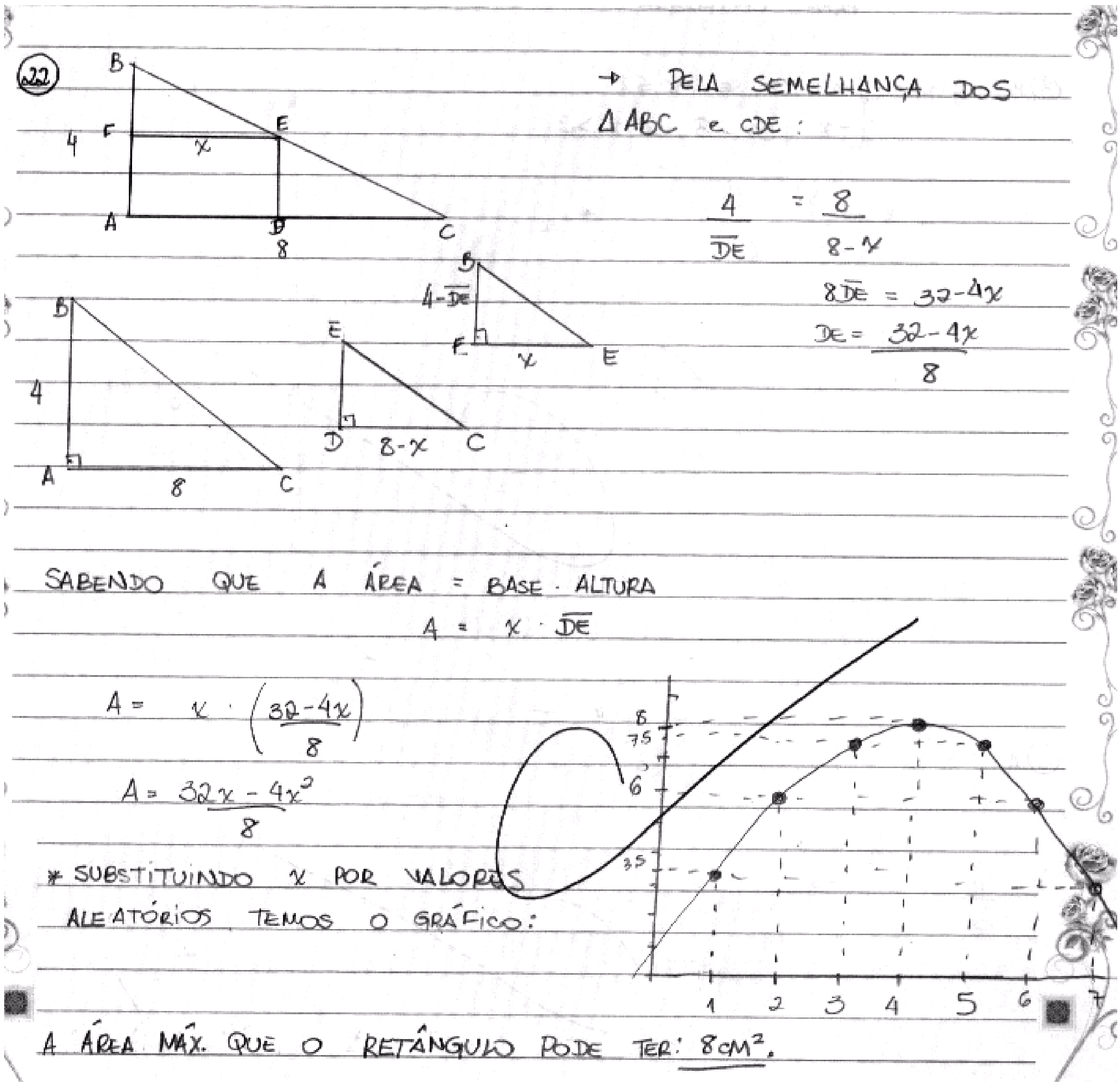
Anexo 3

Figura formada pela sombra gerada por uma haste de 8,5 cm ao longo do dia nove de fevereiro de 2005 na cidade de Santo André, estado de São Paulo. Registro feito pelo professor pesquisador.



Anexo 4

A figura abaixo refere-se a um problema resolvido por uma das alunas que participaram do pré teste no ano de 2004 ao problema. Determinar a área máxima de um retângulo inscrito num triângulo retângulo de lados 4 e 8 cm. A questão foi proposta na primeira série do ensino médio ao final do estudo envolvendo a função do segundo grau. Como observamos a aluno parece ter aplicado o raciocínio funcional



Errata

Página	Linha	Onde se lê	Leia-se
9	17	estratégia com a utilizada	estratégia utilizada
10	1	qur	que
30	3 do rodapé	definida por Dirichlet, por exemplo, que pode	definida por Dirichlet, por exemplo, não pode
31	figura 1	equação	função
38	14	conhecimento de disponíveis	conhecimentos disponíveis
55	17	fórmulas	de regras que permitiam
70	8	dialética-ferramenta objeto	dialética ferramenta- objeto
79	3	de	os
109	1 do rodapé	relembramos	re-elaboramos
110	4	ez	vez
128	20	6	5
128	22	analisadaa	analisadas
177	5	NA	NA
177	15	da	de
177	15	laboratire	laboratoire
177	15	Leibni	Leibinz
178	22	IREN	IREM
179	10 e 13	Juex	Jeux
179	15	conociminto	conocimiento