CARLOS ROBERTO DA SILVA

EXPLORANDO EQUAÇÕES CARTESIANAS E PARAMÉTRICAS EM UM AMBIENTE INFORMÁTICO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

CARLOS ROBERTO DA SILVA

EXPLORANDO EQUAÇÕES CARTESIANAS E PARAMÉTRICAS EM UM AMBIENTE INFORMÁTICO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.***

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação e por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____

Local e Data: ______________

"Não é o ângulo reto que me atrai, nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual. A curva que encontro nas montanhas do meu país, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, nas nuvens do céu, no corpo da mulher preferida".

(Oscar Niemeyer)

Dedico este trabalho a

minha família e aos

meus pais pelo apoio

e compreensão de

minhas ausências.

AGRADECIMENTO

À Celina por sua orientação administrada com competência, pela dedicação, amizade e paciência.

Aos professores Doutores Marlene Alves Dias e Saddo Ag Almouloud pelas sugestões oferecidas na qualificação.

À todos os professores do Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelos ensinamentos que orientaram aos caminhos da pesquisa em Educação Matemática.

Aos meus amigos e colegas do Mestrado Acadêmico – 2004, André, Marcelo, Yumi, Ubiratan, Raquel, Cleber, João Pedro, Maurício, Lourival, Edith, Marinete, Renato, Vera, Diana, Renata, Rosimeire, enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para esta pesquisa.

Ao Francisco, da secretaria que sempre se prontificou na minha parte documental.

À PUC pela sua excelência.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo pela bolsa mestrado que me foi concedida.

À Márcia, Renata, Cida e Magali pela amizade e revisão deste trabalho.

Aos meus companheiros de trabalho pela amizade e incentivo.

Aos alunos que contribuíram para a realização da seqüência didática.

À Rosangela, Nicole e Gleice que compreenderam as minhas ausências e de alguma forma propiciaram o desenvolvimento desta pesquisa.

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo verificar se um ambiente informático permite ao aluno reconhecer algumas propriedades de curvas, por meio de representações e interpretações gráficas de maneira dinâmica, com o uso de parâmetros, para uma melhor compreensão de suas equações. Identificamos que a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico e as conversões entre alguns registros de representação semiótica possibilitam ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas. Para esta pesquisa, elaboramos uma seqüência didática com base em alguns elementos de uma Engenharia Didática e aplicamos durante cinco sessões a um grupo de 10 alunos da 3ª série do Ensino Médio. Verificamos que as construções gráficas de algumas curvas planas, variando os valores reais de parâmetros em suas equações, para o desenvolvimento de um GIF animado, permitem ao aluno observarem os efeitos geométricos provocados pela sua variação, favorecendo o entendimento da noção de parâmetro na geometria analítica.

Palavras-Chave: geometria analítica, parâmetro, equações cartesianas ou paramétricas, curvas planas, winplot.

ABSTRACT

This research has as objective verify if in a computer science environment allows to the student to recognize some curves properties through representations and graphical interpretations in dynamic way with the use of parameters for one comprehension better of its equations. We verified that the articulating between the points of view cartesian and parametric and the conversions among some registers of semiotic representation it makes the student think about the correlation that exists between some properties geometric of the plane curves and its cartesian or parametric equations. For this research we elaborate a didactic sequence based on some topics of the Didactic Engineering and we apply during five sessions in a group of 10 students taking the third year of high school. We verified that the graphic constructions of some plane curves varying the real values of its parameters in its equations for the development of an GIF (Graphic Information Format), they allow the students to observe the geometric effect caused by this variation what it favors the understanding of the parameter notion in analytical geometry.

Key-words: analytical geometry, parameter, cartesian or parametric equations, plain curves, Winplot.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO I: APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a introdução, a questão e as hipóteses da pesquisa em que se baseia este trabalho. Complementamos com o referencial teórico e a metodologia de pesquisa.

1. Introdução

Como professor de matemática do Ensino Médio há onze anos, juntamente com outros colegas de profissão, constatamos que muitos alunos apresentam dificuldades ao lidar com as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas. Outro fato notório é que, em geral, as equações paramétricas são trabalhadas no ensino médio por meio de aulas presenciais que valorizam a memorização mecânica como: técnicas, regras e algoritmos, dando-se ênfase à representação algébrica.

Como pesquisas em Educação Matemática podem contribuir para o ensino e a aprendizagem da noção de parâmetro e equações paramétricas?

Motivados por esta inquietação e inseridos na linha de pesquisa do grupo de Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática – TecMEM do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no qual temos desenvolvido nosso trabalho, estamos interessados em pesquisar sobre o uso das novas tecnologias na Educação Matemática, especificamente no que se refere às representações gráficas de pontos e curvas planas, de acordo com as suas respectivas coordenadas, e principalmente as equações paramétricas com a utilização de um plotador gráfico.

No último ano do Ensino Médio, inserido no contexto da geometria analítica, o estudo das equações paramétricas, pode torna-se interessante se realizado com a utilização de um *software*, que permita obter um trabalho dinâmico com gráficos de curvas.

O computador, neste caso, apresenta-se como ferramenta de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem, privilegiando uma avaliação somativa, formativa e investigativa.

Deste modo, queremos verificar se um ambiente informático permite ao aluno reconhecer algumas propriedades de curvas, por meio de representações e interpretações gráficas de maneira dinâmica, com o uso de parâmetros, para uma melhor compreensão de suas equações.

O público alvo desta investigação foram dez alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública em Diadema, no Estado de São Paulo. Para que pudéssemos submeter os alunos a esta experimentação, propusemos uma seqüência didática que validasse o experimento.

Na seqüência didática apresentamos, também, atividades que envolviam pontos genéricos, família de pontos, representação de curvas na forma paramétrica e cartesiana e a parametrização da curva.

Diante do exposto, dividimos nosso trabalho como segue:

Neste capítulo I, mostramos a nossa questão de pesquisa, suas hipóteses, os fundamentos teóricos e a metodologia.

No capítulo II, apresentamos estudos preliminares relativos ao assunto pesquisado. Este estudo nos guiou na direção dos temas e dos problemas relacionados à representação de curvas na forma paramétrica ou cartesiana. Complementamos com um breve histórico da geometria analítica, das curvas planas, das noções de variáveis e parâmetro, das representações paramétricas de curvas e algumas considerações epistemológicas.

No capítulo III, analisamos a *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática de São Paulo* no 2º grau (1992), os *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)* de 1999, os *PCNEM plus* de 2004 e as *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* de 2006, no que diz respeito à geometria analítica e ao uso de parâmetros em equações. Por fim, apresentamos algumas características importantes de um ambiente informático, como a transposição informática.

O estudo desta evolução conceitual, apresentada nos capítulos II e III, nos respalda-nos para a construção da seqüência didática.

No capítulo IV, expomos a seqüência didática e os aspectos teórico-metodológicos, assim como as justificativas das escolhas feitas, os procedimentos metodológicos utilizados e a análise a *priori* da seqüência elaborada.

No capítulo V, apresentamos a *experimentação,* que consiste na aplicação e na descrição do que aconteceu na seqüência didática. Inclui-se aqui também a análise a *posteriori,* que é a interpretação dos dados recolhidos durante a experimentação. Confrontando os elementos previstos na análise *a priori* com o que efetivamente aconteceu na aplicação da seqüência didática, temos elementos que poderão responder à nossa questão de pesquisa.

No capítulo VI, manifestamos as considerações finais com os principais resultados da pesquisa e a análise desses resultados com base nos fundamentos teóricos e metodológicos considerados para o nosso trabalho. Por fim apresentamos sugestões para futuros estudos sobre o tema abordado, ou seja, a noção de parâmetro em geometria analítica.

2. A questão de pesquisa

Parametrizar objetos geométricos, como curvas e superfícies, é uma das idéias mais importantes e eficazes em áreas de estudo da matemática, como o cálculo, geometria diferencial e a topologia algébrica. A parametrização é utilizada para descrever dispositivos mecânicos na engenharia e movimentos de corpos em função do tempo na física. Se, em um dado momento, o aluno deparar com uma dessas áreas, o prévio estudo dela é de extrema importância para a formação do conhecimento matemático desse aluno.

Subjacentes a estes conceitos estão as equações paramétricas, cartesianas, curvas planas e parametrização de curvas, objetos de estudo em cursos de geometria analítica no Ensino Médio e Superior. Assim, dada esta importância, entendemos ser possível desenvolver uma pesquisa sobre o uso de parâmetros presentes em equações de curvas, utilizando como ferramenta facilitadora um ambiente informático. Este recurso permite a visualização da representação gráfica de algumas curvas planas e suas propriedades.

Para investigar as reais potencialidades de um ambiente informático no processo didático de ensino-aprendizagem tomamos como referência o artigo de JESUS e SOARES (2005), que apresenta modos de construção de gráficos de curvas e suas equações cartesianas ou paramétricas com o uso do *software Winplot*.

Segundo JESUS e SANTOS (2002), é possível, com este programa, trabalhar atividades que proporcionem melhor compreensão dos conceitos básicos da geometria analítica, assim como o desenvolvimento de atividades de cálculo, como integral, limites e derivadas.

Diante do exposto, colocamos a questão norteadora de nosso trabalho:

"*Um ambiente informático, que possibilita a construção de gráficos de curvas, de maneira dinâmica, articulado com a conversão entre registros de representação semiótica, favorece o entendimento da noção de parâmetro?"*

3. Hipóteses de pesquisa

Com base nesta questão de pesquisa, formulamos as seguintes hipóteses:

a) A articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico e as conversões entre os registros de representação semiótica da linguagem *Winplot*, a gráfica e a simbólico-algébrica possibilitam ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas.

b) Em um ambiente informático, o uso de *softwares* gratuitos, por exemplo, o *Winplot* e o *GIF Animator*, como ferramentas, facilitam a compreensão da noção de parâmetro.

c) A construção gráfica de algumas curvas planas, alterando-se os valores reais dos parâmetros de suas equações, variando-os e observando os efeitos geométricos provocados pela sua variação para a construção de um *GIF* animado, também favorece ao aluno um melhor entendimento da noção de parâmetro.

d) O uso de parâmetros estabelece uma identificação significativa entre os gráficos e as equações de algumas curvas famosas desenvolvidas ao longo da história da geometria analítica.

Conforme a primeira hipótese, para a seqüência didática preparamos atividades que se iniciam com a representação gráfica de ponto, reta e parábola até o estudo de outras curvas planas que permitem investigar a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico e as conversões entre os registros de representação semiótica da linguagem *Winplot*, a gráfica e a simbólico-algébrica.

Para a segunda hipótese, elaboramos atividades que englobam desde a família de pontos a um parâmetro até os gráficos de algumas curvas planas parametrizadas.

À terceira hipótese cabem as construções gráficas de algumas curvas planas com a variação dos valores reais de parâmetros em suas equações para o desenvolvimento de um *GIF*[1] animado.

Por fim, para a quarta hipótese, sugere-se o acesso a algumas curvas historicamente famosas, evidenciando as dificuldades encontradas pelos matemáticos, desde os diversos cálculos para se estabelecer uma equação que represente a curva até a sua construção gráfica com papel, lápis e instrumentos de medida.

Atualmente, a partir destas equações é possível descobrir com facilidade os diversos gráficos destas curvas utilizando-se de uma ferramenta facilitadora como o *Winplot*.

4. Referenciais teóricos

Para o desenvolvimento desta pesquisa, consideramos como fundamentação alguns elementos teóricos sobre os registros de representação semiótica de DUVAL (2003), a noção de mudança de quadros de DOUADY (1986), os problemas de articulação entre pontos de vista cartesiano e paramétrico de DIAS (1998) e a noção da transposição informática de

---

[1] **GIF: Graphic Information Format.** Arquivos no formato GIF são "imagens de apresentação" como: gráficos, figuras ou imagens de texto. GIFs simulam movimento usando uma série de imagens individuais.

BALACHEFF (1994).

A teoria de Raymond Duval tem auxiliado nas análises de atividades matemáticas, em termos de registros de representação. Os seus trabalhos têm servido de base para várias pesquisas referentes à aquisição do conhecimento matemático e à organização de situações de aprendizagens desses conhecimentos. (MACHADO 2003, p. 8). O conhecimento matemático se estabelece pela representação de seus objetos e é neste ponto que se dá a contribuição de Raymond Duval.

Na aprendizagem da matemática verificamos a dificuldade de nossos alunos para compreender a diferença entre o objeto matemático e a sua representação. É muito importante para a aquisição do conhecimento matemático que esta distinção seja estabelecida e, neste sentido, a teoria das Representações Semióticas auxilia de maneira decisiva, em particular, no que se refere às diversas representações de pontos, retas e curvas no plano.

A noção de mudança de quadros foi introduzida na Didática da Matemática por Régine Douady como um dos instrumentos importantes de análise dos fenômenos de ensino-aprendizagem da Matemática (ALMOULOUD 2000, p.26). Utilizamos esta noção para a construção e instrumento de análise da seqüência didática proposta neste trabalho.

DIAS (1998), também contribuiu para a elaboração de situações-problema em nossa seqüência didática, quando destaca a flexibilidade entre as formas de conhecimento e os registros de representação semiótica por meio da articulação de diferentes quadros, registros e pontos de vista que podem ser associados aos conceitos que compõem a geometria analítica.

4.1 Registros de Representação Semiótica

DUVAL (2003), descreve a teoria dos registros de representações semióticas, enfatizando a importância da diversidade de registros e a articulação entre eles nas atividades matemáticas.

Segundo DUVAL (2003, p. 13-14), a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos e, sim, na importância primordial das representações semióticas e na grande variedade de utilização das mesmas.

Ainda de acordo com DUVAL (2003, p.13), sobre a importância primordial das representações semióticas: "é suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático".

Neste sentido, verificamos a importância das representações semióticas no desenvolvimento do estudo de curvas na geometria analítica.

Sobre a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática, DUVAL (2003, p.14) afirma:

> [...] além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a linguagem natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente. Para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em matemática, falaremos, parodiando Descartes, de "registro" de representação.

De acordo com esta teoria, utilizamos uma variedade de representações designadas por registro de representação semiótica, tais como:

No registro simbólico temos:

- A representação simbólico-algébrica.

Por exemplo, a equação cartesiana: $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$.

As equações paramétricas: $\begin{cases} x=((a+b)\cos(t) - c\cos((a/b)+1)t) \\ y = ((a+b)sen(t) - csen((a/b)+1)t) \end{cases}$

- A representação simbólico-tabular.

Por exemplo, uma tabela com valores inteiros das variáveis x, y e t:

t	x	Y
0	-7	-9
1	-4	-6
2		
3		
4		
5		

TAB. 1: Representação simbólico-tabular

Para o registro linguagem natural temos:

- A representação linguagem natural.

Por exemplo, considere as coordenadas dos seguintes pontos A=(1;2), B=(2;3), C=(2;1), D=(-3;0) , E=(-4;-3). Sabe-se que 3 deles estão alinhados. Represente os pontos no plano cartesiano e justifique quais são estes 3 pontos que estão alinhados.

- A representação linguagem *Winplot.*

Por exemplo, escrever a equação, $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$, na linguagem do *software Winplot* : Menu “Equação” “Implícita” e digitar y^2=ay-bxy+cx-dx^2.

No registro figural geométrico temos:

- A representação figural.

Um exemplo, a parábola de Apolônio representada na FIG. 1:

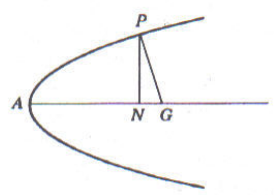


FIG.1:Parábola de Apolônio (BOYER 1996, p.105)

Para o registro gráfico temos:

- A representação gráfica.

Um exemplo, a cônica de Descartes como elipse representada na FIG. 2.

Segundo DUVAL (2003, p.14), “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”.

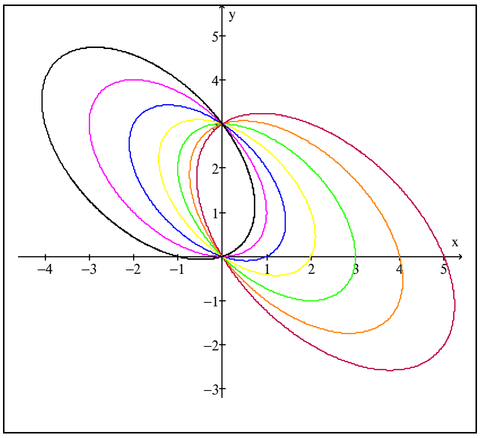


FIG. 2: cônica de Descartes como elipse

Ainda sobre os tipos de representações semióticas, DUVAL (2003, p.15-16) comenta que:

> Existe uma diferença-chave para analisar a atividade matemática numa perspectiva de aprendizagem (e de ensino) e não em uma perspectiva de pesquisa matemática por matemáticos. Existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.
>
> - *Os Tratamentos são transformações de representações dentro do mesmo registro:* por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
>
> - *As Conversões são transformações de representações que consistem*

> *em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados*: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

Para a construção da seqüência didática, procuramos analisar os dois tipos de transformações, com principal ênfase na conversão entre registros.

Sobre a importância da conversão entre registros sob a ótica matemática, DUVAL (2003, p. 16) comenta que "[...] do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de mecanismos subjacentes à compreensão".

Neste sentido, a nossa pesquisa está focada para a conversão entre registros, observando a compreensão do ponto de vista cognitivo por parte dos alunos no que se refere aos objetos matemáticos em estudo.

DUVAL considera que é absolutamente necessário levar em conta o ponto de vista cognitivo nas análises das aprendizagens e nos processos de compreensão. Para tanto, são apresentadas razões que não se situam apenas no plano das observações, mas que se baseiam em uma análise teórica.

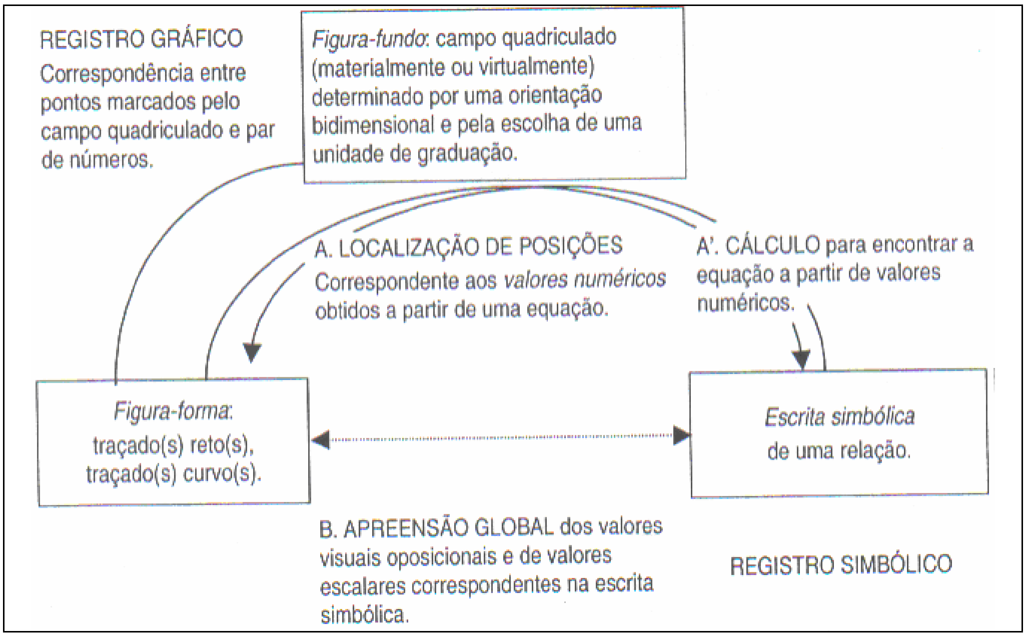
Segundo este autor:

> O ato da conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, pois bastaria aplicar regras de correspondência para "traduzir". Assim, passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. [...]Uma tal visão é superficial e enganadora não somente nos fatos concernentes às aprendizagens (Duval 1988), mas igualmente de um ponto de vista teórico, pois a regra de codificação permite somente uma leitura pontual das representações gráficas. Essa regra não permite uma apreensão global e qualitativa. Ora, é essa apreensão global e qualitativa que é necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos. (Id., 2003, p. 17)

Para a seqüência de ensino, proporemos atividades, como sugere o autor, que visam a uma apreensão global e qualitativa sobre as representações gráficas de pontos e curvas planas relacionadas a suas equações.

A conversão entre os gráficos de pontos e curvas e as equações supõe que se consigam levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos, como inclinação, intersecção com os eixos, translação, entre outras; e, de outro, os valores reais de parâmetros das equações, como os coeficientes positivos ou negativos, maiores ou iguais a 1 etc.

Segundo as concepções de DUVAL, o quadro abaixo representa o esquema de organização semiótica e de funcionamento das representações gráficas.

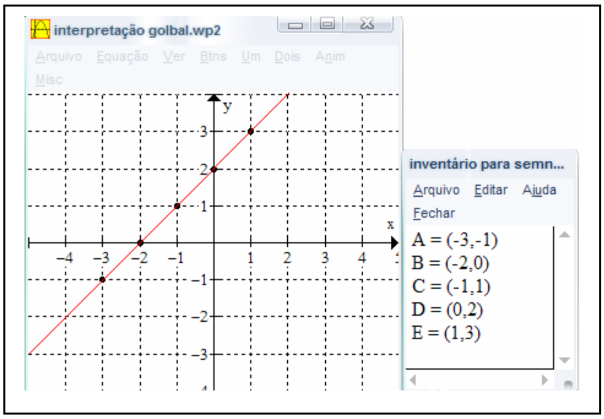


QUADRO 1: (DUVAL 2003, p.18)

De acordo com o quadro acima, como exemplo apresentamos uma das atividades propostas na seqüência didática. Primeiramente uma conversão do registro gráfico para o simbólico.

Representamos uma correspondência entre os pontos A, B, C, D e E marcados no campo quadriculado do plano cartesiano e pelos pares de números como coordenadas dos respectivos pontos (“REGISTRO GRÁFICO”), em seguida realizamos o traçado de uma reta, conforme FIG. 3, como um registro de **partida**.

A partir de cálculos (“A`: CÁLCULO”), encontramos uma equação cartesiana da reta (TAB. 2) por meio dos valores numéricos das coordenadas de pelo menos dois de seus pontos, obtendo no registro de **chegada** uma representação da reta como a escrita simbólica y=x+2 no “REGISTRO SIMBÓLICO” , ou seja, realizamos uma conversão entre os registros de representação semiótica do gráfico para o simbólico.



A`: CÁLCULO
f(0)=2
f(1)=3
f(x)=x+2

REGISTRO SIMBÓLICO
y=x+2

TAB. 2: Registro simbólico

FIG. 3 - Figura-fundo: campo quadriculado e gráfico da reta

.

Agora vamos realizar uma conversão do registro simbólico para o gráfico.

Representamos a equação $y = x + 2$ (“REGISTRO SIMBÓLICO”), uma escrita simbólica de alguma relação como um registro de **partida**.

Realizamos um tratamento no registro simbólico representado pela tabela (TAB. 3).

E por meio da (“A : LOCALIZAÇÃO DE POSIÇÕES”) correspondência entre os valores numéricos dados a partir da equação $y = x + 2$, obtemos no registro de **chegada** a representação gráfica da reta (“REGISTRO GRÁFICO”), conforme FIG. 4, ou seja, realizamos uma conversão entre os registros de representação semiótica do simbólico para o gráfico.

X	$f(x)=x+2$	y
-1	$f(-1)=-1+2$	1
0	$f(0)=0+2$	2
1	$f(1)=1+2$	3
2	$f(2)=2+2$	4

TAB.3 -representação simbólico-tabular

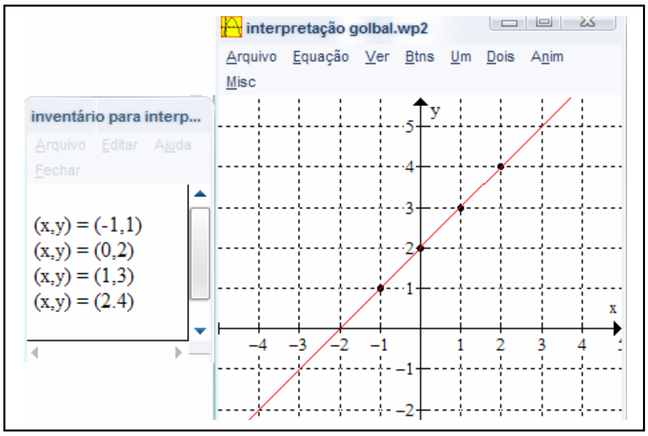


FIG.4 -Figura-fundo:campo quadriculado e gráfico da reta

Obtemos segundo DUVAL, uma apreensão global dos valores visuais posicionais (gráfico da reta) e dos valores dos parâmetros correspondentes à equação $y = x + 2$, neste caso da equação reduzida y=ax+b temos $a = 1$ e $b = 2$. ("B: APREENSÃO GLOBAL")

Esta apreensão global seria uma coordenação de ambas as conversões entre os registros gráfico e simbólico.

Segundo o autor, "as ligações A e A\` permitem somente uma leitura pontual dos gráficos. Somente a coordenação B permite uma apreensão global qualitativa". (p. 18)

Nesse momento, o autor se questiona:

> Mas será que somente essa coordenação permite reconhecer a forma de uma equação (ou de inequação), olhando a forma e a posição de retas e curvas (em um gráfico não-quadriculado)? Ora, para a maioria dos alunos, essa coordenação não é jamais efetuada, mesmo ao fim do ensino médio (18 anos). (p. 18)

Este questionamento é pertinente ao nosso projeto de pesquisa, que trata do estudo dos conhecimentos do aluno, relacionado à geometria analítica, como a representação de pontos e curvas, no plano, por coordenadas e equações na forma cartesiana ou paramétrica.

Um estudo importante sobre a discriminação de variáveis visuais pertinentes (do gráfico) e sobre a percepção das variações correspondentes na escrita é apresentado por DUVAL (1988, p. 235-253). Onde o autor evidencia as dificuldades existentes por alunos do Ensino Médio, quando se trata de conversões entre os registros gráfico e algébrico e vice-versa.

Este autor considera que a razão das dificuldades identificadas por diferentes pesquisas quanto às tarefas de leitura e interpretação de representações gráficas está no desconhecimento, pelo aluno, da correspondência semiótica entre o registro das representações gráficas e da escrita algébrica. Por exemplo, a passagem de uma equação à sua representação gráfica com construção ponto por ponto, freqüentemente favorecida no ensino, não somente é inadequada, mas constitui um obstáculo. Desta forma, o autor propõe uma descrição sistemática das variáveis visuais levando em conta o procedimento de interpretação global. (DUVAL 1988, p. 235)

DUVAL (1988, p.236) apresenta três tratamentos heterogêneos das representações gráficas, explicita as variáveis visuais pertinentes que correspondem às características significativas de uma escrita algébrica e ilustra a pertinência de sua análise, mostrando alguns resultados de uma pesquisa por ele elaborada.

Os três tratamentos das representações gráficas são:

1) O procedimento por pontos;

2) O procedimento de extensão de um traçado efetuado;

3) O procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

Em relação aos dois primeiros procedimentos, MORETTI (2003, p. 151) comenta:

> O procedimento 1 é o que mais aparece nos livros didáticos: pontos obtidos por substituição na expressão da função são localizados em um sistema de eixos graduados para que em seguida, “[ ] 2”, a curva

> possa ser traçada por meio da junção desses pontos. Nesse modo, não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir dessa forma de proceder, pelo fato de que se há congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente.

No procedimento 3, contrariamente ao primeiro, o conjunto traçado e eixo formam uma imagem que representa um objeto descrito por uma equação algébrica. Para MORETTI (2003, p. 151), "[...] este modo permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica".

Sobre o procedimento 3, DUVAL (1988, p. 237) afirma que:

> [...] com esse procedimento, não estamos mais na presença da associação "um ponto – um par de números", mas da associação "variável visual da representação – unidade significativa da escrita algébrica". (tradução livre)

Em uma análise das variáveis visuais realizada, este autor afirma:

> O custo muito desigual das passagens entre escrita simbólica e representação gráfica aparece aqui precisamente. Para ir da escrita simbólica à representação gráfica, é suficiente uma única aplicação ponto a ponto: dão-se valores particulares a x, sem ter a preocupação das suas propriedades, por encontrar pares de números, ou seja, pontos. Mas, para ir da representação gráfica à escrita algébrica, aqui não deixa de ser possível: é necessário identificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrar o todo. Em outros termos, a passagem da representação gráfica à escrita algébrica aumenta de uma interpretação global. Ao contrário da aplicação ponto a ponto, ou mesmo o da extensão representativa, a aplicação de interpretação exige que centre a atenção num conjunto de propriedades e não sobre os valores específicos tomados um a um. (DUVAL 1988, p. 241, tradução livre)

Neste trabalho aproveitamos essa conclusão do autor para a elaboração de atividades que, ao contrário de ponto a ponto, exigirá atenção para um conjunto de propriedades geométricas.

Conforme este autor, uma análise não se limita, evidentemente, ao caso, por exemplo, da reta de equação reduzida y = ax+b. Isto sugere, para a seqüência de ensino, uma análise da conversão entre os registros gráficos e simbólicos e vice-versa, também de algumas curvas planas que permitem uma apreensão global qualitativa.

DUVAL (2003, p. 25) apresenta a utilização da conversão como um instrumento de análise, de acordo com as seguintes condições:

> • dar-se a representação a mais elementar possível, R_1, de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida $R`_1$ em um registro de chegada B;
>
> • proceder a todas as variações possíveis de $R_{1...}R_n$ que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de $R`_1$ no registro de chegada B. [...] As representações $R_{1...}R_n$ do registro A se separam, então, em duas classes: aquelas para as quais existe somente uma representação concomitante $R`_i$ no registro de chegada B e aquelas que têm cada uma representação concomitante diferente no registro de chegada.

Segundo este autor, com este método é possível discriminar, entre todas as variáveis estruturais[2] possíveis das representações de um dado registro, aquelas que são cognitivamente importantes.

Este método é sistematicamente utilizado em trabalhos, desenvolvidos por este autor, sobre a complexidade cognitiva da articulação entre gráficos e equações, como apresentado no QUADRO 1.

Os critérios para categorizar os dados coletados e organizá-los em resultados interpretáveis, limitam-se às situações de investigação e "a todos os testes organizados em função de uma variação sistemática de representações nas tarefas de conversão". (DUVAL 2003, p. 27)

[2] As variáveis estruturais são as variações internas a um registro que transformam uma representação à condição que se tenha ainda uma representação identificável como uma representação do mesmo registro. (ALMOULOUD 2000, p.42)

Sobre a organização e categorização das respostas coletadas, segundo DUVAL (2003, p. 27), deve-se ocorrer uma divisão para cada item, sendo esta "[...] entre as respostas corretas ou aceitáveis de um ponto de vista matemático, que se tenha levado em conta ou não em considerações as exigências de justificação matemática, e aquelas que não o são".

Conforme este autor, utilizaremos a conversão entre registros semióticos como um instrumento de análise para a construção da seqüência didática e coleta dos dados.

4.2 A mudança de quadros

Analisando o funcionamento dos matemáticos DOUADY (1986 *apud* ALMOULOUD, 2000), evidenciou o papel das mudanças de quadros no desenvolvimento das questões matemáticas. A noção de mudança de quadros tem como objetivo evidenciar que uma das características importantes da matemática é a capacidade de mudar de ponto de vista, de traduzir um problema de um quadro para outro, com a finalidade específica de acessar outras ferramentas de resolução, além daquelas inicialmente encaminhadas. (p. 28).

DOUADY (1986 apud ALMOULOUD, 2000) traça a seguinte definição para quadro:

> Um quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e serem diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida. (p. 28)

Para a seqüência didática, estamos interessados em desenvolver atividades que articulem a mudança dos seguintes quadros: algébrico, numérico, funções e geométrico. No geométrico estamos interessados especificamente em um dos seus subquadros: o da geometria analítica[3].

No quadro algébrico, interessam-nos os estudos das relações entre formas escritas, como as equações cartesianas ou paramétricas e resolução de equações, como do 1º e 2º graus.

No quadro numérico, há o cálculo sobre coordenadas no plano (geometria analítica) e em equações (algébrico).

No quadro de funções, há o estudo de funções do 1º e 2º graus.

No quadro da geometria analítica, expõe-se a representação gráfica de ponto, reta, parábola e outras curvas planas e estudo de algumas propriedades geométricas de curvas.

Neste quadro temos como objetivo evidenciar a articulação entre os pontos de vista paramétrico ou cartesiano e as conversões entre os registros simbólico e gráfico na representação de curvas planas.

4.3 Flexibilidade entre Pontos de Vista

Em sua tese, DIAS (1998 *apud* DORIER, 1998) interessou-se pela questão da flexibilidade cognitiva. Observa que na didática da matemática, a flexibilidade entre as formas de conhecimento e de representação semiótica tendem a ser reconhecidas como um componente essencial da conceitualização e eficácia do funcionamento matemático. Para isso, faz uma revisão crítica e compara os

[3] Segundo ALMOULOUD(2000, p.63), a geometria analítica é um subquadro da geometria.

detalhes de diversos trabalhos franceses e anglo-saxões, onde a flexibilidade ocupa um lugar mais ou menos importante.

DIAS (1998 *apud* DORIER, 1998) interessou-se também pelos problemas de articulação entre diferentes sistemas de representação simbólica em Álgebra Linear, abordados no quadro de estudos globais da flexibilidade entre dois pontos de vista, cartesiano e paramétrico.

No início de suas pesquisas (1993 a 1995), a autora tinha distinguido em Álgebra Linear:

- Dois quadros: algébrico e geométrico; alegando que as primeiras noções são introduzidas em geral no quadro algébrico em R^n, mas que o ensino favorece um jogo com o quadro geométrico de duas ou três dimensões.

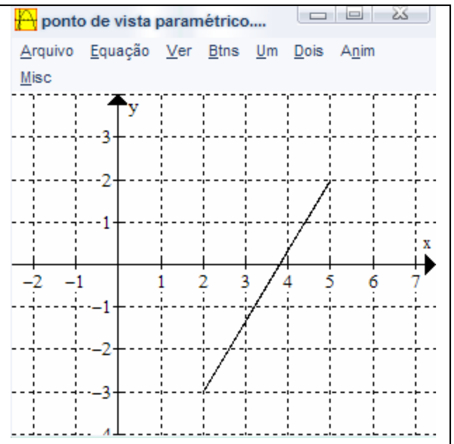
A autora, após um estudo mais intenso nos seus últimos trabalhos considera agora cinco tipos de quadros: os da álgebra linear, da geometria afim euclidiana, dos sistemas lineares, das matrizes e dos determinantes. E quatro registros de representação semiótica: a representação simbólica intrínseca, a representação por coordenadas, a representação por equações e a representação por matrizes. A autora contempla também dois pontos de vista: o cartesiano e o paramétrico.

Em nossa pesquisa, o trabalho de DIAS (1998) contribui para a elaboração e análise da seqüência didática em alguns problemas de articulação entre diferentes sistemas de representação como o simbólico e gráfico em geometria analítica, abordados no quadro da flexibilidade entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico.

Apresentamos, a seguir (QUADRO 2), um exemplo da conversão entre os registros semióticos da representação simbólico-algébrica para a gráfica em dois pontos de vista.

O segmento de uma reta localizado entre os pontos A=(2;-3) e B=(5;2).

No ponto de vista paramétrico a partir de cálculos desenvolvemos a escrita algébrica das equações paramétricas (registro de partida) e no registro gráfico representamos o segmento (registro de chegada).

Sejam A=$(x_1;y_1)$ e B=$(x_2;y_2)$ *t* um parâmetro $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1).t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1).t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + (5-2).t \\ y = -3 + (2+3).t \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + 5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(t) = 2 + 3t \\ g(t) = -3 + 5t \end{cases}$; com $0 \le t \le 1$ Equações paramétricas da reta Registro simbólico Registro gráfico Quadro das funções Quadro da geometria analítica Ponto de vista paramétrico	

QUADRO 2: Ponto de vista paramétrico

Agora vamos encontrar a equação por outro ponto de vista (QUADRO 3).

No ponto de vista cartesiano a partir de cálculos encontramos a equação cartesiana (registro de partida) e no registro gráfico representamos novamente o segmento (registro de chegada).

Sejam $A = (x_1; y_1)$ e $B = (x_2; y_2)$

$y = ax + b$, a equação reduzida da reta

Portanto:

$y_1 = ax_1 + b \to -3 = a.2 + b \to b = -3 - 2a(I)$

$y_2 = ax_2 + b \to 2 = a.5 + b \to b = 2 - 5a(II)$

Substituindo-se (I) em (II), temos:

$$b = 2 - 5.\left(\frac{5}{3}\right) \to b = 2 - \frac{25}{3} \to b = -\frac{19}{3}$$

Logo:

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}, \text{ com } 2 \leq x \leq 5$$

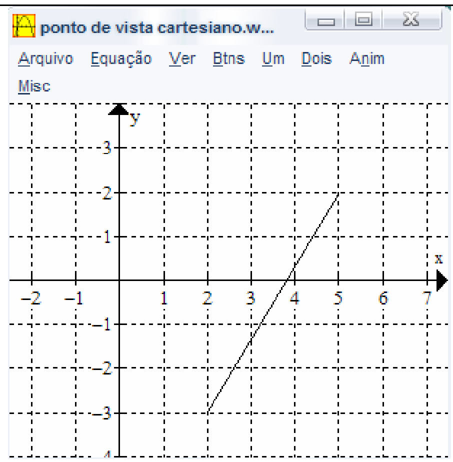
Registro simbólico

Registro gráfico

Quadro das funções

Quadro da geometria analítica

Ponto de vista cartesiano



QUADRO 3: Ponto de vista cartesiano

Pretende-se observar aqui que, para o aluno, um mesmo problema pode ser fácil de um ponto de vista e difícil de outro.

5. Metodologia de Pesquisa

Como metodologia de pesquisa, utilizamos alguns elementos de uma Engenharia Didática segundo ARTIGUE (1996). Foi elaborada e aplicada uma seqüência didática e posterior análise dos dados coletados. Com estes resultados, foi realizada a validação e conclusão da pesquisa, bem como os caminhos que elas sugerem para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica e a noção de parâmetro.

Segundo ARTIGUE (1996):

> A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em "realizações didática" na sala de aula, isto é, na concepção[4], na

[4] Sobre a *concepção* entendemos como *construção.*

> realização, na observação e na análise de seqüências de ensino. (p.196)

A noção de Engenharia Didática que inclui uma parte experimental é empregada nas pesquisas da Didática da Matemática, desde o início da década de 1980. O objetivo é usar este termo para elaborar uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto preciso, apóia-se nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, encontra-se obrigado a trabalhar sobre os objetos muito mais complexos que os objetos depurados da ciência e, conseqüentemente, deve tratar de uma maneira prática, com todos os meios dos quais dispõe, dos problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Distinguimos quatro fases no processo da Metodologia da Engenharia Didática:

- As análises prévias ou preliminares;
- A construção e análise *a priori*;
- A experimentação;
- A análise *a posteriori* e validação.

Estudaremos cada uma das quatro fases nos diferentes capítulos a seguir.

CAPÍTULO II: ESTUDOS SOBRE O OBJETO MATEMÁTICO

Neste capítulo, trataremos dos estudos realizados, da revisão bibliográfica e do objeto matemático, para tentar identificar quais são os fenômenos didáticos relacionados à noção de parâmetro e qual a sua importância neste contexto. Estes estudos preliminares vão nos auxiliar na *construção* e análise *a priori* da seqüência didática.

Em pesquisas com o apoio da Engenharia Didática, segundo ARTIGUE (1996), a fase dos estudos preliminares ocorre em um quadro didático teórico geral e em conhecimentos didáticos adquiridos no domínio que está sendo estudado, com base em um determinado número de análises preliminares, a serem considerados tendo em conta os objetivos específicos da pesquisa:

- Análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- Análise do ensino usual e seus efeitos;
- Análise das concepções dos estudantes, das dificuldades e dos obstáculos que caracterizam seu desenvolvimento;
- Análise do campo das limitações em que se situa a realização didática efetiva.

1. Revisão Bibliográfica e Estudo sobre o Objeto Matemático

Algumas pesquisas apontaram para uma falta de entendimento da noção de parâmetro em geometria analítica e nos direcionaram na busca de ferramentas que possam facilitar uma compreensão significativa deste tema no ensino – aprendizagem.

Estes trabalhos foram obtidos após pesquisas no banco da CAPES, no LUMEM (sistema de busca das bibliotecas da PUC de São Paulo), no DEDALUS (sistema de busca da biblioteca da USP), no portal de bibliotecas da UNESP e no SBU (sistema de bibliotecas da UNICAMP). A escolha deste tema se deu porque estes estudos tratam das dificuldades no ensino-aprendizagem da geometria analítica com o uso de parâmetros.

A seguir, apresentamos um breve estudo das pesquisas correlatas que justificam a nossa problemática.

SIDERICOUDES (1998), sobre tópicos da Geometria Analítica, em especial a Geometria das Coordenadas, afirma que:

> A abordagem desse conteúdo numa aula tradicional, teórica, tendo como recurso giz e quadro-negro normalmente é desenvolvida apresentando num primeiro momento os conceitos referentes ao assunto programado para determinada classe. Após as apresentações desses conceitos, solicita-se a resolução de exercícios extraídos de um livro didático, ou talvez, criados no momento. Essa é a prática habitual na abordagem tradicional. O aluno espera o professor conduzi-lo durante as aulas, determinando o quê e como realizar qualquer tarefa proposta. O processo de formalização dos conceitos matemáticos antecipa-se ao processo de exploração, de construção do conhecimento. (p. 4)

No estudo da geometria das coordenadas, como os gráficos de curvas no $\mathbb{R}^2$, pretende-se propor uma abordagem diferente da tradicional, como descrita por SIDERICOUDES.

MORETTI (2003), em um dos seus artigos sobre a translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais, comenta que:

> Apesar da importância que é dada, o esboço ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos estes obtidos por intermédio de substituições na expressão matemática correspondente. Para uma nova equação, mesmo pertencendo à mesma família de curvas, todo esse mesmo processo de ponto por ponto deve ser repetido sem que, na maioria das vezes, qualquer relação seja estabelecida com alguma outra curva.

> Esse modo de proceder, esboçar individualmente cada curva, impossibilita que se perceba que modificações na equação são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa. (p. 149-150).

Ainda segundo MORETTI (2003, p.150), “[...] essa percepção pode se tornar possível desde que se leve em conta, sempre que possível, a família à qual a curva pertence”.

Entendemos que, se os alunos iniciassem um estudo a partir de uma família de pontos de uma determinada curva no plano, como por exemplo, $(x;y)=(a;a^2)$, ou uma família de curvas, como por exemplo $y= ax+b$, onde **a** e **b** são parâmetros, evidenciariam com mais facilidade a família à qual os pontos ou a curva pertencem. Neste sentido, seguimos nossa pesquisa no que se refere ao estudo de parâmetros e o seu uso em equações.

Em uma outra pesquisa, BIANCHINI e ALMOULOUD (1995, p.220) apresentam uma análise dos erros mais freqüentes na resolução de sistemas lineares e, em uma questão específica, afirmam que: ”[...] pretendia-se diagnosticar os conhecimentos de cada um sobre a teoria de sistemas lineares. Mais precisamente, gostaríamos de comprovar a hipótese de J. L. Dorier a respeito da confusão que o aluno faz entre incógnita e parâmetro”.

Diante desta hipótese, os resultados apresentados por BIANCHINI e ALMOULOUD (1995, p.221) evidenciam que os alunos confundem **parâmetro com incógnita,** pois o índice de acerto foi de apenas 3%.

Os autores chegam à seguinte conclusão:

> Realmente existe para o aluno a confusão do que é o parâmetro e do que é a incógnita, parece que o que fica claro para ele é que se deve achar uma resposta para o problema e não é feita uma reflexão sobre quem deve ficar em função de quem. Alguns isolaram x, outros y e outros a. (p. 222)

Levando-se em conta que equações cartesianas são mais estudadas do que equações paramétricas, tanto no ensino fundamental, quanto no ensino médio, torna-se visível a confusão que fazem, os alunos, quando estudam sistemas de equações lineares com parâmetros. Esta dificuldade pode ser compreendida pelos pontos de vista paramétrico e cartesiano e nos faz refletir e seguir na busca de outros trabalhos que evidenciam dificuldades conceituais com a noção de parâmetro na geometria analítica.

DI PINTO (2000) apresenta uma análise de produções científicas sobre ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, objetivando fornecer o estado em que se encontram as pesquisas preocupadas com este tema, feitas por brasileiros na década de 90. Com intuito de mostrar as contribuições deixadas pelos autores, DI PINTO apresenta algumas conclusões das obras estudadas. Vamos apresentar uma destas obras que consideramos importante para a nossa pesquisa, pois se trata do uso de parâmetros em equações.

Este autor analisou o trabalho de Ivete Mendes Freitas, apresentando inicialmente: título, tipo de obra, objetivo da pesquisa, metodologia, referencial teórico, sendo:

> **Tìtulo:** Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu significado para o aluno.
> **Tipo de obra**: Dissertação de mestrado defendida no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC SP, 1999.
> **Objetivo da pesquisa**: Investigar a interpretação que alunos do 2º grau dão às soluções de um sistema de equações lineares parametrizado.
> **Metodologia**: A pesquisa foi do tipo diagnóstico, com uma parte empírica. Nos estudos preliminares, houve uma análise do assunto em livros didáticos e uma reflexão sobre o desenvolvimento histórico do assunto.
> **Referencial teórico**: Para justificar a escolha de seu tema, a autora se apoiou na teoria dos Registros de representação semiótica de Raymond Duval. (FREITAS, 1999 *apud* DI PINTO, 2000, p. 14, grifo do autor)

Em seguida, apresenta conclusões desta pesquisa:

> Sobre o desenvolvimento do estudo de sistemas lineares nos livros didáticos analisados, a autora constatou a inexistência do quadro geométrico com conseqüente ênfase no quadro algébrico. Constatou também a pouca importância dada ao termo e exploração de parâmetro nos livros examinados. Essa pouca ou nenhuma importância dedicada ao estudo da noção de parâmetro em matemática reflete no

> desempenho dos alunos, quando enfrentam um sistema linear parametrizado. (FREITAS, 1999 *apud* DI PINTO, 2000, p. 16)

Aqui estamos diante de um fato interessante que é a constatação da falta de estudos no que diz respeito à noção de parâmetros e o seu uso em equações, seja na forma paramétrica ou cartesiana.

DI PINTO apresenta também as sugestões da autora, (FREITAS, 1999 *apud* DI PINTO, 2000, p. 16), comentando: "[...] sugere que os professores trabalhem com a variação dos valores dos parâmetros, a fim de favorecer a compreensão e a atribuição de significado aos sistemas lineares parametrizados".

E, finalmente, sobre o mesmo tema, FREITAS (1999 *apud* DI PINTO, 2000, p. 17) comenta: "a autora termina conjecturando se a utilização do *software Winplot* poderia facilitar o estudo de sistemas lineares parametrizados".

Entendemos que a utilização do *software Winplot* pode facilitar a interpretação da solução de um sistema linear parametrizado, como possível (determinado ou indeterminado) ou impossível, bastando, para isso, analisar o comportamento gráfico das retas imediatamente após a realização de variações nos valores dos parâmetros de suas equações.

Analisando uma ferramenta para a representação gráfica de funções reais e curvas no plano, GRAVINA (1998) apresenta argumentos que favorecem o uso de um plotador gráfico, dizendo:

> A partir de uma função básica e de seu gráfico, o aluno passa a explorar família de funções. O recurso de múltiplas representações, no caso analítica e geométrica, favorece a construção de relações entre operações algébricas na expressão da função e movimentos geométricos em gráficos. Em uma família, a função básica é a que tem a expressão algébrica mais simples, e as demais funções são obtidas a partir de operações algébricas sobre a expressão da função básica. Os gráficos dos elementos da família são identificados a partir de movimentos geométricos aplicados ao gráfico da função básica: translação vertical ou horizontal; dilatação ou contração nas direções horizontais e verticais; reflexões. Com a possibilidade de plotar simultaneamente diversos elementos da família, o aluno explora o tipo de movimento aplicado ao gráfico da função básica. (p. 19)

Entendemos que, utilizar recursos de múltiplas representações gráficas, como família de pontos ou gráficos de curva a um parâmetro, em geometria analítica, favorece ao aluno, a construção de relações entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas. Consideramos os dois pontos de vista, paramétrico e cartesiano, importantes, pois em geral, no ensino médio, os livros trabalham quase sempre, somente o ponto vista cartesiano em $\mathbb{R}^2$. Essa ênfase pode se tornar um *obstáculo didático*[5] para o desenvolvimento posterior da geometria analítica em outras dimensões. Um exemplo é a introdução da noção de vetor, articulada no ponto de vista paramétrico.

Em seguida, apresentamos um breve estudo histórico da evolução de alguns conceitos da geometria analítica, especificamente sobre parâmetro, incógnita, variável, sistema de coordenadas cartesianas, gráficos de curvas na forma paramétrica e cartesiana em $\mathbb{R}^2$ e a parametrização de curvas.

Para estes estudos, utilizamos como fonte, livros de história da matemática, de álgebra vetorial e geometria analítica, cônicas e quádricas e de história das curvas. Por meio dos trabalhos de EVES e BOYER identificaremos alguns obstáculos epistemológicos.

Este estudo nos possibilitará o entendimento de quais são as concepções[6] inerentes ao desenvolvimento de importantes conceitos, tais como as diferenciações entre incógnita, parâmetro e variável, as representações analíticas de curvas geométricas na forma paramétrica ou cartesiana e a evolução de algumas curvas no plano, contribuindo para a elaboração da seqüência didática, a

---

[5] Segundo ALMOULOUD (2000, p.125) "os obstáculos de origem didática são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo que resultam de uma transposição didática".
[6] Concepção (construção ou elaboração) segundo ARTIGUE (1996).

construção e análise a *priori* das atividades propostas.

2. Considerações gerais inerentes às origens da Geometria Analítica.

Segundo VENTURI (2003, p.13), foi extraordinário o incremento dado à geometria plana e espacial pelos matemáticos helenísticos, como: Pitágoras (560-500 a.C.); Euclides (c.325-c. 265 a.C.);Arquimedes (287-212 a.C.); Apolônio de Perga (262 -190 a.C.). Com estes, a matemática deixa seu caráter meramente intuitivo e empírico (egípcios e babilônicos) e se assume, a partir da criação de definições, axiomas, postulados e teoremas, como disciplina racional, dedutiva e lógica. Porém, ainda não dispunha de uma representação algébrica adequada.

Esta temática está presente no ensino médio quando os saberes a ensinar são a geometria plana e espacial. Em nosso trabalho, necessitamos que os alunos tenham uma noção conceitual prévia pelo menos no que se refere à representação algébrica da geometria plana.

Ainda segundo VENTURI (2003, p.17), "a Álgebra possui uma dupla paternidade: Diofanto e Al-Khowarizmi".

BOYER (1996, p. 121) comenta que Diofanto é freqüentemente chamado o pai da álgebra, mas tal designação não deve ser tomada literalmente, pois outros autores consideram como tal François Viète (1540 – 1603).

Segundo EVES (2004, p.206), comentando sobre a álgebra grega antiga:

> Em 1842, G.H.F. Nesselmann caracterizou, com propriedade, três estágios no desenvolvimento da notação algébrica. Primeiro se tem a álgebra retórica em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da álgebra simbólica, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam.

Diofanto de Alexandria viveu no século III d.C., tendo como principal trabalho o livro *Aritmética*, com a utilização de notações, uma linguagem mais sincopada e mais simbólica para a matemática. Porém, ainda segundo EVES (2004, p.206), a álgebra retórica continuou por centenas de anos, exceto na Índia. Na Europa Ocidental, permaneceu até o século XV, mesmo com o surgimento da álgebra simbólica no século XVI, somente pela metade do século XVII, esta álgebra simbólica acabou se impondo.

Para BOYER (1996, p.156), o titulo "pai da álgebra" pertence mais a Al-Khowarizmi do que a Diofanto, o livro *Al-jabr Wa'l muqabalah* está mais próximo da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofanto, pois "[...] o livro não se ocupa de problemas difíceis de análise indeterminada, mas contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente de segundo grau".

Al-Khowarizmi viveu por volta de 800 d.C., na cidade de Bagdá, considerada então como uma nova Alexandria. Sua principal obra, *Al-Jabr*, deixou marcas consistentes em toda a Europa. Al-Jabr recebeu a forma latinizada *Algebrae*, para nós Álgebra.

Em nosso trabalho, dos três estágios no desenvolvimento da notação algébrica (retórica, sincopada e simbólica), vamos nos ater à álgebra simbólica das equações cartesianas ou paramétricas de curvas planas em geometria analítica.

2.1. O início do simbolismo algébrico e o conceito de parâmetro.

Segundo BOYER (1996, p. 176), Jordanus Nemorarius (séc. XIII) escreveu livros de aritmética, geometria e astronomia, e um destes denominado *Arithmetica* é significativo, especialmente por usar letras em vez de numerais para denotar números, o que torna possível enunciar teoremas algébricos gerais.

BOYER (1996, p.176), comenta que:

> Nos teoremas aritméticos de Os elementos VII-IX de Euclides os números eram representados por segmentos de retas a que eram associadas letras, e as provas geométricas na Álgebra de al khowarizmi usavam diagramas com letras; mas todos os coeficientes nas equações usadas na Álgebra são números específicos, sejam representados em numerais, sejam escritos em palavras. A idéia de generalidade está contida na exposição de al-khowarizmi, mas ele não tinha um método para exprimir algebricamente as proposições gerais que aparecem tão claramente em geometria. Na Arithmetica o uso de letras sugere o conceito de "parâmetro", mas os sucessores de Jordanus em geral abandonaram o uso de letras.

A história da matemática, em especial da álgebra, mostra a importância da escrita, seja por meio de segmentos, numeral ou letras para justificar o seu desenvolvimento. Em nosso trabalho, o entendimento histórico desta álgebra nos permite compreender e justificar, em parte, o uso de parâmetros em uma álgebra simbólica.

Segundo EVES (2004, p.308), somente no século XVI, François Viète (1540-1603) ou, em latim, Franciscus Vieta, considerado o maior matemático francês da época, apresentou em um dos seus trabalhos, denominado *In artem,* o desenvolvimento do simbolismo algébrico:

> Neste texto Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. A convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes foi introduzida por Descartes em 1637.

No decorrer da seqüência didática, apresentamos aos alunos este momento histórico, que vai de Viète a Descartes, no que se refere ao uso de incógnitas e parâmetros em equações.

BOYER (1996, p.208), sobre François Viète, comenta que:

> Sem dúvida foi à álgebra que Viète deu suas mais importantes contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das idéias modernas. […] Não poderia haver grande progresso na teoria da álgebra enquanto a preocupação principal fosse a de encontrar a "coisa" numa equação

com coeficientes numéricos específicos. Tinham sido desenvolvidos símbolos e abreviações para uma incógnita e suas potências, bem como para operações e a relação de igualdade. Stifel tinha ido ao ponto de escrever AAAA para indicar a quarta potência de uma quantidade incógnita; no entanto não tinha um esquema para escrever uma equação que pudesse representar qualquer dentre uma classe toda de equações. [...] Um geômetra num diagrama, poderia fazer ABC representar todos os triângulos, mas um algebrista não tinha um esquema correspondente para escrever todas as equações de segundo grau.

Sobre esta álgebra, nos questionamos se não é isso que se reproduz com os alunos. Quando se resolve uma equação cartesiana com coeficientes numéricos específicos, a preocupação principal é a de encontrar o valor da incógnita, como apresentado historicamente? Não temos aqui a pretensão de responder, mas evidenciar que, no ensino de equações algébricas, trabalha-se bastante com a noção de incógnita e muito pouco ou raramente com a noção de parâmetro.

Ainda segundo BOYER (1996, p. 208):

> Desde os dias de Euclides que letras tinham sido usadas para representar grandezas, conhecidas ou desconhecidas, e Jordanus fizera isso constantemente; mas não havia meios de distinguir grandezas supostas conhecidas das quantidades desconhecidas que devem ser achadas. Aqui Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade supostamente desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a idéia de uma quantidade desconhecida.

Vemos que, somente no século XVI, Viète estabeleceu uma diferenciação na álgebra simbólica entre grandezas conhecidas e desconhecidas e, pela primeira vez, a denominação que uma constante (quantidade conhecida) numa equação representada por uma letra denomina-se **parâmetro**.

René Descartes (1596-1650), na sua obra *La géométrie,* em 1637, introduz o simbolismo para as equações, com o uso de letras do começo do alfabeto para parâmetros e do fim para as incógnitas; a adaptação da notação exponencial a essas letras e o uso dos símbolos germânicos + e -, simbolismo muito próximo do usado nos dias atuais. No entanto, enquanto consideramos as incógnitas e os parâmetros como números, Descartes pensava neles como segmentos, como relata BOYER (1996, p. 232):

> Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada, e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção – aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita) pois os termos de uma dessas expressões são juntas iguais aos termos da outra.

Neste momento histórico, Descartes, na primeira metade do século XVII, apresenta finalmente o que usamos hoje: as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, d,...) representando os parâmetros e as últimas (x,y,z,t,...) representando as incógnitas numa equação cartesiana. Percebemos também uma primeira mudança de quadros, do geométrico para o algébrico, ou conversão de registros: de uma representação gráfica para uma representação simbólico-algébrica.

Sobre quantidades desconhecidas, é importante distinguir o pensamento entre Viète e Descartes. Este último usava quantidades desconhecidas como *variável* e Viète como *incógnita*. (SILVA, 1994)[7]

2.2. Coordenadas, gráficos de funções e variável.

Um dos maiores matemáticos do século XVI foi Nicole Oresme (1323–1382 d. C). Segundo BOYER (1996, p.180), a maior influência de Nicole Oresme foi a seguinte:

> Por quase um século antes de seu tempo os filósofos escolásticos[8] vinham discutindo a quantificação das "formas" variáveis, um conceito de Aristóteles aproximadamente equivalente à qualidade. Entre tais

[7] Artigo sobre o desenvolvimento da Geometria Analítica e a Influência de Descartes e Euler na Obra de Auguste Comte . 1994. Disponível em <http://www.ufes.br/circe/artigos/artigo65.htm > Acessado em 30/06/2006.

[8] Segundo Dicionário Aurélio: Doutrinas teológico-filosóficas dominantes na Idade Média, dos sécs. IX ao XVII, caracterizadas sobretudo pelo problema da relação entre a fé e a razão, problema que se resolve pela dependência do pensamento filosófico, representado pela filosofia greco-romana, da teologia cristã.

> formas havia coisas como a velocidade de um objeto móvel e a variação da temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não uniforme. As discussões eram interminavelmente prolixas, pois os instrumentos de análise disponíveis eram inadequados. Apesar dessa falta, os lógicos em Merton College tinham obtido, como vimos, um importante teorema quanto ao valor médio de uma forma "uniformemente diforme"- isto é, uma em que a taxa de variação da taxa de variação é constante. Oresme conhecia bem esse resultado, e ocorreu-lhe em algum momento antes de 1361 um pensamento brilhante – porque não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções.

Neste momento histórico, século XIV, além da representação gráfica de funções, de variável contínua e pontos móveis, observa-se uma relação interessante entre a matemática, a física e a filosofia com o estudo do *movimento* por meio de uma interdisciplinaridade.

Nicole Oresme nasceu na Normandia por volta de 1323. Faleceu em 1382. Entre os seus trabalhos, este sobre a localização de pontos por coordenadas se destaca um século mais tarde, influenciando matemáticos do Renascimento (séc. XV), até mesmo Descartes (1596-1650 d.C), e antecipando, desta forma, a Geometria Analítica.

Para Nicole Oresme, tudo que é mensurável é imaginável na forma contínua, como o traço de um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante, ou seja, as primeiras noções sobre pontos móveis que representam a trajetória de uma curva. Para representar uma situação, FIG.5, Nicole Oresme apresenta, ao longo de uma reta horizontal, alguns pontos representando instantes de tempo, denominados de longitudes, e para cada instante, traça perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta, denominado de latitude, cujo comprimento representa a velocidade.

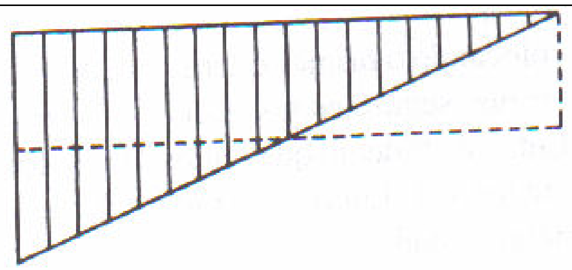
	Quadro da geometria analítica: Conversão entre registros de representação semiótica: - Do geométrico figural para o gráfico.

FIG.5: Latitude e longitude (BOYER 1996, p. 181)

As latitudes e longitudes usadas por Oresme são, em certo sentido, as nossas abscissa e ordenada, com uma representação gráfica muito próxima da geometria analítica. Segundo BOYER (1996, p. 181), “seu uso de coordenadas, é claro, não era novo, pois Apolônio, e outros antes dele, tinham usado sistemas de coordenadas, mas sua representação gráfica de uma quantidade variável era novidade”.

Nicole Oresme, além de perceber o princípio fundamental de poder representar uma função de uma variável como uma curva, verificou parte do principio fundamental da Geometria Analítica[9], desenvolvido por Fermat, em que uma curva plana pode ser representada, em relação a um sistema de coordenadas, como uma função de uma variável. O autor apresenta as primeiras noções de pontos móveis, que em instantes inicial e final, de maneira contínua, define a trajetória do intervalo de uma curva, no caso uma reta. BOYER (1996, p. 181) observa:

> Ao passo que dizemos que o gráfico da velocidade num movimento uniformemente acelerado é uma reta, Oresme escrevia. “Toda qualidade uniformemente diforme terminando em intensidade zero é imaginada como um triângulo retângulo”, isto é, Oresme se interessava mais pelos aspectos de cálculo da situação: 1) o modo pelo qual a função varia (isto é, a equação diferencial da curva) e, 2) o modo pela qual a área sob a curva varia (isto é, a integral da função).

Percebemos que Nicole Oresme realiza implicitamente uma mudança de

[9] Segundo BOYER (1996,p.238), Fermat define o princípio fundamental da geometria analítica, como : “sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas uma linha, reta ou curva.”

quadros, da geometria analítica (representações gráficas) para o de funções (de uma variável).

2.3 Origens da Geometria Analítica

Apolônio (262–190 a.C), em sua obra *As cônicas,* é o primeiro a utilizar um sistema de coordenadas, o que contribui para o surgimento da geometria analítica.

BOYER (1996, p. 106 -107), em relação ao uso de coordenadas, aponta que:

> Os métodos de Apolônio, em *As cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos....As distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência são as abscissas, e os segmentos paralelos à tangente e cortados entre o eixo e a curva são as ordenadas...Da geometria grega podemos dizer que as equações são determinadas pelas curvas, mas não que curvas fossem determinadas pelas equações. Coordenadas, variáveis e equações eram noções subsidiárias derivadas de uma situação geométrica específica; e infere-se que do ponto de vista grego não era suficiente definir curvas abstratamente como lugares satisfazendo a condições dadas sobre as coordenadas.

A relação entre os dois quadros, algébrico (equações) e geométrico (curvas), e vice-versa torna-se evidente na história e facilita o surgimento da geometria analítica.

A obra *La géométrie*, de Descartes, poderia ser descrita não só como uma aplicação da álgebra à geometria, mas como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica, como relata BOYER (1996, p. 233): "o objetivo do seu método, portanto, era duplo: 1) por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e 2) dar significados às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas".

Em contrapartida, Pierre de Fermat, em 1629, por meio do seu trabalho como restaurador de obras, propôs-se a reconstruir uma das obras de Apolônio, *Lugares planos,* obtendo resultados desse esforço. Em 1636, descobriu o principio fundamental da geometria analítica: “sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas, uma linha, reta ou curva”. BOYER (1996, p.238)

Comparando o trabalho de ambos, e em se tratando do mesmo período, enquanto René Descartes partia de um lugar geométrico (representação gráfica) e encontrava sua equação (representação simbólico-algébrica), Pierre de Fermat partia de uma equação e estudava o lugar geométrico correspondente.

Vemos uma articulação (conversão) separada entre os registros. Enquanto Descartes partia de uma representação gráfica para a simbólico-algébrica, Fermat partia da simbólico-algébrica para a gráfica. Neste trabalho, temos a intenção de analisar situações em ambos os casos.

EVES (2004, p.382) sobre a essência da idéia, que geometria analítica, quando aplicada em R^2:

> […] consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x,y)=0$ e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjuntos de pontos) bem definida do plano. Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x,y)=0$ e as propriedades geométricas da curva associada.

A essência da geometria analítica apresentada por EVES é interessante, porém, historicamente, encontramos uma dificuldade na articulação entre os registros simbólico e gráfico, pois para que a geometria analítica desempenhasse plenamente o seu papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Como provavelmente é realizado em sala de aula, primeiro desenvolve-se o simbólico algébrico, como o estudo de equações do 1º e 2º graus, para, depois, o estudo das propriedades geométricas da curva associada a sua equação, como a reta ou a parábola, ou seja, este último é sempre estudado em um segundo momento, talvez um dos motivos das dificuldades apresentadas por alunos na conversão do registro gráfico para o simbólico.

Ainda segundo EVES(2004, p. 383):

> [...] parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto.

Em sua obra, *La Géométrie*, Descartes não apresenta nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, assumindo ordenadas oblíquas. Segundo BOYER (1996, p. 235-236), em relação à geometria analítica de hoje:

> [...] não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulos entre duas retas, ou outro material semelhante. Além disso, em toda a obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da equação, e o autor se interessa tão pouco por esboçar curvas que nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas.

Mesmo hoje, com o uso destas fórmulas citadas por BOYER, as dificuldades em articular a representação de curvas por equações permanecem as mesmas, ou melhorou muito pouco. No entanto, quando se utiliza um plano cartesiano quadriculado ou um plotador gráfico, como ferramentas facilitadoras, que permite ao aluno a construção de pontos e curvas, é visível seu interesse em esboçar os diferentes gráficos de uma curva no plano.

O princípio fundamental da geometria analítica, em que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares, só aparece acidentalmente em sua obra:

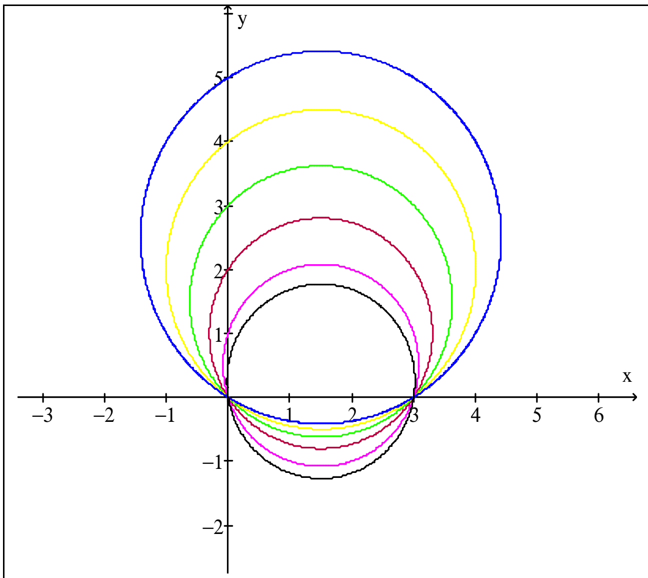
> A solução de qualquer desses problemas sobre lugares não é mais do que achar um ponto para cuja completa determinação falta uma condição ... Em todo caso assim se pode obter uma equação contendo duas incógnitas. (BOYER 1996, p. 236)

Ainda segundo BOYER (1996, p.236), Descartes examinou com detalhes a equação geral de uma cônica, $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$, passando pela origem com coeficientes literais positivos, muito próximo da família de secções cônicas. Descartes indicou condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma reta, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Neste caso, destacam-se como importantes na análise desta equação de Descartes, além das conversões entre os registros simbólico e gráfico, a utilização dos parâmetros **a**, **b**, **c** e **d**, pois são eles que permitem distinguir a referida cônica.

Utilizando um plotador gráfico, no caso o *Winplot,* construiremos alguns gráficos das cônicas de Descartes, inclusive apresentando em alguns casos valores negativos para os coeficientes literais (parâmetros) na tentativa de evidenciar algumas de suas propriedades geométricas.

Iniciamos com a circunferência, depois a hipérbole, a elipse, a reta e, por fim. a parábola.

Exemplo 1: a circunferência



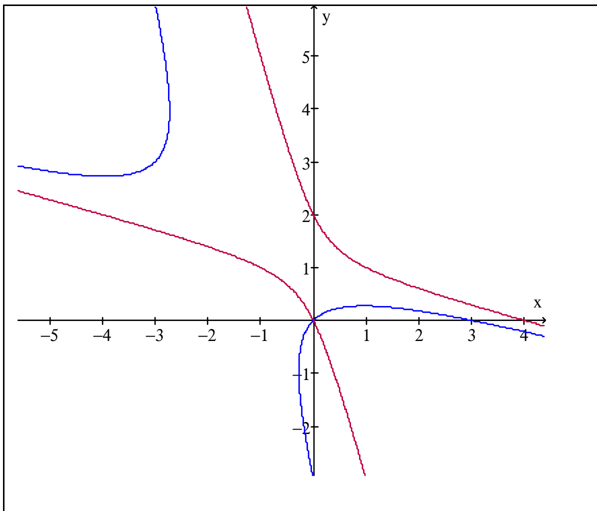
Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana:
$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$
Parâmetros: a,b,c e d
Variáveis: x e y
Gráficos:
vermelho : $a = 2; b = 0; c = 3$ e $d = 1$
verde : $a = 3; b = 0; c = 3$ e $d = 1$
amarelo : $a = 4; b = 0; c = 3$ e $d = 1$
azul : $a = 5; b = 0; c = 3$ e $d = 1$
rosa : $a = 1; b = 0; c = 3$ e $d = 1$
preto : $a = 0,5; b = 0; c = 3$ e $d = 1$
Conversão entre registros de representação semiótica:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 6: cônica de Descartes como circunferência

Alterando os valores do parâmetro **a** para qualquer número real e mantendo constantes os valores dos parâmetros **b**, **c** e **d** como apresentados na

FIG.6 , os gráficos são de uma circunferência.

Exemplo 2: a hipérbole



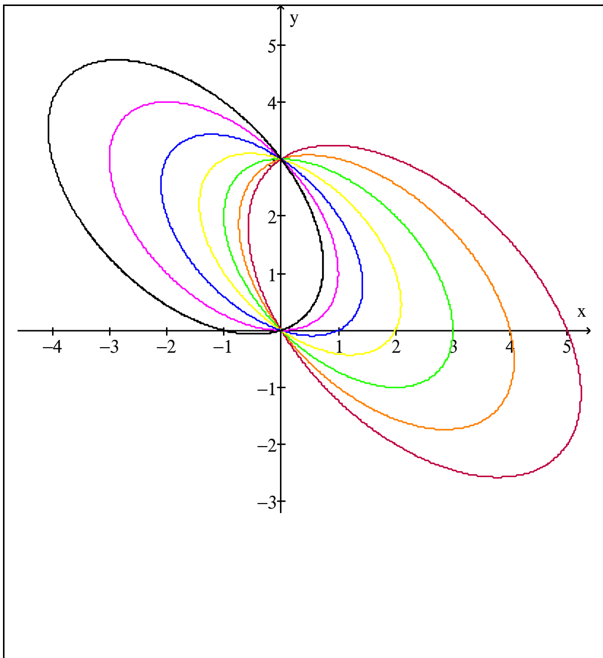
Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana:
$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$
Parâmetros: a,b,c e d
Variáveis: x e y
Gráficos:
vermelho : $a = 2; b = 4; c = 4$ e $d = 1$
azul : $a = -3; b = 4; c = 3$ e $d = 1$

Conversão entre registros de representação:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem *winplot*
-Da linguagem *winplot* para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 7: cônica de Descartes como hipérbole

Alterando os valores do parâmetro **a** ou **c** para qualquer número real e mantendo constantes os valores dos parâmetros **b** e **d**, como apresentados na FIG.7, os gráficos são de uma hipérbole.

Exemplo 4: a elipse

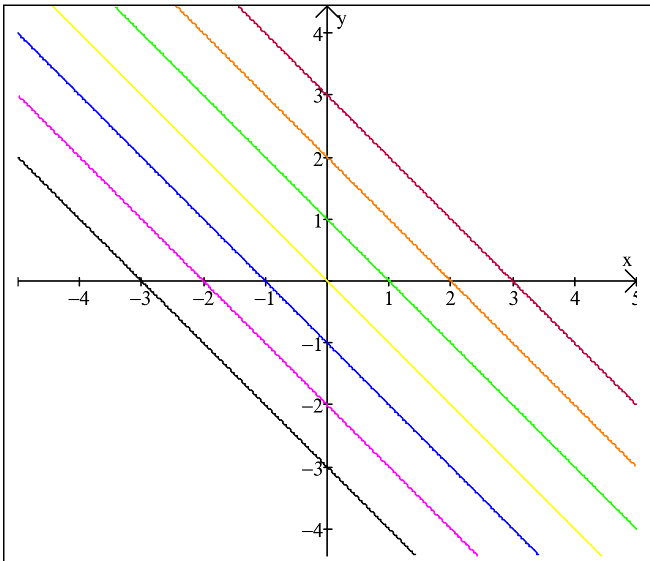


Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana:
$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$
Parâmetros: a,b,c e d
Variáveis: x e y
Gráficos:
vermelho : $a = 3; b = 1; c = 5$ e $d = 1$
laranja : $a = 3; b = 1; c = 4$ e $d = 1$
verde : $a = 3; b = 1; c = 3$ e $d = 1$
amarelo : $a = 5; b = 0; c = 2$ e $d = 1$
azul : $a = 3; b = 1; c = 1$ e $d = 1$
rosa : $a = 3; b = 1; c = 0$ e $d = 1$
preto : $a = 3; b = 1; c = -1$ e $d = 1$
Conversão entre registros de representação semiótica:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot e desta para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 8: cônica de Descartes como elipse

Alterando os valores do parâmetro **c** para qualquer número real e mantendo constantes os valores dos parâmetros em **a**=3, **b**=1 e **d**=1 como apresentados alguns na FIG.8, os gráficos são de uma elipse.

Exemplo 5: a reta

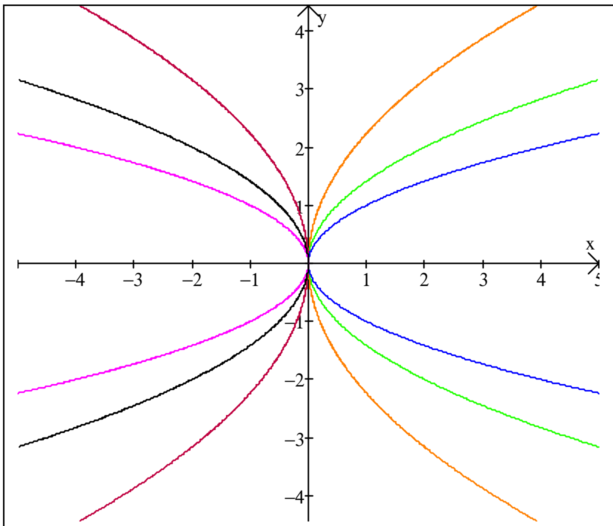


Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana:
$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$
Parâmetros: a,b,c e d
Variáveis: x e y
Gráficos:
vermelho : $a = 3; b = 1; c = 0$ e $d = 0$
laranja : $a = 2; b = 1; c = 0$ e $d = 0$
verde : $a = 1; b = 1; c = 0$ e $d = 0$
amarelo : $a = 0; b = 1; c = 0$ e $d = 0$
azul : $a = -1; b = 1; c = 0$ e $d = 0$
rosa : $a = -2; b = 1; c = 0$ e $d = 0$
preto : $a = -3; b = 1; c = 0$ e $d = 0$
Conversão entre registros de representação semiótica:
- Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot e desta para a gráfica Ponto de vista cartesiano

FIG. 9: cônica de Descartes como reta

Alterando os valores do parâmetro **a** para qualquer número real e mantendo iguais a zero os valores dos parâmetros **c** e **d** e **b=1**, obtemos representações gráficas da reta paralelas, conforme FIG.9.

Exemplo 6: a parábola



Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana: $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$
Parâmetros: a,b,c e d
Variáveis: x e y
Gráficos:
vermelho : $a = 0; b = 0; c = -5$ e $d = 0$
preto : $a = 0; b = 0; c = -2$ e $d = 0$
rosa : $a = 0; b = 0; c = -1$ e $d = 0$
laranja : $a = 0; b = 0; c = 5$ e $d = 0$
verde : $a = 0; b = 0; c = 2$ e $d = 0$
azul : $a = 0; b = 0; c = 1$ e $d = 0$
Conversão entre registros semióticos:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem Winplot e desta para a gráfica Ponto de vista cartesiano

FIG. 10: cônica de Descartes como parábola

Alterando os valores reais do parâmetro **c** para qualquer número real e mantendo os valores dos parâmetros **a**, **b** e **d** iguais a zero como apresentados em alguns casos como na FIG.10, então os gráficos serão de uma parábola.

Observamos novamente o quão difícil deve ter sido a validade observada por Descartes. Entendemos que algumas ferramentas, como o uso de um plotador, facilitam o entendimento histórico de algumas curvas com suas propriedades, como estas apresentadas, e permitem evidenciar a importância do uso de parâmetros.

Sobre a geometria analítica em R^3, o livro II de *La Géométrie* apresenta o enunciado de um princípio fundamental da Geometria Analítica: "se faltam duas condições para a determinação de um ponto, o lugar do ponto é uma superfície". (BOYER 1996, p. 236). Porém, segundo este autor, não há qualquer exemplo para tais equações dessa sugestão de geometria analítica no espaço.

2.4. As curvas planas algébricas ou transcendentes.

A seguir continuamos nossa pesquisa procurando evidenciar o uso de parâmetros e a sua importância na história das curvas planas.

BOYER (1996, p. 107) comenta sobre a pouca importância que os antigos, como Apolônio (c. 225 a. C), deram às curvas:

> Na verdade, aos antigos escapou quase completamente o papel que curvas de vários tipos desempenham no mundo que os cercava... . O método cinemático e o uso de secções planas de superfícies admitem generalizações de grande alcance, no entanto apenas uma dúzia de curvas era familiar aos antigos. Mesmo a ciclóide gerada por um ponto de um círculo que rola sobre a reta, parece não ter sido percebida por eles. Que Apolônio, o maior geômetra da antiguidade, não tenha desenvolvido a geometria analítica se deveu provavelmente à pobreza de curvas mais do que de idéias.

Este comentário nos permite refletir sobre as dificuldades existentes no estudo de curvas e conseqüentemente no desenvolvimento da geometria analítica e sobre como poderíamos trabalhar algumas curvas históricas, em R^2, com alunos de modo geral.

Em se tratando de curvas, o método de René Descartes, no livro *La Géométrie*, consistia em partir de um problema geométrico, traduzí-lo para uma representação algébrica, uma equação, simplificando-a ao máximo para depois resolvê-lo geometricamente.

Sobre as curvas, BOYER (1996, p. 233) comenta: “Descartes ficou muito impressionado com a força de seu método no tratamento do lugar das três e quatro retas, e por isso passou a generalizações desse problema”.

Em um caso de quatro retas paralelas e uma perpendicular às outras, conforme FIG.11, Descartes chegou à seguinte conclusão:

> “Se a constante de proporcionalidade no problema de Papus[10] é tomada como sendo uma constante a**,** então o lugar é dado por (a+x).(a-x).(2a-x)=axy, uma cúbica que Newton mais tarde chamou a parábola ou tridente de Descartes.” (BOYER 1996, p. 234)

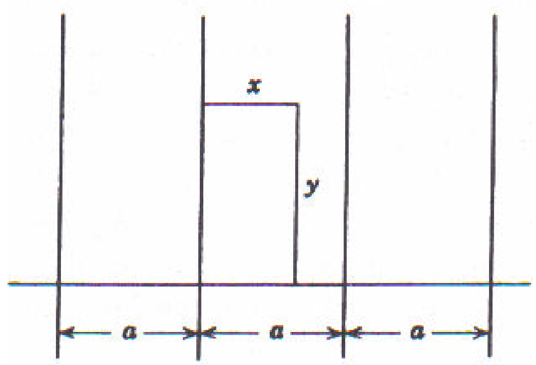
	Quadro da geometria analítica: -Lugar geométrico -Equação cartesiana: $(a+x).(a-x).(2a-x)=axy$ Variáveis: x e y (segmentos) Parâmetro **a** (quantidade conhecida) Conversão entre registros: -Representação gráfica para Representação simbólico-algébrica

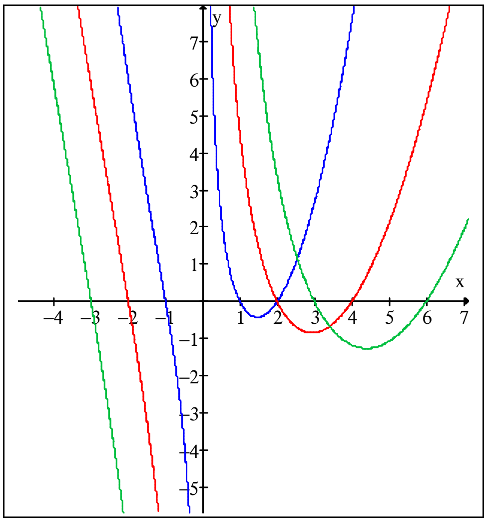
FIG. 11 : Cúbica de Descartes (BOYER 1996, p. 233)

Em um artigo sobre o desenvolvimento da geometria analítica, SILVA (1994) ressalta: “o importante na obra de Descartes é que a associação da Geometria com a Álgebra simbólica encoraja o desenvolvimento de técnicas

[10] Papus de Alexandria (290-350), grande geômetra que tem como trabalho a *Coleção Matemática.*

algébricas, independente de visualizações geométricas".

Esta autora evidencia a importância da mudança de quadros, do geométrico para o algébrico, e a falta de uma representação gráfica mais moderna. No caso do tridente de Descartes, considerando a constante **a** como parâmetro, temos a sua representação gráfica, no *Winplot*, conforme a FIG.12:



Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$(a+x)(a-x)(2a-x) = axy$, com $a \neq 0$.
Parâmetro: a
Variáveis: x e y
Gráficos:
azul: $a = 1$;
vermelho: $a = 2$
verde: $a = 3$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 12: O tridente de Descartes

Ao realizar variações nos valores reais do parâmetro **a,** identificamos que **a** é diferente de zero, ou seja, uma condição de existência para representações gráficas da curva.

Observando a evolução histórica de curvas como esta, gera-se o interesse em pesquisar outros exemplos de curvas e trabalhá-las com os alunos, na tentativa de apresentar a dificuldade em encontrar uma curva por meio de sua representação gráfica a partir de sua equação.

Descartes, entendendo que os antigos nunca tinham aceitado como legítimas as construções que usassem *curvas diferentes de retas e círculos*, o que se constitui em um *obstáculo epistemológico*[11] (embora Papus o reconhecesse), resolveu especificar uma classificação ortodoxa de problemas geométricos determinados, explicando:

> [...] Aqueles, que levam a equações quadráticas e podem portanto ser construídos com régua e compasso, ele colocou na primeira classe; os que levam à equações cúbicas e quárticas, cujas raízes não podem ser construídas por meio de secções cônicas, na classe número dois; os que levam a equações de grau cinco ou seis podem ser construídos introduzindo uma cúbica como o tridente ou parábola superior $y=x^3$, e esses ele colocou na classe três. Descartes continuou assim, reunindo problemas geométricos e equações algébricas em classes, assumindo que a construção das raízes de uma equação de grau 2n ou 2n -1 era um problema de classe n. BOYER (1996, p. 234)

Aqui surge uma primeira classificação das curvas algébricas. No ensino atual, parece que repetimos com nossos alunos o mesmo obstáculo epistemológico, trabalhando, quando possível, em geometria analítica, com retas, circunferências e secções cônicas. No trabalho do professor ao tentar desenvolver com os alunos a construção de outras curvas, sugerimos construções com o uso do *Winplot*.

Sobre a classificação, quando uma curva plana é representada analiticamente por uma equação a duas variáveis, como, por exemplo, em $Ax+By=C$, $x^2+y^2=10$ ou ou $y=\sin x$ [12] **,** denomina-se *curva plana algébrica ou transcendente*. A diferença básica é que: "uma curva é dita algébrica quando possui uma equação cartesiana polinomial a coeficientes reais, uma curva não algébrica é dita transcendente*"*. [13] (tradução livre)

Segundo (BOYER 1996, p. 235), Descartes ao introduzir as curvas de que necessitava para construções geométricas além de grau quatro, acrescentara mais um axioma aos usuais da geometria, sendo este: "duas ou mais retas (ou

---

[11] São obstáculos que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico dos conhecimentos e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente no saber transmitido. [...] São inerentes ao saber identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para os superar na história. (ALMOULOUD 2000, p.124)

[12] $y=\sin(x) \Leftrightarrow y=\mathrm{sen}(x)$

[13] Disponível em: < http://www.mathcurve.com/courbes2d/algebric/algebric.shtml >. Acesso em 30/06/2006.

curvas) podem ser movidas, uma sobre a outra, determinando por suas intersecções novas curvas".

Do mesmo modo, eram obtidas as curvas construídas pelos gregos em sua geração cinemática como: a quadratriz, a cissóide, a conchóide e a espiral. Descartes, no entanto, fez distinções cuidadosas:

> […] a cissóide e a conchóide, que chamaríamos de algébricas, e outras como a quadratriz e a espiral, que hoje são chamadas transcendentes. Ao primeiro tipo Descartes deu reconhecimento geométrico total, junto com a reta, círculo, e as cônicas, chamando todas de "curvas geométricas"; o segundo tipo ele excluiu totalmente da geometria, estigmatizando-as como "curvas mecânicas".(BOYER 1996, p. 235)

Aqui se observa que Descartes realmente classificou as curvas planas algébricas e excluiu as transcendentes, chamando-as de curvas mecânicas, que mais tarde serão estudadas por Newton (1643–1727) e Euler (1707–1783), provavelmente pelo uso demasiado de ferramentas, como régua e compasso, para construção de suas representações gráficas em problemas elementares.

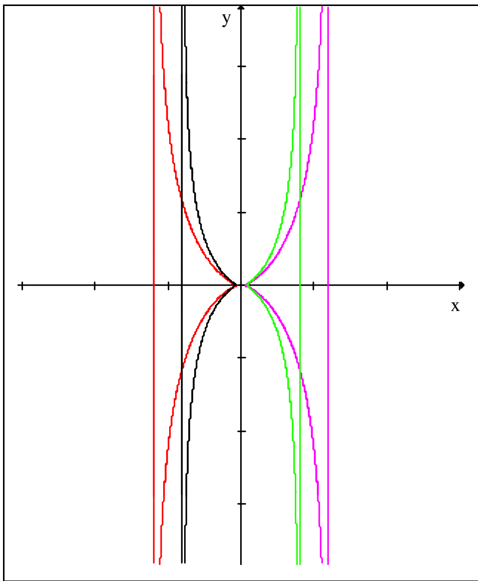
Apresentamos, a seguir, algumas possíveis representações gráficas das referidas curvas, cissóide[14], conchóide[15], quadratriz[16] e espiral[17], no *Winplot*.

É importante ressaltar que, por meio das equações de curvas planas disponíveis nesta pesquisa e da variação dos valores de seus respectivos **parâmetros,** é possível identificar algumas propriedades geométricas destas curvas estudadas.

A cissóide de Dioclés e a conchóide de Nicomedes são curvas planas algébricas.

1. A cissóide de Dioclés (FIG. 13):

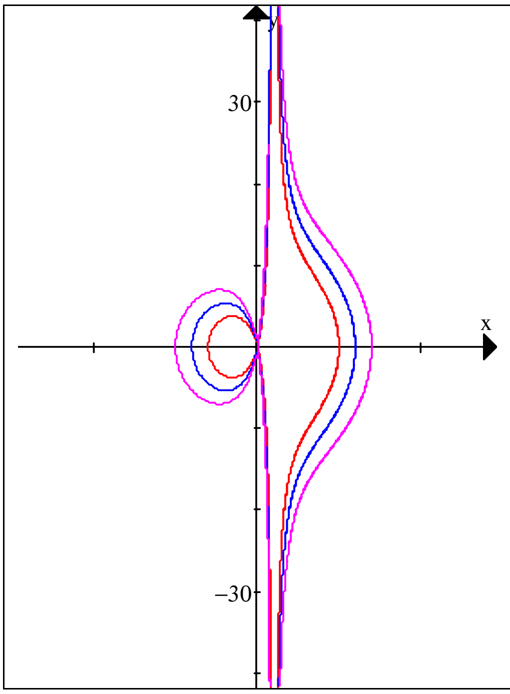
[14] Esta curva foi inventada por Diocles (c. 180 a.C) com o objetivo de apresentar uma solução para a duplicação do cubo. (EVES 2004, p. 135).
[15] Inventada por Nicomedes (c. 240 a.C), também com o mesmo objetivo. (EVES 2004, p. 138).
[16] Hípias (c. 425 a.C) inventou uma curva transcendente, chamada quadratriz, por meio da qual se pode multisseccionar ângulos e quadrar círculos. (EVES 2004, p. 154).
[17] Inventada por Arquimedes (c. 225 a.C) usada com o objetivo de apresentar uma solução para o problema da quadratura do círculo. (EVES 2004, p. 138).



Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana:
$y^2 = x^3/(2a - x)$, com $a \neq 0$.
Parâmetro : a
Variáveis : x e y
Gráficos :
rosa : $a = 6$;
verde : $a = 4$
vermelho : $a = -6$
preto : $a = -4$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 13: cissóide de Dioclés

2. A conchóide de Nicomedes (FIG. 14):



Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$(x - b)^2(x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$, com $a \neq 0$.
Parâmetros : a e b
Variáveis : x e y
Gráficos :
vermelho : $a = 8; b = 2$
azul : $a = 10; b = 2$
rosa : $a = 12; b = 2$

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica

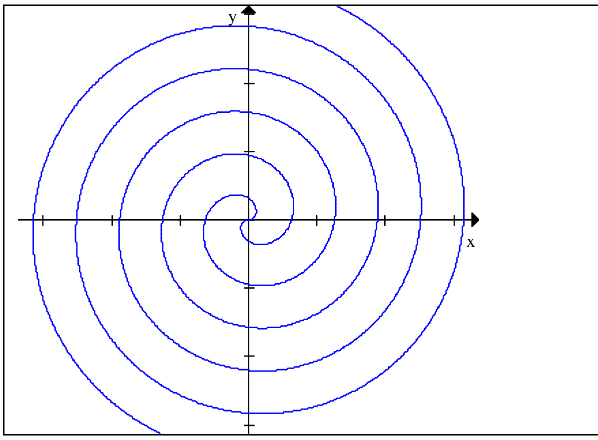
Ponto de vista cartesiano

FIG. 14: conchóide de Nicomedes

Ao realizar variações nos valores do parâmetro **a** identificamos que **a** diferente de zero é uma condição de existência para as representações gráficas das curvas, (FIG.13) e (FIG. 14). A seguir apresentamos as demais curvas.

A espiral de Arquimedes e a quadratriz de Hípias são curvas planas transcendentes.

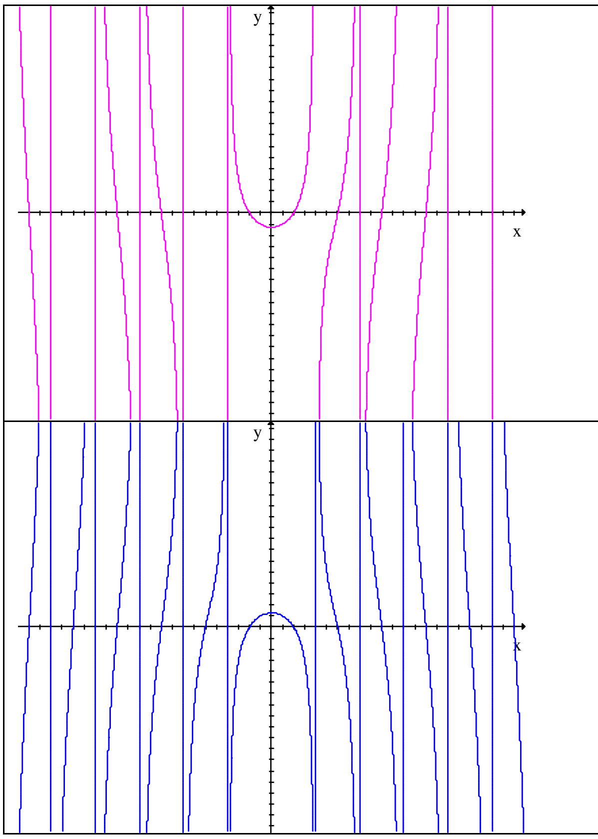
3. A espiral de Arquimedes (FIG. 15):



Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana:
$\sqrt{x^2 + y^2} = \text{aarctan}(y/x)$
Parâmetro : a
Variáveis : x e y
Gráfico :
azul : a = 2
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 15: espiral de Arquimedes

4. A quadratriz de Hípias (FIG. 16):



Quadro da geometria analítica
-Equação cartesiana:
$y = x\cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$, com $a \neq 0$.
Parâmetro : a
Variáveis : x e y
Gráficos :
vermelho : a = -0,5
azul : a = 0,5

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica

Ponto de vista: cartesiano

FIG. 16: quadratriz de Hípias

Até este momento, o período histórico evidencia, em se tratando de curvas algébricas ou transcendentes, o uso de **parâmetros** em equações e a dificuldade existente na construção de suas representações gráficas, daí a exclusão por Descartes de curvas planas como Quadratriz de Hípias e a Espiral de Arquimedes que são transcendentes.

Em geometria analítica, no ensino médio, trabalha-se com os alunos equações da reta, parábola e circunferência, algumas de suas representações gráficas e não mais que isso. Raramente se discute o objeto matemático, no caso a curva, muito próximo das descobertas de Fermat.

Sobre a participação de Fermat na geometria analítica, VENTURI (2003, p.18) comenta:

> Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) a descoberta das equações da reta e da circunferência, e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Aplicou a transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2º grau à sua forma mais simples.

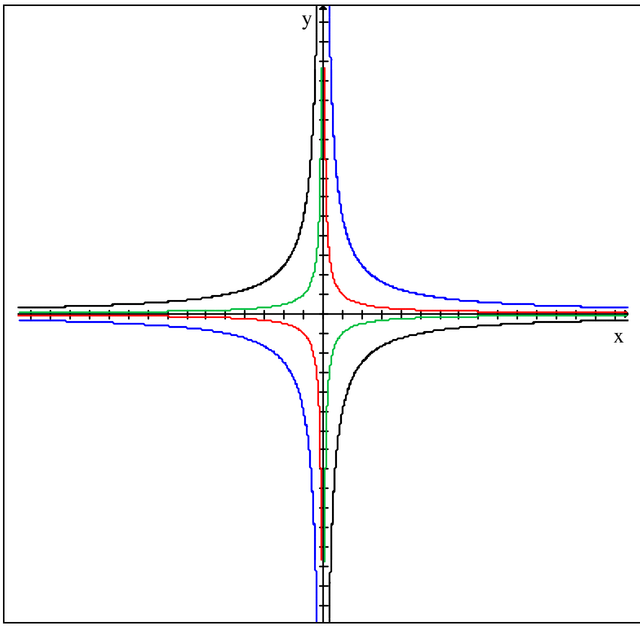
Segundo BOYER (1996, p. 239), em se tratando de três dimensões, Fermat percebia a existência de uma geometria analítica a mais que duas dimensões, pois, em outra conexão, ele escreveu:

> Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc.

Após um entendimento sobre a representação gráfica no plano, como pontos e curvas, outra dificuldade em evidência é a representação gráfica de pontos e superfícies no espaço. Assim acontece quando os alunos estão no ensino superior. Deste modo, vamos propor atividades a serem desenvolvidas em $\mathbb{R}^2$, tentando minimizar as dificuldades existentes para um futuro estudo de superfícies cilíndricas reguladas em curvas planas.

A seguir apresentamos algumas curvas propostas por Fermat, como hipérboles, parábolas, espirais e a curva *Agnesiana,* que posteriormente seria chamada de feiticeira de Agnesi (1724-1780).

1. As hipérboles de Fermat (FIG. 17):



-Equação cartesiana:

$x^m y^n = a$, com $a \neq 0$

parâmetros : a,m e n

variáveis : x e y

Gráficos :

preto : $a = -5; m = 1; n = 1$

verde : $a = -1; m = 1; n = 1$

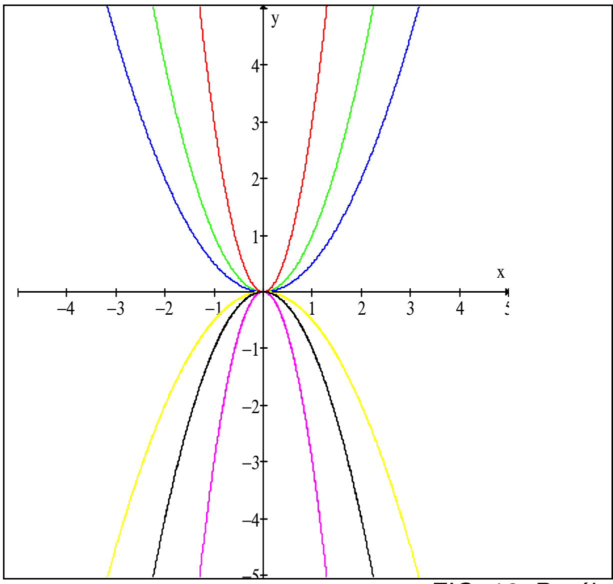
vermelha : $a = 1; m = 1; n = 1$

azul : $a = 5; m = 1; n = 1$

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista: cartesiano

FIG. 17: Hipérboles de Fermat

2. As parábolas de Fermat (FIG. 18):



Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:

$y^n = ax^m$, com $a \neq 0$

Parâmetros : a,m e n

Variáveis : x e y

vermelho : $a = 3; m = 2; n = 1$

verde : $a = 1; m = 2; n = 1$

azul : $a = 0,5; m = 2; n = 1$

rosa : $a = -3; m = 2; n = 1$

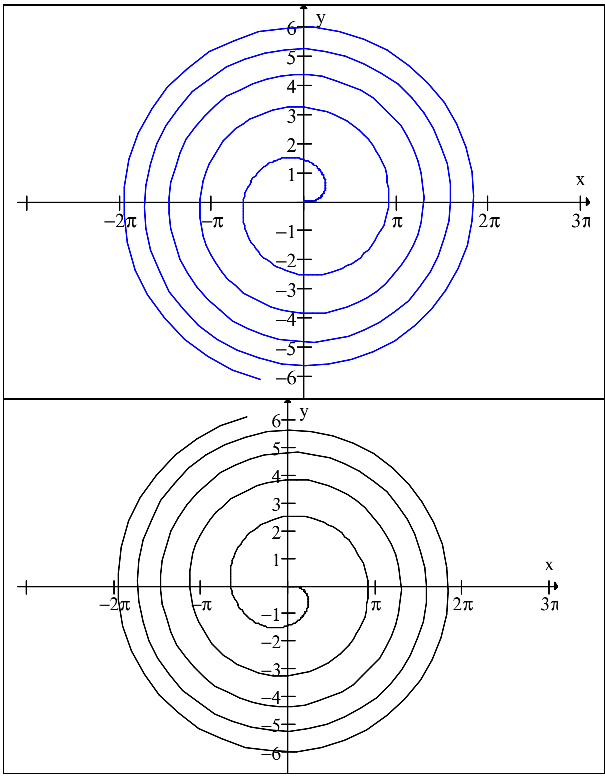
preto : $a = -1; m = 2; n = 1$

amarelo : $a = -0,5; m = 2; n = 1$

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot e desta para a gráfica.
Ponto de vista cartesiano

FIG. 18: Parábolas de Fermat

3. A espiral de Fermat (FIG. 19):



Quadro da geometria analítica:
-Equações paramétricas:

$(x;y) = (f(t);g(t))$

$\begin{cases} x = t\cos(kt^2) \\ y = t\sin(kt^2) \end{cases}; \text{com } k \neq 0$

Parâmetro: k e t

Variáveis: x e y

Gráficos:

azul: $k = 0{,}75$ e $0 \leq t \leq 2\pi$ rad

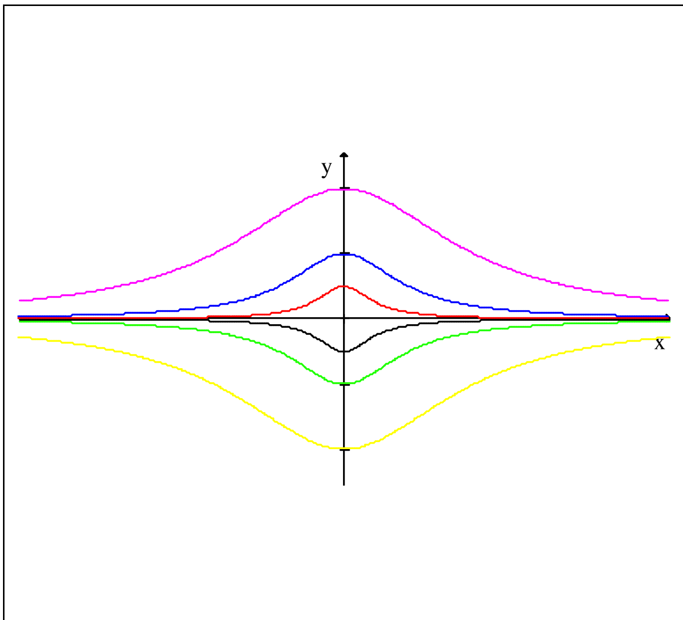
preto: $k = -0{,}75$ e $0 \leq t \leq 2\pi$ rad

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica

Ponto de vista paramétrico

FIG. 19: Espiral de Fermat

4. A curva de Agnesi (FIG. 20):



Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$y(x^2 + a^2) = a^3, a \neq 0$

Parâmetro: a

Variáveis: x e y

Gráficos:

rosa: $a = 2$

azul: $a = 1$;

vermelha: $a = 0{,}5$

amarelo: $a = -2$

verde: $a = -1$

preto: $a = -0{,}5$

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG.20: Curva de Agnesi

Em todos os gráficos de curvas apresentados até aqui, é verídico o quão importante é a presença de **parâmetros** em equações *algébricas ou* *transcendentes* para a conversão de registros do simbólico para o gráfico.

2.5 Outras curvas planas e a importância do uso de parâmetros.

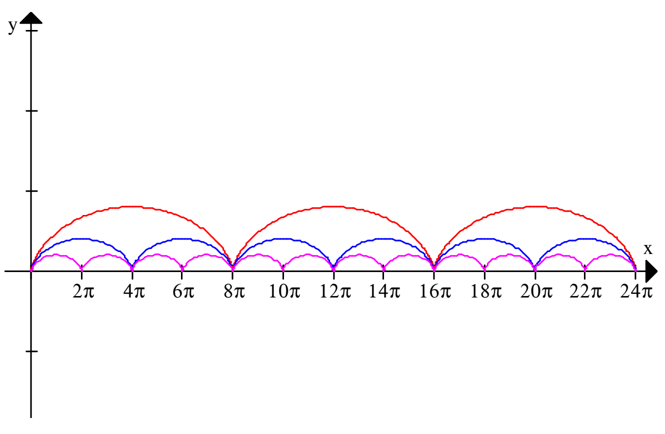
Sobre o aparecimento de novas curvas, Galileu Galilei (1564-1642), segundo BOYER (1996, p. 224), é um dos que observaram o assunto rapidamente, porém, sem nenhum preparo matemático suficiente. Entre estas curvas, destaca-se a hoje chamada de *ciclóide*, que:

> [...] traçada por um ponto sobre o bordo de uma roda quando esta rola num carrinho horizontal, e tentou achar a área sob um arco dela...Galileu abandonou o estudo da curva limitando-se a sugerir que a ciclóide fornecia um belo arco para uma ponte; muitos anos mais tarde seu discípulo Torricelli estudou a curva com grande sucesso.

Provavelmente Galileu abandonou o estudo da *ciclóide* por falta de recursos teóricos para considerá-los e mais adiante foi estudada por outros.

Marin Mersenne (1588–1648), tendo talvez ouvido falar da curva através de Galileu, em 1628, propôs ao jovem Gilles Personne de Roberval (1602–1675) que a estudasse, sendo que o mesmo provou que a área sob um arco da curva é exatamente três vezes a área do círculo gerador. (BOYER 1996, p. 245).

Representamos alguns gráficos da ciclóide (FIG. 21):



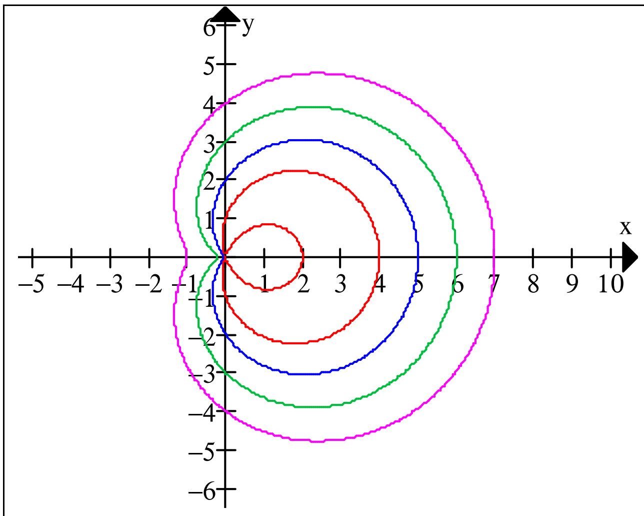
Quadro da geometria analítica:
-Equações paramétricas:
$(x;y)=(f(t);g(t))$
$\begin{cases} x=a(t-\sin(t)) \\ y=a(1-\cos(t)) \end{cases}, \text{com } a\neq 0$
Parâmetros: a e t
Variáveis: x e y
vermelha: $a=4; 0\leq t\leq 6\pi \text{rad}$
azul: $a=2; 0\leq t\leq 12\pi \text{rad}$
rosa: $a=1; 0\leq t\leq 24\pi \text{rad}$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem Winplot para a gráfica
Ponto de vista paramétrico

FIG. 21: ciclóide

Após realizar variações nos valores do parâmetro **a,** identificamos diversas representações gráficas da curva, exceto quando **a**=0.

A curva *limaçon de Pascal*, deve-se ao pai, Etienne Pascal (1588–1651), e não ao filho, Blaise Pascal (1623–1662). Esta curva foi chamada por Jordanus Nemorarius (1125–1260) como “a conchóide do círculo”. (BOYER 1996, p. 249).

Eis alguns dos seus gráficos (FIG. 22):



Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2)$
com a e $b \neq 0$
Parâmetros : a e b
Variáveis : x e y
vermelha : $a=1,5; b=1$
azul : $a=1,5; b=2$
verde : $a=1,5; b=3$
rosa : $a=1,5; b=4$
Conversão entre registros:
-Da simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

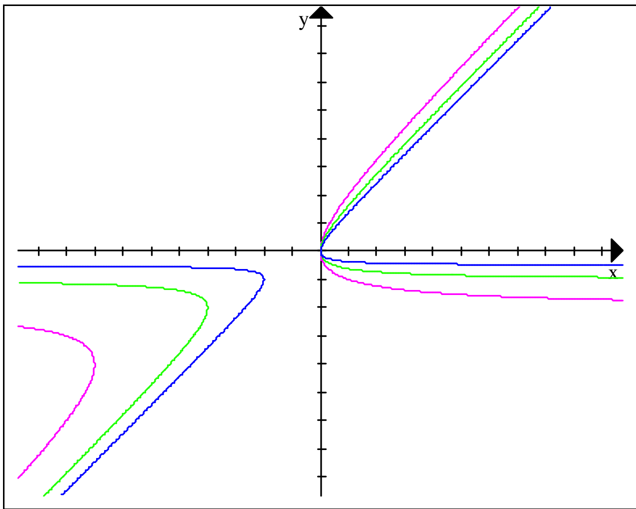
FIG. 22: limaçon de Pascal

Na *Limaçon de Pascal,* também identificamos diversas representações gráficas ao variar os parâmetros **a** e **b** desde que ambos sejam diferentes de zero.

Descartes recebeu e aprovou um comentário bastante extenso de Debeaune (1601-1652) sobre a *geometria*, sob o título *Notae breves*. Apresentou as idéias de Descartes, com ênfase maior, sobre os lugares representados por equações simples de segundo grau, muito no estilo de Fermat, e mostrou que $y^2 = xy + bx$, $y^2 = -2dy + bx$ e $y^2 = bx - x^2$ representam, respectivamente, hipérboles, parábolas e elipses. BOYER (1996, p. 255).

Observando algumas propriedades geométricas com a variação do valores reais de seus parâmetros representamos alguns gráficos destas curvas obtidos no Winplot.

1. As hipérboles de Descartes (FIG. 23):

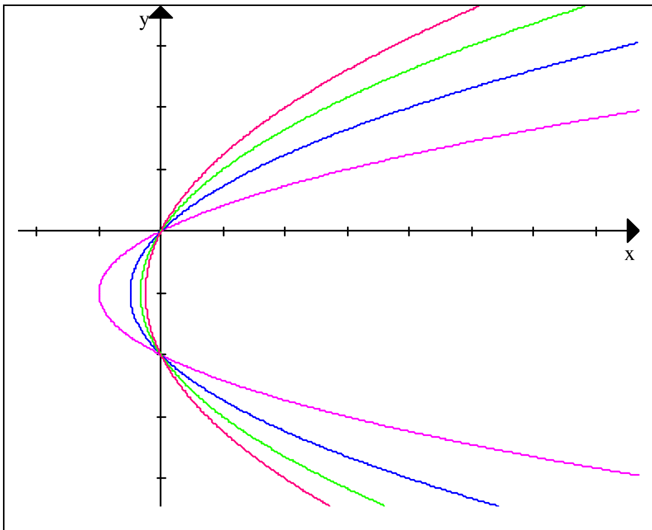


Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$y^2 = xy + bx$, com $b \neq 0$
Parâmetro : b
Variáveis : x e y
Gráficos :
rosa : $b = 2$
verde : $b = 1$
azul : $b = 0,5$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 23: hipérboles de Descartes

Variando os valores do parâmetro **b**, identificamos a representação de diversas hipérboles desde que **b** seja diferente de zero.

2. As parábolas de Descartes (FIG. 24):

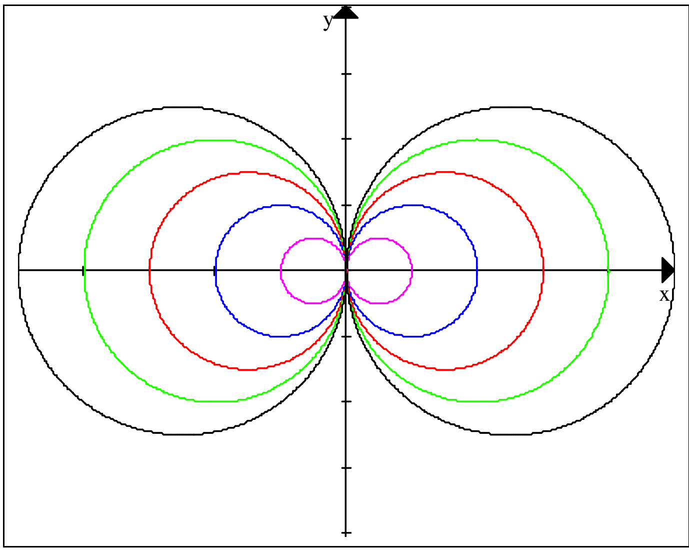


Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$y^2 = -dy + bx$, com $b \neq 0$
Parâmetros : b e d
Variáveis : x e y
rosa : $b = 1; d = 2$
azul : $b = 2; d = 2$
verde : $b = 3; d = 2$
vermelho : $b = 4; d = 2$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 24: parábolas de Descartes

Variando os valores do parâmetro **b** e **d** para quaisquer números reais, identificamos representações gráficas de diversas parábolas desde que **b** seja diferente de zero.

3. As circunferências de Descartes (FIG. 25):



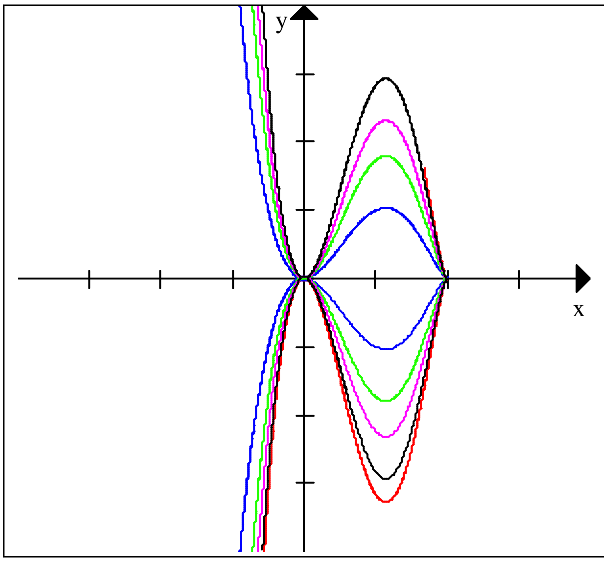
Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$y^2 = bx - x^2$, com $b \neq 0$
Parâmetro : b
Variáveis : x e y
rosa : (1º) b = 1;(2º)b = -1
azul : (1º) b = 2;(2º)b = -2
vermelha : (1º) b = 3;(2º)b = -3
verde : (1º) b = 4;(2º)b = -4
preta : (1º) b = 5;(2º)b = -5
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 25: circunferências de Descartes

Após variar os valores do parâmetro **b** e observar o comportamento gráfico da curva, como representados na FIG. 25, observamos que não se trata de elipses, conforme sugerido por BOYER, mas de circunferências.

Em seguida, vamos investigar uma família dos gráficos de uma curva representada por equações da forma $y^m = kx^n(a - x)^b$, com expoentes inteiros positivos, que foram estudadas por René François de Sluse (1622-1685) e denominadas por Pascal de "*pérolas*" de Sluze. (BOYER 1996, p. 257).

Apresentamos gráficos, na FIG. 26, de casos particulares da curva *Pérolas de Sluze.*

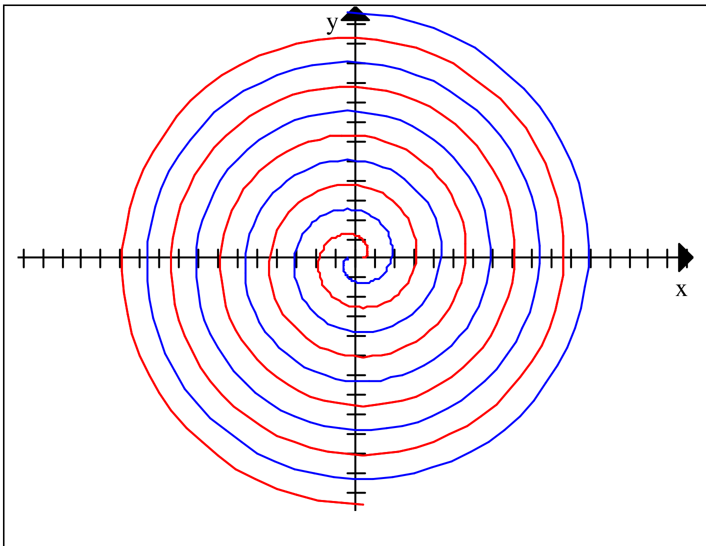


Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$y^m = kx^n(a-x)^b$
Parâmetros: m,k,n,a e b.
Variáveis: x e y
vermelho: $m=2; k=10; n=4; a=2$ e $b=3$
preto: $m=2; k=8; n=4; a=2$ e $b=3$
rosa: $m=2; k=5; n=4; a=2$ e $b=3$
verde: $m=2; k=3; n=4; a=2$ e $b=3$
azul: $m=2; k=1; n=4; a=2$ e $b=3$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 26: pérolas de Sluze

Variando os valores reais do parâmetro k observou-se que, quando $k < 0$ ou $a < 0$, não temos representações gráficas.

A curva denominada *involuta de um Círculo*[18], FIG. 27, surge na obra de Huygens (1629-1695) sobre involutas e evolutas, publicada em 1673, no tratado *Horologium Oscillatorium*. (BOYER 1996, p. 260).



Quadro da geometria analítica:
-Equações paramétricas:
$(x;y) = (f(t);g(t))$
$$\begin{cases} x = a(\cos(t) + t\sin(t)) \\ y = a(\sin(t) - t\cos(t)) \end{cases}$$
Parâmetros: a e t
Variáveis: x e y
vermelho: $a = 0{,}4; 0 \le t \le 10\pi$ rad
azul: $a = -0{,}4; 0 \le t \le 10\pi$ rad
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 27: involuta de um Círculo

[18] A *involuta de um círculo* é o trajeto seguido para fora por um ponto em uma linha reta que role em torno de um círculo. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Involute.html>. Acesso em 03 de outubro de 05. (tradução livre).

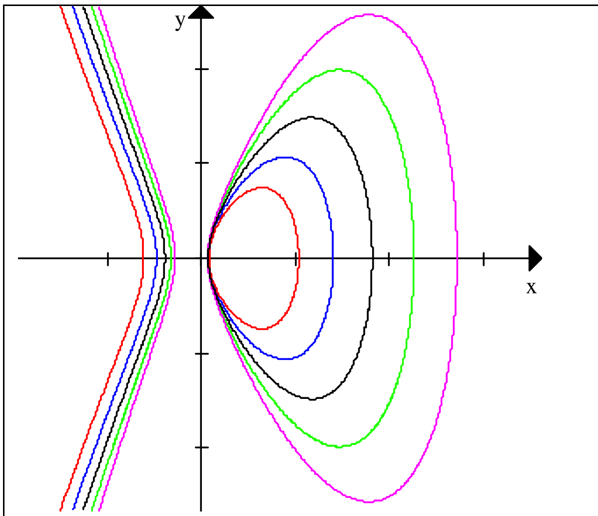
Variando os valores do parâmetro **a,** identificamos diversos gráficos da *Involuta de um Círculo,* exceto quando a=0.

Em um pequeno tratado chamado *Enumerativo linearum tertii ordinis* (Enumeração de curvas de terceiro grau), Newton (1642-1727) apresenta setenta e duas espécies de cúbicas, sendo uma a uma curva cuidadosamente traçada. Em relação ao tratado de Newton, BOYER (1996, p. 282) explica:

> Pela primeira vez são usados sistematicamente dois eixos, e não há hesitação quanto a coordenadas negativas. Entre as propriedades interessantes das cúbicas indicadas nesse tratado estão o fato de uma curva de terceiro grau não poder ter mais de três assíntotas (assim como uma cônica não pode ter mais de duas) e que assim como todas as cônicas são projeções do círculo, também todas as cúbicas são projeções de uma "parábola divergente" $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Neste momento, século XVII, as curvas passam a ter um destaque importantíssimo, visto que não houve mais hesitação quanto às coordenadas negativas, um obstáculo epistemológico.

E é no século XVII que se inicia o desenvolvimento de um dos mais importantes ramos da matemática, a Análise Matemática. Sobre as cúbicas de Newton, vamos representar algumas cúbicas com a equação da parábola divergente.



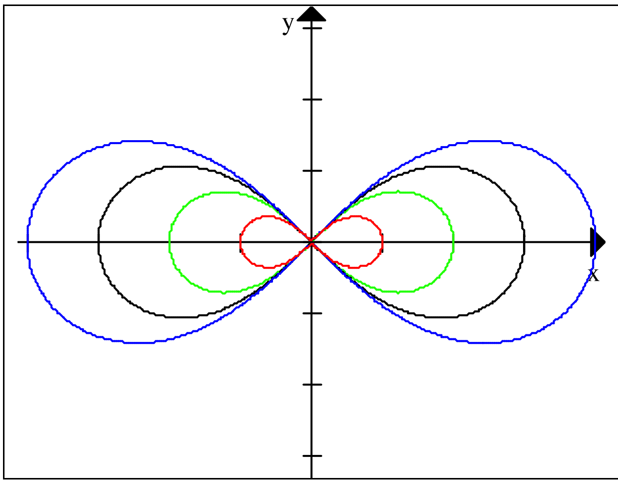
Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Parâmetros: a;b;c e d.
Variáveis: x e y
vermelho: a=-0,2; b=1;c=12;d=-10
azul: a=-0,2;b=2;c=12;d=-10
preto: a=-0,2;b=3;c=12;d=-10
verde: a=-0,2;b=4;c=12;d=-10
rosa: a=-0,2;b=5;c=12;d=-10
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot e desta para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 28: Parábola Divergente de Newton

Mantendo constantes os valores dos parâmetros como $a=-0,2; c=12$ e $d=-10$, com $a \neq 0$, e alterando os valores de **b** para qualquer número real, obtemos gráficos da *Parábola Divergente de Newton*.

Em 1694 Jacob Bernoulli (1654–1705) publicou, em um artigo no *Acta Eruditorumon,* uma curva semelhante a um oito, ou um nó, ou a curva de uma fita denominada *lemniscata de Bernoulli* de equação cartesiana $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. (BOYER 1996, p. 288)

Eis alguns dos seus gráficos (FIG. 29):



Quadro da geometria analítica:
-Equação cartesiana:
$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$
Parâmetro: a
Variáveis: x e y
vermelho: a=1; verde: a=2;
preto: a=3; azul: a=4.

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

FIG. 29: Lemniscata de Bernoulli

Variando os valores do parâmetro **a** desta equação, conseguimos com o Winplot, representar alguns gráficos da *lemniscata de Bernoulli*, conforme FIG.29, desde que **a** seja diferente de zero.

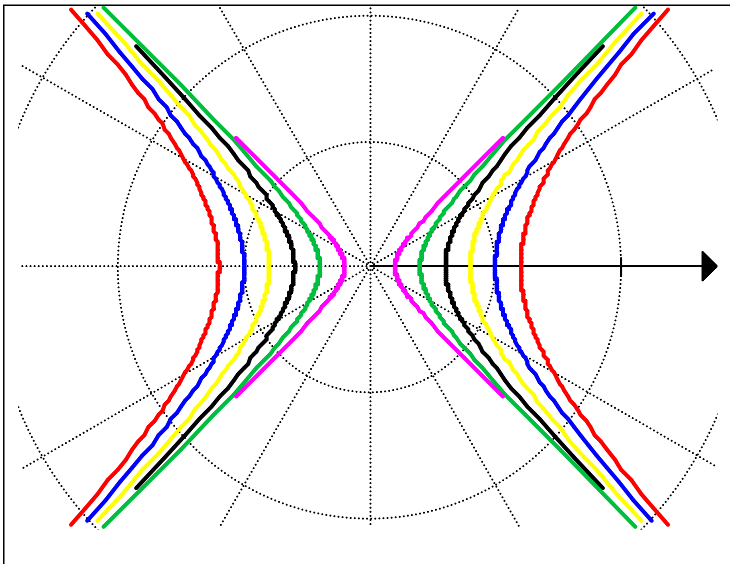
Em 1718, Colin Maclaurin (1698–1746) estudou a *espiral sinusoidal*, representada pela equação polar $r^n=a^n\cos(nt)$ com n racional, apresentando casos particulares para valores de n, conforme TAB. 4. (EVES 2004, p. 411).

n	curva
-2	hipérbole eqüilátera
-1	reta
-1/2	parábola
-1/3	cúbica de Tschirnhausen
1/2	cardióide
1	circunferência
2	lemniscata de Bernoulli

TAB. 4: Casos particulares da espiral sinusoidal. (EVES 2004, p. 411)

Vamos representar cada uma destas curvas derivadas da *espiral sinusoidal*, porém agora alterando também os valores do parâmetro **a** com $0 \leq t \leq 2\pi rad$.

1. A espiral sinusoidal como hipérbole eqüilátera (FIG. 30):

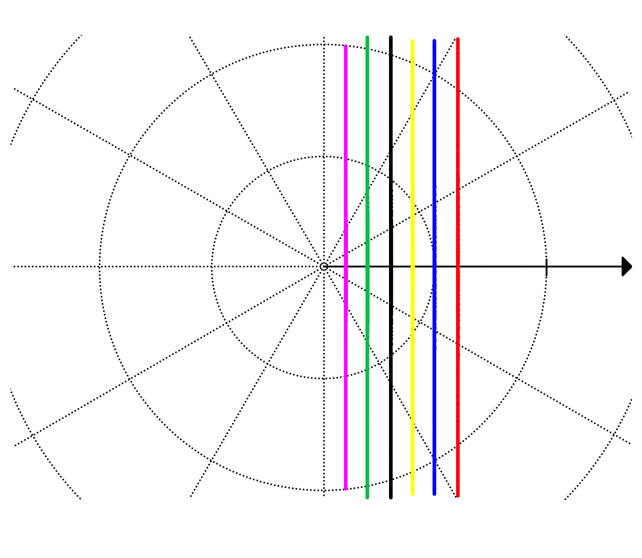


Quadro da geometria analítica:
-Equação polar:
$r = (a^n \cos(nt))^{\frac{1}{n}}$
parâmetros: a;n e t
vermelho: $a=12; n=-2$ e $0 \leq t \leq 2\pi rad$
azul: $a=10; n=-2$ e $0 \leq t \leq 2\pi rad$
amarelo: $a=8; n=-2$ e $0 \leq t \leq 2\pi rad$
preto: $a=6; n=-2$ e $0 \leq t \leq 2\pi rad$
verde: $a=4; n=-2$ e $0 \leq t \leq 2\pi rad$
rosa: $a=2; n=-2$ e $0 \leq t \leq 2\pi rad$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista polar

FIG. 30: espiral sinusoidal como hipérbole eqüilátera

Alterando os valores do parâmetro **a**, com $\mathbf{a \neq 0}$, identificamos diversos gráficos de uma hipérbole eqüilátera.

2. A espiral sinusoidal como reta (FIG. 31):



Quadro da geometria analítica:
-Equação polar:
$r=(a^n\cos(nt))^{\frac{1}{n}}$
parâmetros: $a; n$ e t
vermelho: $a=12; n=-1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
azul: $a=10; n=-1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
amarelo: $a=8; n=-1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
preto: $a=6; n=-1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
verde: $a=4; n=-1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
rosa: $a=2; n=-1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista polar

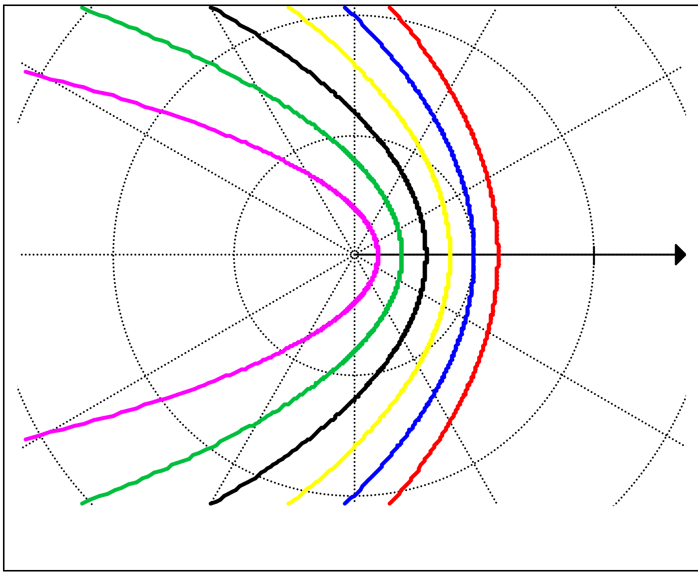
FIG. 31: espiral sinusoidal como reta

Neste caso, FIG. 31, identificamos diversas representações de retas para qualquer **a** real.

Para a seqüência didática que será proposta, não estamos interessados em atividades com representações gráficas de curvas planas no sistema de coordenadas polares, e, sim, em estudar a importância do uso de parâmetros em equações de algumas curvas.

A seguir, apresentam-se as demais curvas estudadas por Maclaurin.

3. A espiral sinusoidal como parábola (FIG. 32):

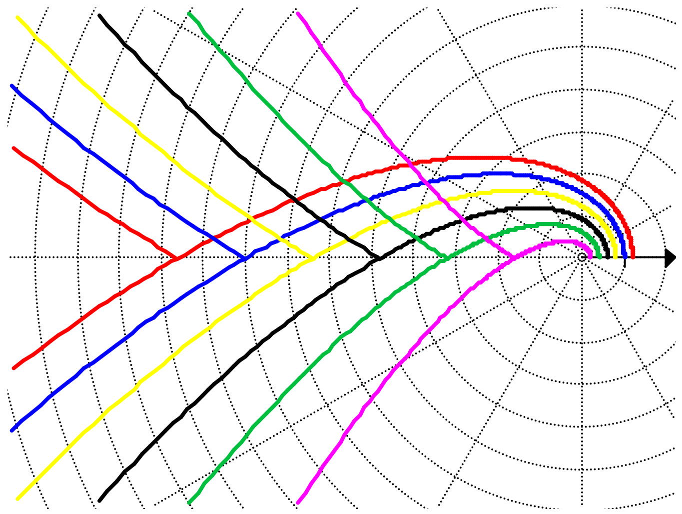


Quadro da geometria analítica:
-Equação polar:
$r=(a^n\cos(nt))^{\frac{1}{n}}$
parâmetros: $a; n$ e t
vermelho: $a=12; n=-0,5$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
azul: $a=10; n=-0,5$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
amarelo: $a=8; n=-0,5$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
preto: $a=6; n=-0,5$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
verde: $a=4; n=-0,5$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
rosa: $a=2; n=-0,5$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista polar

FIG. 32: espiral sinusoidal como parábola

Neste caso, FIG. 32, identificamos diversas representações de parábola desde que **a** seja maior que zero.

4. A espiral sinusoidal como cúbica de Tschirnhaus (FIG. 33):



Quadro da geometria analítica:
-Equação polar:

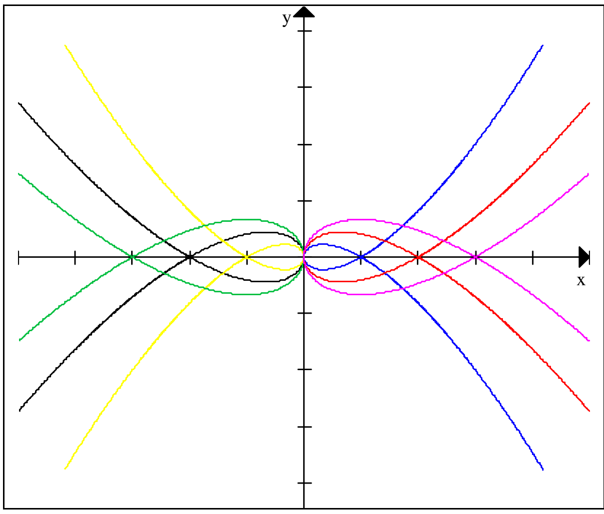
$$r=(a^n\cos(nt))^{\frac{1}{n}}$$

parâmetro: a; n e t
vermelho: $a=12; n=-1/3$ e $0\le t\le 2\pi rad$
azul: $a=10; n=-1/3$ e $0\le t\le 2\pi rad$
amarelo: $a=8; n=-1/3$ e $0\le t\le 2\pi rad$
preto: $a=6; n=-1/3$ e $0\le t\le 2\pi rad$
verde: $a=4; n=-1/3$ e $0\le t\le 2\pi rad$
rosa: $a=2; n=-1/3$ e $0\le t\le 2\pi rad$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista polar

FIG. 33: espiral sinusoidal como cúbica de Tschirnhaus

Após realizarmos diversas variações nos valores do parâmetro **a** e observamos as representações gráficas em cada instante, com **a** $\neq 0$, além das apresentadas na FIG. 33, deparamos com gráficos que se aproximam de uma cúbica de *Tschirnhaus*[19] (1651-1708). Para esclarecer tal fato, apresentamos abaixo a referida *cúbica*[20].

[19] Segundo EVES (2004, p.401), Ehrenfried Valter von Tschirnhaus era um matemático alemão que dedicou grande parte de seu tempo à matemática e à física, deixando sua marca no estudo das curvas e na teoria das equações.
[20] Cúbica de Tschirnhaus. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Tschirnhaus.html> . Acesso em 30 de junho de 06. (tradução livre)



Quadro da geometria analítica:
Equação cartesiana:
$3ay^2 = x(x-a)^2, \text{com } a \neq 0$
Parâmetro: a
Variáveis: x e y
verde: a = -3; preto: a = -2
amarelo: a = -1; azul: a = 1
vermelho: a = 2; rosa: a = 3

Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista cartesiano

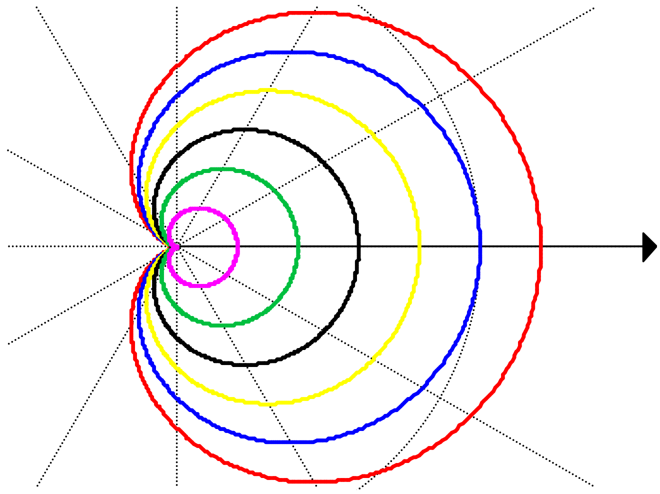
FIG. 34: cúbica de Tschirnhaus

Observa-se que mudanças de pontos de vista, do polar para o cartesiano, apresentam alterações gráficas que não foram consideradas, talvez pela falta de recursos teóricos. Mas o que permite de fato diferenciar estas representações gráficas, neste momento, é a variação nos valores dos parâmetros de ambas as equações, seja na forma polar ou cartesiana.

Ainda sobre este caso particular, FIG. 34, identificamos que, quando o parâmetro **a** em $\mathbb{R}$ assume o valor zero, a curva não tem representação gráfica.

Continuando investigações sobre os casos particulares da *espiral sinusoidal* apresentados por EVES, apresentamos a *cardióide*, a *circunferência* e a *lemniscata de Bernoulli* representada por alguns de seus gráficos quando o parâmetro n vale respectivamente, ½, 1 e 2.

5. A espiral sinusoidal como cardióide (FIG. 35):

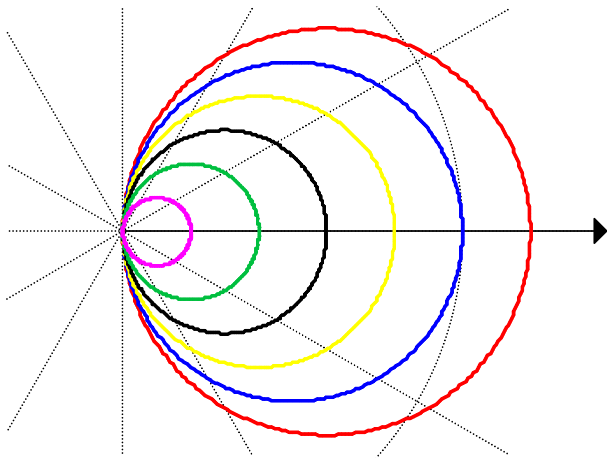


Quadro da geometria analítica:
-Equação polar:
$r = (a^n \cos(nt))^{\frac{1}{n}}$, com $a > 0$
parâmetro: a; n e t
vermelho: $a = 12; n = 1/2$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
azul: $a = 10; n = 1/2$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
amarelo: $a = 8; n = 1/2$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
preto: $a = 6; n = 1/2$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
verde: $a = 4; n = 1/2$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
rosa: $a = 2; n = 1/2$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista polar

FIG. 35: espiral sinusoidal como cardióide

Alterando os valores do parâmetro **a**, neste caso particular da FIG.35, identificamos que só existem gráficos de uma cardióide nos casos em que $a > 0$.

6. A espiral sinusoidal como circunferência (FIG. 36):

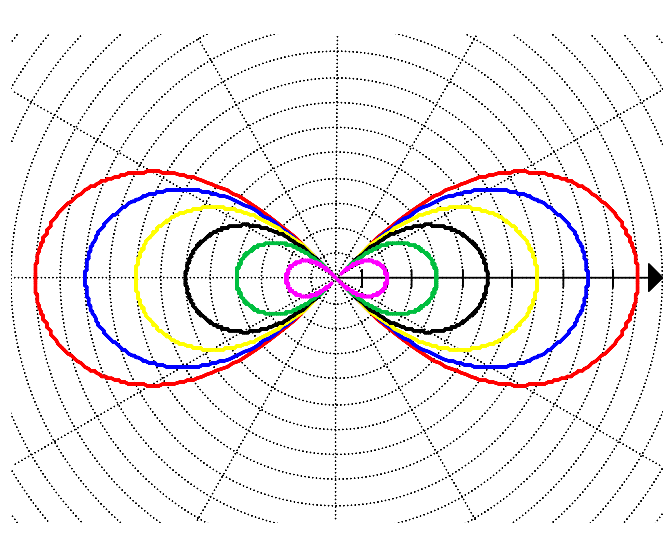


Quadro da geometria analítica:
-Equação polar:
$r = (a^n \cos(nt))^{\frac{1}{n}}$, com $a \neq 0$
parâmetro: a; n e t
vermelho: $a = 12; n = 1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
azul: $a = 10; n = 1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
amarelo: $a = 8; n = 1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
preto: $a = 6; n = 1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
verde: $a = 4; n = 1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
rosa: $a = 2; n = 1$ e $0 \le t \le 2\pi rad$
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista polar

FIG. 36: espiral sinusoidal como circunferência

Neste caso, FIG. 36, variando os valores numéricos do parâmetro **a**, identificamos que, para a existência de gráficos de uma circunferência, **a** assume qualquer valor real exceto o zero.

7. A e*spiral sinusoidal como lemniscata de Bernoulli* (FIG. 37):



Quadro da geometria analítica:
-Equação polar:
$r=(a^n\cos(nt))^{\frac{1}{n}}$, com $a\neq 0$
Parâmetros: a; n e t
vermelho: $a=12; n=2$ e $0\leq t\leq 2\pi$ rad
azul: $a=10; n=2$ e $0\leq t\leq 2\pi$ rad
amarelo: $a=8; n=2$ e $0\leq t\leq 2\pi$ rad
preto: $a=6; n=2$ e $0\leq t\leq 2\pi$ rad
verde: $a=4; n=2$ e $0\leq t\leq 2\pi$ rad
rosa: $a=2; n=2$ e $0\leq t\leq 2\pi$ rad
Conversão entre registros:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica
Ponto de vista polar

FIG. 37: espiral sinusoidal como lemniscata de Bernoulli

Novamente notamos a necessidade de explicitar que o parâmetro **a** é diferente de zero. Desta forma teremos as diversas representações gráficas da lemniscata de Bernoulli, como um caso particular da espiral sinusoidal, conforme algumas na FIG. 37 apresentadas.

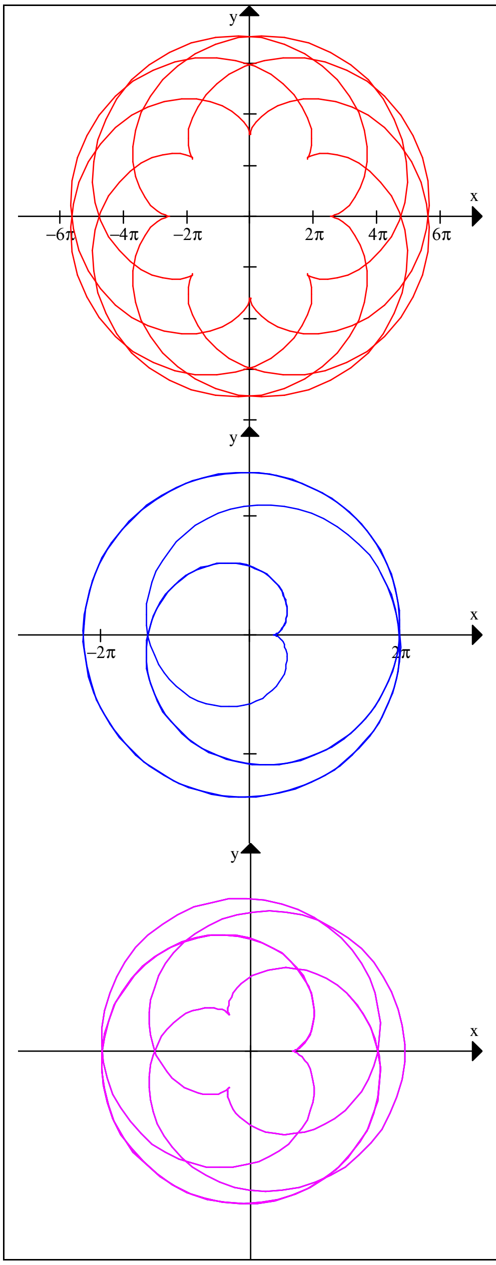
Ainda investigando na história algumas curvas planas e a importância do uso de parâmetros em suas equações, deparamos com quatro curvas que são relacionadas entre si. São elas: epiciclóide, epitrocóide, hipociclóide e a hipotrocóide, todas são seguidas por um ponto P em um círculo de raio **b** o qual gira ao redor de um círculo fixo de raio **a.**

Estas curvas[21] foram estudadas por Dürer (1525), Desargues (1640), Huygens (1679), Leibniz, Newton (1686), de L'Hôpital (1690), Jacob Bernoulli (1690), La Hire (1694), Johann Bernoulli (1695), Daniel Bernoulli (1725) e Euler (1745-781).

[21] Dados disponíveis em:<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Epicycloid.html>. Acesso em 03 de outubro de 05 às 22: 30hs.

A seguir representamos os gráficos[22] das respectivas curvas planas.

1. A epiciclóide (FIG. 38):



Quadro da geometria analítica:
-Equações paramétricas:
$(x;y)=(f(t);g(t))$

$$\begin{cases} x=((a+b)\cos(t)-b\cos((a/b)+1)t) \\ y=((a+b)\sin(t)-b\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$$

Parâmetros: a,b e t

Variáveis: x e y

Gráficos:

vermelha: $a=8; b=5$ e $0\le t\le 10\pi$ rad

azul: $a=1; b=3$ e $0\le t\le 10\pi$ rad

rosa: $a=1; b=\frac{4}{3}$ e $0\le t\le 10\pi$ rad

Conversão entre registros de representação semiótica:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica

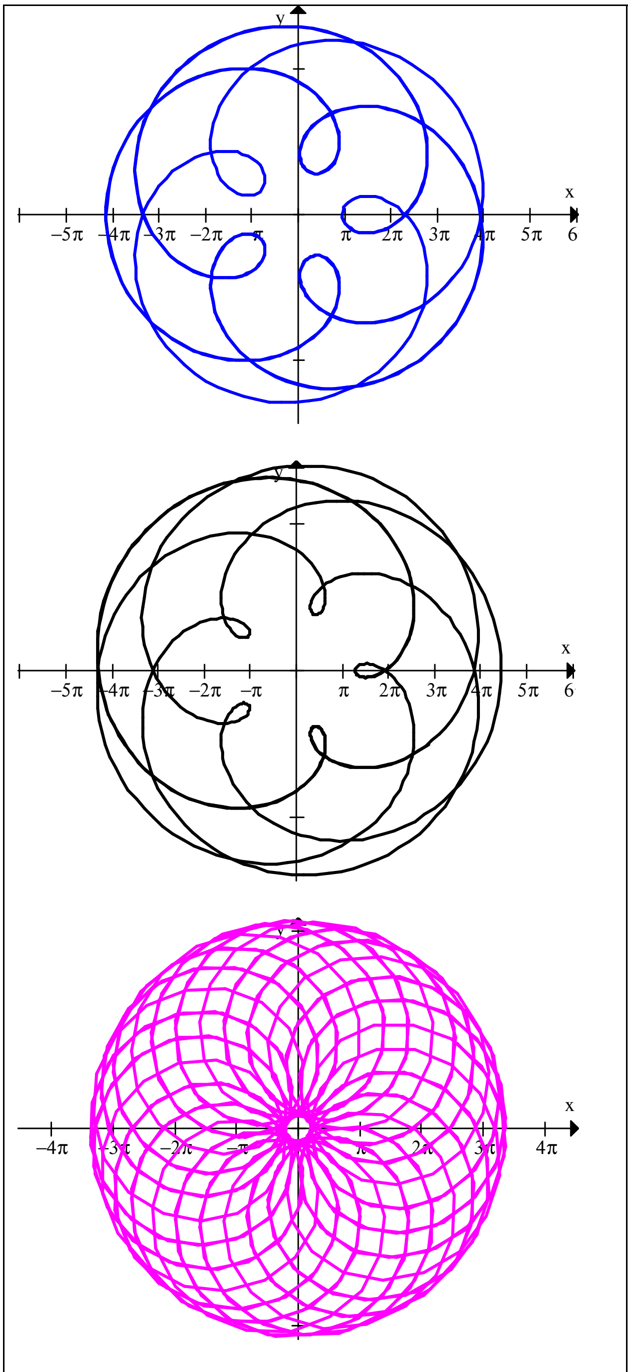
Ponto de vista paramétrico

FIG. 38: Epiciclóide

Alguns dos gráficos da *epiciclóide*, apresentados na FIG.38, foram obtidos segundo SHIKIN (1995, p. 193), como os de cor azul e rosa.

[22] Dados disponíveis em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Epicycloid.html>. Acesso em 30 de outubro de 05.

2. A epitrocóide (FIG.39):



Quadro da geometria analítica:

-Equações paramétricas:

$(x;y) = (f(t);g(t))$

$$\begin{cases} x = ((a+b)\cos(t) - c\cos((a/b)+1)t) \\ y = ((a+b)\sin(t) - c\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$$

Parâmetros : a,b e t

Variáveis : x e y

Gráficos :

azul : $a = 5; b = 3; c = 5$ e $0 \leq t \leq 2a\pi rad$

preta : $a = 5; b = 4; c = 5$ e $0 \leq t \leq 2a\pi rad$

rosa : $a = 5; b = 0{,}6; c = 5$ e $0 \leq t \leq 2a\pi rad$

Conversão entre registros de representação semiótica:

-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot

-Da linguagem winplot para a gráfica

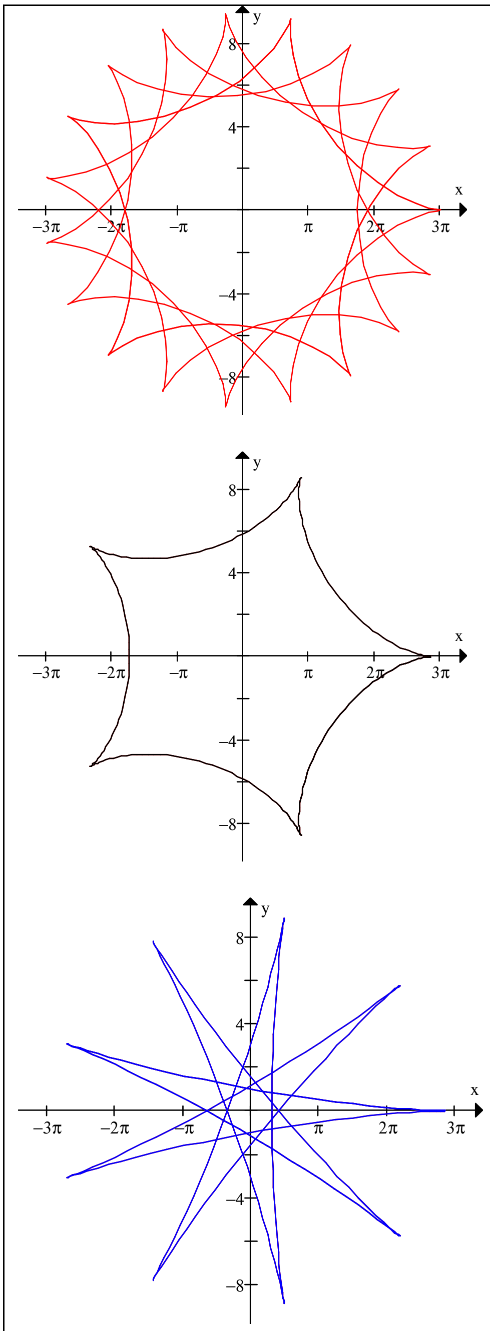
Ponto de vista paramétrico

FIG. 39: Epitrocóide

Após realizar variações nos valores dos parâmetros **a**, **b**, **c**, e **t**, representamos alguns gráficos (FIG. 39) da Epitrocóide.

Provavelmente os estudos históricos de algumas curvas planas como estas valorizam o uso de parâmetros em suas equações pela variedade de gráficos representados de uma mesma curva.

3. A hipociclóide (FIG. 40):



Quadro da geometria analítica:

-Equações paramétricas:

$(x;y) = (f(t);g(t))$

$$\begin{cases} x = ((a-b)\cos(t) - b\cos((a/b)+1)t) \\ y = ((a-b)\sin(t) - b\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$$

Parâmetros: a, b e t

Variáveis: x e y

Gráficos:

vermelho: $a = 9,5; b = 2$ e $0 \le t \le 10\pi rad$

preta: $a = 9; b = 7.2$ e $0 \le t \le 10\pi rad$

azul: $a = 9; b = 4$ e $0 \le t \le 10\pi rad$

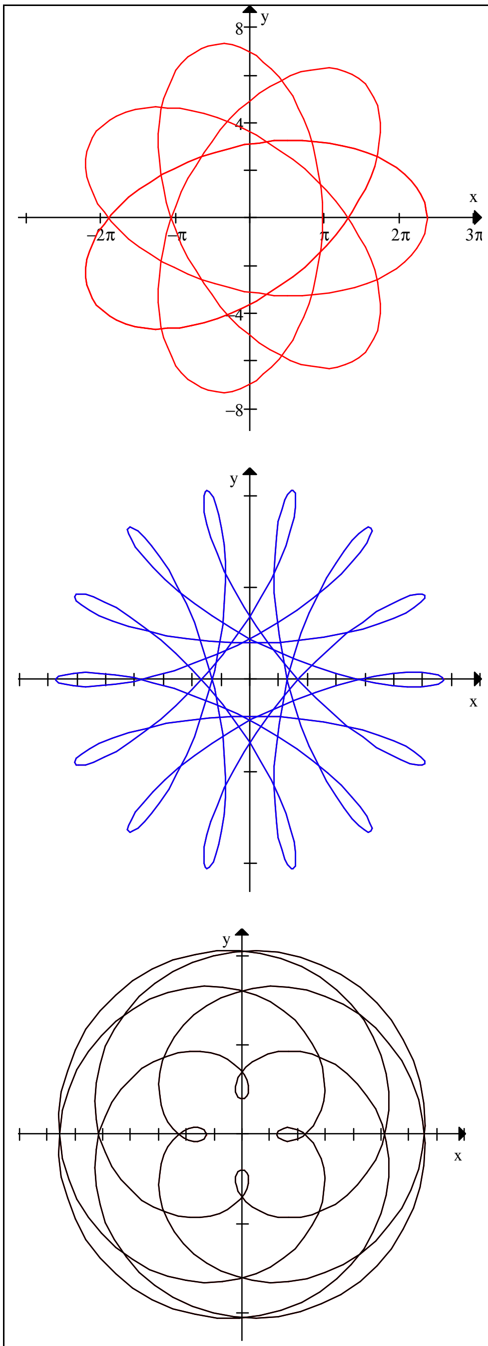
Conversão entre registros de representação semiótica:
-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot
-Da linguagem winplot para a gráfica

Ponto de vista paramétrico

FIG. 40: Hipociclóide

Variando os valores reais dos parâmetros **a, b** e **t**, apresentamos alguns dos gráficos (FIG. 40) de uma hipociclóide.

4. A hipotrocóide (FIG. 41):



Quadro da geometria analítica:

-Equações paramétricas:

$(x;y)=(f(t);g(t))$

$$\begin{cases} x=((a-b)\cos(t)+c\cos((a/b)-1)t) \\ y=((a-b)\mathrm{sen}(t)-c\,\mathrm{sen}((a/b)+1)t) \end{cases}$$

Parâmetros : a,b e t

Variáveis : x e y

Gráficos :

vermelho : $a=5;b=7;c=2,2$

e $0\leq t\leq 10\pi$ rad

azul : $a=19,6;b=7;c=8,6$

e $0\leq t\leq 10\pi$ rad

preto : $a=-5,6;b=-7;c=8.6$

e $0\leq t\leq 10\pi$ rad

Conversão entre registros de representação semiótica:

-Da representação simbólico-algébrica para a linguagem winplot

-Da linguagem winplot para a gráfica

Ponto de vista paramétrico

FIG. 41: Hipotrocóide

Variando os valores reais dos parâmetros **a, b** e **t**, apresentamos alguns dos gráficos (FIG. 41) de uma hipotrocóide.

Seria possível representar uma enorme variedade de gráficos das últimas quatro curvas, mas não teríamos tempo hábil para tanto. O importante, nestes dados históricos, é que o uso de parâmetros em equações possibilita observar, com o uso de um plotador gráfico, algumas das propriedades geométricas de cada uma das curvas.

Observamos que várias curvas apresentadas no século XVII são transcendentes e um dos grandes responsáveis pelo estudo gráfico destas é Euler.

BOYER (1996, p. 318), sobre Euler e o segundo volume de seu livro, intitulado *Introductio*, comenta:

> Esse livro fez mais do que qualquer outro para tornar o uso de coordenadas, tanto em duas quanto em três dimensões, a base para um estudo sistemático das curvas e superfícies. Em vez de se concentrar em secções cônicas, Euler deu uma teoria geral de curvas, baseada no conceito de função que era central no primeiro volume. As curvas transcendentes não eram desprezadas como de costume, de modo que aqui, praticamente pela primeira vez, o estudo gráfico das funções trigonométricas tornava-se parte da geometria analítica.

Aqui encontramos uma flexibilidade na mudança de quadros, de funções para o da geometria analítica e vice-versa. Esta conexão entre o estudo analítico de curvas com a noção de função tornou-se um fato muito importante na matemática.

Sobre este momento histórico, SILVA (1994) esclarece:

> Para Euler, função era uma expressão analítica numa variável, composta pelo uso da adição, subtração, divisão, extração de raízes, operações trigonométricas e logarítmicas. A idéia de função estava conectada com o estudo analítico de curvas. A curva, representada por uma equação algébrica ou transcendente, era chamada curva contínua.

Pensando em curvas contínuas e na noção de parâmetro, pesquisamos a conexão entre ambas na representação paramétrica de uma curva.

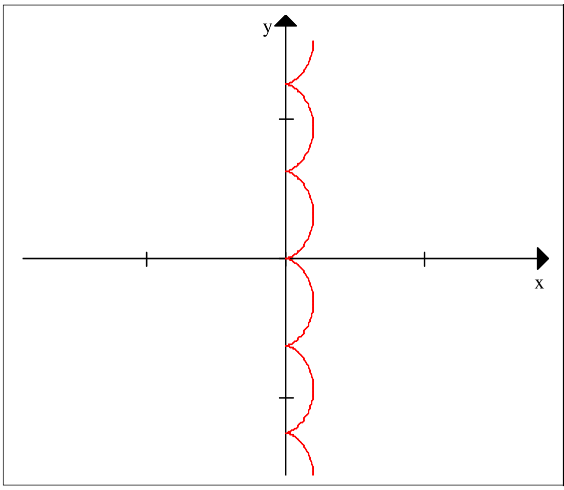
2.6 A representação paramétrica de curvas e o uso de parâmetros.

Dos gráficos até aqui apresentados, observamos, em diversos momentos, a importância do uso de equações paramétricas. Por meio da variação dos valores de seus parâmetros, foi possível identificar algumas representações gráficas de uma mesma curva.

Sobre o uso das equações paramétricas BOYER (1996, p. 319) comenta:

> A *Introductio* de Euler foi também a grande responsável pelo uso sistemático do que se chama a representação paramétrica de curvas, isto é, a expressão de cada uma das coordenadas cartesianas como uma função de uma variável independente auxiliar. Para a ciclóide, por exemplo, Euler usou a forma:
>
> $$x = b - \cos\frac{z}{a}$$
>
> $$y = z + b\sin\frac{z}{a}$$

Esta mesma equação e o gráfico (FIG. 42) da ciclóide apresentados por Euler nos dias atuais ficariam da seguinte forma:



$\frac{z}{a} = t \rightarrow z = at,$

Substituindo, temos:

$x = b - \cos t$

$y = at + b\sin t$

Parâmetros: a, b e t

Variáveis: x e y

Gráfico:

$a = -1; b = 1$ e $-5\pi rad \leq t \leq 5\pi rad$

FIG. 42: Ciclóide de Euler

Nos trabalhos de Euler torna-se visível a passagem do ponto de vista cartesiano para o paramétrico, provavelmente devido ao estudo das curvas, transcendentes e contínuas. Neste caso, as representações paramétricas são ferramentas facilitadoras no entendimento de suas propriedades.

Em 1890, Giuseppe Peano (1858–1932) mostrou curvas dadas por equações paramétricas x=f(t), y=g(t), onde f e g são funções reais contínuas no intervalo $0 \leq t \leq 1$, cujos pontos preenchem completamente o quadrado unitário $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. (BOYER 1996, p. 416)

Em um dos seus livros de geometria analítica, LEHMANN (1970, p.237), define equações paramétricas como:

> Seja, em geral, $F(x,y)=0$, a equação cartesiana de uma curva C e sejam x e y cada uma função de uma terceira variável t de maneira que podemos escrever: $x=f(t)$ e $y=g(t)$. Se, para qualquer valor permissível da variável independente t, as equações $x=f(t)$ e $y=g(t)$ determinam um par de valores reais de x e y que satisfazem a equação $F(x,y)=0$, então as equações $x=f(t)$ e $y=g(t)$ são denominadas *equações paramétricas*.

No caso das equações paramétricas, observa-se que a *variável auxiliar é* o que, nesta pesquisa, chamamos de parâmetro.

Em se tratando do ponto de vista cartesiano, também é visível a importância de parâmetros em equações, permitindo identificar gráficos e propriedades de algumas curvas apresentadas até aqui. A letra grega "λ" parece ter sido utilizada pela primeira vez por Gergonne, em 1829, como parâmetro, para indicar a família de todos os círculos que passam pela interseção dos dois círculos: $C=x^2+y^2 + ax + by + c = 0$ e $C' = x^2 + y^2$ -f $a'x + b'y + c' = 0$. Gergonne denotou por: $C + \lambda C' = O$, de onde surgiu o termo "lambdalizar" utilizado na Geometria Analítica. Plücker (1801 - 1868), na mesma época, usou $C + \mu C' = O$, o que deu origem à expressão "μ de Plücker". (BOYER 1996, p. 374).

No século XVIII, segundo EVES (2004, p. 601 -602), com Gaspard Monge (1746-1818), surge a Geometria Diferencial. Esta tem como objetivo o estudo das propriedades das curvas e superfícies, e suas generalizações, por meio do cálculo, ou seja, ocorre uma mudança de ponto de vista do cartesiano ou paramétrico para o do cálculo e uma mudança de quadros da geometria analítica para a diferencial.

Carl Friedrich Gauss (1777–855), introduz o método singularmente produtivo de estudar a geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de representações **parametrizadas** desses objetos. (EVES 2004, p. 602).

Entendemos uma curva parametrizada no plano como um par de funções $x = f(t)$ e $y = g(t)$ contínuas de t, com t variando em um intervalo real, portanto o parâmetro t é uma variável real independente.

A representação de pontos no plano, com t pertencendo a um intervalo real, é chamada *de traço da curva*.

Para obtermos estas representações de uma curva plana parametrizada é necessário o uso de parâmetros em equações, ou seja, estamos diante de uma conversão entre registros de representação semiótica, da simbólico-algébrica para a gráfica e vice-versa. Sobre estas conversões no trabalho de Lacroix (1765–1843), SILVA (1994) explica:

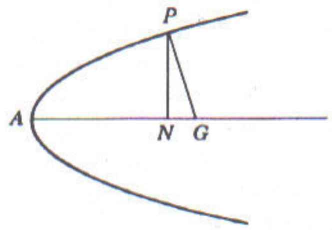
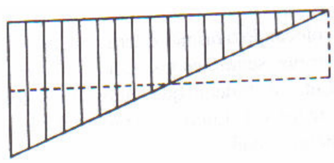
> O princípio da Geometria Analítica surge muito claramente em Lacroix (1799), quando ele diz: “a equação de uma curva é obtida expressando analiticamente uma de suas propriedades” e “uma equação dá lugar a uma curva, cujas propriedades tornam-se conhecidas pela equação”.

Historicamente a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e a conversão entre registros semióticos têm um papel importante na geometria analítica, principalmente quando se trata do estudo de curvas. Pretendemos transpor parte desse estudo para a seqüência didática.

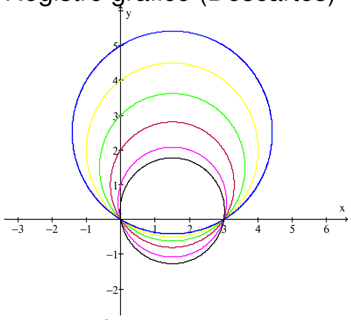
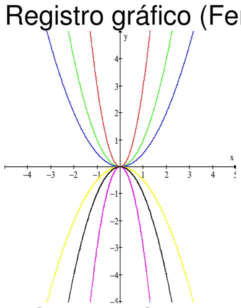
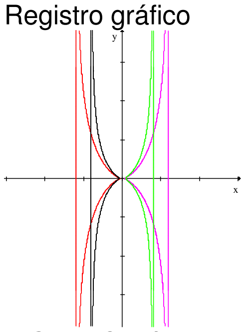
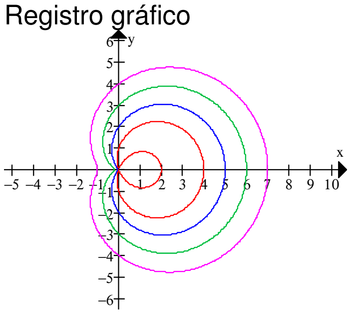
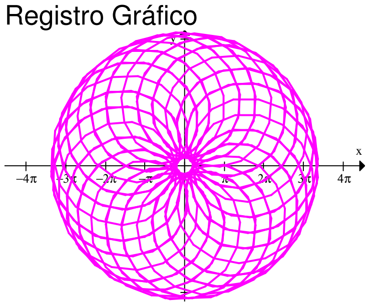
2.7 Considerações didáticas e epistemológicas gerais.

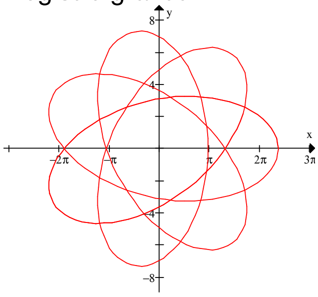
Nestas considerações, visamos a identificar a evolução da Geometria Analítica, especificamente do uso de parâmetros em equações cartesianas ou paramétricas de curvas planas, como objeto matemático, e sua relação com os registros de representação semiótica como: o gráfico, o simbólico, a linguagem natural e a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico.

A seguir, apresentamos um quadro, identificando o período histórico e suas respectivas personalidades com as possíveis transformações de registros, conversão e tratamento, no quadro da geometria analítica.

MOMENTOS E PERSONALIDADES HISTÓRICOS	**REGISTRO**	
	DE PARTIDA	**DE CHEGADA**
Período Helenístico[23]**:** Pitágoras **(560-500.a.C.);** Euclides. **(325-265a.C.);** Arquimedes **(287-212a.C.);** Apolônio **(262 -190 a.C.).**	Representação figural-geométrica: Ex:  *FIG.43:Parábola de Apolônio (BOYER 1996, p.105)*	Conversão para a Linguagem natural: Ex: Se A é o vértice de uma parábola $y^2 = px$, e se G é um ponto no eixo tal que $AG > p$, e se N é um ponto entre A e G tal que $NG = p,$ e se NP é traçado perpendicularmente ao eixo, encontramos a parábola em P (FIG. 43), então PG é o segmento de reta mínimo de G à curva e, portanto é normal à parábola em P. (BOYER 1996, p.104)
Diofanto e Al-Khowarizmi: Álgebra Retórica e Álgebra Sincopada	Linguagem natural: Ex: Encontre três números, tais que a soma de todos é um quadrado e a soma de dois quaisquer deles também é um quadrado. (EVES 2004, p.208)	Conversão para o Registro simbólico-algébrico $\begin{cases} x+y+z=w^2 \\ x+y=t^2 \\ y+z=a^2 \\ x+z=b^2 \end{cases}$ Segundo EVES (2004, p.208) "Resposta de Diofanto: 80,320,41"
Nicole Oresme: -Localização de pontos por coordenadas; -Representação gráfica de funções; -Pontos móveis; -Variável contínua	Registro gráfico. Ex:  *FIG.44 : Latitude e longitude (BOYER 1996, p. 181)*	Tratamento no Registro gráfico. Ex: -gráfico de funções. -pontos móveis -variável contínua
Viète e Descartes: Álgebra simbólica e a introdução do conceito de parâmetro.	Registro simbólico Ex: $x^3 + 3ax = b$	Tratamento no Registro simbólico. x:quantidade desconhecida (incógnita) a e b : quantidade conhecida (parâmetros)

[23] O Período helenístico normalmente é entendido como um momento de transição entre o esplendor da cultura grega e o desenvolvimento da cultura romana. Tal concepção está associada a uma visão eurocêntrica de cultura e portanto torna secundários os elementos de origem oriental, persa e egípcia, apesar de ter esses elementos como formadores da cultura helenística. Disponível em: <http://www.historianet.com.br/conteudo/default.aspx?codigo=541>. Acesso em 10 de outubro de 2005.

Fermat e Descartes: origens da Geometria Analítica.	Registro gráfico (Descartes)  *Fig.45: cônica de Descartes como circunferência*	Registro simbólico (Descartes): $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$
	Registro simbólico (Fermat) $y^n = ax^m$	Registro gráfico (Fermat)  *FIG. 46: Parábolas de Fermat*
Descartes: classificação de curvas algébricas	Registro gráfico  *FIG.47 : Cissóide de Dioclés*	Registro Simbólico $y^2 = x^3/(2a - x)$
Diversos: Curvas planas e a importância do uso de parâmetros em equações.	Registro gráfico  *FIG. 48: Limaçon de Pascal*	Registro simbólico $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$
Euler e as curvas transcendentes	Registro Simbólico $(x;y) = (f(t);g(t))$ $\begin{cases} x = ((a+b)\cos(t) - c\cos((a/b)+1)t) \\ y = ((a+b)\sin(t) - c\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$	Registro Gráfico  *FIG. 49: Epitrocóide*

Euler e Peano: representação paramétrica de curvas.	Registro simbólico $(x;y) = (f(t);g(t))$ $\begin{cases} x = ((a-b)\cos(t) + c\cos((a/b)-1)t) \\ y = ((a-b)\mathrm{sen}(t) - c\,\mathrm{sen}((a/b)+1)t) \end{cases}$	Registro gráfico  FIG. 50: *Hipotrocóide*
Lacroix e o princípio da geometria analítica	Registro gráfico **ou** Registro simbólico.	Registro gráfico **ou** Registro simbólico.

QUADRO 4 – Possíveis transformações de registros semióticos.

A análise da evolução dos conceitos em estudo nos leva a entender, conforme o QUADRO 4, que o desenvolvimento conceitual de parâmetro e o seu respectivo uso em equações, sempre estiveram articulados com os dois tipos de transformação de representações semióticas: a conversão e o tratamento. Em especial, sobre a conversão entre registros, a geometria analítica de Descartes parte do gráfico para o simbólico enquanto que a de Fermat parte do simbólico para o gráfico. Este pensamento fermatiano está muito próximo do que acontece em sala de aula, no entanto somente em Lacroix é que temos, segundo DUVAL, uma apreensão global qualitativa no estudo de curvas.

A seguir, no QUADRO 5, procuramos identificar as curvas planas pesquisadas até aqui, classificando-as em algébrica ou transcendente, suas respectivas equações, os pontos de vista e os parâmetros utilizados.

Curva Plana	**Algébrica** **Ponto de vista cartesiano**	**Transcendente** **Pontos de vista paramétrico ou polar**	**Variação nos valores dos parâmetros Alguns casos particulares**
Cônica de Descartes (FIG.:6;7;8;9; 10)	$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$		circunferência: $b = 0; c = 3; d = 1$ $a \in \{0,5;1;2;3;4;5\}$ hipérbole: $b = 4; c = 3; d = 1$ $a \in \{-3;2\}$ elípse: $a = 3; b = 1; d = 1$ $c \in \{-1;0;1;2;3;4;5\}$ reta: $a = 3; b = 1; c = 0$ e $d = 0$ $b = 1; c = 0; d = 0$ $a \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$ parábola: $a = 0; b = 0; d = 0$ $c \in \{-5;-2;-1;1;2;5\}$
O tridente de Descartes (FIG. 12)	$(a + x)(a - x)(2a - x) = axy$ com $a \neq 0$		$a \in \{1;2;3\}$
Cissóide de Dioclés (FIG. 13)	$y^2 = x^3/(2a - x)$, com $a \neq 0$		$a \in \{-6;-4;4;6\}$
Conchóide de Nicomedes (FIG. 14)	$(x - b)^2(x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$ com $a \neq 0$		$a \in \{8;10;12\}$ e $b = 2$
Espiral de Arquimedes (FIG. 15)		$\sqrt{x^2 + y^2} = a\arctan(y/x)$ *ponto de vista cartesiano	$a = 2$
Quadratriz de Hípias (FIG. 16)		$y = x\cot\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$, com $a \neq 0$ *ponto de vista cartesiano	$a \in \{-0,5;0,5\}$
Hipérboles de Fermat (FIG. 17)	$x^m y^n = a$, com $a \neq 0$		$m = 1; n = 1$ $a \in \{-5;-1;1;5\}$
Parábolas de Fermat (FIG. 18)	$y^n = ax^m$, com $a \neq 0$		$m = 2; n = 1$ $a \in \{-3;-1;-0,5;0,5;1;3\}$
Espiral de Fermat (FIG. 19)		$(x;y) = (f(t);g(t))$ $\begin{cases} x = t\cos(kt^2) \\ y = t\sin(kt^2) \end{cases}$ com $k \neq 0$	$0 \leq t \leq 2\pi$rad $k \in \{-075;0,75\}$

Curva de Agnesi (FIG. 20)	$y(x^2+a^2)=a^3$ $a\neq 0$		$a\in\{-2;-1;-0,5;0,5;1;2\}$
Ciclóide (FIG. 21)		$(x;y)=(f(t);g(t))$ $\begin{cases} x=a(t-\sin(t)) \\ y=a(1-\cos(t)) \end{cases}$ com $a\neq 0$	$0\leq t\leq 6a\pi\text{rad}$ $a\in\{1;2;4\}$
Limaçon de Pascal (FIG. 22)	$(x^2+y^2-2ax)^2=$ $b^2(x^2+y^2)$ com a e $b\neq 0$		$a=1,5$ $b\in\{1;2;3;4\}$
Hipérboles de Descartes (FIG. 23)	$y^2=xy+bx$ com $b\neq 0$		$b\in\{0,5;1;2\}$
Parábolas de Descartes (FIG. 24)	$y^2=-dy+bx$ com $b\neq 0$		$d=2;$ $b\in\{1;2;3;4\}$
Circunferências de Descartes (FIG. 25)	$y^2=bx-x^2$ com $b\neq 0$		$b\in\{-5;-4;-3;-2;-1;$ $1;2;3;4;5\}$
Pérolas de Sluze (FIG. 26)	$y^m=kx^n(a-x)^b$ com $k\geq 0$ e $a\geq 0$		$m=2;n=4;a=2;b=3$ $k\in\{1;3;5;8;10\}$
Involuta de um Círculo (FIG. 27)		$(x;y)=(f(t);g(t))$ $\begin{cases} x=a(\cos(t)+t\sin(t)) \\ y=a(\sin(t)-t\cos(t)) \end{cases}$ com $a\neq 0$	$0\leq t\leq 10\pi\text{rad};$ $a\in\{-0,4;0,4\}$
Parábola Divergente de Newton (FIG. 28)	$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$		$a=-0,2;c=12;d=-10$ $b\in\{1;2;3;4;5\}$
Lemniscata de Bernoulli (FIG. 29)	$(x^2+y^2)^2=$ $a^2(x^2-y^2)$ com $a\neq 0$		$a\in\{1;2;3;4\}$
Espiral sinusoidal		$r=(a^n\cos(nt))^{\frac{1}{n}}$ (*)*com* $a\neq 0$ *ou* (**)$a>0$	*(*)Hipérbole eqüilátera* (FIG.30) $n=-2; 0\leq t\leq 2\pi\text{rad}$ $a\in\{2;4;6;8;10;12\}$ *Reta* (FIG.31) $n=-1$ e $0\leq t\leq 2\pi\text{rad}$ $a\in\{2;4;6;8;10;12\}$ *(**)Parábola* (FIG. 32) $n=-0,5$ e $0\leq t\leq 2\pi\text{rad}$ $a\in\{2;4;6;8;10;12\}$ *(*)Cúbica de Tschirnhaus* (FIG. 29) $n=-1/3$ e $0\leq t\leq 2\pi\text{rad}$ $a\in\{2;4;6;8;10\}$ (**)*Cardióide* (FIG. 31)

			$n = 1/2$ e $0 \le t \le 2\pi$rad $a \in \{2;4;6;8;10;12\}$ *(*)Circunferência* (FIG. 32) $n = 1$ e $0 \le t \le 2\pi$rad $a \in \{2;4;6;8;10;12\}$ *(*)Lemniscata de Bernoulli* (FIG. 33) $n = 2; 0 \le t \le 2\pi$rad $a \in \{2;4;6;8;10;12\}$
Cúbica de Tschirnhaus (FIG. 30)	$3ay^2 = x(x-a)^2$ com $a \neq 0$		$a \in \{-3;-2;-1;1;2;3\}$
Epiciclóide (FIG. 34)		$(x;y) = (f(t);g(t))$ $\begin{cases} x = ((a+b)\cos(t) - \\ b\cos((a/b)+1)t) \\ y = ((a+b)\sin(t) - \\ b\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$	$0 \le t \le 10\pi$rad; $a \in \{1;8\}; b \in \left\{\frac{4}{3};3;5\right\}$
Epitrocóide (FIG. 35)		$(x;y) = (f(t);g(t))$ $\begin{cases} x = ((a+b)\cos(t) - \\ c\cos((a/b)+1)t) \\ y = ((a+b)\sin(t) - \\ c\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$	$a = 5; c = 5; 0 \le t \le 2a\pi$rad $b \in \{0,6;3;4\}$
Hipociclóide (FIG. 36)		$(x;y) = (f(t);g(t))$ $\begin{cases} x = ((a-b)\cos(t) - \\ b\cos((a/b)+1)t) \\ y = ((a-b)\sin(t) - \\ b\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$	$0 \le t \le 10\pi$rad; $a \in \{9;9,5\}$ $b \in \{2;7,2;4\}$
Hipotrocóide (FIG. 37)		$(x;y) = (f(t);g(t))$ $\begin{cases} x = ((a-b)\cos(t) + \\ c\cos((a/b)-1)t) \\ y = ((a-b)\mathrm{sen}(t) - \\ c\sin((a/b)+1)t) \end{cases}$	$0 \le t \le 10\pi$rad; $a \in \{-5,6;5;19,6\}$; $b \in \{-7;7\}$; $c \in \{2,2;8,6\}$
Ciclóide de Euler (FIG. 38)		$x = b - \cos t$ $y = at + b\sin t$	$a = -1; b = 1$ $-5\pi\text{rad} \le t \le 5\pi$rad

QUADRO 5: Curvas algébricas e transcendentes e pontos de vista.

CURVAS	**Ponto de vista cartesiano**	**Ponto de vista paramétrico**	**Ponto de vista polar**
36	21	8	7

QUADRO 6: Análise quantitativa

Conforme o QUADRO 6, de uma análise quantitativa, os momentos históricos das curvas planas privilegiam o ponto de vista cartesiano.

No QUADRO 5, as diversas equações de algumas curvas planas algébricas ou transcendentes, evidenciam a importância do uso de parâmetros para identificar as possíveis representações gráficas de uma curva.

De um modo geral, as curvas planas ganham destaque no século XVII, provavelmente devido à contribuição de Newton e Euler sobre o uso de coordenadas negativas e de curvas transcendentes_ obstáculos epistemológicos.

Assim a análise contribui para a compreensão dos fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem da geometria analítica, pois constatamos, em parte, na evolução histórica de incógnita, parâmetro, variável, equações cartesianas, paramétrica ou polar, curvas planas algébricas e transcendentes, o constante envolvimento dos diferentes registros de representação semiótica e suas transformações.

Acreditamos que, na geometria analítica, os estudos históricos de algumas curvas planas, como apresentados, transpostos para a sala de aula, valorizam o entendimento de incógnita, variável e parâmetro em suas equações, por isso, tornam-se importantes para a apreensão da noção destes conceitos no que se refere ao aluno.

CAPÍTULO III: A NOÇÃO DE PARÂMETRO NA GEOMETRIA ANALÍTICA: DE OBJETO CIENTÍFICO A OBJETO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Neste capítulo, continuamos com os estudos preliminares. Aqui temos como objetivo apresentar a *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática de São Paulo no 2º grau*, os *Parâmetros Curriculares Oficiais de Matemática do Ensino Médio* e as *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, quando a temática é a geometria analítica, especificamente, no que se refere à noção de parâmetro e ao seu uso em equações cartesianas ou paramétricas.

1. Alguns conceitos didáticos ligados ao processo de ensino-aprendizagem.

No estudo histórico do conceito de parâmetro e de seu uso na geometria analítica, vimos como a articulação entre os diferentes pontos de vista e as conversões e tratamentos como transformação de representações semióticas foram fatores importantes para a evolução de conceitos na geometria analítica.

Quando nos referimos aos registros de representação, segundo DUVAL (2003, p. 14), "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação".

Sobre os dois tipos de transformação de representações semióticas, os tratamentos e as conversões, DUVAL (2003, p. 16) os difere da seguinte forma:

> • Os tratamentos são transformações de representações de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver

uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.

- As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

Observaremos, então se a Proposta e os Parâmetros Curriculares no que diz respeito a alguns conceitos desenvolvidos na geometria analítica, como os estudos de curvas, possibilitam a articulação entre as transformações em registros de representação semiótica e os pontos de vista paramétrico e cartesiano.

2. Proposta, Parâmetros e Orientações Curriculares de Matemática para o Ensino Médio.

Vamos analisar os conteúdos, as formas de abordagem, bem como as sugestões para o ensino da geometria analítica, que se dá a partir do ensino médio, na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática de São Paulo no 2º grau (1992), nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 1999, no PCNEM plus, de 2004 e nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de 2006.

Na Proposta Curricular, sobre os conteúdos propostos para o ensino médio (antigo 2º grau), temos:

> Considerando como conteúdos significativos ao aluno, também aqueles que realimentam a própria Matemática e os que favorecem a interdisciplinaridade. [...] Tendo em vista essas questões, sugerimos que o aluno trabalhe prioritariamente com os seguintes conteúdos: Funções, Geometria, Trigonometria, Análise Combinatória, Probabilidade, Geometria Analítica, Matemática Financeira e Estatística. (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 1992, p. 14)

Esta proposta curricular inclui a geometria analítica como um dos temas prioritários para o ensino médio, especificando-se na grade curricular da 3ª série.

No planejamento, com objetivos e comentários sobre a geometria analítica, a referida proposta recomenda como objetivo geral: “tratar algebricamente conceitos e propriedades da Geometria Plana” (p. 36). Neste caso, fica evidente, o privilégio dado somente à geometria plana e ao tratamento no registro simbólico.

Em seguida a proposta apresenta dois conteúdos da geometria analítica com os seus respectivos objetivos, comecemos pelo primeiro:

> Conteúdo 1: Estudo do Ponto e da Reta:
> Objetivo: Utilizar o conceito de distância entre dois pontos e condição de alinhamento entre pontos para resolver problemas geométricos.
> Determinar e relacionar as várias formas de equação da reta.
> Explicitar e aplicar as condições de paralelismo entre retas.
> Calcular distância de ponto a reta e área de triângulo. (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 1992, p.36)

Em relação a este conteúdo, interessa-nos a condição de alinhamento entre pontos para resolver problemas geométricos e a determinação de várias formas de equação da reta.

Sobre a primeira, observamos que, provavelmente, esta propõe, como apresentado em PAIVA (2003,p.313)[24], utilizar o seguinte conceito: “três pontos $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$, e $C(x_C;y_C)$ são colineares se, e somente se, $m_{AB}=m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}”, ou seja, resolver o problema geométrico, da colinearidade de pontos, no registro simbólico. Mas em nenhum momento propõe, a partir da representação gráfica de alguns pontos no plano cartesiano, estudar a condição de alinhamento e tentar explicitar o conceito algebricamente, ou seja, uma conversão do registro gráfico para o simbólico.

Sobre a determinação e relação das várias formas de equação da reta, em nenhum momento é explicitada como equação geral, reduzida ou paramétricas da

[24] Escolhemos o livro didático de PAIVA (2003) por ter sido adotado em 2006 na escola onde aplicamos seqüência didática.

reta, ou seja, uma mudança de ponto de vista passando por uma nova representação, como do cartesiano para o paramétrico.

No segundo conteúdo, temos:

> Conteúdo 2: Estudo da circunferência. Posições relativas entre pontos, retas e circunferências.
> Objetivo: Determinar o centro e o raio de uma circunferência, a partir de sua equação.
> Utilizar as várias formas de equação de uma circunferência na resolução de problemas.
> Identificar as posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre circunferência e circunferência. (p. 36)

Em relação a este conteúdo, interessa-nos novamente as várias formas de equação de uma circunferência na resolução de problemas. Aqui, outra vez, não são explicitadas quais são, por exemplo, equação reduzida, normal ou paramétricas de uma circunferência, ou seja, quais as mudanças de pontos de vista na representação da nova equação.

Tanto no conteúdo 2 como no conteúdo 1, vê-se privilegiado o uso do registro simbólico, mas não é explicitado em quais pontos de vista.

Observamos que os conteúdos, no quadro da geometria analítica, não são apresentados com o objetivo da mudança de ponto de vista e da conversão simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou da possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação, ou seja, a conversão. Segundo DUVAL (2004, p. 21), “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque *não se deve jamais confundir um objeto e sua representação*”.

A articulação entre mudanças de ponto de vista, cartesiano e paramétrico, e a conversão entre o registro simbólico e gráfico e vice-versa não é apresentada na proposta.

Por fim, a geometria analítica é recomendada em relação aos dois conteúdos e objetivos, porém não constam sugestões para esta temática, como atividades e situações-problema que foram apresentadas para outras temáticas como: funções, análise combinatória, probabilidade, geometria espacial e matemática financeira.

Já em livros didáticos constam sugestões para esta temática, mas de acordo com os objetivos da proposta. A noção de parâmetro é explicitada nas equações paramétricas da reta, mas não definida. Vejamos um exemplo no livro de PAIVA (2003, p. 325):

> Generalizando, para qualquer equação que relacione apenas as variáveis x e y, podemos apresentar essas variáveis em função de um parâmetro t:
>
> $$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$
>
> Se essas equações têm como gráfico uma reta r, então são chamadas de equações paramétricas da reta r.

Porém as equações paramétricas não passam da representação de uma reta e por isso são deixadas de lado no estudo de outras curvas planas. Também não se explicita o uso de parâmetros em outras equações. Eis alguns exemplos:

No livro de PAIVA (2003, p.319) a equação geral da reta é definida como: "toda reta do plano cartesiano é gráfico de uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que x e y são variáveis e a, b e c são números reais, com a e b não nulos". Segundo Viète e Descartes, neste caso, a, b e c são as quantidades conhecidas, ou seja, os parâmetros, evidenciados em livros didáticos como coeficientes literais. Supomos que a variação dos valores de parâmetros em equações e a construção de gráficos de algumas curvas planas, como a reta, de maneira dinâmica, permitem ao aluno um melhor entendimento de algumas de suas propriedades geométricas.

Os PCNEM, de maneira bem geral, apresentam como critério central para escolhas de temas ou tópicos matemáticos, o da contextualização e da interdisciplinaridade e a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 1999, p.255)

Expõe um exemplo em que a temática função é apresentada como tema isolado e não permite a exploração do caráter integrador que possui. "as propriedades de retas e parábolas estudadas em geometria analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes". (BRASIL, 1999, p. 255). Desta forma reduz o estudo da geometria analítica ao estudo de funções.

Apresenta a temática função como critério central para o estudo da geometria analítica, porém, não se diz mais nada, a não ser o estudo de retas e parábolas, provavelmente associado à função afim e quadrática.

Apenas de forma implícita, as competências e habilidades a serem desenvolvidas em geometria analítica são apresentadas quando o assunto é a representação e comunicação:

> Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).
> Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa.
> Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta. (BRASIL, 1999, p.259)

Implicitamente constata-se uma proposta de conversão entre a linguagem natural, o simbólico e o gráfico, mas não é possível identificar como desenvolver estas conversões.

Os PCNEM PLUS, em relação à importância do ensino da geometria analítica, comentam que a mesma tem a função de:

> Tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações.
> O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente.
> Então, mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe. Para isso, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1o e 2o graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas.
> Além de conhecer uma forma de pensar em Matemática, entender o mundo do século 17, que deu origem ao cartesianismo, pode ser uma excelente oportunidade para que o aluno perceba o desenvolvimento histórico do conhecimento e como certos momentos dessa história transformaram a ciência e a forma de viver da humanidade. (BRASIL, 2004, p. 124)

De forma implícita, os PCNEM PLUS supõem uma mudança de quadros, do geométrico para o algébrico e vice-versa, também uma conversão entre os registros simbólico e gráfico e vice-versa.

Observamos que o desenho de uma reta ou de um ponto localizado em um plano cartesiano é considerado como um registro gráfico.

De acordo com os PCNEM PLUS, nossa seqüência didática estabelecerá inicialmente uma correspondência entre as funções do 1º e 2º graus e seus gráficos com o estudo da posição relativa de pontos no plano em dois pontos de vista: o cartesiano e o paramétrico.

Em se tratando de conteúdos (como representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras) e habilidades a serem desenvolvidas para a unidade temática geometria analítica, os PCNEM PLUS sugerem:

> - Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.

> - Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
> - Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
> - Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2004, p. 125)

Interessa-nos o reconhecimento de que uma mesma situação pode ser tratada nos diferentes instrumentos matemáticos. Supomos implicitamente as mudanças de quadro, de registro e de pontos de vista.

Também nos interessa a associação de atividades no quadro da geometria analítica com os registros de representação semiótica e os pontos de vista.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, no que se refere a geometria analítica, procura caracterizá-la da seguinte forma:

> a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra);
> b) o estudo dos pares ordenados de números (x,y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria) . Esses dois aspectos merecem ser trabalhados na escola.
> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. (BRASIL, 2006, p. 77)

Notamos que as Orientações Curriculares, propõe implicitamente, uma conversão entre os registros de representação simbólico e gráfico e uma articulação entre os quadros geométrico e algébrico.

Sobre o uso de parâmetros em equações na geometria analítica, as Orientações Curriculares recomendam:

> Entendido o significado de uma equação, deve-se iniciar o estudo das equações da reta e do círculo. Essas equações devem ser deduzidas, e não simplesmente apresentadas aos alunos, para que, então, se tornem significativas, em especial quanto ao sentido geométrico de seus **parâmetros**. (BRASIL, 2006, p. 77, grifo nosso)

Aqui, entendemos que surge, pela primeira vez, a necessidade da noção de parâmetro e o seu uso em equações para um entendimento significativo das propriedades geométricas da reta e da circunferência.

No geral a Proposta Curricular, os PCNEM, os PCNEM PLUS e as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio apresentados enfatizam a importância do ensino da geometria analítica com suas devidas competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos. Porém, notamos a falta do estudo de curvas e suas representações que vão além de retas, parábolas e circunferências, articulando os pontos de vista paramétrico e cartesiano e a conversão entre registros simbólico e gráfico.

Assim como a história apresentada por BOYER (1996, p. 318-319), tanto a Proposta quanto os Parâmetros e as Orientações Curriculares não valorizam outras curvas algébricas, como as secções cônicas, e não apresentam as curvas transcendentes, trabalhadas na teoria geral de curvas de Euler, como as curvas trigonométricas.

Conseqüentemente supomos que, em livros didáticos, a noção de parâmetro se limita, explicitamente, ao estudo das equações paramétricas e à representação da reta em geometria analítica vista no Ensino Médio.

Entendendo a necessidade de desenvolver uma seqüência didática que enfatize a importância da noção de parâmetro na representação gráfica de pontos e curvas planas, a Proposta e os Parâmetros Curriculares nos direcionam para estudos em um ambiente informático.

O uso de novas tecnologias no ensino como ferramenta facilitadora permite ao aluno a construção de pontos, ponto genérico, família de pontos por meio da investigação de algumas curvas planas representadas por equações na forma cartesiana ou paramétrica e facilita o entendimento da noção de parâmetro.

Sobre estes ambientes informáticos e a importância dos mesmos no estudo da Matemática, os PCNEM comentam:

> Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino da Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. [...] as funções da Matemática descritas anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculado ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático (BRASIL, 1999, p.252)

A Proposta e os Parâmetros (PCNEM e PCNEM PLUS), de um modo geral, recomendam, implicitamente, em geometria analítica, as mudanças de quadros (do geométrico para o algébrico), a importância das transformações (conversões e tratamentos) em registros semióticos (linguagem natural, simbólico e gráfico) e os pontos de vista cartesiano e paramétrico. Portanto estes resultados são fundamentais para nossa pesquisa na medida em que, no quadro da geometria analítica (subquadro da geometria), a seqüência didática se respalda na conversão entre os registros simbólico e gráfico e vice-versa e os pontos de vista paramétrico e cartesiano.

Em se tratando do uso de tecnologia em matemática nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, surgem algumas novidades.

Estas Orientações Curriculares comentam a necessidade de se contemplar uma formação escolar dois sentidos, são eles: “[...] a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática”. (BRASIL, 2006, p. 87).

Em nosso trabalho vamos nos ater ao segundo caso, a tecnologia como ferramenta para entender a noção de parâmetro na geometria analítica.

Sobre este segundo caso, estas Orientações Curriculares sugerem:

> [...] há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. (BRASIL, 2006, p. 88).

Consideramos o *software* Winplot, segundo (BRASIL, 2006), um programa de expressão.

Na busca de programas de expressão para o estudo da geometria analítica as Orientações Curriculares, indicam:

> [..] tem-se uma grande variedade de programas de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto- solução de uma equação – inequação. (BRASIL, 2006, p.89).

Novamente, entendemos que o Winplot é um dos programas que, segundo (BRASIL, 2006), trabalha-se tanto com coordenadas cartesianas ou polares e facilitam a exploração algébrica e gráfica, consequentemente o entendimento do significado geométrico de uma equação em geometria analítica.

Aqui temos, nas Orientações Curriculares como sugestões do uso de programas de expressão, como o Winplot, implicitamente, uma articulação entre os pontos de vista cartesiano e polar e as conversões entre os registros de representação simbólico e gráfico. Estas Orientações Curriculares, contribuem para o desenvolvimento de atividades em ambientes informáticos.

Interessados em desenvolver a seqüência didática em um ambiente informático, a seguir, apresentamos uma fundamentação teórica que nos respalda nesta abordagem.

3. Alguns princípios norteadores da Informática na Educação

ALMOULOUD (2000, p. 198) define o uso de ferramentas, como o microcomputador, como algo privilegiado para a avaliação somativa, formativa e diagnóstica, possibilitando:

- o estudo do comportamento dos alunos;
- tornar os alunos autônomos na gestão de sua aprendizagem;
- tratar no tempo real uma parte da avaliação;
- integrar numerosas informações multidimensionais;
- diminuir o efeito emocional da avaliação.

As atividades propostas para a seqüência de ensino procuram estudar o comportamento dos alunos, mas principalmente torná-los autônomos na gestão de sua aprendizagem sob a orientação do professor.

Segundo VALENTE (1993 apud ALMOULOUD, 2000, p. 199), analisando as possibilidades do computador em contextos educacionais, comenta:

> • O uso do computador como máquina de ensinar, informatizando os métodos de ensino tradicionais, tendo sobre o papel, lousa e giz as vantagens das animações, som e repetições sucessivas para a melhor compreensão por parte do educando, caracterizando o paradigma instrucionista. (p. 199)
> • O computador como ferramenta, auxiliando na construção do conhecimento: [...] a mudança nos paradigmas educacionais vem acompanhada pela introdução de novas ferramentas tecnológicas. Assim sendo, não é suficiente que os educadores tenham à sua disposição ou apenas saibam operar esses elementos tecnológicos, é preciso que aprendam a elaborar e a intervir significativamente no processo educativo. (p. 200)
> • [...] se o objetivo principal do processo educativo é oportunizar o desenvolvimento do processo de construção do conhecimento, com o aprendiz no centro do processo educativo, compreendendo conceitos e reconhecendo a sua aplicabilidade em situações por ele vivenciadas, defendemos a utilização do computador como ferramenta, facilitando a descrição, reflexão e depuração de idéias. (p. 200)

Como sugere este autor, com o uso do computador nas atividades da seqüência, procura-se fugir do papel, da lousa e do giz, visando a animações gráficas de pontos e curvas. O computador, como ferramenta facilitadora da descrição, reflexão e depuração, permite uma melhor compreensão da noção de parâmetro no estudo de pontos e curvas e suas propriedades.

3.1. Ambiente Informático

Na seqüência, apresentamos atividades voltadas ao uso de um *software* educativo, o *Winplot*, para fins de ensino aprendizagem. O *software* será considerado, segundo ALMOULOUD (2000, p. 200), "[...] como um conjunto de recursos informáticos desenvolvidos no intuito de serem usados em contextos de ensino e aprendizagem".

O processo do saber a ser ensinado é influenciado em parte pelo *software* utilizado, pelo uso de recursos informáticos, e não somente pelo professor. Desta forma, a transposição didática dá origem à transposição informática (BALACHEFF, 1994), tornando-se um conceito teórico fundamental para esta pesquisa, visto que os alunos terão acesso às representações de *softwares*.

3.2. A transposição didática

CHEVALLARD (1991 apud ALMOULOUD, 2000, p. 200) define a transposição didática como o conjunto das transformações que o saber científico sofre em seu processo de ensino. Desta definição distingui-se bem "o saber científico" do "saber ensinado" (institucional).

Da escolha do saber à sua adaptação ao sistema didático, existe todo um processo gerador de modificações, que termina no que chamamos de saber escolar.

Sobre o desenvolvimento dos ambientes informáticos, ALMOULOUD (2000, p. 202), relata: "a introdução dessas tecnologias na escola e na formação de professores, é acompanhado de novos fenômenos do mesmo tipo que aqueles da *Transposição didática*".

Segundo BALACHEFF (1994 apud ALMOULOUD, 2000, p. 202), "além dos entraves da Transposição didática, temos aqueles da modelagem e da implementação informática: entraves da modelagem compatível, entraves ligados à linguagem informática e à capacidade das máquinas".

BALACHEFF (1994 apud ALMOULOUD, 2000, p. 202) analisa a seguinte problemática:

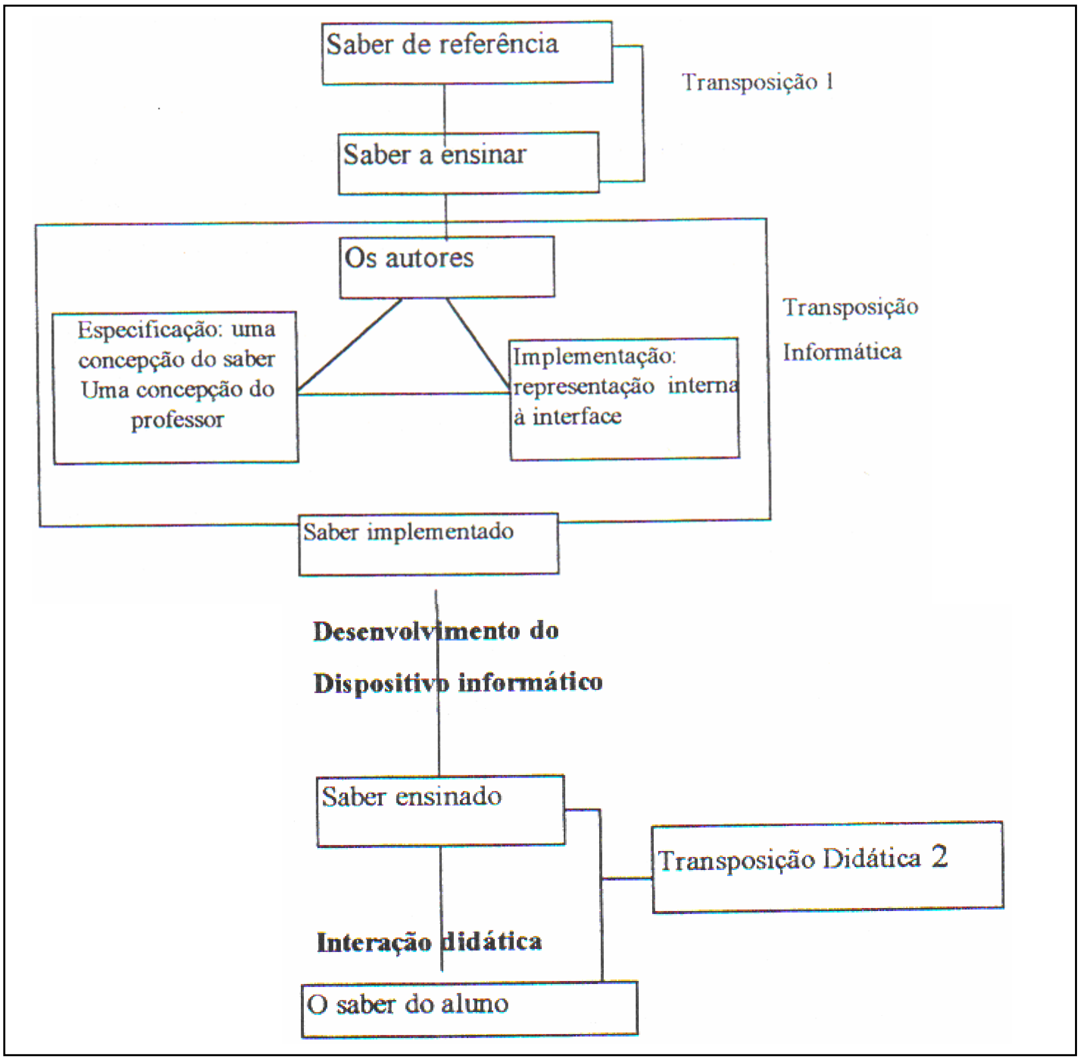
> Uma "representação do mundo" não é o "mundo", pois essa representação tem propriedades herdadas, ao mesmo tempo, das escolhas de modelagem que são feitas e das características dos meios semióticos escolhidos. Por outro lado, como dispositivo material, o computador impõe um conjunto de exigências que vão necessitar de uma transformação do "mundo" para permitir implementar sua representação. (p. 202)

Desta forma, o autor, introduz a noção de "Transposição Informática" para falar desse tratamento do conhecimento que permite representá-lo e implementá-lo num dispositivo informático.(p. 202)

3.3. A transposição informática.

Em se tratando do uso de um *software* educativo, esta noção torna-se importante e significativa, pois apresenta uma contextualização do conhecimento (individual) que pode ter conseqüências importantes sobre os resultados das aprendizagens. (p.202)

O esquema a seguir, dado por BALACHEFF (1994 apud ALMOULOUD, 2000, p. 203), resume em que nível a Transposição informática está situada no processo da Transposição didática.



QUADRO 7: Transposição Informática

O esquema do QUADRO 7 evidencia as transformações que determinado saber deve passar a fim de se tornar um saber do aluno em um ambiente informatizado.

Uma vez que o saber a ensinar é identificado, resta especificar a arquitetura da aprendizagem, sofrendo adaptações relacionadas a concepções dos professores sobre este saber e os meios de seu ensino. Na utilização de dispositivos informáticos, existe outra transformação no saber a ensinar antes de se tornar saber ensinado, sendo este o saber implementado. Este se refere não somente às concepções dos professores, mas também às representações do *software* e sua interface.

Para a implementação da seqüência de atividades, utilizaremos um ambiente informático com *softwares gratuitos*, como o plotador gráfico, *Winplot,* e o construtor de *GIF*'s animados, *GIF Animator*. Serão utilizados como ferramentas facilitadoras para as representações gráficas de pontos e curvas no plano. A transposição informática, como referência teórica, desempenha um papel fundamental nessa pesquisa.

A seguir apresentamos os *softwares,* algumas de suas características importantes que utilizaremos nesta pesquisa e uma análise sobre os efeitos da transposição informática.

3.4 O *Software Winplot*

O ***Winplot***[25]*,* desenvolvido por Richard Parris, da Philips Exeter Academy, é um dos principais *softwares free* da linha *Peanut Softwares*[26], que contém uma lista com vários programas matemáticos gratuitos. Trata-se de um plotador gráfico, de fácil instalação, que ocupa pouco espaço (menos de 1MB), com a opção de representar gráficos em 2D (bidimensional) ou 3D (tridimensional). O que o torna atrativo são os parâmetros dinâmicos que permitem "animar" gráficos alterando os seus valores presentes.

[25] Winplot foi traduzido para o Português em 2001 por Adelmo Ribeiro de Jesus.
[26] *Site* Oficial da *Peanut Softwares:* http://www.exeter.edu/pages/index.html

No menu “Equação”, FIG.51, é possível representar diversos tipos de gráficos de equações com uma ou duas variáveis na forma explícita, implícita, paramétrica ou polar, assim como pontos e segmentos. Os gráficos construídos e suas respectivas equações podem ser automaticamente salvos num inventário, sendo possível esconder e mostrar os dados a qualquer momento.

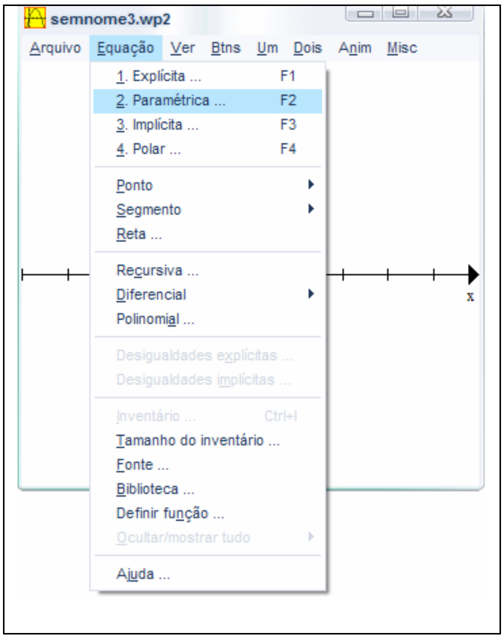


FIG. 51: Menu “Equação” do Winplot

Existe uma biblioteca com o arquivo de todas as funções elementares (representações da linguagem *Winplot*) que podem ser interpretadas pelo software, tais como: pi, ln , log , exp , sin , cos , tan , csc , sec , cot , sinh , cosh , tanh , sqr = sqrt = [raiz quadrada]. Eis alguns sinais usuais da representação simbólico- algébrica que são usados:

- Exponenciação é representada por ^, embora seja mais fácil escrever xx do que x^2.

- O símbolo multiplicativo * pode geralmente ser dispensado. Por exemplo, 5x é interpretado para significar 5*x.

No menu “Ver”, FIG. 52, pode-se alterar o tamanho e aspecto da janela (tela do winplot) como: zoom, tamanho, com ou sem eixos, grade quadriculada, determinação de valores explícitos nos eixos ortogonais, e ajuda explicando todos os detalhes deste menu.

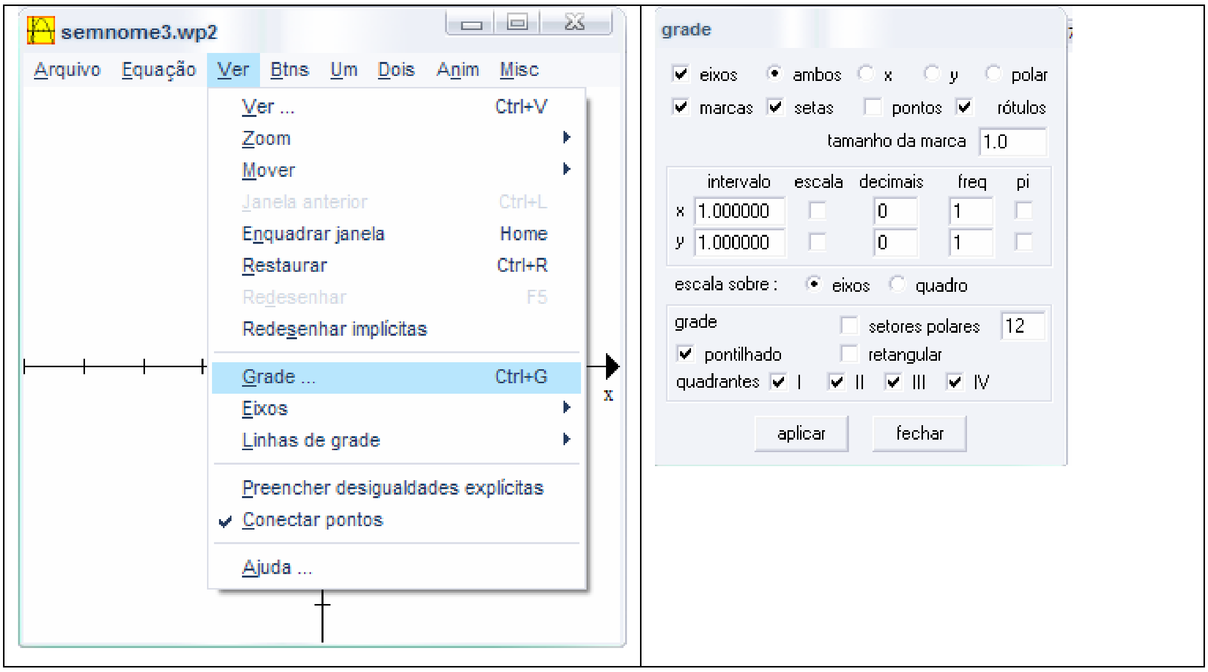


FIG. 52: Menu “ver” do Winplot

O menu “Anim” permite o estudo de uma família de pontos, ou seja, representá-la graficamente por meio da alteração dos valores reais dos parâmetros de um ponto genérico. Permite também representar diversos gráficos de uma curva plana algébrica ou transcendente por meio da alteração dos valores reais dos parâmetros de suas respectivas equações paramétricas, cartesianas ou polares.

O menu “Misc” permite fazer retoques finais como: pôr setas nos eixos, colorir o fundo, fazer anotações no caderno de rascunho, entre outros.

É possível trabalhar com várias janelas abertas ao mesmo tempo, possibilitando comparações e articulações entre as diversas representações gráficas possíveis no *Winplot*.

3.4.1. Limitações do *software Winplot*

Uma das principais limitações do *Winplot* é que, sozinho, como todos os programas educacionais, não garante uma aprendizagem eficiente.

Segundo ALMOULOUD (2000, p. 210), "[...] é preciso incluí-lo num dispositivo didático, no qual o professor estará encarregado, entre outras tarefas, da construção das situações-problema e do gerenciamento da sala de aula", nem que seja à distância.

O aluno, analisando as diversas representações gráficas de uma curva plana, por exemplo, uma parábola, deve concluir que esta variação lhe permite substituir a prova matemática, como as suas propriedades geométricas, ou seja, o *Winplot* "[...] já mostrou a veracidade e não há necessidade de uma justificação matemática". ALMOULOUD (2000, p. 210)

A partir de uma equação de curva, a representação gráfica é automática, distanciando-se de uma construção contínua da curva ou ponto a ponto com papel e lápis. Novamente o aluno sente a necessidade de não justificar matematicamente como obteve o gráfico.

Mesmo sendo um *software* de fácil manuseio, pode ser cansativo, pois a sua diversidade, em termos de descobertas, é imensa.

Para alunos que já tenham facilidade com uso de *softwares* ou aplicativos, o *Winplot* torna-se descomplicado; porém, para alunos do ensino fundamental ou inexperientes, é necessário uma ajuda extra, como apostilas ou tutoriais de aulas específicas que podem ser realizados pelo professor.

No menu “Anim”, existe um recurso de auto animação dos valores reais de parâmetros, porém nem sempre ele é aconselhável, pois em grande parte das vezes o programa trava e perde-se tudo o que foi realizado.

Existe um outro detalhe: não há como voltar atrás em alguns casos em que a equação foi apagada “sem querer”, ou seja, é preciso refazer tudo outra vez.

O programa não funciona em alguns sistemas operacionais *Linux*, como o *GNU-Linux.*

3.4.2. Considerações relevantes

Em um curso de extensão realizado em 2003 e 2004 (com carga horária total de 60 horas e carga horária semanal de 4 horas), pela CEFET – Campos[27] e UENF[28], para professores de Matemática do Ensino Médio e alunos de Licenciatura em Matemática, com um total de 24 participantes usuários potenciais de *softwares* educacionais, o *Winplot* foi um dos *softwares* avaliados[29] , sendo considerado pelos avaliadores como um dos mais coerentes com os PCNEM.

Conforme o QUADRO 8, entendemos que a diferença básica entre o *Winplot* e outros plotadores gráficos de baixo custo ou gratuitos é a promoção da “animação” de gráficos a partir dos parâmetros de suas equações.

[27] CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA, situado na cidade de Campos dos Goytacazes/RJ.
[28] Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF
[29] Avaliação disponível em: <http://www.es.cefetcampos.br/softmat/>, acesso em 10/07/2006.

PONTOS POSITIVOS	PONTOS NEGATIVOS
O *software*: • contribui para o desenvolvimento da capacidade de observação e do senso crítico; • possibilita a associação de idéias e contribui para evitar simples memorizações; • desperta o interesse do usuário, permitindo melhor aprendizagem, favorecendo a construção do conhecimento; • permite promover "animação" de gráficos a partir de parâmetros adotados e traça, simultaneamente, gráficos de uma família de equações, considerando determinados parâmetros; • traça gráficos em 2D e em 3D (duas e três dimensões).	O *software*: • não possui a função "desfazer" para casos em que gráficos são apagados por engano.

QUADRO 8: SOFTMAT (BATISTA et al. 2004, p.9)

3.5 *GIF Animator*

O *GIF Animator* é um dos *softwares* desenvolvidos pela *Microsoft*. Permite construir *GIF*`s animados e é distribuído gratuitamente. O que o torna interessante é a possibilidade do educando, envolvido por uma ferramenta facilitadora, desenvolver uma autonomia própria na criação e construção de um *GIF* animado como se fosse um grande pintor que, por meio de propriedades geométricas, encanta com a arte da geometria e, por que não, das curvas.

Este programa permite a realização de um desenho animado que exija destreza e paciência até o último desenho que corresponde à última cena.

Se o *Winplot* permite animar os gráficos de curvas planas, o *GIF Animator* as imortaliza como uma animação constante. Observa-se que, em grande parte, são os *GIF`s* que dão vida às páginas da *Internet,* com seus *banners* ou logomarcas[30], ou seja, o trabalho final é muito interessante.

[30] Segundo Dicionário Aurélio: qualquer representação gráfica padronizada e distintiva utilizada como marca1 (22); representação visual de uma marca1 (22).

3.5.1. Limitações do *GIF Animator*

Não é um *software* educativo, é técnico;

Não é fácil encontrá-lo na *internet*[31], provavelmente por ser gratuito;

Está em inglês, o que torna o seu manuseio difícil de entender.

Para a montagem do *GIF*, temos que selecionar, de uma em uma, cada imagem gráfica localizada em uma pasta pré-estabelecida e todas no formato .gif, tornando a tarefa um trabalho árduo. Porém, entendemos o programa como um bom motivador para os alunos.

[31] Software *GIF Animator* disponível em: <http://www.diadematematica.com/downloads/gifsetup.exe>. Acesso em 10 de julho de 2006.

CAPÍTULO IV: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos uma seqüência didática, com o objetivo de tentar responder as hipóteses de pesquisa de nosso trabalho.

Apresentamos as justificativas das escolhas feitas, os procedimentos metodológicos e o instrumento experimental.

Nesta fase, segundo alguns elementos de uma engenharia didática, proposta por ARTIGUE (1996), apresentamos a construção e análise a priori das atividades.

Na construção exporemos as escolhas globais, como o ambiente, o público alvo e o tema a ser pesquisado.

Em seguida, as escolhas locais, como a organização de uma sessão relacionada ao conteúdo didático a ser pesquisado, que é o caso desse trabalho.

A análise a priori tem como objetivo antecipar como as escolhas realizadas, globais ou locais, funcionarão didaticamente com alunos, prevendo os comportamentos, as estratégias e as dificuldades nas atividades propostas.

1. Justificativas das escolhas feitas.

No breve estudo histórico da geometria analítica, apresentado no capítulo II, observamos, em um primeiro momento, a importância do simbolismo algébrico; em um segundo momento, o surgimento das curvas algébricas e uma primeira classificação; e, no terceiro momento, as curvas transcendentes. Vimos também que as curvas planas são representadas por diversas equações e gráficos e que os seus lugares geométricos têm representações analíticas que podem ser expressas por uma única equação com no máximo duas variáveis (valores desconhecidos) e, nos demais casos, com parâmetros (valores conhecidos). Este último nos interessa como objeto de estudo por razões apresentadas nos capítulos I, II e III.

Eis algumas destas razões: observamos que, ao longo da história, o uso de parâmetros em equações para possíveis representações gráficas de curvas planas foi importante para o desenvolvimento da geometria analítica. A Proposta Curricular, os Parâmetros (PCNEM e PCNEM PLUS) e as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, em geral, norteiam os conteúdos apresentados nos livros didáticos e se limitam a recomendações para o estudo da reta e de algumas secções cônicas, como a circunferência. É por essa falta do estudo de outras curvas planas que se verifica a ausência da noção de parâmetro, pois, em equações de retas e de circunferências, os parâmetros são tratados como coeficientes literais, números conhecidos, mas não explicitados como parâmetros, a não ser no caso de equações paramétricas da reta.

Ferramentas facilitadoras, como o ambiente informático, são consideradas pelas propostas curriculares, porém o uso desses recursos anda a “passos de tartaruga”, assim como na história em que as curvas eram construídas com papel, lápis e instrumentos de medidas. Os recursos informáticos provavelmente facilitariam o estudo destas curvas planas e conseqüentemente se tornaria explícita a importância da noção de parâmetro.

2. Procedimentos metodológicos

Construímos uma seqüência de atividades que possibilita investigar se, em um ambiente informático, por meio de representações e interpretações gráficas, de maneira dinâmica e com o uso de parâmetros em equações, será permitido ao aluno visualizar algumas propriedades de curvas planas e, conseqüentemente, ter uma melhor compreensão da noção de parâmetro.

Em um primeiro momento, nas duas primeiras sessões, procuramos desenvolver atividades muito próximas das recomendadas pela Proposta Curricular, pelos PCNEM e as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio observadas, em particular, no livro de PAIVA (2003).

Em um segundo momento, elencamos, atividades que envolvem pontos genéricos, família de pontos, representação de curvas na forma paramétrica e cartesiana e curvas parametrizadas.

Nos encontros previstos em um ambiente informático, os alunos trabalharam em dupla, por entendermos que esta dinâmica produz diálogos, reflexões, troca de hipóteses e conclusões de forma espontânea.

A seqüência foi dividida em cinco sessões com duas aulas de 50 minutos de duração cada e com cinco duplas de alunos.

Em todas as sessões, os alunos tiveram como material de trabalho: régua, lápis, borracha e caneta. Nas três últimas sessões, as atividades foram desenvolvidas com o uso do computador, sendo um para cada dupla. No final de cada sessão, houve uma discussão entre os alunos e o professor sobre estratégias e soluções propostas pelos alunos e relatos de aplicação das atividades que descreveremos.

O aplicador da seqüência foi o próprio pesquisador e havia um observador, professor de matemática há nove anos e mestrando em Educação.

O público alvo desta investigação foram 10 alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública em Diadema no Estado de São Paulo. São alunos que estudam no período noturno, mas as sessões foram realizadas fora do horário de aula, aos sábados no período matutino.

Inicialmente, avisamos os alunos que se tratava de um projeto de pesquisa e que, ao término da realização da seqüência, receberiam, além da construção do *GIF* animado, todas as atividades desenvolvidas por eles em um CD, uma publicação dos *GIF*'s animados em uma página na Internet e um certificado de participação do projeto desta pesquisa.

Antes da experimentação, trabalhamos a familiarização do *software Winplot* com os alunos para o reconhecimento de um plano cartesiano, da localização de coordenadas no plano, equação reduzida da reta, coeficientes angular e linear, equações paramétricas e a retomada de alguns conceitos de funções importantes para o desenvolvimento das atividades da seqüência como as funções: afim e linear, quadrática, cúbica, exponencial e algumas trigonométricas, bem como a conversão de ângulos em graus para radianos.

Além disso, com o *software GIF Animator,* trabalhamos alguns *GIF`s* animados.

Nas duas primeiras sessões, as atividades foram desenvolvidas sem a interferência do ambiente informático.

Na primeira sessão, as atividades deveriam ser respondidas, como coleta de dados, em um formulário adequado com papel e lápis, como se estivessem em sala de aula, e eram focadas em ponto, reta e parábola.

Na segunda sessão, as atividades também foram planejadas para serem respondidas em papel e lápis, e retratavam as equações paramétricas da reta.

Na terceira sessão, as atividades foram desenvolvidas em um ambiente informático, com o uso do *software Winplot*, retomando-se algumas das atividades desenvolvidas nas sessões I e II, de maneira dinâmica com a construção de uma família de pontos da reta e da parábola.

Escolhemos o *software Winplot* por ser gratuito, de fácil manuseio e por não requerer computadores potentes.

As atividades evidenciavam família de pontos a um parâmetro e os pontos de vista paramétrico e cartesiano em gráficos de reta e parábola.

Na quarta sessão, as atividades também foram propostas em um ambiente informático, com o uso do *software Winplot, e* focadas na parametrização da reta e no estudo de outras curvas planas algébricas ou transcendentes.

Na quinta e última sessão, as atividades se dividiram em dois momentos. Primeiro com papel e lápis, sem o uso do ambiente informático, com o objetivo de desenvolver equações paramétricas a partir das coordenadas de alguns pontos e, em um segundo momento, visando a desenvolver animações gráficas de outras curvas planas para a construção de um *GIF* animado.

3. Apresentação e análise a *priori* da seqüência didática.

Apresentamos uma seqüência didática a ser aplicada, seguida da sua análise a *priori* de cada sessão, com o enunciado, os objetivos, a análise didática e matemática de cada uma das atividades que foram desenvolvidas, levando-se em conta os trabalhos de DUVAL (2003), DOUADY (1986), DIAS (1998) e BALACHEFF (1994) e os estudos históricos de algumas curvas planas.

<u>Sessão I: Gráficos de ponto, reta e parábola</u>

Nesta sessão, pretendemos realizar uma breve introdução da geometria analítica com os conceitos de ponto, reta e parábola.

Em nossa análise da Proposta Curricular e dos PCNEM, constatamos a recomendação do ensino da geometria analítica, como uma introdução a partir das representações de pontos, retas e parábolas no plano cartesiano, mas não se sugere como tal introdução deva ser desenvolvida e nem se apontam atividades neste caminho**.**

<u>Sessão I:</u>

Atividade 1:

a) Considere as coordenadas dos seguintes pontos A=(1;2), B=(2;3), C=(2;1), D=(-3;0) , E=(-4;-3). Sabe-se que 3 deles estão alinhados. Represente os pontos no plano cartesiano e justifique quais são estes 3 pontos que estão alinhados.
b) Existem outros pontos de coordenadas (x,y) que continuam alinhados com os três anteriores e possuem uma relação entre as variáveis *x* e *y* . Represente-os no plano cartesiano, apresentado anteriormente, e escreva pelo menos outros três pontos deste alinhamento.
c) Desta relação entre as variáveis x e y obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

Atividade 2:

a) Considere as coordenadas dos seguintes pontos A=(-2;4), B=(2;4), C=(-5;6), D=(3;9), E=(6;-5) e F=(-1,1). Sabe-se que 4 deles pertencem ao gráfico de uma parábola. Represente os pontos no plano cartesiano e justifique quais são estes 4 pontos que pertencem à parábola.
b) Existem outros pontos de coordenadas (x,y) que pertencem ao gráfico da parábola com os quatro pontos anteriores e possuem uma relação de dependência entre as variáveis *x* e *y*. Represente-os no plano cartesiano, apresentado anteriormente e escreva pelo menos outros três pontos desta parábola.
c) Desta relação entre as variáveis x e y obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

Análise didática:

Na elaboração das atividades 1 e 2 da sessão I, temos como prioridade os seguintes objetivos:

Investigar se a conversão entre os registros (linguagem natural, simbólica e gráfica) permite verificar se os alunos são capazes de entender e representar pontos por coordenadas (x,y) no plano cartesiano, encontrar gráficos de uma reta e uma parábola e representar a equação algébrica que valide a relação entre as variáveis x e y .

Estão em jogo, os seguintes quadros e conceitos:

Geometria analítica	Algébrico	Numérico	Funções
-ponto -reta -parábola -representações gráficas no plano.	-equações cartesianas; -escritas algébricas com variáveis, incógnitas e parâmetros.	-cálculo sobre coordenadas no plano (geometria analítica); -cálculo em equações cartesianas (algébrico).	-funções do 1º e 2º graus.

QUADRO 9 - Sessão I:quadros

No QUADRO 10, apresentamos as variáveis didáticas e os conhecimentos mobilizados nessa sessão.

Variáveis didáticas	Conhecimentos mobilizados
-Números inteiros; -Representação gráfica de ponto, reta e parábola; -Escrita algébrica de equações. -Propriedades de equações do 1º e 2º graus;-Leitura e interpretação gráfica; -Pontos alinhados; -Variável, incógnita e parâmetro.	-Operações com números inteiros; -Par ordenado associado a uma relação; -Cálculo e representação gráfica de ponto, reta e parábola. - Resolução de equações do 1º e 2ºgraus; - Plano cartesiano. - Funções do 1º e 2º graus.

QUADRO 10 – Sessão I: variáveis didáticas

Novos conhecimentos em jogo: equação algébrica cujas coordenadas de pontos no plano mantêm uma relação de dependência.

As atividades 1 e 2 foram preparadas para que os alunos procurassem realizar transformações de registros, conversão e tratamento, nas representações de ponto, reta e parábola.

(1a e 2a) Conversão entre registros: da linguagem natural para o gráfico.

Como pré-requisito, o entendimento de coordenadas cartesianas no plano já foi trabalhado no estudo de algumas funções, portanto, acreditamos que os alunos possam mobilizar esses conhecimentos prévios na resolução deste item.

(1b e 2b) Conversão do registro gráfico para a linguagem natural.

Observando no registro gráfico a representação de alguns pontos no plano, é possível que os alunos tracem uma reta e uma parábola e, por fim, consigam responder aos respectivos itens.

(1c e 2c) Conversão do registro gráfico para o simbólico.

Observando a representação gráfica da reta e da parábola e alguns de seus pontos, é realizado um tratamento que, por meio de cálculos, a partir de valores numéricos, encontra-se a equação cartesiana (representação simbólico-algébrica) conforme QUADRO 1: (DUVAL 2003, p.18).

Para encontrar as equações, espera-se que os alunos identifiquem no tratamento, por meio de cálculos, uma relação de dependência entre as variáveis x e y, atribuindo valores numéricos a estas variáveis.

No caso das equações da reta e parábola, espera-se a mobilização, pelo aluno, do tema função polinomial do 1º e 2º grau.

Ocorrerá, no final da sessão, institucionalização local do tratamento no registro gráfico, da conversão deste para o simbólico, por considerar que talvez nem todos os alunos consigam atingir tal objetivo, como mostraremos a seguir nas concepções inadequadas ou dificuldades esperadas dessas atividades.

1. Com relação à representação gráfica de pontos no plano cartesiano.

- Os alunos apresentam dificuldades na conversão da linguagem natural para o gráfico: o enunciado pode ser lido, mas não compreendido por eles. Neste momento o professor deve esclarecer as dúvidas do enunciado, sem, contudo, dar repostas passo a passo;

2. Sobre a conversão do registro gráfico para a linguagem natural.

- Há dificuldades na identificação gráfica dos pontos de uma reta ou parábola e, conseqüentemente, os alunos não apresentam outros pontos que pertencem à reta ou parábola.
- Há troca de ordem nas coordenadas de pontos representados no plano, como o valor da ordenada no lugar da abscissa e vice-versa.

3. Com relação à conversão do registro gráfico para o simbólico.

- Não é feito um tratamento no registro gráfico, pois, por meio de cálculos inadequados, atribuem valor a uma das variáveis e encontram valores falsos que não correspondem a outra variável, portanto não se encontra uma relação de dependência entre as variáveis x e y , representando-se uma equação que não corresponde à solução esperada.

A seguir, apresentamos uma análise matemática destas atividades.

Análise matemática:

Superadas as dificuldades ou erros mencionados, esperamos que os alunos possam responder às atividades, como descreveremos a seguir:

Questão 1a) Resposta esperada

Uma possível resposta é que se representem todos os cinco pontos do enunciado no plano cartesiano quadriculado. Em seguida, que se traçasse a reta que contém os pontos A,B e E pelo seu alinhamento, como na FIG. 53..

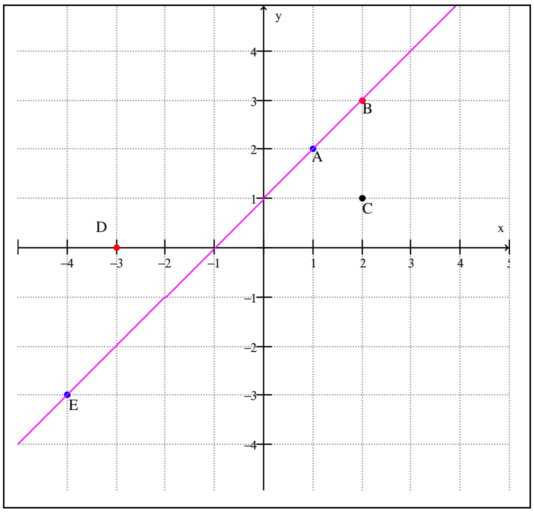


FIG. 53 – SessãoI: 1a

Talvez os alunos não tracem a reta, mas, sim, identifiquem o alinhamento dos pontos pela facilidade da malha ser quadriculada e os valores das coordenadas serem números inteiros.

Questão 2a) Resposta esperada

Aqui, o ideal é que os alunos representem os seis pontos no plano, FIG. 54, em seguida identifiquem e tracem a parábola que contém quatro dos pontos apresentados. São eles: A, B, D e F.

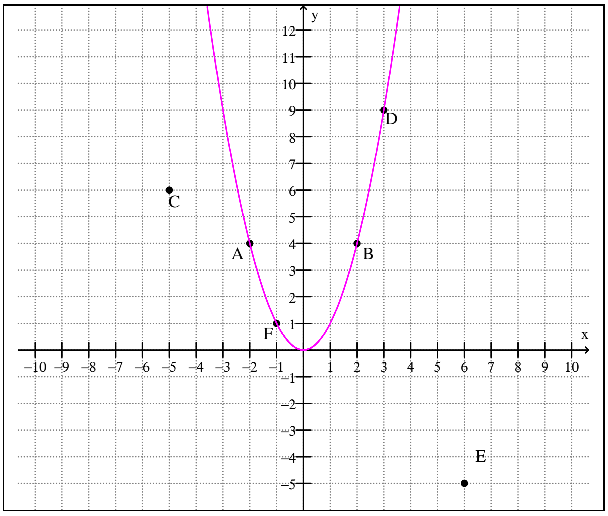


FIG. 54 – SessãoI: 2a

Talvez os alunos não tracem a parábola, mas identifiquem os pontos no registro simbólico, por meio da equação, antecipando a questão 2c.

Questão 1b) Resposta esperada

Entre diversas respostas, uma das possíveis é a marcação de três pontos estratégicos sobre o gráfico da reta e identificação desses pontos por meio de suas coordenadas.

Estes pontos devem ser representados, de preferência, com coordenadas de números inteiros, como os pontos F, G e H representados na FIG. 55.

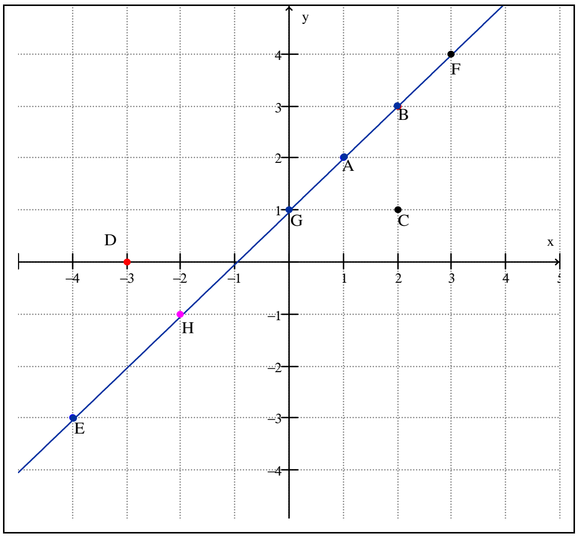


FIG. 55 – SessãoI: 1b

Novamente pode ocorrer de se encontrarem os pontos, sem a referência da reta, utilizando as intersecções dos quadriculados representados no plano.

Questão 2b) Resposta esperada

Entre diversas respostas, uma das possíveis é a marcação de pelo menos outros três pontos, estratégicos, sobre o gráfico da parábola e identificação desses pontos por meio de suas coordenadas, que devem ser representados de preferência com coordenadas de números inteiros como os pontos G, H e I representados na FIG. 56.

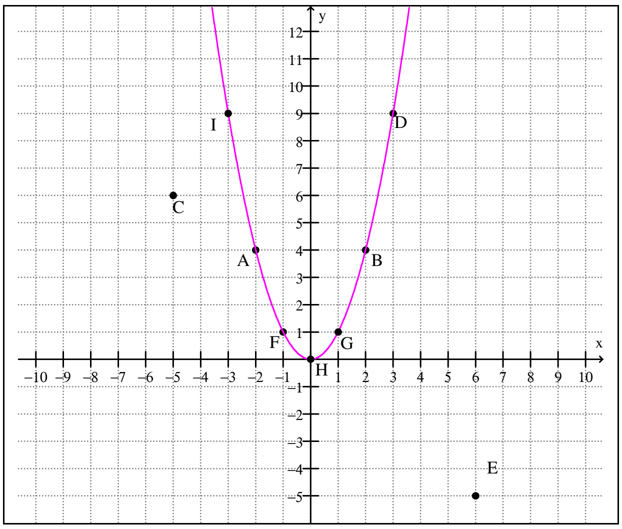


FIG. 56 – SessãoI: 2b

Os pontos G e H, assim como outros também, são estratégicos por serem simétricos, respectivamente, aos pontos F e D da parábola.

E o vértice da parábola no ponto H(0;0).

Questão 1c) Resposta esperada

Uma das possíveis soluções para a questão é observar a representação gráfica da reta, FIG. 55, e de alguns de seus pontos, e realizar uma conversão que, por meio de cálculos a partir de valores numéricos, leve a encontrar a equação cartesiana da reta (registro simbólico).

Cálculos:

$$f(x) = ax + b \text{ ou } y = ax + b$$
$$A \in f \rightarrow 2 = a.1 + b \rightarrow 2 - a = b(\text{I})$$
$$B \in f \rightarrow 3 = a.2 + b \rightarrow 3 - 2a = b(\text{II})$$
$$E \in f \rightarrow -4 = a.(-3) + b$$

$$\text{Substituindo} - \text{se (I)em(II), temos:}$$
$$3 - 2a = 2 - a \rightarrow -1a = -1 \rightarrow a = 1$$
$$\text{Substituindo} - \text{se } a = 1 \text{ em (I), temos:}$$
$$2 - 1 = b \rightarrow b = 1$$
$$\text{Logo:}$$
$$y = 1x + 1$$

Outra solução seria como segue:

A(1;2) , B(2;3) e E(-4;-3)

A: 1+1=2

B: 2+1=3

E: $-4 + 1 = -3$

Generalizando-se para qualquer ponto, temos:

$x + 1 = y$

Questão 2c) Resposta esperada

Como na questão 1c, observando a representação gráfica da parábola, FIG. 56, e de alguns de seus pontos, realiza-se um tratamento que, por meio de cálculos a partir de valores numéricos, leve a encontrar a equação cartesiana da parábola (representação simbólico-algébrica).

Cálculos:

$$
\begin{aligned}
&g(x) = ax^2 + bx + c \text{ ou } y = ax^2 + bx + c\\
&I \in g \to 0 = a.0^2 + b.0 + c \to c = 0 \text{ (I)}\\
&G \in g \to 1 = a.1^2 + b.1 + c \to a + b + c = 1 \text{ (II)}\\
&F \in g \to 1 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \to a - b + c = 1 \text{ (III)}\\
&\text{Substituindo} - \text{se (I) em (II) e (III), temos:}\\
&a + b + 0 = 1 \to a + b = 1 \to a = 1 - b \text{ (IV)}\\
&a - b + 0 = 1 \to a - b = 1 \to a = 1 + b \text{ (V)}\\
&\text{Substituindo} - \text{se (IV) em (V), temos:}\\
&1 - b = 1 + b \to -2b = 0 \to b = 0 \text{ (VI)}\\
&\text{Substiruindo} - \text{se (VI) em (IV), temos:}\\
&a + 0 = 1 \to a = 1\\
&\text{Logo:}\\
&y = 1x^2 + 0x + 0 \to y = x^2
\end{aligned}
$$

Outra solução seria usar pontos com valores inteiros em suas coordenadas e de preferência simétricos:

$I(0;0)$, $B(1;1)$, $F(-1;1)$, $D(3,9)$ e $H(-3;9)$

A: $0.0 = 0$

B: $1.1 = 1$

E: $(-1).(-1) = 1$

$D: 3.3 = 9$

$H: (-3).(-3) = 9$

Generalizando-se para qualquer ponto, temos

$x.x = y \to x^2 = y$

<u>Atividade 3:</u>

a) Considerando o gráfico da reta apresentado abaixo e os pontos de coordenadas (x,y) que pertencem à reta, escreva pelo menos cinco pontos desta reta.

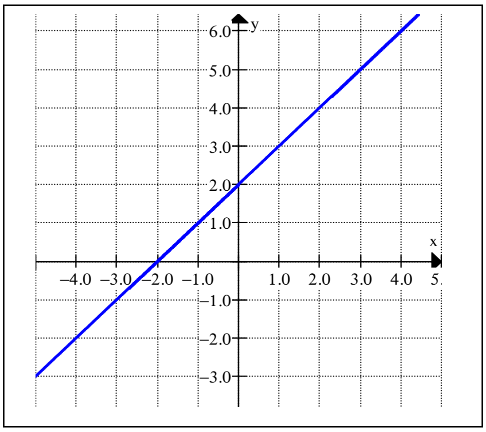


FIG. 57 – SessãoI: 3a

b) Deste gráfico e da relação de dependência entre as coordenadas dos pontos que pertencem à reta, obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

c) Considerando o gráfico da parábola apresentado abaixo e os pontos de coordenadas (x,y) que pertencem a ela, escreva pelo menos cinco pontos desta parábola.

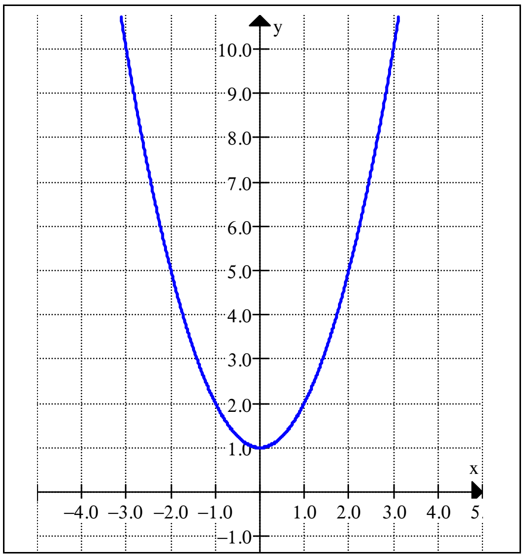


FIG. 58 – SessãoI: 3c

d) Deste gráfico e da relação de dependência entre as coordenadas destes pontos que pertencem à parábola, obtém-se uma equação algébrica. Escreva abaixo esta equação. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo a equação.

Análise matemática:

Na elaboração da atividade 3, temos como prioridade investigar se a conversão entre os registros gráfico e simbólico permite verificar se os alunos serão capazes de representar pontos por coordenadas (x,y) no plano cartesiano a partir de gráficos de reta e parábola, e apresentar a equação algébrica que valide a relação entre as variáveis x e y.

Nosso principal objetivo é observar se a atividade anterior, em consonância com a atividade 3, permite aos alunos realizarem com certa facilidade a conversão entre os registros gráfico e simbólico.

3a e 3c) Tratamento no registro gráfico.

Observando no registro gráfico a representação da reta e parábola, o objetivo é que os alunos representem pelo menos cinco pontos que pertencem aos gráficos e respondam à questão proposta com certa facilidade.

3b e 3 d) Conversão entre os registros do gráfico para o simbólico.

Idem às atividades 1c e 2c.

Possíveis concepções inadequadas ou dificuldades esperadas nessas atividades.

1.Com relação à representação gráfica de pontos no plano cartesiano.

- Apresentam dificuldades no tratamento do registro gráfico, trocando a ordem da abscissa e ordenada.

2. Sobre a conversão do registro gráfico para o simbólico

- Não é feito um tratamento no registro gráfico que, por meio de cálculos inadequados, atribuem valor a uma das variáveis e encontram valores falsos que correspondem à outra variável. Portanto, não se encontra uma relação de dependência entre as variáveis x e y , pois representam uma equação que não corresponde à solução esperada ou simplesmente não respondem às questões.

Superadas as dificuldades ou erros mencionados, esperamos que os alunos possam responder as atividades como descreveremos a seguir:

Questões 3a e 3c) Resposta esperada.

Entre diversas respostas para 3a, uma das possíveis é a marcação de cinco pontos, estratégicos, sobre o gráfico da reta e da parábola e identificação desses pontos por meio de suas coordenadas.

Pontos representados, de preferência com coordenadas de números inteiros, como os pontos A, B, C, D e E mostrados na FIG. 59.

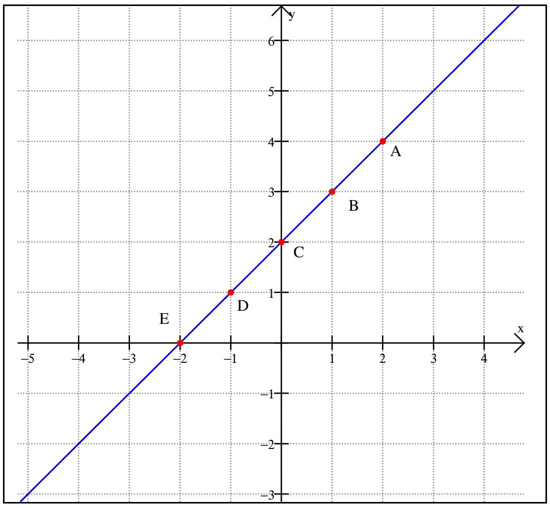


FIG. 59 – SessãoI: 3a

Para 3b, pontos representados de preferência com coordenadas de números inteiros e simétricos, como os pontos A. B, C, D e E mostrados na FIG.60.

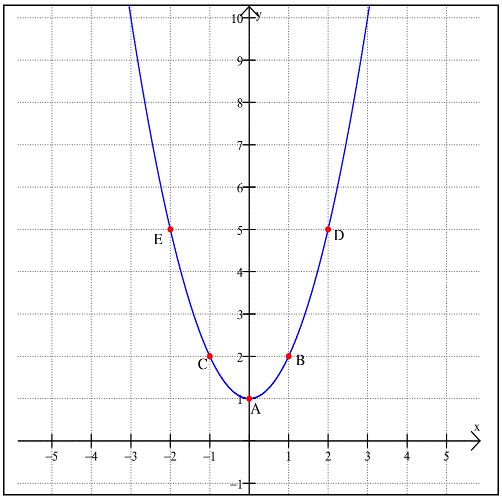


FIG. 60 – SessãoI:3c

Questões 3b e 3 d) Resposta esperada.

Uma das possíveis estratégias para a solução dessas questões são as observações das representações gráficas da reta e da parábola e de alguns de seus pontos. Realiza-se um tratamento no registro simbólico em que, por meio de cálculos, a partir de valores numéricos, encontram-se as respectivas equações cartesianas.

Cálculos para 3b:

$$\begin{array}{l} f(x) = ax + b \text{ ou } y = ax + b \\ A \in f \rightarrow 4 = a.2 + b \rightarrow 4 - 2a = b(I) \\ B \in f \rightarrow 3 = a.1 + b \rightarrow 3 - a = b(II) \\ \text{Substituindo} - \text{se (I)em(II), temos:} \\ 3 - a = 4 - 2a \rightarrow 1a = 1 \\ \text{Substituindo} - \text{se } a = 1 \text{ em (I), temos:} \\ 4 - 2(1) = b \rightarrow b = 2 \\ \text{Logo:} \\ y = 1x + 2 \end{array}$$

Outra possível solução seria:

A(2;4) , B(1;3) e C(0;2)

A: $2+2=4$

B: $1+2=3$

C: $0+2=2$

Generalizando-se para qualquer ponto, temos:

$x+2=y$

Cálculos para 3 d:

$$g(x)=ax^2+bx+c \text{ ou } y=ax^2+bx+c$$

$$A\in g \to 1=a.0^2+b.0+c \to c=1(I)$$

$$B\in g \to 2=a.1^2+b.1+c \to a+b+c=2(II)$$

$$D\in g \to 5=a.(2)^2+b.(2)+c \to 4a+2b+c=5(III)$$

Substituindo – se (I)em(II) e (III), temos :

$$a+b+1=2 \to a+b=1 \to a=1-b(IV)$$

$$4a+2b+1=5 \to 4a+2b=4(V)$$

Substituindo – se (IV)em(V), temos :

$$4(1-b)+2b=4 \to 4-4b+2b=4 \to -2b=0 \to b=0(VI)$$

Substituindo – se (VI)em(IV), temos :

$$a=1-0 \to a=1$$

Logo :

$$y=1x^2+0x+1 \to y=x^2+1$$

Sessão II: As equações paramétricas da reta

Nesta sessão, pretendemos realizar uma introdução das equações paramétricas da reta. Na análise da Proposta, dos Parâmetros (PCNEM e PCNEM PLUS) e das Orientações Curriculares, observamos que, de um modo geral, recomendam, implicitamente, em geometria analítica, a importância das transformações (conversões e tratamentos) em registros semióticos (linguagem natural, simbólico e gráfico) e os pontos de vista cartesiano e paramétrico.

Atividade 1:

Seja o seguinte problema: Roberta e Alexandre estão participando de um jogo semelhante a uma batalha naval. Os dois jogadores estão localizados na mesma planilha, representados pelos pontos A (Alexandre) e R (Roberta). Ambos têm como objetivo, com um míssel cada, atingir o submarino “S”.

A planilha cobre uma área de 400 km^2 e mostra uma espécie de mapa cartesiano da região: a imagem que aparece na tela é uma janela de [-10,10] por [-10,10], conforme mostra o esquema abaixo.

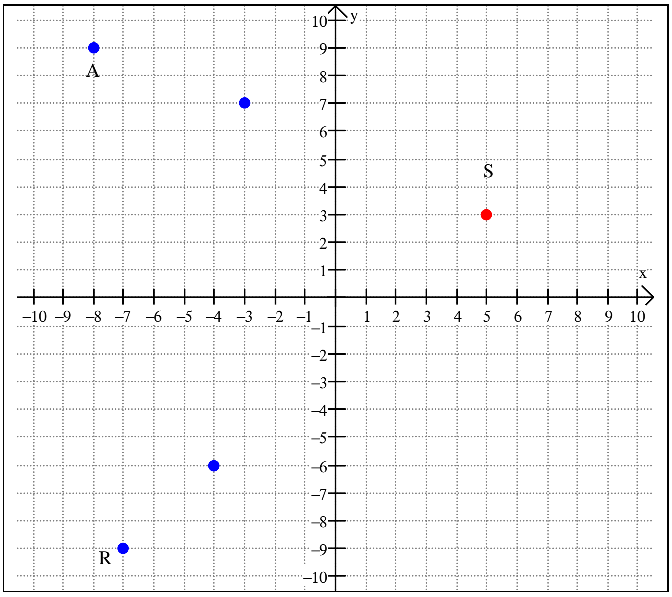


FIG. 61 – Sessão II: equações paramétricas

	Coordenadas em t=0	Coordenadas em t=1
Míssel A	(-8; 9)	(-3;7)
Míssel R	(-7;-9)	(-4;-6)

TAB.5 – Sessão II:atividade 1

Explorando os dados fornecidos nesta tabela e no gráfico, a seguir responda:

a) Quem realmente consegue atingir o alvo, no caso o submarino “S”? Justifique.

b) A tabela abaixo mostra as coordenadas x e y do míssel A, em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o míssel se desloca com velocidade constante, complete esta tabela.

t	x	y
0	-8	9
1	-3	7
2		
3		
4		
5		

TAB. 6 – Sessão II:atividade 1

c) Use a tabela obtida no item anterior, para expressar a coordenada x do míssel "A" em função do tempo t. Faça o mesmo para a coordenada y.

d) Use as equações obtidas no item anterior e responda qual a posição (coordenadas) do míssel "A", decorridos 2 minutos após o início do lançamento?

e) A tabela abaixo mostra as coordenadas x e y do míssel "R", em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o míssel se desloca com velocidade constante, complete esta tabela.

t	x	y
0	-7	-9
1	-4	-6
2		
3		
4		
5		

TAB.7 – Sessão II:atividade 1

f) Use a tabela obtida no item anterior, para expressar a coordenada x do míssel "R" em função do tempo t. Faça o mesmo para a coordenada y.

g) Use as equações obtidas no item anterior e responda qual a posição (coordenadas) do míssel "R", decorridos 2 minutos após o início do lançamento?

h) É necessário que Alexandre ou Roberta alterem a rota de algum dos mísseis para que o submarino seja atingido? Justifique.

i) Alexandre ou Roberta atingiu o submarino? Se afirmativo, quantos minutos foram necessários?

Análise didática:

Visando a uma articulação entre os pontos de vista e as transformações de registros semióticos na seqüência, propomos, a partir das representações de pontos e retas, uma introdução às equações paramétricas da reta na resolução de uma atividade.

Temos como principal objetivo investigar se as articulações entre o ponto de vista paramétrico e as transformações em registros semióticos facilitam o entendimento da noção de parâmetro e o seu uso em equações paramétricas.

Sobre as transformações em registros semióticos procuramos analisar em bloco:

Transformação	**Itens da atividade**
Conversão da linguagem natural para o gráfico	1a.
Conversão do registro gráfico para a linguagem natural	1a;1h
Tratamento no registro simbólico	1a;1b;1c;1d;1e;1f;1g;1h;1i.

QUADRO 11 - Sessão II: transformações

Para encontrar as equações paramétricas da reta, como representação simbólico-algébrica, espera-se que os alunos identifiquem no tratamento, por meio de cálculos, uma relação de dependência entre as variáveis x e y, nos inteiros, e o parâmetro t, nos naturais, atribuindo valores numéricos a estas variáveis.

Espera-se que as atividades anteriormente realizadas auxiliem o aluno no entendimento da mudança de ponto de vista do cartesiano para o paramétrico e no desenvolvimento das equações paramétricas.

Estão em jogo os seguintes quadros e conceitos:

Geometria analítica	Algébrico	Numérico	Funções
-ponto -reta -representações gráficas no plano; -representação paramétrica da reta.	-equações paramétricas; -escritas algébricas com variáveis, incógnitas e parâmetros.	-cálculo sobre coordenadas no plano (geometria analítica); -cálculo em equações paramétricas (algébrico).	-função polinomial do 1º grau.

QUADRO 12 - Sessão II:quadros

No quadro a seguir, apresentamos as variáveis didáticas e os conhecimentos mobilizados nessa sessão.

Variáveis didáticas	Conhecimentos mobilizados
-Números inteiros; -Representação gráfica de ponto, reta; -Escrita algébrica de equações;-Propriedades das equações paramétricas; -Leitura e interpretação gráfica; -Alinhamento de pontos sobre uma reta; -Representação paramétrica da reta; -Variável, incógnita e parâmetro.	-Operações com números inteiros;-Par ordenado associado a uma relação; -Cálculo e representação gráfica de ponto e reta no plano; -Resolução de equações do 1º e 2º graus; -Funções polinomiais do 1º e 2º grau -Equações paramétricas.

QUADRO 13 – Sessão II: variáveis didáticas

Novos conhecimentos em jogo: representação gráfica de reta na forma paramétrica e cálculo das coordenadas de pontos em função de um parâmetro.

Ocorrerá, no final da sessão, institucionalização local do tratamento no registro simbólico, por considerar que talvez nem todos os alunos consigam atingir tal objetivo, como mostraremos a seguir nas concepções inadequadas ou dificuldades esperadas dessas atividades.

1. Com relação à representação gráfica de reta no plano cartesiano.

- Os alunos apresentam dificuldades na conversão da linguagem natural para o gráfico: o enunciado pode ser lido, mas não compreendido pelos alunos. Neste momento, o professor deve esclarecer as dúvidas do enunciado, sem, contudo, dar repostas passo a passo;

2. Sobre a conversão do registro gráfico para a linguagem natural.

- Há dificuldade na identificação gráfica de uma reta a partir de dois pontos, conseqüentemente, não se justificam as questões 1a e 1h.

- Ocorre troca de ordem nas coordenadas de pontos representados no plano, como o valor da ordenada no lugar da abscissa e vice-versa.

3. O tratamento no registro simbólico.

- Não é feito um tratamento no registro simbólico que, por meio de cálculos inadequados, faz com que os alunos atribuam valor a uma das variáveis e encontrem valores falsos que correspondem à outra variável. Portanto não se encontram as equações paramétricas adequadas em função do parâmetro t, representando equações que não correspondem à solução esperada.

- Os alunos não conseguem representar equações paramétricas a partir das coordenadas de dois pontos.

A seguir, apresentamos uma análise matemática destas atividades.

Superadas as dificuldades ou erros mencionados, esperamos que os alunos possam responder às atividades como descreveremos a seguir:

Questão 1a) Resposta esperada

Uma possível resposta é que se tracem gráficos de retas obtidas a partir do alinhamento dos pontos A e S, em seguida, R e S. É improvável que, neste momento, utilizem-se de propriedades como o cálculo do coeficiente angular como condição de alinhamento de três pontos para justificar a questão, pois não têm este conceito institucionalizado. Esperamos uma justificativa por meio da interpretação gráfica da reta.

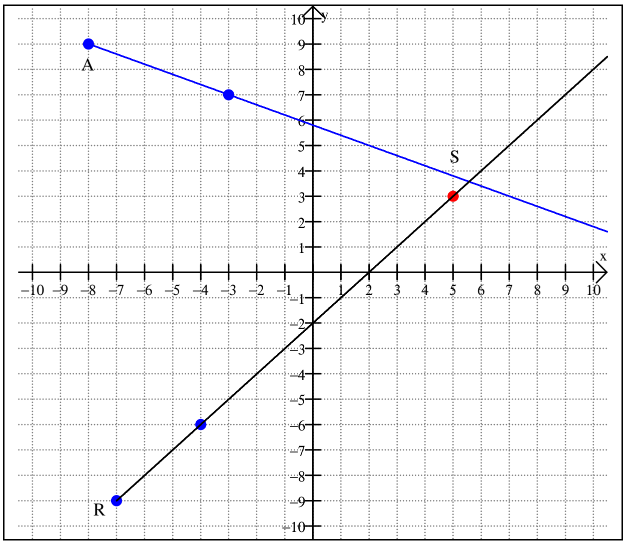


FIG.62 – SessãoII: 1a

Talvez os alunos não tracem retas, mas as semi-retas com início no ponto A, passando pelas coordenadas (-3;7) e identifiquem que não contém o ponto S. Portanto Alexandre não atinge o objetivo. Enquanto que a semi-reta com início em R, passando pelas coordenadas (-4;-6), contém o ponto S, ou seja, Roberta, com o seu míssel, atinge o objetivo.

Questão 1b e 1e) Resposta esperada

Uma reposta esperada é que consigam completar a tabela sem muita dificuldade, bastando para isso, desenvolver alguns cálculos aritméticos.

Provavelmente para os cálculos das variáveis x e y em função do parâmetro t, os alunos calculem a diferença entre as variáveis para t=1 e t=0. Por exemplo, na questão 1b:

Observando que:

$\text{para } t = 0 \rightarrow x_0 = -8$

$\text{para } t = 1 \rightarrow x_1 = -3$

$\text{e para } t = 2 \rightarrow x_2 = 2$

A diferença, entre x_{t+1} e x_t é constante, portanto:

$p/t = 0 : x_1 - x_0 = -3 - (-8) = -3 + 8 = 5$

$p/t = 1 : x_2 - x_1 = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$

$\text{Logo} : x_3 - 2 = 5 \rightarrow x_3 = 5 + 2 \rightarrow x_3 = 7$

E assim sucessivamente.

Para y temos:

para $t = 0 \rightarrow y_0 = 9$

para $t = 1 \rightarrow y_1 = 7$

A diferença, entre y_{t+1} e y_t é constante, portanto:

$p/t = 0 : y_1 - y_0 = 7 - 9 = -2$

$p/t = 1 : y_2 - y_1 = -2$

$\text{Logo} : y_2 - 7 = -2 \rightarrow y_2 = 7 - 2 \rightarrow y_2 = 5$

E assim sucessivamente.

Os mesmos procedimentos de cálculos são realizados para completarem a tabela da questão 1e, conforme TAB.8.

1b) "A"

t	x	y
0	-8	9
1	-3	7
2	2	5
3	7	3
4	12	1
5	17	-1

1e) "R"

t	x	y
0	-7	-9
1	-4	-6
2	-1	-3
3	2	0
4	5	3
5	8	6

TAB. 8 - Sessão II: atividade 1b

Questão 1c e 1f) Resposta esperada

Nessas questões espera-se que os alunos consigam desenvolver as equações paramétricas, desde que as questões 1b e 1e tenham sido bem sucedidas.

Equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_t + (x_{t+1} - x_t)t \\ y = y_t + (y_{t+1} - y_t)t \end{cases} (I)$$

Questão1c:

quando $t = 0 \rightarrow (x_0; y_0) = (-8; 9)$

quando $t = 1 \rightarrow (x_1; y_1) = (-3; 7)$

Substituindo-se em (I) temos:

$x = -8 + (-3 - (-8))t \rightarrow x = -8 + 5t$

$y = 9 + (7 - 9)t \rightarrow y = 9 - 2t$

Questão 1f:

quando $t = 0 \rightarrow (x_0; y_0) = (-7; -9)$
quando $t = 1 \rightarrow (x_1; y_1) = (-4; -6)$
Substituindo-se em (I) temos:
$x = -7 + (-4 - (-7))t \rightarrow x = -7 + 3t$
$y = -9 + (-6 - (-9))t \rightarrow y = -9 + 3t$

Questão 1 d e 1g) Resposta esperada

Espera-se que os alunos consigam, satisfatoriamente, desenvolver cálculos a partir das equações paramétricas obtidas anteriormente, portanto dependem das atividades anteriores.

Questão 1 d:

Posição do míssel "A" após 2 minutos?

Por 1c, sabemos que:
$$\begin{cases} x = -8 + 5t \\ y = 9 - 2t \end{cases}$$
Para $t = 2$, temos:
$x = -8 + 5.2 \rightarrow x = -8 + 10 \rightarrow x = 2$
$y = 9 - 2.2 \rightarrow y = 9 - 4 \rightarrow y = 5$
Logo: a posição do míssel 2 minutos após o lançamento é (2;5).

Questão 1g:

Posição do míssel "R" após 2 minutos?

Por 1f, sabemos que:

Por 1f, sabemos que:
$$\begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = -9 + 3t \end{cases}$$
Para $t = 2$, temos:
$x = -7 + 3.2 \rightarrow x = -7 + 6 \rightarrow x = -1$
$y = -9 + 3.2 \rightarrow y = -9 + 6 \rightarrow y = -3$
Logo: a posição do míssel "R" 2 minutos após o lançamento é (-1;-3).

Ou podem resolver o problema observando as tabelas preenchidas nas questões 1b e 1e que, estando corretas, facilitarão a identificação das posições (2;5) e (-1;-3).

Questão 1h) Resposta esperada

Para essa questão, espera-se que se responda com certa facilidade, caso tenham tido sucesso na questão 1a, apenas observando que a reta (ou semi-reta) traçada corresponde à trajetória do míssel de Alexandre e não contém o ponto S, ponto de referência da localização do submarino.

Outra solução seria realizando cálculos da diferença entre as coordenadas x (Δx) e da diferença entre as coordenadas y (Δy) da posição inicial de Alexandre e do míssel e identificando que não correspondem as constantes apresentadas na questão 1b.

Como apresentamos:

Posição inicial do míssel "A" de Alexandre: $t = 0$.
Posição do submarino "S", alvo de "A": $t = k$.
para $t = 0$ (instante inicial) $\rightarrow (x_0; y_0) = (-8;9)$
para $t = k$ (instante final) $\rightarrow (x_k; y_k) = (5;3)$
$\Delta x = x_k - x_0 \rightarrow \Delta x = 5 - (-8) = 13 \neq 5$ (1b)
$\Delta y = y_k - y_0 \rightarrow \Delta y = 3 - 9 = -6 \neq -2$(1b)

Logo o míssel de Alexandre não atinge o alvo, sendo necessário alterar a sua rota.

Com os mesmos procedimentos de cálculos, verifica-se o sucesso de Roberta ou, nesse caso, apenas observando os valores obtidos, na questão 1e, das variáveis x e y, já se encontram as coordenadas (5;3) que correspondem ao alvo do submarino. Portanto Roberta não precisa alterar a rota.

Questão 1i) Resposta esperada

Se observarem os valores da tabela, caso estejam corretos, será fácil identificar que Roberta atingiu o submarino, conforme questão anterior, quando $t = 4$, portanto foram necessários quatro minutos.

Outra possível resposta é a substituição dos valores das coordenadas do submarino nas equações paramétricas, obtidas em 1f do míssel "R" e encontrar o valor t.

$$x = -7 + 3t$$
$$\text{Substituindo-se } x = 5 \text{ e } y = 3, \text{temos}:$$
$$5 = -7 + 3t \rightarrow 12 = 3t \rightarrow t = 4$$

Bastando encontrar **t** em uma das equações.

<u>Sessão III: Família de pontos a um parâmetro e gráficos de reta e parábola</u>.

Nesta sessão, as atividades foram desenvolvidas para um ambiente informático com o uso do *software Winplot*, retomando-se algumas das atividades desenvolvidas nas sessões I e II, mas agora os alunos constroem de maneira dinâmica uma família de pontos da reta e da parábola.

Com o uso do computador nas atividades da seqüência procuramos fugir do papel, lousa e giz, visando a animações gráficas de pontos e curvas. Queremos observar se o computador, como ferramenta facilitadora, permite uma melhor compreensão da noção de parâmetro no estudo de pontos, curvas e suas propriedades geométricas no plano.

Nas atividades, como na história, procuramos identificar o parâmetro em equações como uma variável real conhecida (quantidade conhecida) enquanto nas demais variáveis reais como desconhecidas (quantidades desconhecidas).

A incógnita se enquadra em uma quantidade desconhecida, por exemplo, na equação $y = x + 1$ da questão 1e, quando $x = 2$, substitui-se a quantidade desconhecida *x* por 2, a variável *y* passa a ser uma incógnita, $y = 2 + 1$, e nosso valor desconhecido é 3, representando as coordenadas do ponto $A = (2;3)$ no plano.

Atividades

Atividade 1:

1a) Represente os pontos A=(1;2), B=(2;3), C=(2;1), D=(-3;0) , E=(-4;-3) no plano cartesiano do *software Winplot*. Sabendo-se que 3 deles estão alinhados, quais são estes 3 pontos?

1b) Represente o ponto F=(t;1+t) no *Winplot*. Observe que ao clicar "ok" temos o ponto F=(0;1). Que valor assumiu o parâmetro "t"?

1c) Faça variações nos valores de "t" e, em seguida, determine:

C1) Qual o valor de "t" para obter o ponto B?

C2) Qual o valor de "t" para obter o ponto E?

1d) Mantendo os pontos representados anteriormente no *Winplot*, represente o ponto G=(3+a;4+a) e clique em "família". Na nova janela, faça as seguintes opções "a", mínimo= - 7, máximo=0, passos=10, retraso=10. Clique em "olhar" e "definir", observe os pontos representados na tela e em seguida aumente os passos para 100 e retraso para 100 e clique em "definir". Descreva o que você observa:

1e) Observando os pontos da atividade 1, escreva uma equação paramétrica ((x;y)=(f(t);g(t)) ou cartesiana (y=f(x)) da reta que contenha três destes pontos.

1f) Utilizando o *Winplot,* verifique se sua resposta está correta.

Sim ( ) ou não ( )? Caso não, procure reescrever a equação da reta que contenha pelo menos três dos pontos do item a.

Salve como "ativ1G..." seguido do número do grupo.

Atividade 2:

2a) Represente no *Winplot* os pontos A=(-2;4), B=(1;3), C=(3;9), D=(-5;6), E=(-2;-5) e F=(-1,1). Sabe-se que 3 deles pertencem ao gráfico de uma parábola. Represente o ponto G=$(a;a^2)$. Observe que ao clicar "ok" temos o ponto G=(0;0). Faça variações alterando o valor de "a". Observe os pontos obtidos e escreva os três pontos que pertencem à parábola.

2b) Utilizando o ponto G=$(a;a^2)$ represente uma família de pontos que pertence à parábola. Descreva o que você observa:

2c) Represente a parábola desta atividade 2 na forma de equação paramétrica ou equação cartesiana.

2d) Utilizando o *Winplot*, verifique se sua resposta está correta.

Sim ( ) ou não ( )? Caso não, procure reescrever a equação da parábola que contenha pelo menos três dos pontos do item a.

Salve como "ativ2G..." seguido do número do grupo.

Atividade 3:

3a) Escreva a equação na forma "paramétrica" x= t e y= 1+t, "t mín" **0** e "t máx" **3.** Observe o gráfico representado por esta equação. O que representa este gráfico? Quais as coordenadas dos pontos extremos (início e final) do gráfico representado?

3b) Acrescente um novo parâmetro "k" à equação paramétrica anterior obtendo x=kt e y=1+kt,. Observe que o gráfico desapareceu. Faça variações determinando quais devem ser os valores do parâmetro k para obter os instantes inicial e final da atividade anterior. Salve como "ativ3aG..." seguido do número do grupo.

3c) Escreva a equação do item **a** na forma cartesiana, com $0<x<3$.

<u>Análise didática:</u>

Na elaboração das atividades da sessão III, temos como prioridade os seguintes objetivos:

Investigar se a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e as conversões entre os registros de representação da linguagem *Winplot*, simbólico-algébrica e gráfica, em um ambiente informático, possibilitam ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas da reta e da parábola e as suas equações cartesianas ou paramétricas.

Este objetivo não se limita apenas à simples visualização de seus gráficos representados na tela do *Winplot*, mas estende-se à relação mútua entre diferentes gráficos e equações representando um mesmo objeto matemático, como ponto, reta e parábola observadas em pontos de vista distintos.

Utilizar o *Winplot* facilita o trabalho, pois o aluno não precisa fazer diversos cálculos e pode repetir diversas vezes a mesma atividade, dando uma resposta articulada com as diferentes atividades desenvolvidas.

Queremos verificar ainda se os alunos tentam fazer alguma relação das atividades feitas no papel e lápis das sessões I e II com o computador.

Sobre a conversão entre os registros de representação, como são diversos itens, vamos analisar em blocos:

Transformação	**Itens da atividade**
Conversão do registro de representação da simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.	1a; 1b;1c;1d;1f;2a; 2b;2d; 3a e 3b.
Conversão do gráfico para o simbólico	1e; 2c;3c

QUADRO 14 - sessão III:conversão entre registros

Espera-se que as atividades já realizadas auxiliem o aluno no entendimento da mudança de ponto de vista, do cartesiano para o paramétrico, e no desenvolvimento das equações paramétricas e cartesianas.

Nas atividades, estão em jogo os seguintes quadros e conceitos:

Geometria analítica	Algébrico	Numérico	Funções
-ponto -reta -representações gráficas no plano; -representações paramétricas e cartesianas de ponto reta e parábola; -pontos e curvas planas parametrizadas; -famílias de pontos como um lugar geométrico.	-equações cartesianas e paramétricas; -escritas algébricas com variáveis, incógnitas e parâmetros.	-cálculo sobre coordenadas no plano (geometria analítica); -cálculo em equações paramétricas e cartesianas (algébrico).	-função polinomial do 1º e 2º grau.

QUADRO 15 - sessão III: quadros

No quadro a seguir, apresentamos as variáveis didáticas e os conhecimentos mobilizados nessa sessão.

Variáveis didáticas	Conhecimentos mobilizados
-Números reais; -Representação gráfica de ponto, reta e parábola. -Escrita algébrica de equações; -Propriedades das equações paramétricas; -Leitura e interpretação gráfica; -Família de pontos de reta e parábola a um parâmetro; -Representação paramétrica e cartesiana da reta; -Variável, incógnita e parâmetro. -*Winplot*	-Operações com números reais; -Par ordenado associado a uma relação; -Cálculo e representação gráfica de ponto, reta e parábola no plano; -Resolução de equações do 1º e 2º graus; -Funções do 1º e 2º graus. -Equações cartesianas e paramétricas da reta e parábola.

QUADRO 16 – Sessão III: variáveis didáticas

Novos conhecimentos em jogo: família de pontos a um parâmetro e lugar geométrico de uma reta ou parábola.

Ocorrerá, no final da sessão, uma institucionalização local das conversões entre os registro simbólico e gráfico, por considerar que ainda persistem dificuldades ou concepções inadequadas entre as representações de ponto, reta e parábola em pontos de vista distintos, como o paramétrico ou cartesiano.

1. Com relação à conversão da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.

- Os alunos apresentam dificuldades na conversão do registro de representação da linguagem *Winplot* para a gráfica: a variação nos valores do parâmetro da equação não é reconhecida no *software Winplot*.

- Ocorre dificuldade na representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot*: a escrita algébrica pode ser lida, mas não compreendida pelos alunos. O professor deve procurar esclarecer as dúvidas.

- Há dificuldades técnicas como: teclado com defeito ou problemas no *software* que não permitem o tratamento. O professor deve auxiliar procurando solucionar o problema técnico.

- Há também dificuldade em reescrever uma equação da reta ou da parábola, dados alguns de seus pontos (1f e 2d);

2. Da conversão do registro gráfico para o simbólico.

- Não é realizado um tratamento no registro gráfico que, por meio de cálculos inadequados, atribue valor a uma das variáveis e encontra valores falsos que não correspondem à outra variável. Portanto, com as coordenadas de alguns pontos da reta, de preferência com números inteiros, não se encontra uma relação de dependência entre as variáveis x e y. Como conseqüências, representam uma equação que não corresponde à solução esperada ou não respondem à questão (1e; 2c; 3c).

A seguir, apresentamos uma análise matemática destas atividades.

Análise matemática

Superadas as dificuldades ou concepções inadequadas mencionadas, esperamos que os alunos possam responder às atividades como descreveremos a seguir:

Questões 1a) Resposta esperada.

Uma possível resposta é que se representem todos os cinco pontos do enunciado no plano cartesiano do *Winplot.* Em seguida, prosseguir por observações ou tentativa de imaginar uma reta que contenha os pontos A, B e E pelo seu alinhamento (FIG. 63). Esta atividade já foi desenvolvida na sessão I, queremos investigar se, refazendo a atividade agora em um ambiente informático, os alunos encontram a mesma facilidade na sua resposta, sem o uso de fórmulas, como o cálculo do coeficiente angular ou conhecimentos não interiorizados.

Provavelmente vão utilizar uma régua disponível ou mobilizar os conhecimentos da sessão I, como a equação da reta que contém os três pontos.

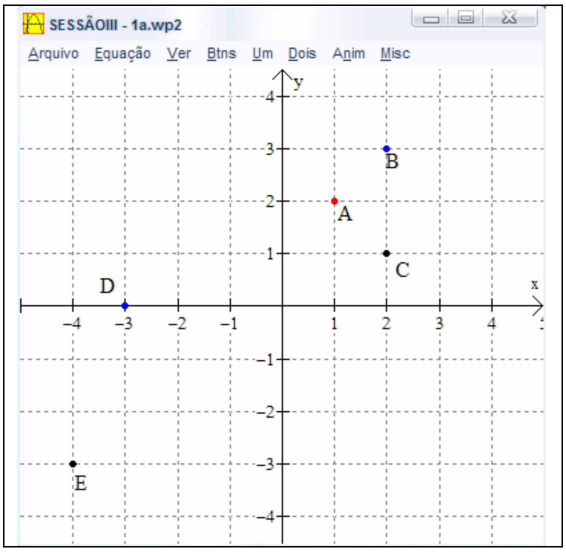


FIG. 63 - Sessão III:1a

Questão 1b) Resposta esperada.

Espera-se que após representar o ponto F=(t;1+t) no *Winplot e*, observando a sua representação gráfica como um dos pontos alinhados obtidos anteriormente, por meio de cálculos, os alunos identifiquem o valor de t com certa facilidade.

Cálculos:

$$F=(0;1)\rightarrow(t;1+t)=(0;1)$$

$$\rightarrow\begin{cases}t=0\\ \text{ou}\\ 1+t=1\rightarrow t=0\end{cases}$$

A particularidade é que as coordenadas do ponto F estão escritas como equações paramétricas em função do parâmetro t, como:

$$F=(x;y)$$

$$\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=1+t\end{cases}$$

Nessa pesquisa, assim como em outras atividades, consideramos F como um ponto genérico.

Questão 1c) Resposta esperada

Com a conversão entre os registros (simbólico, linguagem natural e gráfico) da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e, respectivamente, para a gráfica, espera-se que os alunos identifiquem com facilidade os valores de “t” para obter os pontos B e E, bastando variar os valores reais de “t” no *Winplot*. Alterando de maneira dinâmica os valores reais de “t”, como apresentado na FIG. 64, quando t=2, o ponto F assume a posição do ponto B.

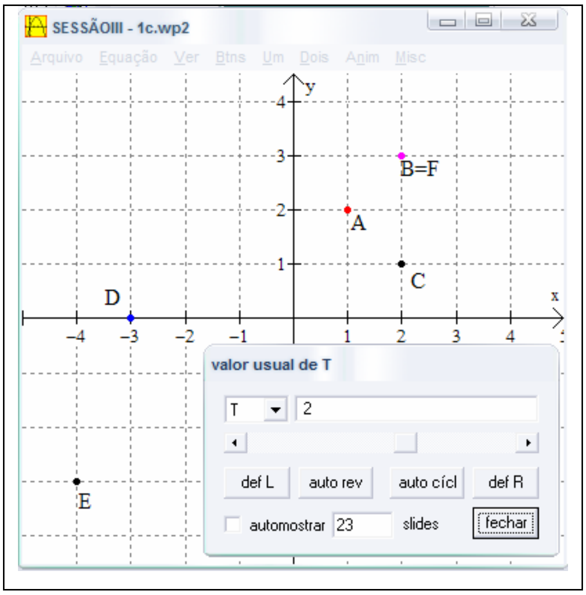


FIG. 64 - Sessão III: 1c

E quando t= -4 a posição do ponto E.

Essa maneira dinâmica de alterar os valores reais do parâmetro “t” permite identificar o lugar geométrico da reta.

Questão 1d) Resposta esperada

Após executar os procedimentos pedidos no *Winplot*, esperamos repostas como:

- No primeiro momento, FIG.65, uns 10 pontos representados estão alinhados com os demais.

- Representam-se alguns pontos de uma reta.

- Observam-se uns dez pontos representados rapidamente do ponto E até o ponto de coordenadas (3;4).

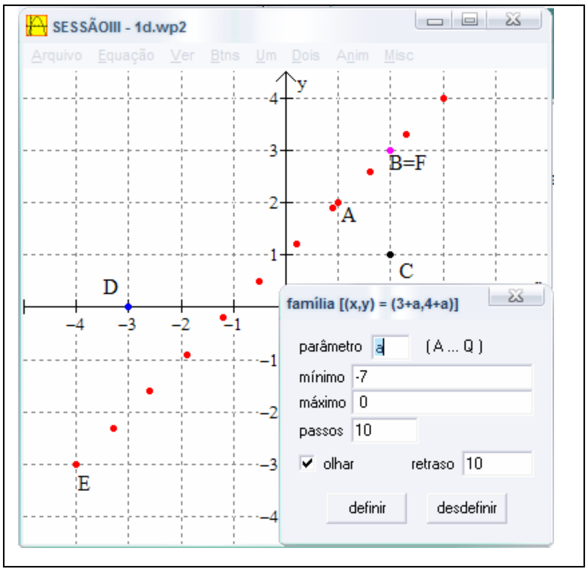


FIG. 65 - Sessão III: 1d

A função "passos" representa a quantidade de valores reais discretos que serão assumidos pelo parâmetro "a", calculados automaticamente, e representados como gráfico, ou seja, representa uma família de pontos a um parâmetro. Enquanto que a função "retraso" tem a ver com a velocidade com que se representa cada um dos pontos na tela do *Winplot*: quanto maior o valor, menor a velocidade da representação gráfica.

- No segundo momento, FIG. 66, uns 100 pontos representados estão alinhados com os demais reproduzindo uma reta;

- Representam-se diversos pontos do traçado de uma reta;

- Há uns dez pontos representados, rapidamente, do ponto E até o ponto de coordenadas (3;4).

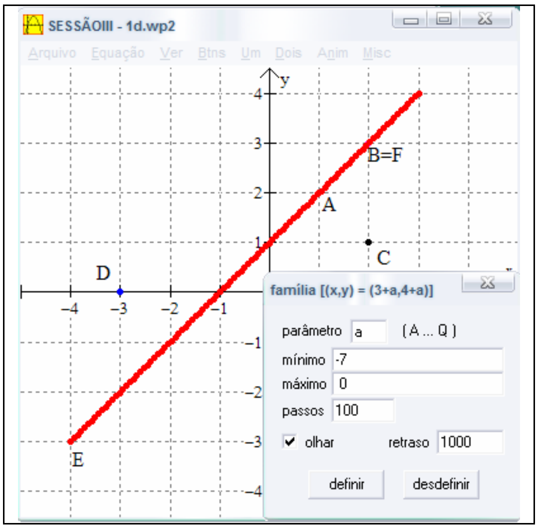


FIG. 66 - Sessão III: 1d

Esperamos que a representação gráfica da família de pontos torne visível e compreensível, aos alunos, o alinhamento dos pontos, evidenciando-se a noção de reta ou segmento de reta, visto que o parâmetro “a” assume diversos valores reais de maneira discreta entre -7 e 0. Se realizarem uma aproximação (zoom) dos pontos, verifica-se que estes estão muito próximos, ou seja, há uma família de pontos.

Neste caso, obtém-se um entendimento gráfico da reta como uma **linha** que é a figura gerada pelas posições sucessivas de um ponto móvel com movimento constante, denominada de **reta.**

Questão 1e) Resposta esperada

Espera-se como resposta que este é o gráfico da equação cartesiana $y = x + 1$, ou de equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \end{cases}$, como apresentado na

FIG. 67. Provavelmente, ao responderem, vão escolher o ponto de vista cartesiano por ser, neste caso, mais familiar ao aluno.

Aqui provavelmente após escolher o ponto de vista de sua equação, o aluno não realize diversos cálculos, repetindo-se algumas equações como conjecturas de uma equação representante da reta que contém os pontos A, B, E e infinitos outros, articulados com as diferentes atividades já desenvolvidas.

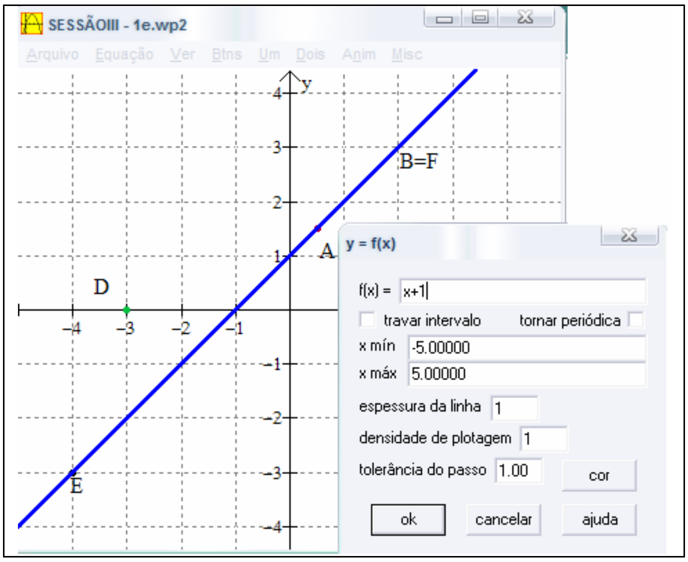


FIG. 67 - Sessão III: 1e

Conseguindo representar a equação algébrica a partir do gráfico no plano cartesiano do *Winplot*, obtém-se um entendimento da reta como um lugar geométrico de pontos que satisfazem a uma determinada condição, tendo como registro simbólico a equação da reta $y = x + 1$.

Questão 1f) Resposta esperada

Como foi dito na questão anterior, espera-se que os alunos respondam satisfatoriamente, validando a questão anterior como “sim” e, no caso do “não”, repetem-se algumas equações como conjecturas de uma equação que represente a reta contendo os pontos A, B e E.

Questão 2a) Resposta esperada

Após a conversão do registro de representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica, espera-se que os alunos visualizem facilmente os três pontos e que, para conseguir façam variações nos valores reais de “a” no *Winplot*, até que o ponto G assuma a posição dos três pontos na parábola. Alterando de maneira dinâmica os valores reais de “a”, como apresentado na FIG. 68, quando a=-2, o ponto G assume a posição do ponto A.

Quando a=-1, o ponto G assume a posição de F e quando a=3, assume o ponto C.

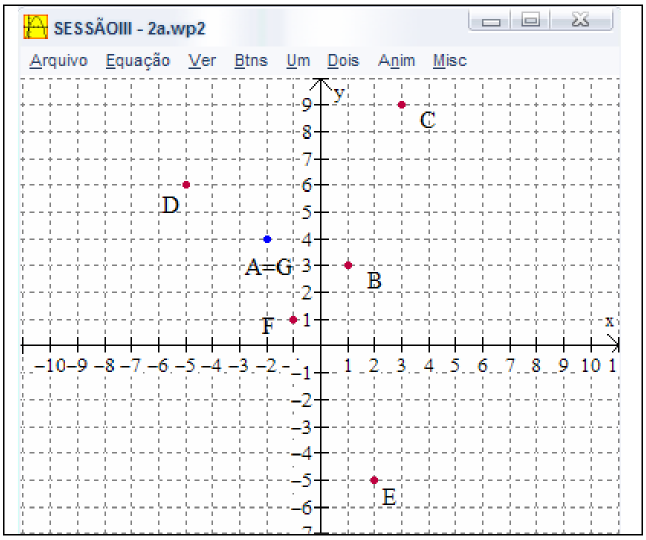


FIG. 68 - Sessão III: 2a

Essa maneira dinâmica de alterar os valores reais do parâmetro “a” permite, ao aluno, identificar o lugar geométrico da parábola.

Questão 2b) Resposta esperada

Considerando as atividades anteriores, após executar os procedimentos pedidos no *Winplot*, esperamos repostas como:

-Uns 100 pontos representados estão alinhados com os demais, construindo uma parábola;

-Representam diversos pontos do traçado de uma parábola;

-Diversos pontos representados que pertencem à parábola.

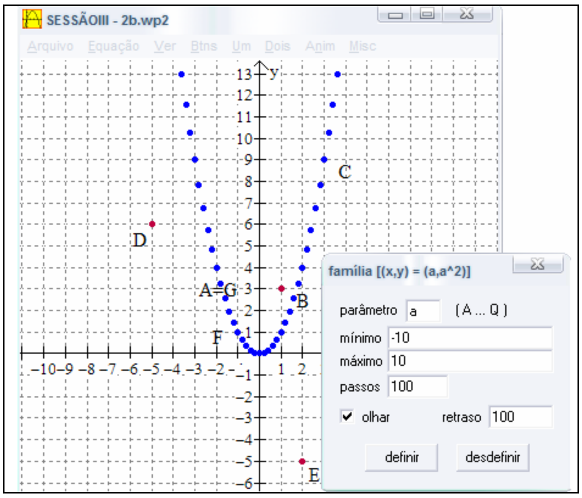


FIG. 69 - Sessão III: 2b

Esperamos que a representação gráfica da família de pontos se torne visível e compreensível, aos alunos, evidenciando-se a noção de parábola e a importância do parâmetro "a", pois o ponto genérico G assume diversos valores reais de maneira discreta entre valores máximos e mínimos atribuídos aleatoriamente.

A atividade proporciona ao aluno, no modo discreto, o entendimento de uma família de pontos a um parâmetro como um lugar geométrico da parábola.

Questão 2c) Resposta esperada

Espera-se como resposta, na conversão do gráfico para o simbólico, a equação cartesiana $y = x^2$, como apresentado na FIG. 70, neste caso, mais familiar ao aluno.

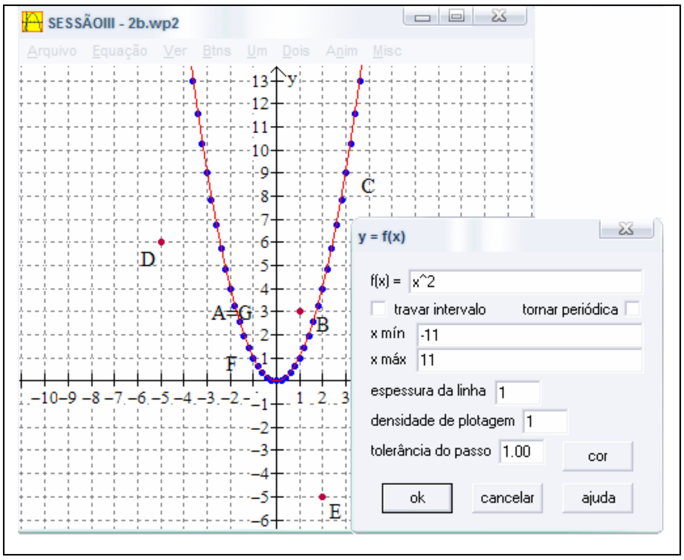


FIG. 70 - Sessão III: 2c

Assim como na atividade 1e, provavelmente o aluno não realize diversos cálculos, repetindo-se algumas equações como conjecturas de uma equação representante da parábola que contém a família de pontos verificados na atividade anterior.

Conseguindo representar a equação algébrica e seu gráfico no plano cartesiano do *Winplot*, espera-se obter um entendimento da parábola como um lugar geométrico de pontos que satisfazem a uma determinada condição, tendo como registro simbólico a equação da parábola $y = x^2$.

Questão 2d) Resposta esperada

Espera-se como resposta o “sim” e, no caso do “não”, repetem-se algumas equações como conjecturas de uma equação que represente a parábola como da FIG. 70.

Questão 3a) Resposta esperada

Representa um segmento de reta ou traço de reta, como FIG. 71, com pontos inicial em (0;1) e final em (3;4) ou pontos limites do intervalo como (0;1) e (3;4).

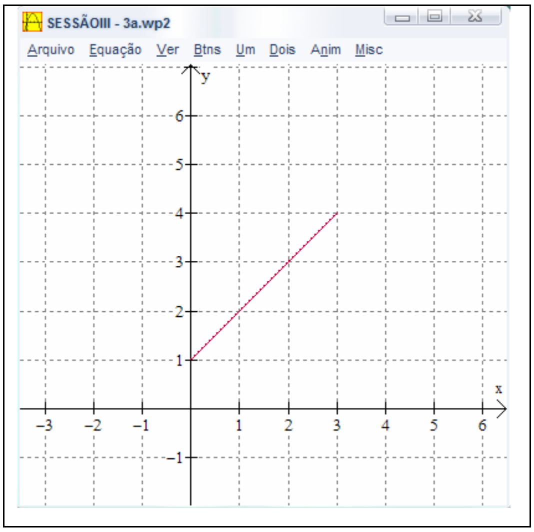


FIG. 71 - Sessão III: 3a

Questão 3b) Resposta esperada

No instante inicial k=0 e no final k=1.

Espera-se que, articulada com a atividade anterior, a inserção de um novo parâmetro nas equações paramétricas permita um melhor entendimento do traço de uma reta, como se estivesse construindo com papel, lápis e régua o gráfico deste segmento.

Desta forma, deve ser possível identificar, com maior facilidade, a representação gráfica de maneira contínua no ponto vista paramétrico.

Na FIG. 72, apresentamos alguns dos possíveis gráficos observados pelos alunos.

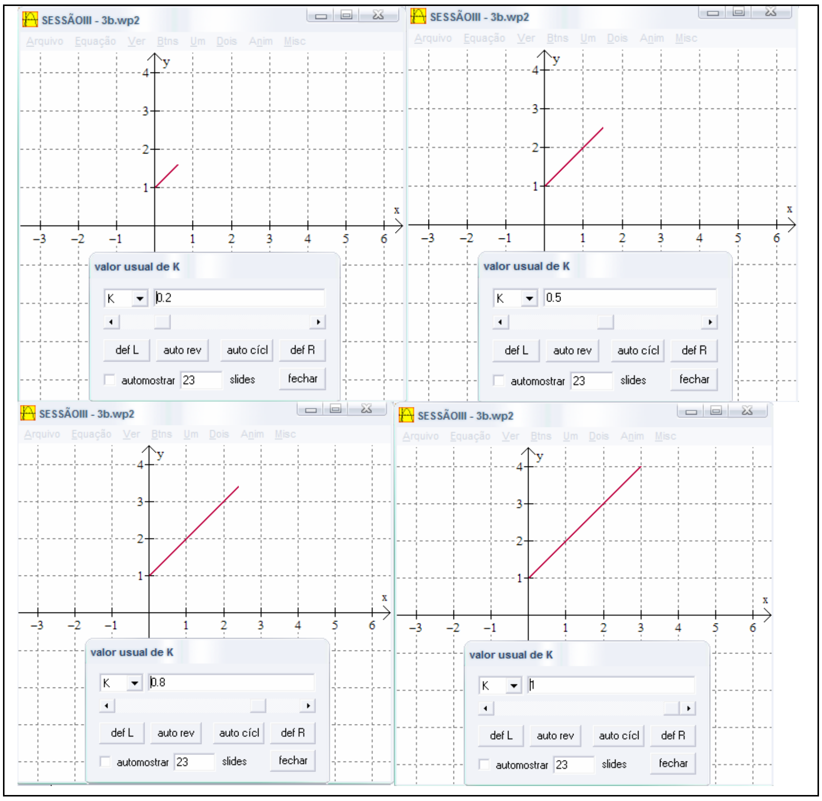


FIG. 72- Sessão III: 3a

Questão 3c) Resposta esperada

Articulando as duas atividades anteriores com outras já desenvolvidas nas sessões I e II, espera-se que os alunos consigam responder com a equação $y = x + 1$.

Espera-se também, de maneira implícita, a identificação de equações cartesianas ou paramétricas, como representações do mesmo objeto matemático, no caso a reta.

A variação dos valores reais de parâmetros em equações e a construção de gráficos da reta e parábola, de maneira dinâmica, com a articulação entre os pontos de vista paramétrico e cartesiano e algumas conversões entre os registros semióticos permitem ao aluno um melhor entendimento de algumas de suas propriedades geométricas com as suas equações.

<u>Sessão IV: Curvas planas algébricas e transcendentes.</u>

Nesta sessão, as atividades também foram desenvolvidas para um ambiente informático com o uso do *software Winplot*, retomando-se algumas das atividades desenvolvidas na sessão II.

Visando a animações gráficas de curvas planas famosas na história da geometria analítica. Queremos observar se um ambiente informático, como ferramenta facilitadora, favorece o entendimento da noção de parâmetro no estudo de curvas e suas propriedades geométricas no plano.

Atividade 1:

Voltamos ao problema de Roberta e Alexandre que participam de um jogo. Vamos recordar:

Os dois jogadores estão localizados em uma planilha, representados pelos pontos "A" (Alexandre) e "R" (Roberta). Ambos têm como objetivo, com um míssel cada, atingir o submarino "S", fixo em um local de coordenadas (5;3), considerando que cada míssel viaja em linha reta com velocidade constante. A tabela abaixo mostra as coordenadas (posição) dos dois mísseis no momento em que começa o lançamento simultâneo, isto é, o momento inicial (t = 0), e um minuto mais tarde (t = 1) após os lançamentos.

	Coordenadas em t=0	Coordenadas em t=1
Míssel A	(-8;9)	(-3;7)
Míssel R	(-7;-9)	(-4;-6)

TAB. 9 – Sessão IV:atividade 1

Explorando os dados fornecidos nesta tabela e utilizando o *Winplot*, faça o que se pede:

No *Winplot*, em ponto (x,y) represente as coordenadas dos mísseis A e R em função do parâmetro t ((x;y)=(f(t);g(t)), variando o parâmetro “t” e responda:

a) Alexandre ou Roberta atingiram o submarino? Se afirmativo quantos minutos foram necessários?

b) É necessário que Alexandre ou Roberta alterem as suas rotas para atingirem o alvo? Se afirmativo, qual deverá ser a nova rota?

Atividade 2:

Na História, objetos matemáticos como as curvas, demoravam séculos de estudos para que fossem representadas por alguns matemáticos através de gráficos ou equações.

Hoje, com o auxílio de uma ferramenta computacional, como o *Winplot*, é possível verificar a beleza e o encanto destas curvas, em forma de gráficos, de maneira dinâmica e com facilidade.

Historicamente foi o uso de parâmetros nas equações que possibilitou a representação gráfica destas curvas no plano.

Voltemos à atividade:

Utilizando as equações abaixo, faça as construções de seus respectivos gráficos no *Winplot*. Em seguida, faça variações nos valores reais de seus parâmetros para uma animação gráfica da curva no plano.

Salve cada item como “ativ2...” seguido do número do item e do grupo.

a) Conchóide de Nicomedes:
$(x - b)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$

b) Ciclóide :

$x=a(1-\sin(t))$ e $y=a(1-\cos(t))$

c) Limaçon de Pascal :
$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$

d) Pérola de Sluze:
$y^m = x^n(a - x)^b$

e) Involuta de um Círculo:
$x=a(\cos(t) + t \sin(t))$ e $y=a(\sin(t) - t \cos(t))$

f) Lemniscata de Bernoulli:
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

g) Epiciclóide:
$x = (a + b) \cos(t) - b \cos((a/b + 1)t)$; $y=(a + b) \sin(t) – b \sin((a/b + 1)t)$

h) Epitrocóide:
$x= 14\cos(t)-8\cos(3.5t)$ e $y= 14\sin(t)-8\sin(3.5t)$

i) Hipociclóide :
$x = (a - b) \cos(t) + b \cos((a/b - 1)t)$; $y = (a - b) \sin(t) - b \sin((a/b - 1)t)$

j) Hipotrocóide:
$x=(a-b)\cos(t)+c\cos((a/b-1)t)$; $y=(a-b)\sin(t)-c\sin((a/b-1)t)$

<u>Análise didática:</u>

Na elaboração das atividades da sessão IV, temos como prioridade os seguintes objetivos:

Investigar se a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e as conversões entre os registros de representação, como simbólico-algébrica, linguagem *Winplot* e gráfico, em um ambiente informático, possibilitam ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas.

Em um primeiro momento retomamos uma atividade desenvolvida na sessão II: a parametrização da reta. Agora, no ambiente informático, queremos investigar se o *Winplot* facilita o trabalho dos alunos nas conjecturas de suas soluções.

Articulando as atividades da sessão III com outras curvas planas, queremos observar se o uso de parâmetros estabelecerá uma identificação significativa entre os gráficos e equações de algumas curvas planas famosas na história. Na realidade, os alunos têm tempo para rever cada caso das curvas planas, pois não precisam refazer os diversos cálculos realizados pelos matemáticos. Pode-se refazer este trabalho dos matemáticos até certo ponto, por exemplo, encontrando os gráficos a partir de suas equações.

O quadro abaixo representa as transformações em registros semióticos das atividades desenvolvidas na sessão :

Transformação	**Itens da atividade**
Conversão da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.	1a;1b;2a;2b;2c;...;2j
Conversão do gráfico para o simbólico	1b

QUADRO 17 - sessão IV: conversão de registros

Nas atividades da sessão, estão em jogo os seguintes quadros e conceitos:

Geometria analítica	**Algébrico**	**Numérico**	**Funções**
-ponto, reta. -curvas planas algébricas e transcendentes -representações paramétricas e cartesianas de curvas planas; -ângulos em radianos.	-equações cartesianas e paramétricas; -escritas algébricas com variáveis, incógnitas e parâmetros;	-cálculo sobre coordenadas no plano (geometria analítica); -cálculo em equações paramétricas e cartesianas (algébrico).	-funções do 1º e 2º graus; - funções trigonométricas

QUADRO 18- sessão IV: quadros

No próximo quadro, apresentamos as variáveis didáticas e os conhecimentos mobilizados nessa sessão.

Variáveis didáticas	Conhecimentos mobilizados
-Números reais; -Representação gráfica de ponto, reta e parábola. -Escrita algébrica de equações; -Propriedades das equações paramétricas e cartesianas; -Leitura e interpretação gráfica; -Representação paramétrica e cartesiana de curvas planas; -Variável, incógnita e parâmetro. - *Winplot*	-Operações com números reais; -Par ordenado associado a uma relação -Cálculo e representação gráfica de ponto e reta no plano;-Ângulos em radianos; -Resolução de equações do 1º e 2º graus; -Funções do 1º e 2º graus; -Funções trigonométricas; -Equações cartesianas e paramétricas da reta e parábola.

QUADRO 19 – Sessão IV: variáveis didáticas

Novos conhecimentos em jogo: gráficos e equações de algumas curvas planas algébricas ou transcendentes.

No final da sessão, será realizada uma institucionalização local das equações paramétricas da reta, por considerar que talvez nem todos os alunos consigam atingir o objetivo da questão 1b, como mostraremos a seguir nas concepções inadequadas ou dificuldades esperadas nas atividades.

1. Na conversão da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e conseqüentemente para a gráfica, constatam-se os seguintes dados:

- Não representam as equações paramétricas da reta com coordenadas em função do parâmetro “t” dos mísseis “A” ou “R” e, em conseqüência não respondem às questões 1a ou 1b ou ambas.

- Não conseguem uma representação das equações paramétricas da reta na linguagem *Winplot* e, conseqüentemente, não realiza uma conversão para a representação gráfica (1a).

- Não convertem as equações cartesianas ou paramétricas para a linguagem *Winplot* por lapsos (2a;2b;2c;...;2j).

- Desenvolvem equações inadequadas (obtidas no registro simbólico) e não representam gráficos de curvas esperados (1a;2a;2b;2c;...;2j).

2. Da conversão do gráfico para o simbólico:

- Não conseguem converter o gráfico, a partir de cálculos, na representação simbólico-algébrica como as equações paramétricas da reta. (1b)

Análise matemática:

Superadas as concepções inadequadas e as dificuldades mencionadas, esperamos que os alunos possam responder às atividades como descreveremos a seguir:

Questão 1a) Resposta esperada :

Após desenvolver cálculos com as coordenadas dos mísseis apresentados em função do parâmetro ‘’ t’’ , como nas atividades 1c e 1f da sessão II, os alunos devem encontrar as suas equações paramétricas, representando-as no *Winplot* e conseqüentemente os gráficos de retas que possibilitam identificar que foram necessários 4 minutos para o míssel de Roberta atingir o submarino.

Equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_t + (x_{t+1} - x_t)t \\ y = y_t + (y_{t+1} - y_t)t \end{cases} \text{(I)}$$

Míssel "A":
quando $t = 0 \rightarrow (x_0; y_0) = (-8; 9)$
quando $t = 1 \rightarrow (x_1; y_1) = (-3; 7)$
Substituindo-se em (I) temos:
$x = -8 + (-3 - (-8))t \rightarrow x = -8 + 5t$
$y = 9 + (7 - 9)t \rightarrow y = 9 - 2t$

Míssel "R":
quando $t = 0 \rightarrow (x_0; y_0) = (-7; -9)$
quando $t = 1 \rightarrow (x_1; y_1) = (-4; -6)$
Substituindo-se em (I) temos:
$x = -7 + (-4 - (-7))t \rightarrow x = -7 + 3t$
$y = -9 + (-6 - (-9))t \rightarrow y = -9 + 3t$

No *Winplot: p*rimeiramente, com as equações paramétricas, é possível representar graficamente o problema em coordenadas de pontos com “t” assumindo valores inteiros, FIG. 73.

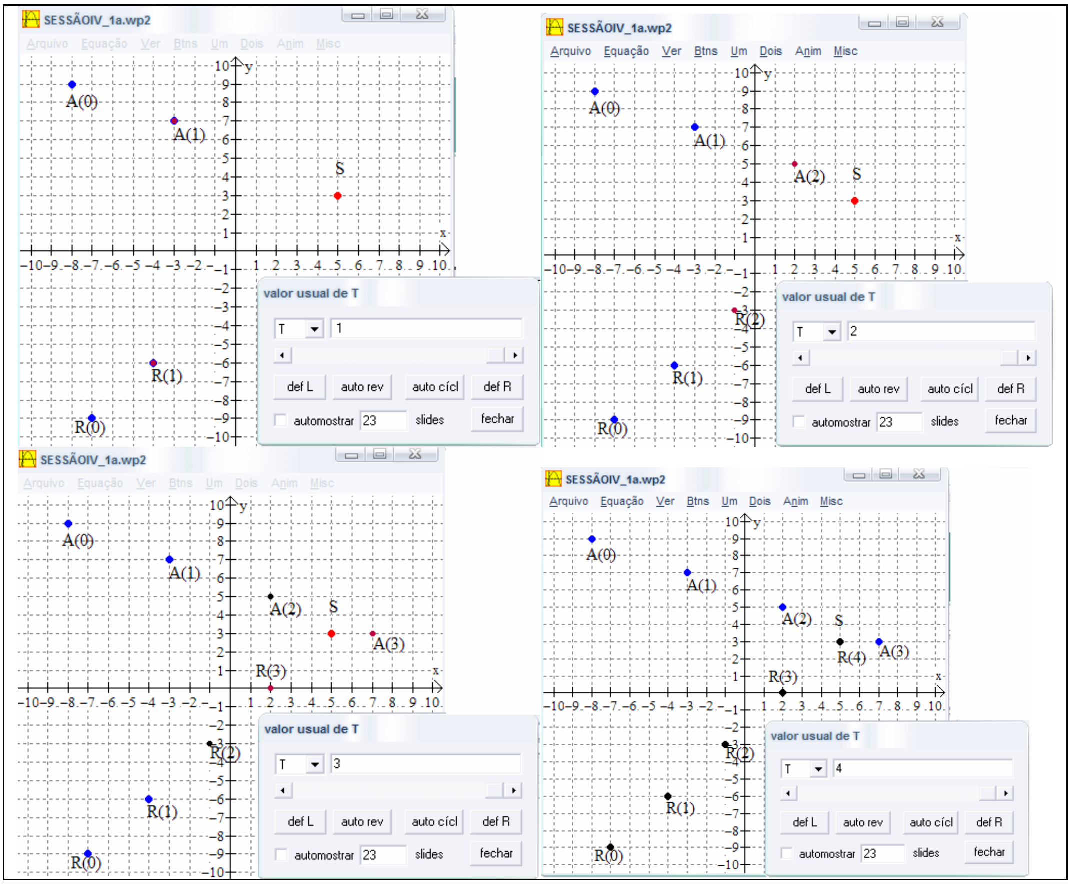


FIG. 73- Sessão IV: 1a

Por se tratar da mesma atividade, é possível que os alunos, lembrando-se das equações desenvolvidas nas atividades anteriores, e apenas observando a representação gráfica, respondam adequadamente sem desenvolver os cálculos para obter as equações paramétricas da reta.

Outra possibilidade é a conversão entre os registros de representação semiótica, da simbólico-algébrica com as equações paramétricas do traço de reta compreendido entre $0 \leq t \leq 5$, para a gráfica, como apresentado na FIG. 74, identificando nas coordenadas do submarino que $x = 5$ e substituindo-se na equação $x = -7 + 3t$. Assim tem-se $5 = -7 + 3.t \ \rightarrow t = 4$, ou seja, Roberta atingirá o alvo em quatro minutos.

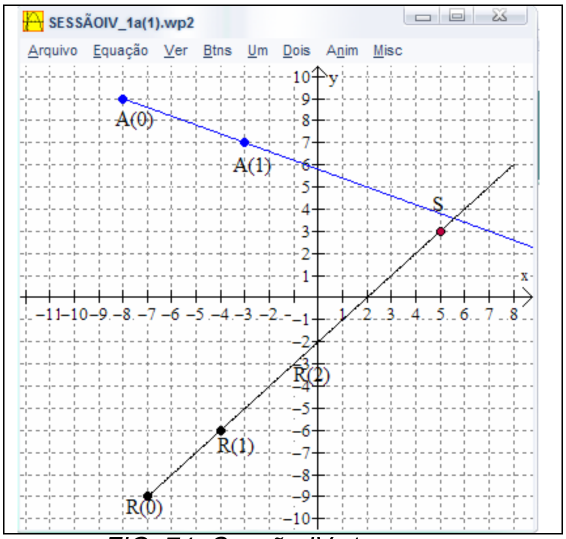


FIG. 74- Sessão IV: 1a

Questão 1b) Resposta esperada :

É necessário que Alexandre altere a sua rota e, para obtê-la, devem-se recalcular as equações paramétricas para o míssel, usando como pontos de referência os pontos A e S, como :

Míssel "A":
quando $t = 0 \rightarrow (x_0; y_0) = (-8; 9)$
quando $t = 1 \rightarrow (x_1; y_1) = (5; 3)$
Substituindo-se em (I) temos:
$x = -8 + (5 - (-8))t \rightarrow x = -8 + 13t$
$y = 9 + (3 - 9)t \rightarrow y = 9 - 6t$

Neste caso, FIG. 75, Alexandre atingiria o míssel em um minuto.

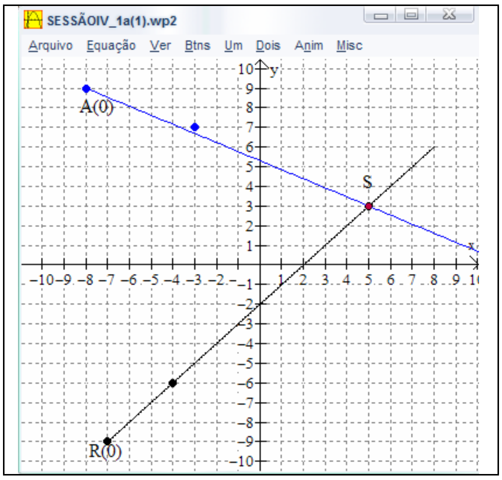


FIG. 75 – sessão IV: 1a

Portanto, uma das possíveis respostas esperadas como uma nova rota são coordenadas de equações paramétricas $x = -8 + 13t$ e $y = 9 - 6t$.

Como comentamos, a atividade será institucionalizada por considerá-la uma questão de difícil entendimento.

Nas próximas questões da atividade 2, por se tratar de equações paramétricas ou cartesianas e como são várias, vamos escolher duas curvas e representar alguns dos seus gráficos, como pontos de vista distintos e algumas das construções esperadas.

Questão 2a) Construção esperada :

Na conchóide de Nicomedes, representada pela equação $(x - b)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$, mantendo-se constante o valor real de do parâmetro b e variando-se a, obtém-se uma animação gráfica como na FIG. 76.

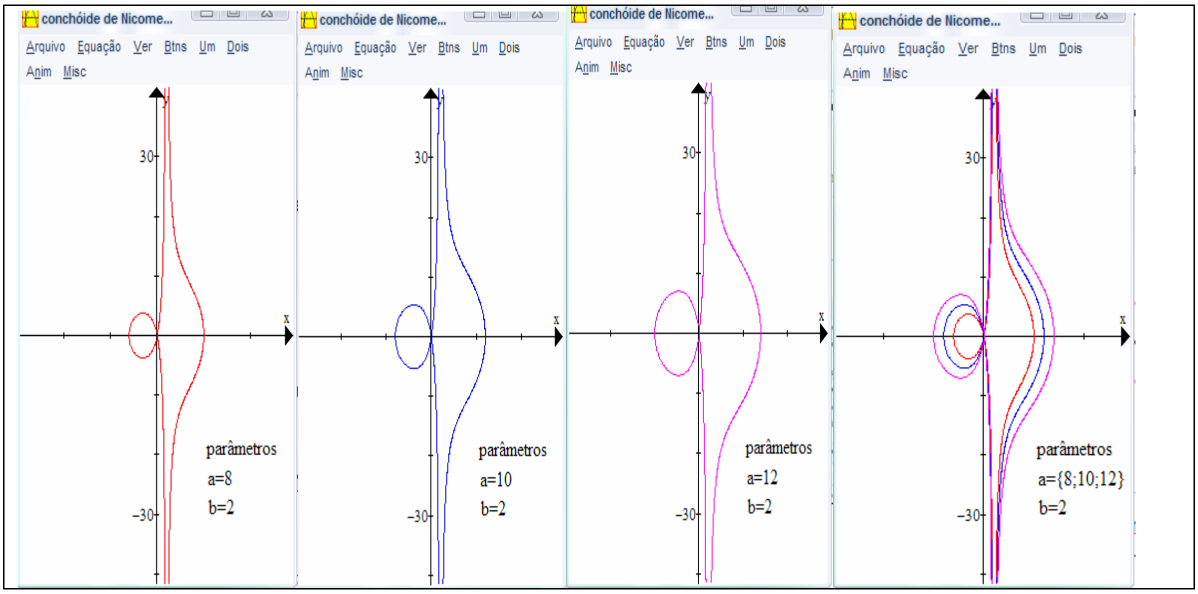


FIG. 76 – sessão IV: conchóide de Nicomedes

Com a variação de parâmetros em diversas equações cartesianas, como a apresentada, espera-se do aluno um entendimento, da importância da noção de parâmetro em equações cartesianas para a representação de curvas planas.

Questão 2b) Construção esperada

Na involuta de um círculo representada pelas equações paramétricas, $x = a(\cos(t) + t\sin(t))$ e $y = a(\sin(t) - t\cos(t))$, com $0 \le t \le 10\pi rad$, variando os valores reais do parâmetro **a**, obtém-se diversos gráficos, entre estes o da FIG. 77.

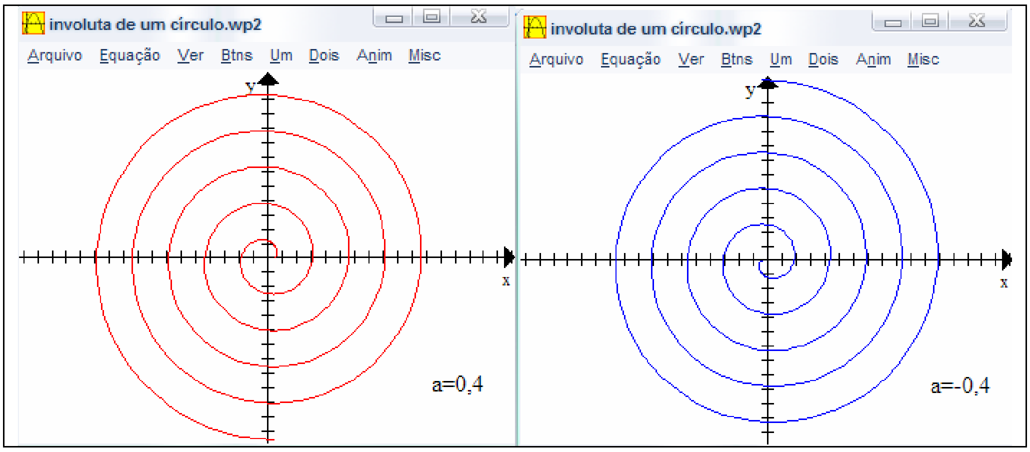


FIG. 77 – sessão IV: Involuta de um círculo

Com a variação de parâmetros em diversas equações paramétricas de curvas planas, espera-se do aluno, talvez, um entendimento da importância da noção de parâmetro em equações paramétricas para a representação de curvas planas.

<u>SESSÃO V : Curvas planas e construção de *GIF's* animados</u>

Nesta última sessão, as atividades se dividiram em dois momentos. Primeiro com papel e lápis, sem o uso do ambiente informático, com o objetivo de desenvolver equações paramétricas a partir das coordenadas de alguns pontos e, em um segundo momento, visando a desenvolver animações gráficas de outras curvas planas para a construção de um *GIF* animado.

<u>Atividades</u>

Atividade 1 (sem o uso do computador):

a)Escreva as coordenadas de quatro pontos alinhados: A=(__,___), B=(__,___), C=(__,___) e D=(__,___). Se necessário, utilize o campo quadriculado.

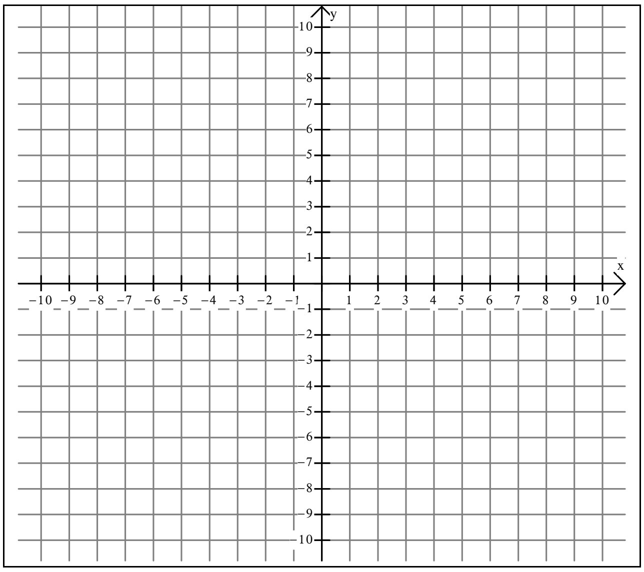


FIG. 78 – sessão V: atividade 1

b) Escreva as equações paramétricas da reta que contém estes pontos.

c) Utilizando as equações paramétricas encontradas, complete a tabela abaixo.

t	x	y
0		
2		
3		
4		

TAB. 10 – Sessão V:atividade 1c

d) Quais são os respectivos valores de t para os pontos alinhados do item 1?

Para o ponto A temos t = _____

Para o ponto B temos t = _____

Para o ponto C temos t = _____

Para o ponto D temos t = _____

Atividade 2 : (utilizando o computador)

Como já conhecemos algumas curvas famosas que foram desenvolvidas ao longo da história da geometria analítica, vamos construir *GIF's* animados utilizando os *softwares* gratuitos *Winplot* e *GIF Animator*. Neste caso, escolha qualquer uma das equações de curvas apresentadas abaixo e, em seguida, construa um *GIF* animado.

O tridente de Descartes:
$(a+x)(a-x)(2a-x)=axy$

Cissóide de Dioclés:
$y^2 = (x^3)/(2a - x)$

Conchóide de Nicomedes:
$(x - b)^2. (x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$

Quadratriz de Hípias:
$y = x\cot((pi)x/2a)$

Hipérbole de Fermat:
$(x^m)(y^n)=a$

Parábola de Fermat:
$y^n=ax^m$

Curva de Agnesi:
$y(x^2 + a^2) = a^3$

Ciclóide:
$x=a(1-\sin(t))$ e $y=a(1-\cos(t))$

Limaçon de Pascal:
$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$

Pérola de Sluze:
$y^m = x^n(a - x)^b$

Involuta de um Círculo:
$x=a(\cos(t) + t \sin(t))$ e $y=a(\sin(t) - t \cos(t))$

Parábola Divergente de Newton:
$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$

Lemniscata de Bernoulli:
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

Epiciclóide:
$x = (a + b) \cos(t) - b \cos((a/b + 1)t)$; $y=(a + b) \sin(t) – b \sin((a/b + 1)t)$

Epitrocóide:
$x= 14\cos(t)-8\cos(3.5t)$ e $y= 14\sin(t)-8\sin(3.5t)$

Hipociclóide:
$x = (a - b) \cos(t) + b \cos((a/b - 1)t)$; $y = (a - b) \sin(t) - b \sin((a/b - 1)t)$

Hipotrocóide:
$x=(a-b)\cos(t)+c\cos((a/b-1)t)$; $y=(a-b)\sin(t)-c\sin((a/b-1)t)$

Salve como “GIFG...” seguido do número do grupo.

O que é necessário para a construção do *GIF* animado de uma curva? Justifique.

Quais os procedimentos que foram executados?

Análise didática:

Primeiramente, pretendemos investigar se os resultados das sessões anteriores favorecem ao aluno, no ponto de vista paramétrico, o desenvolvimento de equações paramétricas a partir de pontos quaisquer alinhados no plano e conseqüentemente o entendimento da noção de parâmetro sem a interferência do ambiente informático.

A atividade no ambiente informático visa a investigar, como na sessão IV, se a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e a conversão entre os registros de representação como a linguagem *Winplot*, a gráfica e a simbólico-algébrica, neste ambiente, possibilita ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesiana ou paramétrica.

Primordialmente, queremos investigar se, no caso de outras curvas planas, alterando-se os valores reais dos parâmetros de suas equações, variando-os e observando os efeitos geométricos provocados pela sua variação para a construção de GIF's animados, favorece-se o entendimento da noção parâmetro.

O quadro abaixo representa as transformações em registros semióticos das atividades desenvolvidas na sessão :

Transformação	**Itens da atividade**
Conversão da linguagem natural para o gráfico.	1a
Conversão da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.	2a;2b;2c;...;2q
Conversão do gráfico para o simbólico	1b
Tratamento no registro simbólico: - da representação simbólico-algébrica para simbólico-tabular.	1c; 1d

QUADRO 20- sessão V: transformações em registros

Nas atividades da sessão, estão em jogo os seguintes quadros e conceitos:

Geometria analítica	**Algébrico**	**Numérico**	**Funções**
-ponto, reta; -curvas planas algébricas e transcendentes; -representações paramétricas e cartesianas de curvas planas; -ângulos em radianos.	-equações cartesianas e paramétricas; -escritas algébricas com variáveis, incógnitas e parâmetros.	-cálculo sobre coordenadas no plano (geometria analítica); -cálculo em equações paramétricas e cartesianas (algébrico).	-funções do 1º e 2º graus; - funções trigonométricas.

QUADRO 21- sessão V: quadros

No quadro abaixo, apresentamos as variáveis didáticas e os conhecimentos mobilizados nessa sessão.

Variáveis didáticas	**Conhecimentos mobilizados**
-Números reais; -Representações gráficas no plano.-Escrita algébrica de equações; -Propriedades das equações paramétricas e cartesianas; -Leitura e interpretação gráfica; -Representação paramétrica e cartesiana de curvas planas; -Variável, incógnita e parâmetro; -Parametrização de curvas planas. -*Winplot* e *Gif Animator* (gratuitos)	-Operações com números reais; -Par ordenado associado a uma relação; -Cálculo e representação gráfica de ponto e reta no plano;-Ângulos em radianos; -Resolução de equações do 1º e 2º graus; -Funções do 1º e 2º graus;-Funções trigonométricas; -Equações cartesianas e paramétricas de algumas curvas planas. -Parametrização da reta.

QUADRO 22 – Sessão V: variáveis didáticas

Os novos conhecimentos em jogo são os gráficos e equações de algumas curvas planas algébricas ou transcendentes e a parametrização de curvas.

No final da sessão, será realizada uma institucionalização local das equações de curvas planas, por considerar que talvez nem todos os alunos consigam apresentar os procedimentos esperados para a construção de um GIF animado de uma curva, como mostraremos a seguir nas concepções inadequadas ou dificuldades esperadas nas atividades.

1. Com relação à conversão da linguagem natural para o gráfico:

- Dificuldades em representar as coordenadas de pontos alinhados, pois provavelmente não articulam a atividade com outras já desenvolvidas ou não utilizam o plano quadriculado, que é uma ferramenta facilitadora.(1a).

2. Sobre a conversão da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.

- O aluno não converte as equações cartesianas ou paramétricas para a linguagem *Winplot* por lapsos. (2a;2b;2c;...;2q). Neste momento, o professor deve esclarecer as dúvidas do enunciado, sem, contudo, dar repostas passo a passo para as atividades;

- Equações inadequadas (obtidas no registro simbólico) que não representam gráficos de curvas esperados. (1a;2a;2b;2c;...;2q);

- Dificuldades em representar equações na linguagem Winplot, conseqüentemente, não se representam gráficos de curvas.

3. Sobre a conversão do gráfico para o simbólico.

- Dificuldade em observar os valores das coordenadas dos pontos representados no plano e, por meio de cálculos escrever uma das equações paramétricas da reta que contém os quatro pontos alinhados.

4. Do tratamento no registro simbólico.

- Não sendo apresentando uma das equações paramétricas da reta (1b), não se completa uma tabela ou valores do parâmetro “t” (1c, 1d), ou seja, uma conversão no mesmo registro, da representação simbólico-algébrica para a simbólico-tabular.

- Dificuldade em apresentar, como um dos procedimentos executados a variação dos valores reais dos parâmetros das equações de curvas no *Winplot*. Talvez os alunos não tenham desenvolvido um entendimento da noção de parâmetro.

Análise matemática:

Superadas as concepções inadequadas e dificuldades mencionadas, esperamos que os alunos possam responder às atividades como descreveremos a seguir:

Questão 1a) Resposta esperada

Uma possível resposta seria a escolha aleatória de coordenadas de quatro pontos alinhados no plano quadriculado, como na FIG. 79. Talvez escolham valores inteiros positivos para as coordenadas dos pontos, pois, como apresentado na história da geometria analítica o uso de coordenadas negativas são obstáculos epistemológicos.

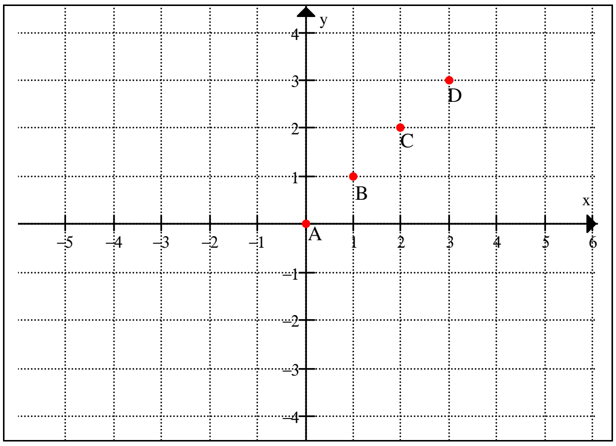


FIG. 79 – Sessão V: 1a

Questão 1b) Resposta esperada

Em conseqüência da escolha realizada na questão 1a, a partir de dois pontos, como A e B, desenvolvem-se cálculos para se obterem as equações paramétricas da reta em função de um parâmetro.

Equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_t + (x_{t+1} - x_t)t \\ y = y_t + (y_{t+1} - y_t)t \end{cases} (I)$$

ponto A: quando $t = 0 \rightarrow (x_0; y_0) = (0;0)$

ponto B: quando $t = 1 \rightarrow (x_1; y_1) = (1;1)$

Substituindo-se em (I) temos:

$x = 0 + (1 - 0)t \rightarrow x = 1t$

$y = 0 + (1 - 0)t \rightarrow y = 1t$

(Questão 1c) Resposta esperada.

Utilizando as equações paramétricas obtidas na questão anterior, $x = t$ e $y = t$, substituindo-se os valores de t, obtém-se o preenchimento da tabela, como na TAB. 11:

t	x	y
0	0	0
2	2	2
3	3	3
4	4	4

TAB. 11- Sessão V: 1c

Questão 1d) Resposta esperada.

A partir das equações paramétricas, é possível calcular o valor de t como:

Para o ponto A temos t = 0

Para o ponto B temos t = 1

Para o ponto C temos t = 2

Para o ponto D temos t =3

Os itens da atividade 1 estão articulados, portanto, caso encontrem as equações paramétricas da reta que contém os quatro pontos alinhados escolhidos, então esperam-se respostas satisfatórias para a atividade.

Nas próximas questões da atividade 2, por se tratar de equações paramétricas ou cartesianas e como são várias, vamos escolher uma delas, como proposto na atividade, e consequentemente apresentaremos os procedimentos para representar a possível construção de um GIF animado.

Escolhemos a Limaçon de Pascal com equação cartesiana, $(x^2 + y^2-2ax)^2= b^2(x^2 + y^2)$.

Inicialmente os gráficos são salvos no Paint[32] como limaçon1.gif, limaçon2.gif e assim sucessivamente até o último instante da animação gráfica da curva.

[32] Criador e editor de desenhos disponível nos sistemas operacionais da Microsoft.

Apresentamos uma seqüência de gráficos esperados da Limaçon de Pascal.

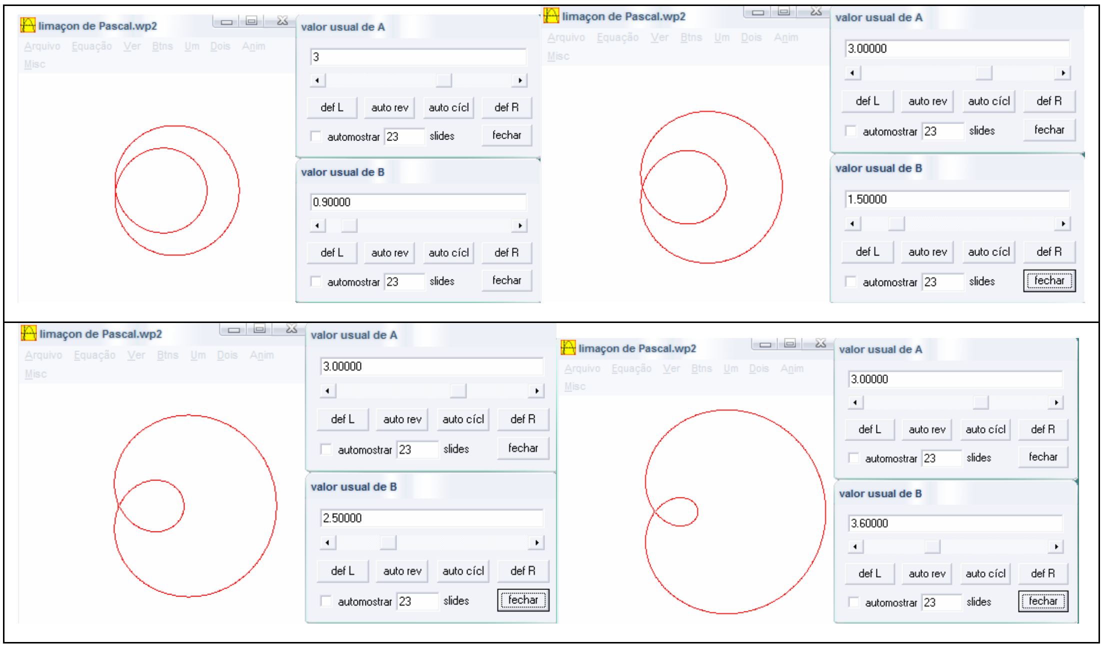


FIG.80 – Sessão V : atividade 2 (cartesiano)

Após a construção de diversos gráficos (FIG. 80), estes são transportados para o *GIF Animator*, como apresentado na FIG. 81 :

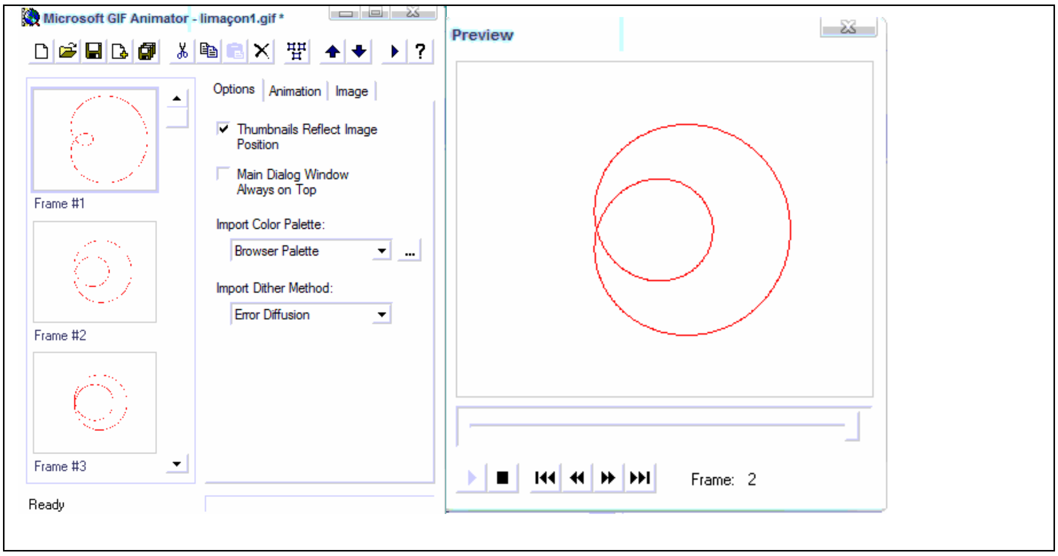


FIG. 81 – Sessão V : GIF animado

Fizemos quatro gráficos, mas espera-se que os alunos construam muito mais para a animação gráfica de uma ou mais curvas. Isso dependerá da criatividade de cada um.

No final da sessão, sobre o que é necessário para a construção do *GIF* animado de uma curva, esperam-se dos alunos justificativas como:

- Um plotador gráfico como o *Winplot*, um construtor de *GIF's* como o *GIF Animator*, um programa para salvar os gráficos como o *Paint,* e equações de curvas.

E sobre quais os procedimentos que foram executados, espera-se:

- Escrever a equação da curva no *Winplot*, em seguida variar os valores reais de seus parâmetros, salvando cada um dos seus gráficos no *Paint* com formato.gif para, finalmente, construir o *GIF* animado com o *GIF Animator*.

Com as atividades da sessão articulada com as demais, espera-se, após a experimentação, obter subsídios suficientes para responder às hipóteses de pesquisa.

CAPÍTULO V: A EXPERIMENTAÇÃO E A ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo, apresentamos a experimentação e a análise a posteriori.

Nesta fase, segundo alguns elementos de uma Engenharia Didática, a *experimentação* consiste na aplicação e descrição do que aconteceu na seqüência didática. Já a análise a *posteriori* é a interpretação dos dados recolhidos durante a experimentação.

1. EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO.

Segundo ARTIGUE(1996), durante a *experimentação* são realizadas observações sobre as sessões de ensino, e as produções escritas dos alunos em sala ou fora dela.

É importante também, como coleta de dados, serem realizadas gravações em áudio e vídeo, imagens fotográficas, arquivos de programas computacionais, pois quanto maior o número de informações sobre a *experimentação,* melhor para a análise a *posteriori*.

Na análise a *posteriori,* apresentamos o que ocorreu, a análise didática dos fenômenos observados, as concepções inadequadas e as dificuldades que surgiram no decorrer das atividades.

O confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, levando-se em consideração a questão de pesquisa, os fundamentos teóricos e as hipóteses de pesquisa, permite avaliar a eficácia da seqüência didática para o processo de ensino - aprendizagem, subsidiando a conclusão deste trabalho.

Na conclusão, é analisada se a questão de pesquisa ("*Um ambiente informático, que possibilita a construção de gráficos de curvas, de maneira dinâmica, articulado com a conversão entre registros de representação semiótica, favorece o entendimento da noção de parâmetro?*") foi respondida segundo as hipóteses elaboradas.

1.1 Experimentação

A aplicação da seqüência durou 5 semanas, sendo uma sessão por semana com duração de 1 hora e 40 minutos, totalizando 8 horas e 20 minutos. As sessões foram distribuídas da seguinte forma:

Sessão I: ponto, reta e parábola.

Sessão II: equações paramétricas da reta.

Sessão III: família de pontos a um parâmetro e gráficos de reta e parábola.

Sessão IV: parametrização da reta e outras curvas planas.

Sessão V: Animação gráfica de curvas planas.

1.2 A organização da experimentação

A seqüência experimental se desenvolveu em três etapas:

1º) Familiarização do aluno com os *softwares Winplot* e *GIF Animator*.

Antes da aplicação da seqüência didática, realizamos algumas atividades com os dez alunos participantes da pesquisa para uma familiarização com o *software Winplot* e com o *GIF Animator.* Foram dois sábados, com duração de 1hora e 40minutos cada.

Apresentamos atividades que proporcionassem o reconhecimento por parte dos alunos com o uso do *software Winplot* que seriam importantes para a experimentação como:

- O plano cartesiano e a localização de coordenadas no plano;

- A equação reduzida da reta e os coeficientes angular e linear;

- Equações paramétricas da reta;

- Funções: afim, linear, quadrática, cúbica, exponencial e algumas trigonométricas;

- A conversão de ângulos de graus para radianos;

- Resolução de equações do 1º e 2º grau;

- Incógnita e variável;

Na primeira etapa, não tivemos um observador, sendo o professor o próprio pesquisador.

2º) Experimentação das duas primeiras sessões

Após a familiarização com as ferramentas do *software Winplot,* iniciamos as atividades das duas primeiras sessões, que foram desenvolvidas sem a interferência do ambiente informático. Para algumas atividades a serem trabalhadas, os alunos tiveram como material disponível papel, lápis, régua, caneta e plano cartesiano quadriculado para a construção de gráficos.

A primeira sessão ocorreu no dia 29 de abril de 2006 e, dos dez alunos, faltaram dois, provavelmente por causa do feriado prolongado ocorrido nos dois dias anteriores. Para as nossas análises, nesta etapa, não levamos em consideração a participação da dupla.

Os grupos, em dupla, foram divididos da seguinte forma:

G1: alunos A e R.

G2: alunos C e J.

G3: alunos Jô e D.

G4: alunos Re e L.

Nesta fase da experimentação, procuramos propiciar um ambiente adequado aos alunos, que favorecesse a realização de transformações de registros, como conversão e tratamento, e as representações de ponto, reta e parábola.

3º) Experimentação das atividades no ambiente informático.

Como comentamos anteriormente, esta etapa corresponde às sessões III, IV e V.

Nas sessões III e IV, as atividades da primeira etapa são retomadas para serem confirmadas ou refutadas no ambiente informático com o uso do plotador gráfico *Winplot*. Na sessão V, inicialmente sem o uso do ambiente informático, as atividades semelhantes às da sessão II são também retomadas para serem confirmadas ou refutadas.

No ambiente informático, os alunos deveriam resolver atividades que estivessem relacionadas com a noção de parâmetro, como família de pontos a um parâmetro, e gráficos de curvas planas parametrizadas, como a reta, a parábola e outras. Estas atividades permitiram investigar se a articulação entre as conversões de registros semióticos e os pontos de vista paramétrico e cartesiano possibilita ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas.

Com relação ao horário, as sessões sempre tiveram inicio às 09h30 com término previsto para 11h10, e, em algumas, como nas sessões II, III e V, foram prorrogadas para no máximo 11h30.

Entre as sessões IV e V tivemos alguns problemas como a falta de energia elétrica, pois a fiação da escola foi roubada. Adiando a quinta sessão por duas semanas.

O observador, por motivos pessoais, esteve ausente nas sessões II e III.

Também houve perda de áudio nas sessões I e II, por problemas técnicos no gravador de voz.

1.2.1 A coleta de dados

As análises que serão realizadas se apóiam nos seguintes dados coletados:

1) Formulário respondido pelos 8 alunos no decorrer de cada atividade em todas as etapas.
2) Gravação em áudio de dois dos grupos nas sessões III, IV e V.
3) Gravação em vídeo de todas as sessões.
4) Análise das sessões realizadas pelo observador e pelo pesquisador.

1.2.2 Público alvo

O projeto de pesquisa foi submetido e aprovado pela diretora e pelo coordenador pedagógico da Escola Estadual General José Artigas, da cidade de Diadema, que oferece ensino fundamental e médio, pois, além do uso de novas tecnologias ser um atrativo, seria oferecido um certificado aos alunos, pela participação de um curso de elaboração de GIF's animados, em um ambiente informático, com base na geometria analítica.

O projeto foi apresentado aos alunos do 3º ano do ensino médio, em forma de curso, não havendo pré-seleção para a participação.

Inicialmente, 10 alunos se comprometeram a participar do curso e, ao longo do mesmo, somente 8 alunos tiveram freqüência regular.

Antes de iniciar as atividades da seqüência, apresentamos aos alunos nosso projeto de pesquisa, procurando estabelecer como seriam desenvolvidas as sessões e a relação professor, observador e aluno.

Ficou evidente para os alunos que não teriam uma nota como resultado do curso, mas seriam avaliadas as suas ações sobre as atividades propostas pela pesquisa.

A familiarização com o *software Winplot*, que não será aqui analisada, foi útil na medida em que propiciou aos alunos um primeiro contato com a geometria analítica a partir de conceitos mobilizados, como funções do 1º e 2º graus e as suas representações gráficas, importantes para a seqüência de atividades propostas.

Outro detalhe importante foi a presença considerável dos alunos em um dia não letivo: sábado.

2. Análise das observações das duas primeiras sessões.

Neste momento, descrevemos como os alunos desenvolveram as atividades propostas, procurando interpretar a produção dos alunos nos dados coletados da experimentação.

Na primeira sessão, observamos atividades desenvolvidas no ponto de vista cartesiano e, na segunda sessão, atividades no ponto de vista paramétrico.

Análise da sessão I: representação de ponto, reta e parábola.

Os alunos deveriam realizar transformações em registros semióticos das representações de ponto, reta e parábola, utilizando papel, lápis e um plano cartesiano quadriculado.

Tendo como finalidade investigar se a conversão entre os registros: linguagem natural, simbólica e gráfica, permite verificar se os alunos serão capazes de entender e representar pontos por coordenadas (x,y) no plano cartesiano, encontrar gráficos de uma reta e uma parábola e representar a equação algébrica que valide a relação entre as variáveis x e y .

Resumimos abaixo os resultados encontrados pelos alunos.

TRANSFORMAÇÕES EM REGISTROS	Atividades	G1		G2		G3		G4	
		Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Conversão entre registros: da linguagem natural para o gráfico.	1a	X		X		X		X	
	2a	X		X		X		X	
Conversão do registro gráfico para a linguagem natural.	1b	X		X			X	X	
	2b	X		X			X	X	
Conversão do registro gráfico para o simbólico.	1c		X	X			X	X	
	2c		X	X			X	X	
	3b		X	X			X	X	
	3d		X	X			X	X	
Tratamento no registro gráfico	3a	X		X		X		X	
	3c	X		X		X		X	

QUADRO 23: Sessão I

Como previamos, os alunos mobilizaram conhecimentos prévios na resolução das atividades 1a e 2a, respondendo de maneira satisfatória, talvez pela facilidade da malha quadriculada e dos valores das coordenadas serem números inteiros. Em todas as respostas, no registro gráfico, foi traçada uma reta ou um segmento de reta facilitando o entendimento das próximas questões.

Nas atividades 1b e 2b, o G3 não conseguiu representar outros pontos, como previamos, provavelmente por dificuldades na identificação gráfica dos pontos de uma reta ou parábola e, conseqüentemente, não se apresentaram outros pontos que pertencem à reta ou parábola.

Já nas atividades 1c e 2c, metade dos grupos não conseguiram representar as equações da reta, como $y = x + 1$ e da parábola, como $y = x^2$. Como previamos, provavelmente não realizaram um tratamento no registro gráfico e, por meio de cálculos inadequados, atribuíram valores a uma das variáveis e encontraram valores falsos que não correspondem à outra variável. Portanto não encontraram uma relação de dependência entre as variáveis x e y e, conseqüentemente não representaram as equações.

O grupo G3 é justificado por não apresentar uma solução correta nos itens anteriores, já o G1 simplesmente não respondeu.

Nas atividades 3a e 3c, todos os grupos conseguiram representar as coordenadas de pontos pertencentes à reta ou parábola. Como previamos, entre diversas respostas, escolheram pontos estratégicos sobre os gráficos e, conseqüentemente, identificaram os pontos por meio de suas coordenadas.

Nas atividades 3b e 3d, metade dos grupos não conseguiu representar as equações da reta, como $y = x + 2$ e da parábola, como $y = x^2 + 1$. Como previamos, não realizaram um tratamento no registro gráfico e, provavelmente, por meio de cálculos inadequados, atribuíram valores a uma das variáveis e encontraram valores falsos que correspondem à outra variável. Não encontraram uma relação de dependência entre as variáveis x e y e, os grupos não responderam às atividades.

Análise da sessão II: equações paramétricas da reta

Os alunos tinham que resolver as atividades com papel, lápis, borracha, régua e plano cartesiano quadriculado.

O principal objetivo foi investigar se as articulações entre o ponto de vista paramétrico e as transformações em registros semióticos facilitariam o entendimento da noção de parâmetro e de seu uso em equações paramétricas.

Resumimos abaixo os resultados encontrados pelos alunos.

TRANSFORMAÇÕES EM REGISTROS	Atividades	G1		G2		G3		G4	
		Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Conversão da linguagem natural para o gráfico	1a	X		X		X		X	
Conversão do registro gráfico para a linguagem natural.	1a	X		X		X		X	
	1h		X	X		X		X	
Tratamento no registro simbólico.	1a		X		X	X			X
	1b e 1e	X		X		X		X	
	1c e 1f		X		X		X	X	
	1d e 1g		X		X	X		X	
	1h		X	X			X	X	
	1i		X	X		X		X	

QUADRO 24: Sessão II

Em relação às questões **1a e 1h** e a conversão do registro gráfico para a linguagem natural, o grupo G1 conseguiu responder 1a, mas não respondeu à questão 1h, pois, provavelmente, perdeu tempo nas questões iniciais, o que não foi previsto na análise a *priori.*

Atividades com tratamento no registro simbólico (transformação no mesmo sistema semiótico):

Na questão **1a,** o grupo G3 foi o único que preferiu justificar a resolução da questão no registro simbólico, representando, conforme FIG. 82, a equação cartesiana da reta. Foi justamente o grupo que, na sessão anterior, não havia conseguido resolver a atividade por meio das conversões. É provável que a institucionalização local tenha interferido.

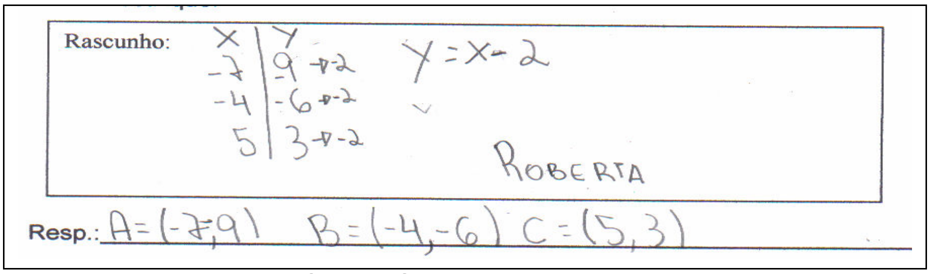


FIG. 82 – Sessão II: resposta 1a

Os demais grupos preferiram responder por meio da conversão entre a linguagem natural e o gráfico. Também isso não foi previsto na análise a *priori*.

Já nas questões 1b e 1e, como previsto, os alunos conseguiram completar a tabela sem muita dificuldade, bastando para isso, desenvolver alguns cálculos aritméticos.

Nas questões 1c e 1f, apenas o grupo G4 conseguiu desenvolver as equações paramétricas, como previsto, em conseqüência de respostas bem sucedidas das questões 1b e 1e. Os demais grupos, também previsto, realizaram um tratamento no registro simbólico, por meio de cálculos inadequados ou atribuíram valor a uma das variáveis e encontraram valores falsos que correspondiam à outra variável. Portanto, ou não encontraram as equações paramétricas adequadas em função do parâmetro t, representando equações que não correspondiam à solução esperada ou não responderam às questões pela dificuldade de representar as equações paramétricas a partir das coordenadas de dois pontos.

Em particular, e não previsto, o grupo G3, como resposta, representou equações cartesianas como se fossem paramétricas:

1c) “y=x+5” e “x= y-2”

1f) “y=x+3” e “x= y+3”

Nas questões 1d e 1g, como previsto, os grupos G3 e G4 conseguiram responder o esperado, pois desenvolveram as equações paramétricas nas questões 1c e 1f, ou observando as tabelas preenchidas de maneira correta nas questões 1b e 1e, ou identificando facilmente as posições (2;5) e (-1;-3).

Os grupos G1 e G2 não responderam às questões 1d e 1g, como previsto, provavelmente por não terem desenvolvido as equações paramétricas ou por não observarem as tabelas das questões 1b e 1e que foram respondidas de maneira correta.

A questão 1h foi bem sucedida pelos grupos G2 e G4, como previsto e, apenas observando os gráficos de reta ou semi-reta, foi possível justificar as questões.

O grupo G1 provavelmente, como previsto, não respondeu devido à não conversão do registro gráfico para a linguagem natural, ocorrida também na questão 1a.

O grupo G3 respondeu que Alexandre deveria alterar a sua rota, mas apresentou coordenadas inadequadas para atingir o alvo, uma situação não prevista.

Para a questão 1i, como previsto, os grupos G2, G3 e G4 provavelmente observaram os valores da tabela preenchida corretamente para identificar que Roberta atingiu o submarino em quatro minutos.

O grupo G1, mesmo com a tabela preenchida corretamente, não respondeu à questão. Provavelmente perdeu tempo nas questões iniciais, o que não foi previsto na análise a *priori.*

3. Análise das observações das três últimas sessões.

Na terceira sessão, observamos atividades já desenvolvidas nas sessões anteriores, porém agora, de maneira dinâmica, para as quais os alunos constroem gráficos de ponto, reta e parábola.

Na quarta sessão, observamos a resolução de algumas questões da sessão II, agora no ambiente informático, e seguiu-se com um estudo gráfico de algumas curvas planas algébricas e transcendentes a partir de algumas de suas respectivas equações.

Na quinta sessão, inicialmente sem o uso do ambiente informático, observamos o desenvolvimento de equações paramétricas da reta a partir de pontos quaisquer alinhados no plano. No segundo momento, agora no ambiente informático, houve atividades de outras curvas, como na sessão IV, para a construção de um *GIF* animado.

Análise da sessão III: família de pontos a um parâmetro e gráficos de reta e parábola.

Os alunos resolveram estas atividades no ambiente informático.

Investigamos se a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e a conversão entre os registros de representação da linguagem *Winplot*, da simbólico-algébrica e a gráfica, em um ambiente informático, possibilitaram ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas da reta e da parábola e as suas equações cartesianas ou paramétricas.

Resumimos abaixo os resultados das questões articuladas com a conversão de registros de representação semiótica encontrados pelos alunos:

TRANSFORMAÇÕES EM REGISTROS	Atividades	G1		G2		G3		G4	
		Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.	1a	X		X		X		X	
	1b	X		X		X		X	
	1c	X		X		X		X	
	1d	X		X		X		X	
	1f		X	X		X		X	
	2a	X		X		X		X	
	2b		X	X			X	X	
	2d		X	X			X	X	
	3a		X		X		X		X
	3b	X		X		X		X	
Da representação gráfica para a simbólico-algébrica.	1e		X	X		X		X	
	2c		X	X			X	X	
	3c		X	X		X		X	

QUADRO 25 - Sessão III

Questão 1a: como previsto, os alunos responderam de maneira plenamente satisfatória.

Questão 1b: como previsto, após representarem o ponto F=(t;1+t) no *Winplot* e observando a sua representação gráfica como um dos pontos alinhados, obtidos na questão 1a por meio de cálculos, os alunos identificaram t=0.

Questão 1c: como previsto, após a conversão entre os registros de representação da simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e conseqüentemente para a gráfica, os alunos identificaram com facilidade os valores de "t", obtendo os pontos B e E, quando t=2 e t=4 respectivamente.

Questão 1d: como previsto, o grupo G1 respondeu satisfatoriamente. Apresentamos na FIG. 83, a sua resposta.

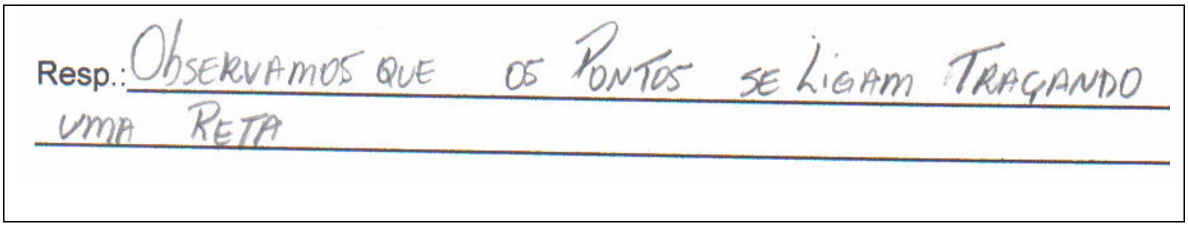

Resp.: OBSERVAMOS QUE OS PONTOS SE LIGAM TRAÇANDO UMA RETA

FIG. 83 – Sessão III: resposta 1d

Os grupos G2, G3 e G4, como também foi previsto na análise a *priori,* não mencionaram como pontos da reta ou segmento de reta, mas como uma família de pontos. Apresentamos na FIG. 84 a resposta do G4.

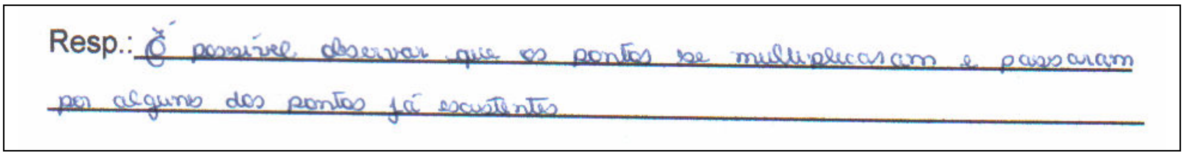

Resp.: É possível observar que os pontos se multiplicaram e passaram por alguns dos pontos já existentes

FIG. 84 – Sessão III: resposta 1d.

Questão 2a: como previsto, os alunos visualizaram no *Winplot* os três pontos. Para conseguirem, variaram os valores reais do parâmetro "a" no *Winplot*, até obterem a posição dos três pontos, A, F e C, na parábola.

Questão 2b: os grupos G2 e G4, como previsto, responderam que "o *Winplot* mostrou vários pontos que pertencem à parábola" e "que os pontos traçam a linha da parábola". Nessa resposta, entendemos "linha" como caminho ou lugar geométrico.

Os grupos G1 e G3 não responderam e o G1 tentou, mas não conseguiu. Não houve uma intervenção do professor.

As dificuldades dos dois grupos foram em responder, na linguagem natural, palavras como caminho, traçado, lugar geométrico, que não são familiares para os alunos, portanto esta dificuldade, não prevista, fez com que os grupos não respondessem. Outro detalhe é que parte da resposta já estava explícita na questão, deixando os alunos com dúvidas. Neste momento, o professor deveria intervir, sem necessariamente dar a resposta.

Questão 3a: os grupos não responderam como esperado. No lugar de traço de reta ou segmento de reta, escreveram reta, como FIG. 85 do G2. Como previsto, três dos grupos apresentaram as coordenadas dos pontos inicial e final.

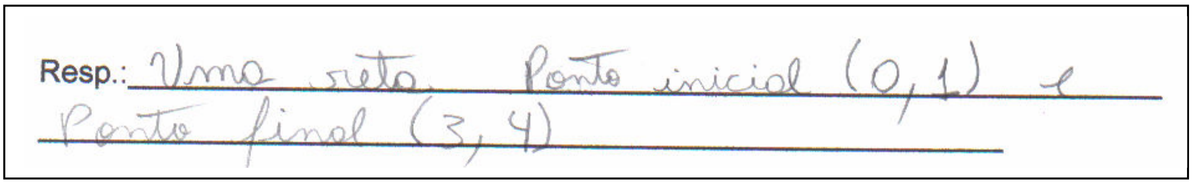

Resp.: Uma reta. Ponto inicial (0, 1) e Ponto final (3, 4)

FIG. 85 – Sessão III: resposta 3a

O G1 também não respondeu como esperado os pontos inicial e final do traço de reta.

Novamente não previsto, como na questão anterior, algumas palavras não eram familiares para o vocabulário dos alunos, como traço da reta, limite do intervalo, e não houve a intervenção do professor.

Questão 3b: todos os grupos responderam como previsto, FIG. 86 do G4:

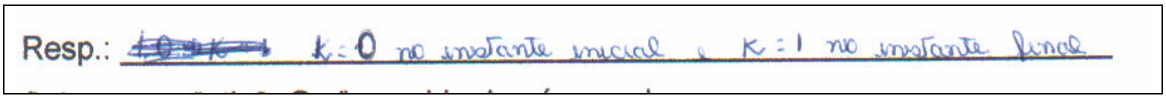

Resp.: k = 0 no instante inicial e k = 1 no instante final

FIG. 86 – Sessão III: resposta 3b

Questões 1e e 3c: três dos quatro grupos responderam como previsto. Apresentaram como resposta a equação cartesiana "$y = x + 1$".

O G1, como previsto, apresentou dificuldade em escrever uma equação da reta, dados alguns de seus pontos. Não encontrou uma relação de dependência entre as variáveis x e y e, como conseqüência, representou uma equação não correspondente à solução esperada. No caso da questão 3c, não previsto, bastaria observar a questão 3a e identificar x=t, substituindo-o em y=1+t .

Questão 2c: dois grupos responderam como previsto.

Os grupos G1 e G3, como na questão anterior, apresentaram dificuldades em escrever uma equação da parábola, dados alguns de seus pontos. Não responderam provavelmente, como previsto, em conseqüência de não terem concretizado a questão 2b.

Questão 1f: três dos quatro grupos responderam como previsto.

O G1, como previsto, apresentou dificuldade em escrever uma equação da reta, dados alguns de seus pontos.

Questão 2d: os grupos G2 e G4 apresentaram respostas, como previsto, e conseqüentemente conseguiram representar a equação na questão 2c.

O G1 e G3, como previsto, apresentaram dificuldade em escrever uma equação da parábola, dados alguns de seus pontos.

Análise da sessão IV: curvas planas algébricas e transcendentes.

As atividades foram realizadas no ambiente informático.

Investigamos se a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e a conversão entre os registros de representação semiótica em um ambiente informático, possibilitam ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesiana ou paramétrica.

Inicialmente foi retomada uma atividade desenvolvida na sessão II: a parametrização da reta, agora no ambiente informático. Investigamos se o *Winplot* facilitou o trabalho dos alunos nas conjecturas de suas soluções.

Articulando as atividades da sessão III com outras curvas planas, observamos se o uso de parâmetros estabeleceria uma identificação significativa entre os gráficos e as equações de curvas com a história de algumas das curvas.

Sessão IV:

Resumimos abaixo os resultados das questões, articuladas com as conversões entre os registros de representação, encontrados pelos alunos:

TRANSFORMAÇÕES EM REGISTROS	Atividades	G1		G2		G3		G4	
		Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.	1a	X		X		X		X	
	1b		X		X		X		X
	2a;2b; 2c;...;2j	X		X		X		X	
Da representação gráfica para a simbólico-algébrica.	1b		X		X		X		X

QUADRO 26 - Sessão IV

Questão 1a: como previsto, o grupo G2, após desenvolver cálculos, FIG.87, com as coordenadas dos mísseis apresentados em função do parâmetro “ t”, como nas atividades 1c e 1f da sessão II, encontrou as suas equações paramétricas, representando-as no *Winplot* e conseqüentemente os gráficos de retas possibilitaram identificar os necessários quatro minutos para o míssel de Roberta atingir o submarino.

Já os demais grupos, relembrando as equações desenvolvidas nas atividades anteriores e observando a representação gráfica, responderam à questão sem desenvolver os cálculos para obter as equações paramétricas da reta.

Míssel "R"	Míssel "A"
$\boxed{y = -7 + 3.t}$ $y = -7 + 3.0$ $y = -7 + 0$ $y = -7$ $\boxed{x = -9 + 3.t}$ $x = -9 + 3.0$ $y = -9 + 0$ $x = -9$	$\boxed{y = -8 + 5.t}$ A $y = -8 + 5.0$ $y = -8 + 0 = -8$ $x = 9 - 2.t$ $x = 9 - 2\ 0$ $9 - 0$ 9

FIG.87 –Sessão IV: 1a

A atividade traria melhores resultados se fossem alterados os valores das coordenadas iniciais dos mísseis. Assim poderíamos investigar se os demais grupos utilizariam cálculos, como fez o G2.

Questão 1b: como previsto, todos responderam que Alexandre deveria mudar a rota, mas não conseguiram justificar apresentando a nova rota do míssel.

Alguns grupos, como o G2 e o G3, FIG. 88, até que obtiveram êxito apresentando a coordenada x como o esperado, $x = -8 + 13t$, porém não aconteceu o mesmo para a coordena y, $y = 9 - 6t$.

G2: Resp.: Alexandre $x = -8+13t$ $y = -4-4t$
G3: Resp.: Alexandre $x = -8 + 13t$ $y = -3 - 4t$

FIG. 88 – Sessão IV: 1a

Atividade 2 :

Para a atividade 2, vamos expor uma representação gráfica de cada grupo, pois foram desenvolvidas todas as questões.

Uma das construções desenvolvidas pelo grupo G1 foi a Limaçon de Pascal :

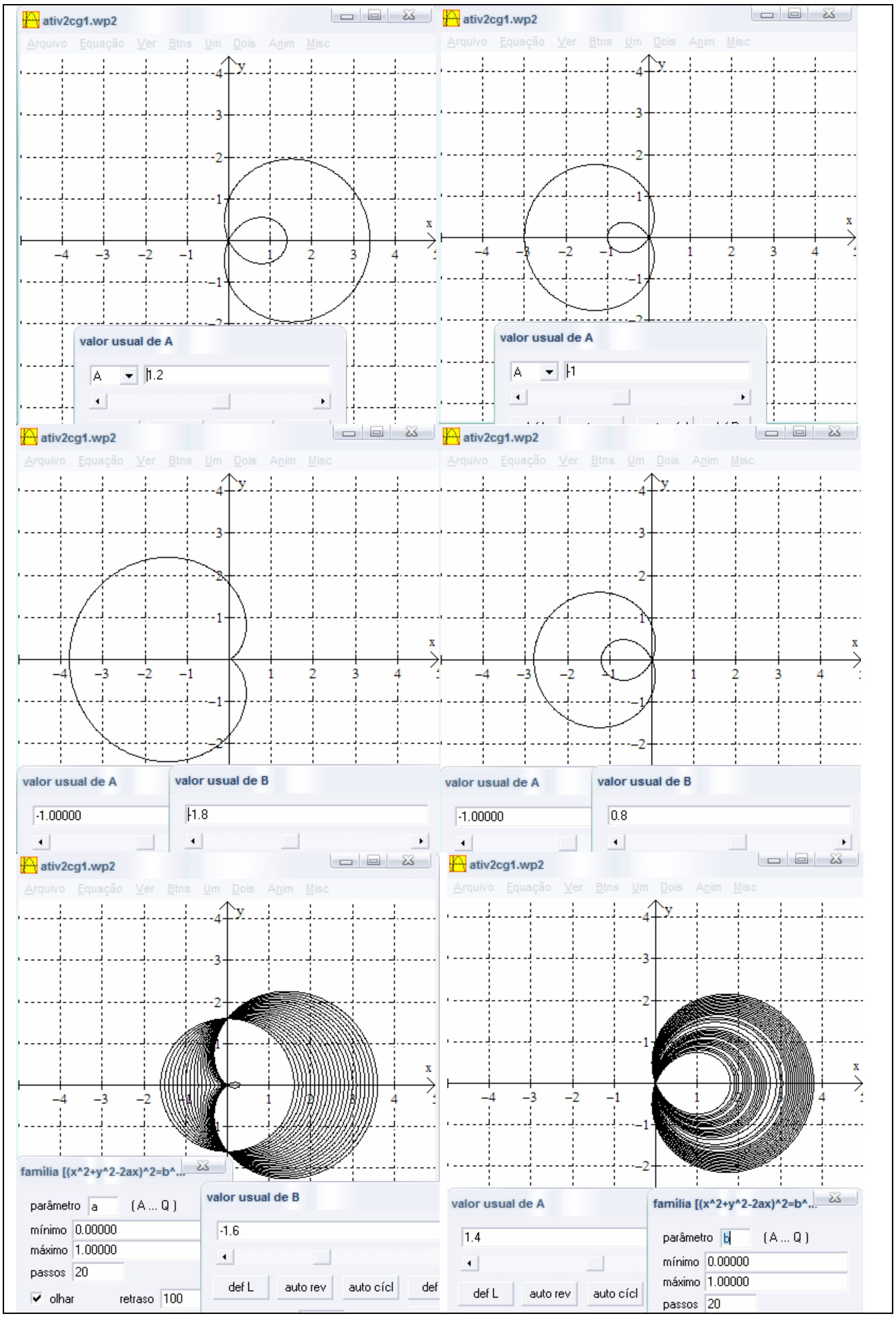


FIG. 89 – SessãoIV : 2c

Como previsto, o grupo G1, variando os valores reais dos parâmetros de **a** e **b** na equação cartesiana $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$ da curva limaçon de Pascal, obteve alguns de seus gráficos, FIG. 89, analisando na curva algébrica, de maneira implícita, algumas de suas propriedades geométricas. Em especial, o grupo utilizou um recurso do *Winplot* não previsto: uma família de gráficos da limaçon a um parâmetro.

Do grupo G2, escolhemos a representação da curva hipociclóide:

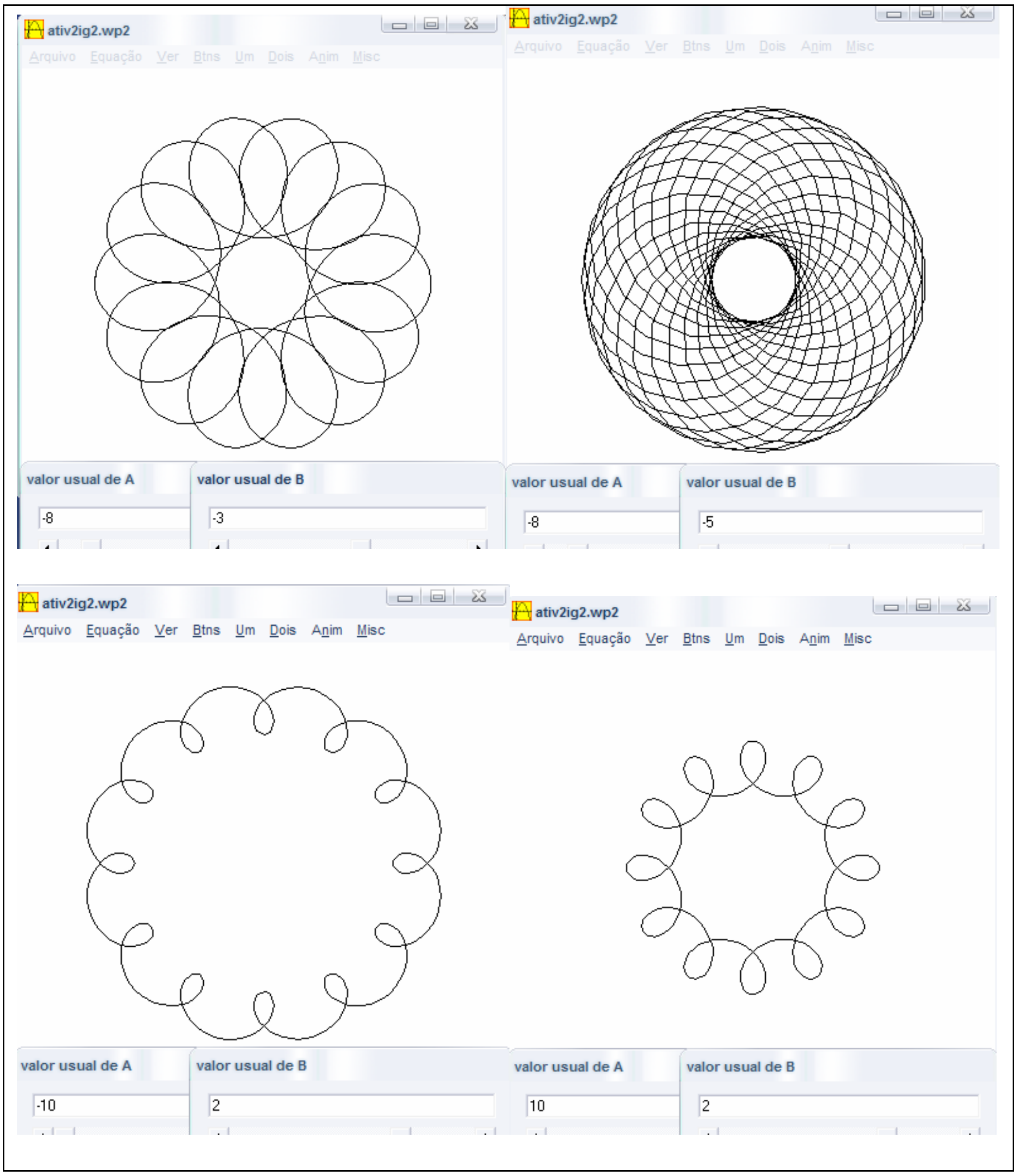


FIG. 90 – Sessão IV : 2

Como previsto, o grupo G2, variando os valores reais dos parâmetros de **a** e **b** nas equações paramétricas, x = (a-b)cos(t)+bcos((a/b-1)t) ; y =(a-b)sin(t)-bsin((a/b-1)t) , com $0 \le t \le 2\pi$rad da curva hipociclóide, obteve alguns de seus gráficos, FIG. 90, analisando na curva transcendente, de maneira implícita, algumas de suas propriedades geométricas. Em especial, o grupo utilizou um recurso do *Winplot* não previsto: o plano cartesiano implícito na tela do *Winplot*.

Do grupo G3, escolhemos a epiciclóide.

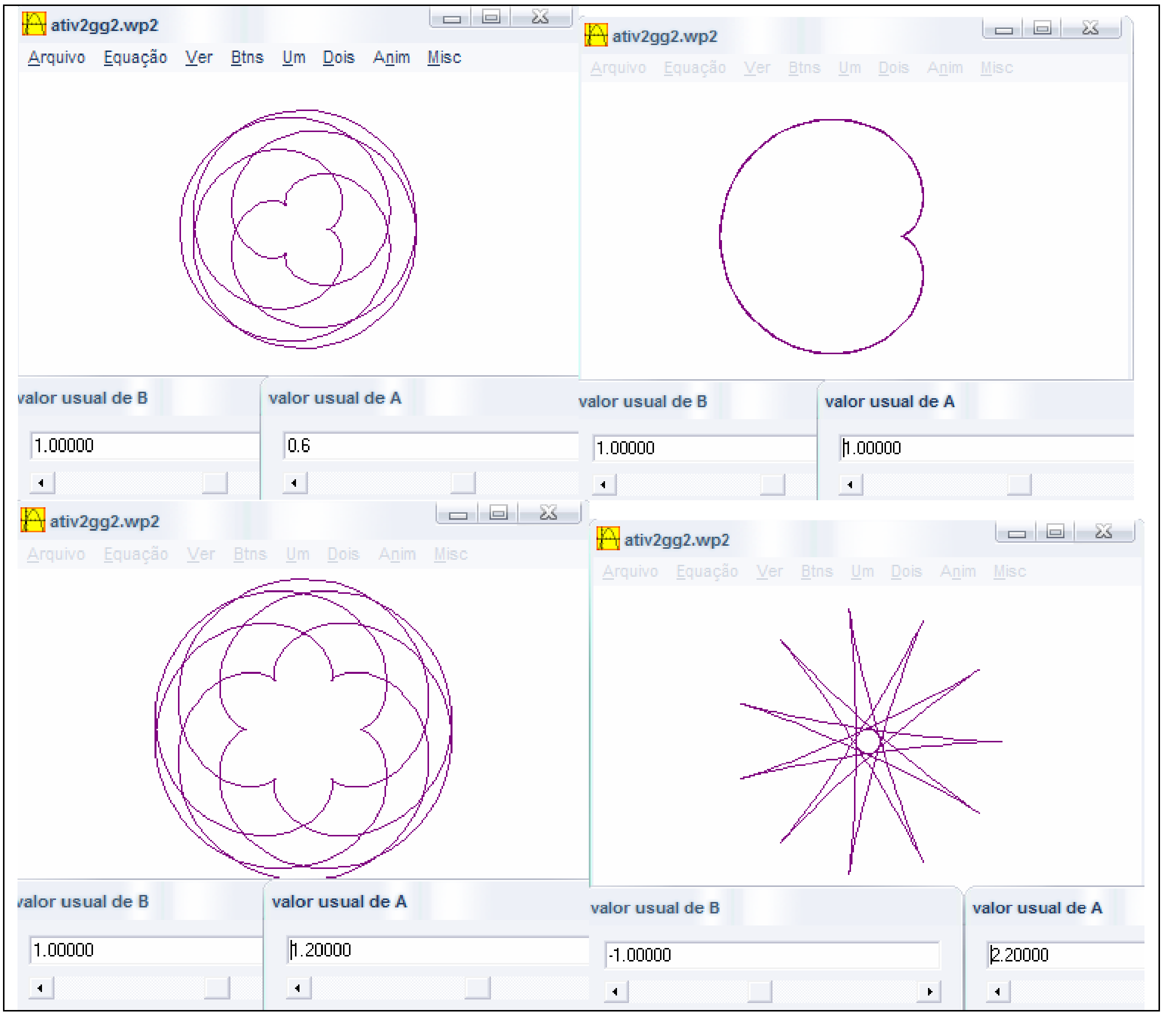


FIG.91- Sessão IV : 2g

Como previsto, o grupo G2, variando os valores reais dos parâmetros de **a** e **b** nas equações paramétricas, x =(a+b)cos(t)-bcos((a/b+1)t) ;

$y=(a + b)\sin(t)-b\sin((a/b+1)t)$, com $0 \leq t \leq 10\pi rad$ da curva epiciclóide, obteve alguns de seus gráficos, FIG. 91, analisando na curva transcendente, de maneira implícita, algumas de suas propriedades geométricas. O grupo também utilizou o plano cartesiano implícito na tela do *Winplot*.

Das representações gráficas do grupo G4, escolhemos a curva lemniscata de Bernoulli :

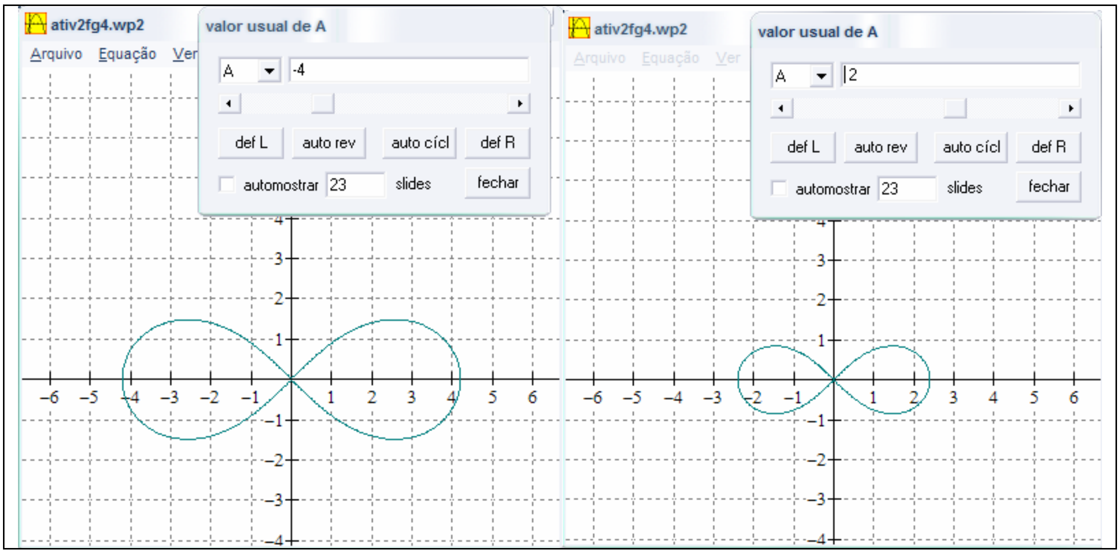


FIG. 92 – Sessão IV : 2f

Como previsto, o grupo G4, variando os valores reais do parâmetro **a** na equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ da curva lemniscata de Bernoulli, obteve alguns de seus gráficos, FIG. 92, analisando na curva algébrica, de maneira implícita, algumas de suas propriedades geométricas.

Análise da sessão V: Curvas planas e construção de GIF's animados.

Primeiramente investigamos se os resultados das sessões anteriores favoreceram ao aluno, no ponto de vista paramétrico, o desenvolvimento de equações paramétricas a partir de pontos quaisquer alinhados no plano e, conseqüentemente, o entendimento da noção de parâmetro sem a interferência do ambiente informático.

A atividade no ambiente informático investigou também, como na sessão IV, se a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e as conversões entre os registros de representação, como simbólico-algébrica, linguagem *Winplot* e gráfico, em um ambiente informático, possibilitam ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas.

Como prioridade, investigamos se, no caso de outras curvas planas, alterando-se os valores reais dos parâmetros de suas equações, variando-os e observando os efeitos geométricos provocados pela sua variação para a construção de GIF's animados, favorece-se o entendimento da noção parâmetro.

Resumimos abaixo os resultados das questões, articuladas com as transformações de representação semiótica, encontrados pelos alunos:

TRANSFORMAÇÕES EM REGISTROS	Atividades	G1		G2		G3		G4	
		Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Conversão da linguagem natural para o gráfico.	1 a	X		X		X		X	
Conversão do gráfico para o simbólico.	1 b		X	X		X		X	
Tratamento no registro simbólico: Da representação simbólico-algébrica para simbólico-tabular.	1c		X	X		X		X	
	1d		X	X		X		X	
Conversão da representação simbólico-algébrica para a linguagem *Winplot* e respectivamente para a gráfica.	2a;2b;2c; ...;2q	X		X		X		X	

QUADRO 27 - Sessão V: transformações

Questão 1a: como previsto, todos os grupos escolheram aleatoriamente, conforme FIG.93, as coordenadas de quatro pontos alinhados no plano quadriculado e aproveitaram a malha quadriculada como estratégia na identificação dos pontos.

G1 : A=(-5,-6), B=(-2,-3), C=(4,3) e D=(6,5).
G2: A=(-5,-3), B=(-1,1), C=(3,5) e D=(7,9).
G3 : A=(6,-9), B=(3,-5), C=(0,-1) e D=(-3,3).
G4 : A=(-5,2), B=(-4,3), C=(-3,4) e D=(-2,5).

FIG. 93 – Sessão V : Respsotas 1a

Questão 1b: Apenas um dos grupos, o G1, não correspondeu ao esperado, como previsto, por dificuldade nos cálculos. Em contra partida, os demais grupos, em conseqüência da escolha realizada na questão 1a, a partir de dois pontos, desenvolveram cálculos para se obterem as equações paramétricas da reta em função do parâmetro **t**.

Apresentamos abaixo as respostas e cálculos desenvolvidos pelos grupos:

O G1, por meio de cálculos, apresentou a coordenada x como esperado, mas não a coordenada y. Uma resposta adequada seria y=-6+3t.

$X = -5 + 3.T$
$Y = -6 - 3T$

Resposta: $X = -5 + 3.T$ / $Y = -6 - 3T$

FIG. 94 – Sessão V: 1bg1

Já os demais, como apresentamos no quadro seguinte, por meio de cálculos encontraram as equações paramétricas a partir de dois pontos quaisquer correspondentes ao alinhamento. É interessante observar que o grupo G2 desenvolveu cálculos de maneira implícita.

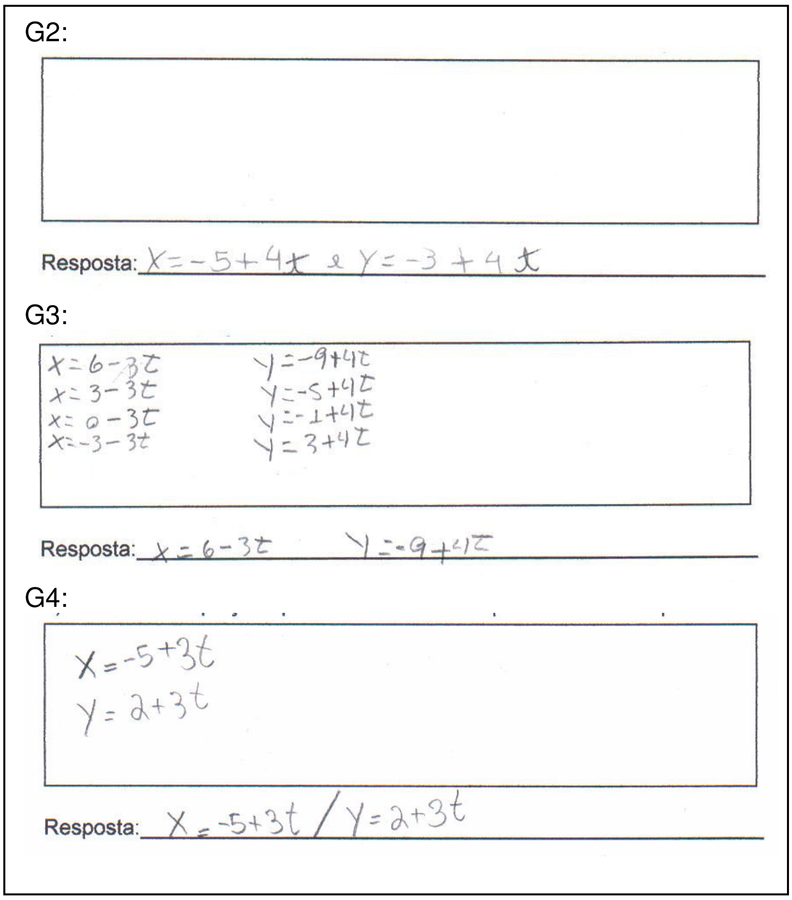


FIG. 95 – Sessão V: respostas 1b

Questão 1c e 1d: Utilizando as equações paramétricas obtidas na questão anterior e substituindo-se os valores de t, os grupos G2, G3 e G4 obtiveram o preenchimento adequado da tabela e dos valores de t para os quatro pontos alinhados.

Como previsto, o G1 não apresentou uma das equações paramétricas da reta (1b), portanto completou a tabela (1c) e a dos valores de t para os quatro pontos alinhados com valores inadequados.

Atividade 2 :

Para a atividade 2, exporemos representações gráficas da construção de um GIF animado de cada grupo.

O grupo G1 escolheu *o tridente de Descartes* com equação cartesiana (a+x)(a-x)(2a-x)=axy . Apresentamos alguns de seus gráficos.

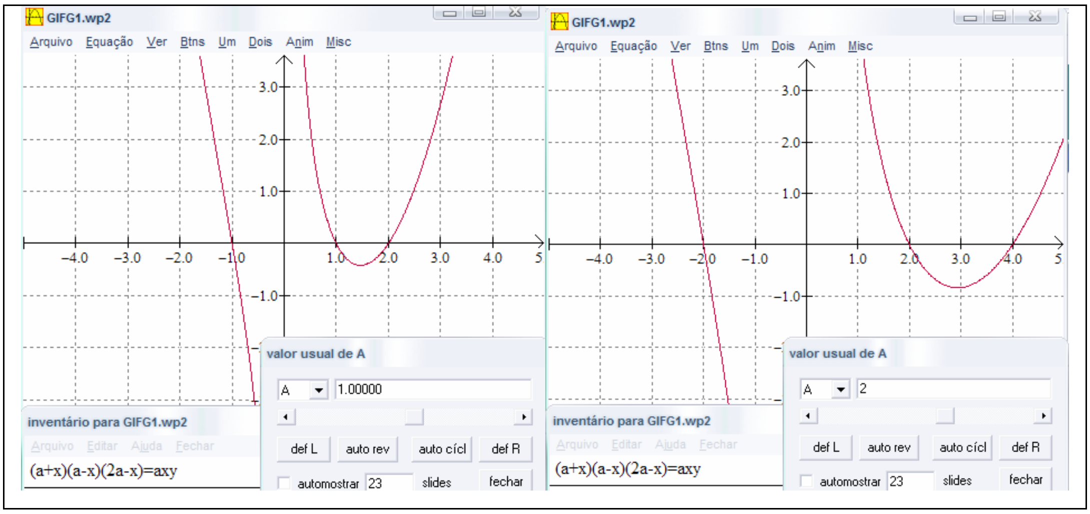


FIG. 96 – Sessão V: GIFG1

Para a representação dos gráficos, conforme inventário, o G1 realizou variações nos valores reais do parâmetro **a** .

Após construir vários gráficos, pode-se desenvolver o *GIF* animado no *GIF Animator*. Apresentamos abaixo alguns momentos da construção:

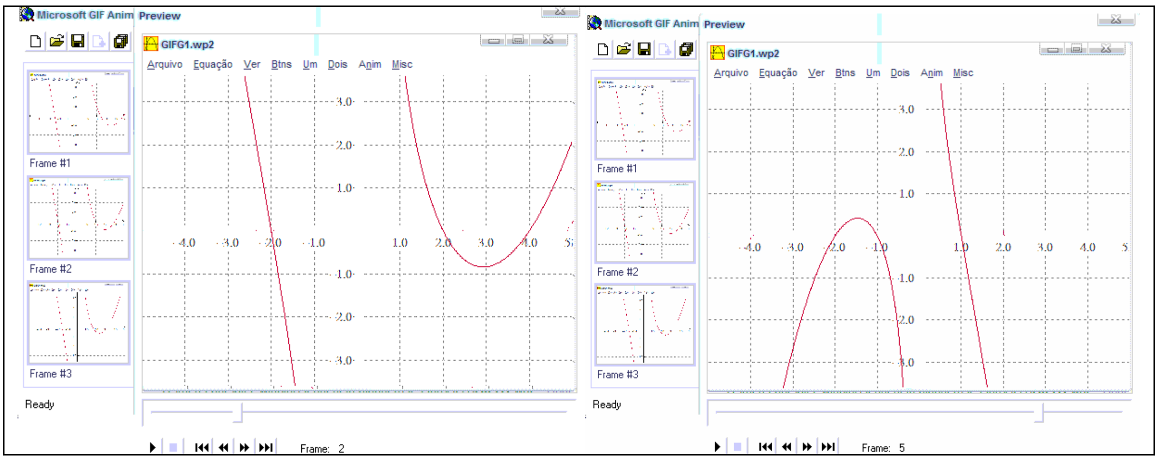


FIG. 97 – Sessão V: GIFG1

O grupo G2 escolheu *a parábola divergente de Newton* com equação cartesiana, $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Eis alguns dos gráficos construídos:

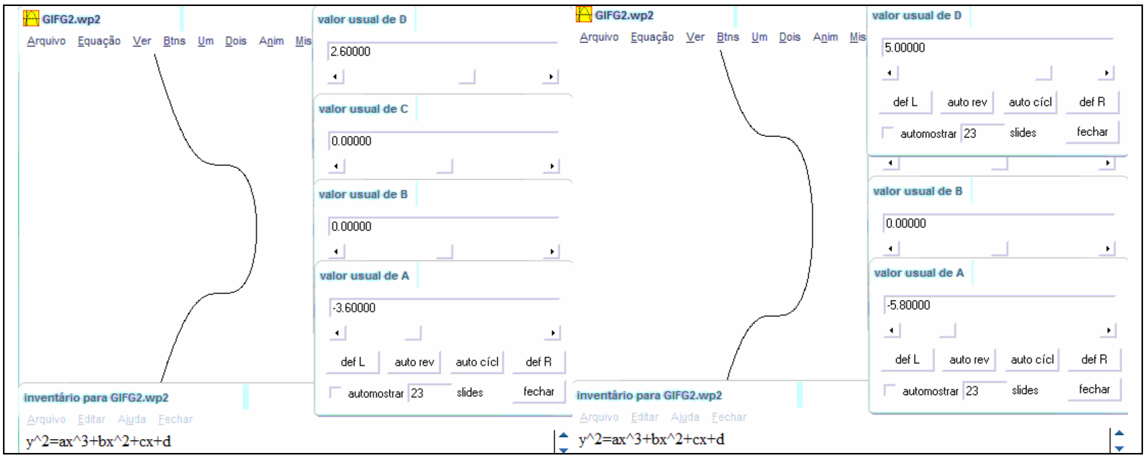


FIG. 98 – Sessão V: GIFG2

Em especial, este grupo desenvolveu, a partir dos diversos gráficos construídos, desenhos no *Paint*[33], complementado a animação gráfica do *GIF* no *software GIF Animator*. Alguns momentos da construção foram estes:

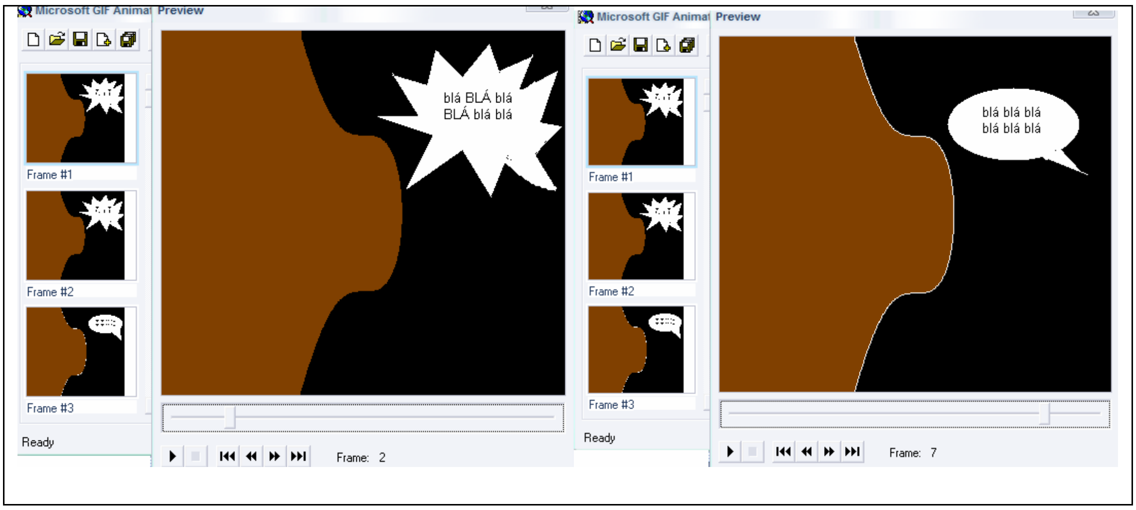


FIG. 99 – Sessão V: GIFG2

33 Um criador e editor de desenhos disponível nos sistemas operacionais da Microsoft.

O grupo G3 escolheu a *curva de Agnesi* com equação cartesiana $y(x^2 + a^2) = a^3$. Apresentamos, conforme FIG.100, alguns dos seus gráficos desenvolvidos:

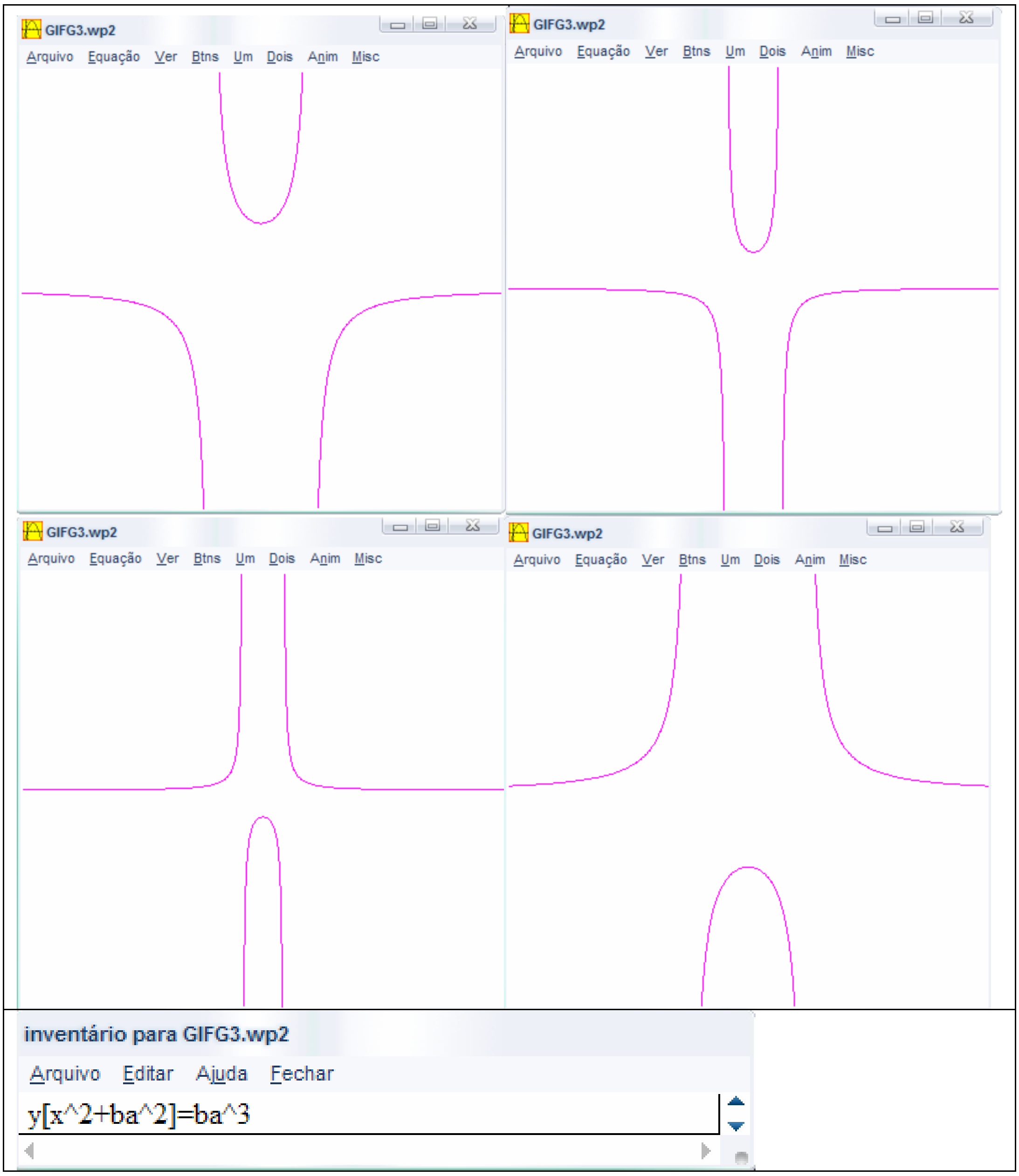


FIG.100 – Sessão V: GIFG3

Para a representação dos gráficos, conforme inventário, o G3 inseriu um novo parâmetro "b" na equação e realizou variações nos valores reais de a e b .

Após construir vários gráficos, pode-se desenvolver o *GIF* animado no *GIF Animator.* Eis alguns momentos da construção:

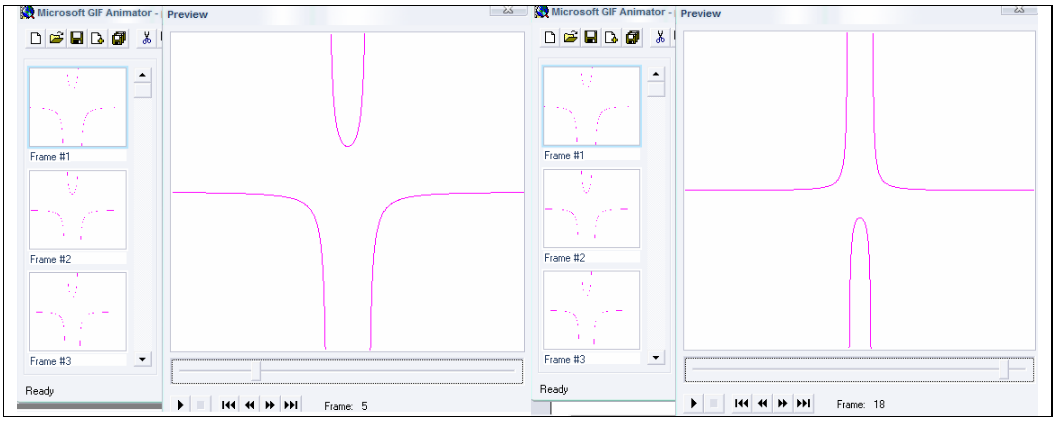


FIG. 101 – Sessão V: GIFG3

O grupo G4 escolheu a curva epicicloide com equações paramétricas, x=(a + b)cos(t)-bcos((a/b + 1)t) ; y=(a + b) sin(t)–b sin((a/b + 1)t). A seguir alguns dos seus gráficos desenvolvidos:

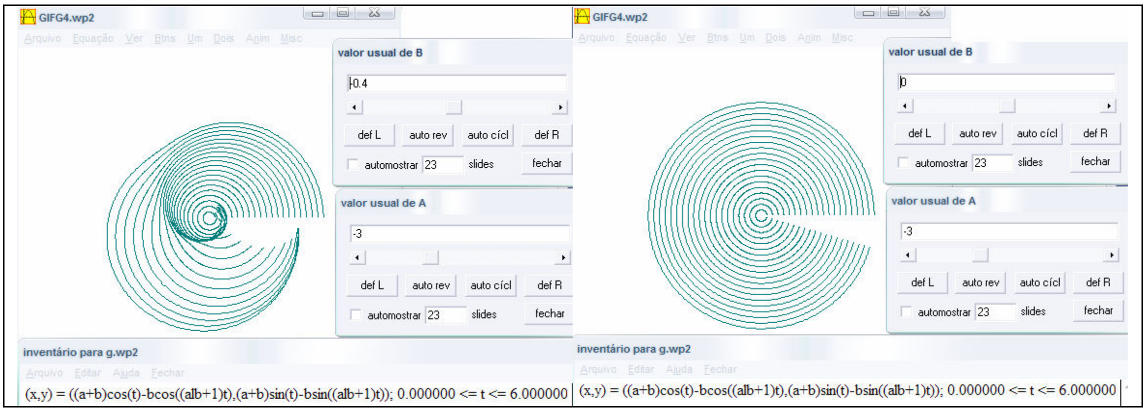


FIG. 102 – Sessão V: GIFG4

Para a representação dos gráficos, conforme inventário, o G4 considerou o parâmetro "t" como $0 \leq t \leq 6$ e realizou variações nos valores reais de a e b .

Após construir vários gráficos pode-se desenvolver o *GIF* animado no *software GIF Animator*. Mais alguns momentos da construção:

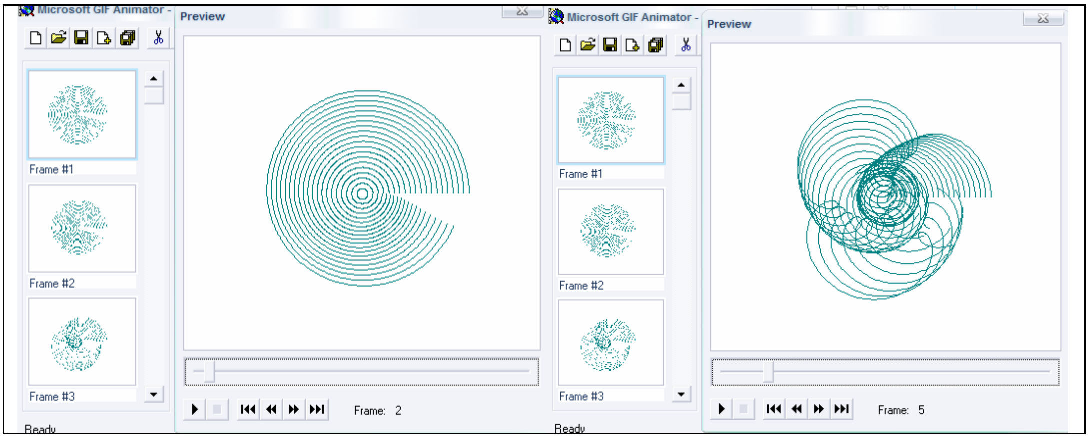
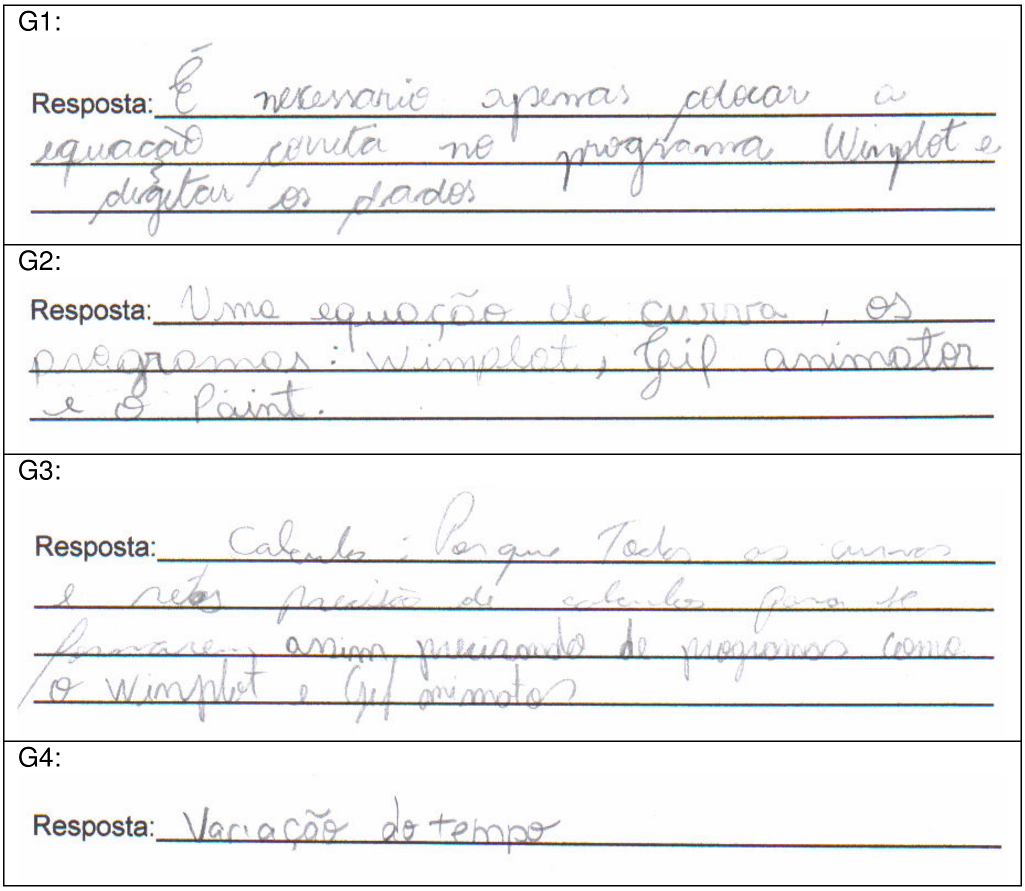


FIG.103 – Sessão V: GIFG4

No final da sessão, sobre o que é necessário para construção do *GIF* animado de uma curva, na sua maioria, as justificativas atenderam o previsto. Eis algumas:



G1:

Resposta: É necessario apenas colocar a equação escrita no programa Winplot e digitar os dados

G2:

Resposta: Uma equação de curva, os programas: Wimplot, Gif animator e o Paint.

G3:

Resposta: Calculos: Porque Todos os curvos e retas precisão de calculos para se formarem animação precisando de programas como o Wimplot e Gif animator

G4:

Resposta: Variação do tempo

FIG. 104 - Sessão V: justificativas

O G1 justificou apenas parte do que era necessário: como escrever a equação da curva no *Winplot*. O G2 justificou realmente como previsto.

Sobre o G3, entendemos "cálculos", como a variação dos valores reais dos parâmetros de equações. Em seguida, o grupo justificou a necessidade dos programas *Winplot* e *GIF Animator*.

Já sobre o G4, entendemos "variação do tempo" como a variação dos valores reais dos parâmetros de equações, portanto uma justificativa parcial do previsto.

A respeito de quais eram os procedimentos que foram executados, os grupos responderam:

Como parcialmente previsto, o G1 apresentou como procedimento, primeiramente, escrever as equações cartesianas (explícita ou implícita) ou paramétricas, e em seguida "animar". Entendemos como uma variação dos valores reais dos parâmetros.

G1: **Resposta:** usar os procedimentos na Explícita implícita ou paramétrica clicar em "OK" e depois animar
G2: **Resposta:** 1º DIGITAR A EQUAÇÃO NO WIN-PLOT. 2º VARIAR ALGUM DOS PA-RÂMETROS, DE MODO QUE A CURVA NOS FORNEÇA OUTRA FORMA 3º DEPOIS PASSAR PARA O PAINT E POR FIM SALVAR
G3: **Resposta:** Foi selecionado uma equação para a criação do Gif, assim mudando seus valores para obter curvas diferentes
G4: **Resposta:** Variação do tempo em função do ponto ou parametro

FIG. 105 – Sessão V: procedimentos

O G2 apresentou os procedimentos como previsto.

O G3, também como previsto, porém parcialmente, como escrever a equação da curva no *Winplot* e, em seguida, variar os valores reais de seus parâmetros.

É interessante observar que o G2 e o G3 entenderam a necessidade dos parâmetros nas equações para os diferentes gráficos de uma curva, atendendo em parte a proposta da pesquisa.

Porém entendemos que o G4 apenas identificou como procedimento a variação dos valores reais dos parâmetros de suas equações. Provavelmente interpretaram a importância do parâmetro para a determinação das posições de pontos e curvas no plano em cada instante de tempo, ou seja, em cada momento em que o parâmetro assume um valor.

4. CONCLUSÃO DA ANÁLISE A POSTERIORI

Na sessão I comprovou-se, em parte, a dificuldade existente na conversão do registro gráfico para o registro simbólico de reta e parábola no ponto de vista cartesiano. Para DUVAL (1988, p. 235-253), a razão das dificuldades identificadas por diferentes pesquisas quanto às tarefas de leitura e interpretação de representações gráficas, está no desconhecimento pelo aluno da correspondência semiótica entre o registro das representações gráficas e da e escrita algébrica.

No final da sessão, realizamos uma institucionalização local, com discussões entre os grupos sobre as respostas dadas e a identificação das dificuldades apresentadas em relação à representação da reta ou parábola como equações cartesianas. Por fim articulamos a noção de função com a resolução das atividades propostas para encontrar as respectivas equações.

Na sessão II, comprovou-se em parte a dificuldade existente no tratamento simbólico da representação simbólico-tabular para a simbólico-algébrica no ponto de vista paramétrico. A atividade se limitou muito mais ao tratamento no registro simbólico do que às conversões. Segundo DUVAL (2003, p.14), “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”.

No final da sessão, realizamos uma institucionalização local, com discussões entre os grupos sobre as respostas dadas e a identificação das dificuldades apresentadas a respeito das equações paramétricas como representação da reta.

Na sessão III, investigamos se a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e as conversões entre os registros de representação da linguagem *Winplot*, simbólico-algébrica e gráfica, em um ambiente informático, possibilita, em parte, ao aluno, refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas da reta e da parábola e as suas equações cartesianas ou paramétricas.

O *Winplot* facilitou parte do trabalho, pois os alunos não precisaram realizar diversos cálculos e repetiram diversas vezes a mesma atividade, dando uma resposta articulada com as diferentes atividades já desenvolvidas.

Conseqüentemente o computador, como ferramenta facilitadora, permitiu de alguma forma uma melhor compreensão da noção de parâmetro no estudo de pontos, curvas e algumas de suas propriedades geométricas no plano.

Mesmo verificando algumas relações entre as atividades realizadas no papel, nas sessões I e II, com o ambiente informático, ainda persistem dificuldades na conversão do registro gráfico para o simbólico, o que não permite, segundo DUVAL (2003, p.18), uma apreensão global qualitativa da coordenação de ambas às conversões entre os registros gráfico e simbólico.

Para a conversão do gráfico para o simbólico, os alunos preferem representar as equações cartesianas. Talvez aqui esteja detectado um problema, a escolha do ponto vista.

No final da sessão, também ocorreu uma institucionalização local, com trocas de informações entre os grupos sobre as conversões entre os registros simbólico e gráfico realizadas na sessão, pois consideramos que ainda persistiam dificuldades ou concepções inadequadas entre as representações de ponto, reta e parábola em pontos de vista paramétrico ou cartesiano. Por fim institucionalizamos os novos conhecimentos como: família de pontos a um parâmetro e lugar geométrico de uma reta ou parábola.

Na quarta sessão, foi possível validar que a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e as conversões entre os registros de representação (como simbólico-algébrica, linguagem *Winplot* e gráfico), em um ambiente informático, possibilitaram ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas, mesmo de maneira implícita.

Inicialmente foi retomada uma atividade desenvolvida na sessão II, a parametrização da reta, agora, no ambiente informático. Investigamos se o *Winplot* facilita o trabalho dos alunos nas conjecturas de suas soluções, chegando à seguinte conclusão: a atividade proposta poderia ter sido reformulada para outro contexto ou apenas trocando as coordenadas das posições dos mísseis. Como a atividade era idêntica à da sessão II, o interesse em resolvê-la mesmo no ambiente informático foi pequeno.

Mesmo assim, conseguimos identificar que é possível desenvolver mais atividades que utilizem equações paramétricas da reta. O ponto de vista paramétrico se mostrou mais fácil para atividades como essa.

Articulando as atividades desenvolvidas na sessão III com outras curvas planas, observamos que o uso de parâmetros estabeleceu uma identificação significativa entre os gráficos e as equações de algumas curvas famosas desenvolvidas ao longo da história da geometria analítica.

Os alunos tiveram tempo para rever cada caso das curvas planas apresentadas, pois não precisaram refazer os diversos cálculos realizados pelos matemáticos. Pode-se refazer parte desse trabalho dos matemáticos, como a construção dos gráficos, a partir de suas equações.

Na quarta sessão, observou-se o entusiasmo estampado nas faces dos alunos. Era como se as curvas estivessem sendo redescobertas ali, naquele momento. Talvez fosse interessante desenvolver, em estudos posteriores, o levantamento histórico de cada uma das curvas planas com o objetivo de explicitar as suas propriedades geométricas.

Como previsto, no final da sessão, a questão 1b foi institucionalizada por ter sido considerada uma questão de difícil entendimento.

Na quinta e última sessão, inicialmente, investigamos que realmente os resultados das sessões anteriores favoreceram ao aluno, no ponto de vista paramétrico, no desenvolvimento de equações paramétricas a partir de pontos quaisquer alinhados no plano e, conseqüentemente, o entendimento da noção de parâmetro sem a interferência do ambiente informático.

No segundo momento, com a atividade no ambiente informático, foi possível investigar que a articulação entre os pontos de vista cartesiano ou paramétrico e as conversões entre os registros de representação como: simbólico-algébrica, linguagem *Winplot* e gráfico, em um ambiente informático, possibilitam ao aluno refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas, mesmo de maneira implícita.

Como prioridade, foi possível investigar e constatar que, no caso de outras curvas planas, alterando-se os valores reais dos parâmetros de suas equações, variando-os e observando os efeitos geométricos provocados pela sua variação para a construção de gif's animados, favorece-se o entendimento da noção de parâmetro pelo aluno.

Por fim constatou-se que, em um ambiente informático, o uso de *softwares* gratuitos como o *Winplot* e o *GIF Animator*, como ferramentas, facilitou a compreensão da noção de parâmetro.

É possível afirmar, com base na validação de nossas hipóteses, que o entendimento da noção de parâmetro na geometria analítica articulado com noções de quadros (geométrico, algébrico e geometria analítica), com os pontos de vista (paramétrico e cartesiano) e com as transformações em registros de representação semiótica (simbólico-algébrica, gráfica e linguagem *Winplot*) permite ao aluno aprofundar-se nos estudos das curvas no $\mathbb{R}^2$ e posteriormente no estudo de superfícies no $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de atividades propostas para a seqüência didática (QUADRO 28), com a retomada de atividades anteriores e um aprofundamento nas demais, propiciou aos alunos, como resultado, uma evolução conceitual.

SESSÕES	NOVOS CONHECIMENTOS EM JOGO
SESSÃO I	- Equação algébrica cujas coordenadas de pontos no plano mantém uma relação de dependência.
SESSÃO II	-Representação gráfica de reta na forma paramétrica; -Cálculo das coordenadas de pontos em função de um parâmetro.
SESSÃO III	-Família de pontos a um parâmetro; -Lugar geométrico de uma reta ou parábola.
SESSÃO IV	-Gráficos e equações de algumas curvas planas algébricas ou transcendentes.
SESSÃO V	-Gráficos e equações de algumas curvas planas algébricas ou transcendentes e a parametrização de curvas.

QUADRO 28 - Resultados

Com base nos resultados apresentados (QUADRO 28) da seqüência didática, no desempenho dos alunos, no confronto das análises a *priori* e a *posteriori*, e na confirmação de nossas hipóteses de pesquisa, temos condições de afirmar que a questão de pesquisa (*"Um ambiente informático, que possibilita a construção de gráficos de curvas, de maneira dinâmica, articulado com a conversão entre registros de representação semiótica, favorece o entendimento da noção de parâmetro?")* foi respondida de maneira satisfatória.

CAPÍTULO VI: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresentamos as considerações finais de nosso trabalho, a análise dos resultados em função dos fundamentos teóricos e metodológicos e questões futuras para o ensino e aprendizagem da noção de parâmetro na geometria analítica.

1. Objetivos e resultados da pesquisa.

Iniciamos os estudos a partir de uma inquietação: como pesquisas em Educação Matemática podem contribuir para o ensino e a aprendizagem da noção de parâmetro e equações paramétricas?

Participando do grupo TecMEM, onde desenvolvemos nosso trabalho, pesquisamos sobre o uso das novas tecnologias na Educação Matemática, especificamente sobre as representações gráficas de pontos e curvas planas, de acordo com as suas respectivas coordenadas, e, principalmente, as equações paramétricas com a utilização de um plotador gráfico.

Nosso objetivo era verificar se um ambiente informático permite ao aluno reconhecer algumas propriedades de curvas com o uso de parâmetros e, por meio de representações e interpretações gráficas de maneira dinâmica, compreender melhor suas equações.

Procuramos investigar as reais potencialidades de um ambiente informático no processo didático de ensino-aprendizagem da geometria analítica tomando como referência o artigo de JESUS e SOARES (2005) que propõe modos de construção de gráficos de curvas e suas equações cartesianas ou paramétricas com o uso do *software Winplot.*

Deste modo, a partir de um referencial teórico e estudos preliminares, construímos uma seqüência didática. O confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori* desta seqüência, foi fundamental para a confirmação das hipóteses que permitiram responder à questão de pesquisa de maneira satisfatória. Concluímos que se pode favorecer ao aluno o entendimento da noção de parâmetro em geometria analítica as seguintes situações:

- A articulação entre os pontos de vista paramétrico e cartesiano e as conversões entre registros semióticos;

- Atividades em sala de aula, sem a interferência do ambiente informático, tais como o desenvolvimento de equações paramétricas a partir de pontos quaisquer alinhados no plano;

- No caso de curvas planas, como algumas famosas na história da geometria analítica, a alteração dos valores reais dos parâmetros de suas equações e a observação dos efeitos geométricos provocados pela sua variação para a construção de GIF's animados;

- O uso de *softwares* gratuitos, como o *Winplot* e o *GIF Animator*, em um ambiente informático, como ferramentas.

Destacamos nesta pesquisa o estudo dos momentos históricos de algumas curvas planas que privilegiam o ponto de vista cartesiano, com diversas representações para uma mesma curva algébrica ou transcendente, evidenciando a importância do uso de parâmetros nestas equações para as possíveis representações gráficas da curva.

A análise epistemológica contribuiu para a compreensão dos fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem da geometria analítica.

Constatamos, na evolução histórica de incógnita, parâmetro, variável, equações cartesiana, paramétrica ou polar, curvas planas algébricas e transcendentes, os momentos de envolvimento dos diferentes registros de representação semiótica e suas transformações.

2. Análise dos resultados em função dos fundamentos teóricos e metodológicos.

Em nossa fundamentação teórica, as pesquisas de DUVAL (2003), DOUADY (1986), DIAS (1998), BALACHEFF (1994) e ARTIGUE (1996) nos subsidiaram para o desenvolvimento da pesquisa.

Em DUVAL (2003), encontramos alguns elementos teóricos sobre os registros de representação semiótica, como a conversão entre os registros gráfico e simbólico. Verificamos a importância das representações semióticas no desenvolvimento do estudo de curvas planas, como a importância da apreensão global e qualitativa sobre as representações gráficas de pontos e curvas com relação às suas equações.

Em DOUADY (1986), a noção de mudança de quadros nos proporcionou o desenvolvimento de uma seqüência de atividades no subquadro da geometria: o da geometria analítica, com mudanças entre os quadros numérico, algébrico e de funções. No quadro da geometria analítica, foi possível ao aluno o estudo de algumas propriedades geométricas de pontos e curvas planas.

Em DIAS (1998), verificamos alguns problemas de articulação entre os diferentes sistemas de representação como o simbólico e gráfico em geometria analítica, abordados no quadro da flexibilidade entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico. Observamos que, para o aluno, um mesmo problema pode ser fácil de um ponto de vista e difícil de outro, como na sessão III atividades **1e** e **2c**.

Em BALACHEFF (1994), obtivemos as noções da transposição informática para a implementação da seqüência de atividades nas quais utilizamos um ambiente informático com *softwares gratuitos*, como o plotador gráfico, *Winplot,* e o construtor de *GIF`s* animados, *GIF Animator,* usados como ferramentas facilitadoras para as representações gráficas de pontos e curvas no plano. Consideramos não somente as concepções do professor, mas também as representações dos *softwares* e sua interface na transposição informática como um papel fundamental nesta pesquisa.

Como metodologia de pesquisa, utilizamos alguns elementos de uma Engenharia Didática segundo ARTIGUE (1996). Foi possível elaborar e aplicar uma seqüência didática e, posteriormente, fazer uma análise dos dados coletados, no confronto entre as análises a priori e a posteriori. Estes resultados permitiram a validação das hipóteses formuladas e, conseqüentemente, encontrar respostas à nossa questão de pesquisa**.**

3. Análise dos resultados em função das hipóteses de pesquisa.

Nossa pesquisa propiciou resultados importantes, no confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori* da seqüência didática.

Com a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico e as conversões entre os registros de representação da linguagem *Winplot*, a gráfica e a simbólico-algébrica, foi possível ao aluno desenvolver atividades de representações gráficas de ponto, reta, parábola e outras curvas planas, possibilitando a ele refletir sobre a correlação entre algumas propriedades geométricas de curvas planas e suas equações cartesianas ou paramétricas, mesmo de maneira implícita.

As atividades que englobam desde a família de pontos a um parâmetro até os gráficos de algumas curvas planas parametrizadas possibilitaram ao aluno construir em um ambiente informático e com o uso de *softwares* gratuitos como o *Winplot* e o *GIF Animator,* a construção destes gráficos. Estes programas facilitaram a compreensão da noção de parâmetro.

As construções gráficas de algumas curvas planas com a variação dos valores reais de parâmetros, em suas equações, para o desenvolvimento de um *GIF* animado, permitiram ao aluno observar os efeitos geométricos provocados pela sua variação e favoreceram o entendimento da noção de parâmetro.

O acesso a algumas curvas, historicamente famosas, evidenciou as dificuldades encontradas pelos matemáticos, desde os diversos cálculos para se estabelecer uma equação que represente a curva até a sua construção gráfica com papel, lápis e instrumentos de medida. Foi possível ao aluno, a partir destas equações, observar que o uso de parâmetros estabelece uma identificação significativa entre os gráficos e as equações de algumas curvas planas.

Por fim concluímos que as hipóteses formuladas permitiram obter resultados que favorecem ao aluno o entendimento da noção de parâmetro na geometria analítica.

4. Questões futuras para o ensino e aprendizagem da noção de parâmetro na geometria analítica.

Na seqüência didática, foram propostas atividades com ou sem a interferência de um ambiente informático, investigando se este ambiente permite ao aluno reconhecer algumas propriedades de curvas, por meio de representações e interpretações gráficas, com o uso de parâmetros, para uma melhor compreensão de suas equações.

Na sessão I, sem o ambiente informático, comprovou-se, em parte, a dificuldade existente na conversão do registro gráfico para o registro simbólico de reta e parábola no ponto de vista cartesiano. E, na sessão II, comprovou-se em parte a dificuldade existente da transformação de uma representação simbólico-tabular para uma representação simbólico-algébrica no ponto de vista paramétrico, um tratamento no sistema simbólico.

Para futuras pesquisas sobre o uso de equações cartesianas ou paramétricas sem influência de um ambiente informático, sugerimos atividades em situações de referência com a articulação entre os pontos de vista paramétrico ou cartesiano e as transformações em registros semióticos, visto que, nesta pesquisa, trabalhamos apenas com um caso na sessão II.

Observamos que a atividade proposta poderia ter sido reformulada para um outro contexto ou as coordenadas das posições dos mísseis poderiam ter sido alteradas. Como a atividade era idêntica, o interesse em resolvê-la mesmo no ambiente informático foi pequeno por parte do aluno. De qualquer modo, identificou-se que é possível desenvolver outras atividades que utilizem equações paramétricas da reta. O ponto de vista paramétrico se mostrou mais fácil para o aluno neste caso.

No geral, ao explorar equações paramétricas ou cartesianas em atividades desenvolvidas para um ambiente informático, foi favorável ao aluno para o entendimento da noção de parâmetro.

Na pesquisa, identificamos o parâmetro em equações como uma variável auxiliar, com valores conhecidos, o que difere de uma variável com valores desconhecidos.

Em uma das sessões, sobre representações gráficas de outras curvas planas famosas na história da geometria analítica, já comentada anteriormente, observou-se que os alunos ficaram entusiasmados. Era como se as curvas estivessem sendo redescobertas ali, naquele momento.

É oportuno propor para futuras pesquisas o levantamento histórico, pelo aluno, de cada uma das curvas planas algébricas e transcendentes com o objetivo de explicitar as suas propriedades geométricas, articulando-se com os diferentes pontos de vista, como paramétrico, cartesiano ou polar e as transformações em registros de representação semiótica, favorecendo o entendimento da noção de incógnita, parâmetro e variável.

Por fim, também com o uso de *softwares* gratuitos como o *Winplot* e o *GIF Animator,* sugerimos, em futuras pesquisas, o estudo, na geometria analítica, de superfícies no espaço.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. ***Fundamentos de Didática da Matemática***, São Paulo: Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática/PUC, 2000.

ARTIGUE, M., Engenharia Didática. ***In: Didática das Matemáticas,*** BRUN, J. (org). Lisboa: Instituto Piaget , 1996, p. 193-217.

BALACHEFF, N. ***La transposition informatique note sur um nouveau probleme pour la didactique vingt ans de didactique dês mathematiques em France***, p.364-370, Grenoble : La Pensée Sauvage Editions, 1994.

BATISTA et al.. Avaliar é Preciso: o caso de softwares educacionais para Matemática no Ensino Médio. ***In Workshop de Ciências da Computação e Sistemas da Informação da Região Sul - WorkComp Sul***, 1, 2004, Palhoça, SC. **Anais**...Palhoça, SC: UNISUL, 2004.

BIANCHINI, L. B. ; ALMOULOUD, S. A.. ***O erro ligado ao ensino/aprendizagem de sistemas lineares***. PUC – SP, 1995.

BOYER, Carl B. ***História da Matemática***. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. ***Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias***. Brasília: MEC/Semtec. 1999.

______. ***PCNEM plus Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.*** Brasília: MEC/Seb, 2004.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. ***Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias***. Brasília: MEC/Seb, v.2, 135p., 2006.

DIAS, M. A. ***Les problemes d'articulation entre points de vue "cartesien" et "parametrique" dans l'enseignement de l'algebre lineaire***. Univesité de Paris VII – Denis Diderot, 1998.

DI PINTO, Marco Antonio. ***Ensino e aprendizagem da Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras na década de 90.*** São Paulo: PUC/SP 2000. Dissertação de mestrado. Orientador: *Silvia D. A. Machado.*

DORIER, J. L . ***État de l’art de la recheche em Didactique à propôs de l’enseignement de l’algèbre linéaire.*** RDM, vol. 18, nº 2, pp. 191-230, 1998.

DOUADY, R. ***Jeux de cadre et dialectique outil-object. Recherche en Didactique des Mathématiques. Grenoble****:* *La Pensée* Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 5-31, 1986.

DUVAL, R. Graphiques et Equations: ***L'Articullation de deux registres***. Annales de *Didactique et Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg. 1988, p. 235-253.*

____________ . Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática ***In: Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.***1 ed.Campinas : Papirus, 2003, v.1, p. 11-33.

EVES, Howard. ***Introdução à História da Matemática***. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FREITAS, Ivete Mendes. ***Resolução de sistemas Lineares parametrizados e seu significado* para *o aluno***.*São Paulo: PUC, 1999.Dissertação de mestrado. Orientador: Silvia D. A. Machado.*

GRAVINA, M. A. ***A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados* -** acta do IV Congresso Ibero-americano de Informática na Educação, Brasília, 1998.

JESUS, A. R. de; SANTOS, M.M.G.; ***Visualizando Funções com o Winplot***. Belo Horizonte-MG, UFMG, I Bienal da SBM, 2002.

JESUS, A. R.; SOARES, E. P. ***Gráficos animados no Winplot***. Revista do Professor de Matemática, v. 56, p. 34-44, 2005.

LEHMANN, Charles H. ***Geometria Analítica*.** Trad. Ruy Pinto da Silva Sieczkowski. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

MACHADO, Silvia Dias de Alcântara (Org.). ***Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*.** São Paulo: Papirus, 2003.

MORETTI, M. T. A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais ***In: Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.***1 ed.Campinas : Papirus, 2003, v.1, p. 149-160.

PAIVA, Manoel. ***Matemática***.2 ed.São Paulo: Moderna, 2003.

PARRIS, Richard. ***Softwares Peanut*: *Winplot***. Disponível em <http://www.exeter.edu/pages/index.html >. Acesso em 05 de março de 2005.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**; 2º grau, 3ª Edição. São Paulo: Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), 1992.

SHIKIN, Eugene V. ***Handbook and atlas of curves***. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 1995.

SIDERICOUDES, O. A Formalização de Conceitos da Geometria Analítica através do Micromundo Logo. In: Congresso Ibero-Americano de Informática Educativa - RIBIE98, 1997, Brasília. ***Anais do Congresso Ibero-Americano de Informática Educativa*** - RIBIEee98 - Brasília., 1998.

SILVA, C. M.S.. ***O Desenvolvimento da Geometria Analítica e A Influencia de Descartes e Euler Na Obra de Auguste Comte***.1994. *Disponível em* <http://www.ufes.br/circe/artigos/artigo65.htm >. *Acesso em 30/06/2006*.

VENTURI, Jacir J..***Álgebra Vetorial e Geometria Analítica***, 8ª ed., Curitiba: Positivo, 2003.

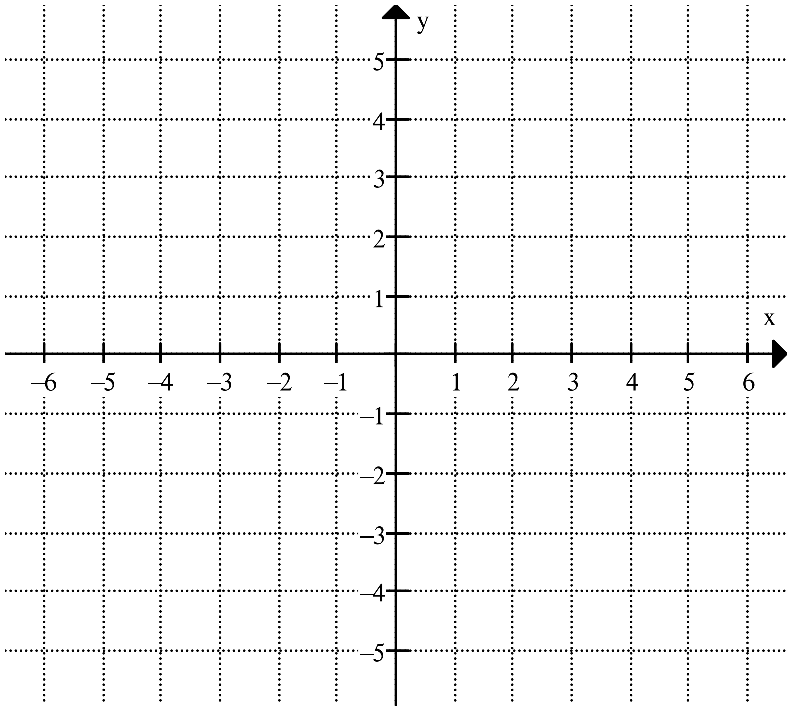
______________. ***Cônicas e Quádricas***, 5ª ed., Curitiba: Positivo, 2003.

ANEXOS

ANEXO 1:SESSÃO I

SESSÃO I : ATIVIDADE 1

a) Considere as coordenadas dos seguintes pontos A=(1;2), B=(2;3), C=(2;1), D=(-3;0) , E=(-4;-3). Sabe-se que 3 deles estão alinhados. Represente os pontos no plano cartesiano e justifique quais são estes 3 pontos que estão alinhados:



Resp.:____

____

____

b) Existem outros pontos de coordenadas (x,y) que continuam alinhados com os três anteriores e possuem uma relação entre as variáveis *x* e *y* . Represente-os no plano cartesiano, apresentado anteriormente, e escreva pelo menos outros três pontos deste alinhamento.

Resp.:____

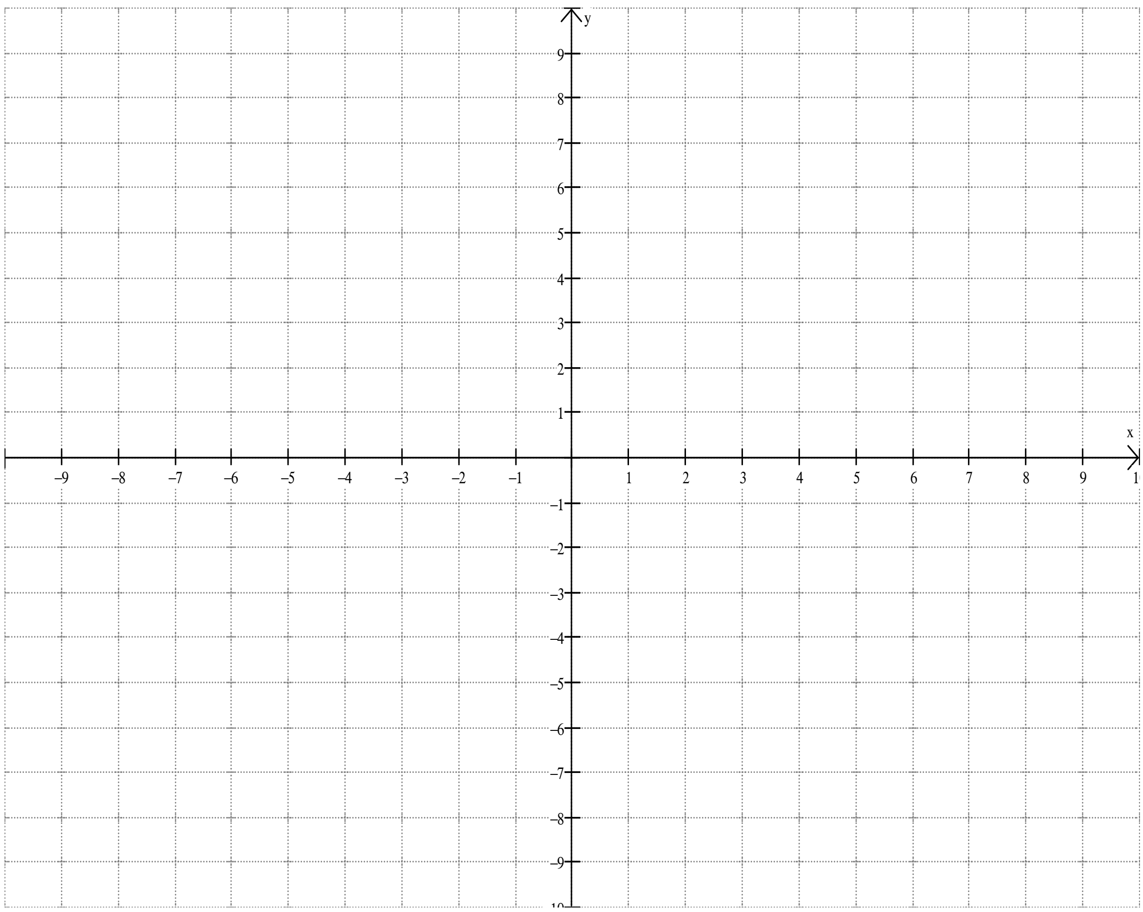
c) Desta relação entre as variáveis x e y obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

Rascunho:

Resp.:____

SESSÃO I: ATIVIDADE 2

a) Considere as coordenadas dos seguintes pontos A=(-2;4), B=(2;4), C= (-5;6), D=(3;9), E=(6;-5) e F=(-1,1). Sabe-se que 4 deles pertencem ao gráfico de uma parábola. Represente os pontos no plano cartesiano e justifique quais são estes 4 pontos que pertencem a parábola:



Resp.:____

____

b) Existem outros pontos de coordenadas (x,y) que pertencem ao gráfico da parábola com os quatro pontos anteriores e possuem uma relação de dependência entre as variáveis *x* e *y*. Represente-os no plano cartesiano, apresentado anteriormente e escreva pelo menos outros três pontos desta parábola.

Resp.:____

____

c) Desta relação entre as variáveis x e y obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

Rascunho:

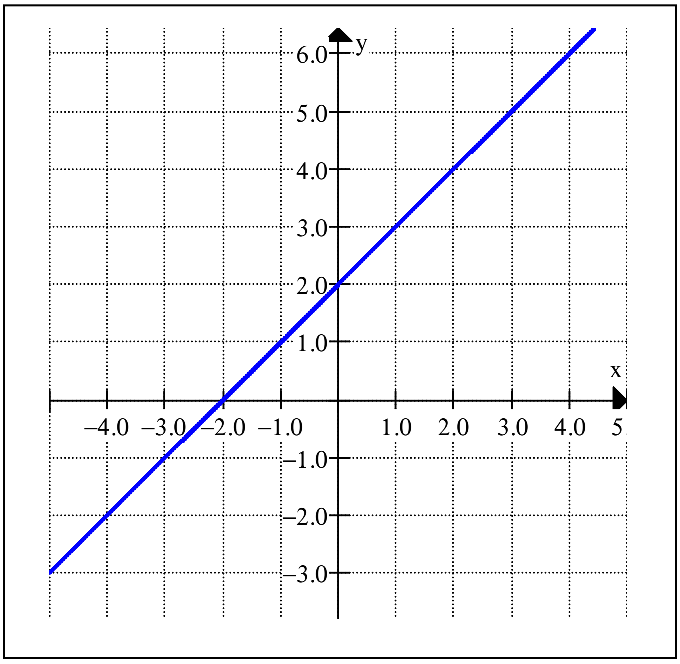
Resp.:____

____

____

SESSÃO I: ATIVIDADE 3

a) Considerando o gráfico da reta apresentado abaixo e os pontos de coordenadas (x,y) que pertencem à reta, escreva pelo menos cinco pontos desta reta.



Resp.:____

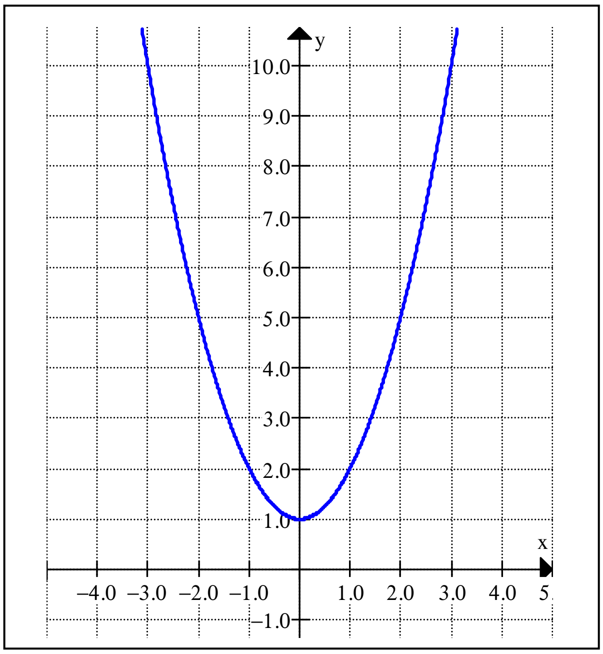
____

b) Deste gráfico e da relação de dependência entre as coordenadas dos pontos que pertencem à reta, obtém-se uma equação algébrica. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo esta equação.

Rascunho:

Resp.:____

c) Considerando o gráfico da parábola apresentado abaixo e os pontos de coordenadas (x,y) que pertencem a ela, escreva pelo menos cinco pontos desta parábola.



Resp.:____

____

d) Deste gráfico e da relação de dependência entre as coordenadas destes pontos que pertencem à parábola, obtém-se uma equação algébrica. Escreva abaixo esta equação. Utilize o rascunho, caso necessário, e escreva abaixo a equação.

Rascunho:

Resp.:____

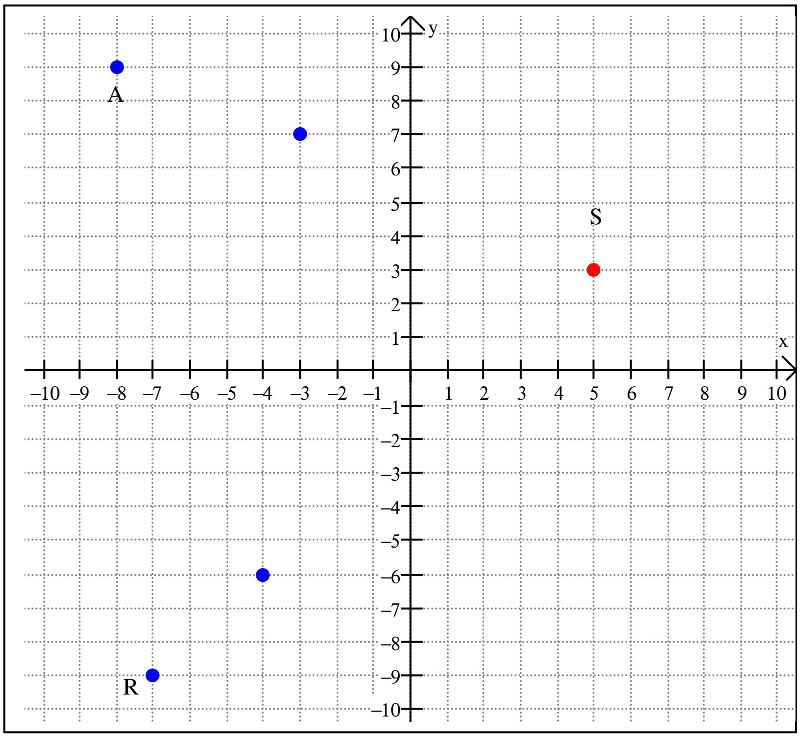
____

ANEXO 2: SESSÂO II

SESSÃO II: ATIVIDADE 1

Seja o seguinte problema: Roberta e Alexandre estão participando de um jogo semelhante a uma batalha naval. Os dois jogadores estão localizados na mesma planilha, representados pelos pontos A (Alexandre) e R (Roberta). Ambos têm como objetivo, com um míssel cada, atingir o submarino "S".

A planilha cobre uma área de 400 km^2 e mostra uma espécie de mapa cartesiano da região: a imagem que aparece na tela é uma janela de [-10,10] por [-10,10], conforme mostra o esquema abaixo.



Vamos considerar que Alexandre e Roberta se encontram nas posições, respectivamente, de coordenadas A=(-8;9) e R=(-7;-9) de onde lançam os mísseis simultaneamente, como momento inicial (t = 0), e de coordenadas (-3;7) e (-4;-6) um minuto mais tarde (t = 1) após o lançamento.

	Coordenadas em t=0	Coordenadas em t=1
Míssel A	(-8; 9)	(-3;7)
Míssel R	(-7;-9)	(-4;-6)

Explorando os dados fornecidos nesta tabela, a seguir responda:

a) Quem realmente consegue atingir o alvo, no caso o submarino "S"? Justifique.

Rascunho:

Resp.:____

b) A tabela abaixo mostra as coordenadas *x* e *y* do míssel A, em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o míssel se desloca com velocidade constante, complete esta tabela.

t	x	y
0	-8	9
1	-3	7
2		
3		
4		
5		

c) Use a tabela obtida no item anterior, para expressar a coordenada *x* do míssel "A" em função do tempo t. Faça o mesmo para a coordenada y.

Rascunho:

Resp.:____

d) Use as equações obtidas no item anterior e responda qual a posição (coordenadas) do míssel "A", decorridos 2 minutos após o início do lançamento?

Rascunho:

Resp.:____

e) A tabela abaixo mostra as coordenadas *x* e *y* do míssel "R", em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o míssel se desloca com velocidade constante, complete esta tabela.

t	x	y
0	-7	-9
1	-4	-6
2		
3		
4		
5		

f) Use a tabela obtida no item anterior, para expressar a coordenada *x* do míssel "R" em função do tempo t. Faça o mesmo para a coordenada y.

Rascunho:

Resp.:____

g) Use as equações obtidas no item anterior e responda qual a posição (coordenadas) do míssel “R”, decorridos 2 minutos após o início do lançamento?

Rascunho:

Resp.:____

h) É necessário que Alexandre ou Roberta alterem a rota de algum dos mísseis para que o submarino seja atingido? Justifique.

Rascunho:

Resp.:____

i) Alexandre ou Roberta atingiram o submarino? Se afirmativo, quantos minutos foram necessários?

Rascunho:

Resp.:____

ANEXO 3: SESSÃO III

SESSÃO III: Atividade 1

a) Represente os pontos A=(1;2), B=(2;3), C=(2;1), D=(-3;0) , E=(-4;-3) no plano cartesiano do *software* Winplot. Sabendo-se que 3 deles estão alinhados, quais são estes 3 pontos?

Resp.:____
____

b) Represente o ponto F=(t;1+t) no Winplot. Observe que ao clicar “ok” temos o ponto F=(0;1). Que valor assumiu o parâmetro “t”?

Resp.:____

c) Faça variações nos valores de “t” e, em seguida, determine:

c1) Qual o valor de “t” para obter o ponto B?________________________

c2) Qual o valor de “t” para obter o ponto E?________________________

d) Mantendo os pontos representados anteriormente no Winplot, represente o ponto G=(3+a;4+a) e clique em “família”. Na nova janela, faça as seguintes opções “a”, mínimo= - 7, máximo=0, passos=10, retraso=10. Clique em “olhar” e “definir”, observe os pontos representados na tela e, em seguida, aumente os passos para 100 e retraso para 100 e clique em “definir”. Descreva o que você observa:

Resp.:____
____

e) Observando os pontos da atividade 1, escreva uma equação paramétrica ((x;y)=(f(t);g(t)) ou cartesiana (y=f(x)) da reta que contenha três destes pontos.

Resp.:____

f) Utilizando o Winplot, verifique se sua resposta está correta.
Sim ( ) ou não ( )? Caso não, procure reescrever a equação da reta que contenha pelo menos três dos pontos do item a.
Salve como "ativ1G..." seguido do número do grupo.

SESSÃO III: Atividade 2

a) Represente no Winplot os pontos A=(-2;4), B=(1;3), C=(3;9), D=(-5;6), E=(-2;-5) e F=(-1,1). Sabe-se que 3 deles pertencem ao gráfico de uma parábola. Represente o ponto G=$(a;a^2)$. Observe que ao clicar "ok" temos o ponto G=(0;0). Altere os valores de "a". Observe os pontos obtidos e escreva os três pontos que pertencem à parábola.
Resp.:____

b) Utilizando o ponto G=$(a;a^2)$ represente uma família de pontos que pertence à parábola. Descreva o que você observa:

Resp.:____
____
____

c) Represente a parábola desta atividade 2 na forma de equação paramétrica ou equação cartesiana.

Resp.:____
____

d) Utilizando o Winplot, verifique se sua resposta está correta.
Sim ( ) ou não ( )? Caso não, procure reescrever a equação da parábola que contenha pelo menos três dos pontos do item a.
Salve como "ativ2G..." seguido do número do grupo.

SESSÃO III: Atividade 3

a) Escreva a equação na forma "paramétrica" $x= t$ e $y= 1+t$, "t mín" **0** e "t máx" **3.** Observe o gráfico representado por esta equação. O que representa este gráfico? Quais as coordenadas dos pontos extremos (início e final) do gráfico representado?

Resp.:____

____

b) Acrescente um novo parâmetro "k" à equação paramétrica anterior obtendo $x=kt$ e $y=1+kt$, Observe que o gráfico desapareceu. Faça variações determinando quais devem ser os valores do parâmetro k para obter os instantes inicial e final da atividade anterior.

Resp.: ____

Salve como "ativ3aG..." seguido do número do grupo.

c) Escreva a equação do item **a** na forma cartesiana, com $0<x<3$.

Resp.: ____

ANEXO 4: SESSÃO IV

SESSÃO IV: Atividade 1 (Ponto parametrizado)

Voltamos ao problema de Roberta e Alexandre que participam de um jogo. Vamos recordar:

Os dois jogadores estão localizados em uma planilha, representados pelos pontos “A” (Alexandre) e “R” (Roberta). Ambos têm como objetivo, com um míssel cada, atingir o submarino “S”, fixo em um local de coordenadas (5;3), considerando que cada míssel viaja em linha reta com velocidade constante. A tabela abaixo mostra as coordenadas (posição) dos dois mísseis no momento em que começa o lançamento simultâneo, isto é, o momento inicial (t = 0), e um minuto mais tarde (t = 1) após os lançamentos.

	Coordenadas em t=0	Coordenadas em t=1
Míssel A	(-8;9)	(-3;7)
Míssel R	(-7;-9)	(-4;-6)

Explorando os dados fornecidos nesta tabela e utilizando o Winplot, faça o que se pede:

No Winplot, em ponto (x,y) represente as coordenadas dos aviões A e R em função do parâmetro t ((x;y)=(f(t);g(t)), variando o parâmetro “t” e responda:

a) Alexandre ou Roberta atingiram o submarino? Se afirmativo, quantos minutos foram necessários?

Resp.:____

____

b) É necessário que Alexandre ou Roberta alterem as suas rotas para atingirem o alvo? Se afirmativo, qual deverá ser a nova rota?

Resp.:____

____

Salve como “ativ1G...” seguido do número do grupo.

SESSÃO IV: Atividade 2 (Curvas parametrizadas)

Na História, objetos matemáticos como as curvas, demoravam séculos de estudos para que fossem representadas por alguns matemáticos através de gráficos ou equações.

Hoje, com o auxílio de uma ferramenta computacional, como o *Winplot*, é possível verificar a beleza e o encanto destas curvas, em forma de gráficos, de maneira dinâmica e com facilidade.

Historicamente foi o uso de parâmetros nas equações que possibilitou a representação gráfica destas curvas no plano.

Voltemos à atividade:

Utilizando as equações abaixo, faça as construções de seus respectivos gráficos no *Winplot*. Em seguida, faça variações nos valores reais de seus parâmetros para uma animação gráfica da curva no plano.

Salve cada item como “ativ2...” seguido do número do item e do grupo.

a) Conchóide de Nicomedes:
   $(x - b)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$

b) Ciclóide:
   x=a(1-sin(t)) e y=a(1-cos(t))

c) Limaçon de Pascal:
   $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$

d) Pérola de Sluze:
   $y^m = x^n(a - x)^b$

e) Involuta de um Círculo:
   x=a(cos(t) + t sin(t)) e y=a(sin(t) - t cos(t))

f) Lemniscata de Bernoulli:
   $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

g) Epiciclóide:
$x = (a + b)\cos(t) - b\cos((a/b + 1)t)$; $y=(a + b)\sin(t) – b\sin((a/b + 1)t)$

h) Epitrocóide:
$x= 14\cos(t)-8\cos(3.5t)$ e $y= 14\sin(t)-8\sin(3.5t)$

i) Hipociclóide:
$x = (a - b)\cos(t) + b\cos((a/b - 1)t)$; $y = (a - b)\sin(t) - b\sin((a/b - 1)t)$

j) Hipotrocóide:
$x=(a-b)\cos(t)+c\cos((a/b-1)t)$; $y=(a-b)\sin(t)-c\sin((a/b-1)t)$

ANEXO 5: SESSÃO V

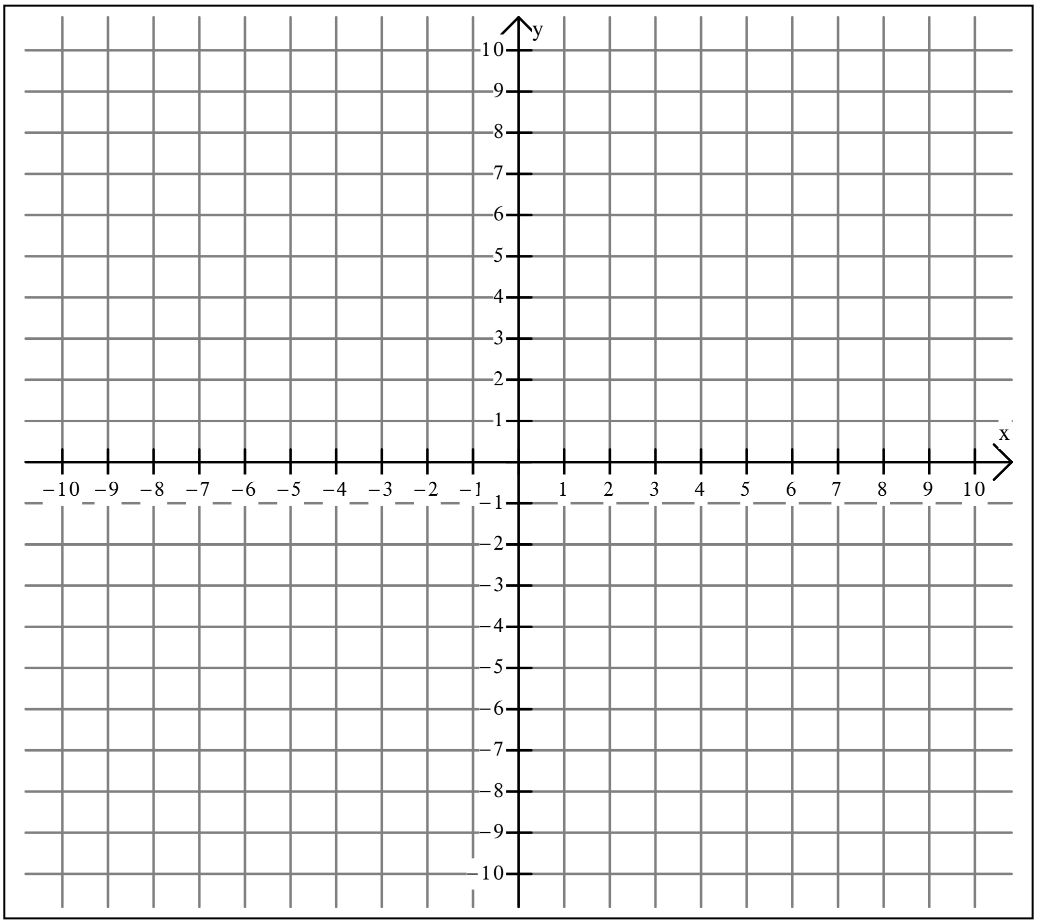
SESSÃO V: Construção de GIF`s animados.

Atividade 1 (sem o uso do computador)

a) Escreva as coordenadas de quatro pontos alinhados:

A=(__,___), B=(__,___), C=(__,___) e D=(__,___).

Se necessário utilize o campo quadriculado.



b) Escreva as equações paramétricas da reta que contém estes pontos.

Resposta:____

c) Utilizando as equações paramétricas encontradas, complete a tabela abaixo.

t	x	y
0		
2		
3		
4		

d) Quais são os respectivos valores de t para os pontos alinhados do item 1?

Para o ponto A temos t = ______

Para o ponto B temos t = ______

Para o ponto C temos t = ______

Para o ponto D temos t = ______

Atividade 2 (utilizando o computador)

Como já conhecemos algumas curvas famosas que foram desenvolvidas ao longo da história da geometria analítica, vamos construir GIF´s animados utilizando os softwares gratuitos *Winplot* e *GIF Animator*. Neste caso, escolha qualquer uma das equações de curvas apresentadas abaixo e, em seguida, construa um *GIF* animado.

O tridente de Descartes:
$(a+x)(a-x)(2a-x)=axy$

Cissóide de Dioclés:
$y^2 = (x^3)/(2a - x)$

Conchóide de Nicomedes:
$(x - b)^2. (x^2 + y^2) - (a^2x^2) = 0$

Quadratriz de Hípias:
$y = x\cot((pi)x/2a)$

Hipérbole de Fermat:
$(x^m)(y^n)=a$

Parábola de Fermat:
$y^n=ax^m$

Curva de Agnesi:
$y(x^2 + a^2) = a^3$

Ciclóide :
$x=a(1-\sin(t))$ e $y=a(1-\cos(t))$

Limaçon de Pascal
$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$

Pérola de Sluze:
$y^m = x^n(a - x)^b$

Involuta de um Círculo:
$x=a(\cos(t) + t\sin(t))$ e $y=a(\sin(t) - t\cos(t))$

Parábola Divergente de Newton:
$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$

Lemniscata de Bernoulli:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

Epiciclóide:

$x = (a + b)\cos(t) - b\cos((a/b + 1)t)$; $y=(a + b)\sin(t) - b\sin((a/b + 1)t)$

Epitrocóide:

x= 14cos(t)-8cos(3.5t) e y= 14sin(t)-8sin(3.5t)

Hipociclóide:

$x = (a - b)\cos(t) + b\cos((a/b - 1)t)$; $y = (a - b)\sin(t) - b\sin((a/b - 1)t)$

Hipotrocóide:

x=(a-b)cos(t)+ccos((a/b-1)t) ; y=(a-b)sin(t)-csin((a/b-1)t)

Salve como “GIFG...” seguido do número do grupo.

O que é necessário para a construção do GIF animado de uma curva? Justifique.

Resposta:____

Quais os procedimentos que foram executados?

Resposta:____

Curso de elaboração de GIF`s animados em um ambiente informático

com base na geometria analítica

Convite

Convidamos você, aluno do 3º ano do Ensino Médio a participar do curso de elaboração de *GIF`s* animados em um ambiente informático com base na geometria analítica, com direito a certificado.

Este curso é parte integrante de um projeto de mestrado em educação matemática da Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP.

Para o curso serão utilizados softwares gratuitos.

O curso terá duração de 7 semanas. Será aos sábados com início às 9:30 h. e termino às 11:10h. Totalmente gratuito.

Com início previsto para 15 de abril de 2006.

Os interessados devem se inscrever com o coordenador da escola.

O curso será realizado no laboratório de informática da E.E. Gal. José Artigas.

Esse documento certifica que

_______________________________,

*participou do curso "**elaboração de GIF`s animados em um ambiente informático com base na geometria analítica"**, proferido pelo Professor Mestrando Carlos Roberto da Silva da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, realizado na E.E. Gal. José Artigas, no período de 15/04/2006 a 10/06/2006, carga horária de 10 horas.*

Diadema, 10 de junho de 2006.

________________________ ________________________

Diretor(a) da Escola Professor