PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC–SP

Rita Lobo Freitas

A INFLUÊNCIA DE ORGANIZAÇÕES DIDÁTICAS NO TRABALHO MATEMÁTICO DOS ESTAGIÁRIOS DA LICENCIATURA: UM ESTUDO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2015

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Rita Lobo Freitas

A INFLUÊNCIA DE ORGANIZAÇÕES DIDÁTICAS NO TRABALHO MATEMÁTICO DOS ESTAGIÁRIOS DA LICENCIATURA: UM ESTUDO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

SÃO PAULO
2015

Banca Examinadora

____

____

____

A Camylle, Louise e meu esposo querido que se furtaram da minha presença, quando esta era imprescindível. A meus pais que me deram a possibilidade de existir.

AGRADECIMENTOS

– A todos os Professores do grupo de pesquisa PEAMAT, em particular, à Prof. Drª Cileda Coutinho e ao Prof. Dr. Gerson Pastre, pelos valiosos conselhos e contribuições na minha formação, e a André Ricardo Magalhães pelo incentivo.

– Especial agradecimento ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, pela paciência e inestimável amizade e confiança na minha capacidade.

– A todos os colegas que me incentivaram e apoiaram, Nilo, Cleusiane, Katia, Jacinto, Amari e, especialmente, Eliana Gomes pela atenção e apoio nos momentos difíceis.

– Agradeço à Universidade do Estado da Bahia, por ter me possibilitado desenvolver a pesquisa concomitante com o trabalho docente na instituição.

– Ao Lar Nossa Senhora Aparecida, por ter me acolhido como uma filha na cidade de São Paulo, especialmente Dona Raimundinha, Irmã Aparecida e Irmã Helena e às amigas conquistadas neste espaço, Lidiane, Cassia, Aninha e Thaiz, que me apoiaram e incentivaram a não desistir.

– À CAPES, pelo apoio financeiro, garantindo a realização da pesquisa.

RESUMO

Neste estudo, objetivamos investigar o comportamento dos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual na Bahia, no sentido de perceber como esses sujeitos mobilizam seus saberes matemáticos e didáticos construídos durante a graduação e durante o processo de experimentação a respeito da função exponencial. Pretendemos, nesta pesquisa, responder à seguinte questão: como organizações didáticas interferem na construção de conhecimentos/saberes de estagiários de Licenciatura em Matemática, sobre o conceito de função exponencial? Como metodologia, utilizamos a Engenharia Didática, de Artigue (1988). O quadro teórico que utilizamos foi composto pela Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (1996, 2008), e pela Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (1999). Na construção das situações-problema, apoiamo-nos nas atividades selecionadas dos livros didáticos analisados e no estudo histórico-epistemológico do objeto matemático função exponencial. As atividades propostas na sequência didática foram adaptadas, no sentido de se adequar às características de um *milieu* antagonista, inclusive com uso de *software* (Geogebra e Excel). A análise dos dados colhidos na etapa de experimentação permitiu identificar um conjunto de características positivas que evidenciam a influência da organização didática na construção e na consolidação dos saberes dos estudantes, sejam esses saberes matemáticos ou didáticos, sobre a função exponencial.

Palavras-chave: Saberes Docentes. Estágio Supervisionado. Teoria das Situações Didáticas. Função Exponencial. Livros Didáticos.

ABSTRACT

This study aimed to investigate the behavior of students in a Mathematics degree course at a state university in Bahia, in order to understand how these individuals mobilize their mathematical and didactic knowledge built during graduation and during the process of experimentation about the exponential function. We intend, in this research, answer the following question: How do didactic organizations interfere in the construction of trainee's knowledge of mathematics degree about the concept of exponential function? As methodology, we used Artigue's Didactic Engineering (1988). The theoretical framework used was the Theory of Didactic Situations of Brousseau (1996, 2008) and Anthropological Didactics Theory of Chevallard (1999). In the construction of problem situations we supported in selected activities from analyzed textbooks and historical and epistemological study of mathematical object called exponential function. The proposed activities in a didactic sequence had been adapted in order to suit the characteristics of a *milieu* antagonistic, including software use (Geogebra and Excel). The analysis of collected data in experimentation stage, allowed to identify a group of positive characteristics which showed the influence of didactic organization in construction and consolidation of the students' knowledge, are these mathematical or didactic knowledge about exponential function.

Keywords: Teachers' Knowledge. Supervised Training. Theory of Didactic Situations. Exponential Function. Textbook.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IES	Instituição de Ensino Superior
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
OCEM	Orientações Curriculares do Ensino Médio
OPM	Organização Praxeológica Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PEA-MAT	Processos de Ensino e Aprendizagem em Matemática
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
TAD	Teoria Antropológica do Didático
THA	Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UNEB	Universidade do Estado da Bahia

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No contexto da Educação Básica, as dificuldades dos alunos em aprender Matemática são constantemente relatadas por professores, pesquisadores e pelos próprios alunos. No campo de investigação em Educação Matemática, essas dificuldades têm ocupado um grande espaço de debate no meio científico, nos congressos, grupos de pesquisas e eventos da área. Algumas pesquisas, como a de Zuffi (1999, 2004) e Rossini (2006), relacionam diretamente as dificuldades dos alunos com a formação de seus professores e seus desafios para ensinar Matemática.

A proposta de um estudo sobre a formação de professores, em um primeiro momento, remete-nos à formação pessoal. Nesse sentido, refletindo um pouco sobre a minha formação acadêmica e profissional, percebo que, em diferentes momentos e estágios da minha trajetória profissional, assumi vários papéis enquanto protagonista da minha própria biografia. Como estudante da Licenciatura em Matemática, vivenciei angústias, medos, decepções e incertezas da futura profissão, além da difícil construção do conhecimento matemático. Com o passar do tempo, quando comecei a atuar como professora do Ensino Médio, tantas outras questões não menos importantes se apresentaram como desafios à carreira de professora. Após treze anos de atuação na Educação Básica, em especial, no Ensino Médio, cheguei à constatação de que um dos problemas, talvez o maior deles, o cerne das dificuldades em se aprender Matemática, está na formação dos professores que a ensinam.

Na atuação no Ensino Superior, como responsável pelo componente curricular Estágio Supervisionado, outras indagações vieram à tona. Na busca por compreender e intervir positivamente nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática e na formação de futuros professores, percebi que parece existir um ciclo de perpetuação das dificuldades em aprender e ensinar Matemática: a dificuldade do aluno do Ensino Fundamental e Médio; dos estudantes da licenciatura; do professor do Ensino Médio, que já foi estudante da licenciatura; e, na ponta deste trajeto, está o professor formador de outros professores, que pode ou não já ter ocupado estes diferentes papéis. É desse lugar que me coloco como pesquisadora para relatar o nosso trabalho.

Realizar um estudo sobre e durante a formação inicial do Professor de Matemática foi a minha motivação inicial. No entanto, cabe ressaltar que outros elementos foram agregados para o fortalecimento do objeto de estudo.

Nas pesquisas em Educação Matemática, é comum identificarmos análises nos processos de aprendizagem em Matemática, com foco nos estudantes da Educação Básica. Tais trabalhos assinalam que as dificuldades de aprendizagem em Matemática, por parte desses estudantes, muito se devem aos processos de ensino aos quais foram submetidos, e que estão intimamente ligados à formação do professor. Existem fragilidades na formação dos professores, sobretudo, na formação inicial. Podemos ter contato com pesquisas que têm mostrado, de forma enfática, tais deficiências de formação, em processos de pesquisa e análises da formação continuada de professores em serviço.

Supomos que o cerne dos problemas nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática encontra-se na formação inicial do professor. Propomos uma pesquisa durante o estágio obrigatório da Licenciatura em Matemática, momento em que emergem questões fundamentais da formação do professor.

Nesse caso, acreditamos que o estágio supervisionando é uma experiência marcante e de fundamental importância para a prática docente do futuro professor e para sua formação inicial. Para muitos estudantes de licenciatura em Matemática, o Estágio Supervisionado é a primeira experiência formal como profissional em turma de Educação Básica. É nessa oportunidade que o estudante de licenciatura começa a se enxergar como professor e projetar maiores expectativas na futura profissão.

No entanto, vale ressaltar que, quando alguns estudantes chegam ao Estágio Supervisionado, já tiveram algum contato com a sala de aula, em experiências temporárias de atividade docente. O nosso estudo foi realizado na região Oeste da Bahia, onde existe uma carência acentuada de professores de Matemática, por esta razão, muitos estudantes da licenciatura em Matemática assumem atividades de sala de aula, com vínculo empregatício temporário, na rede pública estadual e/ou municipal, a partir do segundo ou terceiro semestre de curso.

É possível que uma pesquisa realizada no Estágio Supervisionado possa revelar as fragilidades da formação inicial do professor de Matemática, sob o ponto de vista do ensino e aprendizagem , quais caminhos serão mais exitosos no sentido de formar bons professores, e que possam contribuir com a construção do conhecimento matemático.

A minha participação no grupo de pesquisa Processos de Ensino e de Aprendizagem em Matemática (PEA-MAT), vinculado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, o qual tem por objetivo investigar os fenômenos didáticos ligados ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, possibilitou identificar, na formação de professores, um campo fértil de estudo e investigação que veio ao encontro dos anseios iniciais da pesquisa, ampliando o olhar para outros aspectos da formação até então não percebidos. Evidentemente, o estudo das teorias da Didática da Matemática teve um papel decisivo na escolha dos rumos da pesquisa.

Neste trabalho, lançamos um olhar investigativo sobre a formação inicial do professor de Matemática em fase de finalização do curso de licenciatura, por acreditar que esse momento é crucial na consolidação de certos saberes docentes, construídos especialmente durante o Estágio Supervisionado.

Optamos pela escolha do objeto matemático função exponencial, no sentido de contribuir com as produções no campo da álgebra. Pretende-se, portanto, ampliar e explorar o estudo da função exponencial, na tentativa de trazer novos elementos de análise ou novos olhares sobre este objeto na licenciatura em Matemática.

Acreditamos que o Estágio Supervisionado é um importante momento da formação inicial do professor de Matemática, para a aquisição e consolidação dos conhecimentos e saberes profissionais do futuro docente. Percebemos diversas fragilidades nessa formação. Essa constatação surgiu das observações de aulas realizadas em turmas de 1º ano do Ensino Médio, em 2010 e 2011, em uma escola da Rede Pública Estadual da Bahia, que dispunha de estagiários atuando no componente curricular Estágio IV, ministrada em um curso de Licenciatura em Matemática de numa Universidade Estadual.

Tais observações indicaram uma falta de domínio do conteúdo matemático relativo a funções, por parte dos estagiários (futuros professores), mais acentuada do que em outros conteúdos matemáticos. Destacamos o conceito geral de função, função quadrática, exponencial, logarítmica e modular. Além disso, dificuldades de natureza didática também foram detectadas.

Por outro lado, os livros didáticos e os referenciais nacionais para o ensino médio têm dado ênfase ao ensino de funções reais nesta etapa de ensino. Nesse sentido, começamos a delimitar o campo matemático de nossa pesquisa para o estudo de funções, na perspectiva de trazer uma continuidade aos estudos já realizados no âmbito da formação de professores. Elegemos a função exponencial como objeto matemático da investigação, pois, quando buscamos artigos científicos relacionados à função, as referências encontradas, em sua maioria, referiam-se ao conceito geral de função. No entanto, algumas pesquisas em pós-graduação trazem contribuições significativas sobre a função exponencial. Estes trabalhos compõem a nossa revisão de literatura.

O problema de pesquisa perpassa a problemática vivenciada pelo graduando da licenciatura em Matemática durante o Estágio Supervisionado: ministrar aula (para alunos do Ensino Médio); ensinar um saber matemático, no caso, função exponencial, conhecimento que este sujeito ainda não consolidou em seu repertório cognitivo, ou seja, não domina os conceitos relacionados à função exponencial. O estagiário, aos poucos, deveria perceber que o papel de professor é adaptar o saber em jogo, por meio de transformações didáticas, de forma que este saber se torne disponível e acessível ao aprendiz, o aluno do Ensino Médio. Mas como, então, realizar a tarefa didática de ensinar algo que não se consolidou enquanto conhecimento matemático? Nesse sentido, delimitamos como **questão de pesquisa**:

Como organizações didáticas interferem na construção de conhecimentos/saberes dos estagiários da Licenciatura em Matemática sobre o conceito de função exponencial?

O **objetivo geral** do trabalho é analisar as praxeologias realizadas pelos estagiários, no sentido de perceber como a organização didática pode interferir na construção de organizações matemáticas relacionadas com a função exponencial.

No que se refere aos **aspectos metodológicos,** nossa pesquisa se baseia nos pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), na qual buscamos apoio para visualização dos fenômenos didáticos a ser identificados em sala de aula, durante a proposta de formação.

Sabendo que empreendemos uma proposta de intervenção (formação de professores) na realidade dos sujeitos, com base em realizações didáticas em sala de aula, podemos, de forma geral, classificar a nossa pesquisa como de campo, qualitativa.

Apoiados em Artigue (1988), para realizar a pesquisa, adotamos os princípios da engenharia didática, desenvolvendo as seguintes etapas: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação, análise *a posteriori* e validação.

No que se refere aos **aspectos teóricos**, destacamos que diferentes fontes teóricas associadas podem subsidiar uma pesquisa e delimitar um quadro teórico na perspectiva de visualizar, com mais clareza, os fenômenos investigados, além de permitir uma análise mais profunda desses fenômenos. Destacamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), Chevallard (1999), no que se refere ao estudo praxeológico a ser realizado, inclusive sobre livros didáticos que abordam o conceito de função exponencial. Em contrapartida, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) subsidiará a nossa proposta de intervenção didática como dispositivo capaz de promover as mudanças de comportamentos dos sujeitos com relação ao saber. Compreendemos que tais mudanças são características da aprendizagem.

No **capítulo 1**, construímos as análises prévias, constando de revisão de literatura, ou seja, discussão sobre as pesquisas que trabalharam com o mesmo objeto matemático, além de uma breve explanação histórico-epistemológica desse objeto. Na sequência, trouxemos a abordagem dos documentos oficiais que norteiam o ensino médio, no sentido de identificar como a função exponencial aparece nessas orientações de ensino.

No **capítulo 2**, retomamos o problema de pesquisa, os objetivos e as hipóteses de trabalho, assim como a metodologia de pesquisa e os fundamentos teóricos.

No **capítulo 3,** realizamos uma análise de livros didáticos do Ensino Médio à luz da TAD.

No **capítulo 4**, apresentamos uma breve discussão sobre a licenciatura em Matemática, o papel do estágio na formação do professor de Matemática e os saberes docentes importantes para esta formação. Estruturamos a sequência didática, as situações de aprendizagem utilizadas no experimento, justificando as escolhas didáticas, os objetivos da sequência e apresentando a estruturação de um *milieu* mínimo de trabalho. Além disso, apresentamos a análise *a priori* e *a posteriori* da sequência didática.

Na parte final deste trabalho, apresentamos nossas considerações sobre os principais resultados da pesquisa e as perspectivas futuras de pesquisa.

1 REVISÃO DA LITERATURA E DE DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste capítulo, temos por objetivo levantar dados preliminares sobre o objeto matemático em estudo, no sentido de explicitar os problemas de ensino e de aprendizagem sobre função exponencial, delineando as nossas hipóteses e reafirmando a nossa questão de pesquisa. Salientamos que os tópicos abordados serão revisitados ao longo do trabalho.

Na sequência, discorremos sobre a evolução histórica do conceito da função exponencial. Levantamos contribuições das pesquisas sobre esse objeto em nossa revisão de literatura. Além de evidenciar a presença da função exponencial no livro didático e nos documentos oficiais, discutimos esses referenciais como base fundamentadora da prática do professor. Por fim, discutimos também sobre a licenciatura em Matemática, a importância do Estágio Supervisionado para a formação do professor e sobre os saberes docentes importantes para esta formação.

1.1 FUNÇÃO EXPONENCIAL E SUA EVOLUÇÃO HISTÓRICA: ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

A definição de função exponencial difundida e utilizada pelos livros didáticos na atualidade certamente não representa a sua forma original vista pela primeira vez na história. Sabemos também que a matemática foi se desenvolvendo historicamente, a partir da contribuição de vários povos e em diferentes épocas da civilização. Partimos de um levantamento sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função para, assim, tentar situar a função exponencial e seu marco.

Rossini (2006) organizou um quadro histórico e cronológico de importante marco para o desenvolvimento das concepções de função. Além disso, na literatura, identificamos que as pesquisas que tratam de função exponencial se limitam a discutir o histórico da função como tema geral. Nesse sentido, levantar as concepções históricas sobre a função exponencial é importante para perceber a influência dessas concepções no ensino atual. Adaptamos o quadro proposto por esta autora, situando o marco da função exponencial.

Conforme o quadro 1, é possível concluir que a evolução do conceito de função, bem como da função exponencial, teve a contribuição de vários matemáticos, desde Napier até o grupo de Bourbaki. É importante este breve levantamento histórico sobre a evolução do conceito de função exponencial do ponto de vista epistemológico, a fim de que entendamos como estas construções históricas influenciam a abordagem atual da função exponencial, seja em livros didáticos, seja nos referenciais curriculares e documentos que norteiam a prática do professor. Consequentemente, nas situações de aprendizagem, é preciso compreender como serão abordadas propostas para etapa de experimentação.

É possível que a ideia de exponencial tenha aparecido com o surgimento dos logaritmos, com John Napier (1550-1617), ele pensava nas sequências de potências sucessivas de um dado número que, vez por outra, apareciam nas publicações. (BOYER,1996).

Quadro 1 – Cronologia das concepções de função

Ano	Matemático	Concepção
1594	Napier	Invenção dos logaritmos.
1637	Descartes	Equação em x e y que mostra dependência.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto da curva, máquina.
1696	Jean Bernoulli	Cálculo com exponenciais.
1718	Jean Bernoulli	Relação entre grandezas variáveis.
1748	Euler	Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes e variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; sequência de valores; ordenadas não sujeitas a uma lei comum.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichelet	Correspondência: para cada valor de x (abscissa), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x em certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y; não é necessária uma mesma lei para todo o intervalo; y não precisa ser definido por uma expressão matemática explicita em x.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a uma determinada lei.
	Cantor	Subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a duas condições.

Fonte: Adaptado de Rossini (2006, p.54).

Nessas sequências, estava evidenciado que "as somas e diferenças dos índices das potências correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências" (BOYER, 1996, p.213). Ainda nesse momento, surgiu uma equação exponencial, mas como um prelúdio da "invenção" dos logaritmos.

> Para conservar próximos os termos numa progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Napier, por isso, escolheu como seu número dado 1-10^7 (ou 0,9999999). Assim os termos na progressão de potencias crescentes ficam realmente próximos – próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^7. Isto é, se $N=10^7(1 - 1/10^7)^L$, então L é o "logaritmo" de Napier do número *N*. Assim, seu logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo $10^7(1 - 1/10^7) = 9999999$ é 1, e assim por diante. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7, teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $1/e$, pois $(1 - 1/107)^{10^7}$ fica próximo de $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1/e$. (BOYER, 1996, p.214)

Napier não tinha a definição de logaritmos que utilizamos nos dias de hoje, tampouco o conceito de base de um sistema de logaritmos. De acordo com Boyer (1996), a função logarítmica já estava implícita na definição de Napier e em toda a sua obra sobre os logaritmos. Observando a expressão de *N* dada por Napier, identificamos o formato algébrico da função exponencial, daí a importância de associar o conceito de logaritmos como "operação inversa" da exponencial ou função inversa.

Salientamos que, de acordo com Boyer (1996), este estudo não pode ser atribuído somente a uma pessoa, Napier foi apenas o primeiro a publicar, mas outras ideias semelhantes foram desenvolvidas de forma independente posteriormente. Burgi, em 1588, trabalhou com esses conceitos antes de Napier, porém só publicou depois.

Destacamos também a participação do matemático Leonhard Euler (1707-1783) na construção do conhecimento matemático, desde aqueles mais elementares aos mais avançados. Desde o aparecimento dos logaritmos, por volta de 1727 ou 1728, Euler começou a utilizar a letra e para representar a base do sistema de logaritmos naturais. O conceito de fundo desse número já era bem conhecido, mas ainda não havia nenhuma padronização (BOYER,1996).

Segundo Roque (2012, p.375), em seu estudo sobre funções, "Euler buscava definir de modo preciso o que é uma expressão analítica, enumerando as operações por meio das quais ela poderia ser obtida". Nesta época, a suposição era que qualquer função poderia ser escrita como uma série de potências. "A expansão de uma função em uma série infinita era uma ferramenta da análise e não um fim em si mesmo" (ROQUE, 2012, p.375).

Um bom exemplo apresentado por esta autora é "a série de Taylor da função exponencial definida por $f(x) = e^x$ em torno de *a = 0* dado por:$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ +... $+ \frac{x^n}{n!} +$. Por meio dessa expansão, os valores de e^x podem ser aproximados para x próximo de zero" (ROQUE, 2012, p.386).

Ao utilizar a letra e, Euler a chamou "aquele número cujo logaritmo hiperbólico =1" (EULER, 1736 *apud* BOYER, 1996, p.305). Nesta obra de Euler, *Mechanica*, a dinâmica de Newton, é apresentada pela primeira vez de forma analítica.

Para Boyer (1996), o padrão utilizado para a letra e pode também estar relacionada à palavra "exponencial". Esse autor também atribui a Euler a notação *f(x)* para uma função de x, por volta de 1734-1735.

Jean Bernoulli (1667-1748) foi outro matemático que trouxe muitas contribuições para a Matemática, tendo sido atribuído a ele a invenção do cálculo de variações e o cálculo com exponenciais, pois ele estudou não somente as curvas exponenciais simples do tipo $y = a^x$, mas também exponenciais gerais $y = x^x$. "Para a área sob acurva $y = x^x$ de x = 0 a x = 1, ele achou a notável representação como série infinita, $\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots +$, esse resultado ele obteve escrevendo $x^x = e^{xlnx}$, expandindo isso na série exponencial e integrando termo a termo, usando integração por partes" (BOYER,1996,p.291).

Lima (2004), em seu livro sobre análise real, dedica uma sessão ao estudo de funções exponenciais e dos logaritmos. Inicialmente, define o logaritmo para, em seguida, definir a função exponencial. A perspectiva apresentada por Lima (2004) converge com a relação direta entre o conceito de função exponencial e o conceito de logaritmos, apresentados historicamente, no entanto, não traz uma discussão em termos de expansão de séries.

Considerando que a componente análise real faz parte do currículo da licenciatura em Matemática, evidenciar as diferentes formas que este objeto aparece na licenciatura também faz parte desse processo de investigação na releitura dos conceitos inerentes à função exponencial. Segundo Lima (2004):

> Seja um número real maior que 1, costuma-se definir o logaritmo de um número real *x* na base *a* como o expoente $y = \log_a x$, tal que $a^y = x$. Ou seja, a função $\log_a: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ costuma ser definida como a inversa da função exponencial $y \longmapsto a^y$. Isto requer o trabalho preliminar de esclarecer o significado e as propriedades de potência a^y, onde y é um

> número real qualquer o que é possível fazer rigorosamente. Mas achamos mais simples definir primeiro o logaritmo e, a partir deste, a exponencial. (LIMA, 2004, p.137-138)

O percurso proposto por esse autor difere daquele utilizado por professores no Ensino Médio quando pretendem ensinar função exponencial, haja vista que os livros didáticos trazem uma abordagem sobre exponencial, para depois adentrarem no estudo dos logaritmos. Em nosso estudo de exponencial, não podemos desprezar outros olhares daqueles usualmente feitos. Nesse sentido, Lima (2004) define exponencial da seguinte forma:

> Sendo uma função crescente, *log* é uma bijeção de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Sua inversa, *exp:* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada a *função exponencial*. Por definição, *exp(x) = y*⇔*log = x*, ou seja, *log(exp(x)) = x* e *exp (log y) = y*. Existe um único número real cujo logaritmo é igual a 1. Ele é indicado pelo número e. Sua definição é $e = \exp(1)$. (LIMA, 2004, p.138)

O autor afirma e demonstra que *exp (r)* = e^r, quando $r \in \mathbb{Q}$. Além da relação $exp\ (x + y) = exp(x)\,.\ exp\ (y)$, nesse sentido, *exp (x)* se comporta como uma potência de base e e expoente x. Logo, por definição $e^x\ = \exp\ (x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (LAGES, 2004). A partir disto: "e^{x+y}=$e^x.e^y$; $e^0 = 1$; e^{-x}=$\frac{1}{e^x}$; $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$; $\log e^x$ =*x;*$e^{\log y}$=*y,* para qualquer $x \in \mathbb{R}, y$."(LIMA, 2004, p. 139).

Numa outra perspectiva de abordagem da exponencial a partir de sua definição, concordamos com a proposta de Demana, Waits, Foley e Kennedy (2009), quando afirmam que as funções exponenciais modelam padrões de crescimento, inclusive de populações humanas e de animais. Assim, quando se pensa em situações de aprendizagem de uma sequência, é salutar pensar em situações-problema que possam envolver esses modelos. De acordo com esses autores, a função exponencial é definida por:

> Sejam a e b constantes reais, uma função exponencial em x é uma função que pode ser escrita na forma $f(x) = a.b^x$, onde a é diferente de zero, b é positivo e $b\ \neq\ 1$. A constante a é o valor de f quando $x = 0$, e b é a base. As funções exponenciais estão definidas e são contínuas para todos os números reais. (DEMANA *et al*., 2009, p.127)

Observamos que aparece nesta definição um fator de multiplicação (a). Notamos que, nas definições propostas pelo livro didático do Ensino Médio, este fator não aparece, o que muitas vezes dificulta o entendimento do estudante, quando este se depara com uma função cujo valor de a é diferente de um ($a\ \neq 1$). Nesta perspectiva, precisamos repensar como apresentar esta definição para o aluno do Ensino Médio, mas, além disso, trazer esta discussão para os licenciados em Matemática.

Retomando um pouco a discussão do envolvimento do número e na exponencial, poderíamos pensar em uma dada função definida por $f(x) = a.e^x$, se definirmos ($a = 1$), tem-se: $f(x) = e^x$ (Equação 1). Ou ainda considerando que e é uma constante real, poderíamos substituí-la por outra constante real qualquer, por exemplo, a, assim teríamos: (I) $f(x) = a^x$(Equação 1.1).

A partir do formato proposto por Demana *et al*. (2009), que está também compatível com Lima (2004), caracterizamos a função exponencial de base e da seguinte forma:

A) Função cujo domínio é o conjunto de todos os números reais ($\mathbb{R}$);
B) O conjunto imagem é definido pelo intervalo: $]\, 0, \infty[$;
C) A função é contínua;
D) Ela é crescente para qualquer valor x do domínio;
E) A função é limitada inferiormente, mas não o é superiormente;
F) Não tem extremos locais;
G) A assíntota horizontal é: y=0 e não tem assíntotas verticais;
H) O comportamento dos extremos do domínio se caracteriza com:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{e} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

Nesta última característica, clarificamos que o limite não é igual, mas sim tem uma tendência de resultado: *limite tende para 0*, ou seja, $\lim_{x \to -\infty} e^x \to 0$. Acreditamos que o autor usou esta notação por uma questão didática, mas que não concordamos, pois pode levar o estudante a uma compreensão incorreta do conceito de limite, principalmente, porque, na fase de aprendizagem da função exponencial, normalmente o estudante (do Ensino Médio) ainda não conhece a noção de limite.

Vale sempre lembrar que, na abordagem didática da função exponencial definida por (II)$f(x) = a.e^x$ (Equação 2), é conveniente realizar uma discussão histórica sobre o número e, colocando a sua importância para o desenvolvimento da matemática e o seu valor numérico, enquanto constante real.

A seguir, trataremos sobre a análise do crescimento ou decrescimento da função exponencial, utilizando a representação gráfica no plano cartesiano $X0Y$. Adotaremos o modelo de Demana *et al* (2009): $f(x) = a.b^x$ para discutir o crescimento ou decrescimento de $f(x)$.

De acordo Demana *et al* (2009, p.130), "Para qualquer função exponencial definida por II): $f(x) = a.b^x$, e qualquer número real x, $f(x+1) = a.f(x)$. ". Notamos que o autor agora utilizou também $f(x) = b^x$ como lei de formação da função exponencial, na qual a = 1, exatamente como propomos na Equação1, anteriormente.

Podemos dizer que "se $a > 0$ e $b > 1$, então a função f é crescente e é uma função de *crescimento exponencial*. Se $a > 0$ e $b < 1$, então a função f é uma função de *decaimento exponencial*" (DEMANA *et al*., 2009, p.130, grifos nossos).

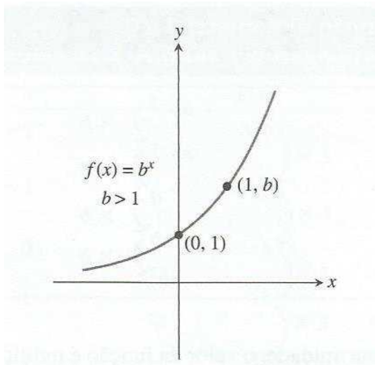
Notamos que o sinal de a, em ambos os casos, permanece inalterado, apenas o sinal b foi modificado, isto nos leva a concluir que b vai se caracterizar como fator de crescimento ou de decaimento (decrescimento), conforme sinaliza o autor.

Podemos escrever a equação $f(x) = a.b^x$, com $a = 1$, logo, $f(x) = b^x$, da mesma forma que o fizemos para a equação $f(x) = e^x$. No entanto, destacamos as variações no crescimento que ocorrem em função de b . De acordo com Demana *et al* (2009, p.130):

i) "$f(x)$ é uma função crescente e o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty$".

Temos a seguinte representação gráfica:

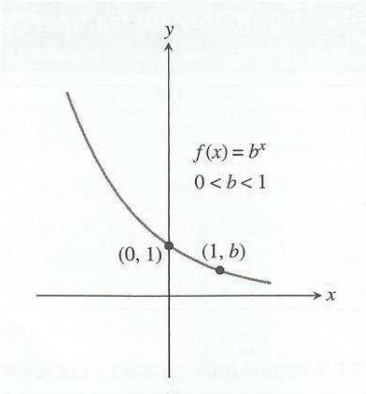
Figura 1- Representação gráfica da equação II para a =1, b >1



Fonte: DEMANA *et al*.,2009, p.130.

ii) "$f(x)$ é uma função decrescente e o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to 0$". Temos a seguinte representação gráfica:

Figura 2– Representação gráfica da equação II para a = 1 e b <1



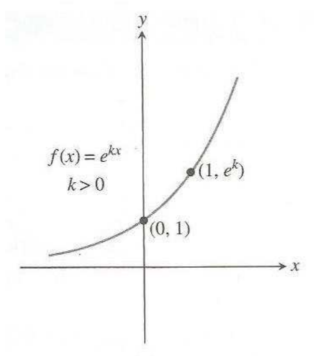
Fonte: DEMANA *et al.*, 2009, p.130.

Retomando a discussão sobre o número e de acordo com Demana *et al.* (2009) e Lages (2004), o número e é também conhecido pela letra de Euller. A função definida por $f(x) = e^x$ tem propriedades especiais de cálculo que podem auxiliar na simplificação de muitas contas, "então $\boldsymbol{e}$ é a *base natural* da função exponencial, que é chamada de *função exponencial natural*" (DEMANA *et al.*, 2009, p.132) definem e pela expressão: $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

A partir dessa definição de função exponencial natural, podemos concluir que toda função exponencial pode ser expressa em função da base natural e, ou seja: "Qualquer função exponencial definida por $f(x) = a.b^x$ pode ser escrita como $f(x) = a.e^{kx}$ para uma constante k, sendo um número real apropriadamente escolhido." (DEMANA *et al*, 2009, p.132).

A seguir, mostramos como fica a representação gráfica da função cuja lei de formação é $f(x) = a.e^{kx}$ (equação 03, para os casos em que ela é crescente ou decrescente, figura 3).

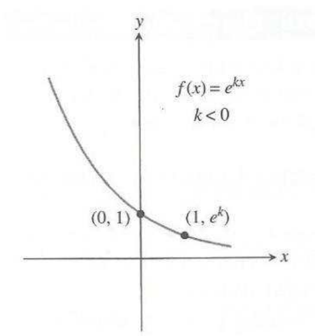
Figura 3– Função de crescimento exponencial, se a > 0 e k >0



Fonte: DEMANA *et al.*, 2009, p.132.

Concluímos que, a partir da função natural definida por$f(x) = e^x$, é possível obter qualquer outra função exponencial definida por $f(x) = a.e^{kx}$, ou seja, escrever a equação 2 em função da equação 1. Propomos esta transformação a ser realizada gráfica e algebricamente, nas situações de aprendizagem que serão propostas para os estudantes. O intuito é que os estudantes possam perceber diferentes formas de transformação da função exponencial.

Figura 4– Função de decaimento exponencial, se a > 0 e K<0



Fonte: DEMANA *et al*, 2009, p.132.

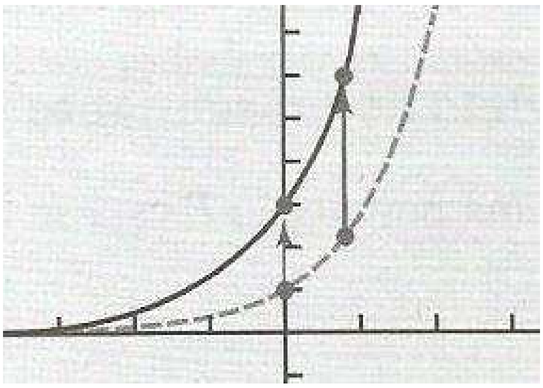
Apoiamo-nos em Demana *et al* (2009), ao propormos como atividade a transformação de uma função definida por $\mathrm{f(x)} = e^{\mathrm{x}}$ em outras funções exponenciais definidas por $\mathrm{f(x)} = \mathrm{a}.e^{\mathrm{kx}}$. Neste caso, o objetivo é perceber a relação existente entre as funções exponenciais de base e.

Situação: Explique e descreva como transformar o gráfico de $f(x) = e^x$ para o gráfico da função $k(x) = 3.e^x$ (Adaptado de DEMANA, *et al*, 2009, p.133).

Em uma situação de sala de aula, seria interessante a utilização de *software* matemático que seja possível dar tratamento às funções em geral. O objetivo é que o estudante, por meio da manipulação do gráfico da função natural, possa visualizar a transformação. Nesse caso, o uso do *software* é uma ferramenta fundamental com a tecnologia disponível para esse fim, o que não seria facilitado com o lápis e o papel.

Para resolver a situação 01, o autor propõe esticar verticalmente o gráfico de $f(x) = e^x$pelo fator 3, conforme o gráfico 5, o que resulta na mudança do intervalo [-4,4] por [-2,8].

Figura 5– Transformação de $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ em $\boldsymbol{k(x) = 3.e^x}$



Fonte: DEMANA *et al*., 2009, p.133

Outra abordagem que pode ser feita é definir funções exponenciais como funções de crescimento logístico. Segundo Demana *et al* (2009), uma função de crescimento logístico mostra seu crescimento a uma taxa crescente e não é limitada superiormente, por conta de situações reais. A função de crescimento logistico é limitada tanto inferior como superiormente por assíntotas horizontais.

> Sejam $a, b, c\ e\ k$ constantes positivas, $b < 1$. Uma função de crescimento logístico em x é uma função que pode ser escrita da forma: $f(x) = \frac{c}{1+a.b^x}$ ou $f(x) = \frac{c}{1+a.b^{-kx}}$, onde a constante c é o limite de crescimento. Se $b > 1\ e\ k < 0$, então as fórmulas serão funções de decaimento logístico. As funções de crescimento logístico têm comportamento nos extremos do domínio (conjunto dos números reais) dado por: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$, onde c é o limite de crescimento. (DEMANA *et al*., 2009, p.134).

Além dessas funções, podemos definir modelos exponenciais para crescimento ou decaimento de uma determinada população, como animais, bactérias e átomos radioativos. Algebricamente, os modelos, mesmo aqueles de crescimento logísticos, podem ser escritos como forma da função, cuja lei de formação é $f(x) = a.e^{kx}$.

Nesse caso de modelagem de decaimento ou crescimento, a importância está na aplicabilidade científica da função exponencial, e não exatamente do formato algébrico matemático que ela se apresenta. O estudo desses modelos é bastante útil em diversas áreas do conhecimento como forma de facilitar os cálculos. No entanto, nem sempre o professor de Matemática encontrará possibilidade de uso na Educação Básica, salvo em situações-problema, as quais poderão ser trabalhadas pelo modelo geral. Isto ocorre, sobretudo, por uma fragilidade na formação desses conceitos no repertório do professor.

Como exemplo, citamos o modelo de taxa percentual constante, utilizado na Matemática Financeira, no cálculo de juros compostos. Nesse modelo, a população é expressa em função do tempo pela expressão. "$P(t) = P_0(1+r)^t$" (DEMANA *et al*, 2009, p.134), na qual $1+r$ é o fator de crescimento ou decaimento exponencial da população, r é a taxa percentual constante e é expresso em números decimais. Se $r > 0$, temos crescimento, se $r < 0,$ temos decaimento.

Este estudo matemático da função exponencial traz contribuições significativas para a nossa pesquisa, tais como: diferentes abordagens para o conceito de função exponencial, como função exponencial natural, função de crescimento logístico, modelo de crescimento e decrescimento populacional. Estas contribuições influenciarão na elaboração das situações de ensino que serão propostas aos sujeitos, ampliando a nossa visão sobre o objeto matemático em estudo. No entanto, leva-nos a perceber a necessidade de adaptações na abordagem da função exponencial para os estudantes de licenciatura. Por outro lado, evidencia as transformações no saber, que são realizadas para o Ensino Médio.

1.2 REVISÃO DE LITERATURA: CONTRIBUIÇÕES DAS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE O OBJETO FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste tópico, apresentamos aspectos que se caracterizaram como relevantes para pesquisa em curso, sobre o tema "função exponencial". O objetivo é identificar elementos pesquisados sobre o conceito de função exponencial, além dos elementos metodológicos e teóricos das pesquisas que possam contribuir como o nosso estudo. Ressaltamos que, após o levantamento de trabalhos no banco de dados da CAPES, não encontramos nenhuma pesquisa com nosso foco de investigação, neste caso, um estudo sobre processos de ensino e de aprendizagem realizado em uma turma de Estágio Supervisionado, em um curso de licenciatura. Nesse sentido, buscamos aproximações que pudessem revelar os caminhos percorridos por outros estudos sobre função exponencial.

Salientamos que o objeto matemático a ser pesquisado, em um primeiro momento, seria função. Durante o levantamento bibliográfico sobre o tema, percebemos a existência de muitos trabalhos sobre o tema função. Optamos por trabalhar com a função exponencial, devido também à existência de poucos trabalhos sobre este tema. Sobre os trabalhos encontrados, apresentamos os aspectos que julgamos relevantes para nosso estudo.

Para a revisão de literatura, além da busca no banco de teses da CAPES, buscamos revista do Programa de Pós-graduados da PUC-SP, levantamos as publicações sobre o tema na internet, no Brasil e em Portugal.

Quando delimitamos o objeto de estudo matemático, o primeiro passo foi buscar, na literatura, trabalhos que discutiam o tema "função" de forma geral. Neste levantamento, encontramos os trabalhos de Oliveira (1997), Araujo (2005) Dominoni (2005), Rossini (2006), Magalhães (2009), Maia (2007), Marquesi (2008), Angiolin (2009), Brucki (2011) e Pereira (2010).

Sobre o tema geral "funções", relatamos aspectos importantes dos trabalhos de Rossini (2007) e Magalhães (2009).

Na pesquisa de Rossini (2006), encontramos convergência quanto aos pressupostos da formação de professores de Matemática, mesmo esta autora tendo trabalhado com professores em exercício. Identificamos elementos que apontam para fragilidades na formação desses professores. A autora sinaliza, em sua tese de doutorado, a pouca quantidade de pesquisas focadas em professores e destaca que muitas são voltadas para o aluno.

A pesquisa realizada por Rossini (2006) teve como objetivo investigar a (re) construção do conceito de função em um grupo de professores da rede pública estadual de São Paulo, ao desenvolver coletivamente e aplicar uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do tema, em uma sala da oitava série da rede estadual.

O problema de pesquisa abordado por Rossini (2006) perpassa por duas questões: quais organizações matemáticas são mobilizadas durante a construção de uma sequência de ensino sobre funções para uma oitava série do ensino fundamental e como os professores reconstroem seus saberes docentes sobre o conceito de função?

A metodologia de pesquisa utilizada por Rossini (2006) foi a pesquisa-ação, na qual, o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado para observá-lo, compreendê-lo e participar, com o objetivo de promover transformações na prática docente. Nessa perspectiva, o conhecimento se caracteriza como sendo consequência da realidade, e não um produto de um estudo sobre a realidade.

Os resultados apresentados no trabalho desta autora englobaram vários itens que foram observados e analisados durante o experimento. Foi destacado o engajamento espontâneo dos professores na elaboração e na aplicação de materiais instrucionais de sala de aula. Durante a pesquisa, observamos que os professores assumiam diferentes papeis, alternando-se como construtores e analistas da sequência de ensino, além de desenvolver a capacidade de ser críticos em relação ao que foi observado em suas próprias práticas.

Esses fatos, segundo a autora, permitiram aos professores reorganizar e divulgar uma nova forma para introduzir o conceito de função. Rossini (2006) sinaliza ainda que os benefícios obtidos com a pesquisa por ela desenvolvida poderão ser também alcançados com outros temas.

No que se refere ao conceito matemático “função”, a pesquisa de Rossini (2006) trouxe uma nova abordagem para o tema no Ensino Fundamental, uma ressignificação para os objetos ostensivos f(x) e f, utilizados a partir do conceito de função como “máquina”, trabalhado nas sessões de ensino. Ainda destacamos que a investigação sobre a formação dos professores articulou a dimensão didática, conceitual e uma análise das práticas docentes além da formação de professores, tendo como pano de fundo o conceito de função.

Destacamos que o percurso realizado na pesquisa de Rossini (2006) pode ser reproduzido em parte ou na totalidade, em novas pesquisas, conforme sinaliza a autora, portanto, a investigação sobre as praxeologias, no sentido de organizações matemáticas e organizações didáticas durante uma formação de professores, em um curso de licenciatura em Matemática, sobre função exponencial, pode ter como fonte orientadora o percurso desenvolvido por esta autora.

Magalhães (2009), em seu trabalho sobre funções, teve como ponto de partida motivacional as dificuldades dos alunos da Educação Básica e do Ensino Superior com os conteúdos matemáticos. Em especial, essa pesquisa trabalhou com o objeto matemático “função”, utilizou a ferramenta computacional como estratégia para buscar uma reestruturação da apresentação didática do conteúdo, indicando o estudo da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e aplicação de mapas conceituais (mapas digitais) de Novak e Gowin como caminhos a ser trilhados na solução das dificuldades de aprendizagem dos alunos.

A pesquisa discute se o trabalho cognitivo gerado pela utilização de mapas conceituais digitais alavanca o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos estudantes. Esta questão suscitou verificar se os alunos de Ciência da Computação, ao utilizar mapas conceituais digitais, engajam-se em estratégias metacognitivas. Se sim, que níveis conseguem atingir? Ainda verifica se, durante este estudo, o uso de mapas conceituais digitais interfere na compreensão dos estudantes em relação ao objeto matemático.

No trabalho de Magalhães (2009), percebemos motivações semelhantes às de nossa pesquisa, quanto aos grupos de estudantes com dificuldades nos conceitos matemáticos relativos à função. O autor apresenta uma possibilidade diferente do trabalho proposto por Rossini (2006) para construção e reconstrução dos saberes sobre função, inclusive no uso dos mapas conceituais.

No trabalho de Magalhães (2009), o uso da interface computacional com os mapas digitais foi primordial para a proposta, além de perceber que o foco do trabalho não foi a formação profissional, mas, sim, o processo de aprendizagem. É possível que o uso de ferramentas computacionais em uma formação de professores possa facilitar o processo de construção de saberes, no entanto, não se configura como objeto principal de nosso estudo, mas pode contribuir nas situações de aprendizagem a ser propostas na sequência didática.

Sobre o objeto matemático, destacamos outras pesquisas que abordam funções reais de forma geral e especificamente. Nos trabalhos visitados, Oliveira (1997), Araujo (2005) Dominoni (2005), Rossini (2006), Magalhães (2009), Maia (2007), Marquesi (2008), Angiolin (2009), Brucki (2011) e Pereira (2010), foi unânime a percepção de que estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior apresentam certo grau de dificuldade em relação aos diferentes tipos de funções. Ressaltaremos, neste estudo bibliográfico, as pesquisas que tratam da função exponencial, levantando aspectos que contribuem na construção de nosso estudo.

Supomos, por hipótese, que uma das fontes do problema dos alunos em geral, para aprender funções reais (no caso, função exponencial), reside na formação inicial do professor de Matemática, pois tal formação tem se mostrado ineficaz diante das dificuldades de aprendizagem dos estudantes com álgebra em relação à função.

No entanto, a maior parte das pesquisas encontradas trata da dificuldade de estudantes da Educação Básica, e nenhuma das encontradas em nossa busca traz um trabalho voltado para formação inicial (no Estágio Supervisionado) do futuro professor de Matemática, mas essas pesquisas são importantes por discutir o caráter da aprendizagem da função exponencial e as dificuldades dos alunos, aspectos fundamentais para compreender as fragilidades na formação do professor. Destacamos os trabalhos de Brucki (2011), Angiolin (2009), Araújo (2005), Dominoni (2005) e Pereira (2010) sobre a função exponencial.

O trabalho de Dominoni (2005) apresenta um estudo da função exponencial sobre os diferentes registros de representação. A autora propõe verificar se, durante a utilização de uma sequência didática (a qual considere o tratamento, a conversão e a coordenação dos diferentes registros de representação da função exponencial), contribui para a apreensão do objeto matemático "função exponencial".

Na Teoria dos Registros de Representação (DUVAL, 1999), a autora identificou uma das fontes teóricas para analisar o processo cognitivo dos sujeitos sobre a aprendizagem e quais estruturas mentais estão envolvidas nesse processo.

A pesquisa de Dominoni (2005) corrobora com a nossa, por trabalhar com a aprendizagem de função exponencial, com estudantes do Ensino Médio, a partir dos pressupostos da Engenharia Didática. De certo modo, compreender o processo de aprendizagem desses sujeitos ajuda a repensar também o processo de ensino a ser desenvolvido para o Ensino Médio na construção do conhecimento didático, nas propostas de Estágio Supervisionado.

Dominoni (2005) identificou que as conversões e coordenações entre registros não ocorrem (para o aluno) de forma espontânea. O professor precisa criar situações que propiciem aos alunos a oportunidade de fazê-las, pois esta ausência de coordenação entre as representações de diferentes registros impede que o aluno tenha uma visão global do objeto que está sendo estudado.

Nesse sentido, incorporar à sequência didática situações que possibilitem ao estudante transitar em diferentes registros de representação, bem como articular diferentes registros de representação na resolução das tarefas sobre função exponencial são ações que poderão permitir a aquisição do conhecimento e dos saberes que desejamos construir com os sujeitos.

No que diz respeito ao estudo do objeto matemático, Dominoni (2005) traz uma abordagem que discute os conceitos relativos à importância de se estudar função de uma forma geral, abordando alguns aspectos históricos, e apresenta a definição de função exponencial, expressa como nos livros didáticos.

No seu trabalho, Brucki (2011) apresenta uma pesquisa realizada com estudantes do Ensino Médio, utilizando os pressupostos da aprendizagem significativa de David Ausubel, em uma proposta de ensino de função exponencial, usando modelagem matemática. Ressaltamos que a pesquisa da autora propõe o uso da modelagem como uma mudança de estratégia de ensino, para abordar o conceito de função exponencial, além de problematizar aspectos dos conceitos relativos à função exponencial, os quais, segundo a autora, são fatores de dificuldade na construção do conhecimento mais geral, tais como: crescimento e decrescimento da função exponencial; interpretação do significado da função exponencial; além da dificuldade de trabalhar com a expressão matemática.

Brucki (2011) aponta que, na construção do conhecimento sobre função exponencial, essas dificuldades nos sinalizam aspectos do conhecimento do objeto matemático que podem ser privilegiados na sequência de ensino que propomos. Um aspecto que destacamos é a proposta de situação de aprendizagem que é sugerida, ressaltando, entre outros aspectos, a relação entre a lei que expressa o termo geral de uma progressão geométrica, com a lei da função exponencial, como modelo de solução para um problema sobre a utilização da radioatividade na vida dos indivíduos.

A situação proposta pela autora traz uma discussão sobre os acidentes nas usinas nucleares de Fukushima, no Japão. O objetivo foi "demonstrar as conexões existentes entre os meios naturais, material radioativo *versus* ar, sua modificação, assim como a contextualização entre o meio e a Matemática e entre conceitos, progressão geométrica e função exponencial" (BRUCKI, 2011).

O trabalho de Angiolin (2009) dá ênfase, de uma forma geral, a três aspectos: 1) a atuação do professor de Matemática nas atividades de planejamento como objetivo do ensino de funções exponenciais, sendo este compatível com uma proposta construtivista de aprendizagem; 2) a compatibilização das perspectivas construtivistas de aprendizagem sobre função exponencial em uma planificação de ensino; 3) terceiro aspecto é a respeito das pesquisas na área de Educação Matemática, nas quais, a autora identificou aquelas que, na sua ótica, trazem resultados importantes sobre a aprendizagem e podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações e aprendizagem dos alunos no caso da função exponencial.

Embora o nosso quadro teórico caminhe em direção distinta da pesquisa de Angiolin (2009), reconhecemos a convergência de ideias em sua proposição sobre a formação do professor na perspectiva do trabalho didático realizado pelo professor em sala de aula.

De acordo com Angiolin (2009), há um distanciamento e uma falta de diálogo entre as instituições que formam os professores nos cursos de licenciatura em Matemática e nos sistemas de ensino da Educação Básica, além da desarticulação entre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos e entre teoria e prática, nesses mesmos cursos.

Em nossa pesquisa, pretendemos contribuir para a superação desse quadro, ou seja, a partir de uma proposta de pesquisa de campo no Estágio Supervisionado, pretendemos contribuir para promover uma articulação entre teoria e prática, na formação inicial do professor de Matemática, buscando o rompimento do quadro atual de desarticulação dos saberes docentes.

Com relação aos resultados apresentados, ressaltamos que a autora tomou como uma das questões de pesquisa a atuação do professor frente às atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com a perspectiva construtivista. Segundo Angiolin (2009), não foi suficiente informar aos professores as intenções da proposta, pois a forma como um dos professores se posicionou frente às Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem – THA provocou desinteresse nos alunos na resolução das atividades. Esse resultado nos remete a uma reflexão sobre a necessidade de promover, em nosso estudo, por parte dos sujeitos da pesquisa, elaborações didáticas que, dentre outros objetivos, possam promover um maior envolvimento de seus aprendizes na resolução de tarefas.

Na pesquisa de Araujo (2005), encontramos um estudo sobre a aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas por estudantes do Ensino Médio, a partir do uso de *software* como ferramenta facilitadora da aprendizagem. Em seu trabalho, o autor buscou, por meio de entrevistas com professores, identificar as principais dificuldades dos alunos com as funções. Além disso, aplicou atividades sobre funções exponenciais e logarítmicas com o uso de *software*, como o objetivo de promover a aprendizagem.

A pesquisa de Araujo (2005) nos faz refletir sobre a possibilidade de uso de *software* computacional em uma proposta de formação. Compreendemos que esse recurso, se adequadamente utilizado, pode facilitar os processos de ensino e de aprendizagem, como já foi sinalizado no trabalho de Magalhães (2009). Nesse sentido, nas atividades propostas na sequência didática, em nossa pesquisa, eventualmente poderemos usar o *software* como um recurso facilitador do processo de aprendizagem, essencialmente quando tal ferramenta for fundamental para resolução das tarefas.

A pesquisa de Pereira (2010) também utilizou *software*, o autor discutiu a função exponencial e a logarítmica sob o ponto de vista de uma abordagem conceitual e gráfica, buscando diferenciar estas funções das lineares ou polinomiais. Já que trabalhou com estudantes do Ensino Médio, Pereira (2010), em seu trabalho, apresentou uma discussão sobre livros didáticos e sobre os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Aplicou uma sequência didática no sentido de facilitar o entendimento do conceito e a interpretação gráfica das funções exponenciais e logarítmicas.

A revisão de literatura nos permitiu clarificar quais direções serão tomadas na pesquisa, seja do ponto de vista teórico, metodológico ou ainda na escolha do tipo de sequência didática a ser utilizada.

Em linhas gerais, visitar as pesquisas nos permite levantar quais aspectos são importantes para ser incorporados à sequência didática na sua construção: situações-problema que envolvam vários registros de representação, bem como a conversão e a articulação entre registros, uso do *software* como facilitador no processo da resolução das tarefas, situações-problema que modelem os conceitos de função exponencial como modelo de crescimento ou decaimento populacional.

Quanto ao quadro teórico, as pesquisas nos sinalizam para a necessidade de articulá-lo à análise dos livros didáticos, aos resultados obtidos e à aplicação da sequência didática.

1.3 DOCUMENTOS OFICIAIS SOBRE O ENSINO MÉDIO

Considerando que o experimento da pesquisa ocorrerá em uma turma de Estágio Supervisionado no Ensino Médio, de um curso de licenciatura em Matemática, cujo componente curricular se chama Estágio IV, faz-se necessário promover reflexões sobre o que os documentos oficiais orientam e defendem a respeito desta etapa de ensino. Tais reflexões tratarão, sobretudo, de questões relativas: ao conteúdo matemático; ao método para seleção desses conteúdos; aos objetivos; às metodologias indicadas e sugestões de atividades.

Além do exposto, esses documentos devem ser também trabalhados nos componentes de Prática de Ensino da licenciatura. Destacaremos pontos importantes desses documentos, no sentido de justificar a necessidade de uma pesquisa na formação inicial do professor de Matemática, além de buscar elementos fundamentadores de nossas hipóteses de trabalho.

Os documentos oficiais levantados foram os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio (PCN+)

e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM). O objetivo foi levantar como o conhecimento relativo à função exponencial, enquanto campo algébrico do conhecimento matemático, é sugerido por esses parâmetros e quais caminhos são indicados ao professor para a abordagem de ensino de Matemática como um todo.

Ao ressaltar a importância da Matemática no Ensino Médio, os documentos levantam os objetivos gerais para promover a aprendizagem dos alunos em Matemática de uma forma geral.

É importante destacar que tais objetivos, evidentemente norteadores do processo de ensino e aprendizagem em Matemática, precisam ser adotados pelo professor em sua prática. Além disso, o professor em fase de formação inicial – no caso, o estudante da licenciatura – necessita compreender de que formas cada objetivo proposto pelo documento pode ser, de fato, alcançado na sala de aula.

Uma discussão teórico- prática, no âmbito do Estágio Supervisionado, acerca da validade, possibilidade de efetivação quanto ao que se propõe nos PCN é fundamental. E ainda mais que isso, os documentos oficiais devem ser temas de estudo em uma proposta de Estágio Supervisionado para o Ensino médio. Nessa perspectiva, ressaltamos alguns pontos de discussão nos documentos selecionados que podem influenciar a prática do professor para o ensino de função exponencial.

Além de rever a metodologia de ensino, o documento (BRASIL, 1999) propõe uma ruptura do modelo de ensino que mantém o conhecimento matemático restrito à informação, com definições e exemplos, exercícios de aplicação, ou a apresentação de conceitos de forma fragmentada, o que não garante que o aluno possa estabelecer algum significado para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras.

Embora o documento (BRASIL, 1999) aponte que, na escolha dos conteúdos, o professor pode sinalizar possíveis indicações de temas para compor o currículo, de acordo com as necessidades da escola e da comunidade, na prática, os sistemas de ensino nem sempre permitem esta flexibilidade. Cada secretaria municipal ou estadual de educação indica qual currículo deve ser seguido pela escola, o que podemos chamar de currículo prescrito. Por outro lado, os documentos nacionais deixam, de certa forma, o professor livre quanto às suas escolhas didáticas e metodológicas, visto que não há um efetivo acompanhamento da prática de sala de aula, quanto ao cumprimento dos parâmetros.

Refletimos que, nas condições atuais da educação brasileira, dificilmente, o professor dará conta de trabalhar com os estudantes todos os conteúdos, competências e habilidades, e não é esse o objetivo proposto pelos PCNEM (BRASIL, 1999). O objeto matemático “função exponencial”, de uma forma geral, tem possibilidades de desenvolver certas habilidades, além disso, cabe ao professor fazer uma escolha didática e metodológica que seja capaz de priorizar determinadas habilidades a ser desenvolvidas pelo aluno.

Sobre o conjunto de habilidades propostas em Brasil (1999), percebemos que estas se apresentam como habilidades gerais (representação e comunicação, investigação e compreensão, contextualização sócio- cultural), a ser desenvolvidas no ensino de Matemática, não tendo um foco ou direcionamento em conteúdos específicos, a exemplo da função exponencial. O documento sinaliza ainda o uso da resolução de problemas como proposta de trabalho interdisciplinar.

O documento PCN+ (BRASIL,2002), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio têm, como o título já evidencia, o objetivo de complementar os PCNEM. Em todo o trabalho, a discussão é sobre uma visão que tenta propor ações integradoras para o ensino das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Matemática, Química, Física e Biologia). Tal discussão é mais enfática que nos PCNEM (BRASIL, 1999).

Com relação às habilidades, algumas alterações são apresentadas, mas não trazem mudanças significativas em relação ao documento anterior. A proposta de contextualização perpassa pelo ensino de Ciências, o que, em nossa visão, descaracteriza o contexto próprio da Matemática. Há também uma forte ênfase ao discurso da Ciência e Tecnologia enquanto eixo norteador de competências do bloco Contextualização Sociocultural.

Esses dois documentos discutem o ensino de Matemática de forma geral, não propõem uma abordagem conceitual dos eixos dos conteúdos matemáticos, muito embora apresente alguns fundamentos para nortear a prática do professor quanto ao tratamento a ser dado ao conteúdo em sala de aula. Nessa perspectiva, não trazem nenhuma abordagem didática para o ensino de função exponencial ou outros conteúdos matemáticos.

No documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), a parte destinada à Matemática inicia com uma discussão sobre os quatro blocos de conteúdo – Números e Operações, Funções, Geometria, Análise de dados e Probabilidade – sugerindo uma abordagem articulada entre os conteúdos. De forma especial, destacamos que, na abordagem sugerida para função exponencial,

> É pertinente discutir o alcance do modelo linear na descrição de fenômenos de crescimento, para, então, introduzir o modelo de crescimento/decrescimento exponencial ($f(x) = a^x$). É interessante discutir as características desses dois modelos, pois, enquanto o primeiro garante um crescimento à taxa constante, o segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. (BRASIL, 2006, p.74)

De acordo com Brasil (2006), nas aplicações gerais em que é necessária a resolução de equações exponenciais, a função logarítmica pode aparecer com a necessidade do uso da função inversa. Além disso, a resolução de equações exponenciais se torna pertinente quando associada a situações-problema da Química, Biologia, Matemática Financeira e outras. Recomenda, ainda, que não se faça um estudo com uso exaustivo dos logaritmos.

O documento Brasil (2006) sugere, também, uma abordagem da progressão aritmética e progressão geométrica como funções afins e exponenciais respectivamente. O estudo das progressões não deve ser tratado como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas, além de evitar, no tratamento desses conteúdos, o simples uso de fórmulas sem estabelecer relações com os conceitos relativos às funções.

Sobre a metodologia, duas concepções históricas de ensino e aprendizagem são levantadas em Brasil (2006): o ensino por transmissão do conhecimento, a aprendizagem como mera recepção dos conteúdos; e aquela que se baseia na apresentação de situações problemas, nas quais o aluno é responsável pela sua própria aprendizagem.

De uma forma geral, os documentos oficiais estudados, relacionados ao Ensino Médio não apresentam elementos de discussão didática sobre a função exponencial, pois, em sua totalidade, trazem sugestões apenas de cunho pedagógico para o processo de ensino. A abordagem didática dos conteúdos, em específico, da função exponencial, não é apresentada em nenhum dos documentos, salvo o que já foi descrito acima da OCEM (BRASIL, 2006). Alguns elementos da didática da Matemática são ressaltados no texto, mas não fornecem nenhuma explicação desses elementos teóricos, por exemplo, contrato didático e transposição didática. Em nossa ótica, os tópicos usados para nortear o trabalho do professores têm importância para nossa pesquisa, pois são tópicos de estudo no Estágio Supervisionado curricular.

Nesse sentido, nossa pesquisa poderá contribuir com uma proposta didática para o ensino de função exponencial, sobretudo, ao professor que deseje utilizar a pesquisa em sala de aula, realizando alguma adaptação da sequência didática à realidade de sua escola.

Em síntese, os documentos oficiais consultados, apesar de trazer orientações pedagógicas básicas e gerais para o professor, não apresentam uma discussão mais aprofundada dos objetos matemáticos a ensinar.

2 PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Neste capítulo, de uma forma mais ampla e aprofundada, objetivamos discutir as nossas questões de pesquisa e os objetivos da investigação. Entender a problemática na qual se insere o nosso estudo é importante para o levantamento de hipóteses acerca das causas que compõem o pano de fundo das dificuldades inerentes à formação de professores de Matemática. Além disso, propomos uma discussão do quadro teórico e da metodologia adotada.

2.1 PROBLEMÁTICA

A partir da nossa revisão de literatura, percebemos a existência de mais pesquisas com o foco no processo de aprendizagem de estudantes que pesquisas sobre professores e sua formação.

Das pesquisas já realizadas com professores, destacamos aquelas relacionadas ao estudo de funções, como a de Rossini (2006) e de Zuffi (1999, 2004). Tais pesquisas apontaram as fragilidades na formação do professor de Matemática. Para Zuffi (2004), a maneira exclusivamente formal como o conceito de função é apresentado para estudantes não é suficiente para que os futuros professores possam ter uma visão conceitual ampliada. Esse contexto não é diferente em relação ao ensino da função exponencial, pois percebemos que nossos estudantes de licenciatura, na fase do Estágio Supervisionado, tendem a reproduzir as fragilidades, os erros e equívocos conceituais na sua prática de ensino (em turmas de Ensino Médio) do estágio.

Por outro lado, não é apenas o domínio conceitual matemático, embora este seja fundamental, que poderá garantir o sucesso da prática de ensino. Para desenvolver uma proposta voltada para o ensino de função exponencial, os sujeitos que ensinam precisam de domínio de certos saberes inerentes à prática docente e que devem ser trabalhados durante a licenciatura, inclusive no Estágio Supervisionado.

Tardif (2012) define os saberes docentes a partir da relação entre o professor e o saber. Ele afirma que:

> [...] a relação dos docentes com os saberes não se reduz a uma função de transmissão dos conhecimentos já constituídos. Sua prática integra diferente saberes, com os quais o corpo docente mantém diferentes relações. Pode-se definir o saber docente como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos

> da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais. (TARDIF, p.36, 2012)

Em nosso trabalho, quando usamos a expressão “conhecimento/saber sobre a função exponencial”, estamos nos referindo ao conhecimento matemático aliado ao conhecimento didático (teórico) sobre a função exponencial, que está mais de acordo com o que Tardif (2012, p.38) chama de saberes disciplinares: “[...] estes saberes integram-se igualmente à prática docente através da formação (inicial e continuada) dos professores nas diversas disciplinas oferecidas pela universidade”. De uma forma geral, o conhecimento didático que nos referimos é o da didática da Matemática que deve se aliar à atividade prática do professor (ou futuro professor), em uma proposta de ensino de qualquer saber matemático, seja no estágio ou na prática. Em relação ao estágio, Pimenta e Lima (2011) afirmam que:

> O estágio não é uma atividade prática, mas teórica instrumentalizada da práxis docentes, entendida como atividade de transformação da realidade. Nesse sentido, o estágio curricular é atividade teórica de conhecimento, fundamentação, diálogo e intervenção na realidade, esta sim, objeto da práxis. (PIMENTA; LIMA, 2011, p.45)

Apoiados em Tardif (2012) e Pimenta e Lima (2011), acreditamos que esses saberes docentes (saberes disciplinares), a que nos referimos anteriormente, devem compor o repertório dos estagiários, formandos dos cursos de licenciatura. Mas, de acordo com Tardif (2012), certo saberes inerentes à docência só serão desenvolvidos pelos sujeitos, na atividade profissional docente, seja na efetiva regência de sala de aula, nas atividades pedagógicas de planejamento da escola, no envolvimento com os projetos escolares, dentre outras atividades.

2.2 PROBLEMA E QUESTÃO DA PESQUISA

A partir da problemática que apresentamos no item anterior, delimitamos como questão de pesquisa: Como organizações didáticas interferem na construção de conhecimentos/saberes dos estagiários de licenciatura em Matemática, sobre o conceito de função exponencial?

Nosso objetivo geral é, portanto, analisar as organizações praxeológicas construídas pelos estagiários do curso de Licenciatura em Matemática, sobre a função exponencial. Para dar conta deste objetivo e tentar responder à questão de pesquisa, definimos quatro objetivos específicos, os quais apresentamos a seguir: 1) Analisar as organizações matemáticas e didáticas propostas pelos autores dos livros didáticos escolhidos, mais especificamente, identificar e analisar os tipos de tarefa (e técnicas relacionadas com esses tipos de tarefas) no intuito de fazer inferências sobre o provável conhecimento/saber que seria aprendido pelo aluno submetido à prática docente apoiada nesses livros; 2) Construir, analisar e experimentar uma sequência de atividades no intuito de identificar o significado da função exponencial construído por estagiários de licenciatura em Matemática; 3) Analisar como essa sequência pode contribuir (ou contribuiu) para consolidação de saberes referentes à função exponencial e seu campo conceitual por parte de nossos sujeitos de pesquisa. Lembramos que, segundo Vergnaud (1991), um campo conceitual é o espaço de problemas ou situações-problema, cujo tratamento envolve conceitos e processos de vários tipos em estreita conexão (um campo conceitual é caracterizado por um conjunto de vários conceitos de naturezas diferentes, que envolve muitas situações. Portanto, um **conceito** não se reduz à sua definição, e deve ser encarado como uma **terna C = (S, I, R)**, na qual: **S** é o conjunto de situações que tornam o conceito significativo; **I** é um conjunto de invariantes, que podem ser reconhecidas e usadas pelo indivíduo para entender as situações. Por exemplo: objetos, propriedades e relações; **R** é um conjunto de representações simbólicas que servem para representar as situações e ajudar a resolver problemas. Por exemplo: linguagem natural, figuras, gráficos, diagramas e sentenças formais. O campo conceitual das funções envolve muitos conceitos, como o de relação entre conjuntos, variação, dependência e correspondência entre variáveis, variável dependente e independente, entre outros. Para representar uma função, podemos utilizar uma tabela, um gráfico, um diagrama de flechas ou uma expressão algébrica. Estas representações, portanto, constituem R. O campo conceitual da função exponencial envolve muitas situações, como, por exemplo, o crescimento da população do Brasil em função do tempo, o número de bacilos existentes numa determinada cultura, no instante t, a pressão de um gás em função da temperatura etc. Estas situações, por sua vez, tornam o conceito significativo, e, portanto, constituem S); 4) Identificar quais saberes docentes são mobilizados pelos sujeitos na perspectiva do ensino de função exponencial.

O que pretendemos, em linhas gerais, é propor uma formação durante a realização do Estágio Supervisionado, com estudantes atuando no Ensino Médio, sob orientação desta pesquisadora. Esse contexto foi escolhido como pano de fundo para compor as situações a ser analisadas após a experimentação e, desta forma, dar conta de atingir os nossos objetivos.

2.3 HIPÓTESES

Nossas hipóteses percorrem a seguinte trajetória: construção de conceitos matemáticos sobre função exponencial, no sentido de formar novos conceitos e consolidar os antigos, identificando saberes disciplinares já construídos pelos sujeitos durante a formação inicial na graduação.

Nossas hipóteses apoiam-se na pesquisa realizada por Freitas e Almouloud (2012), como etapa preliminar de nossos estudos. Os referidos pesquisadores aplicaram uma atividade com situações-problema sobre função exponencial, investigando quais esquemas[1] cognitivos eram mobilizados por quatro estudantes de um curso de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, cursando o último Estágio Supervisionado.

Segundo Freitas e Almouloud (2012), foi possível perceber a grande dificuldade que os estudantes apresentam ao lidar com situações-problema que envolvam a função exponencial. Esses autores identificaram que os alunos parecem dominar os conceitos prévios necessários ao estudo da função exponencial, como: conceito de função, representação de uma reta no eixo cartesiano, substituição das variáveis x e y, entre outros. Mas, eles apresentam dificuldades para resolver os problemas que exigem as conversões de registros de representação semiótica: figural para algébrico, algébrico para gráfico, além disso, confundem problemas de crescimento exponencial com crescimento linear.

Outro aspecto importante observado pelos autores foi a dificuldade apresentada pelos estudantes em relatar, explicar, em linguagem natural, as estratégias de resolução e as antecipações para agir em cada situação em busca da solução da situação proposta. Segundo os autores, este fato também dificultou a análise das atividades.

Um ponto fundamental que levamos em consideração em nossa pesquisa é a formação inicial dos futuros professores de Matemática da Educação Básica, proporcionada pelos cursos de Licenciatura em Matemática. No trabalho de Freitas e Almouloud (2012), as produções dos estudantes e as análises realizadas nos dão pistas de que a formação inicial pode não estar dando conta de preparar os estudantes, ao menos

[1]De acordo com Vergnaud (1990), é a organização invariante do tratamento de dado tipo de situação. É nos esquemas que encontramos os elementos cognitivos que permitem a ação do aprendiz ser operacional. A reprodução das ações reforça os esquemas, e o processo da assimilação favorece sua generalização. O processo da acomodação permite fazer diferenciações e coordenações.

no que se refere ao ensino e a aprendizagem de função exponencial, para a docência na Educação Básica. Tal fato corrobora com os resultados já apontados por Rossini (2006), Zuffi (1999, 2004) e Pires (2012).

Nessa perspectiva, percebemos a necessidade de desenvolver, em nossa pesquisa, situações de aprendizagem nas quais os estudantes possam ressignificar os conceitos relativos à função exponencial, no sentido de contribuir para a construção de saberes docentes sobre tais conceitos.

Por outro lado, como sujeitos da pesquisa, os estagiários da licenciatura encontram-se em fase de formação inicial (graduação). Ainda que no final desta etapa, certamente não têm desenvolvido, em seu conjunto de saberes, todos aqueles que Tardif (2012) chama de saberes docentes. No entanto, esperamos que, na sequência didática das produções dos estudantes, possamos identificar quais saberes docentes (disciplinares) são mobilizados por eles em uma proposta de atividade sobre função exponencial a ser planejada para turmas de Ensino Médio.

Quando falamos de situações de aprendizagem, referimo-nos àquelas que estão pautadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Guy Brousseau, as quais se caracterizam como aquelas em que o professor não revela para o aprendiz as suas intenções de ensino, no entanto, foram planejadas e construídas pelo professor no sentido de proporcionar as condições favoráveis para a apropriação do saber que se deseja ensinar, em nosso caso, a função exponencial (ALMOULOUD, 2007). Nesse sentido, elaboramos uma sequência didática fundamentada nos princípios da TSD, no intuito de alcançar os objetivos desejados.

A partir do exposto, levantamos duas hipóteses:1) Os estagiários da licenciatura em Matemática, sujeitos de nossa pesquisa, não dispõem, em seu repertório cognitivo, de forma consolidada, do conceito de função exponencial; 2) Uma proposta de formação com base em situações de aprendizagem – nas quais os estudantes estagiários, sujeitos de nossa pesquisa, debrucem-se na resolução de situações-problema propostas, reflitam, conjecturem, investiguem e busquem uma explicação das estratégias de resolução almejadas – poderá favorecer a construção e a consolidação de conhecimentos/saberes referentes à função exponencial.

2.4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Sabendo que a natureza de nossa pesquisa é qualitativa e que temos dois segmentos importantes na investigação – a aprendizagem do objeto matemático e as elaborações didáticas construídas pelos sujeitos em torno desse objeto –, propomos como referencial teórico a TSD, que discutimos no item 2.4.1.

2.4.1Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau (1996), tem por objetivo modelar os processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos matemáticos. Ela provoca três rupturas que, segundo Almouloud (2007), são de natureza epistemológica, considerando: a Matemática como essência dos fenômenos didáticos; a necessidade de elaboração de uma ciência de tais fenômenos que possa explicitar os modelos teóricos utilizados e submetê-los a um esquema experimental válido e confiável; os conhecimentos matemáticos como aqueles que só podem ser compreendidos por meio de problemas, e resolvidos pela mobilização desses mesmos conhecimentos. Nesse sentido, Brousseau afirma que:

> Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1975, *apud* ALMOULOUD, 2007, p.31)

É nessa perspectiva que propomos aos estudantes uma sequência didática cujo objetivo seja construir e consolidar o conceito de função exponencial e elaborar uma sequência de ensino que possa ser aplicada em turmas de Ensino Médio.

Partindo do pressuposto da TSD, quanto à modificação de comportamentos, característica da aquisição de um conhecimento, supomos que o uso dessa teoria na proposta de formação possa viabilizar a construção do saber matemático, função exponencial, o qual ainda não está consolidado no conjunto de conhecimentos apreendidos pelos estudantes, sobre esse objeto matemático. Nessa perspectiva, apoiamo-nos na TSD para analisar as interações entre sujeito que aprende e o meio de que dispõe para desenvolver o conhecimento, via interações fundamentais. Almouloud (2007), apoiado em Brousseau (1986), aponta três hipóteses, as quais resumimos como características do *milieu*[2] em nosso trabalho, a saber: 1) Ser fator de dificuldades, de contradições e de desequilíbrio (*milieu* antagônico); 2) Ser munido de intenções didáticas, no sentido de permitir a aquisição do conhecimento matemático, visto que o meio sem intenções didáticas é insuficiente nesse sentido; 3) O meio e as situações devem engajar-se com os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Perrin-Glorian (1998 *apud* ALMOULOUD, 2007, p.45), o *milieu* pode ser caracterizado das seguintes formas: 1) *Milieu* material, caracterizado pelos objetos, materiais e instrumentos disponíveis; 2) *Milieu* cognitivo, constituído pelos conhecimentos e saberes necessários à resolução de uma situação-problema, os quais não são obrigatoriamente institucionalizados; 3) *Milieu* social, composto pelos demais participantes do processo de resolução de um problema e que sobre ele intervém.

Em nosso trabalho, acreditamos ser pertinente identificar, no contexto da pesquisa, os elementos que compõem o *milieu* global, antes de iniciar a experimentação. Nessa perspectiva, faremos esta identificação no capítulo 4, referente à construção de situações de aprendizagem.

De acordo com Brousseau (2008), as situações podem permitir que o sujeito evolua de tal modo que a "gênese" do conhecimento seja o fruto de uma sucessão de perguntas e respostas, que se caracteriza como processo que o autor chamou de *dialéticas*. As dialéticas envolvem distintas relações com o saber em jogo: ação, formulação, validação e institucionalização.

As situações de ação, formulação e validação são específicas da atividade investigativa do aprendiz, as quais deveriam estimular essa capacidade, bem como o uso de conjecturas, levantamento de hipóteses, que podem ser comparadas a trabalho do matemático. As atividades propostas na sequência didática foram elaboradas de forma que nossos sujeitos de pesquisa possam ser levados a essas condutas.

Nesse sentido, apoiamo-nos nas ideias de Brousseau (2008)para que essas situações envolvessem elementos que favorecem a instituição das fases adidáticasdos processos de aprendizagem. Essas fazem parte de um *milieu* antagônico que provoque dificuldades, contradições e desequilíbrio, que exigem uma postura investigativa do aluno

[2] De acordo com Brousseau (1986), citado por Almouloud (2007), o termo *milieu* poderia ser traduzido do termo francês *milieux* para "meio", no entanto, o autor não utiliza esta tradução, por entender que ela não contempla o conceito de milieu. Em nosso trabalho, utilizaremos o termo *milieu* ou *meio* para designar a mesma coisa.

para construir novas respostas que podem ser sinais de aprendizagem. Nesse contexto o professor se coloca como mediador e o aluno protagonista de sua aprendizagem.

Somente na fase de institucionalização é que o professor assume a posição daquele que estabelece um estatuto de saber válido, de forma explícita. Este novo conhecimento agora fará parte daqueles conjuntos de saberes aceitos social, científica e historicamente.

Em nossa pesquisa, os conhecimentos em jogo, os quais os sujeitos precisam desenvolver, perpassam a aquisição do saber matemático sobre função exponencial e, também, a capacidade de transformar esses saberes em um conjunto de praxeologias adaptadas ao uso escolar, aplicáveis a turmas de Ensino Médio (mobilizar saberes didáticos sobre a função exponencial).

2.4.2 Metodologia de pesquisa

Optamos por utilizar uma metodologia que pudesse viabilizar a construção de situações de aprendizagem a ser aplicadas em uma turma de Estágio Supervisionado, na perspectiva de construção do conhecimento matemático sobre função exponencial. O caráter experimental caminhou no sentido de buscar uma metodologia capaz de nos ajudar na análise e experimentação das realizações didáticas em sala de aula. Nesse sentido, encontramos, na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), os pressupostos necessários para o desenvolvimento da investigação. De acordo com Almouloud (2007, p.169),

> [...] o objetivo de uma pesquisa é confirmar ou refutar contribuições teóricas a partir de uma argumentação que esse apoia em uma experimentação. A problemática refere-se aos artigos e obras atestados ou trabalhos que tratam do assunto em um processo de validação-refutação, propondo as etapas da pesquisa e da experimentação, além de definir como esse plano corresponde aos objetivos. (ALMOULOUD, 2007, p.169)

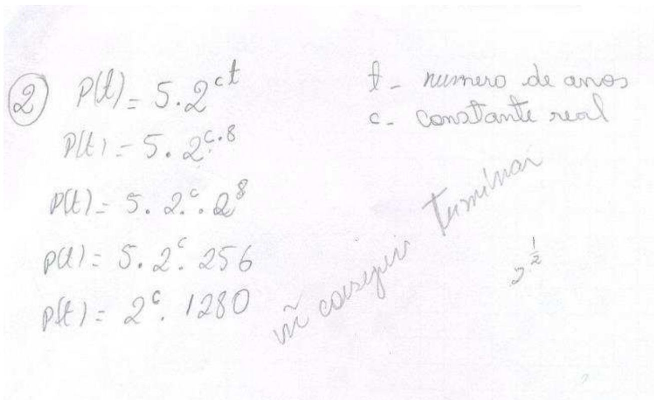
A Engenharia Didática se caracteriza por um esquema experimental, que, além das realizações em sala de aula, perpassa a "construção, realização e análise de sessões de ensino" (ALMOULOUD, 2007, p.171). Além disso, a comparação entre a análise *a priori* e análise *a posteriori* permite o processo de validação, sem necessariamente ter de se aplicar algum tipo de pré-teste, pois a validação é interna.

Apesar disso, antes de escolhermos a metodologia, optamos por aplicar um teste diagnóstico com os sujeitos, a fim de identificar qual o nível provável de conhecimentos sobre função exponencial. Essa experiência, já descrita no trabalho de Freitas e Almouloud (2013), permitiu-nos traçar um caminho a ser percorrido na pesquisa, tendo como apoio os pressupostos da Engenharia Didática, visto que os resultados apontados pelos autores indicam as dificuldades enfrentadas pelos estudantes frente aos saberes que envolvem a função exponencial. Por exemplo, na atividade:

> A população P(t), de uma metrópole, em milhões e habitantes, é dada por P(t) = 5. $2^{ct,}$ com t sendo o número de anos, contados a partir de 2000 e c um constante real. Se a população da metrópole em 2008 é de 10 milhões de habitantes, qual o valor de c? (SOUZA, 2010, p.168 *apud* FREITAS, ALMOULOUD, 2013, p.7)

A partir da conduta observável do Estudante A na resolução empreendida, conforme figura 7, notamos que o mesmo consegue identificar a constante e a variável, e aplicar propriedades de potência. O objetivo aparente era montar uma equação, no entanto, o estudante não consegue e tem consciência de tal fato. O objetivo inicial seria, a partir da substituição de valores, a resolução de uma “equação” pelo estudante, o que, nesse caso, não acontece, pois o mesmo não efetuou a substituição de $f\ (t)$, o que inviabilizou achar o valor de *c*.

Figura 6– Resposta do estudante A



Fonte: FREITAS; ALMOULOUD, 2013, p. 15.

Podemos, ainda, comparar este resultado com a proposta de resolução indicada no livro didático: “$p(8) = 10 \Rightarrow 5.2^{8c} = 2 \Rightarrow 2^{8c} = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{8}$” (SOUZA, 2010, p.150).

Comparando a conduta de resolução do estudante e a proposta do autor, percebe-se que os conceitos relativos à função e à propriedade relativa à função exponencial (se $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ então f(x) = g(x) foram cruciais no desenvolvimento da atividade: a substituição de t por 8 (i) e a equiparação (sentido de igualdade) da função f(t) a 10 (ii). O conceito mobilizado foi da propriedade que auxilia a resolução de equação (iii) exponencial, intimamente ligada ao seu conceito mais geral.

Outras resoluções das atividades propostas por Freitas e Almouloud (2012) apontam para uma fragilidade na formação desses estudantes, no que se refere à função exponencial.

A partir dos resultados já apontados sobre a fragilidade da formação inicial de professores, inclusive sobre a função exponencial, organizamos a Engenharia conforme os pressupostos de Artigue (1988): "análises prévias, construção das situações e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação". Realizamos, na etapa das análises prévias, um levantamento histórico-epistemológico do objeto matemático função exponencial. Nesta etapa, buscamos apoio nas pesquisas já realizadas sobre função e função exponencial.

Ainda na etapa de análises prévias, realizamos um levantamento das pesquisas recentes acerca do tema função exponencial, dando um enfoque maior àquelas voltadas à formação de professores de Matemática. O objetivo foi identificar elementos de apoio à nossa pesquisa e lacunas que possam ser superadas com o nosso estudo, além de sugestões que possam ser incorporadas a esta pesquisa. Nesta etapa, também definimos nossa questão de pesquisa, a problemática e as hipóteses de trabalho. Entendemos que a etapa de análises prévias não se encerra até o fim da pesquisa, pois novas contribuições podem surgir no decorrer do percurso.

Realizamos uma análise das organizações matemáticas e didáticas sobre a função exponencial propostas por autores de livros didáticos do Ensino Médio, apoiados na TAD, confrontando esses resultados com as propostas dos documentos oficiais brasileiros que norteiam o trabalho do professor e a seleção de livros didáticos para o Ensino Médio.

A partir das reflexões levantadas nas análises prévias e de livros didáticos, construímos as situações de experimentação apoiadas em algumas atividades propostas nas pesquisas consultadas, além disso, adaptamos algumas situações-problema que identificamos não serem tão constantes nos livros didáticos. Elaboramos também novas situações-problema a partir das dificuldades dos estudantes de licenciatura, identificadas nas análises prévias e na atividade diagnóstica.

Na construção das situações de experimentação, construímos uma sequência didática composta por situações-problema, nas quais identificamos os objetivos, as variáveis (macro e micro) didáticas.

Após a construção das situações de experimentação, procedemos à uma "análise *a priori*" da sequência didática. Nesta etapa, o nosso principal objetivo foi tentar prever as condutas dos sujeitos, os estagiários da licenciatura, frente à proposta das atividades.

Depois da "análise *a priori*", iniciamos a experimentação. Nesta etapa, organizamos um curso de formação para os estagiários ao final do componente curricular Estágio IV. O curso foi organizado em seis encontros, divididos em sessões de ensino. A proposta consistiu em que, nesses encontros, os estagiários pudessem desenvolver, em duplas, atividades com situações-problema, dentro da perspectiva da Teoria das Situações Didáticas.

Descreveremos algumas etapas da Engenharia mais detalhadamente, no capítulo 4, com a descrição das situações, as análises *a priori* e *a posteriori* da sequência didática.

3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Nosso objetivo é analisar as organizações matemáticas e didáticas propostas pelos autores dos livros didáticos escolhidos. Mais especificamente, nosso propósito é identificar e analisar os tipos de tarefa (e tarefas relacionadas com esses tipos de tarefas), no intuito de fazer inferências sobre o provável conhecimento/saber que seria aprendido pelo aluno sujeitado à prática docente apoiada nesses livros. Os resultados dessa análise servirão de alavanca na construção e na análise das situações que propomos na formação de nossos sujeitos de pesquisa.

Diferentemente do que propõem os documentos oficiais, os livros didáticos trazem uma orientação sobre os conteúdos matemáticos de forma específica e detalhada. Entendemos que o livro didático é um instrumento de uso do professor no planejamento de suas aulas e do aluno na realização das atividades que podem vir a suprir as lacunas sobre o conteúdo matemático. Em alguns casos, o livro didático é o único material disponível para organização da prática do professor. Esse fato é também sinalizado no trabalho de Rossini (2006), apoiada nos Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental. De acordo com Lajolo (1996, p.4),

> O livro didático é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares. (LAJOLO, 1996, p.4)

Partimos, então, do pressuposto de que o livro didático tem relevante importância na prática do professor. Por essa razão, propomos uma análise das praxeologias dos livros didáticos fundamentada na Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Yves Chevallard (1999). Os aspectos desta teoria, nos quais definimos critérios para nossas análises, baseiam-se nos conceitos de tarefa, técnica, teoria e tecnologia.

Apoiados nos estudos preliminares realizados nesta pesquisa, sobre função exponencial, percebemos o tipo de abordagem desejável para o tratamento didático da função exponencial. Nesse sentido, descrevemos os tipos de tarefas e técnicas que julgamos adequadas e coerentes para o estudo da função exponencial em nossa pesquisa. Além disso, apoiamo-nos nos critérios de seleção de livros didáticos, propostos pelo Ministério da Educação (MEC).

A partir da identificação de quais tarefas são priorizadas nos livros, definimos um bloco prático técnico (T/τ) que consiste nas tarefas relacionadas às técnicas e um bloco tecnológico teórico (θ, ϕ) utilizado pelos livros.

3.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Acreditamos que a TAD possibilita uma análise de práticas docentes, inserindo a Didática no campo da Antropologia, focalizando o estudo das organizações praxeológica pensadas para o ensino de organizações matemáticas. Tais considerações se apoiam no artigo do Chevallard, intitulado *A análise de práticas de ensino e ensino da matemática: abordagem antropológica*.

Para Chevallard (1999), a atividade matemática se caracteriza como atividade humana e também atividade das instituições sociais. Um bom exemplo é a atividade proposta pelos livros didáticos, enquanto organização praxeológica.

Almouloud (2007, p.111) sinaliza que a TAD se configura como uma evolução do conceito de transposição didática, além disso, estuda "as condições de possibilidades do funcionamento dos sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber", ou seja, aluno-professor-saber.

Quando se fala em atividade humana, a ideia que nos remete é a de atividades simples do cotidiano do indivíduo, tais como tomar banho, comer etc. Para Chevallard (1999), o conceito de tarefa vai além de um verbo.

Almouloud (2007) destaca a noção de tipo de tarefa e de tipo de técnica, tecnologia e teoria, sendo a técnica o como fazer uma determinada tarefa, que necessariamente não precisa ser um procedimento algorítmico. Para cada tarefa, existe uma determinada técnica ou um conjunto de técnicas, institucionalmente reconhecidas.

> Embora os *algoritmos* sejam um tipo muito particular de *técnica*, é importante não confundir ambas as noções. Somente em ocasiões excepcionais, uma técnica matemática pode chegar a ser sistematizada a tal ponto que sua aplicação esteja totalmente determinada e possa, portanto, ser considerada como um algoritmo. (CHEVALLARD *et al.*, 2001, p.124)

De acordo com Bosch e Chevallard (1999), o discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas é chamado de tecnologia da técnica, esta última precisa de uma justificação, que chamaram de "teoria da técnica". Desta forma, destacamos dois blocos:

um de tarefa/técnica, relacionado ao saber–fazer; e o outro tecnológico/teórico, que justifica ou modifica o primeiro, relacionado ao saber.

> Para que uma técnica possa ser utilizada de maneira normatizada, deve aparecer como algo ao mesmo tempo correto, compreensível e justificado. A existência de uma técnica supõe também a existência subjacente de um discurso *interpretativo e justificativo da técnica e de seu âmbito de aplicabilidade e validade.* (CHEVALLARD *et al*., 2001, p.125, grifos dos autores)

Para Almouloud (2007, p.117), a praxeologia associada a um saber é a junção desses dois blocos, ou seja, “um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa que forma uma organização praxeológica”.

Na organização praxeológica de uma instituição, a exemplo do livro didático, identificam-se vários objetos matemáticos, por meio dos quais, esses autores discutem a natureza e o funcionamento na atividade matemática: objetos ostensivos e não ostensivos. Almouloud (2007) explica que objetos ostensivos são todos aqueles que podem ser manipulados na realização de uma determinada atividade matemática, em contrapartida, os objetos não ostensivos se caracterizam como as ideias, os conceitos, os quais não podem ser vistos nem manipulados concretamente.

Bosch e Chevallard (1999) destacam ainda a noção de registro ostensivo, ou seja, do valor semiótico de um objeto ostensivo, que está estreitamente relacionado ao seu valor instrumental e à importância de uma articulação dos registros mobilizados no desenvolvimento de uma praxeologia matemática, relacionando esta noção àquela dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. De acordo com Chevallard (1992):

> Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente para I) se existir um objeto, que denotarei por R(X, O) respectivamente R_I (O), a que chamarei de relação pessoal de X com O (respectivamente relação institucional de I com O). (CHEVALLARD, 1992, p.127 *apud* ALMOULOUD, 2007, p.115)

Como afirmamos anteriormente em nosso trabalho, o livro didático é considerado uma instituição, no sentido que Chevallard (2007) coloca. Além disso, o objeto matemático função exponencial guarda uma relação pessoal com esta instituição (I= livro didático). Yamauti (2013, p.41) corrobora com esse sentido que damos à instituição, sob o ponto de vista da TAD, quando afirma que “Na perspectiva da TAD, são exemplos de instituições: uma escola, uma classe, um curso, os programas de ensino etc. Em nosso trabalho, consideramos o livro-texto como uma instituição". Nessa perspectiva, organizamos as análises dos livros em três categorias sob o ponto de vista da TAD: 1) Bloco prático técnico ($T/\ \tau$) que corresponde aos tipos tarefas (T_i) e às técnicas a elas associadas, no sentido de saber fazer; 2) Bloco tecnológico teórico (θ, ϕ) que remete ao significado do saber; 3) Objetos ostensivos e não ostensivos: descrição do tratamento matemático do ponto de vista didático dos objetos a ensinar.

As análises dos livros didáticos nortearão as organizações matemáticas e didáticas propostas em uma sequência didática de ensino. Nossa sequência didática está organizada em atividades/tarefas que cumpram os requisitos pensados enquanto tarefas coerentes para estudo da função exponencial.

3.2 SELEÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS A SER ANALISADOS

Antes de apresentarmos as análises dos livros, definimos os critérios de seleção e selecionamos aqueles que estão de acordo com tais critérios. Estruturamos o processo de seleção com base nas proposições do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

É possível perceber que a qualidade dos livros didáticos utilizados na rede pública e particular das escolas brasileiras vem melhorando significativamente a cada ano. No entanto, existe ainda a dificuldade de agregar um material que seja capaz de abordar todos os conteúdos de forma adequada, na qual o professor, ao utilizar o livro, tenha essa ferramenta como facilitadora do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Com efeito, em muitos livros, ainda perduram uma proposta de ensino, focada em modelos, algoritmos e roteiros, mas também se encontram atividades focadas na resolução de situações problemas ou, pelo menos, é o que parece ser a intenção dos autores, quando trazem situações contextualizadas.

Para escolha do livro didático, o professor tem por base o *Guia de livros didáticos para o Ensino Médio*, documento elaborado pelos consultores do MEC, cujo objetivo é auxiliar o professor na escolha do livro a ser adotado pela escola. O guia apresenta um panorama geral de cada obra, baseado nas resenhas, no quadro ilustrativo de como estão organizados os conteúdos em cada um dos livros, indicando o número de páginas e de cada unidade temática. Segundo este documento, o sumário ajuda o professor a verificar se a obra é adequada ou não ao projeto pedagógico da escola (BRASIL, 2011).

Para escolha dos livros a ser analisados, realizamos um levantamento no *Guia de livros didáticos PNLD 2012*, por conta de ser o mais recente publicado na época da realização da pesquisa.

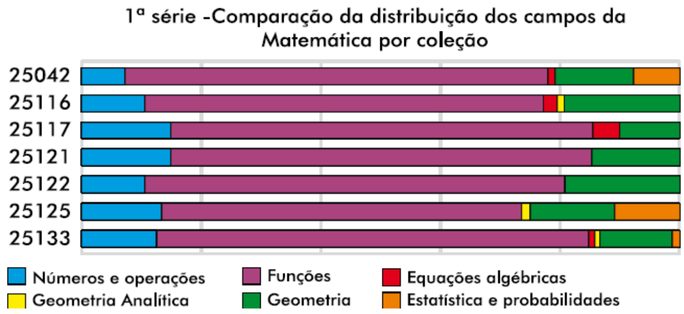
O documento apresenta os critérios para a avaliação das obras, ressaltando a importância do livro didático para contribuir com a formação do indivíduo na etapa do Ensino Médio, situando esses princípios na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN).

É ainda informado que os títulos que não se enquadraram nesses princípios gerais foram rejeitados no processo de seleção. Além dos critérios de escolha, o texto do guia traz uma discussão sobre o ensino da Matemática, ressaltando as capacidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes nesta disciplina, para esta etapa de ensino. Esses princípios foram traduzidos em termos de requisitos gerais para seleção dos títulos:

> 1. Incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números e operações, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidades. 2. Privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas.
> 3. Apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros. 4. Propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização. (BRASIL, 2011, p. 17)

Além desses requisitos, ainda são apresentados outros nove para o *Manual do professor*. Das coleções inscritas, sete foram aprovadas para o PNLD 2012. Como nosso objetivo é avaliar como o objeto função exponencial aparece nos livros didáticos, conteúdo normalmente abordado no primeiro ano do Ensino Médio, julgamos importante visualizar o gráfico que mostra a distribuição dos conteúdos nesta etapa. Observamos, na figura 06, o gráfico de distribuição dos conteúdos na 1º série para detectar o quanto aparece o objeto função como um todo em cada coleção.

Figura 7 – Comparação da distribuição dos campos da matemática por coleção



Fonte: (BRASIL, 2011, p.20)

Em todas as coleções inscritas no PNLD 2012, observamos que o objeto função tem maior predominância, ou seja, aparece como maioria dos temas abordados, no entanto, não é possível identificar somente pelo gráfico o quanto está distribuído para cada tipo de função, fazendo-se necessário olhar diretamente nos títulos. Analisamos os critérios definidos pelo Guia e selecionamos alguns, tomando como base a categoria metodologia de ensino e aprendizagem, para seleção de três títulos. No item estratégia, indicamos o seguinte critério:

> O livro inicia pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos (BRASIL, 2011, p. 39)

Apresentamos, a seguir, no quadro 2, a lista dos livros didáticos, dentre os quais, escolhemos três para a nossa análise.

Quadro 2 – Lista dos Livros Didáticos PNLD 2012

LIVRO	AUTOR	TÍTULO	ANO
A	JULIANE MATSUBARA BARROSO	*CONEXÕES COM A MATEMÁTICA*	2010
B	LUIZ ROBERTO DANTE	*MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES*	2010
C	MANOEL PAIVA	*MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES*	2009
D	GELSON IEZZI OSVALDO DOLCE ROBERTO PÉRIGO DAVID DEGENSZAJN NILZE DE ALMEIDA	*MATEMÁTICA, CIÊNCIA E APLICAÇÕES*	2010
E	KÁTIA STOCCO SMOLE MARIA IGNEZ DINIZ	*MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO*	2012
F	JACKSON RIBEIRO	*MATEMÁTICA, CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA*	2010
G	JOAMIR SOUZA	*NOVO OLHAR: MATEMÁTICA*	2010

Fonte: Autora deste trabalho (2015).

Vale salientar que a análise dos livros compreende o capítulo referente à função exponencial, para verificação dos critérios de escolha. O segundo critério de seleção refere-se à caracterização dos exercícios sobre função exponencial propostos nas obras aprovadas e organizados no Quadro 3. Neste tópico, sintetizamos os doze critérios do MEC em sete critérios gerais, a saber:

Quadro 3 – Critérios para seleção dos livros

CRITÉRIOS/TÍTULOS	A	B	C	D	E	F	G
O livro inicia pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos.					X	X	X
Exercícios envolvendo questões da sociedade moderna, bem contextualizados e desafiadores.			X		X	X	X
Exercícios entremeados aos tópicos que subdividem a apresentação dos conteúdos.	X	X	X	X	X	X	X
Atividades que estimulam a interação dos alunos e o trabalho em grupo.					X	X	
Exercícios inovadores e desafiadores.						X	
Exercícios que incentivam o usam diferentes estratégias de resolução.						X	
Exercícios que valorizam a verificação de processos e validação de respostas						X	

Fonte: Adaptada de Brasil (2011, p. 41).

Salientamos um ponto que julgamos importante refletir, dentre os critérios utilizados pelo MEC na seleção dos livros, no tópico caracterização dos exercícios, quanto ao uso de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de vestibulares e concursos. Em nossas análises, detectamos que 85% dos títulos selecionados atendem a esse critério em excesso de exercícios ou sempre utilizando apenas um autor (que pouco trabalhou esse tipo de atividade), no entanto este título (Livro F) atendeu a todos os critérios propostos em nossa pesquisa, adaptados dos critérios do MEC.

No Quadro 2, apresentamos a organização dos itens que cada título contempla, a partir da nossa proposta de seleção baseada na síntese dos critérios gerais selecionados no guia do PNLD. De acordo com o quadro, os três livros E, F e G foram identificados como aqueles que mais se enquadram nesses critérios de seleção, os quais identificamos como livro A, B e C e Autor A, B e C respectivamente.

Após selecionarmos esses três títulos, verificamos se, de fato, os itens da seleção foram válidos, ou seja, se os livros atendem mesmo ao que está colocado no guia como critério, na abordagem geral do conteúdo e nas atividades propostas sobre função exponencial. Em seguida, levantamos a quantidade de atividades, exercícios ou problemas de aplicação, os quais foram organizados por categorias de tarefas. Na sequência, definimos quais tipos de tarefas são importantes para o estudo da função exponencial. A partir de então, passamos à análise dos livros.

3.3 ANÁLISE DOS LIVROS SELECIONADOS

Organizamos as análises por categorias definidas a partir do estudo da TAD. Em cada categoria, realizamos uma síntese do que foi identificado em cada título.

3.3.1 Bloco prático técnico (T/ τ)

De acordo com Chevallard (1999), uma praxeologia relativa a um conjunto de tarefas T precisa, em princípio, de uma maneira de realizar, para executar as tarefas $\tau \in T$: como uma maneira de saber fazer (τ), do grego *tekhnê*, saber fazer. Uma praxeologia sobre o tipo de tarefas T contém, em princípio, uma técnica τ relativa a uma tarefa *T*.

De acordo com as atividades e exercícios propostos pelos autores sobre a função exponencial, identificamos tais atividades como tipos *tarefa*, ou seja, o que está sendo solicitado, requerido, perguntado ao aluno.

O livro A apresenta um total de 115 atividades que chamamos de tarefas. Destacamos que os exercícios resolvidos (tarefas resolvidas) não foram incluídos nesta classificação.No nosso objetivo foi visualizar que tipos de tarefas que mais aparecem ou são priorizadas pelo autor, sobre a função exponencial.

Segundo os critérios de seleção dos livros, o Livro B atendeu a maior quantidade de itens. A seguir (no quadro 3), vejamos a distribuição de tarefas propostas neste título, em forma de exercícios propostos. Da mesma forma que o organizamos, no quadro do livro A, os exercícios ou problemas resolvidos foram colocados na categoria de exemplo e não aparecem no quadro 3.

O quadro 3 mostra que o livro B possui uma maior quantidade de tarefas que livro A, a exemplo das tarefas que se caracterizam como situações-problema, envolvendo equações e inequações exponenciais. O autor do livro B apresenta também tarefas de interpretação gráfica, a partir de manipulação de variáveis, que também não aparecem no livro A.

A quantidade de tarefas do tipo “resolver equações exponenciais e cálculo de potências” também é maior neste livro B, o que, a *priori*, não quer dizer que a proposta de tarefas seja melhor ou pior, pois estas deveriam se apoiar em objetivos de ensino no nível geral de abordagem e no nível local de resolução de tarefas.

Sobre as tarefas encontradas nesses três livros, percebe-se uma diferença no que diz respeito à variedade de tarefas encontradas em cada título e uma priorização por certo tipo de tarefas, em detrimento de outras. Os livros A e C apresentam praticamente a mesma quantidade de tarefas. O livro C apresenta melhor distribuição das tarefas e outros tipos não apresentados no Livro A. Essas escolhas realizadas pelos autores podem indicar a concepção de ensino e aprendizagem subjacente à proposta didática do autor do livro, pelo menos no que diz respeito à função exponencial.

O Livro C também apresenta uma maior quantidade de tarefas em relação ao livro A e B, com o caráter de situações-problema, além de relacionar diferentes contextos matemáticos, como cálculo de área de figuras planas, determinação da função composta e enfoque na interpretação gráfica.

Para fins de nossas análises, propomos um quadro de classificação dos tipos de tarefas (quadro 03), usando a noção de Organização Praxeológica Matemática – OPM. As tarefas foram agrupadas em categorias construídas com base no estudo do objeto matemático Função Exponencial, apoiado nas OCEM (Brasil, 2006) e no *Guia do livro didático* (BRASIL, 2011).

Sobre os tipos de tarefas que aparecem nos livros A, B e C, de uma forma geral, percebemos que: em relação à quantidade de tarefas, os títulos A e C se equiparam, mas o livro B apresenta uma variedade maior de tipos de tarefas, sobretudo, aquelas que se caracterizam com situações-problema.

Quadro 3 – Descrição das tarefas sobre função exponencial

T (TAREFA)	DESCRIÇÃO DO TIPO DE TAREFAS	LIVRO A	LIVRO B	LIVRO C
T_1	Representar algebricamente uma função exponencial (Lei de formação), a partir de um contexto de situação problema da realidade.	2	3	7
T_2	Construir o gráfico de uma função exponencial partir de sua representação algébrica.	5	3	4
T_3	Determinar a lei de associação de uma função exponencial, a partir de sua representação gráfica.	0	0	1
T_3	Resolver situações problema, a partir do modelo da função exponencial envolvendo a manipulação das variáveis x e y	2	12	22
T_4	Interpretar graficamente o crescimento ou decrescimento da função exponencial.	1	4	0
T_5	Resolver situações problemas de aplicação da função exponencial, que apareça a função inversa.	0	0	0
T_6	Representar a função exponencial a partir de uma progressão geométrica.	4	0	1
T_7	Expressar algebricamente a função exponencial a partir do modelo de juros compostos.	1	1	0

Fonte: Autora deste trabalho (2015).

O livro A apresenta claramente uma priorização de modelos algorítmicos de memorização e repetição em forma de exercícios, em detrimento de modelos de resolução de problemas, apesar de também apresentá-los. Os livros B e C apresentam maior quantidade de situações- problema envolvendo o modelo de função exponencial.

Um ponto importante – não priorizado pelos livros A e C – foi a interpretação gráfica do crescimento ou decrescimento da função (houve apenas uma tarefa no livro A). No livro B, aparecem 4 tarefas de interpretação gráfica, com manipulação de variáveis algébricas. Isto denota pouca importância dada ao registro gráfico e à compreensão do conceito de função exponencial a partir deste sistema semiótico de representação. Com efeito, não aparecem tarefas que possibilitem a articulação e a mudança entre sistemas de registros de representação.

Concluímos que, apesar de os três livros contemplarem algumas tarefas importantes, ainda há uma fragmentação no tratamento dos conceitos relativos à função exponencial sob o ponto de vista daquelas tarefas propostas no quadro 03 como fundamental para o desenvolvimento do conceito de função exponencial.

Quadro 4 – Descrição das técnicas

(τ)	Descrição dos tipos de Técnicas
(τ_1)	Ler e interpretar uma situação-problema, descrita em linguagem natural, modelando matematicamente uma função e equação de natureza exponencial;
(τ_2)	Atribuir valores adequados para a variável x, substituir na lei da função, resolvendo uma equação exponencial, a partir daí, definir pares ordenados, a ser marcados (pode-se fazer uso de uma tabela) como pontos no plano cartesiano. A última etapa é ligar os pontos, encontrando a curva exponencial;
(τ_3)	Identificar, no gráfico, os valores de x e y, de acordo com a curva, substituir esses valores em uma lei geral, genérica de função exponencial: $f(x) = a^x$, encontrando, a partir da resolução de uma equação, a lei geral da função representada pelo gráfico;
(τ_4)	Identificar os valores para as variáveis x e y, a partir do contexto de uma situação-problema e da lei geral da função dada, substituir, na lei da função, os valores de x ou de y e resolver a equação exponencial ou exp ressão numérica com cálculo de potência.
(τ_5)	Interpretar o crescimento ou decrescimento da função a partir do gráfico, avaliando o comportamento dos valores de y à medida que se aumentam os valores de x e, assim, verificar como y se comporta, se cresce ou decresce, identificar os pares ordenados (x, y);
(τ_6)	Resolver uma equação inversa da equação exponencial, ou seja, uma equação logarítmica;
(τ_7)	A partir de lei geral de uma progressão geométrica, identificar cada elemento como os elementos de uma função exponencial, resolvendo a equação quando necessário;
(τ_8)	Ler e interpretar situações problema do campo financeiro, fazendo a correlação com valores do montante (M) dos juros (j) e do período (n), como elementos de uma equação exponencial.

Fonte: Autora deste trabalho (2015).

Essas técnicas estão desenhadas em um formato genérico (quadro 4) para qualquer tipo de tarefa que exija tais técnicas. Estas foram pensadas em termos do que chamamos de organizadores prévios do conteúdo função exponencial, ou seja, aquelas técnicas necessárias ao desenvolvimento do conceito de função, além de estratégias de resolução.

É possível fazer uma associação de tarefas e técnicas para o tratamento da função exponencial, salientando que uma mesma tarefa pode ter técnicas diferentes a ela associadas, por outro lado, uma atividade matemática pode requerer várias tarefas.

Na organização do quadro de tarefas, em nosso trabalho, identificamos – para cada atividade ou exercício proposto pelos autores – uma tarefa (para efeito da contagem) com descrição específica. Definimos, também, um bloco tecnológico teórico que justifica a técnica a elas associada.

3.3.2 Bloco tecnológico teórico $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$

Para Chevallard (1999), uma tecnologia é um discurso racional que tem como primeira função justificar a técnica, de modo que ela permita executar as tarefas do tipo T. Qualquer bloco tarefa/técnica é sempre acompanhado de, no mínimo, um vestígio de tecnologia. De acordo com Almouloud (2007), a tecnologia pode também modificar a técnica, ampliando-a, tornando-a mais abrangente. Por outro lado, "toda tecnologia precisa de uma justificação, a que chamam teoria da técnica" (ALMOULOUD, 2007, p.116), ou seja, uma teoria que fundamenta a tecnologia.

Segundo Chevallard (1999), toda obra matemática é constituída como resposta a um tipo de tarefa problemática, assim, entendemos que uma organização matemática se forma a partir de quatro elementos:

> i)os tipos de problemas, que surgem das questões;
> ii) as técnicas, que permitem resolver esses problemas;
> iii) as tecnologias, que justificam e tornam compreensíveis as técnicas;
> iv) as teorias que servem de fundamentos para as tecnologias.
> Esses são os componentes principais de toda obra matemática. (CHEVALLARD *et al*., 2001, p. 125)

Como, por exemplo, achar um determinado resultado solicitado na tarefa, função da técnica, justificar se o resultado solicitado está correto (função da tecnologia). Assim definimos bloco tecnológico teórico (θ, ϕ), como sendo aquele que justifica a técnica utilizada em uma tarefa. Nas tarefas propostas para função exponencial, nos três livros didáticos, identificamos os seguintes blocos:

$(\boldsymbol{\theta_1}\boldsymbol{\phi_1})$: Para as tarefas $T_{1,}\ T_7\ \ e\ T_8$, o bloco tecnológico teórico que justifica a técnica é composto por habilidade de leitura e interpretação e associação do modelo exponencial, por meio da definição e de sua lei de associação, com os modelos de progressão geométrica e juros compostos.

$(\boldsymbol{\theta_2}, \boldsymbol{\phi_2})$: Este bloco tecnológico teórico justifica a técnica utilizada nas tarefas $T_4\ e\ T_6$ de resolução de equação, por meio da propriedade geral de função exponencial: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, com $a \neq 1$ e $a > 0$, quando manipulamos y, e de cálculo de potência e uso de suas propriedades quando manipulamos x.

($\boldsymbol{\theta_3\phi_3}$): As tarefas T_2, T_3 e T_5 estão relacionadas às habilidades de manipulação de registros gráficos, ao uso das variáveis x, y enquanto par ordenado (x,y), sendo justificadas pela identificação de função crescente e decrescente, ou seja: se $a > 1$, a função é crescente, $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ e se $0 < a < 1$, a função é decrescente: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$. Há necessidade de mudança do registro algébrico para o registro gráfico em termos da lei geral de associação da função exponencial. Vejamos exemplos de tarefas /técnicas extraídas desses livros, *exemplo 01*:

> Um estudo realizado por um restaurante mostrou que o número de refeições servidas por mês, em certo ano, pode ser descrito, aproximadamente, pela função definida por $f(x) = 4.000.(1{,}1)^{x-1}$, em que x representa o mês do ano (para janeiro, por exemplo, $x = 1$). (a) Quantas refeições, aproximadamente, foram servidas por esse restaurante em março? E em julho? (SOUZA, 2010, p.165)

Esta situação-problema é do tipo de tarefa **T_3**: resolver situações-problema, a partir do modelo da função exponencial, envolvendo a manipulação das variáveis x e y. Como técnicas para resolução da tarefa, reconhecemos $\boldsymbol{\tau_4}$: identificar os valores para as variáveis x e y, a partir do contexto de uma situação-problema e da lei geral da função dada, substituir, na lei da função, os valores de x ou de y e resolver a equação exponencial. Evidentemente, a substituição da variável x, na lei geral da função, recai em uma expressão numérica que envolve cálculo de potência, $f(3) = 4.000.(1{,}1)^{3-1} \Rightarrow f(3) = 4.840 \Rightarrow 4.840$ refeições.

Outra técnica que pode ser usada parcialmente é $\boldsymbol{\tau_1}$: ler e interpretar uma situação-problema, descrita em linguagem natural, mas, nesse caso, não solicita o processo de modelagem da lei da função exponencial. Neste exemplo de tarefa, o bloco tecnológico teórico que justifica a técnica é (θ_2, ϕ_2), resolução de equação por meio de cálculo de potência e uso de suas propriedades na manipulação da variável x (substituição). *Exemplo 2*:

> A população de uma colônia de bactérias *Ecoli* dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de $4{,}096.\ 10^6$ bactérias por mililitro. Assim, o tempo de experimento foi: (RIBEIRO, 2010, p.203)

Esta situação-problema é do tipo de tarefa **T_1**: representar algebricamente uma função exponencial (Lei de formação), a partir de um contexto de produção de bactérias.

Em relação às técnicas adequadas para solucionar a tarefa, destacamos $\boldsymbol{\tau_1}$: ler e interpretar uma situação-problema, descrita em linguagem natural, devendo a situação ser modelada por uma lei de formação de uma equação exponencial e $\boldsymbol{\tau_4}$: identificar os valores para as variáveis x e y, a partir do contexto de uma situação-problema e da lei geral da função dada, substituir, na lei da função, os valores de x ou de y e resolver a equação exponencial ou expressão numérica com cálculo de potência.

O bloco teórico tecnológico associado às técnicas desta tarefa é o bloco $(\boldsymbol{\theta_1 \phi_1})$, composto por: habilidade de leitura e interpretação e associação do modelo exponencial por meio da definição e o bloco $(\boldsymbol{\theta_2, \phi_2})$, conforme descrito anteriormente.

Concluímos, portanto, que, apesar de os três livros analisados contemplarem algumas tarefas importantes, ainda há uma fragmentação no tratamento dos conceitos relativos à função exponencial, sob o ponto de vista daquelas tarefas propostas como fundamentais para o desenvolvimento do conceito desta função exponencial.

Podemos destacar, nessas observações, que existem claramente dois tipos de técnicas relacionadas às tarefas encontradas: 1) Um modelo de tarefa/técnica baseado em memorização e algoritmização muito utilizado pelo livro A; 2) Um modelo tarefa/técnica que prioriza uma elaboração mais interpretativa e o raciocínio crítico, esse é mais adotado pelos livros B e C.

3.3.3 Objetos ostensivos e não ostensivos

Neste tópico, discutiremos a abordagem didática dada ao conteúdo matemático função exponencial por cada livro, buscando evidenciar o tratamento dado aos objetos ostensivos e não ostensivos, identificados em cada abordagem.

De acordo com Almouloud (2007, p.121), na análise de uma atividade matemática, "a dialética ostensivo/não ostensivo é geralmente concebida em termos de signos e de significação: os objetos ostensivos são signos de objetos não ostensivos que constituem o sentido ou significação".

Em síntese, apoiamo-nos em Bosch e Chevallard (1999) para definir os objetos ostensivos na atividade matemática, como sendo aqueles que guardam certa materialidade, ou seja, podem ser manipulados pelo sujeito. Os objetos não ostensivos são aqueles que não podem ser manipulados, como as ideias ou conceitos. Eles existem, mas só podem ser evocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos.

No texto, destacamos, em itálico, os ostensivos que aparecem nos livros didáticos analisados.

3.3.3.1 No livro A

O livro A apresenta o conteúdo função exponencial, que está disposto na unidade sete do livro, a partir de uma situação-problema do contexto da Biologia. Como resolução, propõe a construção de uma *tabela* para representar a relação de crescimento entre as grandezas envolvidas. Em seguida, constrói o *gráfico* a partir dos dados da tabela. E, assim, apresenta a lei da função exponencial como se, automaticamente, fosse possível ao aluno visualizar o gráfico. Na sequência, o autor retoma a tabela para introduzir o conceito formal de *função exponencial* e apresenta a forma algébrica da lei que corresponde à função do problema a seguir: “A função *f*, de ℝ emℝ, que a cada número x associa o número a^x, com $a > o\ e\ a\ \neq 1$, é denominada função exponencial de base a ou seja: f: ℝ → ℝ.$x \longmapsto y$, com $a > o\ e\ a\ \neq 1$”. (DINIZ; SMOLE, 2012, p.173).

Em seguida, o autor apresenta vários exemplos de função exponencial com diferentes valores para a. Introduz uma atividade de cálculo de diferentes potências, de expoente racional. Na sequência, vai apresentar as propriedades de potência de números reais, que chama de propriedades da *função exponencial:*

> *i)* $a^m . a^n = a^{m+n}\ , a \neq 0$
> *ii)*$a^m : a^n = a^{m-n}\ , a \neq 0$
> *iii)*$(a)^n) = \ a^{\,m.n}$
> *iv)* $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\ ,n\ \in \mathbb{N}\ /\ n > 1$
> *v)*$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,$ além das propriedades vale lembrar: $a^0 = 1;$ se $a > o\ e\ a\ \neq 1,$ temos $a^m = \ a^n apenas\ se\ m = n.$ (DINIZ; SMOLE, 2012, p.175)

A abordagem das propriedades, realizada pelo Autor A, está fortemente ligada a um estudo por memorização, não há estratégia que envolve o aluno no processo de construção das propriedades que fundamentam o tratamento algébrico com as funções exponenciais. Esse trabalho poderia ter sido feito a partir de construções numéricas até chegar a uma generalização algébrica. O estudo das operações de potência, *a priori*, desenvolvido no Ensino Fundamental, é uma oportunidade de romper com a memorização de conceitos.

Na sequência do livro, o autor trabalha com atividades referentes à aplicação das propriedades e apresenta mais uma seção que ele chama de *para saber mais*, neste caso, duas tarefas que analisaremos mais adiante.

O próximo tópico é sobre o *gráfico cartesiano da função exponencial,* depois, exercícios e problemas. O tópico seguinte é *equação exponencial.* O autor parte de exemplos e, novamente, mais exercícios, por fim, as inequações seguem o mesmo roteiro do tratamento das equações. Chamaremos esta forma de abordagem de modelo *conteúdo-tarefa*.

3.3.3.2 No livro B

Este livro aborda o tema função exponencial em um único capítulo (sexto). O autor inicia a seção falando da importância do tema para outras áreas do conhecimento e apresenta uma aplicação da função exponencial em uma situação envolvendo juros compostos:

> Uma pessoa toma emprestado R$1.000,00 para pagar depois de 3 meses, à taxa de juros de 4% ao mês, no regime de juro composto. Veja o cálculo do montante ao final de cada mês. E qual seria o montante ao final de 10 meses? E em 1 ano e 3 meses? E n meses? (RIBEIRO, 2010, p.186)

O autor do livro resolve a situação e relaciona esta resolução com a equação de montante $M = C\,.\,(1 + i)^n$, determinando M em função de n, sendo do tipo exponencial. Na sequência, o autor apresenta um gráfico para representar a situação e um questionário sobre a opinião do aluno acerca de outras situações que podem ser representadas pela função exponencial, além de perguntar o que caracteriza esta função.

Na sequência, o autor aborda o conceito de potência, com números naturais, traz exemplos. Da mesma forma, apresenta potência de números inteiros, as propriedades de potência e, na sequência, exercícios. Observamos que, na abordagem das propriedades, diferentemente dos demais livros, o autor desenvolve, a partir da definição de potência, uma construção matemática, que demonstra, por casos particulares, o funcionamento das propriedades, a exemplo: $a^3\,.\,a^4 = a.a.a.a.a.a.a = a^7$, (explicita número de fatores que aparece), 3 fatores + 4 fatores = 7 fatores, portanto, expoente 7. Esse modelo é utilizado em exemplos de cada uma das propriedades e, por fim, o autor as elenca da mesma forma que os livros A e C. Na sequência, propõe mais exercícios.

A propriedade de potência com expoente racional e com expoente real é apresentada por meio de exemplos. Em seguida, o livro traz a representação de potência, enquanto *notação científica*, por meio de exemplos que utilizam números muito grandes ou muito pequenos (ano-luz, tempo de extinção dos dinossauros, tamanho de uma bactéria, entre outros). Mais exercícios são propostos e, em seguida, o autor apresenta um infográfico, que representa o processo de reprodução do ser humano, a partir da multiplicação das células. Baseando-se nesse contexto, o autor apresenta uma sequência de potências de base 2 e enuncia o modelo da função exponencial: "Chamamos função exponencial toda função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x \, ou \, y = a^x$, com $a > 0 \; e \; a \neq 1$" (RIBEIRO, 2010, p. 195). O autor discute os possíveis valores para a, e a repercussão sobre a lei da função exponencial. Em seguida, apresenta dois problemas resolvidos que envolvem o modelo da exponencial, depois, propõe novos exercícios e problemas.

O autor do livro apresenta o *gráfico da função exponencial*, a partir de dois exemplos, quando a função é crescente e decrescente. No final do capítulo, o autor apresenta situações nas quais é possível perceber o modelo de crescimento exponencial (decaimento radioativo, situação de epidemia).

3.3.3.3 No livro C

Nessa obra, o autor faz a abordagem sobre função exponencial no capítulo 5. Inicia a seção de forma semelhante a do Livro A, com uma situação do campo da Biologia, e explica o contexto com um modelo de crescimento exponencial. Imediatamente após, apresenta uma *lei algébrica* como modelo matemático, mas que o autor chama de "fórmula" e, em seguida, já mostra o gráfico, ao contrário do autor do Livro A, que não apresenta tabela.

Na abordagem que segue, o autor retoma o conceito de potenciação e, a partir de exemplos, vai demonstrando o funcionamento das propriedades de potência no corpo dos números inteiros, e define as propriedades em linguagem simbólica formal e em língua natural.

O autor propõe uma nota explicativa para interpretação gráfica:

> Uma função exponencial é crescente de se $a > 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y aumentam, isto é, $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$. Uma função exponencial é decrescente se $0 < a < 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, isto é: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$. O gráfico de uma função exponencial é denominado *curva exponencial*, cruza o eixo y no ponto de coordenadas (0,1) e não cruza o eixo x, sendo definido acima desse eixo. (RIBEIRO, 2010, p.164)

Sobre a interpretação gráfica da função exponencial, é possível notar que o Livro C avança na abordagem em relação ao Livro A, inclusive na proposição de tarefas específicas de interpretação gráfica, após abordá-la de forma geral. No entanto, o modelo tabela-gráfico é a estratégia didática usada para introduzir o gráfico da função exponencial.

A noção de *equação exponencial* é discutida a partir de exemplos, mas, sem a resolução. Depois, propõe-se o modelo de resolução a partir da seguinte propriedade: "$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, com $a \neq 1$ e $a > 0$" (SOUZA, 2011, p.167), baseado em três atividades resolvidas. A seguir, o autor propõe atividades, mais um modelo de resolução de equação e novas atividades relacionadas a esse modelo. O tratamento da *inequação exponencial* é análogo ao da equação, sendo que a propriedade é apresentada como modelo:

> Para resolver uma inequação exponencial, reduzimos os dois membros a potências de mesma base. Depois, sabendo que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos a seguinte propriedade: se $a > 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$; $0 < a < 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$. (SOUZA, 2011, p.170)

O autor finaliza o capítulo com um texto sobre idade dos fósseis, como situação contextualizada para o estudo de função exponencial.

Destacamos uma clara intenção do autor em trabalhar a interpretação textual e relacionar o conceito matemático com contextos de certa realidade em linguagem natural.

Praticamente todos os objetos ostensivos descritos aparecem nos três livros, com exceção daquele que se relaciona com a composição de funções exponenciais e também com a relação entre função exponencial e a progressão geométrica.

Percebemos também que foi dada pouca importância ao registro de tabela nos três títulos analisados. A seguir, selecionamos os objetos ostensivos, relacionados à função exponencial em um quadro (quadro 5), no qual explicitamos quais desses objetos são encontrados nos livros analisados.

A partir da análise do quadro 5, percebemos que o livro C aborda todos os objetos ostensivos selecionados. Os livros A e B não abordaram apenas os objetos relacionados ao conceito de progressão geométrica e à expressão de montante.

Quadro 2 – Objetos ostensivos encontrados nos livros

OBJETOS OSTENSIVOS	**LIVRO A**	**LIVRO B**	**LIVRO C**
f (x) e y	X	X	X
a^n	X	X	X
Gráfico da função exponencial	X	X	X
Equação exponencial	X	X	X
Objeto inequação exponencial	X	X	X
Lei algébrica $f(x) = a^x \; ou \; y = a^x$	X	X	X
$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$	X	X	X
f o g	não	não	X
Registro detabela	X	X	X
M= C (1 + i) ^{n}	X	X	X
$a_n = a_1 . q^{n-1}$	não	não	X

Fonte: Autora deste trabalho (2015).

Na análise dos livros, foi possível perceber que aqueles critérios usados pelo MEC, para escolha dos livros didáticos, não podem ser garantidos em todos os capítulos dos livros. Esta conclusão parte da constatação de que, no capítulo referente à função exponencial, apresentado pelos livros, tais critérios não se aplicam em sua totalidade.

Deter-se em analisar os livros didáticos também, como já destacamos na introdução deste capítulo, vem a contribuir com a construção de nossa sequência didática, na qual utilizamos algumas tarefas consideradas significativas na construção do conceito de função exponencial.

4 CONSTRUÇÃO, ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DE SITUAÇÕES DE EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos as situações de experimentação que foram desenvolvidas com os estudantes de Estágio Supervisionado, em um curso de Licenciatura em Matemática e as escolhas didáticas realizadas na elaboração da sequência didática. Optamos pela aplicação de uma sequência de ensino, mas, antes da experimentação da mesma, apresentamos, a seguir, uma descrição das situações e a análise *a priori* das mesmas.

As situações de experimentação partem do objetivo de possibilitar aos sujeitos transitar no campo conceitual da função exponencial, enquanto saber científico, proporcionando a percepção de todo o processo de consolidação desses saberes e as elaborações dos sujeitos. Nessa perspectiva, iniciamos a descrição do experimento, situando o contexto da pesquisa desenvolvida no curso de Licenciatura em Matemática, levantando uma discussão sobre a importância do Estágio Supervisionado na formação do futuro professor.

4.1 A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA E A IMPORTÂNCIA DO ESTÁGIO SUPERVISIONADO NA FORMAÇÃO DOCENTE

A licenciatura em Matemática, para a maioria dos acadêmicos, é o primeiro momento de formação acadêmica e profissional, que definimos como formação inicial do professor de Matemática. A formação continuada será caracterizada como aquela que ocorre após a formação inicial e no processo de atuação profissional do professor.

Por outro lado, muitos desses sujeitos estudantes de licenciatura trazem consigo saberes anteriores à universidade, que são adquiridos e produzidos durante esse processo de formação inicial. Nesse sentido, concordamos com Linares (1999, p.73 *apud* BRITO e ALVES, 2006, p.28) quando afirma que "o estudante constrói seu novo conhecimento tendo como referência seu conhecimento anterior".

De acordo com Brito e Alves (2006), os professores (atuantes e futuros) produzem e adquirem seus saberes em sua formação anterior e durante a formação universitária, além disso, em sua prática docente. Segundo as autoras, esses fatores devem ser levados em consideração nas atividades de formação inicial ou continuada.

Poderíamos levantar diferentes aspectos da licenciatura em Matemática e realizar uma análise do processo de formação desses futuros professores, sob diversos enfoques, no entanto, delimitamos a discussão em duas categorias que julgamos fundamentais na formação do futuro professor.

A primeira é o aspecto curricular da formação. Neste caso, focamos a abordagem no âmbito do Estágio Supervisionado, também chamado, em alguns cursos de licenciatura, de Prática de Ensino. A outra é do ponto de vista dos saberes docentes necessários à prática do professor. Entendemos que essas duas categorias se entrelaçam no processo de formação, sobretudo, no desenvolvimento do estágio curricular.

Apesar de termos definido o estágio no âmbito curricular, quanto à categoria de discussão em nosso trabalho, importa-nos situá-lo em uma posição que vai muito além de ser mais um componente do currículo da licenciatura. Apoiamo-nos em Pimenta (2004), para refletir que o estágio ocupa uma posição de destaque no currículo e, consequentemente, na construção da identidade profissional dos acadêmicos.

Embora não conheçamos todas as propostas de trabalho com Estágio Supervisionado nas Instituições de Ensino Superior (IES) da Bahia, nos cursos de Licenciatura em Matemática, ao visitar o trabalho de Pires (2012), foi possível visualizar um panorama de como ocorre os estágios nas IES baianas, nessa perspectiva, identificamos, na pesquisa de Pires (2012), aspectos relevantes que apoiam a nossa proposta de intervenção no estágio.

A autora levanta dois questionamentos que julgamos relevantes para nossa pesquisa quanto à contribuição do estágio na licenciatura e na formação do futuro professor: "As Licenciaturas em Matemática continuam a repetir velhas práticas ou apresentam alguma (re) inovação na formação inicial do professor de Matemática?" (PIRES, 2012, p.97). Além disso, outro questionamento é levantado pela autora, quanto às mudanças ocorridas na formação dos professores e incorporadas pelo estágio curricular supervisionado.

De acordo com Pires (2012), houve poucos avanços nos cursos de Licenciatura em Matemática com vistas à melhoria da qualidade e da aprendizagem de Matemática nas escolas pesquisadas. As mudanças identificadas pela pesquisa, nas práticas dos professores regentes e nos trabalhos desenvolvidos pelos estagiários, pouco avançaram, deixando lacunas e não provocando mudanças no ritmo da escola. Segundo Pires (2012), o Estágio Supervisionado, atualmente, explicita a fragmentação do curso de licenciatura, ou seja, revela uma etapa de formação inicial desvinculada das demais etapas do curso.

Ressaltamos um aspecto, também sinalizado pela autora, que precisa ser repensado: a competência básica do professor e as mudanças pedagógicas produzidas em sala de aula devem perpassar o domínio do conteúdo específico de Matemática. Somente a partir dele, será possível construir e produzir ações educativas competentes.

A partir dos dados da pesquisa de Pires (2012), acreditamos que as propostas de estágio, atualmente desenvolvidas na Bahia, não têm proporcionado uma verdadeira articulação entre o saber matemático e o saber pedagógico.

Esta articulação seria uma proposta de estágio que privilegiasse a discussão do conteúdo matemático com o orientador de estágio, que faz uma articulação com a didática da Matemática, algo que possa privilegiar a reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem, nos quais estão inseridos os estagiários, ora intervindo como professores, ora como estudantes. Além disso, as reflexões sobre a prática de sala de aula na prática do estágio são fundamentais na construção da identidade do futuro docente, evidentemente, envolvendo os professores das escolas com os projetos de estágio.

Nesse processo, o ganho de aprendizagem para os acadêmicos ocorreria em duas vertentes: uma de ressignificação dos conceitos matemáticos; e outra de melhor compreensão dos processos didáticos e pedagógicos que envolvem o estágio e o funcionamento da escola como um todo. Refletimos sobre esse pensamento durante a trajetória de nossa pesquisa, além do que o contexto do Estágio Supervisionado nas licenciaturas da Bahia influenciou nas nossas escolhas e pesquisa.

4.1.1 Os sujeitos da pesquisa

A coleta de dados foi realizada em uma universidade estadual na Bahia, na qual funciona um curso de Licenciatura em Matemática, durante as aulas de Estágio Supervisionado IV. Neste componente, a docente foi a própria pesquisadora.

Os sujeitos da pesquisa foram oito estudantes que, com livre vontade e consentimento, aceitaram o desenvolvimento da pesquisa durante as aulas do componente curricular Estágio IV, como uma proposta de curso de formação, no âmbito de um projeto de pesquisa.

Além dos estudantes e da professora da disciplina, a previsão é que participassem também do experimento um voluntário observador, egresso do curso de licenciatura, cuja tarefa seria a de observar e registrar as atividades de cada dupla.

4.2 ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DAS SITUAÇÕES DE EXPERIMENTAÇÃO

Para as situações de experimentação, organizamos uma sequência didática em sessões de ensino, desenvolvidas em duas etapas: na primeira etapa, os estudantes deveriam trabalhar com atividades que envolvessem a função exponencial no sentido de (re) construir saberes matemáticos referentes a este objeto; na segunda etapa, as situações propostas deveriam permitir ao estudante elaborar uma sequência de ensino que pudesse ser desenvolvida com uma turma de Ensino Médio.

Salientamos que, em princípio, não houve a pretensão de que o estudante reaplicasse essa atividade no período da pesquisa, por conta do tempo insuficiente. No entanto, simular essa possibilidade poderia nos trazer elementos de análise sobre os saberes desenvolvidos, e/ou explicitados pelos sujeitos, enquanto desenvolveríamos o trabalho didático com a função exponencial.

Nas atividades selecionadas, levamos em consideração as recomendações dos PCN e das propostas curriculares do Ensino Médio para desenvolver competências e habilidades de representação e comunicação, investigação, compreensão e contextualização sociocultural. Além disso, levamos em conta os tipos de tarefas indicadas como adequadas para o estudo da função exponencial, conforme o quadro 3, do capítulo 3, item 3.2 (análise dos livros didáticos).

Com relação aos conceitos matemáticos construídos pelos sujeitos, interessa-nos entender o trabalho cognitivo realizado por eles durante esse processo de aprendizagem, na elaboração de organizações matemáticas. Nesse sentido, a análise dos processos se apoia nas construções matemáticas evidenciadas nas atividades, por meio das técnicas utilizadas nas soluções das tarefas propostas.

Para analisar a construção dos conceitos por parte dos sujeitos, consideramos as condutas observadas, a partir dos registros escritos e das expressões orais.

Compreendendo que a TSD nos fornece um percurso que favorece o processo de aprendizagem, em nossas análises, o principal objetivo foi perceber se houve aprendizagem por parte do sujeito e quais elementos conceituais foram agregados à estrutura cognitiva, frente aos conceitos anteriormente construídos pelos sujeitos.

As dialéticas de formulação e validação, pela sua caracterização, são momentos em que os sujeitos podem evidenciar, por meio da resolução das atividades, modificações em sua forma de interagir com o saber em jogo. Nesse sentido, estas dialéticas funcionam como dispositivos que podem revelar os conhecimentos dos alunos e como eles se engajam na construção de novos conhecimentos/saberes em jogo nas situações enfrentadas.

Nada garante que o estudante, ao resolver uma tarefa, construiu de fato o conhecimento almejado. É certo que esquemas serão mobilizados para resolução de uma tarefa, mas estes nem sempre poderão estar de acordo com uma construção conceitual coerente. Nesse sentido, o ganho da análise é também perceber os equívocos conceituais que poderão ocorrer em função de conceitos mal construídos.

Em nossa pesquisa, a TSD norteia a construção, a análise e o processo de experimentação de situações que, *a priori*, conduzirão a um processo de modificações dos comportamentos dos estudantes, característico da aquisição de novos conhecimentos. Com base nesta teoria didática, faz-se necessário caracterizar o meio ou *milieu*, no sentido de Brousseau (2008).

Em síntese e de forma geral, o *milieu* é o meio que o sujeito dispõe para a construção do conhecimento em jogo. Nele, estão envolvidos todos os ingredientes que, juntos, colaborarão para o processo de aprendizagem. Esses ingredientes envolvem as intenções didáticas do professor, os tipos de tarefas propostos e as inter-relações estabelecidas entre alunos e os conhecimentos mobilizados na resolução de uma determinada tarefa.

Apoiados em Perrin-Glorian (1998 *apud* ALMOULOUD, 2007), caracterizamos três aspectos gerais do *milieu* efetivo – material, cognitivo e social – a saber: 1) **Materiais disponíveis no local**, à disposição para realização das atividades – sala de aula, quadro branco, *datashow*, folhas de papel milímetrado, lápis, borracha, papel sulfite (ofício), computadores (laboratório de informática), *software* Geogebra e Excel, gravadores de voz, folhas de *clip chat*, pilotos para quadro branco e piloto comum, ambiente virtual *Modle*; 2) **Saberes dos sujeitos** (os estudantes), necessários à resolução das atividades que serão propostas – o conceito de função, sua representação gráfica, a lei de formação de função, as noções de variáveis dependentes e independentes (à medida que avançarmos nas atividades, outros saberes serão requeridos dos estudantes, tais como a capacidade de generalização, abstração, visualização, manipulação de variáveis, interpretação de texto em língua natural, interpretação gráfica e, para cada bloco de atividades, explicitaremos seus objetivos e aquilo que está em jogo, o campo conceitual da função exponencial); 3) **Participantes dos processos**, os quais são importantes nas atividades e em sua interação com o professor durante a realização das mesmas.

Para cada sessão de atividades, definimos as variáveis macro e microdidáticas respectivamente, as quais acreditamos ser coerentes com o nosso estudo. Nesse sentido, descrevemos e analisamos os possíveis comportamentos dos sujeitos frente às situações propostas, tentando identificar os possíveis elementos do trabalho cognitivo realizado por eles em cada etapa das tarefas, por meio da interação com o *milieu.*

As variáveis macro são as escolhas didáticas a nível global, ou seja, equivalentes a um objetivo geral da atividade, ao passo que as varáveis microdidáticas são as escolhas específicas para cada situação-problema.

De acordo com Almouloud (2007, p.32), o objeto de estudo da TSD "não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber". Nesse sentido, o olhar sobre os sujeitos, a respeito do seu trabalho cognitivo, durante o desenvolvimento das situações de experimentação, passa pela análise da situação didática.

Brousseau caracteriza situações didáticas como o conjunto das relações estabelecidas (implícitas ou explícitas) entre os estudantes ou um grupo de estudantes, um determinado "*milieu*" e um sistema educativo, representado pelo professor, para que os estudantes adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU,1978 *apud* ALMOULOUD, 2007).

Na sequência de ensino, buscamos criar um ambiente favorável à aprendizagem, no qual os sujeitos possam, gradativamente, evoluir na construção do conhecimento em jogo.

Essas etapas se caracterizam como dialéticas, no sentido apontado por Brousseau:

> Cada situação pode fazer com que o sujeito progrida, e por isso também pode progredir, de tal modo que a gênese do conhecimento pode ser fruto de uma sucessão (espontânea ou não) de novas perguntas e respostas, em um processo que chamarei de dialética". (BROUSSEAU,2008, p.32)

De acordo com Brousseau (2008), as sucessivas situações, que ele chama de dialéticas, situações de ação, formulação, validação e institucionalização, juntas, conjugam-se no sentido de favorecer as aprendizagens. Apoiados nas ideias do autor e a partir das considerações de Almouloud (2007), caracterizamos as dialéticas previstas em nosso trabalho:

Dialética de ação. O sujeito age sobre a situação-problema no sentido de buscar uma solução, ocorre constante retomada das informações fornecidas na situação, e o sujeito tende a julgar o resultado de sua ação. Há, nesta etapa, uma interação com o *milieu*, é parte integrante desse *milieu* o conjunto das informações contidas na situação em si, dos conhecimentos dos participantes. Tal interação pode conduzir os sujeitos à antecipação de respostas. Exemplos de ações interativas com o *milieu* são o processo de leitura e interpretação das situações propostas e o levantamento das possibilidades de solução. Há também a troca de informação entre os pares envolvidos no trabalho de investigação.

Dialética de formulação. Esta etapa se caracteriza pelo momento em que os sujeitos, a partir do diálogo e da troca de informações uns com os outros, conseguem estabelecer um modelo de resolução matemático explícito, escrito ou oral, além de identificar as ferramentas, os símbolos, as regras, as definições e/ou as propriedades utilizadas na solução encontrada. Basicamente, é nesta etapa que ocorrem as formulações de respostas e soluções, bem como a estruturação da solução do problema proposto.

Em síntese, o conjunto de decisões tomadas será norteado pelo que Almouloud (2007) chama de "retroação ao *milieu"*, ou seja, diálogo constante e retroativo entre os sujeitos, os conhecimentos dos sujeitos, as informações e os elementos fornecidos na situação, sem auxílio do professor.

Dialética de validação. Nesta etapa, os sujeitos deverão explicitar os modelos de resolução da tarefa por eles elaborados, submetendo-os à avaliação de cada interlocutor, ou seja, de cada grupo de trabalho. Caberá a cada grupo validar ou não as propostas, pedindo, inclusive, mais explicações se assim achar necessário. Cada solução apresentada necessita de uma justificação que precisa ter uma pertinência matemática. Salientamos que a validação é realizada entre os sujeitos, mas com a vigilância epistemológica do professor.

Outras elaborações poderão ocorrer nas etapas de formulação e validação. Nesse caso, nossa análise tem por objetivo explicitar a natureza de tais elaborações evidenciadas pelos sujeitos nas soluções apresentadas para cada atividade. Recorremos, para essa análise, à noção de tarefa/ técnica e teoria/tecnologia discutidas no capítulo 1. As situações didáticas serão um motor propulsor para o desenvolvimento de aprendizagem de conceitos pelo aluno.

Na etapa de validação, é possível perceber, por meio das justificativas dos sujeitos quanto ao modelo de solução proposto, quais técnicas foram mobilizadas e utilizadas para o cumprimento das tarefas propostas. É possível que, nesta fase, por meio de justificativas apresentadas, seja possível verificar se, de fato, as técnicas identificadas na etapa anterior são validadas e se são percebidas pelos estudantes como tal. Esse processo de validação é, também, realizado por meio de pequenas provas e demonstrações matemáticas.

O trabalho matemático realizado pelo aluno na resolução das tarefas, nessa fase, pode ser caracterizado como uma atividade de investigação ou de prova. De acordo com Brousseau (1996), os saberes e os conhecimentos atualizam-se numa atividade de investigação ou de prova. Este autor afirma, ainda, que as provas e validações explícitas devem apoiar-se uma nas outras, até chegar a uma evidência.

Dialética de institucionalização. Na institucionalização, o professor evidencia e socializa o saber novo e aceito como conhecimento formal. É nesse momento que cabe ao professor também valorizar as construções dos estudantes e justificar a recusa de algumas propostas, de tal forma que os sujeitos incorporem os conhecimentos/saberes novos em sua estrutura cognitiva, em seus esquemas mentais e os utilizem posteriormente, na resolução de novas tarefas.

Em nossa pesquisa, consideramos importante perceber, durante o processo de construção do conhecimento dos sujeitos, o que foi aprendido pelos sujeitos, quais conceitos foram mobilizados na resolução das diferentes tarefas enfrentadas, podendo, assim, cobrir tanto os aspectos didáticos dos processos de ensino e de aprendizagem, como os aspectos cognitivos, essenciais para consolidação de saberes matemáticos.

4.2.1 As variáveis macrodidáticas

No estudo do objeto matemático (função exponencial), identificamos que os autores de livros didáticos trabalham com um único modelo algébrico para função exponencial, sem, no entanto, explicitar a origem e a evolução desse conceito. Eles se apoiam em apenas um modelo de função exponencial definida por $f(x) = a^x$. Propomos, no experimento, uma abordagem com diferentes modelos algébricos para representação da função exponencial.

Sobre as variáveis macrodidáticas, propomos, em nosso trabalho, estudar com os estudantes a função exponencial, a partir do conceito de função exponencial natural, discutido no capítulo 1. Nesta perspectiva, escolhemos trabalhar com a função exponencial definida pela lei de formação do tipo: $f(x) = a.b^{kx}$.

Desejamos que, em nosso estudo, os estudantes possam adquirir o conceito de função exponencial, que, neste caso, vai além do que se propõe nos livros didáticos do Ensino Médio, embora tenhamos nos apoiado em algumas atividades desses materiais.

4.3 DESCRIÇÕES DAS SESSÕES DE EXPERIMENTAÇÃO / ANÁLISES *A PRIORI* e *A POSTERIORI*

A experimentação das atividades ocorreu em quatro sessões, divididas em duas etapas: na primeira etapa, trabalhamos com três sessões de ensino, com um tempo de três horas/aula para cada sessão (cada aula, 50 minutos). Nessa etapa, focamos o estudo do conceito de função exponencial. Na segunda etapa, utilizamos uma sessão de ensino com o mesmo tempo de três horas/aula. Essa etapa foi dedicada à atividade de construção de saberes docentes relacionados ao conceito de função exponencial. Salientamos que dispomos de um tempo um pouco maior do que acreditamos que será possível, no sentido de poder fazer algumas adaptações para quaisquer imprevistos que ocorram. Nesta seção, apresentamos as atividades propostas e as variáveis microdidáticas escolhidas, bem como a justificativa dessas escolhas e os objetivos de ensino. Para cada atividade, realizamos uma análise a *priori*. O objetivo desta análise é determinar como as escolhas efetuadas permitirão controlar os comportamentos dos estudantes e o sentido desses comportamentos. A análise *a priori* consiste em duas etapas: análise matemática e análise didática.

Na análise matemática, apresentamos as possibilidades de ação, organização e estruturação de uma organização matemática para solução do problema. Na análise didática, estudamos os possíveis comportamentos dos estudantes frente a cada atividade e suas escolhas em cada momento das dialéticas das situações didáticas: ação, formulação, validação e institucionalização, refletindo sobre o trabalho cognitivo (realizado pelos estudantes), por meio dos esquemas mentais, expressados nos invariantes operatórios percebidos.

A análise dos campos de comportamento possíveis dos sujeitos permite controlar seu sentido e assegurar que os comportamentos esperados resultem do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. Vale salientar que, na previsão desses campos de comportamento, evidenciamos as dificuldades dos estudantes em resolver cada atividade, os novos conhecimentos ou métodos de resolução que eles podem executar. É imprescindível prever quais conhecimentos, saberes e métodos de resolução de problemas poderão ser institucionalizados.

É necessário avaliar, após cada etapa de institucionalização e no avançar da sequência didática, se os estudantes estão evoluindo em suas concepções sobre o objeto de estudo. Isto será possível em uma análise após a aplicação da sequência didática.

Após a análise *a priori* de cada atividade, apresentamos a análise *a posteriori* dessas mesmas atividades. Esta análise se apoia na exploração do conjunto de dados coletados durante a realização da fase de experimentação. Evidentemente que a análise *a posteriori* é realizada à luz da análise *a priori*, dos nossos fundamentos teóricos e da problemática e hipóteses da pesquisa. De acordo com Almouloud (2007), nesta análise, devem ficar evidenciadas as interações realizadas pelos estudantes/situações, estudantes/estudantes e estudantes/professor com o meio adidático e didático.

4.3.1 **Primeira parte da sequência didática**

4.3.1.1 Primeira sessão

Para a aplicação da sequência didática, contamos com a participação de oito estudantes, divididos em quatro grupos de dois (duplas) e, além deles, tivemos um estudante egresso do curso de Matemática, que participou como observador, registrando o funcionamento das sessões de ensino. Durante o período de aplicação da sequência didática, não tivemos a presença de todos estudantes, sujeitos da pesquisa. Em alguns momentos, formaram-se grupos de três para que ninguém ficasse sozinho para a resolução das atividades. Em nossas análises, escolhemos nomes fictícios para cada dupla ou trio.

Para a realização da etapa de experimentação, contamos com o laboratório de informática e utilizamos o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) da UNEB, para postagem das atividades digitais. O local, onde as atividades foram alocadas no AVA, foi o *campus* virtual do componente Estágio IV.

Na primeira sessão, explicamos aos graduandos a dinâmica das atividades de pesquisa e que o principal objetivo da proposta seria contribuir com a formação profissional e acadêmica deles. Estabelecemos como o trabalho seria desenvolvido e qual a proposta de intervenção.

A partir das análises prévias, em especial do estudo do objeto matemático, foi possível perceber a necessidade de retomar alguns conceitos prévios para o estudo da função exponencial. Este fato motivou a escolha das atividades 01 e 02, nas quais trabalhamos inicialmente com alguns conceitos prévios, indispensáveis ao estudo do conceito de função exponencial. De forma geral, o conceito de função, de função linear e função afim podem auxiliar na manipulação e no tratamento de função exponencial.

Nas atividades propostas, diferentes estratégias de cálculo poderão ser mobilizadas, ativando os conceitos matemáticos auxiliares para o tratamento de funções e organizadores da estrutura matemática fundamental, do repertório cognitivo do estudante.

Um de nossos objetivos é que o estudante possa, ao final dessa sessão, perceber diferentes funções, relembrar conceitos, para, em um segundo momento, mobilizá-los em situações, envolvendo o conceito de função exponencial. Escolhemos as funções afim e linear no contexto das atividades 1 e 2.

No experimento prévio, detectamos que os estudantes confundem a função exponencial com a função linear, inclusive suas representações gráficas. Eles confundem a expressão $\boldsymbol{ax}$ com $\boldsymbol{a^x}$. Nesse sentido, explicitar a função linear, inclusive como caso particular da função afim, poderá, em segundo momento, permitir ao aluno comparar esses modelos e entender a diferença entre crescimento exponencial com crescimento linear. Por esta razão, incluímos, na sequência didática, as duas atividades sobre função afim e linear.

Escolhemos trabalhar com a lei de formação da função afim definida por $f(x) = ax + b,$ com a e b, número reais ($f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Quando b = 0, a função é chamada de função linear, e definida por: $f(x) = ax.$ É importante trabalhar com conceitos prévios no sentido de fornecer aos estudantes elementos que os auxiliem na construção do novo conhecimento. Nesse contexto, algumas competências relacionadas ao conceito de função, tais como construção e interpretação de gráficos, manipulação de variáveis dependentes, interpretação de texto em língua natural, são importantes.

A análise a *priori* realizada envolve uma análise matemática e uma análise didática. Na análise matemática, identificamos as metodologias, as estratégias matemáticas de resolução de cada situação-problema e evidenciamos os saberes matemáticos envolvidos.

Com relação à análise didática, apresentamos os possíveis comportamentos dos sujeitos, suas dificuldades e as variáveis de comando que são necessárias para o estudo, a partir da mobilização de conceitos envolvidos nas situações. Consideramos importante perceber como os sujeitos organizam o saber pela observação de suas representações e análise de seu discurso.

Estruturamos a análise didática a partir da discussão das diferentes dialéticas (ação, formulação, validação) e da posterior institucionalização.

Análise *a priori* da Atividade 1:

A atividade1, composta de três situações-problema, tem por objetivo estudar o conceito geral de função afim, definida por $f(x) = ax + b, com\ a, b \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$. Além disso, perceber que, se $b = 0$, a função será definida por $f(x) = ax$, uma função linear. A partir da representação gráfica da função afim e da função linear, o estudante deverá perceber diferenças no comportamento dessas funções e estabelecer relações entre a representação gráfica e algébrica, tendo como base os coeficientes reais a e b, associando-os ainda com os pontos de coordenadas (0, y) e (x, 0), intersecções dos gráficos com os eixos coordenados.

Atividade 1

Situação-problema 01 – Um dos insetos mais destrutivos é o gafanhoto-do-deserto. Esse inseto é capaz de comer cerca de 1,6 gramas de folhas por dia. Considerando que algumas nuvens de gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, a devastação pode alcançar grandes proporções. Quantas toneladas de folhas uma nuvem de gafanhotos pode comer em um único dia? (A) Podemos estabelecer um modelo matemático para essa situação-problema? Justifique. Qual? (B) O que podemos afirmar sobre esse modelo? É possível representá-lo graficamente? (SOUZA, 2010, p.84, *adaptação nossa*).

Situação-problema 02 – A receita mensal de vendas de uma empresa está relacionada com os gastos mensais com propaganda. Quando a empresa gasta R$10.000,00 por mês com propaganda, sua receita naquele mês é de R$ 80.000,00. Se o gasto mensal com propaganda for o dobro daquele, a receita mensal cresce 50% em relação àquela.
(A) Qual a receita mensal, se o gasto com propaganda for R$30.000,00? (B) Podemos estabelecer um modelo matemático para essa situação problema? Justifique. Qual? (C). O que podemos afirmar sobre esse modelo? É possível representá-lo graficamente?

Situação-problema 03 – Carlos trabalha como DJ e cobra uma taxa de R$100,00, mais R$ 20,00 por hora, para animar uma festa. Daniel, na mesma atividade, cobra uma taxa de R$55,00, mais R$ 35,00 por hora. (RIBEIRO, 2012, p.95, *adaptação nossa*).
(A) Qual o tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos? (B) Agora faça uma discussão com seu colega relacionando os pontos em comum das situações propostas, fazendo comparações, justificando suas conclusões na linguagem materna e matemática.

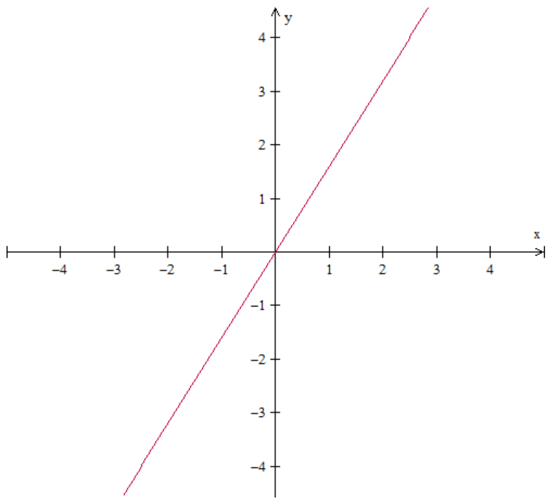
Situação-problema 1:

Letra (A): Para resolução das situações-problema, inicialmente, deve-se estabelecer a relação de dependência entre as grandezas: quantidade (massa) de folhas destruídas (m) pela quantidade de gafanhotos (q). Nesse caso, o modelo matemático é o da função linear definida por: m (q) = 1,6 q. Portanto uma nuvem de gafanhotos será: m (50.000.000) = 1,6 x 50.000.000 = 80.000.000 g.

Transformando para toneladas (t) 80.000.000 g= 80.000kg (quilogramas) = 80 t m (50.000.000) = 80t .Outra solução que os sujeitos podem dar para a letra (A) é efetuar a multiplicação direta 50.000.000 x 1,6 = 80.000.000g = 80.000kg = 80t, sem estabelecer uma escrita formal representativa de função. Pode-se afirmar que o modelo matemático é sempre de valores múltiplos de 1,6.

Letra (B): O modelo corresponde ao modelo de uma função linear f definida por$f(x) = a.x, com\ a \neq o$, nesse caso, $a = 1{,}6$. Podemos representar graficamente (figura 8) por uma reta que passa pela intersecção dos eixos coordenados.

Figura 8 – Gráfico da situação-problema 1 – letra B



Fonte: Autora deste trabalho (2015).

Situação-problema 2:

A estratégia inicial que pode ser utilizada no item A pelo estudante é estabelecer as relações entre as grandezas receita e custos com propaganda, a partir dos dados fornecidos pelo problema. Assim, temos:

R(10.000) = 80.000. Considerando R= receita e p= custo com propaganda

R(20.000) = 80.000 + 50%. 80.000 ⇒ R(20.000) = 80.000 + $\frac{1}{2}$ 80.000=120.000

Neste caso, pode-se estabelecer uma relação de dependência entre R e p, típica de uma função, além da existência de uma receita fixa e de outra variável. O estudante pode tentar generalizar o problema com a expressão da função afim, para, depois, encontrar a receita quando o gasto com propaganda for 30.000.

Tomando as relações de dependência entre os valores de R e p, a partir da lei de formação da função afim, definida como $R(p) = a.p + b,$ temos que: $R(p) = 10.000\,.\,a + b = 80.000$. Ou seja, quando o gasto (p) é 10.000, a receita (R) é igual a 80.000. Por outro lado, quando o gasto dobra, passa para 20.000, a receita aumenta em 50%, logo : $R(p) = 20.000\,.\,a + b = 120.000$. A partir dessas conclusões, pode-se montar um sistema e calcular os valores de a e b.

$\begin{cases} 10.000a + b = 80.000\ (I) \\ 20.000a + b = 120.000\ (II) \end{cases}$. Resolvendo o sistema pelo método da adição, temos:

(II)-(I) = $10.000a = 40.000 \Rightarrow a = \frac{40.000}{10.00} \therefore \boldsymbol{a = 4}$ **.**

Substituindo o valor de a na equação (I), temos: $10.000.4 + b = 80.000 \Rightarrow b = 80.000 - 40.000 \therefore \boldsymbol{b = 40.000}$. Logo, substituindo os valores de a e b na expressão da função definida por $R(p) = a.p + b,$ temos: $R(p) = 4x + 40.000,$ e, consequentemente, se $p = 30.000$, então $R(30.000) = 4.\,30.000 + 40.000 = 160.000$.

Outro método de resolução que pode ser realizado é utilizar as relações entre as grandezas e representá-las diretamente como pares ordenados. A partir da identificação da dependência das grandezas e associação de cada par de valores (x_1, y_1) e (x_2, y_2), obtem-se: (x_1,y_1) = (10.000;80.000) e (x_2, y_2) = (20.000; 120.000). Estabelecendo como lei de formação da relação existente entre as grandezas receita (R) e custo de propaganda (p), a função afim f, definida por $f(x) = ax + b$, monta-se um sistema de equações e, a partir de então, conforme a resolução anterior, procede-se o cálculo do valor de R(p) quando p é igual a 30.000.

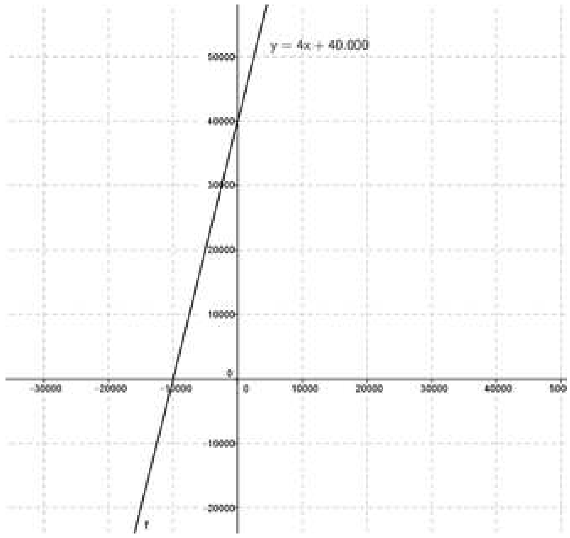
Letra (B e C): A resposta para a pergunta é sim, e o modelo é o de função afim, neste caso, definida por $R(p) = 4p + 40.000$, outras letras poderão ser utilizadas em substituição a R e p.

A representação gráfica pode sim ser feita no plano cartesiano de eixos coordenados x (custo de propaganda p) e y (receita mensal R). Para construção do gráfico, os estudantes poderão construir uma tabela de valores para x e y, ou apenas encontrar os pontos (x,0) e (0,y) e construir a reta que passa por esses dois pontos:

(-10.000,0) e (0,40.000).

Nota-se que a razão de proporção entre os valores de a e b é muito grande, necessitando fazer o gráfico em uma escala de 1/10.000, conforme a seguir.

Figura 9 – Gráfico da situação-problema 2 – letra C



Fonte: Autora deste trabalho (2015)

Situação-problema 03:

No item (A), para estabelecer uma comparação entre o trabalho de Daniel e o de Carlos, temos de definir as equações que representam as duas propostas. A partir da leitura, é possível escrever o modelo das equações referentes a Carlos e Daniel em função do tempo da festa, respectivamente: C(t) = 20t + 100 e D(t) =35t +55. A leitura permite concluir que o valor de t buscado é aquele que estabelece uma relação de ordem D(t) $\leq$ C(t) então: 35t +55$\leq$ 20t + 100. Resolvendo a inequação: 35t -20t $\leq$ 100 – 55 $\Rightarrow$15t $\leq$ 45 $\Rightarrow t \leq \frac{45}{15} \Rightarrow t \leq 3$.

O tempo máximo de duração da festa deve ser de 3 h, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos. Ou seja, a contratação de Daniel deve ser o mesmo valor ou menor que a de Carlos.

No item (B), uma possibilidade de discussão da tarefa é perceber que, quando a duração da festa for igual a 3 h (t =3),a contratação de Daniel terá o mesmo valor que a de Carlos. Isto é facilmente verificado pela substituição de t =3 nas duas funções:

C(3) = 20.3 + 100= 160 e D(3) =35.3 +55=160.

Na atividade 01, o conjunto das situações-problema proposto apresenta uma consistência para ressignificar o conceito de dependência de variável, central para o estudo de funções. A retomada da lei de associação da função afim evidencia a função linear como caso particular, além de possibilitar uma visualização de sua representação gráfica. O objetivo é justamente desfazer a confusão causada por estudantes com o modelo exponencial de crescimento.

Em **situação de ação**, os sujeitos deverão realizar a leitura das situações-problema em linguagem natural, buscando relacioná-las com a linguagem matemática, a partir da mobilização de esquemas cognitivos relacionados à leitura em linguagem natural. Nesse **percurso**, o aluno poderá identificar as grandezas envolvidas e suas relações: quantidade de folhas por quantidade de gafanhotos, receita por quantidade de propaganda e valor pago por horas de serviço. A forma como vão representar matematicamente as grandezas identificadas nas situações-problema pode variar.

Numa **situação de formulação**, os estudantes deverão utilizar a noção de dependências de grandezas, buscando identificar modelos matemáticos coerentes com a lei geral de formação de uma função linear e função afim definida por f(x) = ax + b. As estratégias de cálculo utilizadas podem ser caracterizadas pelas técnicas de substituição de variáveis, resolução de equação e inequação, resolução de sistema de equação, evidenciadas enquanto estrutura de resolução.

Os estudantes poderão ou não fazer uso da representação tabular para simular o comportamento dos fenômenos e representá-los graficamente no eixo cartesiano.

Essas condutas, necessariamente, não vão ocorrer nessa ordem, pois os estudantes podem trocar informações, completando o modelo um do outro, sugerindo mudanças até chegar a uma proposta que seja aceita por todos e que contemple o que foi exposto enquanto atividade cognitiva.

Na etapa de **validação**, cada grupo deve apresentar no quadro a solução das situações-problema, justificando a proposta de resolução. Neste momento, os demais grupos poderão aceitar ou refutar a proposta do grupo que apresenta e pedir explicações, com outras propostas de resolução. Espera-se que os estudantes cheguem a um modelo de resolução parecido, com variações de estratégias que não alterem a estrutura global da resolução, mas que possam complementar-se com diferentes apresentações para a mesma situação. Cada dupla, no entanto, pode validar a sua resolução por meio de processo de verificação em cada tarefa. Os estudantes validam as propostas a partir das comparações entre os modelos apresentados. Neste caso, as condutas de cada grupo poderão ser diferentes, o que será decisivo na escolha da solução do problema.

Os estudantes, por meio de uma proposta de verificação de sistemas de equações e de equações, podem validar seu modelo de resolução, substituindo os valores encontrados nas equações, e perceber a igualdade de valores.

A **dialética de institucionalização** poderá ser realizada em duas fases: na primeira, o professor (pesquisador) retoma as situações-problema, explicando, justificando e clarificando os possíveis equívocos na resolução, estabelecendo um parâmetro geral da resolução que contemple a todos, discutindo a estrutura matemática organizada por eles. Num segundo momento, o professor deverá apresentar, usando quadro branco ou *datashow*, as principais características da função afim, a função linear como caso particular da função afim, além da representação gráfica de cada uma e as relações entre os coeficientes e as variáveis x e y.

Variáveis didáticas da atividade 01

A **atividade 01** é composta por três situações-problema. Na primeira (situação-problema 01), escolhemos as seguintes variáveis didáticas:

01) O **contexto da situação-problema**: selecionamos uma situação do campo da Biologia que retrata o comportamento de insetos destrutivos (gafanhoto-do-deserto), optamos por priorizar um contexto da realidade em detrimento do contexto puramente matemático, por exemplo, de uma função definida por $f(x) = 4x$, por conta de que, na primeira opção, os sujeitos poderão desenvolver, além do conceito puramente matemático da função linear, outras habilidades e competências, tais como leitura e interpretação de uma situação-problema em língua materna, modelagem de um contexto da realidade para um contexto matemático, além do que discutir uma situação do contexto da realidade parece ser um aspecto motivador extrínseco para os sujeitos aprenderem Matemática;

02) **Os valores numéricos escolhidos**: no caso da situação-problema escolhida, os valores são definidos em função do tipo específico da população escolhida, os gafanhotos-do-deserto têm uma característica específica de comer folhas (1,6 gramas de folha por dia) e se agrupam em nuvens populacionais de uma

quantidade específica de indivíduos (cerca de 50 milhões).

03) **O objeto matemático estudado na situação**: o objeto de estudo da situação-problema é a função linear definida por $f(x) = a.x$.

04) **Questões da situação**: as questões do problema são fechadas. A escolha de questões fechadas no contexto da situação foi feita em função de mantermos um controle sobre o comportamento dos sujeitos frente às questões, possibilitando que a única resposta correta seja aquela que desejamos, a construção do conhecimento que se quer ensinar, esta perspectiva se apoia em Brousseau (2008).

Na situação-problema 02, escolhemos s seguintes variáveis didáticas:

01) O **contexto da situação-problema**: nesta situação-problema, escolhemos um contexto de vendas de uma empresa, ressaltando a noção de receita e custo mensal, para a aquisição de um serviço (propaganda). A escolha desse contexto se deu pelas mesmas razões da escolha do contexto da situação-problema 01. Ressaltamos que o objetivo com essa variável, nesta sessão, é que pudéssemos abordar diferentes contextos da realidade dos sujeitos em que se pode modelar a função afim.

02) **Os valores numéricos escolhidos**: nesta situação-problema, os valores numéricos são definidos em função daqueles que parecem estar mais próximos da realidade de algumas empresas.

03) **O objeto matemático estudado na situação**: o objeto de estudo da situação-problema é a função afim definida por $f(x) = a.x + b$.

04) **Questões do problema**: as questões do problema são fechadas, conforme justificamos anteriormente.

Na situação-problema 03, em que as variáveis didáticas são semelhantes às da situação 02, ressaltamos aspectos diferentes:

01) O **contexto da situação-problema**: o contexto dessa situação problema se refere a uma pesquisa de mercado para um determinado serviço (animação de DJ para uma festa), ou seja, comparação de custos de dois profissionais que oferecem o mesmo serviço.

02) **Os valores numéricos escolhidos**: os valores numéricos são escolhidos pela mesma razão da situação 02, esses valores se aproximam de uma situação real.

03) **O objeto matemático estudado na situação**: o objeto de estudo da situação-problema é a função afim, definida por $f(x) = a.x + b$.

04) **Questões do problema**: as questões do problema são parcialmente fechadas, ou seja, na letra A, a resposta é fechada, na letra B, a resposta é aberta, pois se deseja que os sujeitos reflitam sobre suas respostas, estabelecendo conclusões que se articulem com os saberes matemáticos envolvidos na situação.

Pressupomos que essas variáveis irão interferir no processo de resolução/aprendizagem do conceito de função afim e função linear, na perspectiva de que os estudantes mobilizem esquemas relacionados à estruturação de equação, inequação e sistema de equações de primeiro grau, traçando estratégias para resolvê-las. Espera-se que esses esquemas já estejam assentados na estrutura cognitiva dos sujeitos, visto que repousam em conceitos matemáticos prévios, básicos para estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática (equações, inequações, sistemas de equações, substituição de valores).

Análise *a posteriori* da Atividade 1

Para análises das atividades, destacamos as produções textuais dos estudantes em itálico e recuado dois centímetros da margem, quando maior que quatro linhas. A primeira sessão de ensino ocorreu no dia 11/11/2013, no laboratório de informática da universidade. Inicialmente, os estudantes foram orientados e informados pela docente (pesquisadora) como seria a dinâmica das atividades do projeto, leram e assinaram o termo de consentimento livre esclarecido para divulgação dos dados. Nesta perspectiva, ressaltamos que a nossa pesquisa está registrada no banco de dados da Plataforma Brasil e aprovada pelo conselho de ética da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

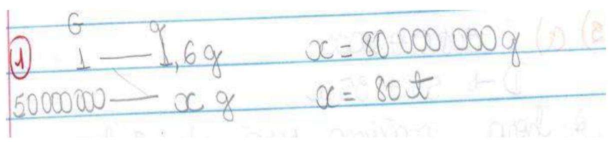
Para análise *a posteriori* das atividades, selecionamos os protocolos de duas duplas. Esta escolha se deu por conta de algumas razões: em primeiro lugar, porque apenas uma dupla participou integralmente de todas as atividades de experimentação. Em segundo lugar, porque os demais participantes, por não frequentar assiduamente as atividades da pesquisa, participavam de grupos diferentes em cada sessão. Optamos por descartar os protocolos de duas duplas que realizaram as atividades juntas, e estas não trouxeram diferenças significativas das demais.

Utilizamos, nas análises, nomes fictícios, a fim de preservar a identidade dos participantes. Na análise a *posteriori*, buscamos confrontar as produções dos sujeitos com as previsões realizadas na análise *a priori*, ressaltando os aspectos que diferem daquilo previsto.

Situação-problema 01: Nesta atividade, a dupla A (Paulo e Ana) apresentou dificuldade na interpretação do problema. Eles fizeram várias leituras para melhorar o entendimento. Os estudantes não utilizaram de forma direta a definição de função linear, mesmo assim, encontraram um resultado satisfatório. Eles utilizaram como estratégia a regra de três simples, algo que havíamos previsto.

Na justificativa sobre o modelo utilizado, a dupla respondeu como se esse modelo fosse pensado para trabalhar com seus alunos de estágio, do Ensino Médio: "*Para o aluno utilizar esse modelo matemático apresentado por nós, ele deve interpretar o enunciado da questão.* S*im, é possível representar graficamente, pois temos duas variáveis, uma independente e a outra dependente*". Apesar de responder que sim para construção do gráfico, a dupla A não o construiu, parece que entendeu não ser necessário tal construção. A dupla A apresentou sua solução conforme descrita na figura 9, na qual se percebe o uso da regra de três.

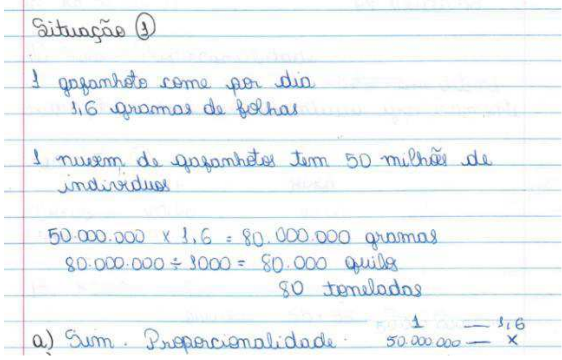
Figura 10– Situação-problema 1 – dupla A – letra A



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla B (Paula e Andreia) desenvolveu o mesmo procedimento que a dupla anterior, mas com diferença: eles montaram uma estrutura de equação, apresentaram como justificativa a proporcionalidade, usaram a mesma regra de três, como pode ser observado na figura 10.

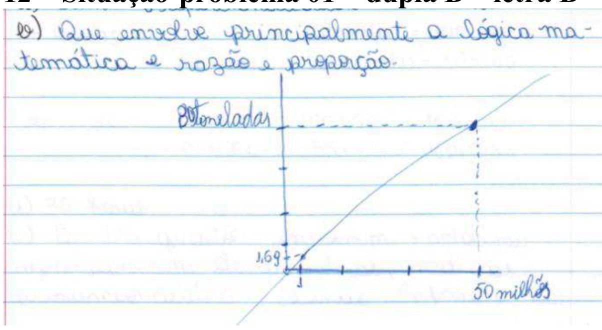
Figura 11 – Situação-problema 1 – dupla B – letra A



Fonte: Dados da pesquisa

Para a letra B, a dupla respondeu: "*que envolve principalmente a lógica matemática e razão e proporção*". A representação gráfica (figura 11) realizada pela dupla indica que estão considerando a relação de dependência entre as grandezas, embora não tenham evidenciado explicitamente a lei de formação da função linear: m (q) = 1,6 q, além disso, o gráfico está incoerente.

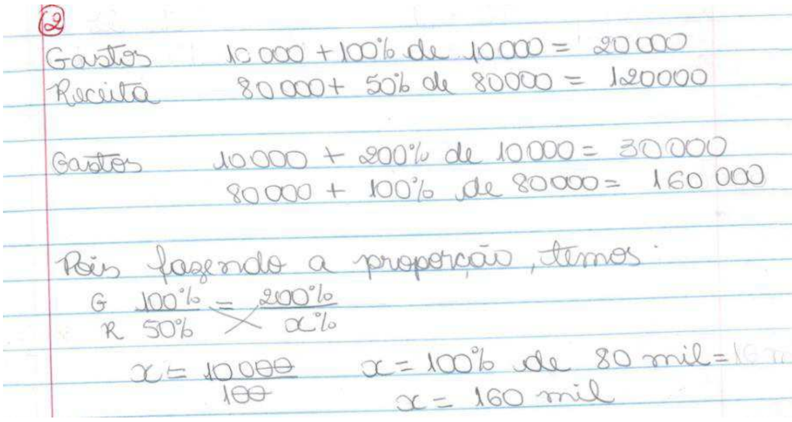
Figura 12 – Situação-problema 01 – dupla B – letra B



Fonte: Dados da pesquisa

Na **situação-problema 02**, a dupla A (Paulo e Ana*)* procedeu da mesma maneira da situação-problema 01. Essa dupla apresentou, como no caso da situação-problema 1, a mesma dificuldade relacionada à interpretação das informações contidas no enunciado e em relacionar o contexto da situação ao modelo de função afim. Discutiram muitos resultados pela suposta "*lógica*" e, depois de um tempo de reflexão, resolveram usar o modelo de proporção de grandezas, regra de três, montando uma estrutura de equação para os gastos e para a receita (figura 12). Para as letras B e C, responderam apenas que sim e que usaram proporção e porcentagem. Os estudantes, até então, em nenhum momento, explicitaram conscientemente os conceitos de função.

Figura 13 – Situação-problema 02 – dupla A



2
Gastos 10 000 + 100% de 10.000 = 20.000
Receita 80 000 + 50% de 80000 = 120000

Gastos 10000 + 200% de 10.000 = 30000
80 000 + 100% de 80000 = 160 000

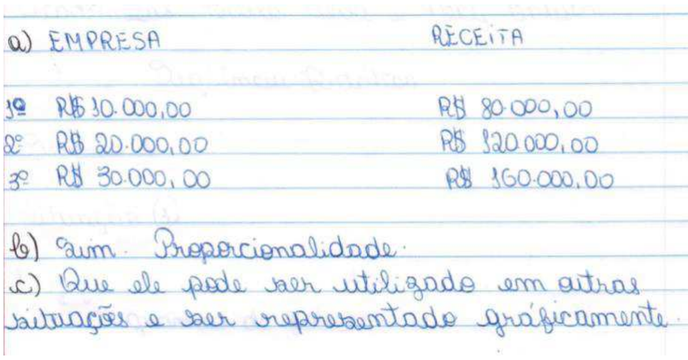
Pois fazendo a proporção, temos:
G $\frac{100\%}{}$ = $\frac{200\%}{}$
R 50% x%

$x = \frac{\cancel{10000}}{\cancel{100}}$ x = 100% de 80 mil =
x = 160 mil

Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla B (Paula e Andreia), como se pode observar na figura 13, escreveu vários resultados, mas não operou com nenhum modelo matemático, justificou, na letra (B), que usou a proporção, e respondeu na letra (C): "*que ele pode ser utilizado em outras situações e ser representado graficamente*".

Figura 14 – Situação problema 02 – dupla B



a) EMPRESA	RECEITA
1º R$ 10.000,00	R$ 80.000,00
2º R$ 20.000,00	R$ 120.000,00
3º R$ 30.000,00	R$ 160.000,00

b) Sim. Proporcionalidade.
c) Que ele pode ser utilizado em outras situações e ser representado graficamente.

Fonte: Dados da pesquisa

É possível inferir que os sujeitos conseguem agir sobre a situação, interagir com o meio, mas não conseguem explicitar um modelo matemático condizente com o modelo de função afim.

Na **situação- problema 3**, a dupla A escreveu um polinômio do primeiro grau (100+ 20x e 55+35x), no entanto, não definiu uma relação funcional, nem apresentou uma resposta às questões apresentadas. Neste caso, não foi possível perceber como os estudantes resolveram a situação. Sobre a justificativa para as situações-problema, relataram o ponto em comum entre as três situações: a utilização do conceito de proporção. A dupla B responde de forma semelhante a anterior, inclusive na justificativa: "*as três questões envolvem raciocínio lógico, conceitos de grandezas, medidas e proporcionalidade, dando ênfase à leitura e interpretação dos textos*".

Concluímos que, nas três situações, os estudantes, na etapa de formulação e validação, não estabeleceram nenhuma interação com o saber sobre o conceito de função afim e linear. Apenas no momento da institucionalização, perceberam que se tratava de função afim e linear. Os sujeitos recorreram a outras estratégias como regra de três e proporcionalidade. No nosso ponto de vista, esta conduta revela que, embora os estudantes estejam na fase final da licenciatura, ainda manipulam o conhecimento matemático de forma bem elementar a um nível de Ensino Fundamental.

Nesse caso, a dialética de institucionalização foi fundamental para que os estudantes percebessem o saber válido para solucionar as situações propostas. Nesse sentido, os nossos objetivos são atendidos parcialmente, pois os sujeitos ainda não conseguem mobilizar as técnicas relacionadas à manipulação de variáveis, construção de gráficos e resolução de sistemas de equação de primeiro grau, mas conseguem, mesmo com dificuldade, interpretar textos em linguagem natural, sem relacionar o conceito de função.

Na fase adidática do desenvolvimento da atividade, a intervenção da professora/pesquisadora foi no sentido de orientar a dinâmica do trabalho dos grupos, de forma que eles pudessem entender como funcionaria cada oficina. Em princípio, os estudantes solicitaram ajuda na tarefa, dicas de qual conteúdo deveriam utilizar. A postura da professora/pesquisadora foi de devolver aos sujeitos perguntas que os instigassem ao processo de investigação e discussão com sua dupla e que eles pudessem entender que tinham responsabilidade de gerenciar as funções do saber que estavam em jogo.

A partir do fato de que os estudantes não utilizaram as técnicas que pensamos na análise *a priori*, para resolução das tarefas, as variáveis escolhidas interferem no processo de aprendizagem dos estudantes, mas não da forma como pressupomos. Os estudantes utilizaram como técnica para resolução da tarefa a regra de três simples e o conceito de proporcionalidade, e não aquelas estratégias que previmos (equações, inequações, sistemas de equações, substituição de valores).

Na etapa de institucionalização, propomos essas técnicas como possibilidades de resolução diferentes daquelas propostas por eles. Com relação à validação desta etapa da sessão de ensino, destacamos como ponto forte a percepção, por parte dos sujeitos, quanto ao modelo de função afim e linear e suas formas de representação.

Um ponto fraco das escolhas realizadas é quanto ao fato de não termos previsto que os estudantes poderiam utilizar a regra de três simples como técnica de resolução da tarefa, consequentemente, não discutimos, na institucionalização, o conceito de proporcionalidade desenvolvido por eles, uma vez que este conceito não fez parte das escolhas didáticas e da previsão de comportamento dos sujeitos.

Outro ponto que apontamos como fraco, em relação às escolhas didáticas, foi a questão: o modelo matemático poderia ser representado graficamente? A forma como esta questão foi elaborada deixou em aberto a necessidade de construção do gráfico, *a priori*, desejávamos que os estudantes construíssem o gráfico e não apenas respondessem "sim ou não" para a pergunta.

Acreditamos que os sujeitos não validaram as estratégias que utilizaram, e sim, o que foi proposto na tarefa e explicitado na institucionalização. No entanto, o trabalho cognitivo realizado por eles sobre proporção contribuiu para a validação das estratégias propostas na tarefa aliada ao processo de institucionalização.

Assim, podemos concluir globalmente que o aporte das variáveis didáticas escolhidas contribuiu para o trabalho cognitivo dos estudantes, no sentido de que relacionaram as estratégias de resolução da situações-problema com os conceitos de função afim e linear.

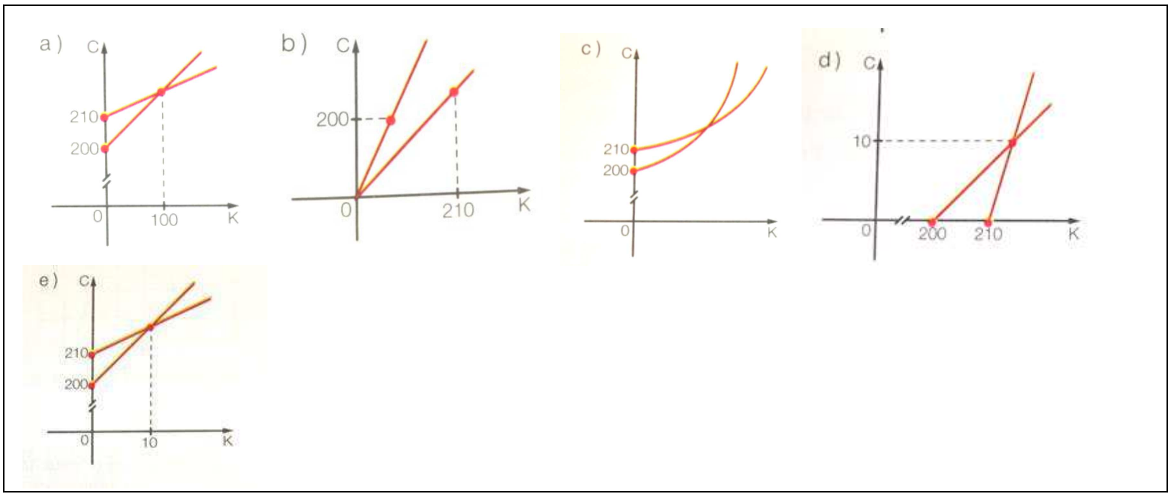
Análise *a priori* da Atividade 2

A atividade 2 tem por objetivo relacionar o coeficiente b com o comportamento da função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = ax + b,$ com a e b sendo número reais e, mais especificamente, perceber o comportamento do gráfico em função do valor de b. Além disso, pretende-se comparar diferentes funções representadas em um mesmo eixo cartesiano e por suas leis de formação.

Atividade 02

Um fornecedor A oferece a um supermercado certo produto com os seguintes custos: R$ 210,00 de frete, sendo que são cobrados R$2,90 por cada quilograma do produto. Um fornecedor B oferece o mesmo produto, cobrando R$200,00 de frete, sendo o valor do produto, por quilograma, R$ 3,00.

(A) Qual a proposta mais vantajosa? (B) Qual dos gráficos a seguir representa os custos do supermercado com fornecedores? (C) Que conclusões você pode chegar em relação aos valores 210 e 200, olhando o gráfico? (SOUZA, 2010, p.91, *adaptação nossa*).



Para a resolução do item (A), é necessário realizar a leitura do enunciado do problema e, em seguida, identificar a organização matemática em torno do conceito de função afim. Temos uma situação que envolve duas funções, uma em relação ao produto A e outra em relação ao produto B, cujas leis de formação são, respectivamente, $C(k)_A = 2{,}90k + 210$ e $C(k)_B = 3k + 200$. Para verificar qual proposta é a mais vantajosa, basta fazer a diferença entre as duas leis de formação $C(k)_A - C(k)_B = -0{,}10k + 10$. Se k for menor que 100, então $C(k)_A$ é mais vantajosa, e se k for maior que 100, então $C(k)_B$ é mais vantajosa. Se k for igual a 100, o custo das duas ofertas é igual.

No item (B), o gráfico (a) representa os custos do supermercado com fornecedores, pois os pontos de coordenadas (0, 210) e (0, 200) verificam, respectivamente, as equações C(k)A e C(k)B, e o ponto de coordenadas (100, 500) é a intersecção das duas retas que representam os dois custos.

No item (C), pode-se chegar à conclusão de que esses valores, 210 e 200, são os custos fixos dos produtos e representam os valores dos coeficientes lineares ou termos independentes das funções polinomiais do primeiro grau definidas por $C(K)_A$ e $C(K)_B$, respectivamente.

Na atividade 2, propomos uma complementação do estudo proposto na atividade 1, trazendo uma abordagem gráfica e algébrica das funções, na qual o aprendiz possa identificar o ponto de intersecção das duas funções, estabelecendo uma relação entre a representação algébrica e a representação gráfica, por meio dos coeficientes das funções. O estudante deverá perceber que o ponto notável do gráfico (0, b) representa o ponto inicial da reta, e que a partir de dois pontos do gráfico (da reta) é possível determinar sua lei de formação definida pelo modelo $f(x) = ax + b$.

Acreditamos que diferentes percursos podem ser adotados pelos sujeitos na tentativa de solução para o problema. Destacamos dois na análise matemática, a partir desses dois percursos, buscamos prever quais condutas poderão ser adotadas pelos sujeitos.

Na **dialética de ação**, os estudantes irão agir de forma semelhante à atividade anterior (atividade 01), sobre a situação, de forma que ela lhes retorne informações sobre sua ação. A partir de então, os alunos elaboram uma representação para sintetizar os dados e estabelecer uma estratégia de resolução.

Em uma etapa de **formulação**, os estudantes poderão adotar algumas condutas, a partir das seguintes informações levantadas na etapa de ação: $C(k)_A = 2{,}90k + 210$ e $C(k)_B = 3k + 200$. Eles podem, por exemplo, explicitar as etapas da resolução da atividade, a partir da relação entre os termos independentes das funções $C(K)_A$ e $C(K)_B$, respectivamente 210 e 200, com os pontos de intersecção (0,210) e (0,200), com o eixo *y*, identificando, assim, os gráficos que correspondem às funções dadas. Ou seja, em toda função afim, o ponto de coordenadas (0, b) sempre toca o eixo y, e o ponto de coordenadas (-b/a, 0) sempre toca o eixo x.

Na **dialética de validação**, os estudantes podem atribuir valores para k e encontrar os gráficos das funções $C(K)_A$ e $C(K)_B$ idênticos àqueles por eles identificados na atividade proposta, submetendo esta estratégia à apreciação dos colegas.

O professor **institucionaliza** o conceito de função afim e função linear, suas propriedades e as representações gráficas, reforçando o que foi discutido na atividade 01.

Variáveis didáticas da atividade 02

A **atividade 02** é composta por três situações-problema. Na primeira, escolhemos as variáveis didáticas a seguir.

01) O **contexto da situação-problema**: Nesta atividade, o contexto da situação-problema é uma situação de custo de produtos para abastecer um supermercado, mas se articula com o contexto matemático da representação gráfica de uma função. Justificamos a escolha desse contexto, em vez de um contexto puramente matemático, pelas mesmas razões justificadas na atividade 01, situação-problema 01.

02) **Os valores numéricos escolhidos**: Os valores numéricos escolhidos se aproximam de valores reais, portanto não são escolhas aleatórias.

03) **O objeto matemático estudado na situação**: o objeto matemático é a função afim definida por $f(x) = ax + b$, especificamente, a relação existente entre os coeficientes a e b e a representação gráfica de $f(x)$;

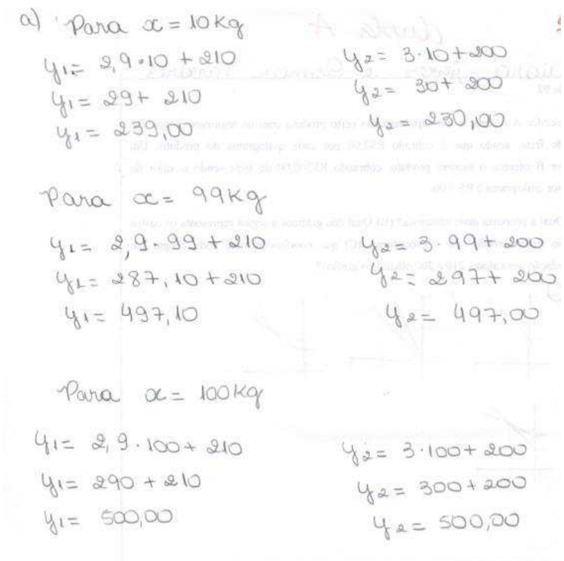
04) **Questões da situação**: as questões do problema são fechadas, pois existe uma única alternativa correta.

Em nossa perspectiva, as variáveis didáticas escolhidas poderão interferir no processo de resolução/aprendizagem dos sujeitos, no sentido de que eles possam estabelecer as relações entre a representação algébrica (lei de associação da função exponencial) e a representação gráfica, proposta nas alternativas do problema.

Análise *a posteriori* da Atividade 02

A dupla A apresentou dificuldade na hora de analisar o gráfico e também para decidir qual a proposta era a mais vantajosa. Resolveu a situação de forma diferente da que prevemos. No entanto, percebemos uma mudança no comportamento dos estudantes no que se refere à manipulação das variáveis independente e dependente, x e y respectivamente, e também na representação do modelo matemático coerente com a função afim, a partir da leitura da situação problema, algo não identificado na atividade 1, mas previsto para etapa de ação e formulação.

Figura 15 – Atividade 02 – dupla A


a) Para $x = 10\,kg$

$y_1 = 2{,}9 \cdot 10 + 210$ $\quad$ $y_2 = 3 \cdot 10 + 200$

$y_1 = 29 + 210$ $\quad$ $y_2 = 30 + 200$

$y_1 = 239{,}00$ $\quad$ $y_2 = 230{,}00$

Para $x = 99\,kg$

$y_1 = 2{,}9 \cdot 99 + 210$ $\quad$ $y_2 = 3 \cdot 99 + 200$

$y_1 = 287{,}10 + 210$ $\quad$ $y_2 = 297 + 200$

$y_1 = 497{,}10$ $\quad$ $y_2 = 497{,}00$

Para $x = 100\,kg$

$y_1 = 2{,}9 \cdot 100 + 210$ $\quad$ $y_2 = 3 \cdot 100 + 200$

$y_1 = 290 + 210$ $\quad$ $y_2 = 300 + 200$

$y_1 = 500{,}00$ $\quad$ $y_2 = 500{,}00$

Fonte: dados da pesquisa

Percebe-se, na figura 14, que os estudantes atribuíram valores para x nas leis das duas funções, definidas por eles como *P1*: $y_1 = 2{,}90x + 210$ e *P2*: $y_1 = 3x + 200$. A partir dos resultados, chegaram a conclusões: "*No intervalo de 0 a 99 kg, a segunda proposta é mais vantajosa. Quando o produto equivale a 100 kg, as duas propostas são equivalentes. Quando o kg do produto é superior a 100, a primeira proposta é mais vantajosa*". A dupla A respondeu para letra B: "*a alternativa correta é na letra C*". E apresentou a seguinte conclusão: "*Concluímos que os valores 200 e 210 são as constantes da função afim e que eles são os valores mínimos de custo".* Apesar de identificar os coeficientes lineares das leis de formação das funções, os estudantes apontaram o gráfico incorreto, o que significa que ainda não perceberam a relação entre os coeficientes das funções e suas representações gráficas.

A dupla B utilizou as mesmas estratégias de substituição de valores que a dupla A. Explicou a relação entre os coeficientes das funções e os gráficos, apontando a alternativa correta. Para a letra C, a dupla respondeu: "*Analisando o gráfico, 210 e 200 estão no mesmo eixo e representam o valor do frete do produto".*

Durante a institucionalização, os estudantes puderam clarificar as dúvidas e perceber que adaptações poderiam ser realizadas no modelo de solução por eles construído.

Nessa atividade, escolhemos modelar a função afim a partir de um contexto de situação-problema em linguagem natural, articular a representação do modelo algébrico construído com a sua representação gráfica, perceber e analisar a importância do coeficiente linear da função (termo b) para a representação gráfica de uma função afim.

Na fase adidática desta atividade, os estudantes não solicitaram auxílio como na anterior, por esta razão, a intervenção da professora/pesquisadora foi a mínima possível, apenas de vigilância do trabalho dos estudantes. Esta postura incentivou os estudantes no processo de investigação para resolução/aprendizagem da atividade.

Em termos da resolução/aprendizagem da atividade, nesta fase adidática, os estudantes conseguiram articular representação do modelo da função afim, de forma algébrica, o que representa uma evolução em relação à atividade 01. No entanto, não conseguiram ainda articular a representação algébrica construída por eles com a representação gráfica adequada.

A partir disso, intervimos na etapa de institucionalização da tarefa, discutindo com os estudantes os modelos gráficos apresentados, qual se adequava ao modelo algébrico construído por eles e porque, destacando a relação existente entre o coeficiente linear e a representação gráfica da função afim.

Destacamos como pontos fortes, em termos de validação da sessão, que os estudantes: identificaram a variável x como dependente de y, e os valores de b enquanto variável independente da função afim; associaram o modelo algébrico da função afim a partir de um contexto de situação-problema em língua natural. Tais constatações nos levam a concluir que os estudantes começam a apresentar uma modificação de comportamento frente ao saber que está em jogo. Por outro lado, a escolha de associar um modelo algébrico construído por eles a um modelo gráfico apresentado não facilitou a articulação da representação algébrica com a representação gráfica da função afim, pois os estudantes não conseguiram identificar o gráfico correto. Nesse sentido, a institucionalização foi fundamental para reforçar a compreensão da representação gráfica da função afim.

Globalmente, a questão do problema "perceber o comportamento do gráfico da função afim, em termos do coeficiente linear b" nos dá o aporte necessário para discutir, na etapa de institucionalização, a técnica de resolução da tarefa. Isto se confirma quando os estudantes explicitam verbalmente que compreenderam a tarefa e mudam seu comportamento frente aos saberes em jogo. Conjecturam conjuntamente, interagindo com o professor/pesquisador, sobre a forma genérica de se analisar o gráfico da função afim, o que demonstra que houve um processo de validação de conceitos, consequentemente, de aprendizagem.

Do ponto de vista epistemológico, o breve estudo da função afim contribui para o conhecimento científico dos estudantes sobre a evolução do conceito de função. Por outro lado, a natureza das situações-problema pode influenciar socioculturalmente a visão dos sujeitos frente aos problemas de devastação do meio ambiente, problemas econômicos do cotidiano e de finanças pessoais. Enfim, os estudantes resolvem problemas da realidade socioeconômica e desenvolvem modelos matemáticos de funções.

Concluímos que, nesta atividade, apesar de os estudantes já saberem que estavam trabalhando com a função afim, não demonstraram explicitamente a relação entre os coeficientes e seu comportamento no gráfico, enquanto coordenadas de pontos das retas que representam as funções. Por outro lado, eles utilizaram a manipulação das variáveis, por meio da substituição como uma das técnicas que previmos.

Os objetivos para a primeira sessão foram alcançados, no sentido de que se proporcionou aos estudantes refletir em torno de situações que envolviam os conceitos de função linear e afim, que são importantes no que diz respeito à construção de gráficos, manipulação de variáveis dependentes, ao estudo de coeficientes da lei de formação de função e sua relação com a representação gráfica.

Os resultados obtidos reforçam a ideia de que os estudantes recorrem a conceitos fundamentais, como proporcionalidade e técnicas como regra de três simples, resolução de equação, em detrimento do conceito de função e de suas representações, trabalhados na licenciatura. Parece que, mesmo os estudantes tendo cursado diversos componentes curriculares de cálculo envolvendo funções de uma forma geral, quando sua aplicabilidade se faz necessária, esses conhecimentos não são mobilizados na solução de tarefas.

Os resultados desta parte de nosso estudo sobre as funções afim e linear constituem subsídios para a escolha e a análise de situações que visam ao processo de aprendizagem da função exponencial, porque familiariza os estudantes com as técnicas de resolução de tarefas envolvendo funções, além de minimizar a confusão que os estudantes fazem entre o modelo matemático $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$.

Analogamente, o trabalho com a função exponencial poderá contribuir para também ressignificar conceitos ligados à função, às técnicas de resolução de situações sobre função e tipos de representações, a exemplo da representação tabular e gráfica.

4.3.1.2 Segunda sessão

Na segunda sessão, propusemos as atividade 03 e 04, nas quais, os estudantes deveriam realizar uma investigação sobre a função definida por $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. O objetivo da atividade 3 é fazer que eles cheguem à generalização de um padrão para uma redescoberta da base e, número irracional neperiano, cujo valor aproximado é $e = 2{,}718281828459$. Nosso intuito é também o de que o aluno perceba o que resulta da lei de formação dessa função quando o valor de x cresce, ou seja, perceber que: $e = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Nesse percurso, esperamos que o estudante também desenvolva, em algum nível, a noção intuitiva de limite.

Na atividade 04, temos por objetivo construir e visualizar o gráfico da função f definida por $f(x) = e^x$ e estabelecer uma relação entre essa função e outras que possuem a base e em sua representação algébrica.

Esta sessão foi prevista para ser desenvolvida no laboratório de informática, pois os cálculos recaem em números decimais com mais de cinco algarismos decimais. Nesse caso, o uso de lápis e papel parece ser insuficiente para uma resolução satisfatória da situação proposta, visto que o cálculo de potências com muitas casas decimais demanda outros recursos. Nesse sentido, o recurso do *Excel* pode ser bastante útil para facilitar a resolução da situação, além de ser um *software* de fácil acesso e adaptável ao uso em classes de Ensino Médio.

Análise a *priori* da atividade 03

Atividade 03

Seja$f(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$, suponha que t seja uma variável temporal de crescimento de um determinado organismo vivo y (medido em cm), que se desenvolveu a 100 milhões de anos até chegar à forma atual, no ano de 2013. Utilize o recurso computacional do *software excel* na resolução deste problema.

(A) Determine o tamanho inicial desse organismo ao final do primeiro ano de vida. Construa uma tabela que mostra como esse organismo cresceu a cada 10 anos, 100 anos, 1000 anos até a forma no ano de 2013.

(B) O que se pode concluir do tamanho desse organismo vivo no ano de 2013? Discuta com os colegas a resolução e os resultados obtidos. Registre suas conclusões. (DEMANA *et al*, 2009, p.141, *adaptação nossa*).

A proposta é de construir uma tabela, a partir da substituição de valores de t na lei de formação de f para ver como os dados se comportam:

Para t = 1 ⇒ $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$=$2^1 = 2$

Para t =10 ⇒ $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$=$\left(\frac{10+1}{10}\right)^{10}$=$\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$ = $1{,}1^{10}$ = 2,5937424601

Para t = 100 ⇒ $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$=$\left(\frac{100+1}{100}\right)^{100}$ = $\left(\frac{101}{100}\right)^{100}$ =

$1{,}01^{100}$ = 2,7048138294215260932671947108075

Para t = 1000 ⇒ $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$=$\left(\frac{1000+1}{100}\right)^{1000}$ = $\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000}$ =

$1{,}001^{1000}$ = 2,7169239322358924573830881219476. É possível notar que não há necessidade de construção de toda a tabela para chegar a uma conclusão.

Quadro 3 – Atividade 3

T	1	10	100	1000	10.000	100.000
$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$	2	2,5...	2,70...	2,716...	2,7181...	2,71826...

Fonte: Dados da pesquisa

Sintetizando os cálculos, se *t* for cada vez maior, ou seja, se $t \to +\infty$, teremos um número em torno 2,71... Ou seja:

$$e = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e = 2{,}71828182845904523536028 74...$$

A partir dessas conclusões, é possível responder (em A) que o tamanho inicial do organismo era 2 cm. Na letra B, podemos afirmar que o tamanho do organismo é, aproximadamente, igual ao valor do número e, ou seja, à medida que t aumenta, o tamanho do organismo tende para e.

A situação proposta situa o aprendiz no contexto da definição do número e**,** irracional, importante para o desenvolvimento de vários aspectos matemáticos, incluindo funções. Este percurso contribui para dar um novo significado a esse número – aquele que desejamos que os sujeitos construam –, o da função exponencial natural. Para tal situação, é necessário que o sujeito possua, em seu repertório, habilidades para realizar cálculo aproximado, substituição de variáveis e, finalmente, a noção intuitiva de limite. Além disso, os sujeitos precisam ter algum conhecimento sobre as ferramentas básicas de computador, como, no caso, *Excel*.

Em **dialética de ação**, os estudantes iniciam a construção da tabela solicitada, manipulando o *Excel*, buscando construir um modelo adequado à solução da situação-problema. Pode ocorrer alguma dificuldade com o *software*, mas supomos que a interação dos sujeitos com o meio, através das tentativas e erros, leve-os ao sucesso na organização dos dados da situação, e na ação para solução.

Em um segundo momento, **dialética de formulação**, os estudantes discutem e organizam uma estratégia para a resolução da situação. Tal estratégia é organizada em torno do conceito de potência, no caso da situação1; 1^{10}; $1{,}01^{100}$; $1{,}001^{1000}$. Nesse caso, a organização matemática, para chegar às potências, repete-se para cada valor de t. Tais potências têm um custo elevado em termos de cálculo manual e mental para construção da tabela. Os estudantes podem criar um modelo computacional para o cálculo de potências com base decimal, ou ainda um modelo que dê conta de calcular os valores da expressão: $y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ quando t assume valores grandes, a partir de 100, 1000, 10.000, e assim sucessivamente.

A **dialética de validação** ocorrerá durante a construção da tabela na planilha do *Excel*. Os estudantes executam a substituição dos valores de t, construindo uma representação tabular para a função definida pela lei de formação $f(x) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$. Ao validar os resultados encontrados, poderão debater e solicitar explicações quanto à representação dos dados de entrada na planilha *Excel* que divergem da escrita matemática natural, como, por exemplo, a representação da potência utilizando a representação: [$(\mathbf{1} + \mathbf{1}/\boldsymbol{t})$ **^ t**].

A etapa da **institucionalização** é o momento do professor explicar, discutir e contextualizar a importância do número e, retomando a perspectiva histórica desse número e do seu papel no processo de construção do conceito de função exponencial natural. Nesse sentido, retomaremos a expressão $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ preparando os estudantes para discutir o modelo de função exponencial vinculado a e.

Variáveis didáticas da atividade 03

Para esta atividade, selecionamos cinco variáveis didáticas:

1) O **contexto da situação-problema**: para esta atividade, selecionamos o contexto da Biologia, um problema de crescimento de certo organismo vivo, esse contexto se articula com o contexto matemático da função definida por $\mathrm{f(t)} = \left(1 + \frac{1}{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{t}}$. Esta escolha de dois contextos articulados – e não apenas um ou o outro contexto – deu-se por conta de que desejamos que os estudantes aprofundassem as habilidades que propusemos no estudo da função afim, mas agora aplicadas à função exponencial, no caso: leitura e interpretação de uma situação-problema em língua materna, que envolva a função exponencial; modelagem do contexto da realidade para um contexto matemático.
2) **Os valores numéricos escolhidos**: os valores numéricos escolhidos se aproximam de valores reais, ou seja, o tempo de evolução biológica de uma

determinada espécie de organismo vivo ocorre em termos de milhões de anos;

3) **O objeto matemático estudado na situação**: o objeto matemático é a função afim definida por $f(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} r$, especificamente, a relação existente entre a base, t e b, e a representação gráfica de $f(t)$;

4) **Questões da situação**: as questões do problema são parcialmente fechadas. Na letra A, a resposta é fechada, no entanto, para a letra B, o estudante poderá desenvolver diferentes estratégias com o uso do *software* para encontrar os resultados procurados;

5) **Uso de TIC**: para esta variável, escolhemos indicar o *software Excel*, por conta de tê-lo disponível para uso, além de ser gratuito. Apesar de não termos indicado, a calculadora científica do computador também poderá ser utilizada, neste caso, o uso de lápis e papel é um recurso insuficiente para calcular as potências, por esta razão, não indicamos como variável.

Acreditamos que estas variáveis escolhidas – principalmente, o uso do *software* – irão interferir no processo de resolução/aprendizagem dos estudantes, no sentido de que consigam, passo a passo, na construção da tabela, perceber o comportamento da função proposta e de seu limite. O uso do *software* tem a interferência direta no sentido de facilitar o cálculo de potências e viabilizar a estratégia de construção da tabela de valores.

Análise *a posteriori* da atividade 03

Nesta atividade, a dupla A comportou-se da forma que previmos com relação à dificuldade para utilizar o *software*. A dupla solicitou o uso de calculadora, tentou realizar os cálculos de forma manual para, depois, inserir os dados na planilha. Ao perceber que seria muito trabalhosa esta técnica, a dupla decidiu, então, voltar para a construção da planilha no Excel. Dando sequência à resolução da tarefa, os estudantes procederam conforme previmos e apresentaram o seguinte resultado (figura 15).

Figura 16 – Planilha de dados da letra A – dupla A

t	y=(1+1/t)^t
1	2
10	2,59374246
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
1000000	2,718280469
10000000	2,718281694
100000000	2,718281786

Fonte: Dados da Pesquisa

Para a letra B, forneceram a seguinte resposta: "*A partir da tabela acima, podemos concluir que o crescimento do organismo vivo y, no primeiro ano de vida, foi relativamente maior que nos demais anos seguintes, quando o tempo t se aproxima do infinito, o crescimento do organismo vivo se aproxima do número de Euler".* A solução apresentada pelos estudantes converge para aquela que propusemos na análise *a priori*. As respostas fornecidas pela dupla B também seguem a mesma perspectiva com relação à elaboração da tabela, no entanto, na resposta final, na letra B, a dupla respondeu: "*Concluímos que, com o passar do tempo, o crescimento do organismo vivo vai crescendo numa escala menor".* Na letra C, a dupla apresentou a seguinte resposta: "*Observando a tabela, concluímos que, após 100 anos, à medida que os anos vão aumentando, o crescimento do organismo vai se tornando mais lento".* Esta resposta denota que a dupla não procedeu a uma interpretação coerente da situação, no que se refere ao comportamento de ***t*** representado na tabela. Isto sinaliza que a dupla, provavelmente, não compreendeu o crescimento exponencial de ***t*** a cada ano, por meio da construção da tabela.

Durante a institucionalização, discutimos as respostas fornecidas pelos estudantes, enfatizando a relação entre o conceito matemático de função exponencial natural e o número ***e***.

Nesta atividade, os estudantes deveriam desenvolver um padrão de generalização para o número e a partir da representação tabular da função (usando o *Excel*), definida por $f(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$.

A intervenção da professora/pesquisadora nesta atividade se deu a partir da solicitação de auxílio, por parte dos estudantes, pois demonstraram, inicialmente, dificuldade de calcular usando o *Excel*. A devolutiva para esta solicitação dos alunos foi perguntar-lhes que cálculo deveriam realizar na tarefa. Eles responderam que seria sobre a operação de potência. Em seguida, orientamos sobre as operações básicas, usando as planilhas do *Excel*. Esta intervenção teve o papel fundamental de auxiliar os estudantes na manipulação do *software*, como ferramenta que possibilitaria desenvolver a estratégia de solução da tarefa que desejávamos e, por conseguinte, viabilizar a resolução/ aprendizagem dos alunos.

A escolha das variáveis didáticas se mostrou fundamental no processo de aprendizagem dos estudantes para: a representação tabular de uma função exponencial; a percepção de que o tipo de tarefa tinha como ponto fundamental o uso de tecnologias disponíveis (no caso, a calculadora ou *o software Excel*), visto que o uso de lápis e papel na tarefa impossibilitava, de forma prática, a sua resolução, tornando-a quase que impossível.

Do ponto de vista epistemológico, na tarefa, conseguimos reproduzir uma construção histórica que corrobora diretamente para o conceito de função exponencial, a importância do número, e para o estudo da função exponencial. Por outro lado, a cultura do uso do *software,* na contemporaneidade, passa a ter, para o estudante, um significado diferente daquele que muitas vezes é difundido, do uso da tecnologia pela tecnologia. Neste caso, a tecnologia digital se apresenta como ferramenta necessária ao desenvolvimento de uma técnica de solução da tarefa.

Do ponto de vista social e cultural, a tarefa leva os sujeitos a perceber a importância da Matemática, do estudo da função exponencial e de outras funções para a compreensão do processo evolutivo de seres vivos.

Nas etapas adidáticas, os estudantes partem de um processo de dificuldade de manipulação do *software* e da compreensão do comportamento da função, chegando a abandonar a tarefa, para, em seguida, após sucessivas interações com o *milieu*, construir uma técnica de solução coerente.

Em termos de validação dos conceitos por parte dos sujeitos, destacamos que a escolha didática teve como ponto forte possibilitar-lhes compreender o comportamento da função tipicamente exponencial, além disso, perceber que os resultados encontrados tendiam para a constante e, nesse sentido, a representação tabular se configura como uma técnica de construção de valores que explicita o comportamento da função. Estas constatações só puderam ser elucubradas a partir da observação e do registro da exposição oral de cada dupla nas etapas adidáticas, especialmente, na dialética de validação.

Diferentemente das atividades anteriores, a etapa de institucionalização teve, nesta atividade, um papel secundário quanto à validação das estratégias de resolução, visto que os próprios estudantes apresentaram suas discussões acerca da resolução da tarefa para o grupão de forma coerente. Essas discussões foram novamente institucionalizadas e, ao mesmo tempo, retomadas a respeito da questão histórica e a importância do número e. Este último ponto foi a maior contribuição da etapa de institucionalização, pois os estudantes revelaram não saber da importância do número **e** até então.

Sobre essa questão histórica, trazemos mais uma inferência sobre a contribuição da licenciatura em Matemática para a formação do professor. No que se refere à história da Matemática, percebemos que, neste tópico referente ao número **e**, os estudantes revelaram desconhecimento da história da Matemática. Nesse sentido, as escolhas didáticas contribuíram para minimizar a dificuldade dos estudantes sobre o desconhecimento do número e de sua relação histórica com a função exponencial.

Análise *a priori* da atividade 04

Na atividade 04, continuamos a trabalhar com o número $\boldsymbol{e}$, o objetivo agora é que, a partir das construções anteriores, os estudantes possam representar graficamente uma função exponencial natural definida por $f(x) = e^x$, estabelecer relações entre outras funções exponenciais, cujas escritas algébricas aparecem em função do número *e* como base da exponencial. O estudante precisa criar estratégias por meio da manipulação de gráficos, a fim de representar estas funções, tomando algum parâmetro para relacioná-las a $f(x) = e^x$.

Nesta atividade, poderemos utilizar o recurso computacional do *software* Geogebra, cujo objetivo será de facilitar o processo de visualização e manipulação dos gráficos. Os estudantes, além desta tarefa, deverão estabelecer relações entre os parâmetros da função e sua representação gráfica, por meio da manipulação da interface gráfica.

Antes da aplicação da atividade, é importante fazer alguma tarefa de construção de gráfico usando o Geogebra, para que os estudantes possam se familiarizar com o recurso computacional, pelo menos, no que diz respeito aos recursos do *software* para construção desse tipo de tarefa. Em princípio, pode-se utilizar o mesmo método manual de construção de gráfico (construção de tabela e marcação dos pontos) e explorar com eles os recursos disponíveis no *software*, como a construção do gráfico de forma automática. Pode-se usar o exemplo das atividades da primeira sessão de ensino.

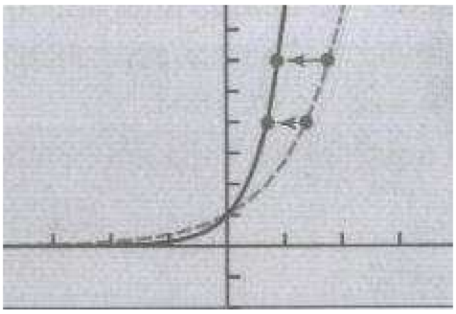
Atividade 04
O número irracional e, cuja notação foi introduzida por Leonhard Euler (1707-1783), tem uma importante contribuição no estudo do cálculo. Sabendo que e é uma constante irracional, consideramos uma função f definida por $f(x) = e^x$. Usando o recurso computacional (Geogebra), descreva como transformar o gráfico de $f(x) = e^x$ no gráfico das funções a seguir. Registre tudo em um texto para impressão. Apresente a solução graficamente, explicando as estratégias utilizadas. (DEMANA *et al*, 2009, p.133, *adaptação nossa*).

A) $g(x) = e^{2x}$ B) $h(x) = e^{-x}$ C) $k(x) = 3e^x$

Para resolução desta atividade, propomos o uso do *software* Geogebra. A sugestão é que se construa o gráfico da função definida por $f(x) = e^x$, e das funções cujas leis de formação são apresentadas nas letras A, B e C respectivamente. Em seguida, realizar uma comparação entre a representação destas funções (letra A, B e C) e a função definida por$f(x) = e^x$ até chegar a uma situação de modelização de cada gráfico, na qual a movimentação da curva que representa a função definida por $f(x) = e^x$ faz aparecer as curvas que representam as funções definidas nos itens A, B e C.

Segundo Demana *et al* (2009), na letra A, o gráfico da função definida por $g(x) = e^{2x}$ é obtido, encolhendo horizontalmente o gráfico de $f(x) = e^x$, por meio do fator 2 (figura 16).

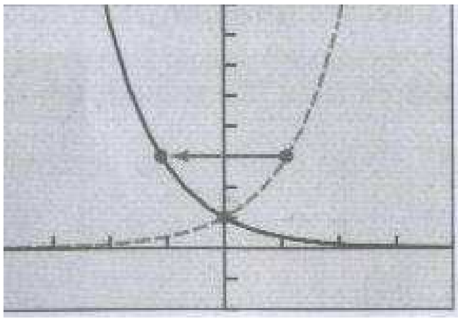
Figura 17 – Transformação de $f(x) = e^x$ em $g(x) = e^{2x}$



Fonte: DEMANA *et al.*, 2009, p.133.

Para obter o gráfico da função definida na letra (B), $h(x) = e^{-x}$, basta fazer uma reflexão do gráfico de $f(x) = e^x$ com relação ao eixo vertical y, conforme a figura 6. Nota-se que a intersecção entre os gráficos é um ponto de coordenadas (0, y), e o eixo y corta as duas curvas nesse ponto de intersecção, de forma que os ramos dessas curvas sejam simétricos em relação a esse eixo (figura 17).

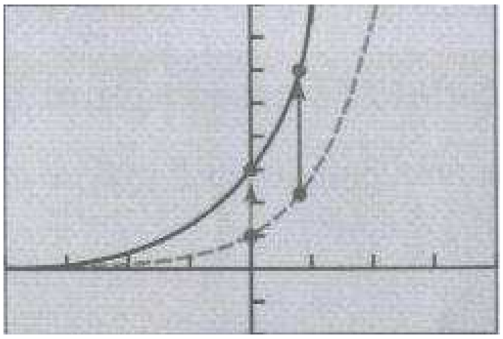
Figura 18 – Transformação de $f(x) = e^x$ em $h(x) = e^{-x}$



Fonte: DEMANA *et al*., 2009, p.133.

No item C, estica-se verticalmente o gráfico da função definida por $f(x) = e^x$ pelo fator 3, conforme ilustrado no gráfico (figura18), o que resulta na mudança do intervalo [-4,4] por [-2,8].

Figura 19 – Transformação de $f(x) = e^x$ em $k(x) = 3.e^x$



Fonte: DEMANA *et al*.,2009, p.133.

Nesta situação, deseja-se que os estudantes percebam que, a partir de uma função exponencial fundamental definida por $f(x) = e^x$, outras funções podem ser definidas e representadas algébrica e graficamente por meio desta e vice-versa.

Numa etapa de **ação**, ao se depararem com a situação, os estudantes buscarão uma forma de realizar a construção do gráfico que representa cada função, discutindo com os colegas quais estratégias poderão utilizar. A primeira ação dos estudantes é tentar construir o gráfico de $f(x) = e^x$, usando lápis e papel e, em seguida, o recurso computacional, no entanto, apenas a ação de construir o gráfico não é suficiente para solucionar a tarefa.

Na **dialética de formulação**, os estudantes continuam a trocar informações, debatendo sobre modelos de soluções válidas, utilizando a linguagem matemática gráfica. Podem executar manipulações nos gráficos por meio do *software* de forma a encontrar uma representação adequada para cada função (letra A, B e C) solicitada na situação.

Para a etapa de **validação**, os estudantes podem utilizar o *software* para encontrar os gráficos procurados, por meio da digitação da lei de formação de cada função ($g(x) = e^{2x}, h(x) = e^{-x}, k(x) = 3.e^{x}$. Obtendo os gráficos, poderão confrontá-los com os modelos por eles criados. Os demais colegas podem pedir justificativas, aceitando ou rejeitando tais modelos.

Na **institucionalização** realizada pela professora, o objetivo é discutir modelos de transformações de funções exponenciais, clarificando as possíveis dúvidas dos estudantes.

Variáveis didáticas da atividade 04

Para esta atividade, selecionamos cinco variáveis didáticas:

01) O **contexto da situação-problema**: nesta atividade, escolhemos trabalhar com o contexto puramente matemático, em virtude da natureza do problema, transformação de função exponencial, por meio da representação gráfica. Nesta tarefa, esperamos que os estudantes manipulem, de forma dinâmica, a curva que representa a função definida por $f(x) = e^{x}$ até chegar a uma transformação de outras funções exponenciais com base e. Esta situação-problema é típica do contexto matemático, por esta razão, não escolhemos outros contextos;

02) **Os valores numéricos escolhidos**: os valores escolhidos formam números inteiros. Poderíamos ter escolhido números decimais, frações (racionais) ou outros, no entanto, esta escolha poderia implicar um grau de dificuldade maior para os estudantes, o que não contribuiria para atingir os objetivos da tarefa;

03) **Questões da situação**: as questões propostas são abertas, pois os estudantes podem explicitar o resultado de várias formas, desde que compreendam o que acontece com a curva quando a manipulam;

04) **Objeto estudado nesta situação:** transformação de funções exponenciais de base e, ou seja, funções do tipo $f(x) = a.e^{kx}$, com k a números reais;

05) **Uso de TIC's**: a escolha do *software* Geogebra, e não de outro qualquer, ocorreu por duas razões, a primeira, porque o *software* permite a manipulação da interface gráfica, e a segunda, por ser um *software* livre (gratuito) e já conhecido em algum nível pelos sujeitos.

Estas variáveis escolhidas poderão interferir no processo de resolução/aprendizagem, por conta da necessidade de manipulação do registro gráfico (a curva exponencial), algo que só é possível com uma ferramenta tecnológica digital, neste caso, o lápis e o papel se tornam insuficiente. Por outro lado, a indicação do trabalho com o gráfico já influencia para que o estudante não realize um trabalho algébrico, nesse sentido, a interferência das variáveis didáticas é direta nas estratégias que devem ser empreendidas pelos sujeitos.

Análise *a posteriori* da atividade 04

Na resolução desta atividade, todas as duplas construíram a lei da função genérica fornecida na tarefa (definida por $f(x) = e^x$), conforme previsto, mas não conseguiram estabelecer uma estratégia de solução a partir do gráfico de f(x) para encontrar g(x), h(x) e i(x) solicitadas nas letras A, B e C. Por outro lado, também não traçaram estratégias algébricas para encontrar a solução, ainda que esta fosse provisória. A partir dessas dificuldades encontradas pelos estudantes, a etapa de institucionalização foi realizada no sentido de mostrar as transformações de f(x), encontrando a representação gráfica das demais funções.

Não conseguimos realizar plenamente as transformações com o Geogebra, pois a movimentação do gráfico de f (x) fugia ao controle, ao deslizar a curva para reflexão com relação ao eixo horizontal, para esticar verticalmente a curva pelo fator 3 e encolher horizontalmente a curva. Várias tentativas foram empreendidas sem obter êxito na construção. Os estudantes alegaram que ficou claro o que deveria ser feito com os gráficos e o conceito matemático envolvidos na tarefa. No entanto, ficou evidente, também, que a manipulação gráfica com ferramenta computacional precisava ser mais detalhada e aprofundada para obter uma resolução exata do que propomos.

Por outro lado, os estudantes não demonstraram um conhecimento do *software* suficiente para realização da tarefa. A manipulação realizada com a atividade 01 não auxiliou no trabalho de movimentação do gráfico para a situação proposta com a exponencial.

A partir da etapa de experimentação, percebemos que as variáveis escolhidas interferiram no processo de resolução/aprendizagem, sob dois aspectos: o primeiro aspecto foi positivo, pois os estudantes conseguiram construir o gráfico da função exponencial natural, estabelecendo as relações com os valores constantes e a variável x, da lei de formação da função e a representação gráfica; o segundo aspecto diz respeito ao fato de os estudantes não conseguirem manipular a curva construída de modo a obter a função desejada.

De acordo com relato oral dos próprios estudantes, para esta tarefa, a maior dificuldade foi a manipulação da interface gráfica. Neste caso, fazer manipular a curva usando lápis e papel não seria possível, então escolhemos o Geogebra para superar esta dificuldade tecnológica, a fim de solucionar a tarefa. Contudo, os estudantes, apesar de já terem alguma familiaridade com o *software*, demonstraram habilidade insuficiente para manipulá-lo conforme a tarefa requeria. Por outro lado, ao analisar previamente a tarefa, não testamos o mecanismo experimental de forma a obter os resultados desejados e apresentados por Demana *et al* (2009, p.133).

A falta dessa simulação ou teste de manipulação da curva por meio do Geogebra foi um aspecto que influenciou negativamente no processo de resolução /aprendizagem da tarefa por parte dos estudantes. Na etapa de institucionalização, não conseguimos realizar a manipulação da interface gráfica que desejávamos, para apresentar os resultados objetivados quanto ao saber matemático em jogo.

Durante a fase adidática do experimento, realizamos muitas intervenções, levantando questionamentos sobre o tipo do problema, no sentido de que os estudantes entendessem o que estava sendo requerido e, em seguida, tentamos simular com eles a manipulação de outras curvas diferentes daquelas propostas na tarefa. Contudo, não obtivemos êxito no sentido de que os estudantes desenvolvessem a atividade por completo.

Na fase de institucionalização, construímos os gráficos e fizemos comparações entre os modelos, sem movimentar as curvas. Esta construção contribuiu positivamente para o processo de aprendizagem da representação gráfica da função exponencial e da associação com a representação algébrica.

Acreditamos que a perspectiva de tarefa, com a indicação do gráfico, limitou os estudantes no sentido de que poderiam empreender uma estratégia algébrica de resolução para, depois, propor uma estratégia gráfica, que, apesar de não ser esse o objetivo proposto na análise matemática, poderia se configurar como uma técnica de resolução da tarefa, consequentemente, promover a aprendizagem do conceito que estava em jogo.

Globalmente, o aporte das variáveis escolhidas, em termos de aprendizagem, ficam explícitas no processo de validação da representação gráfica da função exponencial, bem como a análise das relações existentes entre os coeficientes constantes e a variável x foram apreendidas pelos estudantes, inclusive com o uso do *software* Geogebra. A esta questão, afirmamos que o processo de experimentação realizado nessa sessão parece ter influenciado positivamente para a mudança de comportamento dos estudantes frente à tarefa de representar graficamente funções, já que, noutras atividades, demonstraram insuficiência de saberes para resolução deste tipo de tarefa.

Constatamos que seria salutar reaplicar esta atividade, por conta da importância social, cultural e epistemológica do estudo das funções relatadas na atividade anterior. Para reaplicar a atividade, propomos: redefinir as variáveis didáticas em termos de comparação das curvas das funções exponenciais apresentadas, utilizando o *software*; realizar uma atividade piloto com a manipulação de vários exemplos de unções exponenciais; e discutir quais resultados essa manipulação produz. Posteriormente, poder-se-ia trabalhar com a manipulação das curvas exponenciais com base e.

Concluímos que, nesta sessão de ensino, atingimos os objetivos parcialmente, pois, apesar da conduta dos estudantes na atividade 1 estar de acordo coma a previsão que realizamos *a priori*, na atividade 02, o dispositivo planejado não funcionou, até mesmo a etapa de institucionalização não aconteceu de acordo com o que prevíamos.

4.3.1.3 Terceira sessão

O objetivo da terceira sessão é construir o conceito da função exponencial, a partir do modelo definido para qualquer base e depois, então, construir, visualizar e representar a função exponencial algébrica e graficamente, tendo como parâmetro a função definida por $f(x) = a.b^{kx}$, como modelo de crescimento ou decaimento exponencial.

Nas atividades propostas para essa sessão, serão trabalhadas as competências de leitura e interpretação de texto em linguagem natural, representação gráfica, conversão do [3]registro gráfico para o algébrico e vice-versa.

Análise a *priori* da atividade 05

[3] Segundo Duval (1999), um registro de representação é um sistema semiótico que tem funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente do sujeito. Nessa perspectiva, os registros se diferenciam dos códigos, pois estes são mais limitados que os registros. A diferença entre registros e códigos se pauta em dois níveis do funcionamento cognitivo: um consciente e outro inconsciente, todo conhecimento implica necessariamente a mobilização desses dois níveis.

Desejamos que os estudantes representem graficamente a função exponencial definida por $f(x) = a.b^{kx}$, e usem estratégias já conhecidas para a construção de gráficos, a manipulação das variáveis do problema, tais como número de indivíduos e tempo de reprodução que auxiliam na percepção do modelo de crescimento exponencial. No entanto, algebricamente, a solução recairia em um cálculo de logaritmos. A proposta é de uma solução gráfica para o problema, sem o uso dos conceitos de logaritmos.

Será permitido ao estudante usar o *software*, mas não será de uso obrigatório, ou seja, a situação pode ser resolvida com lápis e papel, o estudante é quem vai escolher como fazê-la.

Atividade 05 As bactérias têm alto poder de reprodução. Em algumas horas, sob condições adequadas, um único indivíduo pode originar milhares de descendentes. Suponha que, no início de um processo infeccioso, haja cem bactérias da mesma espécie e que, a cada hora, essa população dobre. Suponha ainda que o processo de reprodução se mantenha no mesmo ritmo. (DEMANA *et al*,2009, p. 135, *adaptação nossa*) (A) Após 5h, qual o a quantidade de bactérias existentes? (B) Como representamos esse problema por um modelo matemático? (C) Estabeleça uma representação gráfica para este fenômeno. Conclua em quantas horas o número de bactérias chegará a 350.000 unidades. (D) Discuta com seu colega os resultados encontrados, registrando e justificando a solução encontrada e seu percurso.

No item (A), tomando os dados do problema em que, após uma hora (t = 1), a população dobra, temos:

$t_0 \rightarrow p = 100$

$t_1 \rightarrow p = 200 = 100.\ 2$

$t_3 \rightarrow p = 400 = 100.4 = 100.\ 2^2$

$t_4 \rightarrow p = 800 = 100.\ 8 = 100.\ 2^3$

Para t= 5, temos $100.\ 2^5 = 100.\ 32 = 3.200$

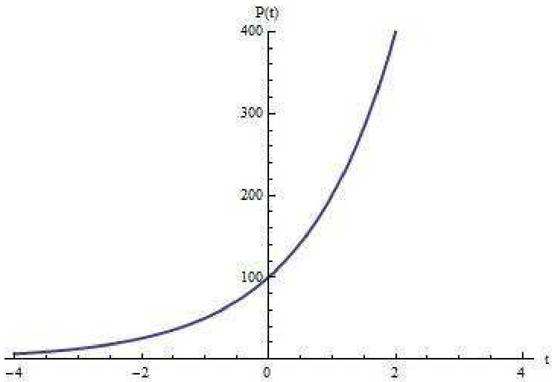
A partir dessa construção, podemos estabelecer um modelo matemático para p (t) definido por $p\ (t) = 100.\ 2^t$, respondendo, assim, a letra B.

Na letra C, deseja-se saber a representação gráfica para o fenômeno e em quantas horas o número de bactérias chegará a 350.000 unidades.

A partir da relação $350.000 = 100.\ 2^t$, e resolvendo essa equação como segue $\frac{350000}{100} = 2^t \Longrightarrow 2^t = 3.500$, podemos obter t, recorrendo ao logaritmo, ou seja t= $\log_2(3.500)$, no entanto, não é o nosso objetivo. Propomos uma solução gráfica conforme sugerem Demana *et al* (2009) na figura 11. Construímos uma reta paralela ao eixo *t* e passando pelo ponto de coordenadas (0, p(0) = 35.000). A abscissa do ponto de interseção da curva da função, cuja lei de formação é p(t), e essa reta correspondem ao valor de t que desejamos encontrar, neste caso 11,77 aproximadamente, o que corresponde a 11h e 46 minutos.

Para uma solução gráfica, desenhamos dois gráficos (figuras 19 e 20). No primeiro, visualizamos os pontos notáveis da curva, mas não é possível visualizar o ponto y = 350.000:

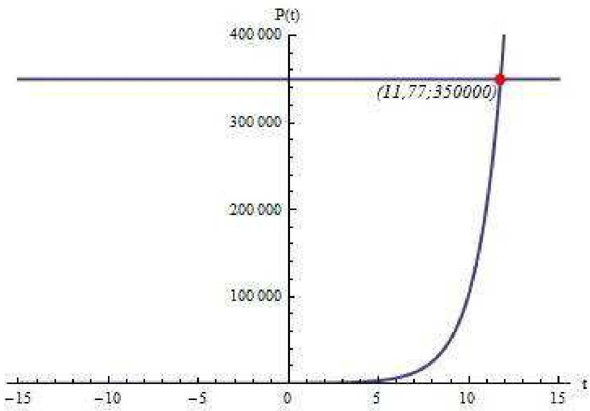
Figura 20 – Gráfico de $p\ (t) = 100.2^t$



Fonte: Autora deste trabalho (2015).

No segundo gráfico, fizemos adaptações na escala, de forma que fosse possível visualizar a reta dada por y = 350.000. Nesse caso, é possível encontrar o ponto de intersecção entre a curva e reta, consequentemente, a coordenada de x correspondente.

Figura 21 – Solução gráfica para o problema



Fonte: Autora deste trabalho (2015).

Em um primeiro momento, os estudantes puderam buscar uma solução para a situação via definição de logaritmos, no entanto, a proposta deste método de resolução que focamos, deve trazer um ganho no repertório cognitivo desses alunos, no sentido de construir novos conhecimentos/saberes relacionados à resolução de equações exponenciais e logarítmicas.

Na situação de **ação**, os estudantes debateram sobre a situação e a possibilidade de solução via interações com o "*milieu",* agindo com leitura, interpretação sobre a situação, com o objetivo de obter indicações para novas ações sobre a situação, a fim de resolvê-la, ao mesmo tempo, mobilizando os seus conhecimentos sobre função exponencial.

Na etapa de **formulação**, os alunos identificaram um modelo matemático explícito e escrito para representar a situação e verificaram que este modelo recai em uma equação logarítmica. Nesse momento, duas condutas podem ser adotadas: a resolução da equação (troca de mensagens escritas), por meio da definição de logaritmos; ou uma estratégia de solução gráfica podem, portanto, usar tanto a linguagem matemática (gráfica) como a linguagem natural, para explicitar o modelo criado como solução.

A **validação** ocorre por meio da própria verificação matemática na substituição do valor de t na equação. Os estudantes discutem e expõem esses argumentos para convencer seus colegas da validade do modelo de solução. Estes últimos podem refutar o modelo proposto, em virtude de não conhecerem as propriedades de logaritmos. Nesta situação, o debate se reinicia em torno da possibilidade de uma solução sem o uso do logaritmo.

Na etapa de **institucionalização,** o professor deverá discutir a solução e as justificativas propostas pelos estudantes. Deve explicar que a solução usando o logaritmo poderia ser um caminho adotado, no entanto, se o sujeito, em tese, ainda não conhece este objeto matemático, esta estratégia se torna de certa forma inviável. É salutar apresentar a definição de logaritmo na proposta de solução em que utiliza esse conceito.

O professor deverá promover uma discussão sobre a solução gráfica de equações exponenciais, além da possibilidade do uso da calculadora científica, na tentativa de atribuir valores para t, até chegar a um valor próximo de 350.000, em que pese o expoente decimal 11,77.

Variáveis didáticas da atividade 05

Nesta atividade, escolhemos trabalhar com a representação algébrica da função exponencial, a partir de um contexto de situação-problema em língua natural e a resolução de uma equação exponencial por um método gráfico, utilizando o *software*.

Supomos que as variáveis didáticas escolhidas sejam capazes de provocar interferências no processo de resolução/aprendizagem. O uso de alguma interface computacional, capaz de auxiliar na construção de gráfico, poderá influenciar, facilitando o processo desta representação gráfica, por conta da necessidade de se adequar uma escala conveniente. Por outro lado, é possível que os estudantes consigam perceber o comportamento do gráfico e fazer um esboço sem uso desta tecnologia. Mas, *a priori*, com lápis e papel, o estudante tende a não perceber o comportamento do gráfico e identificar a solução da equação pela dificuldade de adequação da escala.

De outra forma, o contexto da situação-problema influenciará o processo de resolução/aprendizagem dos sujeitos das estratégias para modelagem do contexto do problema, em um contexto matemático que defina uma função $\mathrm{p(t)} = 100.2^{\mathrm{t}}$, que relaciona o processo de reprodução de bactérias com o tempo de exposição às condições adequadas para essa reprodução. O contexto também tende a levar os sujeitos a deduzir o modelo de reprodução das bactérias, a partir da suposição do que acontece com as bactérias a cada hora. Nessa perspectiva, definimos as seguintes variáveis didáticas:

01) **O contexto** da situação problema: escolhemos o contexto da Microbiologia, para estudar o comportamento da reprodução de bactérias, expostas às condições adequadas (um processo infeccioso) que permitam tal reprodução. Escolhemos esse contexto, em vez do contexto puramente matemático, por diversas razões. A primeira é que a situação-problema se revela interessante, instigante, retrata uma situação real de outro campo de conhecimento, que se relaciona diretamente com o conhecimento matemático, isto pode incentivar no aluno o desenvolvimento do processo de investigação do problema. Além disso, é possível desenvolver competências de leitura e interpretação em língua materna de uma situação em um contexto da Microbiologia, transformando em um contexto matemático.

02) **Os valores numéricos**: os valores numéricos escolhidos são convenientes com a forma como as bactérias se reproduzem, de forma binária. Portanto não podemos indicar quaisquer valores para esta população, mas, sim, aqueles definidos cientificamente.

03) **As questões do problema**: as questões do problema são parcialmente fechadas (letras A,B,C) têm somente uma resposta e indica o caminho que se espera que o estudante desenvolva. A última questão (letra D) é aberta, porque solicita uma justificativa que pode ser variada, de acordo com as estratégias dos sujeitos e o percurso investigativo empreendido.

04) **Objeto de estudo nesta situação**: o objeto matemático de estudo, nesta situação, é função exponencial definida por: $\mathrm{f(x) = a.\,b^{kx}}$, a é diferente de zero, b é positivo e b $\neq$ 1. A constante a é o valor de f quando $\mathrm{x = 0}$, e b é a base. E k é um número real qualquer.

05) **O uso de TIC**: para esta variável, selecionamos dois valores: o *software Excel* e a calculadora científica. Esta escolha, apesar de não estar evidenciada no problema, é a indicada, por se tratar de recursos disponíveis no local onde será realizada a experimentação. Por outro lado, o uso de lápis e papel poderá fornecer uma resposta imprecisa para solução gráfica da equação, por isso, não a escolhemos.

Acreditamos que seja importante, do ponto de vista epistemológico, estudar a função exponencial, sobretudo, de forma interdisciplinar, partindo de outros contextos, de outras ciências, por possibilitar a associação do conhecimento matemático com as ciências. Este estudo também traz contribuições para uma cultura científica na escola básica.

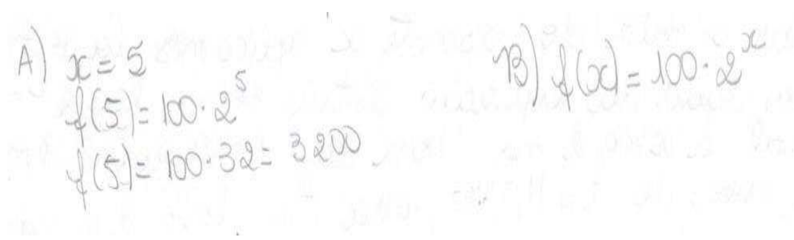
Há, ainda, uma contribuição social quando discutimos funções exponenciais. No contexto da Biologia, questões relacionadas a doenças forma, de contágios e de prevenção. Evidentemente, outros contextos como o de finanças poderia ter sido utilizado, trazendo reflexões do ponto de vista social e cultural para educação financeira, por exemplo, no estudo dos juros compostos.

Análise *a posteriori* da atividade 05

Para iniciar esta sessão, solicitamos aos estudantes que tentassem relatar melhor as estratégias e formas de resolução utilizadas nas tarefas, pois já havíamos percebido, nas atividades anteriores, respostas incoerentes muito resumidas e que não correspondiam ao que, de fato, realizaram, e como não estávamos mais gravando em áudio, por uma solicitação dos próprios estudantes, perdemos um pouco da capacidade de registro. Mantivemos o observador acompanhando o trabalho da dupla A.

Na atividade 05, a dupla A não buscou uma solução gráfica como pensamos, optou pelo modelo e resolução utilizando logaritmos. Apesar de ter previsto esta conduta, esperávamos que os estudantes tentassem outras estratégias, como a solução gráfica para a situação. A dupla fez a seguinte justificativa: "*Para resolver esta atividade, primeiramente, procuramos um modelo matemático que fosse eficaz para a resolução do problema. Percebemos que o modelo matemático seria uma função exponencial, então verificamos a validade desse modelo representando a letra A da atividade*", conforma a figura 21.

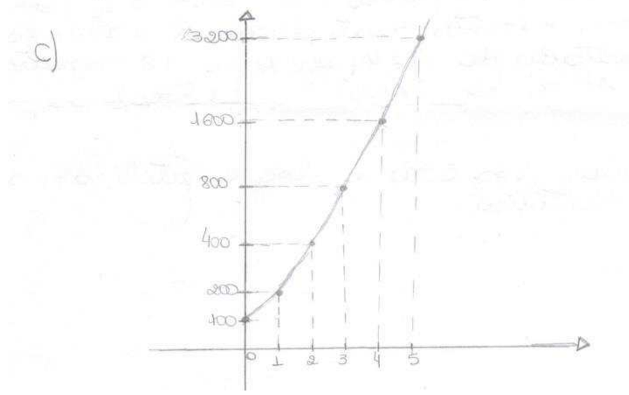
Figura 22 – Atividade 05 – letra A e letra B – dupla A



Fonte: Dados desta pesquisa (2015).

Os estudantes responderam satisfatoriamente a letra B e construíram o gráfico, adaptando a escala dos eixos x e y, obtendo um esboço gráfico para o modelo (figura 22): "*Na letra C, fizemos o gráfico com os valores de x (quantidade de horas) e as respectivas quantidades das bactérias (y)".*

Figura 23 – Atividade 05 – letra C – dupla A



Fonte: Dados desta pesquisa (2015).

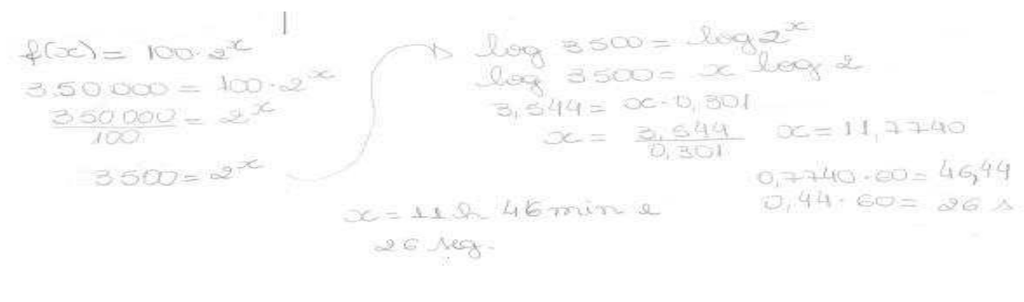
Com relação ao gráfico construído (figura 22), percebemos uma inconsistência na adequação da escala, o que proporcionou uma curva diferente da curva correta. No entanto, pela produção realizada, há indícios de que os estudantes compreenderam algebricamente a solução do problema, inclusive recorreram ao uso de calculadora científica para o cálculo do logaritmo.

Nessa atividade, percebemos que as duplas foram mais organizadas para explicitar suas respostas, explicando, em linguagem natural, as técnicas utilizadas na resolução da situação. Acreditamos que esta troca de informações escritas e orais, em linguagem natural e linguagem matemática, facilitou o processo de formulação e validação, o que garantiu a construção progressiva de uma linguagem compreensível pelos colegas e pelo professor. O que pode ser percebido da descrição da dupla A :

> Para encontrar o número de horas necessárias para a quantidade de bactérias ser igual a 350000, armamos a equação $350.000 = 100.\,2^{x}$, posteriormente, dividimos 350.000 por 100 e restou $350.000 = 100.\,2^{x}$, para encontrar o valor do expoente x, aplicamos logaritmos nos dois lados da equação, então como $\log 2^{x}$ é igual a xlog2, na base 10, conseguimos encontar o valor de x= 11,7740, para transformar os números decimais em minutos, multiplicamos 0,7744 . 60 chegando ao resultado de 46,44, ou seja, 46 minutos, então o valor de x oi igual a 11horas e 46 minutos. Obs: para calcular log3500 e log2, utilizamos a calculadora científica. (Resposta da Dupla A).

Com relação *à resposta da* letra C, a dupla não buscou uma resolução pelo gráfico. Procedeu com a resolução da equação exponencial por meio do logaritmo, conforme a figura 24.

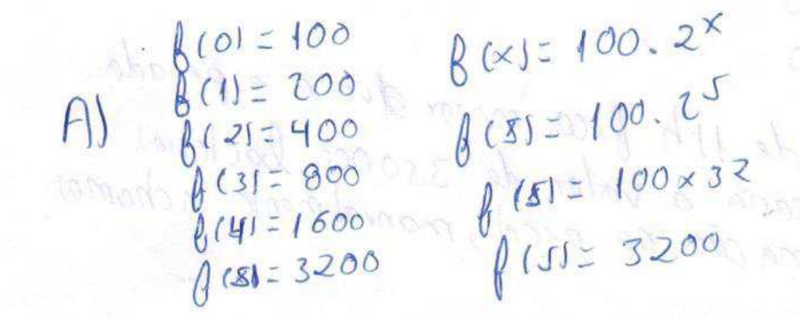
Figura 24 – letra C – dupla A



Fonte: Dados desta pesquisa (2015).

A dupla B seguiu uma estratégia semelhante à da dupla A, quanto à técnica algébrica de solução da letra A, mesmo com alguma variação na representação, chegaram ao mesmo resultado, porém a dupla B explorou mais o processo de dedução por substituição de valores, ver figura 25.

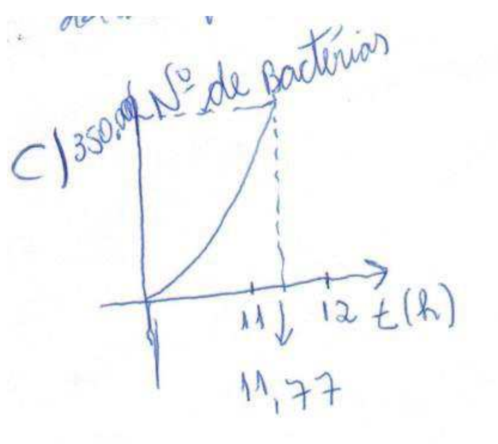
Figura 25 – Atividade 05 – letra – dupla B



Fonte: Dados desta pesquisa (2015).

De acordo com a figura 26, com relação ao gráfico, a dupla B demonstrou compreender que o gráfico precisava ser construído em uma escala adaptada, que permitisse a visualização do ponto de coordenadas (x, 350.000). A dupla relatou que tentou utilizar o Geogebra, mas não conseguiu uma construção coerente com a situação. Fez um esboço do gráfico manualmente, e os cálculos foram realizados usando o *Excel*.

Figura 26 – Atividade 05 – letra C – dupla B



Fonte: Dados desta pesquisa (2015).

Nesta situação, os estudantes mobilizaram os conceitos referentes à função exponencial conforme previmos, no entanto, após aplicação do experimento, concluímos que a escolha feita em relação à função correspondente à situação proposta dificultou muito que os estudantes pensassem em uma estratégica gráfica para solucionar a questão. A situação deveria ter sido estruturada de uma forma cuja única solução fosse gráfica. Por outro lado, a dificuldade na construção do gráfico, provocada pela natureza da função e de sua lei de formação, impossibilitou os estudantes de perceber que a representação gráfica de uma função exponencial, quando se modifica a escala de x ou de y, pode deformar o formato da curva para um dado intervalo do domínio ou da imagem. Por esta razão, propomos uma readaptação da situação para um modelo, no qual a única solução seja uma solução gráfica e que seja uma função cuja representação gráfica seja mais simples.

As escolhas didáticas parecem ter interferido com relação ao uso do *software*, Geogebra e *Excel*, por conta dos valores numéricos. Estes tornavam a solução da equação exponencial um logaritmo decimal. Logo a solução gráfica seria o ponto de coordenadas (x, 350.000). A dupla B tentou realizar a solução gráfica pelo Geogebra, mas não conseguiu, tentou, então, por aproximação, usar o Excel e encontrou o valor de x, daí desenhou o esboço do gráfico.

Com relação à resolução da equação exponencial por meio de uma técnica ou estratégia gráfica, essa escolha não produziu o efeito esperado, sobretudo com a dupla A. Estes estudantes mobilizaram a definição de logaritmos para resolver a equação exponencial e não forneceram uma solução gráfica para o problema, ou seja, uma estratégia usando o registro gráfico apenas.

Apesar de os estudantes terem desenvolvido um percurso e estratégias diferentes daquelas que pensamos, parecem ter construído o conceito de função exponencial em um contexto de crescimento populacional. Esta inferência se fundamenta nas produções escritas dos sujeitos.

Nesse sentido, ao apresentar o resultado do logaritmo, os estudantes conseguem encontrar as coordenadas do ponto do gráfico que corresponde à solução da equação. Esta técnica desenvolvida pelos estudantes mostrou-se eficaz na solução do problema. O uso livre do *software* possibilitou aos estudantes usar a criatividade para resolver a situação-problema, pois uma das duplas utilizou o *Excel* para realizar os cálculos. Concluímos que o *software* não era totalmente indispensável para a resolução/aprendizagem da tarefa do ponto de vista da solução da equação.

Desta forma, propomos mudanças à luz dos resultados da experimentação numa possível reaplicação da sequência didática, propomos, também, alteração nas variáveis didáticas, incorporando a definição de logaritmos na resolução. O uso do *software* pode ser repensado em termos de construir outros gráficos em uma tarefa auxiliar com adaptação na escala de x e y.

De uma forma global, as escolhas didáticas deram um aporte à aprendizagem, no sentido da validação das estratégias relativas à representação gráfica e articulação entre o registro algébrico e o registro gráfico de uma função exponencial.

Com relação à etapa de institucionalização, salientamos que a explanação do método gráfico (ver figuras 19 e 20) de resolução de uma equação exponencial, com ou sem o uso de *software*, veio a contribuir para o entendimento da tarefa em termos dos objetivos planejados, o que, ao nosso olhar, fortalece positivamente o processo de validação dos sujeitos, relativa aos saberes em jogo e, consequentemente, na aprendizagem.

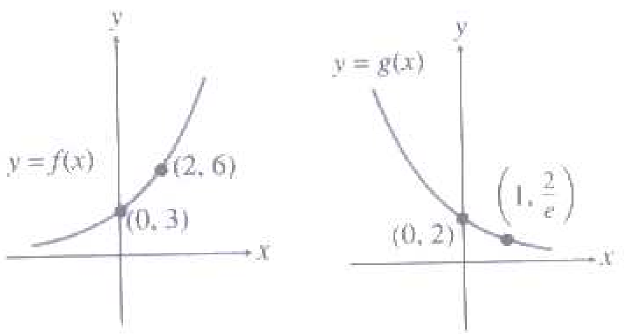
Análise a *priori* da atividade 06

Nesta atividade, o objetivo é que, a partir da análise da representação gráfica das funções definidas por f(x) e g(x), os sujeitos possam construir a representação algébrica, por meio dos pontos destacados nos gráficos, apoiando-se na expressão algébrica, genérica da função exponencial definida por $f(x) = a.b^{kx}$, considerando k = 1, logo o nosso modelo será $f(x) = a.b^{x}$, consequentemente, articulará a representação gráfica com a algébrica.

Atividade 06

A partir dos gráficos, determine a lei que associa a x y= f(x) e y= g(x). Adaptado de Demana *et al* (2009, p.138)

(A) (B)



Explique e registre a estratégia utilizada para a solução encontrada.

Observando o gráfico que representa a função definida por y = f(x), notam-se os pontos (0,3) e (2,6) destacados no gráfico. A partir desses pontos e da conclusão de que a curva representa uma função exponencial, propomos a seguinte resolução: como f(x) é a lei de formação de uma função exponencial, tomamos $f(x) = a.b^x$. (i)

Se substituirmos, na expressão (i), os valores de x e y dos pontos (0,3) e (2,6), respectivamente, temos:

Tomando $a.b^{\cdot 0} = 3 \Rightarrow a.b^{\cdot 0} = 3 \Rightarrow a = 3$

Por outro lado, quando (x, y) = (2,6), temos $a.b^{\cdot 2} = 6$ (ii), neste caso como a = 3 substituindo o valor de a em (ii) temos:

$3.b^{k.2} = 6 \Rightarrow b^2 = \frac{6}{3} \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$. Nesse caso tomaremos b=$\sqrt{2}$, b é definido como sendo positivo e diferente de 1.

A partir dos valores de a e b, podemos definir $f(x) = a.b^x = 3(\sqrt{2})^x$, logo:

$$f(x) = 3(\sqrt{2})^x$$

Analogamente à letra (A), resolvemos a letra B a partir dos pares ordenados (0,2) e (1, $\frac{2}{e}$), pontos expressos no gráfico da função g. Substituindo esses pontos na expressão geral da função exponencial, temos: $g(x) = a.b^x$

Para (x, y) = (0,2) temos $2 = a.b^0 \Rightarrow 2 = a \Rightarrow a = 2$

Para (x, y) = (1, $\frac{2}{e}$), temos: $\frac{2}{e} = a.b^1 \Rightarrow \frac{2}{e} = 2b \Rightarrow \frac{2}{e} \Rightarrow b = \frac{1}{e}$. A partir dos valores de a e b, podemos escrever a função definida por $g(x) = a.b^x$ como:

$g(x) = 2.(\frac{1}{e})^x$.

Nesta atividade, o objetivo é que o estudante possa perceber a relação entre a representação gráfica e a representação algébrica, apoiando-se na lei de formação geral da função exponencial.

Os estudantes se põem em **dialética de ação**, discutindo que estratégias poderão executar para resolução da situação proposta, conjecturam a respeito de qual ação será eficaz e se as informações fornecidas são suficientes para solução solicitada na atividade.

Em uma etapa de **formulação**, os alunos devem utilizar a linguagem matemática da lei de formação da função exponencial $f(x) = a.b^x$, para confrontar esta lei com o gráfico, analisando cada termo da lei. Formulam, então, a substituição dos pontos coordenados dos gráficos na lei de formação da função exponencial e, daí, encontram os coeficientes *a* e *b*.

Para **validação,** os estudantes submetem o modelo matemático de solução ao julgamento dos demais colegas. Os alunos podem utilizar o recurso da verificação, como forma de prova matemática, substituindo os valores de *a* e *b* encontrados, para cada função f(x) e g(x). Os estudantes que recebem as mensagens podem contestar o modelo e solicitar outras justificativas. Para validar o modelo defendido, construir os gráficos das funções encontradas e confrontá-los com os gráficos fornecidos na atividade são, também, estratégias que podem ser usadas.

Na etapa de **institucionalização**, o professor precisa retomar a definição geral de função exponencial, relacionando as constantes e as variáveis dependentes x e y. O professor deverá levantar questões não abordadas pelos estudantes e discutir as construções dos mesmos.

No que se refere às escolhas das variáveis microdidáticas, para esta atividade, escolhemos trabalhar com a articulação da representação algébrica da função exponencial definida por $f(x) = a.b^{kx}$ com a representação gráfica, e, a partir da identificação dos pontos nas curvas, identificar as respectivas funções , por meio de suas leis de associação.

Variáveis didáticas da atividade 06

Para esta atividade, realizamos algumas escolhas didáticas, a fim de permitir alcançar o objetivo geral da tarefa.

01) **Contexto da situação–problema**: o contexto desta situação problema é o contexto matemático, a escolha desse contexto se deu em função dos objetivos de ensino para a atividade, ou seja, como o objetivo é que os estudantes articulem as representações algébricas e gráficas da função exponencial, optamos por trabalhar em um contexto puramente matemático.

02) **Os valores numéricos**: os valores numéricos fornecidos no problema retratam pontos da curva exponencial (valores da variável), em particular, um dos pontos representa aquele que intercepta o eixo y, neste caso, existe apenas um ponto da curva que intercepta o eixo y, logo não poderíamos escolher outro.

    O segundo ponto (valor de variável) representa um ponto qualquer da curva diferente do primeiro (ponto), mas que não poderia ser 1.000, por exemplo, seria inviável desenhar este gráfico sem escala, logo escolhemos os valores mais ou menos fáceis de representar no gráfico, sem a necessidade do uso de escala. No caso da letra B, a presença do número **e** como valor de variável tem um papel fundamental na estratégia algébrica, pois indicará uma função de base e.

03) **Objeto estudado nesta situação**: o objeto de estudo da situação-problema é a função exponencial e suas representações.

04) **A representação do objeto de estudo**: escolhemos como variável a representação gráfica da função exponencial. Desejamos que os sujeitos articulem a representação gráfica à lei de associação da função exponencial (representação algébrica). Outras representações – por exemplo, a tabular, a figural – não são adequadas à natureza da situação-problema proposta.

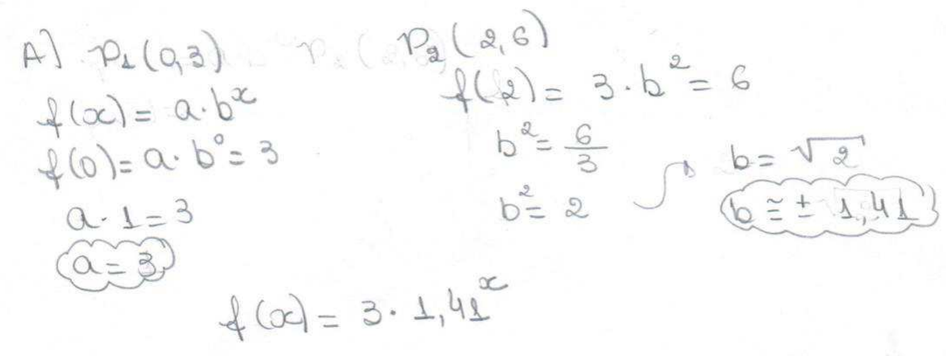
05) **As questões do problema**: as variáveis escolhidas para as questões do problema, *a priori*, devem influenciar no sentido de que os sujeitos realizem a leitura e a interpretação de gráficos de uma função exponencial dada, em termos dos pontos dados desses gráficos. Por outro lado, os valores de variável fornecidos devem interferir na estratégia de resolução da tarefa, substituição dos valores na lei geral de formação da função exponencial.

Em linhas gerais, o estudo da função exponencial por meio do gráfico tem o importante papel do ponto de vista epistemológico como contribuição para a construção do conhecimento geral das funções. Do ponto de vista social e cultural, o estudo possibilita ao sujeito, a partir da leitura e interpretação de gráficos, ampliar essa capacidade, além de interpretar o comportamento de certos gráficos estatísticos presentes no contexto da realidade dos sujeitos. Esta habilidade possibilita aos sujeitos interagir com as informações que lhe são apresentadas diariamente (pelas emissoras de televisão, jornal, revistas etc.), realizando uma leitura crítica da realidade.

Análise *a posteriori* da atividade 06

Para resolução desta atividade, a dupla A procedeu conforme previsto na análise *a priori*. Ela descreveu, em linguagem natural, o percurso percorrido para solucionar cada tarefa da atividade e apresentou um modelo matemático escrito de resolução (ver figura 26).

Figura 27 – Atividade 06 – letra A – dupla A



Fonte: Dados desta pesquisa (2015).

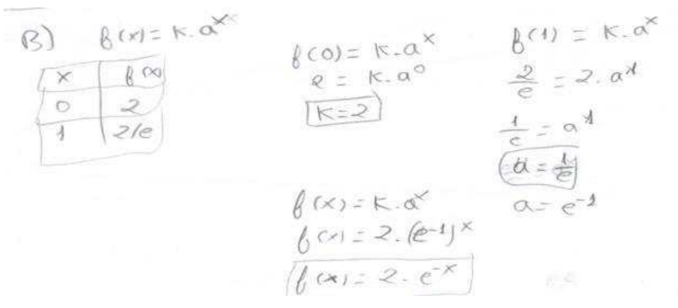
A dupla B fez as seguintes explicações:

> Para resolvermos este problema fizemos várias tentativas sem sucesso, tentamos atribuir valores aleatoriamente para a constante. Depois de um tempo pensamos que com os valores dos pontos poderíamos encontrar os valores de a e b. Então fizemos. $f(x) = a.b^x$. e substituímos o valor de x do primeiro ponto para encontrar o valor de a depois substituímos os valores de a e b na fórmula inicial.

Na letra B da atividade, a dupla B trouxe uma resposta e uma justificativa adequadas (conforme a figura 28 e a justificativa apresentada a seguir) com um processo de validação em relação ao crescimento e decrescimento da função, uma possibilidade que não havíamos levantado. Esta dupla afirma que:

> Já tínhamos em mente que a função do exercício A era crescente e da função do exercício B era decrescente, tendo em vista tendo em vista que os valores de $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ são crescentes e $x_1 < x_2$ e $y_1 > y_2$ são decrescentes. Para confirmar, jogamos a função no Geogebra, e o gráfico ficou igual ao do exercício.

Figura 28 – Atividade 6 – letra B – dupla B



Fonte: Dados desta pesquisa (2015).

Nesta quarta sessão, concluímos que apareceram mudanças no comportamento dos estudantes frente ao saber em jogo. Essas mudanças ocorridas são marcadas pela manipulação das variáveis (x e y) das funções, a construção dos gráficos, a explanação em língua natural das técnicas utilizadas na resolução das tarefas, o reconhecimento do crescimento ou decrescimento da exponencial, tais mudanças, anteriormente não percebidas, sobretudo na primeira atividade, sinalizam que houve uma evolução no processo de construção do conhecimento por parte desses alunos, sujeitos de nossa pesquisa.

Os estudantes começam a reconhecer que são responsáveis pela sua aprendizagem, quando buscam um processo de verificação e prova, validação, constantes retroações do "*milieu*" na busca de estratégias para solucionar as situações. A realização de trocas de informações, de argumentos para tomada de decisões, é também um dos sinalizadores de mudança na relação do estudante com o saber, além de constituir indícios de aprendizagem por adaptação ao "*milieu*".

A percepção dos estudantes, futuros professores, é que o processo de aprendizagem está em constante evolução. O processo de aprendizagem exige do aluno criar uma relação com o saber/conhecimento que promove reflexões sobre a sua atuação no Estágio Supervisionado e/ou na futura prática docente.

As variáveis didáticas escolhidas, principalmente a representação gráfica da função influenciou na técnica de resolução empregada pelos estudantes: o processo de substituição dos valores de cada ponto na lei deformação da função exponencial. Para resolver a tarefa os estudantes conjecturaram e analisara por um tempo, testando valores aleatórios e depois os valores das variáveis numéricas explicitados no gráfico. O registro escrito das resoluções dos sujeitos e sua justificativa em linguagem natural indicam estas considerações.

Com relação ao uso de lápis e papel, enquanto influencia para o processo de resolução/aprendizagem dos conhecimentos matemáticos que estavam em jogo, esta tecnologia é usual dos sujeitos e não trouxe nenhum grau de dificuldade para a resolução da tarefa. Tal fato nos provoca uma reflexão no sentido de que o uso de tecnologia digitais, em alguns momentos da experimentação, configurou-se como ponto de dificuldade para os estudantes conseguirem resolver as tarefas. Reforçamos a ideia de aplicação de atividades pilotos com o objetivo de desenvolver nos sujeitos alguma habilidade para manipulação de TIC digitais, antes de desenvolver a sequência didática. Esta intervenção não foi possível ser realizada em virtude da limitação do tempo.

Nessa atividade, a intervenção da professora/pesquisadora foi a mínima possível, pois os estudantes, durante as etapas adidáticas, foram desenvolvendo o processo investigativo, explorando as funções e as variáveis do problema.

A etapa de institucionalização veio a reforçar as estratégias desenvolvidas pelos estudantes. Nesse sentido, eles se mostraram bastante animados com os resultados encontrados por eles. As participações verbais dos estudantes durante a etapa de institucionalização indicam que eles começaram a perceber que estavam aprendendo. Durante a institucionalização, os alunos da dupla A verbalizaram que estava sendo interessante o estágio com a proposta da pesquisa.

Em termos de validação dessa sessão, podemos destacar como ponto fraco as dificuldades de manipulação do *software*, conforme já foi discutido. Como pontos fortes, podemos apontar o fato de os estudantes demonstrarem uma paulatina mudança de comportamento a cada tarefa que iam realizando, os dados indicam isso. Apoiados em Brousseau (2008), inferimos que esse processo é característico da aprendizagem

Globalmente, a partir dos resultados dessa sessão, estes indicam que as variáveis didáticas funcionaram em cada atividade como o fator que potencializa os objetivos de cada tarefa. No entanto, nas atividades, nas quais os estudantes demonstraram um grau de dificuldade maior, principalmente com a manipulação do *software*, necessitam de adaptações e redefinições de algumas variáveis conforme indicamos em cada atividade.

4. 3.1.4 Quarta sessão

Nessa sessão, retomaremos os conceitos já estudados e aprofundaremos um pouco mais o estudo da função exponencial, levantando aspectos ainda não trabalhados. Retomamos, principalmente, os conceitos de domínio, imagem, continuidade, crescimento/decrescimento da função exponencial de uma forma geral, a análise do comportamento do gráfico de uma função exponencial. O objetivo é que os estudantes possam reconhecer a função exponencial e o seu comportamento a partir da relação entre a expressão algébrica da função e a análise de sua representação gráfica, além de reconhecer as assíntotas e os extremos do gráfico.

Esta sessão, além dos conceitos anteriormente apresentados, será também dedicada ao tratamento algébrico das funções exponenciais, no qual os estudantes deverão utilizar as propriedades de potências aplicadas às funções exponenciais, a partir do conceito de função inversa. Um dos objetivos é que os estudantes percebam a relação existente entre a função exponencial e a logarítmica, por meio da função inversa, ou seja, uma é a inversa da outra. Acreditamos que tal objetivo seja possível de se alcançar, por entendermos que o público já conhece, em algum nível, o conceito de logaritmos.

Análise *a priori* da atividade 07

Atividade 07

Esboce o gráfico das funções e analise o domínio, a imagem, a continuidade, o crescimento/decrescimento, os extremos assíntotas e comportamento nos extremos do domínio. (Adaptado de DEMANA *et al*, 2009, p.139).

i) $f(x) = 3.2^x$ ii) $g(x) = 4.\ 0{,}5^x$ iii) $h(x) = 4.e^{3x}$ iv) $i(x) = 5.e^{-x}$

A) Discuta com os colegas o comportamento das funções a partir da representação gráfica.
B) Quais relações podem-se estabelecer entre a curva e a sua representação algébrica?
C) Justifique e registre o percurso e as estratégias utilizadas na resolução da atividade.

Para resolução da situação, a primeira conduta é a construção do gráfico de cada uma das funções apresentadas e, na sequência, proceder a análise gráfica, respondendo aos itens solicitados. Vejamos o item:,**i) f (x)= 3.2ˣ**

Inicialmente, procedemos com a construção do gráfico por meio de uma tabela, na qual atribuímos valores para x, com o propósito de encontrar seu correspondente y.

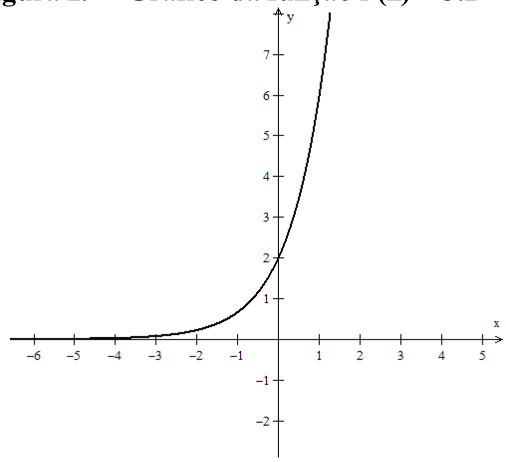
Quadro 6 – Construção dos valores da função

X	f (x)= 3.2ˣ	(x, y)
-3	$f(-3) = 3.2^{-3} = 3.\frac{1}{2^3} = \frac{3}{8} = 0{,}375$	$(\mathbf{-3}, \mathbf{\frac{3}{8}})$
-2	$f(-2) = 3.2^{-2} = 3.\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$(\mathbf{-2}, \mathbf{\frac{3}{4}})$
-1	$f(-1) = 3.2^{-1} = 3.\frac{1}{2^1} = \frac{3}{2} = 0{,}5$	$(\mathbf{-1}, \mathbf{\frac{3}{2}})$
0	$f(0) = 3.2^0 = 3.1 = 3$	$(\mathbf{0}, \mathbf{3})$
1	$f(1) = 3.2^1 = 3.2 = 6$	$(\mathbf{1}, \mathbf{6})$

Fonte: Autora deste trabalho (2015).

Em seguida, marcamos e ligamos os pontos no plano cartesiano X0Y e obtemos a curva exponencial conforme figura 29:

Figura 29 – Gráfico da função f (x) = 3.2^x



Fonte: Autora deste trabalho (2015).

Analisando a função a partir de sua representação gráfica, temos:

- Domínio: $]-\infty, +\infty[$
- Imagem: $]0, +\infty[$
- Sobre a continuidade da função: a função é contínua e sempre crescente;
- Não é simétrica;
- Limite: limitada inferiormente por y = 0, o que é também a única assíntota;
- Extremo local: nenhum;
- Assíntotas y= 0;
- Comportamento nos extremos o domínio $\lim_{x \to -\infty} f(x) \to 0$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty$

Propomos a construção do gráfico por meio da tabela, potencializando as estratégias de cálculo de potência e, em seguida, analisando o comportamento da função. Esse procedimento deve ser o mesmo em cada item da tarefa – ii) iii) e iv) respectivamente. As respostas serão análogas de acordo com as características de cada função.

Nessa atividade, o objetivo é que os estudantes possam visualizar e discutir o comportamento da função por meio da representação gráfica, identificando os elementos de análise do comportamento da função: domínio, imagem, assíntotas, crescimento e decrescimento e os limites da função e seus extremos.

Acreditamos que, no tratamento desses elementos de análise do comportamento da função, os estudantes enfrentam dificuldade na identificação do domínio, da imagem, de analisar o comportamento assintótico das curvas, por se tratar de uma análise do ponto de vista gráfico. Por esse motivo, sugerimos quatro modelos gráficos, para que os sujeitos possam refletir, percebendo as diferenças no gráfico de modelo exponencial, ressignificando os conceitos que não estejam bem assentados na estrutura cognitiva e no repertório de habilidades.

Na etapa de **ação,** os sujeitos tendem a traçar alguma estratégia de resolução da situação problema. Tais estratégias se fundamentam nas técnicas para construção de gráfico de funções reais, na construção da tabela e montagem do gráfico – ou em um nível mais elaborado – e no desenho do esboço do gráfico, por meio da relação entre os coeficientes de cada função, a partir da observação da lei algébrica de formação da função. Esperamos que os sujeitos planejem as estratégias e discutam como fazê-las nesta etapa.

A **dialética de formulação** será caracterizada pela troca de informações entre os estudantes acerca do comportamento de cada gráfico e de como utilizar a linguagem matemática para explicitar este comportamento. Cada membro da dupla pode fornecer uma mensagem escrita ou oral sobre o domínio, a imagem e o comportamento assintótico das curvas e seus extremos. O objetivo é que construam uma linguagem compreensível por todos acerca da tarefa.

Na etapa de **validação**, os estudantes utilizam o modelo por eles construído para submeter ao julgamento de seus pares, no sentido de justificar se tal modelo é pertinente. Por outro lado, questões podem ser levantadas sobre o comportamento de cada função e se as formulações realizadas são suficientes para solucionar a tarefa.

Na **institucionalização,** caberá ao docente/pesquisador retomar a discussão iniciada pelos grupos na etapa anterior, tendo como objetivo explicitar os conceitos relativos ao crescimento e decrescimento, domínio e imagem da função exponencial, bem como apresentar modelos de assíntotas de curvas, identificando aqueles que representam uma curva exponencial. Além disso, é fundamental que o professor/ pesquisador discuta os modelos apresentados pelos estudantes, promovendo sugestões adaptativas que valorizem as construções realizadas por eles, proporcionando a aquisição do novo conhecimento e modificações nos conceitos por eles já conhecidos.

Variáveis didáticas da atividade 07:

01) **Contexto da situação-problema**: nesta situação, escolhemos o contexto matemático, em virtude da natureza das questões, a análise do

comportamento gráfico de funções exponenciais, nesse sentido, somente o contexto matemático possibilitará essas análises solicitadas no problema.

02) **Objeto estudado nesta situação**: o objeto de estudo da situação-problema é a função exponencial e suas representações.

03) **Os valores numéricos**: os valores numéricos das variáveis foram escolhidos, de forma a retratar diferentes tipos de função exponencial, adequadamente escolhidos para possibilitar resolução do problema, no sentido que Brousseau (1986 *apud* ALMOULOUD, 2007) coloca: "uma situação fundamental constitui um grupo restrito de situações adidáticas, cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada".

04) **A representação do objeto de estudo**: escolhemos como variável a representação gráfica da função exponencial. Como desejamos que os sujeitos articulem a representação gráfica à lei de associação da função exponencial (representação algébrica), outras representações, por exemplo, a tabular, a figural, não são adequadas à natureza da situação-problema proposta.

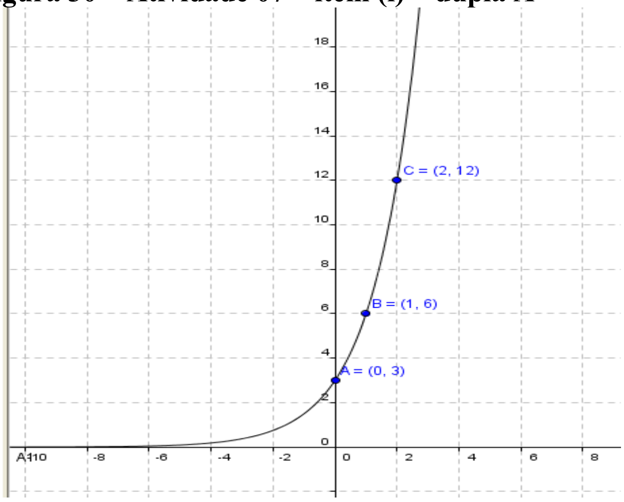
05) **As questões do problema**: As variáveis escolhidas para as questões do problema, *a priori*, devem influenciar no sentido de que os sujeitos realizem a leitura e a interpretação de gráficos de uma função exponencial dada, em termos dos pontos dados desses gráficos. Por outro lado, os valores de variável fornecidos devem interferir na estratégia de resolução da tarefa, a substituição dos valores na lei geral de formação da função exponencial.

Do ponto de vista epistemológico, discutir o comportamento da função exponencial, a partir dos registros de representação gráfica construída pelos próprios sujeitos, poderá cientificar a discussão do conceito de função, contribuindo para o estudo das funções no cálculo diferencial.

Análise *a posteriori* da atividade 07

Para esta atividade, os estudantes das duplas A e B utilizaram tabela e marcação de pontos no plano cartesiano, conforme previmos, mas não realizaram esta técnica de forma manual, utilizaram o recurso do Geogebra e do *Excel*. O uso do *software*, nesta atividade, foi uma adaptação que realizamos durante a aplicação da sequência didática, por uma solicitação dos estudantes. Percebemos que o uso do *software*, neste caso, traria um ganho de tempo para os estudantes realizarem as análises dos gráficos (figura 30).

Figura 30 – Atividade 07 – item (i) – dupla A



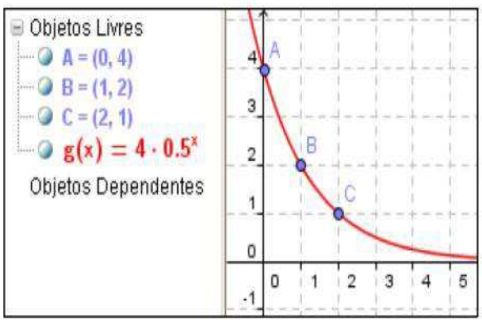
Fonte: Cópia de tela da produção dos estudantes.

De acordo com as respostas fornecidas sobre o comportamento do gráfico da função, percebemos que as condutas adotadas pelos sujeitos quanto às interações fundamentais com o meio estão de acordo com a nossa análise *a priori*, ressaltando alguns elementos na representação das respostas. Por exemplo, a dupla B registrou também as tabelas e os protocolos de construção da ferramenta computacional (figura 31).

Figura 31 – Atividade 07 – item (ii) – dupla B

$g(x)=4.(0,5)^x$

x	$g(x)=4.(0,5)^x$
0	4,00
1	2,00
2	1,00



Fonte: cópia de tela da produção dos estudantes.

Além disso, as justificativas apresentadas pelas duplas foram bem explicitadas em língua natural, associadas às representações matemáticas em linguagem simbólica. Em nossas análises, não previmos que os sujeitos pudessem apresentar suas respostas de uma forma mais clara e explicativa, visto que, nas primeiras atividades, não se expressaram tão bem em língua natural. A dupla B apresentou sua trajetória de resolução da seguinte forma:

> (A) **"**Na função **g(x)=4.(0,5), x** identificamos como exponencial porque está na fórmula, *f*(x)= k.ax, em que os valores de **k** e **a** são constantes, onde k=4 e a=0,5, temos a variação do valor de x, e pelo gráfico identificamos que descreve uma curva exponencial, característico da função exponencial". (B) **"**Observamos que é uma função decrescente, pois quando aumentamos os valores de x os valores de y são diminuídos. Observamos tais considerações ao verificar tabela e gráfico, expostos acima. De acordo com conceito matemático de função exponencial, quando é maior que zero e menor que um a função exponencial é decrescente. Observamos também que a curva cruza o eixo y, quando y=4, justamente o valor da constante k". (C) **"**Para resolução construímos uma tabela atribuindo valores aleatórios para x, como é uma função simples criamos uma planilha no Excel para calcular automaticamente o valor correspondente da função atribuído a y. Para melhor análise utilizamos o aplicativo Geogebra para inserir os pares ordenados e na sequência atribuímos a função para visualizar os pontos localizados e a descrição da curva".

Pela natureza das situações, o fato de conter tarefas que solicitavam as justificativas, incentiva o sujeito a escrever sobre o que fez e, consequentemente, pensar sobre isto. Por outro lado, estas justificativas evidenciam as relações que os estudantes estabeleceram com o conceito de função exponencial, por meio da fala e da escrita, sobre as propriedades da função exponencial , convergindo para os nossos objetivos em cada etapa da sequência didática.

O fato de termos um ambiente virtual para postagem das atividades foi um fator que pode ter influenciado a preocupação dos sujeitos com a escrita e organização desta atividade, pois a mesma foi realizada toda por meio de interfaces digitais (Geogebra e *Excel*).

Nessa atividade, a interferência do professor/pesquisador foi mínima, pois os estudantes mostraram-se determinados na construção de uma resolução coerente para a tarefa, em relação à variáveis didáticas escolhidas. Durante o processo de resolução, os estudantes questionaram se poderiam utilizar os *softwares* disponíveis, definimos que sim e, neste caso, o uso livre do *software* passa, então, a ser uma variável didática, que *a* *posteriori* interferiu no processo de resolução/aprendizagem dos sujeitos, no que se refere à representação gráfica das funções. O registro gráfico e tabular, de acordo com os dados, parece ter facilitado a visualização do comportamento de cada função.

Do ponto de vista epistemológico, a utilização de estratégias, técnicas para encontrar a inversa de uma função dada contribui de forma geral para o estudo das funções reais, possibilitando ao estudante estabelecer relações entre as funções exponenciais e logarítmicas na construção do conhecimento científico.

Nessa atividade, os estudantes demonstraram um pouco de dificuldade em determinar as assíntotas das curvas construídas. Nesse sentido, na etapa de institucionalização, reforçamos o conceito de assíntotas e como se comporta a curva nos extremos do domínio. Nos demais itens da tarefa, validamos as estratégias de construção apresentadas pelos estudantes, os quais não apresentaram dificuldade.

Análise *a priori* da atividade 08

Para finalizar o estudo matemático da função exponencial, propomos uma situação (atividade 08), cujo objetivo é determinar a função inversa e estabelecer relações entre a função exponencial e a função logarítmica. Além disso, queremos que o aluno aplique estratégias de resolução para determinar a inversa da função exponencial. Esperamos que os estudantes possam retomar a definição de logaritmos (por eles já conhecida) para estabelecer as relações com a função exponencial.

Atividade 08

Sejam as funções reais $f(x) = 3^{2x+4}$ e $g(x)= 2(2^{3x-2})$, determine as funções inversas $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ respectivamente. Em seguida, responda:

A) Justifique e registre as estratégias e o percurso utilizado na resolução.
B) Quais relações matemáticas podem ser estabelecidas entre as funções dadas por f(x) e g(x) e as funções definidas por $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$?

A estratégia para resolução é fundamentada no conceito de função inversa e na definição de logaritmos, o que sinaliza Lima (2004), quando afirma:

> Seja a um número real maior que 1. Tradicionalmente, define-se logaritmo de um número real $x > 0$, na base a, com o expoente y, a que se deve elevar a base a para obter x. Ou seja, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

> Em outras palavras, a função $\log_a x$: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$é definida como a inversa da função exponencial $y \mapsto a^y$. Esta função requer o trabalho preliminar de estabelecer o significado e as propriedades das potências a^y, onde o expoente y é um número real qualquer.(LIMA, 2004, p.345).

Utilizando o método disseminado nos livros didáticos, o qual vamos chamar de método algébrico, trocamos o valor de x por y nas funções definidas por f (x) e g (x). No entanto, é necessário verificar se as funções definidas por f^{-1} (x) e g^{-1}(x) existem, neste caso, basta verificar se as funções são bijetoras. Ou seja, "se f é uma função bijetora com domínio A e imagem B, então denotamos por f^{-1}, a função com domínio B e imagem A, definida por $f^{-1}(b) = a$, se e somente se $f(a) = b$" (DEMANNA *et al.*, 2009, p.175).

De acordo com o autor, uma função f de A em B é bijetora, se a mesma for injetora e sobrejetora. Neste caso, a função f de A em B é injetora, se quaisquer dois elementos distintos ($x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$) do domínio de f (o conjunto A) possuírem imagens diferentes em B. A função f é sobrejetora se seu conjunto imagem for igual ao contradomínio, ou seja, se seu conjunto imagem resultar em todo o contradomínio. (DEMANA *et al.*,2009). Estas definições justificam o método de troca de variáveis (x por y), para encontrar a função inversa. Não esperamos que os estudantes justifiquem teoricamente o método de troca de variável, mas isto pode ser institucionalizado pelo professor no momento adequado (momento da institucionalização)

Tomando f(x) = 3^{2x+4} e g(x)= $2(2^{3x-2})$, duas funções bijetoras, podemos determinar as funções inversas f^{-1}(x) g^{-1} (x). Procedendo com a troca de variáveis na função (x) = 3^{2x+4} (trocando x por y), temos que x= 3^{2y+4}, aplicando a definição de logaritmos: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, temos:$\log_3 x = 2y$, donde $y = \frac{1}{2}\log_3 x - 2$, ou seja, $f^{-1}(\text{x}) = \frac{1}{2}\log_3 x -$ Procedendo analogamente com y =$2(2^{3x-2})$, temos:

$$g^{-1}(\text{x}) = \frac{1}{3}\log_2 x - 1$$

As funções exponenciais f(x) = 3^{2x+4} e g(x) =$2(2^{3x-2})$ têm como funções inversas as funções logarítmicas $f^{-1}(\text{x}) = \frac{1}{2}\log_3 x - 2$ e $g^{-1}(\text{x}) = \frac{1}{3}\log_2 x - 1$, respectivamente. Nessa perspectiva, é possível afirmar que, quando uma função exponencial possuir inversa, esta última será uma função logarítmica. Pode-se afirmar também que um cálculo que envolve o logaritmo pode ser transformado em um processo de resolução, usando exponencial como ferramenta.

Numa etapa de **ação**, os estudantes tendem a discutir estratégias para encontrar a função inversa a partir de modelos já conhecidos por eles. A partir de então, entram em

dialética de formulação, trocando informações escritas com esses mesmos modelos pensados por eles, para resolver a situação, no caso, a troca da variável x por y. Além dessa estratégia, os estudantes mobilizam, em seu repertório, o conhecimento referente à definição de logaritmos ($\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$), que deve emergir do debate entre os pares de cada grupo, possibilitando uma elaboração de solução das equações provenientes da troca de variáveis.

Para **validação** do modelo utilizado para solução da situação, os estudantes podem novamente aplicar a mesma estratégia de troca de variável (x por y) nas funções inversas $f^{-1}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\log_3 x - 2$ e $g^{-1}(\mathrm{x}) = \frac{1}{3}\log_2 x - 1$ e encontrar as funções iniciais f (x) e g (x). Nessa perspectiva, conseguem provar que o modelo de resolução é válido e, então, submeter à avaliação dos colegas, justificando a pertinência desse modelo.

Em fase de **institucionalização**, o professor/pesquisador precisa retomar a situação, pontuando os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora, explicitando outras formas de determinar essas características nas funções, como, por exemplo, o modelo gráfico, ao passo que acata ou não as propostas dos estudantes. Deve retomar as propriedades de potência aplicadas à função exponencial e como essas funcionam com a função logarítmica enquanto inversa da função exponencial. É uma etapa importante da institucionalização e que o professor/pesquisador precisa discutir com os sujeitos as justificativas apresentadas por eles, para, enfim, concluir a tarefa, apresentando os conceitos, definições e propriedades válidas.

Variáveis didáticas da atividade 08

01) **Contexto da situação-problema:** para esta atividade, o contexto escolhido é o contexto matemático de duas funções exponenciais. A escolha deste contexto se deu por conta da natureza do problema e da técnica de resolução que se deseja que o estudante desenvolva, a determinação da função inversa de uma função dada. Neste caso, um contexto da realidade, por exemplo, não se justifica quanto aos objetivos da situação.

02) **Os valores numéricos escolhidos:** os valores numéricos do problema são: a base da função e o expoente variável. Escolhemos bases inteiras e expoentes variáveis em termos de uma função do primeiro grau, esta escolha parece ser coerente no sentido de que seja possível para os estudantes elaborar uma estratégia ou técnica para encontrar a função inversa. Se escolhêssemos valores

decimais ou fracionários, poderiam criar uma dificuldade a mais para os estudantes, no entanto, os coeficientes das funções (função afim) expressas nos expoentes poderiam variar em termos de números inteiros, não interferindo muito no processo de resolução/aprendizagem dos estudantes para esta tarefa.

03) **Objeto estudado nesta situação:** função exponencial e sua inversa, função logarítmica.

04) **Questões do problema:** as questões da situação problema são semifechadas, pois desejamos que os estudantes, utilizando suas conclusões, possam inferir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial e vice-versa. Por outro lado, podem estabelecer outras relações que observarem no decorrer da resolução e explicitá-las em linguagem natural.

05) **Uso de TIC:** nesta situação, deixamos o uso de alguma tecnologia de livre escolha dos estudantes, neste caso, apenas o papel e o lápis são suficientes para resolução da tarefa, por esta razão, não indicamos na tarefa o uso de algum tipo de tecnologia digital.

Esperamos que as variáveis escolhidas possam contribuir para que os estudantes desenvolvam uma estratégia de cálculo, a qual lhes permita identificar a função inversa procurada.

A determinação da função inversa da função exponencial tem a importância, no sentido epistemológico, de contribuir para o estudo matemático das funções reais e estabelecer as suas inversas.

Analise *a posteriori* da atividade 08

Com relação à atividade 08, as duplas A e B utilizaram as técnicas e condutas previstas em nossas análises quanto às interações fundamentais com o *milieu*. A dupla A, no entanto, não justificou em linguagem natural as estratégias ou técnicas para realização da tarefa, apenas explicitou a resolução matemática a partir da troca de variáveis. Salientamos que a dupla B apresentou um breve estudo das funções inversas encontradas, algo que não havíamos previsto. Este fato sinaliza o processo de evolução da aprendizagem quanto ao conceito de função exponencial e as suas relações com a função logarítmica. As figuras 31 e 32 apresentam a realização da referida dupla:

Figura 32 – Letra B – dupla B

$g(x)=2.2^{3x-2}$

$y = 2.2^{3x-2}$

$x = 2.2^{3y-2}$

$x= 2.2^{3y}.2^{-2}$

$x= 2^{-1}.2^{3y}$

$x= ½. 8^{y}$

$8^{Y}= 2X$

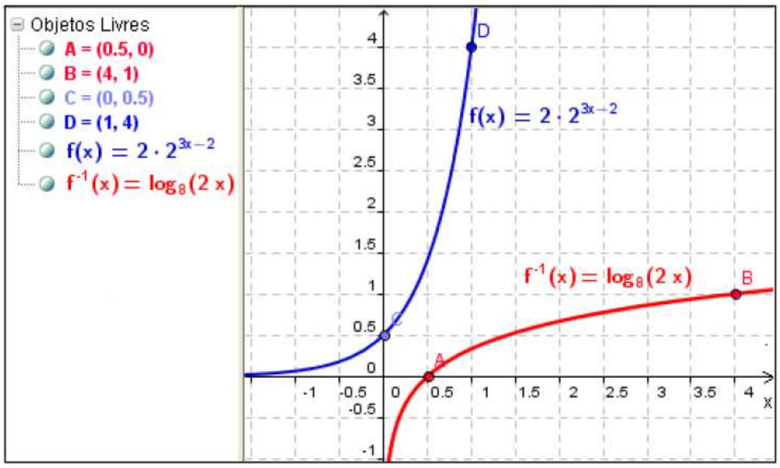
$y=\log_8 2x \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1}(x) = \log_8 2x$

x	$g(x) = 2.2^{3x-2}$
0	0,5
1	4
2	32
3	256

x	$g^{-1}(x) = \log_8 2x$
0,5	0
4	1
32	2
256	3

Fonte: Cópia de tela da produção dos estudantes.

Figura 33 – Letra B – dupla B



Fonte: Cópia de tela da produção dos estudantes.

Além das representações das figuras, tabelas e gráficos, a dupla B também explicou, em linguagem natural, o processo de realização das tarefas e as técnicas utilizadas para achar as funções inversas com os respectivos percursos matemáticos adotados. A dupla B ainda justificou da seguinte forma seu processo de resolução como segue:

> (A) Utilizamos cálculos matemáticos para determinar a função inversa de cada função. Na função inversa, o que era domínio na função original (valores de x) será a imagem na função inversa, e o que era imagem na função original (valores de y), será o domínio. Utilizamos uma planilha no *Excel* para avaliar se realmente os cálculos das duas funções inversas, calculadas anteriormente estão corretos. Utilizamos também o Geogebra para uma visualização dos gráficos. (B) Compreendemos que a função inversa da função exponencial é a função logarítmica. (C)

> No cálculo matemático, utilizamos a técnica de substituição na equação da função, onde o valor de y foi substituído por x nas funções f(x) e g(x), vice-versa. Utilizamos também os conceitos básicos das propriedades da potenciação, sendo a multiplicação e divisão de números com a mesma base. Os conceitos de logaritmos, como por exemplo, se $a^{y}=x$ então $y= \log_a x$log foram aplicados na fase final do cálculo, onde chegamos à função inversa desejada $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$. Na função de logaritmos, conseguimos isolar o valor de y no primeiro termo da equação da função, sendo que y era um expoente nos dois cálculos descritos anteriormente. Em síntese, percebemos que a formação dos novos pares ordenados é obtida pela inversão dos mesmos, originando, para a função inversa, uma nova curva; então associamos a função exponencial, sendo sua inversa a função logarítmica, expresso nas curvas dos gráficos e tabelas de cada uma das funções calculadas e estudas anteriormente.

A análise dessas justificativas apresentadas pela dupla B evidencia indícios que sinalizam a apropriação dos conceitos em jogo na situação e aqueles que vêm sendo trabalhados pelos alunos da dupla.

Com relação à escolha das variáveis didáticas, estas contribuíram para que os estudantes procedessem com uma técnica para encontrar a função inversa. No caso da primeira dupla, os alunos utilizaram uma técnica algébrica de troca de variáveis, usando lápis e papel. A segunda dupla utilizou a mesma estratégia algébrica, no entanto, utilizou o registro gráfico e tabulou para verificar a natureza da função encontrada.

Nessa perspectiva, o uso livre de TIC possibilitou aos sujeitos escolher aplicar o *software* utilizado nas atividades anteriores. Esta iniciativa demonstra que esses estudantes avançaram na manipulação do *software*, anteriormente fator de dificuldade, além disso, usaram esta ferramenta para validar as respostas encontradas.

A partir desses resultados, poderíamos redefinir as variáveis no sentido de indicar o uso da tecnologia *software* Geogebra, redefinindo as questões do problema para uma prova e demonstração, possibilitando, assim, que todos os estudantes realizassem um pequeno estudo da função logarítmica.

A escolha das questões do problema influenciou sobremaneira na proposta de justificativa e registro das estratégias e percurso utilizado, isto é evidenciado não apenas na atividade 08, mas nas atividades da sessão como um todo. A escrita dos estudantes revela que houve uma reflexão dos sujeitos sobre o processo de resolução das tarefas. As duplas, de uma maneira geral, nesta sessão, demonstraram mais aprofundamento e apropriação dos conceitos, tendo atingido os objetivos da tarefa.

Com relação à institucionalização, nesta sessão, não foi possível realizar, porque o tempo expirou, e os estudantes ainda não tinham concluído a tarefa. Neste caso, enviaram as produções pelo ambiente virtual de aprendizagem, AVA 5, da instituição. Apesar da etapa de institucionalização não ter ocorrido, isto não foi fundamental para os resultados apurados, pois, desde a etapa adidática das atividades, os estudantes mostraram-se seguros na construção das tarefas. A intervenção da professora/ pesquisadora foi apenas na explicação do que cada tarefa exigia, o que influenciou positivamente a compreensão dos sujeitos sobre as tarefas.

Do ponto de vista epistemológico, as tarefas contribuíram para ampliar o conceito de função e a análise do comportamento das mesmas. Sob o aspecto sóciocultural, podemos dizer que os estudantes foram incentivados a adquirir uma nova postura frente ao conhecimento matemático e frente à sua própria aprendizagem. A escrita detalhada, justificando os passos desenvolvidos na atividade, demonstrou uma mudança de comportamento dos sujeitos diante do saber, tal comportamento não foi detectado no início da aplicação do experimento. Acreditamos que, nessa perspectiva, houve uma importante contribuição para a formação dos futuros professores, ao menos no que se refere à sua conduta na resolução de atividades.

Globalmente, os dados indicam que as variáveis escolhidas nos deram um aporte para a construção das estratégias necessárias ao processo de aprendizagem da função exponencial de forma mais aprofundada: a análise do comportamento da curva exponencial e a determinação da função inversa. Nesse sentido, os dados demonstram que houve aprendizagem dos sujeitos, dos conceitos propostos nas tarefas, além disso, os estudantes evoluíram no entendimento geral sobre a função exponencial, visto que demonstraram, nas resoluções, superação das dificuldades das tarefas anteriores, como por exemplo, a representação gráfica com o uso de *software*.

4.3.2 Segunda parte da sequência didática

Essa parte do trabalho marca a segunda etapa da sequência didática, a qual comporta a última sessão de ensino. O objetivo geral dessa etapa da sequência é que, a partir de situações propostas, os graduandos possam mobilizar e articular seus saberes didáticos desenvolvidos durante o Estágio Supervisionado, sobre como ensinar o conceito de função exponencial. A análise dessa sessão possibilitará avaliar o que os estudantes aprenderam do conceito matemático trabalhado, sob o ponto de vista didático e matemático. Para analisar os observáveis, apoiamo-nos nas noções de saber docente, mais especificamente, em saberes disciplinares e saberes experienciais.

Identificamos os saberes disciplinares como aqueles que integram a prática docente por meio da formação inicial dos sujeitos nas diversas disciplinas oferecidas pela universidade durante a Licenciatura em Matemática, nesse caso, não somente os saberes matemáticos dos componentes desse núcleo curricular como também aqueles saberes pedagógicos e didáticos provenientes dos demais componentes curriculares. Com relação aos saberes curriculares, de acordo com Tardif (1012), são aqueles categorizados pela instituição escolar como saberes socialmente aceitos como modelos de cultura erudita, estão relacionados ao programa escolar, seus objetivos, métodos e conteúdos, os quais os professores precisam saber e aplicar.

Tardif (2012) também caracteriza os saberes experienciais ou práticos, como aqueles provenientes da prática profissional, a qual desenvolve saberes fundamentados no trabalho cotidiano do professor e no conhecimento de seu meio. Esses saberes surgem da experiência e são por ela validados; são uma espécie de “saber fazer e saber ser”. Todos esses saberes apontados por Tardif (2012) não se consolidam para o professor com a conclusão da licenciatura, ao contrário, é durante a sua atuação na prática que tais saberes vão se consolidando e sendo ressignificados ao longo do tempo.

É importante descobrir em que nível os estudantes desenvolveram os saberes durante a licenciatura, porque estes serão imprescindíveis no início de suas carreiras como docentes. Nesse sentido, é importante perceber como esses sujeitos se relacionam com esses saberes.

Em nosso trabalho, a principal perspectiva é que os estudantes desenvolvam, durante a pesquisa, um processo de aprendizagem satisfatório quanto ao conceito de função exponencial. Nesta parte de nossa pesquisa, avaliaremos os saberes didáticos (disciplinares) relacionados ao conceito de função exponencial. A atividade proposta pode, também, evidenciar saberes didáticos e pedagógicos desenvolvidos na experiência da regência de classe, no estágio curricular supervisionado. Não faremos uma análise sobre os saberes curriculares, por entender que isto extrapola os objetivos da pesquisa, mas tal estudo pode ser desenvolvido em pesquisas futuras e complementares a esta.

4.3.2.1 Quinta sessão

Nessa sessão, os estudantes deverão organizar uma sequência de ensino, para uma turma de 1ºano do Ensino Médio, na qual o saber matemático em jogo é a função exponencial. A natureza da situação exige que os estudantes exponham, por meio de suas produções, como relacionam os conceitos de função exponencial trabalhados no experimento realizado em sala de aula, durante o Estágio Supervisionado.

Na atividade 09, propomos, na situação 01, um problema comum do contexto da educação básica. O objetivo é provocar, entre os estudantes, uma discussão que gira em torno da concepção que esses sujeitos trazem dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, além de explicitar a sua experiência em sala de aula. O processo de troca e debate deve promover a articulação entre os saberes relacionados ao conteúdo e os saberes da experiência de sala de aula. Para resolução das atividades, os estudantes poderão consultar os materiais que acharem necessários, como livro didático, textos da internet, PCN etc.

Na situação-problema 02, os estudantes deverão propor uma abordagem didática para o objeto matemático função exponencial, em forma de sequência de ensino, com o objetivo de minimizar os problemas do contexto escolar apresentados na atividade.

Atividade 09

Situação 01: Os alunos da Escola João Paulo, uma escola municipal, situada na periferia da cidade de Barreiras-Bahia, estão sentindo muita dificuldade com Matemática, as notas da maioria da turma estão abaixo da média seis (6,0), além disso, os alunos relatam que as aulas são chatas, cansativas, que sua professora Patrícia escreve o tempo todo no quadro, e que eles ficam copiando e não entendem assunto. A professora Patrícia alega que a turma "não quer nada" e conversa o tempo inteiro, não deixando ela explicar.

(A) Como você analisa o problema desta classe?
(B) Quais sugestões de intervenção pedagógica você sugere para a professora Patrícia?

Situação 02: A professora Patrícia deseja trabalhar com a função exponencial, mas muitos dos alunos da turma têm dificuldade com funções e com representação gráfica de funções de uma forma geral.

(A) Ajude a professora Patrícia a organizar uma sequência de ensino para função exponencial. Preveja o tempo que será utilizado, as atividades que serão desenvolvidas, textos utilizados, materiais etc.
(B) Explique para a professora Patrícia como ela deve proceder. Elabore um roteiro para a professora.
(C) Quais os seus objetivos?
(D) Que atividade foi proposta e por que a escolha desta atividade? Descreva a atividade detalhadamente, com sua proposta de resolução.
(E) Como você acha que os alunos vão proceder durante a aula? Descreva detalhadamente
(F) E no decorrer da atividade, você consegue prever como os alunos a farão? Explique e justifique. Você acha que a sua proposta vai gerar interesse por parte dos alunos e modificar a realidade da turma? Por quê?

Para dar conta de responder a atividade proposta, o conhecimento matemático mínimo levantado é a definição de função exponencial adaptada do livro texto do ensino superior: "Sejam *a* e *b* constantes reais, uma função exponencial em *x* é uma função que pode ser escrita na forma $f(x) = a.b^x$, onde a é diferente de zero, b é positivo e $b \neq 1$. A constante a é o valor de f quando $x = 0$, e b é a base" (DEMANA *et al*., 2009, p.127).

Quanto à representação gráfica, a função pode ser crescente ou decrescente, ou seja, a curva pode ter um crescimento ou decaimento exponencial, conforme modelo de gráfico apresentado no capítulo 1.

Esperamos que os estudantes sejam capazes de levantar as propriedades e definições relacionadas ao conceito de função exponencial trabalhadas durante o experimento, explicitando esses conteúdos na sequência de ensino.

Sobre as situações da atividade 01, acreditamos ser pertinentes para que os estudantes, ao se debruçarem sobre ela, evidenciem o conhecimento que já possuem e, a partir da reflexão e debate, (re) construam os saberes sobre o conceito de função exponencial, elaborando adaptações em uma perspectiva didática. Esperamos que os estudantes, a partir da resolução da atividade, estruturem uma sequência de ensino e, por meio dela, relacionem os saberes disciplinares sobre função exponencial, inclusive com relação à experiência de sala de aula no Estágio Supervisionado.

Os estudantes poderão organizar um plano de aula, evidenciando os objetivos de ensino, o conteúdo matemático e a metodologia utilizada. Poderão também apresentar as competências e habilidades que desejam que sejam desenvolvidas pelos seus alunos, baseados nos documentos oficiais do Ensino Médio, ou ainda elaborar uma sequência didática com situações-problema sobre a função exponencial.

Sobre a proposta de atividades, acreditamos que os estudantes, com base na experiência das atividades anteriores e do experimento, tendem a elaborar atividades que cumpram alguns tipos de tarefas e técnicas semelhantes àquelas que apresentamos no capitulo 01, e que julgamos importantes no tratamento da função exponencial, para os alunos do Ensino Médio. Inicialmente, pensamos em analisar a atividade 09 a partir das propostas de atividades sugeridas pelos estudantes, em termos das tarefas e técnicas, propostas na análise dos livros didáticos, no capítulo 1.

Com relação aos saberes desenvolvidos na regência de classe durante o estágio e nos componentes da graduação, acreditamos que, na descrição e explicação de como funcionará a proposta de ensino (resposta da letra B, situação 02) e na descrição de como os alunos poderão se comportar (reposta da letra C, situação 02), esses saberes serão evidenciados, pois os estudantes tendem a explicitar suas ideias a partir da experiência que possuem tanto do Estágio Supervisionado como de outras experiências de sala de aula, em que atuaram como professores. Além disso, é possível que utilizem o livro didático como auxílio na elaboração de atividades.

Após a aplicação do experimento, percebemos, na produção dos sujeitos, que eles não indicaram as atividades para a sequência de ensino por eles desenvolvida, ou seja, procederam de uma forma totalmente descritiva das ações que pensaram para responder às questões da situação proposta. Nesse sentido, retomamos estas construções para analisá-las.

Análise da Atividade 09

De acordo com a natureza da situação proposta na atividade, os estudantes forneceram as respostas em língua natural em forma de texto. Para representar os protocolos e as informações produzidas pelos sujeitos (dados da pesquisa), buscamos um recurso em que fosse possível visualizar os conceitos e as concepções mobilizadas pelos estudantes na resolução da atividade 09. Nesse sentido, utilizamos os mapas conceituais como uma ferramenta capaz de evidenciar a essência das construções dos estudantes. Nos mapas, as informações aparecem a partir de palavras-chave e frases de ligação, sem perder o sentido daquilo que os estudantes escreveram.

Com essa perspectiva, mapeamos esses elementos a partir das respostas textuais fornecidas pelos estudantes. Para elaboração dos mapas, utilizamos a ferramenta de construção de mapas conceituais *Cmap Tools*, disponível na *internet* gratuitamente.

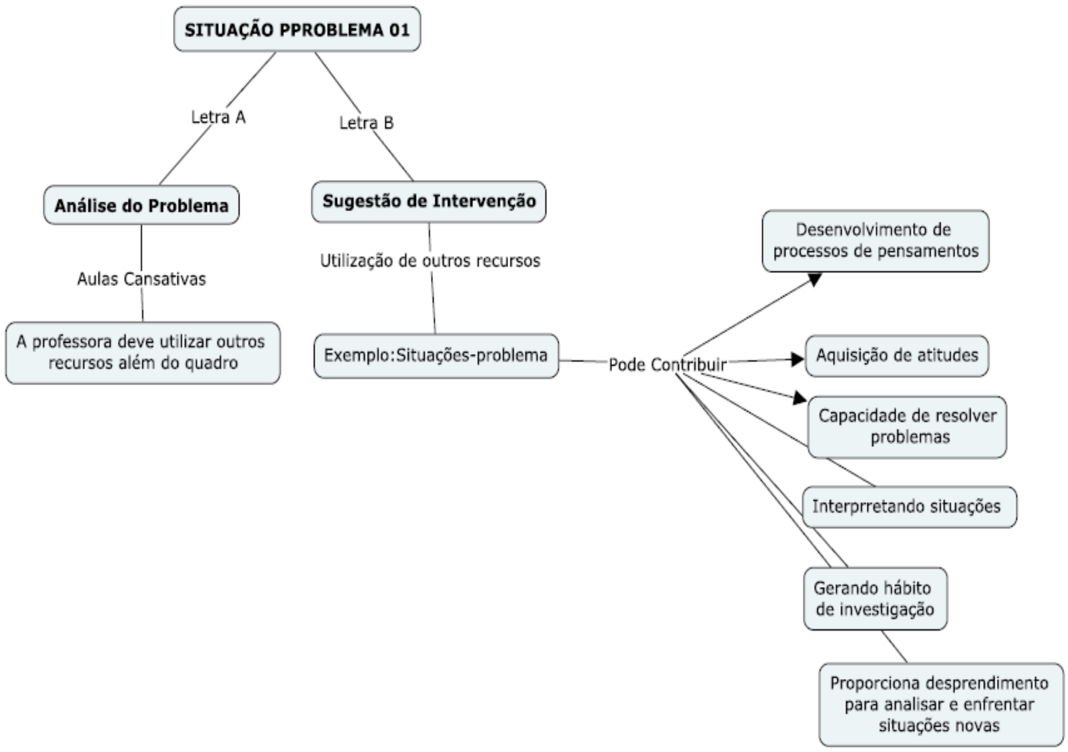
No primeiro (figura 33) e o no segundo mapa (figura 34), o objetivo é levantar todos os aspectos apontados pela dupla A e pela dupla B, respectivamente, para a situação 1, onde tomamos duas vertentes de análise indicadas com duas setas no mapa: uma é como o sujeito analisa o problema (letra A), e a outra são as sugestões de intervenção que ele propõe (letra B).

A dupla A, em sua resposta, não apresentou nenhuma justificativa para analisar o problema da professora Patrícia, deixa evidente que a falta de recursos didáticos pode ser uma justificativa para o problema. Nessa perspectiva, a dupla acredita que o uso de resolução de situações-problema pode promover as mudanças necessárias na realidade dos sujeitos.

Tais mudanças são expressas pelas setas indicadas pela dupla A no mapa (figura 33), saindo da palavra “pode contribuir”: desenvolvimento de processos de pensamentos, aquisição de atitudes, capacidade de resolver problemas, interpretação de situações-problema, hábito de investigação, desprendimento para analisar e enfrentar situações novas.

Estas respostas, apresentadas pela dupla A, indicam que os estudantes acreditam que apenas o uso de novos recursos pode modificar a realidade dos sujeitos envolvidos no problema. A análise realizada por eles, conforme mostramos no mapa, (figura 34) é superficial e não mostra elementos de investigação do problema.

Figura 34 – Mapa conceitual da situação 01 – dupla A



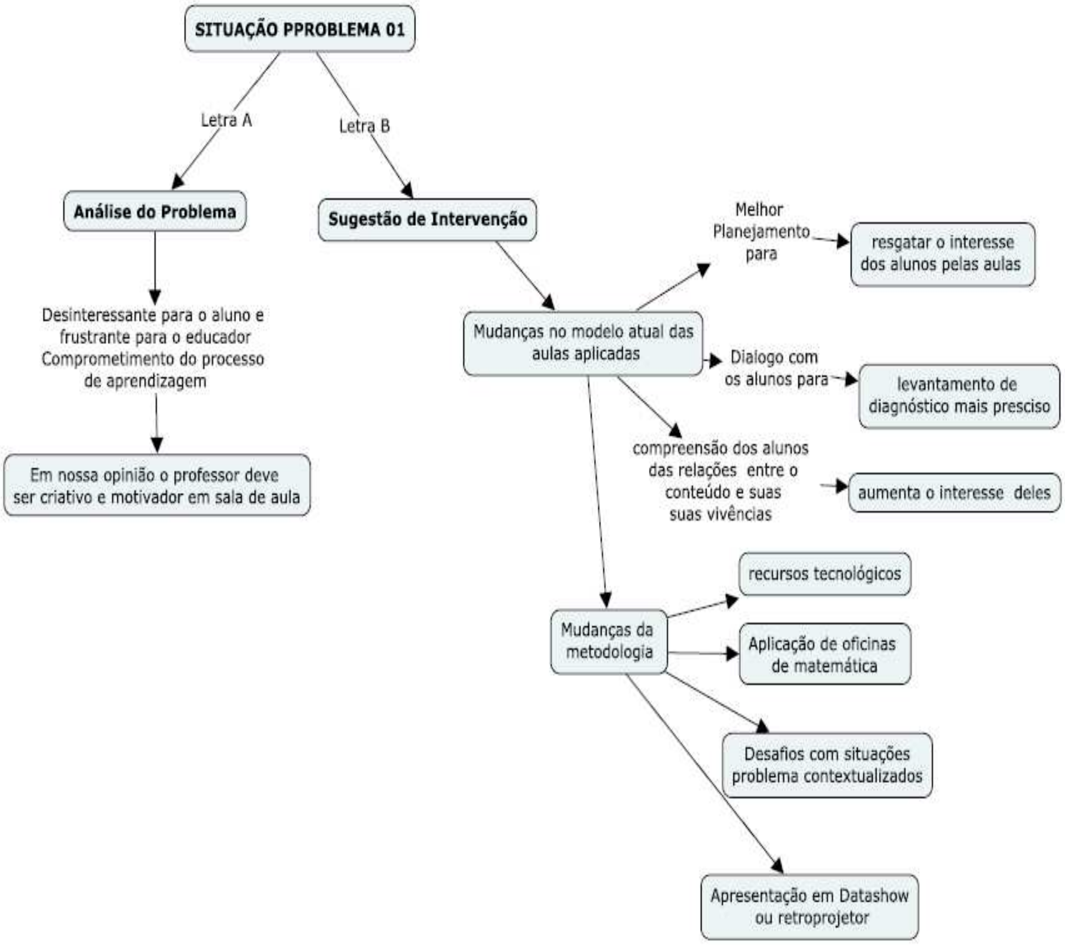
Fonte: Elaborado pela autora, de acordo com os dados desta pesquisa (2015).

Acreditamos que apenas o uso de situações-problema ou resolução de problemas, conforme indicado pelos estudantes, não é suficiente para promover tais mudanças no comportamento dos alunos frente ao saber matemático. De fato, a intervenção da professora Patrícia deve ir muito além de apenas aplicar resolução de problemas em sala de aula, como foi indicado pela dupla A.

No segundo mapa (figura 35), apresentamos as respostas da dupla B. Na primeira seta à esquerda, está indicado o que a dupla apontou como análise para o problema. Neste caso, a dupla relata a sua constatação diante do problema: “desinteressante para o aluno e frustrante para o educador, comprometendo o processo de aprendizagem", a dupla aponta, ainda, qual a atitude que deve ser incorporada pelo professor: "em nossa opinião, o professor deve ser criativo e motivador em sala de aula". Por outro lado, a dupla nota mudanças na metodologia de ensino e no "modelo das aulas".

Na segunda seta, à direita, indicada como letra B, evidenciamos as respostas da dupla para a letra B. Nesta seta, a dupla mostrar a sua sugestão de intervenção para solução do problema da professora Patrícia. Este grupo de estudantes traz uma série de possibilidades para melhorar as aulas da professora Patrícia, indicando a mudança na metodologia, observa quais ganhos poderão ocorrer com tais mudanças.

Figura 35 – Mapa conceitual da situação 01 – dupla B



Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os dados desta pesquisa (2015).

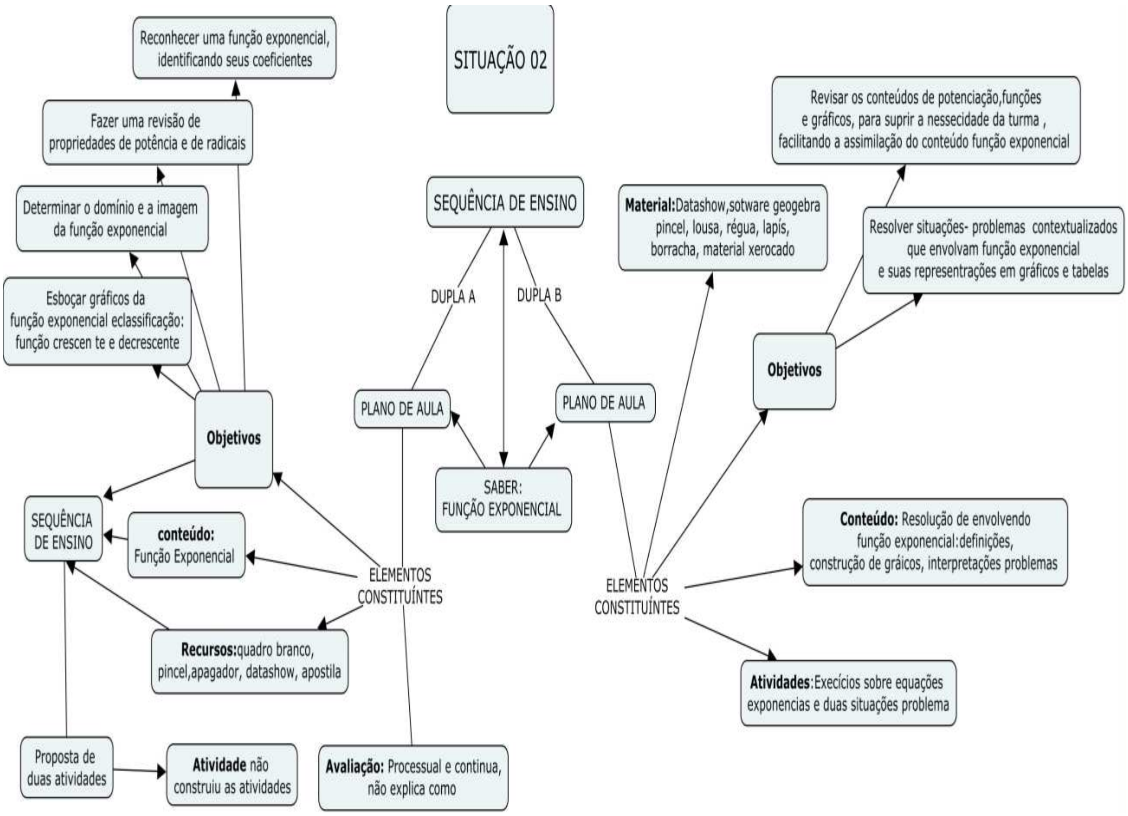
Destacamos três pontos indicados pela dupla para metodologia: "recursos tecnológicos, aplicação de oficinas de Matemática, desafios com situações-problema contextualizados". Estas considerações, em primeiro momento, indicam que os estudantes sabem, *a priori*, quais as iniciativas devem ser incorporadas pelo professor para proporcionar uma mudança no comportamento dos alunos frente ao contexto da sala de aula e ao saber matemático.

A dupla apresenta, também, o diálogo com os alunos e o planejamento como atitudes que devem ser incorporadas pelo professor para mudar o "modelo das aulas". No caso do planejamento, os estudantes observam que essa atitude resgata o interesse dos alunos pelas aulas, e que o diálogo com os alunos possibilita um diagnóstico mais preciso. É perceptível, pelas afirmações dos sujeitos, que estes detém certos saberes docentes, os quais podem ter sido desenvolvidos nas atividades de regência de classe durante o Estágio Supervisionado, no entanto, esses saberes parecem estar relacionados ao conhecimento pedagógico adquirido.

Nesta situação-problema, ficam evidentes algumas concepções pedagógicas dos estudantes quanto ao trabalho da sala de aula. Acreditamos que tais concepções estão vinculadas ao trabalho pedagógico realizado por esses acadêmicos em turmas de Ensino Médio, durante o Estágio Supervisionado. Podemos inferir alguns conceitos que emergem da fala e da escrita desses sujeitos (dupla B): planejamento, interação professor/aluno, interação aluno/conteúdo, metodologia de ensino e recursos (uso de tecnologias). A dupla A focaliza o problema pedagógico na questão de recursos e resolução de situações-problema como uma metodologia de ensino.

Com relação à situação 2, explicitamos os dados das duas duplas em um único mapa, contendo as respostas fornecidas pelos estudantes em forma de palavras-chave e frases de ligação. O objetivo é visualizarmos as informações e identificarmos as concepções e conceitos relacionados aos saberes desenvolvidos no Estágio Supervisionado. As setas da esquerda indicam as respostas dos estudantes da dupla A, e as setas da direita, as respostas dos estudantes da dupla B.

Figura 36 – Mapa conceitual da situação 02



Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os dados desta pesquisa (2015).

Na primeira seta, as duas duplas identificaram o elemento “plano de aula” relacionado ao saber matemático “função exponencial”, embora a questão solicitasse uma sequência de ensino. Seguindo a sequência das setas da esquerda, as produções da dupla A, os elementos constituíntes do plano de aula elaborado por esses estudantes, são: objetivos, conteúdo, recursos e avaliação. No ítem objetivos, os estudantes apontam aqueles relacionados com a construção de parte do conceito da função expoenencial, além disso, confundem os objetivos de ensino com as estratégias do professor (como, por exemplo, a sequência didática como objetivo e fazer uma revisão das propriedades de potência). Com relação à ideia de sequência didática, afirmam que deve ter uma proposta de atividade, mas não apresentam nenhuma atividade, tampouco discriminam como iriam gerenciar a sala de aula e a construção do saber junto a seus alunos. Apontaram como recursos quadro branco e apagador, *datashow*, apostila, porém não construíram nenhum tipo de apresentação em *slide* nem material de apoio ao processo de ensino, nem roteiro do conteúdo. Por fim, identificam o tipo de avaliação, processual e contínua, mas não explicam como será desenvolvida.

A dupla B não se diferenciou muito da dupla A, identificou como elementos constituítes de um plano de aula: objetivos, conteúdo, material e atividades. Não colocaram o ítem avaliação, também confundem estratégia de ensino com objetivo.

A partir da análise do mapa da figura 35 e das respostas fornecidas pelas duplas nas demais questões (itens B, C, D, E e F) concluímos que os estudantes, em sua abordagem de intervenção, descrevem, planejam e estruturam o trabalho de sala de aula sempre sob uma perspectiva geral. Em termos pedagógicos, é visível que não existem, em seu repertório de saberes, aqueles saberes didáticos, voltados para o ensino-aprendizagem do conteúdo matemático.

Apesar de relatar que iriam desenvolver atividades contextualizadas, a dupla A, por exemplo, não apresenta nenhuma atividade que seria desenvolvida. Além disso, não evidencia as especificidades próprias do ensino de Matemática, o que revela a falta de conhecimento da didática da Matemática. Por outro lado, os saberes pedagógicos evidenciados no plano de aula revelam-se inconsistentes, ou seja, os sujeitos têm dificuldade de identificar e diferenciar alguns conceitos tais como: objetivos de ensino e metodologia de ensino e atividade a ser realizada pelo aluno, especialmente a dupla B. Além disso, demonstram não saber ao certo o que seja uma sequência didática.

Quanto a prever o comportamento dos sujeitos (item E e F), as duplas falam da motivação para o estudo, para assistir às aulas ou, em termos de facilidade ou dificuldade, na resolução das tarefas. A discussão da dupla B, a respeito de como ajudar a professora Patrícia fica sempre no plano descritivo geral de uma aula expositiva: primeiro, é apresentado o conteúdo, depois, são aplicadas atividades. A dupla B coloca exercícios sobre equações exponenciais conforme disseminados nos livros didáticos e propõe uma situação-problema de crescimento populacional, prevendo que o professor possa discutir a solução da situação proposta.

Percebemos que, em algum nível, os estudantes desejam reproduzir parte do trabalho desenvolvido com eles na pesquisa. Isto fica evidenciado na escrita da dupla A quando responde o item D:

> A atividade proposta para a sequência didática são situações-problema que envolvem o cotidiano. A tarefa é fazer a leitura das questões, interpretando os dados das mesmas, trabalhando com a equação exponencial, de forma a encontrar a resolução correta em duplas. Depois das resoluções feitas, cada dupla apresentará para toda a turma suas conclusões e dificuldade no decorrer do processo.

Percebe-se, nessa fala, o desejo de trabalhar com situações-problema, mas a dupla não tem uma concepção adequada do que venha a ser uma sequência didática, pois a confunde com plano de aula e sequência de ensino. Esta constatação evidencia que o trabalho da pesquisa influenciou pouco no comportamento dos sujeitos, na perspectiva de sua visão diante do saber a ser ensinado.

Por outro lado, a dupla A relata, nos demais itens, que os alunos deverão ter dificuldade com resolução de problemas, mas não constrói e nem apresenta tais problemas. A dupla afirma que o papel do professor é ser mediador, além disso, coloca que é importante que os alunos falem sobre o que fizeram e apresentem seus resultados oralmente: "no caso da apresentação dos resultados oralmente, desenvolvem-se outras habilidades cognitivas que auxiliam no processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos".

A escrita dos estudantes revela que eles sabem da existência de habilidades cognitivas que possam influenciar no processo de aprendizagem, mesmo não explicando como isto funciona. Inferimos que, em algum nível, estes sujeitos sinalizam entender o processo de aprendizagem dos seus alunos.

Globalmente, os sujeitos não conseguiram produzir as respostas esperadas, ou seja, os dados produzidos (respostas fornecidas) por eles revelam-se incompletos e inconsistentes do ponto de vista de uma resposta satisfatória, prejudicando uma análise mais profunda dos dados.

Nessa perspectiva, destacamos alguns aspectos positivos com desenvolvimento da pesquisa e a aplicação da sequência didática: o engajamento espontâneo dos sujeitos frente à resolução das tarefas; a construção do conhecimento matemático sobre função exponencial, tendo se efetivado com êxito; o reconhecimento, por parte dos sujeitos, da validade e importância da intervenção da pesquisa, sobretudo, em relação à metodologia. Esses aspectos e tantos outros, que serão apontados em nossas discussões gerais, não foram suficientes para interferir nos saber didático-pedagógico desses sujeitos, pois, aparentemente, eles não estabeleceram uma relação entre a experiência de aprendizagem vivenciada por eles e uma suposta proposta de ensino, a ser desenvolvida em classes de Ensino Médio.

Supúnhamos, no decorrer do experimento, que os estudantes pudessem tentar reproduzir uma proposta de intervenção, ao menos, semelhante à aplicada com eles, mas nossa suposição não se efetivou. Nossos dados não são capazes de responder ou justificar o ocorrido.

Concluímos que os estudantes parecem ter se apropriado dos conceitos trabalhados sobre função exponencial, as últimas atividades da sequência didática revelam isto. No entanto, a sequência proposta parece não ter influenciado a postura/atitude desses sujeitos em relação ao ensino e à aprendizagem de conceito de função exponencial, ficando os estudantes tecendo discursos genéricos sobre o "ensino e a aprendizagem de...". As atitudes deles frente às últimas atividades (sessão cinco) sinalizam que eles não incorporaram os aspectos didático-pedagógicos do trabalho de formação realizado.

Diante do problema exposto, indicamos uma pesquisa futura que possa promover o desenvolvimento de certos saberes docentes ,os quais não foram possíveis se efetivar com o nosso trabalho.

DISCUSSÕES GERAIS: O PAPEL DO REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Em nossa pesquisa, concluímos que a escolha do referencial teórico articulado à metodologia de Engenharia Didática teve como papel fundamental explicitar os fenômenos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da função exponencial, a partir das escolhas de pesquisa pré-definidas nas análises preliminares. Os pressupostos teóricos que nortearam o processo da pesquisa se mostraram cruciais para fazer emergir os fenômenos que desejávamos analisar.

Neste caso, a TAD se configura como parte do nosso referencial teórico, quando possibilita clarificar os tipos de situações-problema, em termos de tarefas ou conjunto de tarefas, que foram utilizadas na sequência didática, a partir da análise dos livros didáticos realizada.

Percebemos que foi muito significativo para a pesquisa realizar a análise dos livros didáticos do PNLD (2012). As análises, sob o ponto de vista da TAD, evidenciaram aspectos da abordagem dos conceitos associados à função exponencial, o quadro de tarefas adotado por cada livro analisado e as técnicas associadas às tarefas, bloco prático técnico (t/τ) e o bloco tecnológico teórico (θ, ϕ). Esses elementos trazem uma visão ampla dos livros no que se refere à função exponencial, possibilitando um novo olhar dos professores do Ensino Médio sobre os livros didáticos e uma forma diferente de analisá-los.

Além disso, esse estudo poderá auxiliar os professores que se interessam pela análise do livro didático, no âmbito da função exponencial, indicando elementos para construção de novas análises de livros didáticos para outros temas de Matemática no Ensino Médio.

Por outro lado, a TAD possibilitou vislumbrar um caminho que, embora não tenhamos adotado, poderia ter sido trilhado durante a pesquisa, no sentido de uma análise praxeológica, em termos de tarefas aplicadas na sequência didática e técnicas utilizadas pelos estudantes, na resolução dessas mesmas tarefas. Percebemos, também, nas etapas de formulação e validação, enquanto dialéticas da TSD, o bloco tecnológico teórico usado pelos estudantes para justificar cada técnica por eles utilizada. Não discutimos esses aspectos dos dados coletados (produções dos sujeitos), no entanto, propomos a elaboração de um artigo que possa complementar nossas análises.

Na análise do comportamento dos sujeitos frente às atividades, percebemos um processo de evolução na superação das dificuldades iniciais apresentadas pelos estudantes na resolução das situações-problema propostas. Nesse sentido, ao final da etapa de experimentação, foi possível perceber uma mudança de comportamento dos estudantes frente ao saber em jogo (função exponencial), em diferentes aspectos desse saber matemático, tais como: representação algébrica, gráfica e tabular de uma função exponencial; identificação da lei geral de formação de uma função exponencial de base qualquer e de base e; resolução de uma situação-problema envolvendo o modelo da função exponencial.

As diferentes interações realizadas pelos estudantes com esse saber e o meio – com o objetivo de solucionar as situações-problema propostas, e todo o funcionamento do dispositivo experimental desenvolvido na engenharia didática de forma satisfatória – atestam que, de uma maneira geral, os nossos objetivos de pesquisa foram alcançados.

Nessa perspectiva, a TSD trouxe uma contribuição imprescindível à nossa pesquisa, permitindo evidenciar os seguintes fenômenos na conduta dos sujeitos: diferentes formas e estratégias matemáticas para resolver as situações, dificuldades com manipulação do *software*, dificuldade de manipulação do registro gráfico da função exponencial, falta de associação por parte dos sujeitos, entre os saberes matemáticos e os saberes didáticos.

Além de evidenciar os fenômenos que desejávamos perceber e analisá-los, a TSD nos auxiliou na percepção de aspectos referentes aos processos de ensino e de aprendizagem (promovidos pela pesquisa) sobre a função exponencial, que, *a priori*, não haviam sido levantados. Relatamos esses resultados a seguir.

Resultados da pesquisa com relação às hipóteses de pesquisa

Retomando as nossas hipóteses: (I) os estagiários da Licenciatura em Matemática não dispõem, em seu repertório cognitivo, de forma consolidada, do conceito de função exponencial; (II) uma proposta de formação com base em situações de aprendizagem contribuirá na construção e consolidação de conhecimentos/saberes referente à função exponencial.

Concluímos, no que se refere à hipótese I, que as dificuldades apresentadas pelos estudantes, durante o desenvolvimento da sequência didática, reafirmam o fato de não ter disponível, em seu repertório cognitivo, de forma consolidada, o conceito de função exponencial; no entanto, este repertório é ampliado devido à intervenção da pesquisa.

Com relação à hipótese (II), confirmamos a possibilidade de construção e ampliação do conhecimento matemático sobre a função exponencial, mas refutamos a ideia de consolidação de conhecimentos/saberes. Conforme definimos "conhecimento/saberes sobre a função exponencial" em nosso estudo, como sendo uma composição do conhecimento matemático aliado ao conhecimento didático sobre a função exponencial, percebemos que, mesmo após a etapa de experimentação da pesquisa, o conhecimento didático sobre função exponencial não se consolidou.

Toda a estruturação do trabalho de experimentação teve como foco o desenvolvimento do conhecimento matemático sobre a função exponencial, como era previsto em nossos objetivos.

Inicialmente, conjecturamos a possibilidade de que nossa pesquisa pudesse contribuir para desenvolver os saberes docentes, junto aos estudantes, sobre a função exponencial; no entanto, o tempo disponível para a pesquisa foi um fator limitador que nos levou a abandonar este objetivo. Por outro lado, nossos dados evidenciaram os saberes docentes que os estudantes mobilizaram durante a aplicação da sequência didática, deixando aberta a possibilidade de novas análises.

Em relação a este ponto, a nossa pesquisa avança em relação às pesquisas visitadas na revisão de literatura sobre função exponencial: Brucki (2011), Angiolin (2009), Araújo (2005) e Dominoni (2005) e Pereira (2010), no sentido que traz contribuições para a formação inicial dos futuros professores no âmbito dos saberes docentes. A pesquisa aponta certos saberes constituídos pelos sujeitos ao longo do curso de Licenciatura em Matemática evidenciados em termos do estudo da função exponencial, a partir da experiência do Estágio Supervisionado. Estes resultados nos indicam a necessidade de pesquisas futuras, no intuito de ampliar o estudo do objeto função exponencial na perspectiva da construção de saberes docentes.

No tópico referente aos resultados da pesquisa, evidenciamos alguns saberes docentes detectados durante o experimento, mas reconhecemos que nossa pesquisa teve como objetivo o desenvolvimento desses saberes docentes. Por outro lado, necessitaríamos de uma nova análise dos dados para identificar se dos saberes docentes apresentados/mobilizados pelos sujeitos, alguns deles foram construídos durante a nossa pesquisa, no processo de experimentação.

Podemos afirmar que, a partir das construções dos estudantes durante a aplicação da sequência didática (etapa de experimentação), aconteceram mudanças significativas no comportamento desses sujeitos frente às atividades e às suas relações com o saber matemático (função exponencial). Esses elementos identificados conjuntamente respondem qualitativamente à nossa questão de pesquisa: como organizações didáticas interferem na construção de conhecimentos/saberes dos estagiários de licenciatura em Matemática, sobre o conceito de função exponencial?

Esta afirmação é coerente na medida em que apresentamos um conjunto de resultados obtidos dos procedimentos metodológicos (análises preliminares, análise *a priori*, análise *a posteriori* e validação) realizado na Engenharia, com objetivos bem delineados. Estes resultados estão intimamente ligados às mudanças provocadas nos sujeitos, características da aprendizagem e do processo de validação interna, previstos na Engenharia Didática articulada com os fundamentos da TSD.

Organizamos os resultados da pesquisa em um conjunto de conclusões/reflexões, que retratam as mudanças percebidas no comportamento dos sujeitos frente ao saber matemático (função exponencial). Esses resultados se configuram da forma como apresentamos em função das escolhas didáticas realizadas na etapa de construção das situações didáticas e das características das situações em termos do que Brousseau (1986) define na TSD.

Um primeiro aspecto que levantamos foi a dificuldade dos sujeitos sobre a interpretação de situações-problema, em linguagem natural, e a dificuldade de justificar por escrito seus processos de resoluções das atividades, pois, inicialmente, demonstraram resistência nesta escrita, devido à falta de hábito de realizar este procedimento. Estas dificuldades foram superadas nas etapas adidáticas das situações: as constantes interações dos estudantes com o *milieu*, principalmente, nas etapas de ação e validação, em que os estudantes realizavam a leitura das situações-problema por várias vezes, e discutiam com os colegas a construção da solução, a busca por uma justificava, prova e/ou validação para suas construções, melhoraram a capacidade de entendimento das situações e promoveram um avanço na capacidade de escrita dos sujeitos sobre seus próprios processos. Esses avanços são evidenciados nas últimas produções realizadas na sessão quatro.

Neste caso, as situações que solicitavam dos sujeitos alguma justificativa para suas respostas possibilitaram aos estudantes a submissão a um processo de reflexão sobre a própria aprendizagem. A partir do segundo encontro, estudantes se mostraram também mais engajados na proposta da pesquisa.

A propósito da confusão que os estudantes faziam entre o modelo da função exponencial e o modelo da função linear, observamos que, a partir da resolução das atividades propostas, esta dificuldade não era apenas pelo fato de a representação algébrica das duas funções serem "parecidas", $\boldsymbol{ax}$ *e* $\boldsymbol{a^x}$, como supusemos inicialmente. Mas, sim, por uma dificuldade mais profunda, que envolve o desconhecimento do conceito de função afim e linear.

Na resolução das atividades iniciais, sobre função afim e linear, os estudantes não conseguiram estabelecer relações entre um modelo de função linear ou afim com as situações-problema. O conceito utilizado e justificado por eles foi o de proporcionalidade para solução dessas atividades, obtendo uma resposta satisfatória. Somente após as sucessivas etapas de institucionalização, os sujeitos começam a estabelecer as relações entre as situações-problema com o modelo da função afim e linear.

Nessa perspectiva, o nosso estudo contribuiu para que os estudantes percebessem a diferenciação entre a função exponencial, a função afim e a linear. No entanto, não descartamos a possibilidade da realização de um estudo sobre a função afim e função linear, visto que as dificuldades dos estudantes com estas funções vão muito além de uma simples confusão de expressão, requer um estudo mais aprofundado para esse fim, o que não era nosso objetivo.

Concluímos que os estudantes não dominam vários dos conhecimentos prévios, estruturantes e organizadores de um quadro mínimo de conceitos, ou em termos de domínio de técnicas para determinadas tarefas, por exemplo: resolver um sistema de equações e inequações do primeiro grau, compreender o conceito de par ordenado, escalas e resolver equações. São conhecimentos necessários para a manipulação matemática com funções exponenciais ou a função afim. Os estudantes demonstraram certo grau de fragilidade em seu repertório cognitivo sobre esses temas.

De acordo com os resultados da análise dos dados coletados, estes estudantes mobilizam conceitos em um nível que consideramos muito básico para o estagiário da licenciatura, já em uma etapa de conclusão de curso. Ou seja, o nível de conhecimentos que, inicialmente, eles mobilizam, poderia ser comparado com o de um estudante do Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano); no entanto, o desenvolvimento da sequência didática promoveu certo amadurecimento dos estudantes diante dos seus processos de aprendizagem, no sentido de perceber que precisam investir mais no conhecimento matemático. Esta conclusão baseia-se nos diferentes relatos explicitados pelos estudantes sobre as atividades promovidas pelo projeto de pesquisa.

Com relação aos objetos ostensivos manipulados pelos estudantes, destacamos a representação do número $\boldsymbol{e}$, em forma de tabela, e a associação com a sua representação algébrica, definida por: $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. Os estagiários, apesar de demonstrar dificuldade em manipular o *software Excel*, inicialmente, conseguiram superar tal dificuldade por meio das interações com o *milieu* (sucessivas tentativas e erro, novas tentativas e discussões com seus pares), a partir de então, conseguem relacionar as diferentes formas de representação do número $\boldsymbol{e}$, tabular e algébrica, inclusive articulando com a expressão algébrica adaptada para o uso do *software*, [$(\mathbf{1}+\mathbf{1}/\boldsymbol{t})$ ^ **t**].

Os estudantes também demonstram, na quarta sessão, facilidade em transitar com diferentes representações da função exponencial (gráfica, algébrica, tabular, linguagem natural), embora este não tenha sido o nosso objetivo fundamental. Estes resultados contribuem no processo de superação das dificuldades indicadas no trabalho de Dominoni (2005) sobre a articulação de diferentes registros de representação para a função exponencial.

Encontramos muita dificuldade em trabalhar com o tópico que chamamos de transformações de funções exponenciais, no qual os estudantes deveriam representar graficamente as transformações da função definida por $f(x) = e^{x}$ em outras funções, como, por exemplo, a função definida por $g(x) = e^{2x}$. Consequentemente, os estudantes também tiveram dificuldade durante o experimento, na realização das atividades desse item.

Refletimos que, na etapa de construção das situações de aprendizagem e na análise *a priori*, não previmos adequadamente e não testamos adequadamente, na análise matemática, o dispositivo experimental com o *software*, fato que ocasionou os problemas relatados. Por outro lado, os estudantes poderiam ter tentado construções com lápis e papel, ou ainda transformações algébricas, mesmo que fornecessem resultados provisórios. No entanto, não houve estas tentativas por parte dos sujeitos. Esse fenômeno pode ser explicado pelo que Brousseau (1996, p. 69) coloca como "um saber inacessível a todos os alunos por uma adaptação muito reduzida a uma situação fundamental basicamente correta".

Entendemos que os sujeitos não se adaptaram à situação proposta. Isso pode ter ocorrido por diversos fatores; desde as limitações da pesquisa, já apresentadas na estruturação da situação, como também por outros fatores, como, por exemplo, obstáculos epistemológicos, ou seja, dificuldades de acessar o novo conhecimento em função do conhecimento já adquirido, mas mal adaptado à situação.

No caso, em nosso experimento, não conseguimos evidenciar o que causou nos estudantes esta inadaptação à situação e total apatia na resolução da atividade. O que ficou claro é que a situação foi inacessível aos sujeitos, impossibilitando que eles interagissem com o *milieu* na busca da solução. Por estas razões, indicamos uma nova aplicação dessa atividade, sendo a mesma reestruturada, em termos da situação didática, de forma que seja acessível aos sujeitos, levantando, *a priori*, possíveis comportamentos além do funcionamento do dispositivo experimental com o *software*.

No que se refere aos conhecimentos sobre logaritmos, os estudantes demonstraram certo domínio sobre este objeto matemático, o que facilitou a compreensão da atividade 05, na terceira sessão. Também nesta situação, indicamos uma reaplicação da atividade, visto que, embora tenhamos atingindo os objetivos de ensino, a natureza da situação não levou os estudantes ao tipo de resolução que desejávamos (solução gráfica). Os estudantes, por meio da manipulação dos logaritmos, solucionaram a situação-problema sem o uso do gráfico. Neste caso, a situação-problema deveria ter sido estruturada de forma que a única solução possível fosse a solução gráfica. Por outro lado, os estudantes demonstraram certas dificuldades com o uso de escalas na representação gráfica, ainda assim, conseguiram completar os objetivos das atividades após a etapa de institucionalização.

Um ponto que consideramos significativo no processo de avanço para consolidação dos saberes matemáticos sobre a função exponencial foi o comportamento dos estudantes frente às atividades que articulavam as transformações algébricas da função exponencial, a determinação da função inversa (função logarítmica) e a representação gráfica, utilizando o *software* aliada à análise do comportamento da curva exponencial, especialmente na quarta sessão.

Os estudantes demonstraram um engajamento espontâneo na resolução das atividades, transitando por diferentes formas de representação da função exponencial (algébrica, gráfica, tabular, linguagem natural). Isto revela um salto significativo na manipulação do conteúdo, algo que sinaliza explicitamente a importância da intervenção da pesquisa, no sentido da mudança de comportamento dos sujeitos, característica da aprendizagem e da consolidação dos saberes matemáticos sobre a função exponencial.

No que se refere aos saberes docentes, que são evidenciados nas respostas dos estudantes na quinta sessão, inferimos que ainda se apresentam mais acentuados, do ponto de vista pedagógico que do ponto de vista didático. Percebemos uma falta de articulação entre o conhecimento matemático, recentemente construído por eles, e a construção de uma proposta de intervenção didática efetiva, na realidade de seus supostos alunos. Suas falas indicam que não articulam ou relacionam os saberes matemáticos com os saberes pedagógicos já adquiridos por eles, tais como: plano de aula, metodologia de ensino, recursos didáticos e materiais, habilidades específicas dos estudantes. No entanto, há indícios de que os estudantes têm certo domínio em relação ao conceito de planejamento, pelo menos no que se refere a suas etapas.

Possivelmente, estes conhecimentos pedagógicos podem ter sido construídos nos componentes curriculares das Ciências da Educação, mais especificamente, durante o Estágio Supervisionado. No entanto, o desconhecimento de elementos básicos da didática da Matemática, tais como conceito de contrato didático e de transposição didática, pode estar impossibilitando os estudantes de elaborar uma proposta clara de intervenção na realidade dos alunos do Ensino Médio. Consideramos prudente indicar estas questões a novas análises e novas pesquisas, pois extrapolam o foco do nosso trabalho.

O que podemos afirmar, levando em consideração Pires (2012), e a partir dos resultados levantados em nossa pesquisa, é que, de fato, a Licenciatura em Matemática nas IES baianas não consegue desenvolver os saberes docentes inerentes à formação inicial dos professores de Matemática (Licenciatura em Matemática).

Além disso, as propostas de Estágio Supervisionado precisam ser ressignificadas sob o ponto de vista de contribuir na consolidação desses saberes docentes, em que pese que, somente na atuação profissional, estes futuros professores terão uma formação mais completa, por meio da construção dos *saberes experienciais*, de Tardif (2012).

Aprofundando um pouco mais sobre os dados levantados na pesquisa, identificamos várias possibilidades de continuidade, no sentido de complementação, ampliação ou ainda de novas investigações, envolvendo os elementos pesquisados: os sujeitos da pesquisa (estagiários da Licenciatura em Matemática), a sequência didática aplicada, os fundamentos teóricos, a engenharia didática, a análise de livros didáticos e incorporando ou não outros quadros teóricos que auxiliem aquilo que se deseja investigar. Nessa perspectiva, levantamos algumas possibilidades que não foram discutidas em nosso trabalho conforme já foi apontado.

O processo de reflexão dos sujeitos da pesquisa sobre sua própria aprendizagem, algo que foi inclusive verbalizado por estes sujeitos durante a mesma, instigou-nos a investigar: em que medida um experimento, com a sequência didática que aplicamos, baseado nos pressupostos metodológicos de Artigue (1988), nos fundamentos teóricos da

TSD, e apoiado no trabalho de Magalhães (2009), pode possibilitar o desenvolvimento de estratégias metacognitivas por parte dos estudantes?

Indicamos também como possibilidade uma nova pesquisa que pudesse construir e/ou escolher, de forma autônoma, uma sequência didática, cujo objetivo é introduzir conceitos matemáticos, desenvolver os saberes docentes, na perspectiva de um trabalho colaborativo com classes de Ensino Médio, nas quais os estudantes de estágio pudessem aplicar a sequência didática construída por eles. Isso poderia dar conta de (re) construir, durante o Estágio Supervisionado, saberes docentes necessários à pratica do professor (ou futuros professores).

Sobre a reaplicação da sequência didática em classes do Ensino Médio, ou mesmo com o público da graduação, indicamos adaptações, sobretudo, incorporando elementos que inicialmente pensamos, mas que não foram contemplados na sequência, como, por exemplo: situações-problema que articulem o conceito de progressão geométrica com a função exponencial ou situações-problema que articulem o estudo dos juros compostos com a função exponencial.

Os resultados levantados, que envolviam o conceito de função afim e linear, denotaram a necessidade de aprofundar o estudo dos saberes dos estagiários sobre essas funções, visto que, nas atividades, os estudantes evidenciaram um nível de dificuldade além daquele que supomos, apoiados em Freitas e Almouloud (2012), principalmente, em relacionar o modelo de função afim ou linear à resolução de uma situação problema.

O estudo dos livros didáticos sobre função exponencial, apoiado na TAD, indicou os tipos de situações-problema, enquanto tarefas e conjunto de tarefas a ser realizadas pelos estudantes na sequência didática. Esse estudo possibilitou construir um quadro de técnicas que foram desenvolvidas na análise *a priori*, especificamente, na análise matemática. No entanto, em nossa pesquisa, não estabelecemos uma análise explicita baseada nos pressupostos da TAD, para os tipos de tarefas que utilizamos (apoiados nos livros didáticos) na sequência didática e os tipos de técnicas que os estudantes utilizaram durante o experimento.

Este caminho não foi o percurso que tomamos na pesquisa, no entanto, indicamos uma nova publicação complementar ao nosso trabalho nessa perspectiva. É possível que, com essa complementação, tenhamos uma articulação mais completa entre TAD e a TSD, do ponto de vista da etapa do planejamento da pesquisa até as análises dos dados.

Por outro lado, uma pesquisa sobre o estudo da função afim relacionado com desenvolvimento de técnica sobre tarefas também pode vir a desenhar um quadro de superação das fragilidades e dificuldades dos estudantes acerca da função afim e de seus conceitos prévios.

Outra possibilidade de pesquisa que levantamos é quanto à incorporação mais completa do conceito de logaritmo para o estudo da função exponencial, ou um estudo comparativo, construtivo dos conceitos de função logarítmica e de sua inversa, de forma concomitante, utilizando a TSD. E que pese, o trabalho de Pereira (2010) trouxe contribuições nesse sentido.

Finalizamos o nosso trabalho na certeza de que a nossa contribuição na pesquisa em Educação Matemática está em fase inicial, diante do muito que já se pesquisou na área. Há ainda muitos aspectos sobre a formação de professores que precisam ser investigados e explorados, seja na formação inicial, seja na formação continuada.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, Michèle. Ingèniere didactique. **RDM**, v.9, n.3, p.231-308,1988.

ARAUJO, Elpidio. **A concepção de um software de matemática para auxiliar na aprendizagem dos alunos da primeira série do ensino médio no estudo das funções exponenciais logarítmicas**. Dissertação (mestrado profissional em educação matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2005.154f.

ANGIOLIN, Alexandra Garrote **Trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre funções exponenciais**. Dissertação (mestrado em educação matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2009. 196f.

BARROSO, Juliana Matsubara. **Conexões com a matemática**. v. 1. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela editora Moderna. São Paulo: Moderna, 2010.

BOSCH, Marianna; CHEVALLARD, Yves. **La Sensibilité de L'activité mathématique aux ostensifs**. Objet d'etude et problematique. Recherches em Didactique das Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n.1, p.77-124,1999.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA,1996.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática**. Brasília, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** v.2. Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília, 2000.Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf> Acesso em: 05/07/2013.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **PCN + Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC)/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza Matemática e Suas Tecnologias Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza**. Brasília, 1999.

BRITO, Arlete de Jesus; ALVES, Francisca Terezinha. Oliveira. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Editora Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Editora Horizontes Pedagógicos, 1996.

BRUCKI, Cristina Maria. **Uso de modelagem no ensino de função exponencial.** Dissertação (mestrado profissional em educação matemática). PUC/SP, Brasil, 2011.140f.

BRUN, Jean. **Didática das matemáticas**. Lisboa: Editora Horizontes Pedagógicos, 1996.

CHEVALLARD, Yves. **El Análisis de Las Prácticas Docentes en la Teoría Antropológica De Lo Didáctico.** Recherches em Didactique dês Mathématiques, Vol. 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

CHEVALLARD,Yves; MARIANA, Bosch; GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. v.1. São Paulo: Ática, 2010.

DEMANA, Franklin D.; WAITS, Bert K.; FOLEY, Gregory D.; KENNEDY, Daniel. **Pré-cálculo**. São Paulo: Editora Pearson, 2009.

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. **Utilização de diferentes registros de representação**: um estudo envolvendo funções exponenciais. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e educação matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil, 2005.120f.

DUVAL, Raymond. **L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique:cours sur apprentissages intellectuels donné à la PUC-SP**. São Paulo: Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, 1999.

FREITAS, Rita Lobo; ALMOULOUD, Saddo Ag. **Representações sobre função exponencial**. Anais do XI ENEM. Curitiba, 2013. Disponível em <http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/2226_1095_ID.pdf> Acesso em: 01/08/2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, Davis; PÉRIGO, Roberto. **Matemática**: ciência e aplicações (Ensino Médio). v.1. São Paulo: Saraiva, 2010.

LAJOLO, Marisa. **Livro didático**: um (quase) manual de usuário.
Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Vol 1. 8.ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2004.

MAGALHÃES, André Ricardo. **Mapas conceituais digitais como estratégia para o desenvolvimento de metacognição no estudo de funções**. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2009. 263 f.

MAIA, Diana. **Função quadrática:** um estudo didático de uma abordagem computacional. Dissertação (mestrado em educação matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2007.141f.

MARQUESI, André Luis. **Objetos reutilizáveis para aprendizagem significativa de função em cursos das áreas de ciências exatas e tecnológicas**. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e matemática). Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, Brasil, 2008.150f.

OLIVEIRA, Nanci. **Conceito de função**: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem. Dissertação (mestrado em ensino de matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 1997.174f.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. v.1. São Paulo: Moderna, 2009.

PEREIRA, José Geraldo de Araujo. **Abordagem das funções exponencial e logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2010.122 f.

PIMENTA, Selma Garrido; LIMA, Maria Socorro Lucena. **Estágio e docência**. São Paulo: Cortez, 2011.

PIRES, Maria Auxiliadora Lisboa Moreno. **Estágio Curricular Supervisionado: uma análise dos cursos de licenciatura em matemática**. In: SANTA'ANA, Claudinei de Camargo; SANTANA, Parolin Irani; EUGÊNIO, Benedito Gonçalves (Org.). Estágio supervisionado, formação e desenvolvimento profissional docente. São Carlos: Pedro & João Editores, 2012.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2006. 382 f.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. de S. V. **Matemática ensino médio**. v. 1. 6 ed. Saraiva: São Paulo, 2010.

SOUZA, J. **Novo olhar**: matemática. V. 1. São Paulo: Editora FTD, 2011.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petropólis, RJ: Vozes, 2012.

VERGNAUD G. **La théorie des champsconceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La PenséeSauvage-Éditions, v.6-10, n° 2.3, 1991.

YAMAUTI, Marcelo Massahit. **Regressão linear nos livros didáticos de estatística para cursos de administração**: um estudo didático. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2013. 146 f.

ZUFFI, E. M. **O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do ensino médio**: por uma aprendizagem de significados. 1999. Tese (doutorado em Didática - Ensino de Ciências e Matemática), Faculdade de Educação, USP, São Paulo,1999.

ZUFFI, E. M. Uma sequência didática sobre funções" para a formação de professores do ensino médio. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004, Recife. Anais. Recife, 2004. CD-ROM.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Sequência Didática

Atividade 01

Situação-problema 01 – Um dos insetos mais destrutivos é o gafanhoto-do-deserto. Esse inseto é capaz de comer cerca de 1,6 gramas de folhas por dia. Considerando que algumas nuvens de gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, a devastação pode alcançar grandes proporções. Quantas toneladas de folhas uma nuvem de gafanhotos pode comer em um único dia?

(A) Podemos estabelecer um modelo matemático para essa situação problema? Justifique. Qual?

(B) O que podemos afirmar sobre esse modelo? É possível representá-lo graficamente? (SOUZA, 2010, p.84, *adaptação nossa*).

Situação-problema 02 – A receita mensal de vendas de uma empresa está relacionada com os gastos mensais com propaganda. Quando a empresa gasta R$10.000,00 por mês com propaganda, sua receita naquele mês é de R$ 80.000,00. Se o gasto mensal com propaganda for o dobro daquele, a receita mensal cresce 50% em relação àquela.
(A) Qual a receita mensal se o gasto com propaganda for R$30.000,00?
(B) Podemos estabelecer um modelo matemático para essa situação problema? Justifique. Qual?
(C) O que podemos afirmar sobre esse modelo? É possível representá-lo graficamente?

Situação-problema 03 – Carlos trabalha como DJ e cobra uma taxa de R$100,00, mais R$ 20,00 por hora, para animar uma festa. Daniel, na mesma atividade, cobra uma taxa R$55,00, mais R$ 35,00 por hora. (RIBEIRO, 2012, p.95, *adaptação nossa*).
(A) Qual o tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos?
(B) Agora faça uma discussão com seu colega, relacionando os pontos em comum das situações propostas, fazendo comparações, justificando suas conclusões na linguagem materna e matemática.

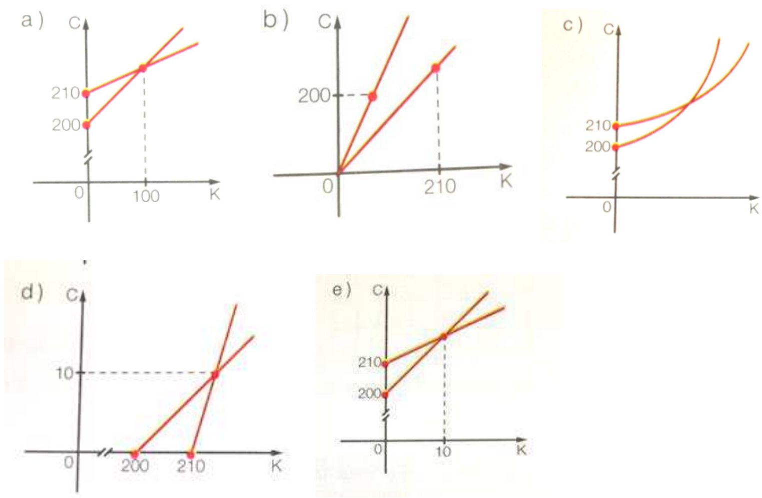
Atividade 02

Um fornecedor A oferece a um supermercado certo produto com os seguintes custos: R$ 210,00 de frete, sendo que são cobrados R$2,90 por cada quilograma do produto. Um fornecedor B oferece o mesmo produto, cobrando R$200,00 de frete, sendo o valor do produto, por quilograma, R$ 3,00.

(A) Qual a proposta mais vantajosa?

(B) Qual dos gráficos a seguir representa os custos do supermercado com fornecedores?

(C) Que conclusões você pode chegar em relação aos valores 210 e 200, olhando o gráfico? (SOUZA, 2010, p.91, *adaptação nossa*).



Atividade 03

Seja $f(x) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$, suponha que t seja uma variável temporal de crescimento de um determinado organismo vivo y (medido em cm), que se desenvolveu a 100 milhões de anos até chegar à forma atual, no ano de 2013. Utilize o recurso computacional do *software Excel* na resolução deste problema.

(A) Determine o tamanho inicial desse organismo ao final do primeiro ano de vida. Construa uma tabela que mostre como esse organismo cresceu a cada 10 anos, 100 anos, 1000 anos até a forma no ano de 2013.

(B) O que se pode concluir do tamanho desse organismo vivo no ano de 2013? Discuta com os colegas a resolução e os resultados obtidos. Registre suas conclusões. (DEMANA *et al*, 2009, p.141, *adaptação nossa*).

Atividade 04

O número irracional e cuja notação foi introduzida por Leonhard Euler (1707-1783) tem uma importante contribuição no estudo do cálculo. Sabendo que e é uma constante irracional podemos definir uma função f definida por $f(x) = e^x$. Usando o recurso computacional (Geogebra), descreva como transformar o gráfico de $f(x) = e^x$ no gráfico das funções a seguir. Registre tudo em um texto para impressão. Apresente a solução graficamente, explicando as estratégias utilizadas. (DEMANA *et al*, 2009, p.133, *adaptação nossa*).

A) $g(x) = e^{2x}$ B) $h(x) = e^{-x}$ C) $k(x) = 3e^x$

Atividade 05

As bactérias têm alto poder de reprodução. Em algumas horas, sob condições adequadas, um único indivíduo pode originar milhares de descendentes.

Suponha que, no início de um processo infeccioso, haja cem bactérias da mesma espécie e que, a cada hora, essa população dobre. Suponha ainda que o processo de reprodução se mantenha no mesmo ritmo. (DEMANA *et al*, 2009, p. 135, *adaptação nossa*).

(A) Após 5h, qual o a quantidade de bactérias existentes?

(B) Como representamos esse problema por um modelo matemático?

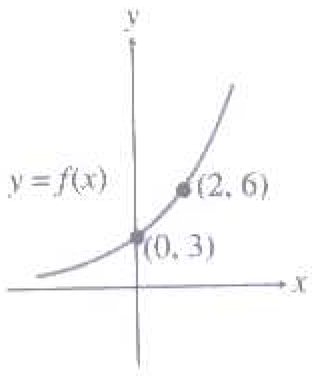
(C) Estabeleça uma representação gráfica para este fenômeno. Conclua em quantas horas o número de bactérias chegará a 350.000 unidades.

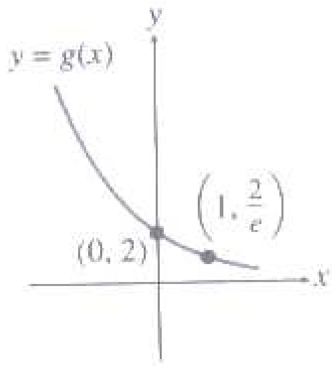
(D) Discuta com seu colega os resultados encontrados, registrando e justificando a solução encontrada e seu percurso.

Atividade 06

A partir dos gráficos, determine a lei que associa a x y= f(x) e y= g(x). Adaptado de Demana *et al* (2009, p.138).

(A) (B)





Explique e registre a estratégia utilizada para a solução encontrada.

Atividade 07

Esboce o gráfico das funções e analise o domínio, a imagem, a continuidade, o crescimento/decrescimento, os extremos assíntotas e o comportamento nos extremos do domínio. Adaptado de Demana *et al* (2009, p.139).

i) $f(x) = 3.2^x$ ii) $g(x) = 4.\ 0{,}5^x$ iii) $h(x) = 4.e^{3x}$ iv) $i(x) = 5.e^{-x}$

A) Discuta com os colegas o comportamento das funções a partir da representação gráfica.
B) Quais relações podem-se estabelecer entre a curva e a sua representação algébrica?
C) Justifique e registre o percurso e as estratégias utilizadas na resolução da atividade.

Atividade 08

Sejam as funções reais $f(x) = 3^{2x+4}$ e $g(x) = 2(2^{3x-2})$, determine as funções inversas $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ respectivamente, em seguida, responda:

(A) Justifique e registre as estratégias e o percurso utilizado na resolução.

(B) Quais relações matemáticas podem ser estabelecidas entre as funções dadas por f(x) e g(x) e as funções definidas por $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$?

Atividade 09

Situação 01: Os alunos da Escola João Paulo, uma escola municipal, situada na periferia da cidade de Barreiras-Bahia, estão sentindo muita dificuldade com matemática, as notas da maioria da turma estão abaixo da média seis (6,0), além disso, os alunos relatam que as aulas são chatas, cansativas e que sua professora Patrícia escreve o tempo todo no quadro e que eles ficam copiando e não entendem assunto. A professora Patrícia alega que a turma não quer nada e conversa o tempo inteir, não deixando ela explicar.

(A) Como você analisa o problema desta classe?

(B)Quais sugestões de intervenção pedagógica você sugere para a professora Patrícia?

Situação 02: A professora Patrícia deseja trabalhar com a função exponencial, mas muitos dos alunos da turma têm dificuldade com funções e com representação gráfica de funções de uma forma geral.

(A) Ajude a professora Patrícia a organizar uma sequência de ensino para função exponencial. Preveja o tempo que será utilizado, as atividades que serão desenvolvidas, textos utilizados, matérias etc.

(B) Explique para a professora Patrícia como ela deve proceder. Elabore um roteiro para a professora.

(C) Quais os seus objetivos?

(D) Que atividade foi proposta e por que a escolha desta atividade? Descreva a atividade detalhadamente, com sua proposta de resolução.

(E) Como você acha que os alunos vão proceder durante a aula? Descreva detalhadamente.

(F) E no decorrer da atividade, você consegue prever como os alunos a farão? Explique e justifique.

Você acha que a sua proposta vai gerar interesse por parte dos alunos e modificar a realidade da turma? Por quê?

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu,____, portador do RG número________________, declaro, para os devidos fins, que concedo os direitos de minha narrativa, transcrita e textualizada, a partir de atividade escrita realizada em novembro de 2013, para que Rita Lobo Freitas possa utilizá-la em sua pesquisa de Mestrado em Educação Matemática, desenvolvida no Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

Subscrevo o presente.

____