PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Eliane Alves de Oliveira

Uma Engenharia Didática para abordar o conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2014

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Eliane Alves de Oliveira

Uma Engenharia Didática para abordar o conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

SÃO PAULO

2014

Banca Examinadora

À minha querida mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS pelas bênçãos recebidas todos os dias, em especial, pela realização deste trabalho.

Aos meus pais, Maria e Manoel, pelo imenso amor, incentivo nas horas de fraqueza e compreensão nos momentos que precisei me isolar. Minha mãe, seus ensinamentos de vida e sua força sempre me orientaram a perseverar na busca de conquistas. Obrigada!

Aos meus familiares, especialmente ao meu querido primo Itamar que sempre esteve presente nos momentos que precisei de sua ajuda.

À Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori, minha orientadora, pelas orientações competentes, paciência e apoio nos momentos difíceis durante a elaboração desta tese. Querida Professora, sou imensamente grata por tudo que fez por mim ao longo dessa caminhada.

Ao Professor Doutor Pedro Franco de Sá que desde a graduação contribui para a minha formação e que sempre me incentivou. Professor, obrigada pelos sábios ensinamentos.

Ao professor Doutor Saddo Ag Almouloud pela generosa amizade e incentivo durante essa jornada.

Aos professores do Programa de Estudo de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP pela troca de experiências e aprendizado durante o curso de doutorado.

Aos Professores Doutor Vinicio Macedo Santos, Doutor Benedito Antonio da Silva, Doutor Saddo Ag Almouloud, Doutor Pedro Franco de Sá e Doutora Maria José Ferreira da Silva pelas valiosas contribuições na ocasião do Exame de Qualificação.

Ao amigo Professor Doutor José Messildo Viana Nunes pelas orientações na elaboração do pré-projeto desta tese.

Aos colegas do curso de doutorado pela agradável convivência. Em especial, agradeço a Acylena, Jeane e Gilberto, pela amizade e palavras de incentivo.

Ao amigo Francisco Olímpio da Silva pelo carinho que tem comigo e auxílio em muitos momentos dessa caminhada.

Aos alunos que voluntariamente participaram de forma responsável desta pesquisa.

À Universidade do Estado do Pará – UEPA pela oportunidade de crescimento intelectual e apoio financeiro.

À Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP pela realização do curso de doutorado.

Ao Centro Universitário do Estado do Pará – CESUPA pelo apoio.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

A Autora

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo investigar estratégias de ensino com vistas a favorecer a aprendizagem de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia. O estudo direcionou-se para a elaboração de uma engenharia didática, e centrou-se na definição do elenco de componentes dessa engenharia, tendo por alvo abordagens gráfica, algébrica e numérica, que envolvessem situações-problema, por meio da utilização de recursos computacionais. A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a Engenharia Didática segundo Michèle Artigue compõem os aportes teórico-metodológicos principais da pesquisa. Dezesseis alunos do segundo ano de graduação em Engenharia Ambiental e Engenharia de Produção de uma Instituição de Ensino Superior participaram voluntariamente do experimento. Foi utilizado o *software* GeoGebra. A coleta de dados foi realizada por meio dos seguintes instrumentos: guias de atividades, teste inicial e final de conhecimentos e diário de campo. Os resultados indicaram que o uso do *software* favoreceu a realização das atividades e revelaram a importância e a produtividade das discussões em dupla. A análise dos dados obtidos possibilitou afirmar que as características da engenharia didática desenvolvida no trabalho favoreceram a construção de conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias pelos alunos, atendendo os objetivos da pesquisa.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias. Engenharia Didática. Cursos de Engenharia. *Software* GeoGebra.

ABSTRACT

This research had the target to check into teaching strategies that could favour students to learn about Ordinary Differential Equations and their applications in Engineering graduation courses. The study directed to the elaboration of a didactic engineering and was centered in the casting definition of these engineering components, having graphic, algebraic and numerical approaches which involved problem situations by means of the use of computational resources. The Theory of Didactical Situations, by Guy Brosseau and the Didactical Engineering, by Michèle Artigue compose the main theoretical-methodological inputs of the research. Sixteen students of the second year of Environmental Engineering and Production Engineering graduation courses of a higher graduation institution voluntarily joined the experiment. The GeoGebra Software was utilized for that. The data collection was made by using the following instruments: activities guide, initial and final knowledge tests and field diary. The results indicated that the software use favored the activities accomplishment and revealed the importance and productivity of arguments in pairs. The obtained data analysis enabled us to assert that the didactical engineering characteristics developed in this work favoured the construction of concepts of Ordinary Differential Equations by the students, attending the research aims.

Key-words: Mathematics Education. Teaching Ordinary Differential Equations. Didactical Engineering. Engineering Courses. GeoGebra Software.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais representam parte crucial do ensino de Cálculo. O seu estudo possibilita um instrumental matemático importante na resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, pois como ressaltam Boyce e DiPrima (1999, prefácio):

> A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo, o decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos.

Nossa experiência no ensino de Cálculo em cursos de graduação em Engenharia e pesquisas na área de Educação Matemática focalizam a problemática que envolve o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), à medida que revelam indícios de dificuldades no processo de aprendizagem dos alunos no estudo dessas equações, tanto no uso de técnicas para resolução, quanto na produção de significados e compreensão de conceitos. Essas dificuldades se evidenciam principalmente no momento em que são estudadas as aplicações em problemas, envolvendo a Física, a Química, a Engenharia, etc. Em algumas situações, os alunos dominam técnicas de resolução, porém têm dificuldade em identificar como aplicar as EDO na resolução de problemas.

Esses fatores nos levaram a direcionar esta pesquisa, no âmbito da Educação Matemática, sobre o ensino e aprendizagem de EDO. Iniciamos a pesquisa por um levantamento bibliográfico da produção científica que trata desse assunto, descrito na seção 1.1. Esse levantamento nos indicou que o número de investigações sobre esse tema ainda é tímido diante da problemática que envolve os processos de ensino e aprendizagem de EDO. Ele ainda nos permitiu apurar informações sobre dificuldades de aprendizagem de alunos no ensino dessas equações, especialmente, em cursos de Engenharia. Destacamos que os indícios de dificuldades de aprendizagem que identificamos em nossa prática docente, também são citados nas pesquisas consultadas, como, por exemplo, relacionados à Matemática básica, à aplicação dos conceitos de derivada e integral, à interpretação de taxas de variação instantânea, ao conceito de Equação Diferencial, ao conceito de solução de uma EDO e à representação gráfica de soluções de uma EDO.

Observamos que as dificuldades de alunos na aprendizagem dos conceitos de derivada e de integral de uma função repercutem durante o estudo de EDO, comprometendo a compreensão do conceito dessas equações e provocando entraves no processo de suas aplicações.

Considerando aspectos como, por exemplo, a importância da interpretação geométrica da derivada no estudo qualitativo das EDO, e do Teorema Fundamental do Cálculo na compreensão dos processos de resolução de uma EDO, refletimos, então, sobre a necessidade de retomar conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral durante o estudo de EDO. O que nos provocou indagações referentes às possibilidades de estratégias para esse fim, à viabilidade delas em relação à carga horária da disciplina, à adequação delas de acordo com o perfil da turma.

As investigações levantadas também relatam que o ensino das EDO vem acontecendo de modo a concentrar uma maior atenção nas soluções analíticas a partir de manipulações algébricas de resolução, o que pode contribuir para que os alunos não percebam o potencial dessas equações e sua importância como ferramenta matemática para resolver problemas relacionados a situações da realidade, e que talvez por isso os alunos não demonstrem interesse em aprender esse conteúdo. Isso nos provocou reflexões sobre o tipo de abordagem de ensino de EDO que pode favorecer a aprendizagem de alunos.

Diante desses fatores, nossa pesquisa foi norteada pela seguinte questão: Quais componentes devem estar presentes em estratégias de ensino com vistas a favorecer a aprendizagem de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia?

Nossas reflexões, com base na revisão bibliográfica, suportadas pelos referenciais teóricos, levam-nos a defender a tese de que as características de uma engenharia didática que articule abordagem gráfica, algébrica e numérica, a partir de atividades que envolvam situações-problema, por meio de recursos computacionais, possuem meios de munir a ação de ensinar EDO de modo a favorecer a aprendizagem desse conceito matemático e suas aplicações.

A Engenharia Didática a que nos referimos é a apresentada por Artigue (1988), pois consideramos que essa metodologia de pesquisa contempla as demandas da complexidade do contexto de sala de aula, além de permitir a validação das hipóteses pela confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori* e favorecer o realinhamento das atividades durante o processo.

A escolha da metodologia Engenharia Didática deve-se, sobretudo, a intenção de desenvolvermos um estudo experimental baseado em realizações didáticas, ou seja, na concepção, na realização, na observação e na análise de sessões de ensino envolvendo uma sequência didática para introduzir o estudo de EDO.

Como consequência dessa escolha temos que a fundamentação teórica da pesquisa é a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), tanto para a elaboração e realização da sequência de ensino como para a análise dos resultados.

Para efetivar os recursos computacionais, utilizamos o *software* de matemática dinâmica GeoGebra que é livre e reúne recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo, favorecendo a utilização das diferentes representações (geométrica, algébrica e numérica) para um mesmo objeto matemático.

No Capítulo 1, mostramos, inicialmente, um levantamento bibliográfico com informações sobre dificuldades de alunos, resultados e sugestões de trabalhos sobre o ensino e aprendizagem de EDO que justificam e fundamentam a questão de pesquisa, a hipótese e os objetivos que são apresentados em seguida. Na sequência, são abordados os fundamentos teórico-metodológicos desta pesquisa.

No Capítulo 2 são apresentados os estudos preliminares que correspondem à primeira fase da engenharia didática. Nele são, inicialmente, abordadas questões relacionadas ao ensino de EDO. Em seguida, são apresentados resultados de um questionário que teve por objetivo coletar informações referentes a conhecimentos de alunos de Engenharia acerca de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

O Capítulo 3 foi elaborado para discorrer a concepção e a análise *a priori* das situações didáticas; para apresentar a sequência de ensino e, descrever a análise *a priori* referente às atividades da sequência.

No Capítulo 4, o experimento é relatado. Primeiramente, os sujeitos envolvidos na pesquisa, alunos do segundo ano de cursos de graduação em Engenharia Ambiental e em Engenharia de Produção, são apresentados e, na sequência, são descritas as sessões que foram desenvolvidas com os alunos.

O Capítulo 5 trata da análise *a posteriori* efetivada mediante a articulação de três elementos principais: as anotações do diário de campo, as resoluções escritas das duplas e os resultados dos testes inicial e final de conhecimentos. Essas análises *a posteriori* são descritas estabelecendo-se sua comparação às análises *a priori* de modo a validar ou refutar as hipóteses levantadas no início da engenharia.

Reservamos um espaço para as Considerações Finais, nas quais indicamos o enfoque dado à questão de pesquisa, as conclusões, e sugestões para investigações futuras.

CAPÍTULO 1

PROBLEMATIZAÇÃO

Neste capítulo, mostramos, inicialmente, um levantamento bibliográfico com informações sobre dificuldades de alunos, resultados e sugestões de trabalhos sobre o ensino e aprendizagem de EDO que justificam e fundamentam a questão de pesquisa, a hipótese e os objetivos que são apresentados em seguida. Na sequência, são abordados os fundamentos teórico-metodológicos desta pesquisa.

1.1 Levantamento Bibliográfico

Com vistas a realizar esta pesquisa, no âmbito da Educação Matemática, sobre o ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias, efetivamos inicialmente um levantamento bibliográfico. Procuramos inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica que tem por temática de investigação as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais, e o estudo de possibilidades de contribuir com a aprendizagem dessas equações por meio do ensino.

O critério adotado para a seleção de pesquisas foi o título. Constam no nosso levantamento artigos, dissertações e teses cujos títulos expressam de forma explícita ou implícita o estudo do tema ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais.

Delimitamos o levantamento bibliográfico no período de 2000 a 2011, em razão da dificuldade em encontrar registros de pesquisas sobre o tema de interesse antes de 2000, de acordo com critério de seleção que escolhemos. A escolha de 2011 como final do período de estudo, deveu-se à razão de que nesse ano foi elaborado o projeto desta tese que foi apoiado por esse levantamento.

Os dados foram coletados por meio de consultas ao banco de teses da CAPES, a doze sítios de Programas de Pós-Graduação, a três sítios franceses, a três revistas científicas brasileiras e a Anais de três eventos científicos. Houve ainda alguns casos em que os textos completos dos trabalhos foram coletados com os próprios autores via *e-mail*.

Os Programas de Pós-Graduação visitados foram: Programa de Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA); Programa de Educação e Programa Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP); Programa de Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) – Rio Claro; Programa de Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP); Programa de Educação e Programa de Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas); Programa de Educação da Universidade de São Paulo (USP); Programa de Educação da Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR); Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL); Programa de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP); Programa de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

Foram consultados os sítios franceses: *EducMath* do Instituto Francês de Educação, *EduTice* (*Education et technologies de l'information et de la communication*) e *Tel* (*thèses-en-ligne)*, bem como os sítios das revistas Educação Matemática Pesquisa, Bolema: Boletim de Educação Matemática e Zetetiké. Foram consultados também os Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção (ENEGEP), referentes ao período delimitado de nosso estudo, os Anais do 1º e do 2º Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa (ENAS) e os Anais do VI Encontro Internacional de Aprendizagem Significativa e 3º Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa.

Foi inventariado um total de dezesseis trabalhos, sendo cinco do “tipo” artigo (A), seis do “tipo” dissertação (D) e cinco do “tipo” tese (T). O Quadro 1 apresenta os títulos desses trabalhos em ordem cronológica por ano e em ordem alfabética dentro do ano, relacionados às respectivas fontes de consultas e classificados pelos “tipos” de trabalhos:

QUADRO 1. Lista dos trabalhos levantados

ANO	AUTOR(ES) E TÍTULO	FONTE	TIPO
2003	**ARSLAN, Salahattin; LABORDE, Colette.** *Un outil favorisant le jeu de cadres : Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles*	*EduTice*	A
2004	**BORSSOI, Adriana Helena.** A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino	Coletada com a autora.	D
2004	**BORSSOI, Adriana Helena; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de.** Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias	Revista EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA	A
2004	**DAREZZO FILHO, Artur; ARENALES, Selma H. V.; SALVADOR, José Antonio.** Mapas Conceituais e ferramentas computacionais: uma experiência no ensino de Equações Diferenciais	Coletado com o autor.	A
2005	**ARSLAN, Salahattin**. *L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences?*	*EducMath*	T
2007	**GALLEGOS, Ruth Rodriguez.** *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S*	*Tel*	T
2007	**JAVARONI, Sueli Liberatti.** Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP	T
2007	LAUDARES, **João Bosco**; MIRANDA, **Dimas Felipe.** Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais	Revista EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA	A
2008	**ALVES, Murilo Barros.** Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas	D
2008	**ARAÚJO, Alyne Maria Rosa de.** Modelagem Matemática nas aulas de Calculo: uma estratégia que pode contribuir com aprendizagem dos alunos de engenharia	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da UFPA	D

2009	**BRAGA, Roberta Modesto.** Modelagem Matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da UFPA	D
2009	**DULLIUS, Maria Madalena.** *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico*	Coletada com a autora.	T
2010	**FERREIRA, Vagner Donizeti Tavares.** A Modelagem Matemática na introdução ao estudo de Equações Diferenciais em um curso de Engenharia	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP	D
2011	**DULLIUS, Maria Madalena; ARAUJO, Ives Solano; VEIT, Eliane Angela.** Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia	Revista BOLEMA	A
2011	**FECCHIO, Roberto.** A Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade na introdução do conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP	T
2011	**SOUZA, Galvina Maria de.** Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de equações diferenciais ordinárias	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da PUC Minas	D

Fonte: Autora (2013).

No que segue é apresentada uma breve descrição dos trabalhos encontrados, agrupados de acordo com o "tipo" de trabalho e em ordem cronológica, no que diz respeito a aspectos relacionados às questões de pesquisa, aos objetivos, aos referenciais teóricos, às metodologias, aos resultados e às considerações feitas pelos autores a partir dos resultados obtidos.

Artigos levantados

Arslan e Laborde (2003) no artigo intitulado "*Un outil favorisant le jeu de cadres: Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles*" abordaram o estudo qualitativo de Equações Diferenciais em ambientes de Geometria Dinâmica, focalizando o *software* Cabri.

Os autores enfatizam a necessidade da abordagem qualitativa no estudo de Equações Diferenciais. Foram apontados obstáculos que se opõem a essa abordagem e, com fundamentação em outros trabalhos, foram indicadas propostas usando ferramentas computacionais para ajudar a superar esses obstáculos.

Foi relatada uma investigação realizada com 40 estudantes *PLC1 do Institut Universitaire de Formation des Maîtres (IUFM)*, na França, por meio de uma engenharia didática, que objetivou introduzir a análise qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias, de modo a explorar potencialidades do *software* Cabri no desenvolvimento de competências e na interação entre quadros (algébrico, numérico e gráfico) exigida no estudo qualitativo.

Arslan e Laborde concluíram que o ambiente computacional disponibilizou recursos que permitiram a concepção de novas tarefas que favoreceram o "jogo de quadros"[1] na abordagem qualitativa de Equações Diferenciais e fizeram emergir novos raciocínios nos estudantes.

No artigo "Mapas Conceituais e ferramentas computacionais: uma experiência no ensino de Equações Diferenciais", Darezzo Filho, Arenales e Salvador (2004) descreveram uma experiência de ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, tópico abordado nas disciplinas de Cálculo Numérico e de Equações Diferenciais Aplicadas oferecidas pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (DM - UFSCar) para as turmas de Engenharia.

Os autores relataram que nessas disciplinas as atividades são desenvolvidas com o uso de mapas conceituais integrado com a linguagem escrita, oral e computacional nas salas de aulas e no Laboratório REENGE - DM - UFSCar com os *softwares* apropriados. O ensino de Equações Diferenciais Ordinárias é abordado a partir da modelagem de problemas reais seguido da construção da teoria para a obtenção da solução analítica e numérica dos problemas de valor inicial ou de contorno gerados. Com o *software* Maple são reforçadas as técnicas de resolução analítica de Equações Diferenciais passo a passo, obtendo a visualização e simulações gráficas de soluções. Na obtenção da solução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias são explorados métodos numéricos com os *softwares* Numérico, MatLab e Maple.

[1] "Jeu de cadres". Jogo de Quadros é um conceito introduzido por Douady indicando a mudança de um determinado ramo de conhecimento matemático a outro. Exemplo: mudança do quadro algébrico para o quadro geométrico. Segundo essa pesquisadora, os jogos de quadro são mudanças de quadros propostas pelo professor por meio de problemas convenientes para fazer avançar as fases da pesquisa e evoluir as concepções dos alunos. Conferir Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 7, n. 2.

Os pesquisadores relataram que ao término de cada tópico, é solicitado aos alunos para que façam um mapa conceitual do que acabou de ser abordado, e que o mesmo seja refeito após realizarem as atividades de laboratório. Baseados numa teoria educacional construtivista elaborada pelos psicólogos educacionais Ausubel, Novak e Hanesian (1980 apud DAREZZO FILHO, ARENALES E SALVADOR, 2004, p. 2), em que está inserida a abordagem de mapas conceituais, os autores ressaltaram que o aperfeiçoamento do mapa conceitual é elaborado na medida em que o estudante vai adquirindo um aprendizado significativo do tópico abordado. Os autores afirmaram que essas técnicas integradas estimulam a criatividade e o aprendizado significativo dos estudantes, gerando bons resultados, tanto na motivação quanto no aproveitamento global dos alunos.

No artigo de Borssoi e Almeida (2004) é abordada a investigação da dissertação da primeira autora, descrita no grupo de trabalhos levantados do "tipo" dissertação.

Laudares e Miranda (2007), no artigo "Investigando a iniciação à Modelagem Matemática nas Ciências com Equações Diferenciais", objetivaram apresentar resultados de investigação qualitativa da prática educativa do processo de ensino e aprendizagem da iniciação à modelagem nas ciências com Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia.

A pesquisa analisou a atuação dos estudantes na realização de três atividades investigativas de dois fenômenos físicos por meio da iniciação à modelagem com Equações Diferenciais. O estudo foi desenvolvido com uma turma do curso de Engenharia de Controle e Automação da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), composta por 56 alunos.

Os autores relataram que a elaboração e a realização das atividades possibilitaram aos estudantes realizar conjecturas e prospecções em busca da competência de modelar. Na etapa do trabalho dos estudantes, organizados em duplas, foi adotada a técnica de pesquisa de "observação", com pequenas intervenções sem apresentar soluções. Já na etapa de "socialização", na interação, pesquisador e pesquisados, houve enriquecimento das conjecturas, hipóteses ou predições dos estudantes, os quais avaliaram como positivos os resultados corretos conseguidos, ainda que parciais.

Os pesquisadores destacaram que os estudantes ficaram muito motivados, uma vez que esses foram instigados a trabalhar conceitos matemáticos relacionados às ciências, o que constitui uma prática constante nos cursos de Engenharia.

Laudares e Miranda (2007) indicaram que a iniciação à modelagem pode ser efetivada com sucesso com base na formulação de uma nova situação problema de fenômenos clássicos já modelados. Afirmaram também que o estudo de Equações Diferenciais poderá ser eficaz se explorado pelos três enfoques: da algoritmação (resolução das equações); da formulação e da resolução de problemas para a iniciação à modelagem.

O artigo de Dullius, Araujo e Veit (2011) relata um dos estudos que integra a tese da primeira autora, descrita no grupo de trabalhos levantados do "tipo" tese.

Dissertações levantadas

Borssoi (2004) em sua dissertação de mestrado, intitulada "A Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática como estratégia de ensino", desenvolveu uma proposta de ensino fundamentada nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática, e na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

O assunto proposto para estudo foi Equações Diferenciais Ordinárias, desenvolvido em uma turma regular de 39 alunos do segundo ano do curso de Bacharelado em Química da Universidade Estadual de Londrina, na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica II.

A investigação objetivou observar, descrever, comparar e compreender se a aprendizagem dos estudantes em um ambiente de ensino com atividades de Modelagem Matemática é significativa e em que aspecto o é. Teve como objetivos específicos: elaborar e aplicar uma proposta para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias para alunos do curso de Química, tomando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino; observar, analisar e entender como os estudantes apreendem o conteúdo; analisar a contribuição da Modelagem Matemática como facilitadora da Aprendizagem Significativa.

A proposta de ensino compreendeu quatro atividades de modelagem desenvolvidas durante as aulas, e ainda um trabalho, em que os alunos distribuídos em grupos conduziram o desenvolvimento de uma Modelagem Matemática para resolver um problema por eles definido.

A pesquisa foi de cunho qualitativo e o levantamento de informações ocorreu por meio de instrumentos elaborados para esse fim, como, fichas de levantamento, entrevista, mapas conceituais, trabalhos em grupos e outros.

Borssoi (2004) recomendou a utilização da Modelagem Matemática como alternativa viável e eficiente estratégia de ensino que vem a ser uma facilitadora da Aprendizagem Significativa, enfatizando que as atividades de ensino em ambiente de Modelagem permitem emergir uma grande quantidade de conceitos matemáticos e extras-matemáticos, que proporcionam interações favoráveis à aprendizagem.

Alves (2008) em sua dissertação de mestrado, com título “Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática”, objetivou a construção de uma proposta metodológica para o estudo de Equações Diferenciais que proporcionasse um maior entendimento dos conceitos de derivada e taxa de variação.

A questão de pesquisa foi: Como a Equação Diferencial com a resolução de problemas e iniciação à modelagem em ciências complementa a aprendizagem da derivada, ressignificando-a como taxa de variação?

Teve como objetivo específico mostrar como o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias pode complementar e ressignificar o entendimento do conceito de derivada com estudo de fenômenos das ciências, por meio de taxa de variação, para contribuição ao estudo de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Licenciatura em Matemática.

Foi adotada a pesquisa qualitativa empirista, tendo como sujeitos de estudo alunos do curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), que cursaram a disciplina Equações Diferenciais no primeiro e no segundo semestre de 2007.

Foram propostas aos alunos três atividades investigativas que constaram de estudo de fenômenos das ciências a serem modelados nas etapas: elaboração do modelo matemático, formulação e resolução de uma situação problema, enfatizando a interpretação gráfica da função matemática representativa do fenômeno. Tais atividades foram desenvolvidas em quatro fases, sendo que na quarta fase os alunos foram levados ao laboratório de Informática onde realizaram as tarefas investigativas utilizando o *software* MAPLE.

Durante o trabalho, o pesquisador organizou a turma do primeiro semestre em 15 duplas, e a do segundo semestre em 13 duplas. A coleta de dados ocorreu por meio de instrumentos de observação e anotação de momentos da aplicação das atividades.

Dentre suas observações, o autor destacou que a ferramenta computacional foi considerada como um facilitador do processo investigativo e ressaltou que as discussões e interações entre estudantes/professor-pesquisador favoreceram um melhor entendimento dos conceitos envolvidos, possibilitando ao aluno fazer novas descobertas, especialmente na etapa de socialização dos resultados das atividades investigativas.

Alves (2008) concluiu que o processo de Modelagem Matemática por meio de atividades investigativas apresentou um resultado satisfatório na ressignificação do conceito de taxa de variação para o estudante de Cálculo e contribuiu na aprendizagem de Equações Diferenciais.

A dissertação de Araújo (2008), intitulada “Modelagem Matemática nas aulas de Cálculo: uma estratégia que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de Engenharia”, objetivou analisar os possíveis efeitos que o uso de

Modelagem Matemática, como estratégia de ensino, provoca no processo de aprendizagem de alunos da disciplina Cálculo III – EDO (Equações Diferenciais Ordinárias).

A pergunta norteadora da pesquisa foi: Como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III – Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) – em um curso de Engenharia da Computação?

A investigação foi de cunho qualitativo, realizada em uma turma de 20 alunos do 2° ano do curso de Engenharia da Computação, na Universidade Federal do Pará.

Os estudantes, organizados em grupos, desenvolveram quatro atividades de modelagem que foram planejadas de acordo com Barbosa (2004 apud ARAÚJO, 2008, p. 4). Para a coleta dos dados foram utilizados instrumentos, tais como: observações, gravações em áudio, questionários semiestruturados e registros escritos dos alunos.

Os questionários semiestruturados foram aplicados como pré-atividade, com o objetivo de conhecer as inquietações dos alunos em relação ao ensino de Cálculo I e II, as dificuldades por eles encontradas e as expectativas com relação à disciplina de Cálculo III. E, pós-atividade, com o objetivo de identificar o posicionamento dos alunos em relação ao aprendizado, utilização do processo metodológico e à condução das atividades em sala de aula durante as aulas.

A autora destacou que a Modelagem Matemática possibilitou aos estudantes a interação com outras áreas do conhecimento, estimulando-os à realização de pesquisas. Concluiu que essa estratégia de ensino contribuiu com a aprendizagem dos alunos, proporcionando a eles o resgate de alguns conceitos estudados em outras disciplinas de Cálculo e despertando-os para aspectos reflexivos e críticos.

Braga (2009) em sua dissertação de mestrado, com título “Modelagem Matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias”, investigou como o ambiente gerado pela

Modelagem Matemática favorece o tratamento do erro no processo de ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias.

A pesquisa foi qualitativa, descritiva e interpretativa, desenvolvida com 38 alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Campus de São Miguel do Guamá da Universidade do Estado do Pará (UEPA), na disciplina Cálculo II. A coleta de dados contou com observações, fotografias, filmagens, registros escritos, relatório, dentre outros instrumentos.

Inicialmente foi realizado um teste de sondagem sobre as perspectivas dos alunos sobre Cálculo II, assim como os conhecimentos prévios. A investigação foi desenvolvida em duas fases. Foi adotado o *software* Modellus.

A primeira fase da coleta de dados, denominada de Exercícios de Modelagem Matemática, teve como objetivo inserir os alunos no contexto de trabalho com a modelagem matemática e tratar os possíveis erros apresentados no processo de modelagem.

Na segunda fase, denominada Experimento e Modelagem Matemática, foi observado se os próprios alunos percebiam e tratavam seus erros no ambiente gerado pela modelagem matemática, para verificar se realmente o ambiente favorecia ou não o tratamento do erro.

Braga (2009) concluiu que o ambiente gerado pela modelagem matemática favoreceu o tratamento do erro matemático na medida em que os alunos foram motivados a refletir sobre suas próprias concepções a partir de situações de seus interesses.

Ferreira (2010) em sua dissertação de mestrado, com título “A Modelagem Matemática na introdução ao estudo de Equações Diferenciais em um curso de Engenharia”, objetou investigar como a utilização da Modelagem na introdução ao estudo de Equações Diferenciais em um curso de Engenharia pode contribuir para estimular a habilidade de relacionar a Matemática com fenômenos do mundo real, que envolvam variação; além de tomar decisões a respeito de tais fenômenos, com base na interpretação das informações contidas na solução da equação correspondente.

A pesquisa almejou responder as questões seguintes:

1. A Modelagem Matemática é uma ferramenta que possibilita ao aluno de Engenharia relacionar uma Equação Diferencial com problemas ligados a fenômenos reais, a fim de entendê-los e tomar decisões sobre eles?

2. Que contribuições a Modelagem Matemática, como metodologia de ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais, pode trazer para o estudante do curso de Engenharia?

O experimento foi desenvolvido em uma instituição particular de ensino superior localizada no município de São Paulo, e contou com a participação voluntária de 15 alunos dos cursos de Engenharia (de Produção, Mecânica, Elétrica e Mecatrônica).

Os participantes foram divididos em cinco grupos e realizaram seis atividades no laboratório de Física da instituição em que estudavam. As atividades foram elaboradas de acordo com os princípios da Modelagem Matemática e o estudo de modelos matemáticos, com base nos autores Bassanezi e Ferreira Jr. (1988 apud FERREIRA, 2010, p. 20), focando a introdução de Equações Diferenciais Lineares de variáveis separáveis.

Os dados foram coletados por meio das anotações dos alunos e das gravações das discussões feitas pelos integrantes dos grupos no decorrer dos quatro encontros desenvolvidos no projeto. A análise dos dados foi feita em dois momentos: no primeiro, nomeado como Análise das Atividades, o autor descreveu e analisou os protocolos resultantes das atividades, aliados às discussões realizadas no interior dos grupos e com a turma toda, com o intuito de analisar o desempenho de todos em cada atividade separadamente, e verificar se os objetivos específicos de cada uma foram obtidos. O segundo momento foi chamado de Análise do Desempenho de um Grupo, em que foi analisado o desempenho de um determinado grupo na realização de todas as atividades no decorrer da pesquisa.

O primeiro momento da análise dos dados possibilitou ao autor responder a questão 2 de pesquisa, afirmando que a modelagem propiciou aos estudantes a possibilidade de construir o seu próprio conhecimento e contribuiu para o entendimento de conceitos no estudo de Equações Diferenciais Lineares e a motivação dos alunos da área de Engenharia. O segundo momento da análise fez o autor responder positivamente a questão 1 de pesquisa.

Souza (2011) em sua dissertação de mestrado, intitulada “Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de Equações Diferenciais Ordinárias”**,** teve como proposta de trabalho investigar o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias. O objetivo foi verificar como o resgate dos conceitos fundamentais de Cálculo I, desde elementos funcionais até conceitos referentes às derivadas e integrais**,** taxas e o estudo da Modelagem Matemática aplicada a problemas classicamente enunciados, como parte introdutória de um curso de Equações Diferenciais Ordinárias, pode contribuir para o ensino e aprendizagem dessas equações e suas aplicações.

A questão principal de pesquisa foi: Que contribuições e desafios podem ser encontrados ou identificados ao se iniciar o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias com foco em elementos funcionais, taxas e modelagem algébrica de problemas?

A investigação se apoiou nas ideias de Bassanezi (2006 apud SOUZA, 2011, p. 35), em Modelagem Matemática, nas contribuições de Zabala (1998, apud SOUZA, 2011, p. 20) em relação à elaboração de atividades sequenciais e de Ponte (2003; 2005, apud SOUZA, 2011, p. 20) em relação às estratégias de ensino, nos princípios e tendências para o ensino de Cálculo, em particular de Equações Diferenciais Ordinárias, discutidos a partir de livros didáticos.

Foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência de atividades propostas para um curso introdutório de Equações Diferenciais Ordinárias.

Uma primeira versão dessas atividades foi revisada por três professores e, em seguida, foi aplicada a uma turma de dependência em Cálculo IV – Equações Diferenciais - com 15 alunos, que cursavam Engenharia Química, de Produção, de Telecomunicações, de Controle e Automação e da Computação em uma faculdade do norte de Minas Gerais.

Para realização das atividades, os alunos se organizaram livremente em seis duplas e um grupo de três alunos. Algumas atividades foram desenvolvidas no laboratório de Informática da mesma instituição, com a utilização do *software* GeoGebra4.

A pesquisa foi caracterizada como qualitativa e os instrumentos de coleta de dados foram os seguintes: a observação participante, os registros escritos contendo o desenvolvimento das atividades, as respostas e os comentários dos alunos às questões propostas na sequência, além de anotações feitas pela pesquisadora durante a aplicação das atividades.

A autora observou que é possível elaborar e realizar estratégias e situações que possam vir a minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo de Equações Diferenciais Ordinárias. A sequência de atividades construída, após revisada pela autora e seu orientador, constituiu-se em uma proposta metodológica focada para um curso inicial de Equações Diferenciais Ordinárias.

Teses levantadas

Arslan (2005) em sua tese de doutorado, intitulada "*L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S: Est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences?"*, objetivou investigar as possibilidades de desenvolver uma abordagem qualitativa de Equações Diferenciais no ensino secundário na França (equivalente ao Ensino Médio), no qual já eram feitas abordagens algébrica e numérica dessas equações.

Baseado em resultados de pesquisas desenvolvidas no nível universitário acerca da abordagem qualitativa de Equações Diferenciais, o autor lançou a hipótese de ser viável essa abordagem no nível secundário de ensino e de que a introdução às Equações Diferenciais poderia ser feita pela abordagem qualitativa antes de ser ensinada a resolução algébrica.

O experimento foi realizado com uma turma do *Terminale S* (equivalente à 3ª série do Ensino Médio - modalidade científico) do liceu Pablo Néruda, em Saint Martin d'Hères, na França. Arslan (2005) ressaltou que a turma era composta por alunos não repetentes e repetentes, e que isso forneceu a oportunidade de observar a viabilidade da abordagem qualitativa para estudantes que não conheciam a resolução algébrica (ou seja, estudantes não repetentes) e, por outro lado, permitiu medir, por meio dos repetentes, o impacto do conhecimento de resolução algébrica diante da abordagem qualitativa.

O autor utilizou a noção de Registro de Representação Semiótica introduzida por Duval, o modelo cK¢ introduzido por Balacheff e a metodologia Engenharia Didática segundo Artigue.

Também analisou currículos oficiais e livros didáticos do Nível Médio. Essa análise visou, além de confirmar a predominância da abordagem algébrica no referido nível, acompanhar a evolução do ensino de Equações Diferenciais.

Dentre suas observações, Arslan (2005) destacou que o sucesso dos alunos dependentes que recorriam às estratégias "algébricas", foi menor que dos outros alunos que preferiram usar estratégias do estudo qualitativo e concluiu que os resultados obtidos validaram sua hipótese.

A tese de doutorado de Javaroni (2007), com título "Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias", teve por objetivo analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias a partir da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos, auxiliada pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).

A pesquisa foi conduzida pela pergunta diretriz: Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?

Os dados foram coletados em um Curso de Extensão Universitária, intitulado "Modelagem e Métodos Computacionais em Equações Diferenciais

Ordinárias", com duração de 36 horas, oferecido aos alunos do Curso de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP).

A autora realizou, em 2005, um estudo piloto com alunos do curso de Ecologia, na disciplina Cálculo II, disciplina na qual é estudado, dentre outros conteúdos, introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, com o objetivo de verificar se as atividades propostas estavam encaminhadas de tal forma a suscitar discussões nos grupos de alunos. Após esse piloto, essas atividades foram reelaboradas para fazerem parte das atividades que foram desenvolvidas pelos alunos participantes da pesquisa.

A coleta de dados ocorreu por meio dos registros elaborados pelo *software* Camtasia, filmagens e notas de campo. Os alunos organizados em três duplas e um trio desenvolveram atividades que envolveram aplicação do conceito "Modelagem Matemática e Aplicação", trazido em *Applications* (2002 apud JAVARONI, 2007, p. 30). Para a exploração das atividades foram utilizados os *softwares* Winplot, Maple, um *applet* e a planilha de cálculo Excel, além de caderno para anotações.

No início do Curso de Extensão Universitária foram aplicados dois questionários aos alunos. O primeiro para delinear o perfil dos participantes e o segundo, com perguntas teóricas do conteúdo específico de Equações Diferenciais, foi aplicado novamente no final do curso, com o objetivo de buscar evidências ou indícios da atuação dos resultados do Curso na formação desses alunos.

Javaroni conclui que a interação entre os estudantes e os *softwares* utilizados, proporcionou novas possibilidades para a abordagem qualitativa dos modelos estudados, sugerindo a necessidade de repensar o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias de forma a enfatizar o aspecto geométrico de modelos matemáticos além do aspecto algébrico.

Gallegos (2007) em sua tese de doutorado com o título "*Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de* *modélisation d'élèves en Terminale S*", abordou o ensino e aprendizagem de modelagem como objeto de ensino no Nível Médio no sistema escolar francês.

A tese apresentou dois objetivos principais:

1. O primeiro consistiu em estudar de que forma a modelagem vista como abordagem de ensino é empregada no sistema escolar francês;
2. O segundo consistiu em investigar os processos cognitivos dos alunos quando estão diante de tarefas de modelagem, de forma a identificar suas dificuldades ao resolver um problema particular.

Visando o primeiro objetivo, a autora investigou o tipo de atividades e problemas propostos na disciplina de Matemática, em uma classe de *Terminale S*, para introduzir a noção de Equações Diferenciais como ferramenta de modelagem. As análises foram baseadas na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e, em particular, na noção de praxeologia.

Após os resultados da análise praxeológica de três livros didáticos de Matemática, Gallegos (2007) decidiu expandir o seu campo de estudo à disciplina de Física e reformulou suas questões de pesquisa. Relatou que a expansão do domínio de investigação ocorreu devido à observação de que a abordagem de modelagem na disciplina de Matemática era muito reduzida em relação à abordagem tomada como referência na pesquisa, baseada em Borromeo (2006 apud GALLEGOS, 2007, p. 44), a partir de uma perspectiva cognitiva.

A pesquisadora, então, realizou uma análise dos currículos oficiais e de três livros didáticos de Física de uma classe de *Terminale S*, tendo como objeto de estudo o processo de modelagem pelos alunos na disciplina de Física de certos fenômenos físicos com a ajuda de ferramentas matemáticas. Em particular, a modelagem de fenômenos em circuitos elétricos com o auxílio da ferramenta matemática Equações Diferenciais.

Para abordar o segundo objetivo, foi realizada uma experimentação que consistiu no desenvolvimento de tarefas relacionadas à modelagem do funcionamento de um desfibrilador cardíaco por meio de Equações Diferenciais, visando analisar a forma como os alunos agem quando são confrontados com uma situação não habitual, com base nas ideias de Borromeo sobre a Modelagem Matemática.

As observações ocorreram em turmas de Física e de Matemática de classes de *Terminale S* dos liceus Pablo Neruda, International e La Saulaie, na região de Grenoble, na França. No total, 25 alunos participaram da situação experimental que ocorreu no período de março a abril de 2005. Gallegos (2007) contou com o apoio de professores responsáveis pelas disciplinas nas classes e os dados foram coletados por meio de produções escritas e gravações de áudio das trocas verbais entre duplas, ou trios, de alunos.

Dentre suas conclusões, Gallegos (2007) ressaltou que a análise da transposição da abordagem de modelagem para classe de Matemática mostrou que essa abordagem se reduz a tarefas somente de domínio matemático. Observou, por exemplo, que os tipos de tarefas existentes na classe de Matemática pouco exigiam dos alunos na etapa de construção do modelo matemático e que por vezes o trabalho do aluno era limitado à etapa de resolução de Equações Diferenciais. Observou também que, contrariando as ambições declaradas nos currículos oficiais sobre a interação Física-Matemática, os alunos têm dificuldade de usar as técnicas aprendidas na disciplina de Matemática quando colocados em prática na situação experimental na disciplina de Física, mesmo eles estando em frente ao mesmo objeto do saber: a abordagem de modelagem. Essa constatação sugere que o contrato didático ligado à modelagem em classe de Matemática é diferente daquele praticado em classe de Física.

Com relação às Equações Diferenciais como uma ferramenta de modelagem na experimentação, Gallegos observou que esse conceito matemático em classe de *Terminale S* está relacionado às dificuldades dos estudantes em conceber o que é uma Equação Diferencial. Evidenciou dificuldades para o estabelecimento de uma condição inicial relacionada com a Equação Diferencial, e também para compreender que as soluções de uma Equação Diferencial são funções, e não constantes.

Dullius (2009) em sua tese de doutorado, intitulada "*Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico"*, propôs e investigou uma abordagem diferenciada de ensino para tratar o conteúdo de Equações Diferenciais, baseada na solução de situações problema e no uso de recursos computacionais.

Teve como objetivos a identificação das principais dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais; a elaboração de uma proposta pedagógica que potencialmente os auxiliasse na superação dessas dificuldades e que os ajude a perceber a importância desse conteúdo para a sua formação; o estudo das potencialidades do uso de recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais nesse contexto; o estudo da contribuição da interação entre professor-aluno-material didático, de modo que proporcione condições favoráveis para uma aprendizagem significativa desse conteúdo.

Dullius (2009) realizou, inicialmente, um estudo preliminar para identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais. Para tal, realizou uma entrevista semiestruturada com quatro professores experientes no ensino de Equações Diferenciais e acompanhou uma turma com 34 alunos do curso de Licenciatura em Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES em Lajeado – RS, durante o desenvolvimento da disciplina Equações Diferenciais, ministrada pela autora, fez anotações em diário de campo e aplicou aos alunos, um questionário, no final do semestre.

A autora apontou dificuldades relacionadas aos conteúdos de Matemática básica, dificuldades com a interpretação de conceitos, principalmente, no que se refere à derivada. Indicou que os alunos associam uma Equação Diferencial Ordinária a um processo puramente analítico, sentem dificuldades para pensar simultaneamente de modo algébrico e gráfico, não demonstram interesse pelo conteúdo.

A prática pedagógica da investigação ocorreu com a realização de três estudos, aplicados em semestres diferentes, com alunos dos cursos de Química Industrial e Engenharias (de Computação, de Produção, de Automação e

Controle, e Ambiental) da UNIVATES – RS, na disciplina Cálculo III, em que é abordado, dentre outros, conteúdos de Equações Diferenciais Ordinárias.

O material instrucional foi elaborado com base na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. A metodologia empregada na prática pedagógica teve como suporte a Teoria Sóciointeracionista de Vygotsky. Os dados foram coletados por meio de questionário, entrevista semiestruturada, guias de atividades, diários de campo, dentre outros instrumentos.

Dullius (2009) ressaltou que a realização dos três estudos constituiu-se em um processo de melhoramento das práticas pedagógicas adotadas, dos materiais elaborados e dos instrumentos de coletas de dados.

A autora afirmou que a abordagem adotada mostrou resultados positivos em relação à participação e interação dos alunos entre si, com a professora, com o assunto ensinado e os recursos computacionais, concluindo que a abordagem proposta, executada e avaliada se mostrou um meio viável para conduzir os alunos a uma Aprendizagem Significativa.

Consta na tese de Dullius (2009) uma revisão bibliográfica de trabalhos relacionados ao ensino e aprendizagem do conteúdo de Equações Diferenciais e, também, de artigos relacionados com as concepções dos professores que ensinam esse conteúdo.

Cita dois trabalhos de Moreno e Azcárate (1997, 2003) que investigaram as concepções dos professores de Matemática sobre o ensino de Equações Diferenciais. No artigo publicado em 1997, os autores detectaram dificuldades relativas a "o que e como ensinar esse conteúdo?" e destacaram a existência de três estilos de ensino diferentes adotados por boa parte dos professores: (i) o estilo tradicional focado em técnicas analíticas de resolução de Equações Diferenciais com uma abordagem mais estrutural do conteúdo; (ii) o estilo avançado que considera as Equações Diferenciais como um instrumento para abordar modelos matemáticos e resolver problemas, abordando simultaneamente representações gráficas, numéricas e simbólicas e (iii) o estilo transitório, no qual o professor entra em conflito entre o "que faz" e o "que se poderia fazer". (DULLIUS, 2009, p. 17-21)

Com relação ao artigo publicado em 2003, Dullius (2009) expôs que os autores apresentaram uma reflexão sobre o ensino de Equações Diferenciais em faculdades de ciências experimentais e um estudo das concepções e crenças de professores universitários de Matemática sobre as Equações Diferenciais, seu ensino e aprendizagem. Os autores apontaram muitos motivos que levam o professor a atuar de uma determinada maneira e não de outra, como sua formação profissional, sua concepção de ensino, seu interesse e dedicação, entre tantos outros. Os autores verificaram ainda a persistência de métodos de ensino tradicional frente a alternativas mais inovadoras no contexto de ensino das Equações Diferenciais.

Dentre os estudos que se referem ao ensino e a aprendizagem de Equações Diferenciais, destacou duas pesquisas de Habre (2000, 2003). O primeiro trabalho investigou se os estudantes consideravam o campo de direções como um meio para resolver Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, investigando também as habilidades dos estudantes em converter informações simbólicas em gráficas e vice-versa. O estudo constatou uma rejeição pelo enfoque geométrico por parte dos alunos e também mostrou que os estudantes encontraram dificuldades para pensar simultaneamente de modos diferentes (algébrico e gráfico). Na segunda pesquisa, o autor investigou a aceitação dos estudantes em resolver Equações Diferenciais geometricamente, e os resultados mostraram que inicialmente os estudantes apresentaram resistência em aceitar a abordagem geométrica, mas ao longo do curso muitos estudantes aceitaram e apreciaram sua utilidade. (DULLIUS, 2009, p. 21-28)

Com relação às dificuldades de aprendizagem de Equações Diferenciais e à compreensão de ideias centrais da Matemática, Dulius (2009) citou os trabalhos: Rasmussen (2001) que investigou sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em abordar equilibradamente, métodos analíticos, gráficos e numéricos para a análise de Equações Diferenciais; Stephan e Rasmussen (2002), focado na abordagem de funções-solução. Citou também Borssoi e Almeida (2004), que referenciamos em “Artigos levantados”.

Relacionadas às dificuldades dos estudantes na interpretação dos termos de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem num contexto de modelagem e também na compreensão das unidades dos termos dessas equações por parte de estudantes de Engenharia, citou, respectivamente, os trabalhos de Rowland e Jovanoski (2004) e de Rowland (2006).

Fecchio (2011) em sua tese de doutorado, intitulada “A Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade na introdução do conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia”, objetivou investigar a utilização da Modelagem Matemática segundo Bassanezi aliada à Interdisciplinaridade e à Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, como recursos facilitadores na introdução do conceito de Equação Diferencial para os alunos do ciclo básico da Engenharia.

A pesquisa foi norteada pela seguinte questão: Atividades interdisciplinares que utilizam a Modelagem Matemática propiciam a aprendizagem de Equações Diferenciais?

A investigação foi caracterizada como qualitativa, do tipo pesquisa-ação, realizada com 12 alunos do 2º ano de um curso de Engenharia de um Centro Universitário da região do grande ABC, no Estado de São Paulo, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral II.

O autor relatou que inicialmente foram selecionadas três atividades interdisciplinares que utilizaram a Modelagem Matemática como recurso didático, as quais foram desenvolvidas por duplas de alunos, em sala de aula e nos laboratórios de Química e Informática. Cada atividade foi realizada em quinze etapas, divididas em quatro ciclos, nomeados conforme as fases da Modelagem: Experimentação, Abstração, Resolução e Validação. Foram utilizados os *softwares* Excel e Scientific Workplace.

Na tese, o autor optou pela apresentação de uma das atividades selecionadas, a qual visou instigar os alunos a obter um modelo matemático envolvendo uma Equação Diferencial Ordinária. Foi considerado que o desafio proposto no objetivo dessa atividade exigiu do professor-orientador a construção de condições para que, em uma situação a-didática as duplas pudessem expressar matematicamente um fenômeno real governado por uma lei empírica. A proposta das duas atividades, cuja análise não foi objeto da pesquisa, consta nos anexos da tese.

Os dados foram coletados por meio de relatórios de atividades, resolução de exercícios, apresentação escrita das conclusões dos grupos, apresentação oral dos questionamentos e prova individual.

A análise dos dados obtidos na experimentação possibilitou ao autor afirmar que a Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade, conduzidas conforme indicado em sua tese, apresentaram novas possibilidades de exploração do conteúdo Equações Diferenciais, permitindo aos alunos aplicarem seus conhecimentos em novas situações, contribuindo para o entendimento e a motivação dos estudantes da área de Engenharia.

Reflexões sobre o levantamento bibliográfico

As pesquisas consultadas, de modo geral, ressaltam que o ensino de Equações Diferenciais vem acontecendo de modo a concentrar uma maior atenção nas soluções analíticas a partir de manipulações algébricas de resolução e, nesse processo, relatam dificuldades de aprendizagem dos alunos referentes à Matemática básica, à aplicação dos conceitos de derivada e integral e à interpretação de taxas de variação instantânea.

Ressaltam, ainda, que o próprio enfoque que vem sendo dado ao conteúdo não propicia a compreensão do mesmo, o que pode acarretar aos alunos dificuldade em conceber o que é uma Equação Diferencial e, por conseguinte, em sua aplicação em problemas contextualizados que exijam interpretação. Alguns trabalhos expressam a dificuldade que os estudantes têm para pensar simultaneamente de modo algébrico e gráfico.

Para contribuir com a aprendizagem, a maioria dos autores consultados aponta como possibilidade para o ensino de Equações Diferenciais o enfoque qualitativo do assunto, de forma contextualizada, a partir de situações-problema e favorecendo o equilíbrio entre a abordagem analítica, numérica e gráfica, por meio da utilização de recursos computacionais que auxiliem e agilizem o processo. Mas reforçam o cuidado com a escolha do programa computacional para o ensino do conteúdo, de modo a evitar que a atenção dos alunos se concentre em aprender a sintaxe do *software*, em vez de aprender o conteúdo matemático.

Cabe ressaltar que a Modelagem Matemática, associada a ferramentas computacionais, foi a abordagem de ensino desenvolvida em grande parte das investigações, apresentando resultados positivos aos investigadores. Os pesquisadores consideram importante trabalhar situações-problema em contextos de interesse do aluno, principalmente, associados à futura área de atuação, uma vez que, dessa forma, os alunos apresentam um bom retorno à pesquisa e sentem-se mais motivados ao estudo. Foi enfatizada a importância dos professores buscarem usar de forma equilibrada e simultaneamente, métodos analíticos, gráficos e numéricos no estudo de Equações Diferenciais, sugerindo a inclusão de mais perguntas qualitativas e conceituais na abordagem desse conteúdo de modo a favorecer a compreensão dos conceitos.

1.2 Delimitação do Tema e Justificativa

O tema deste projeto de pesquisa envolve os processos de ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Engenharia, mais especificamente as estratégias e metodologias de ensino desenvolvidas para viabilizar o processo de aprendizagem.

O interesse em trabalhar com essa temática surge inicialmente em função de observarmos indícios de dificuldades no processo de aprendizagem dos alunos no estudo dessas equações, no decorrer de nossa experiência docente em Cursos de Engenharia, em particular, nos Cursos de Engenharia Ambiental e Engenharia de Produção da Universidade do Estado do Pará (UEPA), desde 2002. Percebemos tais dificuldades tanto no uso de técnicas para resolução dessas equações, quanto na produção de significados e compreensão de conceitos.

De modo geral, as pesquisas consultadas no levantamento bibliográfico, descrito na seção 1.1 ressaltam que o ensino de Equações Diferenciais vem acontecendo de modo a concentrar uma maior atenção nas soluções analíticas a partir de manipulações algébricas de resolução e, nesse processo, relatam dificuldades de aprendizagem dos alunos referentes à Matemática básica, à aplicação dos conceitos de derivada e integral e à interpretação de taxas de variação instantânea.

Destacam que o enfoque que vem sendo dado ao conteúdo não propicia a compreensão do mesmo, o que pode acarretar aos alunos dificuldade em conceber o que é uma Equação Diferencial e, por conseguinte, em sua aplicação em problemas que exijam interpretação.

Ao lado disso, o artigo 4º da Resolução CNE/CES, de 11 de março 2002, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, enfatiza que a formação do engenheiro tem por objetivo dotar o profissional dos conhecimentos requeridos para o exercício, dentre outras, das seguintes competências e habilidades:

> I- Aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;
> II- Projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
> III- Comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica. (BRASIL, 2002, p. 1)

Dessa forma, entendemos que compreender os conceitos e reconhecer as aplicações de conteúdos de Matemática, em particular, de Equações Diferenciais Ordinárias em seu curso é fundamental na formação do futuro engenheiro, uma vez que Equações Diferenciais é um ramo da Matemática de grande proximidade e interação com outras Ciências.

Diante do exposto, vemos a importância de repensar o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias. Os trabalhos levantados em nossa revisão bibliográfica indicam que já existe uma busca por novas direções nesse ensino, em especial em cursos de Engenharia, e apontam a necessidade de investigar possibilidades ou alternativas para esse ensino de modo a contribuir com a aprendizagem dos alunos nesse estudo, favorecendo a compreensão dos conceitos, o que justifica a elaboração deste projeto.

1.3 Questão de Pesquisa

Diante do contexto exposto, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: Quais componentes devem estar presentes em estratégias de ensino com vistas a favorecer a aprendizagem de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia?

1.4 Hipótese

Com base na revisão bibliográfica, lançamos a hipótese de que uma engenharia didática que apresente uma sequência didática para o Ensino de Equações Diferenciais composta de atividades que articulem abordagens gráfica, algébrica e numérica, envolvendo situações-problema, por meio de recursos computacionais, é uma possibilidade para responder a questão de pesquisa.

1.5 Objetivos

O objetivo geral da pesquisa consiste em investigar quais componentes devem estar presentes em estratégias de ensino que favoreçam a aprendizagem de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia Ambiental e em Engenharia de Produção da Universidade do Estado do Pará (UEPA).

Especificamente, objetivamos elaborar e realizar uma engenharia didática que apresente uma sequência de ensino para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias para alunos dos cursos supracitados, composta de atividades que envolvam situações-problema de modo a articular as abordagens gráfica, algébrica e numérica, por meio da utilização de recursos computacionais.

1.6 Fundamentos teórico-metodológicos

A metodologia de pesquisa adotada foi a Engenharia Didática que é apresentada por Artigue (1988), pois consideramos que essa metodologia contempla as demandas da complexidade do contexto de sala de aula, além de permitir a validação das hipóteses pela confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori* e favorecer o realinhamento das atividades durante o processo.

Como consequência dessa escolha temos que a fundamentação teórica da pesquisa é a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), tanto para a elaboração e realização da sequência de ensino como para a análise dos resultados.

O termo Engenharia Didática, conforme, Artigue (1988), surge na Didática da Matemática Francesa, no início dos anos 1980, com a intenção de rotular uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, apoia-se em conhecimentos científicos da área, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar com objetos mais complexos que os objetos clarificados pela ciência.

A noção de Engenharia Didática foi se construindo com uma dupla função, na qual ela pode ser entendida tanto como uma metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino.

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, primeiramente, por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, ou seja, na produção, realização, observação e análise de sessões de ensino.

Artigue (2009) destaca algumas características da Teoria das Situações Didáticas que influenciam a noção de Engenharia Didática.

O primeiro ponto citado é o papel central dado à noção de situação. A aprendizagem é vista como um processo de adaptação que depende das características das situações em que o mesmo se desenrola. A Teoria das Situações Didáticas visa à compreensão dessa dependência e o desenvolvimento de instrumentos teórico-metodológicos que favoreçam o processo de adaptação, ou seja, o aprendizado.

Em segundo lugar, a atenção destinada à epistemologia do conhecimento alvo do aprendizado. Para cada corpo de conhecimento matemático, a teoria busca anexar uma situação fundamental ou um pequeno conjunto de situações fundamentais que refletem sua essência epistemológica. Ou seja, uma situação em que o conhecimento matemático a ensinar é a resposta considerada mais adequada para o problema matemático gerado.

Outro ponto é a importância dada às características do *milieu* da situação e às características da interação dos alunos com esse *milieu* buscando garantir uma adaptação baseada no problema matemático em jogo, não na orientação e ajuda do professor ou na referência ao contrato didático.

A autora cita a distinção entre três funcionalidades diferentes do conhecimento matemático: a ação, a expressão ou a comunicação e a demonstração.

Destaca, ainda, a visão do papel do professor que tem como funções essenciais a concepção e a organização da situação, a gerência dos processos de discussão e a institucionalização dos conhecimentos.

Essas características relacionadas à Teoria das Situações Didáticas explicam a atenção específica que a Engenharia Didática confere à análise epistemológica e matemática para a elaboração do projeto de tarefas e a organização do *milieu*, assim como, esclarecem o papel limitado dado ao professor além de sua contribuição essencial nos processos de validação e institucionalização. Elas também definem a forma de organização de uma Engenharia Didática cujo processo experimental se compõe de quatro fases: 1- análises preliminares, 2- concepção e análises *a priori*, 3- experimentação e 4- análises *a posteriori* e validação. Embora transpareça a ideia sequencial, o processo pode envolver retrocessos e avanços em consonância com as observações e os trabalhos de análises.

A fase das análises preliminares para a concepção da Engenharia Didática ocorre a partir de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, apoiando-se na análise de aspectos relacionados, na maior parte dos casos, à epistemologia dos conhecimentos visados pelo ensino, ao estado das práticas e realizações didáticas e às características cognitivas dos alunos.

Artigue (1988) ressalta que as análises preliminares realizadas pelo pesquisador com o objetivo de servirem de base à concepção da Engenharia Didática são retomadas e aprofundadas no decorrer das diferentes fases do trabalho, em função das necessidades.

Na fase da concepção e análise *a priori* o investigador orientado pelas análises preliminares decide agir sobre certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar, denominadas variáveis de comando. Artigue (1988) distingue esses variáveis como macrodidáticas ou globais, concernentes à organização global da Engenharia Didática, e microdidáticas ou locais, que dizem respeito à organização local da Engenharia Didática, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase. Embora as escolhas globais possam ser apresentadas separadamente das escolhas locais, elas não são independentes.

De acordo com Artigue (1988), o objetivo da análise *a priori* é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, fundamenta-se em hipóteses e será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a ser realizado na quarta fase.

A análise *a priori* envolve uma parte descritiva acompanhada de outra parte preditiva, e está centrada nas características de uma situação adidática que se quis elaborar e que se quer aplicar aos alunos visados pela investigação. Na análise *a priori,* descrevem-se as escolhas das variáveis locais efetuadas e as características da situação adidática a ser desenvolvida, analisa-se o desafio da situação para o aluno e preveem-se os comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos.

A fase da experimentação, que é clássica, é a fase em que ocorre a implementação da Engenharia Didática com certa população de alunos. É o momento de colocar em prática o plano delineado, em que podem surgir indicativos da necessidade de ajustes, e a consequente revisão das análises *a priori* ou das análises preliminares.

A última fase é aquela da análise *a posteriori* e da validação. Essa fase se apoia sobre todos os dados coletados durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, complementados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas como questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação quanto no final dela.

Artigue (1988) indica que as hipóteses levantadas no início da Engenharia Didática são validadas ou refutadas na confrontação das análises *a priori* e *a posteriori.* Esse sistema de validação essencialmente interna caracteriza uma singularidade da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

No que segue, cada capítulo corresponde a uma fase da engenharia didática desenvolvida neste trabalho.

CAPÍTULO 2

ESTUDOS PRELIMINARES

Este capítulo corresponde à primeira fase da engenharia didática. Nele são, inicialmente, abordadas questões relacionadas ao ensino de EDO. Em seguida, são apresentados resultados de um questionário que teve por objetivo coletar informações referentes a conhecimentos de alunos de Engenharia acerca de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

2.1 O Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias

O levantamento bibliográfico, descrito na seção 1.1, apresenta uma visão do ensino de EDO e seus efeitos, revela indícios de dificuldades de aprendizagem dos alunos e também sugere possibilidades para esse ensino.

De modo geral, as pesquisas consultadas relatam que o ensino das EDO vem acontecendo de modo a concentrar uma maior atenção nas soluções analíticas a partir de manipulações algébricas de resolução, ou seja, priorizando o enfoque algébrico, o que pode contribuir para que os alunos não percebam o potencial dessas equações e sua importância como ferramenta matemática para resolver problemas relacionados a situações da realidade, e que talvez por isso os alunos não demonstrem interesse em aprender esse conteúdo.

Visando analisar as restrições e exigências que contribuíram para chegar a esse equilíbrio do sistema didático no enfoque algébrico, e procurar determinar condições para estabelecer um novo ponto de equilíbrio mais satisfatório, recorremos à noção de quadro introduzida por Douady (1984 apud ARTIGUE, 1994) para distinguir três quadros essenciais para a solução de Equações Diferenciais:

- quadro algébrico, da resolução que tem como alvo a expressão exata das soluções implícitas ou explícitas por meio de fórmulas algébricas, desenvolvimentos em série, e expressões integrais;

- quadro numérico, da resolução que tem por alvo o controle das soluções por meio de aproximações numéricas;

- quadro geométrico, da resolução que estuda aspectos geométricos das soluções, utilizando campos de direções. Estudo que visa a caracterização topológica do conjunto de curvas de solução, classificado como estudo qualitativo.

Nossos estudos indicam que o ensino atual de EDO está centrado no quadro algébrico, uma característica inicial do desenvolvimento da teoria, apesar de pesquisas apontarem iniciativas de mudanças nos últimos anos, impulsionadas pelo avanço dos equipamentos computacionais *e softwares* matemáticos.

Considerando que a evolução do campo de estudo das Equações Diferenciais está ligada à crescente importância de aspectos numéricos e qualitativos nessa área, isso sugere que o ensino de EDO deve organizar-se de modo a articular os três aspectos: algébricos, gráficos e numéricos, sob pena de explorar parcialmente as análises das soluções. Cabe ressaltar que os recursos computacionais disponíveis e acessíveis na atualidade contribuem para a promoção dessa articulação.

Dessa forma, percebemos a importância de estudar a viabilidade de uma abordagem epistemologicamente mais satisfatória para o ensino de EDO de modo a promover a extensão do ensino atual de EDO aos outros quadros.

2.2 Questionário da Fase Preliminar

2.2.1 Descrição do Questionário

O questionário da fase preliminar (Apêndice A) teve por objetivo coletar informações referentes a conhecimentos de alunos de Engenharia acerca de conceitos do Cálculo Diferencial Integral, especialmente, relacionados às Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), visando antecipar dificuldades de aprendizagem no estudo das EDO.

Os sujeitos são alunos dos Cursos de Graduação em Engenharia Ambiental e Graduação em Engenharia de Produção da Universidade do Estado do Pará (UEPA) que cursaram a disciplina Complementos de Cálculo Diferencial e Integral no 1º semestre de 2013, na qual é abordado o assunto Equações Diferenciais Ordinárias. A participação deles foi voluntária.

O questionário foi aplicado nos dias 17, 19 e 20 de dezembro 2013, e foi destinado, para as respostas, aproximadamente, 1 hora e 40 minutos, em cada dia, no Centro de Ciências Naturais e Tecnologia (CCNT) da UEPA. O tempo de duração do questionário foi calculado pela estimativa de que os alunos resolveriam a 3ª e a 8ª questão, cada uma, em um intervalo de 15 minutos, e cada uma das demais questões em um intervalo de 10 minutos.

Dezessete alunos participaram, sendo dezesseis alunos do Curso de Engenharia Ambiental e um do Curso de Engenharia de Produção. Em cada dia, sujeitos diferentes responderam ao questionário integralmente. Quatro alunos participaram no dia 17, três alunos no dia 19 e dez alunos no dia 20.

Na análise dos resultados, os sujeitos terão suas identidades preservadas, sendo usadas letras do alfabeto de A - Q para mencioná-los (Aluno A, Aluno B,..., Aluno Q).

O questionário constou inicialmente de interrogativas que buscaram identificar os sujeitos que reprovaram alguma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, bem como verificar quais deles já cursaram com aprovação a disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral, descritas no Quadro 2, cujo objetivo foi obter um perfil dos alunos em relação à aprovação em disciplinas de Cálculo como um dado complementar.

QUADRO 2. Questões referentes ao perfil do aluno

Perfil do discente: Você ficou reprovado em alguma das seguintes disciplinas em algum semestre? _____ Em caso afirmativo, marque com X a(s) disciplina(s). ( ) Cálculo Diferencial e Integral I ( ) Cálculo Diferencial e Integral II ( ) Complemento de Cálculo Diferencial e Integral. Você já creditou a disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral? _____

Fonte: Questionário da fase preliminar

Inicialmente alguns alunos não responderam a alguma pergunta do perfil do discente ou responderam de maneira incorreta a questão "Você já creditou a disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral?", talvez por interpretar incorretamente a palavra "creditou". Tendo notado esse fato indagamos oralmente essas questões no momento em que os alunos devolveram o questionário e obtivemos as respostas condizentes.

QUADRO 3. Respostas dos alunos às questões sobre o perfil discente

	Reprovado na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, em algum semestre.	Reprovado na disciplina Cálculo Diferencial e Integral II, em algum semestre.	Reprovado na disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral, em algum semestre.	Obteve crédito na disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral.
Aluno A	Não	Não	Não	Sim
Aluno B	Não	Não	Não	Sim
Aluno C	Não	Não	Não	Sim
Aluno D	Não	Sim	Não	Sim
Aluno E	Não	Não	Não	Sim
Aluno F	Não	Não	Não	Sim
Aluno G	Não	Não	Não	Sim
Aluno H	Não	Não	Sim	Não
Aluno I	Não	Não	Sim	Não
Aluno J	Não	Não	Sim	Não
Aluno K	Não	Não	Não	Sim
Aluno L	Sim	Sim	Sim	Não
Aluno M	Não	Não	Não	Sim
Aluno N	Sim	Não	Não	Sim
Aluno O	Não	Não	Não	Sim
Aluno P	Não	Não	Não	Sim
Aluno Q	Não	Não	Não	Sim

Fonte: Autora (2014)

O Quadro 3 indica que em nossa amostra há um aluno (Aluno L) reprovado nas três disciplinas questionadas, um aluno (Aluno N) reprovado apenas em Cálculo Diferencial e Integral I, um aluno (Aluno D) reprovado apenas em Cálculo Diferencial e Integral II e três alunos (Alunos H, I, J) reprovados apenas na disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral. E, ainda, que treze alunos já cursaram com aprovação a disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral.

No Quadro 4 constam os objetivos que nortearam a elaboração de cada questão e seu respectivo enunciado.

QUADRO 4. Descrição das questões do questionário da fase preliminar

	Objetivos	**Enunciados**
1ª Questão	Verificar se o aluno reconhece a interpretação geométrica da derivada.	Sabendo que a reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto x_0 tem inclinação positiva, você diz que o valor $f'(x_0)$ tem sinal positivo ou negativo? Por quê?
2ª Questão	Verificar se o aluno reconhece como resultado do Teorema Fundamental do Cálculo que, em determinadas condições a derivação e a integração são inversas uma da outra.	Considerando que a função velocidade $v = v(t)$ de uma partícula que se move em linha reta a partir de um ponto fixo O é dada pela derivada da função de posição $s = s(t)$, isto é, $v(t) = s'(t)$ para cada t, como você encontra a função de posição $s = s(t)$ conhecendo a função velocidade $v = v(t)$ da partícula?
3ª Questão	Verificar se o aluno aplica adequadamente métodos de integração.	Como você resolve as seguintes integrais: a) $\int \frac{1}{x} dx$ b) $\int \frac{1}{x^2} dx$ c) $\int \frac{1}{1-x} dx$ d) $\int e^x \, dx$ e) $\int e^{2x} \, dx$ f) $\int x \, e^{x^2} dx$ g) $\int \cos x \, dx$ h) $\int \cos 2x \, dx$
4ª Questão	Verificar se o aluno identifica, por meio de notações de EDO, a variável dependente e a variável independente da equação.	Como você identifica a variável dependente e a variável independente em cada uma das seguintes equações diferenciais? a) $\frac{dy}{dx} + 2y = x$ b) $x' = 2tx$
5ª Questão	Investigar o conceito de solução de uma EDO que o aluno apresenta.	A função $y = \frac{\text{sen}\,(2x)}{2} + c$, em que c é uma constante arbitrária, é solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} - \cos(2x) = 0$? Por quê?
6ª Questão	Investigar o conceito de solução de uma EDO que o aluno apresenta.	A função $y = -\frac{1}{x} + 1$ é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{x^2}$? Por quê?

7ª Questão	Verificar se o aluno interpreta coerentemente o enunciado da questão e associa taxa de variação instantânea à derivada.	Adaptada de Zill (2003, p. 23): Uma das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional humano por meio da Matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente, a ideia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população total do país cresce em um determinado instante é proporcional à população total de um país naquele instante. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população total no instante t, como você expressa essa hipótese?
8ª Questão	Analisar as estratégias de resolução do aluno.	Como você resolve as seguintes equações diferenciais: a) $x\,\mathrm{dx} + (1 + x^2)\mathrm{dy}=0$ b) $y' - y = \mathrm{e}^t$
9ª Questão	Verificar se o aluno representa geometricamente a solução de um problema de valor inicial, assim como, analisar as suas estratégias de resolução para o problema.	Como você esboça a curva integral que representa o gráfico da solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ que satisfaz a condição $y(0) = 1$?

Fonte: Autora (2014)

2.2.2 Resultados e Análises referentes ao Questionário

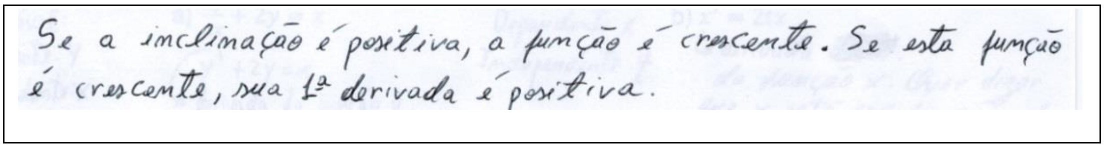
Observamos incialmente que os Alunos M e H escreveram no questionário que tiveram muitas dificuldades na disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral, alegando terem cursado as disciplinas Cálculo Diferencial Integral I e Cálculo Diferencial e Integral II na modalidade regular modular, em que, segundo eles, não compreenderam conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. De acordo com o Quadro 2, ambos obtiveram aprovação em Cálculo I e II, e apenas o Aluno M obteve aprovação em Complemento de Cálculo Diferencial e Integral.

Resultados e análises referentes à 1ª questão

Dez alunos responderam corretamente afirmando que $f'(x_0)$ tem sinal positivo. Porém, aluno algum justificou sua resposta reconhecendo que o valor $f'(x_0)$ é a inclinação da reta tangente em questão.

O Aluno F escreveu a resposta apresentada na Figura 1, em que supomos que ele fez alusão a uma consequência do Teorema do Valor Médio para o estudo do crescimento e do decrescimento de funções.

FIGURA 1. Resposta do Aluno F à 1ª questão



Fonte: caderno do aluno

Quatro alunos responderam de forma errada parecendo desconsiderar a informação dada sobre o coeficiente da reta tangente em questão. Desses alunos, três escreveram que $f'(x_0)$ teria sinal negativo devido se tratar de uma derivada, e um respondeu que o sinal $f'(x_0)$ dependeria da função f. Três alunos não responderam essa questão.

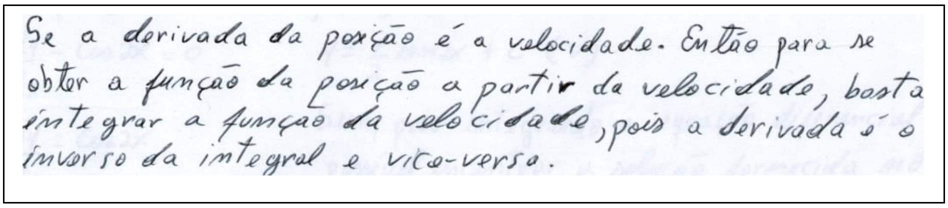
Pudemos observar que os sujeitos pesquisados expressaram dificuldades quanto à interpretação geométrica da derivada. Tendo em vista a importância dessa interpretação para o estudo qualitativo de EDO, os resultados obtidos sugerem que essa interpretação seja revisada com os alunos de modo que mobilizem conhecimentos referentes a ela, antecedendo uma abordagem qualitativa de EDO.

Resultados e análises referentes à 2ª questão

Onze alunos expressam em suas respostas que integrariam a função velocidade $v = v(t)$ da partícula para encontrar a função de posição $s = s(t)$. Desses alunos, oito escreveram por extenso e três responderam por meio de simbologia matemática.

Dos sujeitos que responderam em palavras, os Alunos F, O e M, expressaram uma justificativa para a resposta dada, em que supomos que tentaram se referir, de maneira informal, ao Teorema Fundamental do Cálculo. Porém, os Alunos F e M mencionaram em suas respostas que “a derivada é o inverso da integral e vice-versa” sem a preocupação de distinguir os conceitos de derivada e integral com as operações de diferenciação e integração. Essa indistinção entre as noções de derivada e integral e as respectivas operações para obtê-las, quando é o caso, pode sinalizar indícios de dificuldades com os conceitos de derivada e integral de uma função. Pode também indicar um obstáculo didático. O professor, em geral, não faz distinção quando se refere a um ou outro conceito. Segue, na Figura 2, a resposta do aluno F.

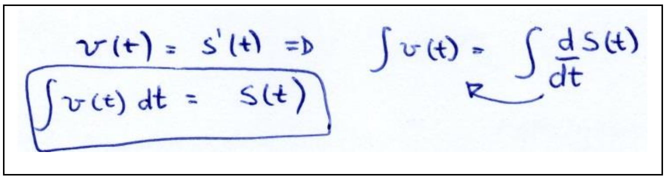
FIGURA 2. Resposta do Aluno F à 2ª questão


Se a derivada da posição é a velocidade. Então para se obter a função da posição a partir da velocidade, basta integrar a função da velocidade, pois a derivada é o inverso da integral e vice-versa.

Fonte: caderno do aluno

Os três alunos, Alunos C, E e Q, que tentaram apresentar suas respostas em linguagem matemática cometeram algum equívoco na notação. Os Alunos C e Q escreveram $s'(t)$ usando a notação, devida a Leibniz, $\frac{ds}{dt}$, e talvez por essa razão tiveram dificuldades na manipulação da notação como quociente de diferenciais, como mostra a resolução do Aluno C, na Figura 3. Inclusive, a Aluna Q deixou registrada junto a sua resolução a frase "*A minha dificuldade foi em relação a simbologia* $s'(t)$".

FIGURA 3. Resposta do Aluno C à 2ª questão


$v(t) = s'(t) \Rightarrow \boxed{\int v(t)\, dt = S(t)}$

$\int v(t) = \int \frac{dS(t)}{dt}$

Fonte: caderno do aluno

Três alunos não fizeram referência alguma à inversão das operações derivação e integração e outros três alunos deixaram a questão em branco.

Os resultados referentes à 2ª questão nos apontam a relevância de retomarmos com os alunos o Teorema Fundamental do Cálculo, assim como, a interpretação e o uso da notação de derivada devida a Leibniz, ao iniciar um estudo de resolução analítica de EDO.

Resultados e análises referentes à 3ª questão

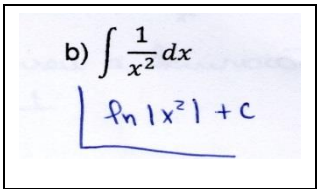
Doze alunos resolveram corretamente o **item (a)** da 3ª questão e quatro alunos resolveram incorretamente. Supomos que os alunos que erraram não atentaram ao módulo ou à constante de integração na resposta do item, $\ln|x| + c$, em que c é uma constante.

Os Alunos D e F, que acertaram o item (a), indicaram em todos os itens dessa questão se a integral dada se tratava de uma integral imediata ou se precisaria de algum método de integração para resolução. Integral.

O Aluno H não resolveu item algum dessa questão. Integral.

Quanto ao **item (b)**, oito alunos resolveram corretamente e oito desenvolveram esse item de forma incorreta. Alguns erros cometidos ocorreram pelo fato de não mencionarem a constante de integração, ou de usarem o método da substituição para integração de modo incorreto, ou de aplicarem de maneira errada a regra de integral imediata válida para o item (a) dessa questão. Esse último erro foi apresentado pelos Alunos J e K. Segue, na Figura 4, a resposta do Aluno J.

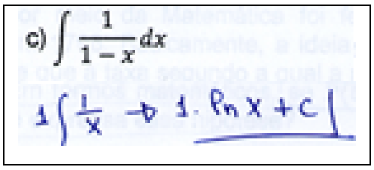
FIGURA 4. Resposta do Aluno J ao item (b) da 3ª questão



Fonte: caderno do aluno

O **item (c)** foi desenvolvido por treze alunos, sendo que sete deles resolveram corretamente por meio do método da substituição para integração. Identificamos nas resoluções incorretas erros semelhantes aos que foram encontrados em soluções de alunos dadas ao item (b), além de encontrarmos a solução apresentada pelo Aluno J, na Figura 5 que apresenta uma transformação do integrando com vistas a obter outra cuja integral é conhecida.

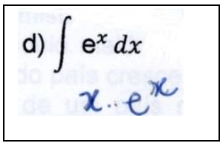
FIGURA 5. Resposta do Aluno J ao item (c) da 3ª questão



Fonte: caderno do aluno

Dezesseis alunos responderam o **item (d),** dos quais doze acertaram, três erraram devido a não mencionarem a constante de integração e o Aluno P errou como mostra a Figura 6.

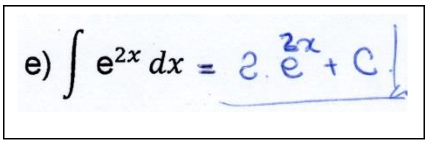
FIGURA 6. Resposta do Aluno P ao item (d) da 3ª questão



Fonte: caderno do aluno

No que diz respeito ao **item (e),** cinco alunos acertaram usando o método da substituição para integração e onze erraram. Observamos que cinco estudantes erraram esse item aplicando a regra válida para o item (d), talvez devido a não considerarem a composição de funções, respondendo, por exemplo, $\mathrm{e}^{2x} + c$, em que c é uma constante. Quatro aplicaram a regra da cadeia para derivação em vez de calcular a primitiva, como percebemos na resposta do Aluno B, na Figura 7, que apresentou como primitiva a derivada $(\mathrm{e}^{2x})' = 2\mathrm{e}^{2x}$. Um aluno tentou usar o método da substituição para integração, fez a mudança de variável $u = \mathrm{e}^{2x}$, calculou $du = 2\mathrm{e}^{2x}dx$, porém, após fazer a substituição no integrando, simplificou e não integrou a função obtida, assumindo a expressão simplificada como resposta. O Aluno P respondeu incorretamente igualando a integral a $2x\mathrm{e}^{2x}$, assim como esse aluno, outros também não mencionaram a constante de integração.

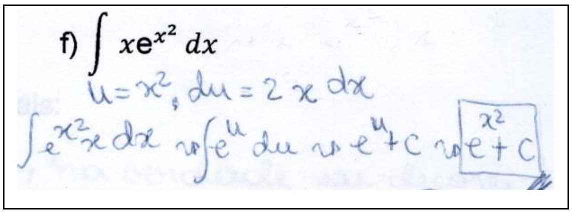
FIGURA 7. Resposta do Aluno B ao item (e) da 3ª questão



Fonte: caderno do aluno

O **item (f)** foi resolvido corretamente por quatro alunos que usaram o método da substituição para integração. Três alunos apenas escreveram que o item poderia ser resolvido por meio do método da integração por partes, e quatro alunos tentaram desenvolver esse método de integração, expressaram a fórmula $\int udv = uv - \int vdu$, tomaram $u = x$ e $dv = \mathrm{e}^{x^2}dx$, calcularam $du = dx$, no entanto, um aluno não expressou v e os outros calcularam de forma errada, como por exemplo, $v = \mathrm{e}^{x^2}$. Outros três alunos aplicaram o método da substituição para integração, mas também cometeram erros no processo, como mostra a resolução do Aluno N, na Figura 8, em que o aluno substituiu a expressão xdx no integrando por du em vez de $\frac{1}{2}du$. O Aluno J apresentou a resposta incorreta $\ln|x| + \mathrm{e}^x + c$, em que c é uma constante. Além do Aluno H, o Aluno P também não resolveu esse item.

FIGURA 8. Resposta do Aluno N ao item (f) da 3ª questão


f) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,dx$

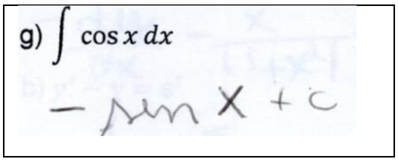
$u = x^2,\ du = 2x\,dx$

$\int e^{x^2} x\,dx \sim \int e^u\,du \sim e^u + C \sim \boxed{e^{x^2} + C}$

Fonte: caderno do aluno

Sete alunos acertaram o **item (g)**. Os nove alunos que não responderam corretamente confundiram regra de integração com regra de derivação, como indica a resposta do Aluno L, na Figura 9, que apresenta como primitiva a derivada $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, ou não mencionaram a constante de integração em suas respostas.

FIGURA 9. Resposta do Aluno L ao item (g) da 3ª questão

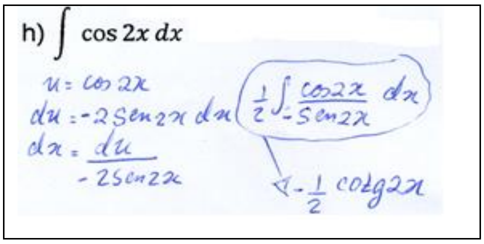

g) $\int \cos x\,dx$

$-\operatorname{sen} X + C$

Fonte: caderno do aluno

O **item (h)** foi desenvolvido por quatorze alunos e apenas três acertaram a resposta. As resoluções incorretas apresentaram, além de aplicação da regra válida para o item (g), erros semelhantes aos identificados em outros itens em relação à ausência de constante de integração, resultados de regras de derivação em vez de integração, equívocos na aplicação do método da substituição para integração, como mostra a resposta do Aluno G, na Figura 10, em que após aplicar uma substituição no integrando, reconheceu uma relação trigonométrica, mas não integrou a função.

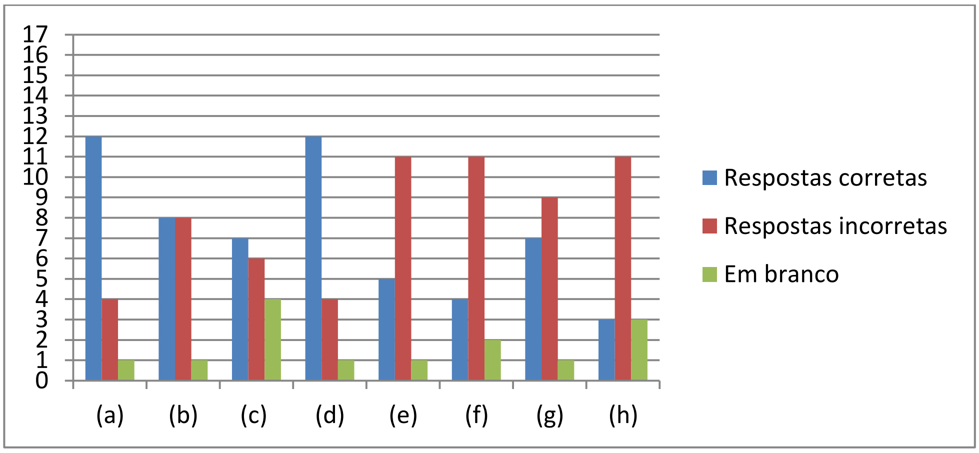
FIGURA 10. Resposta do Aluno G ao item (h) da 3ª questão



Fonte: caderno do aluno

O Gráfico 1 sintetiza as informações quantitativas referentes ao número de respostas corretas, incorretas e deixadas em branco para cada item da 3ª questão:

GRÁFICO 1. Respostas aos itens da 3ª questão



Fonte: Autora (2014)

As resoluções dos alunos para a 3ª questão revelaram indícios de dificuldades de aprendizagem em relação ao cálculo de derivadas e integrais de funções. Observamos nos resultados, por exemplo:

1) ausência da constante de integração em algumas resoluções. Dos dezesseis alunos que desenvolveram algum item dessa questão, três não mencionaram a constante de integração em item algum;

2) erros de aplicação de regras de integrais imediatas no cálculo de integrais envolvendo funções compostas, como observado nas soluções dos itens (b) e (c) em que alguns alunos aplicaram a regra válida para o item (a), fato semelhante ocorreu também nos itens (e) e (h), em que alguns alunos usaram regras válidas para os itens (d) e (g), respectivamente;

3) erros na identificação de métodos de integração adequados aos itens, como notado em soluções aos itens (b), (c), (e), (f) e (h);

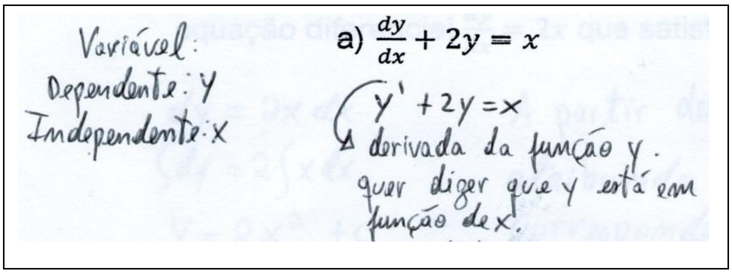
4) aplicação de regras de derivação em vez de regras de integração, como percebido em soluções aos itens (e), (g) e (h).

Esses erros podem comprometer o entendimento de conceitos referentes às EDO e podem ser refletidos nas resoluções analíticas dessas equações. Dessa forma, entendemos que os resultados indicam a necessidade de estratégias de ensino que possibilitem aos alunos o resgate de conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral durante um estudo de EDO.

Resultados e análises referentes à 4ª questão

Três alunos reconheceram corretamente, em cada item dessa questão, a variável dependente e a variável independente por meio da simbologia de derivada indicada, como mostra a resposta do aluno F ao item (a), na Figura 11. Um aluno apresentou resposta apenas ao item (a), de forma correta.

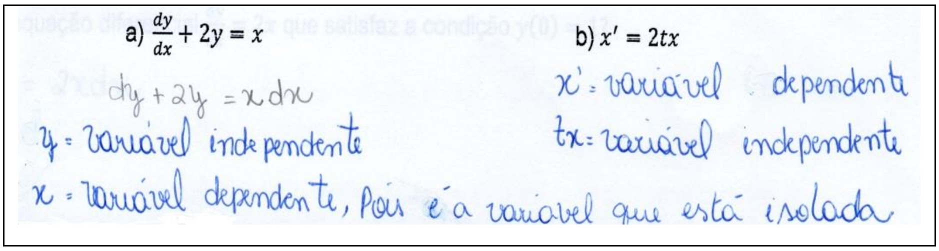
FIGURA 11. Resposta do Aluno F ao item (a) da 4ª questão



Fonte: caderno do aluno

Nove alunos erraram essa questão. Por exemplo, dois alunos pareceram associar a variável dependente ao termo isolado em um membro da equação. A Figura 12 mostra as respostas de um desses alunos, Aluno P, aos itens dessa questão.

FIGURA 12. Respostas do Aluno P aos itens da 4ª questão



Fonte: caderno do aluno

O Aluno O associou, em cada item, a variável dependente à função derivada, enquanto associou a variável independente, no item (a), à função y, e no item (b), à variável t.

Nas outras respostas incorretas, não observamos padrão algum utilizado pelos alunos para identificar as variáveis. Quatro alunos não responderam essa questão.

Os resultados obtidos mostraram indícios de dificuldades de aprendizagem dos alunos na identificação das variáveis independente e dependente a partir de notações de derivadas em EDO, o que pode estar associado a problemas na compreensão do conceito de Equação Diferencial. Essas dificuldades podem acarretar outras durante um estudo de EDO, principalmente na interpretação e na resolução de problemas envolvendo fenômenos modelados por essas equações.

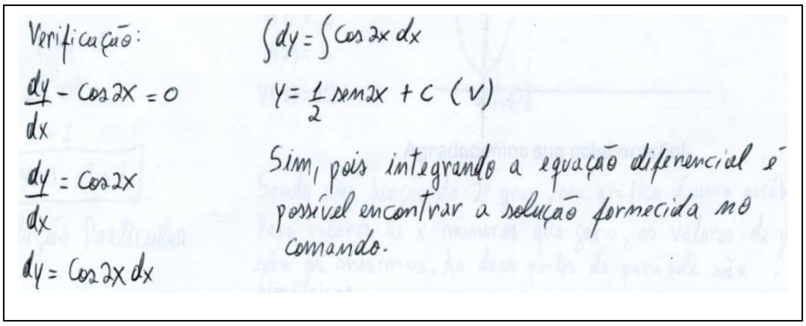
Dessa maneira, os resultados reforçam a importância de propor aos alunos, durante um estudo de EDO, questões que envolva o reconhecimento do conceito de Equação Diferencial, de modo a exigir do aluno a identificação das variáveis dependentes e independentes por meio das notações de derivadas envolvidas.

Resultados e análises referentes à 5ª questão

Onze alunos expressaram alguma resposta à questão. O Aluno K, que não respondeu a questão, declarou apenas não lembrar o método de resolução adequado para a equação dada.

Quatro alunos responderam corretamente a primeira indagação. Desses alunos, três justificaram por meio da resolução analítica da EDO, como mostra a solução do Aluno F, na Figura 13, e um, o Aluno A, justificou verificando que a derivada da função dada, $\frac{dy}{dx} = \cos(2x)$, satisfaz a equação em questão.

FIGURA 13. Resposta do Aluno F à 5ª questão



Verificação:

$\frac{dy}{dx} - \cos 2x = 0$

$\frac{dy}{dx} = \cos 2x$

$dy = \cos 2x \, dx$

$\int dy = \int \cos 2x \, dx$

$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C$ (V)

Sim, pois integrando a equação diferencial é possível encontrar a solução fornecida no comando.

Fonte: caderno do aluno

Seis alunos também tentaram resolver a EDO para encontrar a solução geral e, possivelmente, conferir com a função dada, identificaram a equação dada a uma equação de variáveis separáveis, porém, não concluíram a resolução ou obtiveram uma solução equivocada devido a dificuldades no cálculo da integral $\int \cos(2x)\, dx$, semelhantes às identificadas em respostas ao item (h) da 3ª questão. O Aluno P se expressou por meio da frase "*Pois ela se transforma de uma equação diferencial para uma equação exata, possível de se encontrar um resultado, ou seja, sem precisar mais da constante*", o que não respondeu a questão.

Os resultados mostraram que a maioria dos alunos que tentaram responder a questão apresentou o conceito de solução de uma Equação Diferencial como uma função que é obtida por meio da resolução analítica da Equação Diferencial. Apenas um aluno apresentou o conceito de solução como uma função que satisfaz a Equação Diferencial.

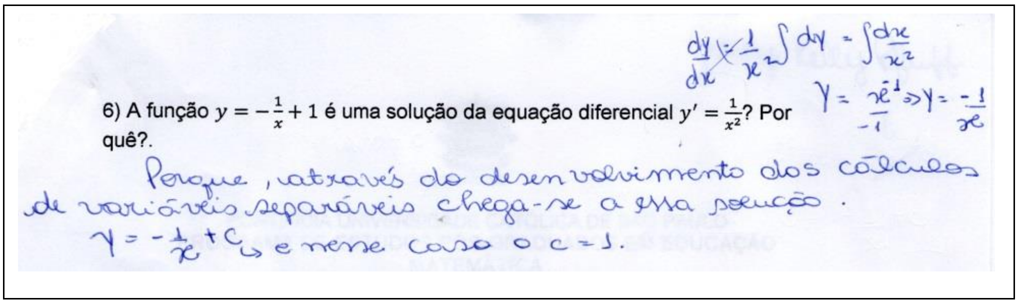
Resultados e análises referentes à 6ª questão

Treze alunos responderam essa questão.

Nove alunos apresentaram uma resolução analítica da EDO em questão, mas dois alunos, apesar de escrever corretamente a equação dada na forma $\int dy - \int \frac{1}{x^2} dx = 0$, calcularam incorretamente a integral $\int \frac{1}{x^2} dx$, um expressou $\frac{3}{x^3}$ como primitiva, e o outro, supomos que tenha integrado novamente a primitiva correta $-\frac{1}{x}$, expressando como resposta $-\ln x$.

Dos sete alunos que resolveram corretamente a EDO, dois responderam positivamente de forma correta a primeira indagação, justificando que a função dada seria uma solução particular da solução obtida na resolução da Equação Diferencial com a constante de integração igual a 1, como a resposta do Aluno E, na Figura 14.

FIGURA 14. Resposta do Aluno E à 6ª questão


$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$ $\int dy = \int \frac{dx}{x^2}$

$y = \frac{x^{-1}}{-1} \Rightarrow y = \frac{-1}{x}$

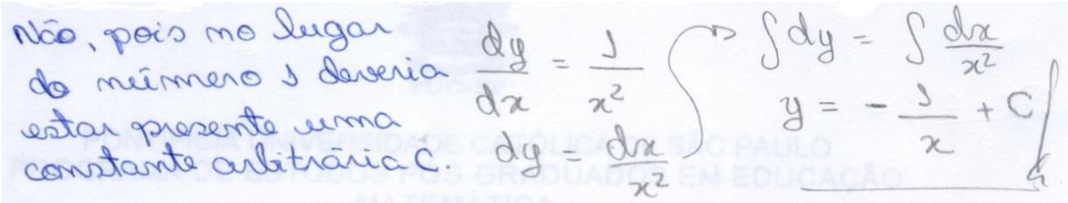
6) A função $y = -\frac{1}{x} + 1$ é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{x^2}$? Por quê?.

Porque, através do desenvolvimento dos cálculos de variáveis separáveis chega-se a essa solução.
$y = -\frac{1}{x} + C$, e nesse caso o c = 1.

Fonte: caderno do aluno

Cinco alunos, apesar de resolverem corretamente a equação em questão, três não concluíram se a função dada é ou não solução da mesma, e dois, os Alunos B e F, responderam de forma errada, como mostra a resposta do Aluno B, na Figura 15, supomos que não reconheceram a função dada como uma solução particular da equação diferencial em questão.

FIGURA 15. Resposta do Aluno B à 6ª questão



Fonte: caderno do aluno

O aluno A também respondeu positivamente à primeira indagação e justificou, assim como na 5ª questão, verificando que a função dada satisfaz a EDO em questão. O Aluno K penas escreveu a frase *“Porque a segunda equação foi simplesmente integrada”.*

Dois alunos expressaram uma resposta a essa questão, escrevendo, cada um, uma frase, mas, não responderam se a função dada se trata ou não de uma solução da equação em questão. Supomos que eles tiveram a intenção de fazer alusão ao fato de que ao derivar a função dada, obtém-se a equação em questão.

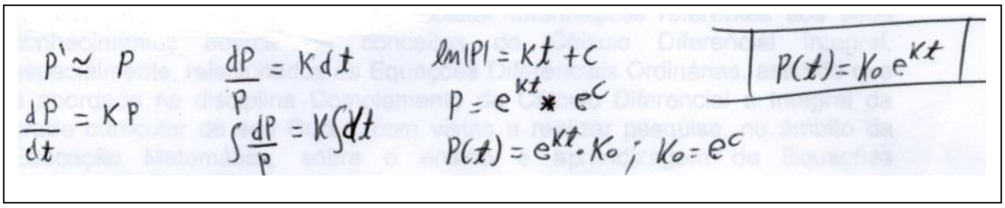
Observamos, assim como nos resultados referentes à 5ª questão, que a maioria dos alunos que apresentaram alguma resposta à 6ª questão associou o conceito de solução de uma Equação Diferencial à sua resolução analítica.

As respostas incorretas dos Alunos B e F dadas a essa questão ressaltam a importância do aluno reconhecer também o conceito de solução de uma Equação Diferencial como uma função que satisfaz a equação, bem como identificar uma solução particular.

Resultados e análises referentes à 7ª questão

Quatorze alunos expressaram alguma resposta a essa questão, no entanto, apenas o Aluno F respondeu corretamente, escrevendo uma EDO esperada e, ainda, resolveu essa equação, como mostra a Figura 16. Porém, supomos que o destaque que foi dado à $P(t)$ em sua resposta pode indicar que o aluno não tenha atentado adequadamente ao enunciado da questão, uma vez que a pergunta se limitava à expressão que representa a hipótese e não solicitava a sua resolução.

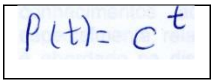
FIGURA 16. Resposta do Aluno F à 7ª questão



Fonte: caderno do aluno

Cinco alunos escreveram alguma lei exponencial para $P = P(t)$ em vez de expressar matematicamente a hipótese, como mostra a resposta do Aluno K, na Figura 17, em que o aluno expressou uma base c sem identificar a mesma. Supomos que esses alunos tenham respondido apenas para expressar a associação do crescimento de uma população a uma aplicação de função exponencial.

FIGURA 17. Resposta do Aluno K à 7ª questão



Fonte: caderno do aluno

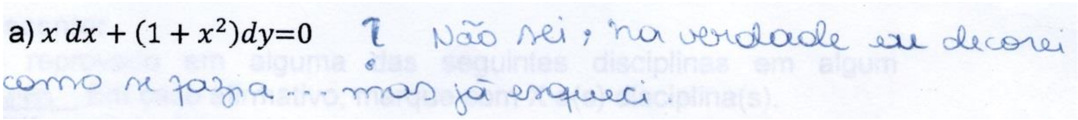
Oito alunos apresentaram respostas incorretas, em que também procuraram escrever uma expressão para $P = P(t)$, como, por exemplo, $P(t) = \int P(t)tdt$, ou $P(t) = \alpha k$, indicando α como uma constante de proporcionalidade e k como uma taxa, ou $P(t) = P_0 + P^t$, identificando P_0 à população inicial e P a uma taxa, dentre outras.

Observamos, então, indícios de dificuldades dos alunos na interpretação da questão, bem como, no reconhecimento do conceito de derivada relacionado à taxa de variação instantânea. Assim, os resultados indicam que esse conceito deve ser retomado durante o estudo de EDO, além de reforçarem a importância de propormos e discutirmos com os alunos problemas relacionados a essas equações que envolvam interpretação de contextos.

Resultados e análises referentes à 8ª questão

Com relação ao **item (a)** dessa questão, dois alunos não responderam, três escreveram apenas o nome do método de resolução que poderiam usar para resolver a questão, em que dois erraram, identificando a equação dada a uma equação de coeficientes homogêneos, o Aluno N apresentou a resposta indicada na Figura 18, e onze alunos expressaram alguma resolução.

FIGURA 18. Resposta do Aluno N ao item (a) da 8ª questão


a) $x\,dx + (1 + x^2)dy=0$? Não sei, na verdade eu decorei como se fazia... mas já esqueci

Fonte: caderno do aluno

Três alunos apresentaram uma resolução correta para o item (a). Quatro alunos reconheceram a EDO dada como uma equação de variáveis separáveis, escreveram a equação na forma $\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int dy = 0$, mas um desses alunos não prosseguiu a resolução. Três resolveram a integral $\int \frac{x}{1+x^2}dx$, tomando $u = 1 + x^2$, calculando $du = 2xdx$, mas dois desses alunos substituíram equivocadamente o integrando escrevendo $\int \frac{x}{1+x^2}dx = 2\int \frac{du}{u}$ em vez de $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$, e um aluno aplicou a substituição corretamente, porém, supomos que ele tenha simplificado o integrando obtendo a expressão equivocada $2x + 2x^2$ no denominador e que não tenha integrado a função obtida, escrevendo $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2x+2x^2}$. Esses alunos não mencionaram em suas respostas a constante arbitrária que deve figurar na solução geral de uma EDO de primeira ordem.

Quatro alunos manipularam algebricamente os termos da equação desse item, porém não aplicaram método algum de resolução.

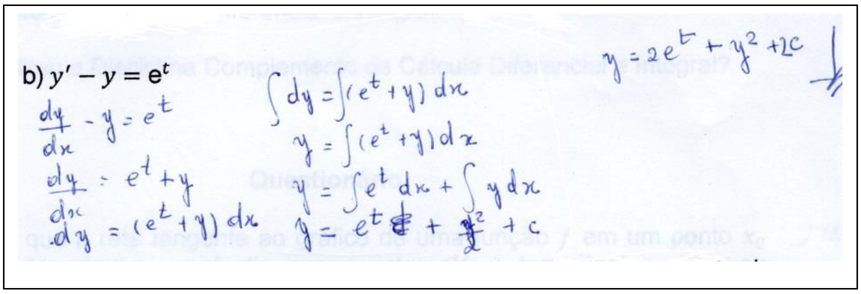
O **item (b)** foi respondido por doze alunos. Sete alunos identificaram corretamente a EDO dada a uma equação linear completa de 1ª ordem, mas três não desenvolveram uma resolução e apenas dois alunos resolveram corretamente.

Dois alunos calcularam de maneira errada o fator integrante $\mu = \mu(t)$ usado no método de resolução da equação em questão, um desses alunos expressou $\mu(t) = -t$, e o outro, $\mu(t) = e^t$. Supomos que o primeiro aluno citado não lembrou corretamente da fórmula do fator integrante, enquanto o outro não usou corretamente a fórmula $\mu(t) = \mathrm{e}^{\int P(t)dt}$, em que $P(t) = -1$ para a equação dada, o que resulta em $\mu(t) = e^{-t}$.

Três alunos não resolveram a equação dada, mas manipularam os seus termos e procederam com operações incorretas. Por exemplo, o Aluno A desenvolveu esse item considerando a equação $\ln\frac{dy}{dx} - \ln y = t$, supomos que para obtê-la, ele considerou o logarítmico neperiano de ambos os membros da equação $y' - y = \mathrm{e}^t$, e errou considerando $\ln(y' - y)$ igual a $\ln\frac{dy}{dx} - \ln y$ no primeiro membro.

O Aluno Q expressou uma solução incorreta para esse item, Figura 19, em que supomos que ele considerou a equação dada como uma equação de variáveis separáveis, e que também cometeu um erro ao aplicar o mínimo múltiplo comum (m.m.c) no segundo membro da solução, devido não escrever o denominador comum na resposta. O Aluno N respondeu esse item com a mesma frase dada ao item (a) dessa questão.

FIGURA 19. Resposta do Aluno Q ao item (b) da 8ª questão



Fonte: caderno do aluno

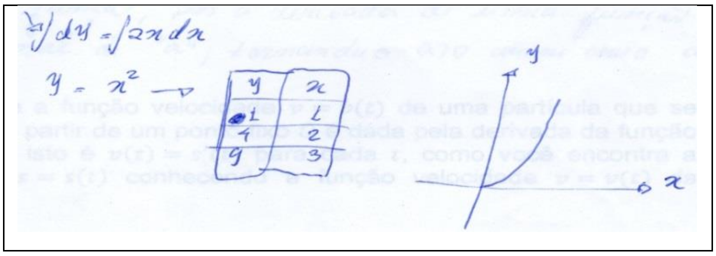
Os resultados indicaram indícios de dificuldades dos alunos na identificação do método adequado para a resolução de uma EDO, além de refletirem dificuldades que foram observados nos cálculos de integrais referentes à 3ª questão. Refletiram, ainda, erros referentes à Matemática básica nas resoluções. A resposta do Aluno N sugere que alguns alunos não compreendem os processos de resolução algébrica no estudo de EDO, apenas memorizam para reproduzi-los.

Resultados e análises referentes à 9ª questão

Onze alunos apresentaram alguma resolução para essa questão. Seis alunos associaram a questão a um Problema de Valor Inicial (PVI) e resolveram o problema corretamente, no entanto apenas dois alunos traçaram a curva integral corretamente, outros dois apresentaram esboços de parábolas não condizentes à solução obtida, um aluno esboçou uma reta paralela ao eixo x pelo ponto determinado pela condição inicial, $(0,1)$, e outro aluno não traçou esboço algum.

Três alunos tentaram resolver a EDO, mas não mencionaram a constante arbitrária da solução geral e não usaram a condição inicial para encontrar a solução particular do problema, supomos que traçaram uma curva referente à função $y = x^2$, como indica a resolução do Aluno G, na Figura 20.

FIGURA 20. Resposta do Aluno G à 9ª questão



Fonte: caderno do aluno

O Aluno Q também considerou como resposta a função $y = x^2$ e escreveu a observação de que a solução encontrada não satisfaz a condição inicial dada, e representou o gráfico dessa solução de forma errada, esboçando uma parábola côncava para baixo.

O Aluno J não traçou esboço algum, supomos que na tentativa de aplicar a condição inicial dada ele usou $x = 0$ na EDO dada e obteve $\frac{dy}{dx} = 0$.

Os resultados mostraram indícios de dificuldades dos alunos na resolução de EDO, no reconhecimento da solução particular relacionada a um PVI e no esboço da curva integral, que nesse caso se tratava do gráfico de uma função quadrática.

Reflexões sobre os resultados referentes ao Questionário

Os indícios de dificuldades dos alunos na aprendizagem de EDO evidenciados nas resoluções apresentadas ao questionário refletem, em parte, o que identificamos em sala de aula ao ministrar esse conteúdo, e que, inicialmente, nos motivou a desenvolver essa investigação a fim de vislumbrar novas possiblidades para o ensino dessas equações de modo a proporcionar aos alunos condições favoráveis à compreensão de conceitos.

Observamos que indícios de dificuldades de aprendizagem semelhantes aos que encontramos, também são relatados pela autora Dullius (2009) que consta em nossa revisão bibliográfica.

As dificuldades dos alunos na aprendizagem dos conceitos de derivada e de integral de uma função repercutem durante o estudo de EDO, comprometendo a compreensão do conceito dessas equações e provocando entraves no processo de suas aplicações.

Dessa forma, os resultados obtidos por meio do questionário reforçam a necessidade de estratégias de ensino que permitam retomar conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral durante o estudo de EDO. Essa conclusão nos provoca indagações referentes às possibilidades de estratégias para esse fim, à viabilidade delas em relação à carga horária da disciplina, à adequação delas de acordo com o perfil da turma.

Outra questão que os resultados apontam diz respeito ao tipo de abordagem de ensino de EDO que pode favorecer a aprendizagem de alunos. Ou seja, qual enfoque pode ser dado às EDO de forma a contribuir para a compreensão de conceitos referentes ao seu estudo?

Os estudos expostos neste capitulo nos direcionaram para a escolha das variáveis de comando da fase de elaboração da sequência de ensino e de organização da experimentação da engenharia didática, que são descritas no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 3

CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Os estudos preliminares realizados nesta tese constantes do Capítulo 2 revelam que o ensino de EDO tem seu ponto de equilíbrio no funcionamento do quadro algébrico. Buscamos, então, analisar as restrições e exigências que favorecem essa estabilidade, pois esperamos que ao modificar, pelo menos, algumas dessas restrições e exigências, o sistema tenda a se estabilizar em outro ponto de equilíbrio indicado em pesquisas como mais satisfatório, relativamente à construção do conceito.

A análise levou em conta os três quadros (algébrico, numérico e geométrico) e faz distinção em três dimensões:

- epistemológica, associada às características das Equações Diferenciais;
- cognitiva, associada a alunos de Engenharia;
- didática, associada ao funcionamento do sistema de ensino de EDO vigente.

Com base em nossos estudos preliminares e em Artigue (1994), que aborda a Engenharia Didática vista como uma produção para o ensino e ilustra a concepção de um produto para o ensino de Equações Diferenciais, identificamos algumas restrições e exigências que se opõem à abordagem qualitativa:

- Na dimensão epistemológica: (a) o longo domínio algébrico no desenvolvimento histórico da teoria; (b) o tardio surgimento da teoria qualitativa de Equações Diferenciais no final do século XIX com a obra de Henry Poincaré; (c) a relativa independência das diferentes abordagens, que permite, até mesmo hoje em dia, certo desconhecimento em relação à abordagem qualitativa; e, (d) a dificuldade dos problemas ligados ao nascimento e ao desenvolvimento da teoria qualitativa e a consequente dificuldade dos processos de transposição para um nível de ensino relativamente elementar.

- Na dimensão cognitiva: (a) a exigência de integração entre quadros para um estudo qualitativo que requer a mobilidade entre o registro algébrico da solução e o registo gráfico de curvas associadas à solução (as pesquisas expressam a dificuldade que os estudantes têm para pensar simultaneamente de modo algébrico e gráfico e a resistência deles ao estudo qualitativo); e, (b) o domínio de argumentos exigidos para justificar a análise qualitativa.

- Na dimensão didática: (a) a força do recurso algorítmico no ensino (a impossibilidade de realizar o estudo qualitativo por meio de algoritmos caracteriza um obstáculo); (b) o estado inframatemático no ensino de representações gráficas, que são estruturas essenciais na abordagem qualitativa; e (c) o fato de serem recentes as reflexões sobre a abordagem qualitativa no ensino de EDO indica que, possivelmente, muitos professores atuantes não estudaram esse enfoque, o que pode provocar desconforto para aderir a essa abordagem.

A partir da análise das restrições e exigências destacadas, consideramos as seguintes variáveis globais na elaboração da engenharia didática:

1. Retomada de conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e as interpretações geométricas associadas, enfatizado a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa. Com essa estratégia esperamos antecipar dificuldades de aprendizagem relacionadas a asses conceitos e interpretações, e controlar restrições e exigências das dimensões didática e cognitiva referentes à representação gráfica;

2. Uso de recursos computacionais, especificamente do *software* GeoGebra[2]. Entendemos que essa escolha favorece a abordagem geométrica que seria menos atrativa devido às dificuldades de exploração e visualização, possibilitando a resolução qualitativa em um conjunto estruturado de tarefas de complexidade variada, além de otimizar os efeitos da abordagem de resolução numérica.

3. Valorização e provocação de conjecturas pelos alunos. Esperamos estimular os alunos à elaboração de argumentos exigidos para a análise qualitativa de forma a controlar restrições e exigências da dimensão cognitiva.

4. Opção de trabalho em dupla. Pretendemos favorecer a discussão entre os alunos.

5. Ensino explícito de métodos para o estudo qualitativo. As ideias desenvolvidas em Schoenfeld (1985) ou Robert, Rogalski, e Samurcay (1989), indicam que essa escolha pode facilitar a construção do conhecimento reconhecido como sendo complexo, introduzindo uma dimensão explicitamente metacognitiva no ensino. (ARTIGUE, 1994, p. 34)

6. Limitação de complexidade no nível de resolução algébrica. Essa escolha é colocada ao considerarmos que o tempo que pode ser destinado a essa parte do currículo é limitado.

As variáveis locais que orientaram a organização de cada sessão de ensino são citadas na descrição da análise *a priori* na seção 3.2.

As escolhas das variáveis de comando nos remeteram à construção de uma sequência didática composta de atividades que envolvem situações-problema. Entendemos situações-problemas como

[2] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma que pode ser utilizado no estudo de Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística, criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter. Disponível em http://www.geogebra.org

> questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema. (ALMOULOUD, 2007, p. 174)

As EDO constituíram o objeto matemático da investigação. Mais especificamente, tratamos de conceitos iniciais de seu estudo e de EDO de primeira ordem de variáveis separáveis.

O *software* de geometria dinâmica GeoGebra foi escolhido devido ser um *software* gratuito e uma ferramenta didática e interativa para o ensino e aprendizagem da Matemática que reúne recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo, oferecendo diferentes representações (geométrica, algébrica e numérica) para um mesmo objeto matemático.

A seguir, a sequência de ensino é descrita.

3.1 A sequência de Ensino

A elaboração e a experimentação da sequência de ensino basearam-se na Teoria das Situações Didática de Brousseau (1986), que permeia os processos de ensino e aprendizagem com situações de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

A sequência de ensino é composta por quatro guias de atividades. As atividades foram organizadas com a previsão de momentos de institucionalizações locais e de leituras de textos de apoio durante a aplicação dos guias. Os guias e os textos foram elaborados com base nos autores Nagle, Saff e Snider (2012), Zill e Cullen (2009), Zill (2003), Anton (2000), Boyce e DiPrima (1999), Hughes-Hallett et al (1999), Hughes-Hallett et al (1997), Edwards e Penney (1995) e Bassanezi e Ferreira (1988).

O Guia de Atividades 1 (Apêndice C) é composto de seis atividades e tem como objetivos:

a) revisar o conceito de derivada de função de uma variável real a partir de sua interpretação como taxa de variação instantânea, focalizando suas notações mais usuais;

b) abordar o conceito de EDO a partir de problemas que envolvam taxa de variação instantânea, modelados classicamente por EDO;

c) abordar termos e conceitos do estudo de EDO, tais como ordem, solução e solução geral.

O texto de introdução do Guia 1 visa revisar a interpretação da derivada de uma função como taxa de variação instantânea e abordar notações para subsidiar a resolução das atividades desse guia. Essas atividades estão organizadas contando com dois momentos de institucionalizações locais, previstos para ocorrer após a realização, pelas duplas, da Atividade 1 e ao final da aplicação desse guia. Essas institucionalizações são acompanhadas, respectivamente, pela leitura do Texto 1 – Guia de Atividades 1 (Apêndice D) e do Texto 2 – Guia de Atividades 1 (Apêndice E) .

O Guia de Atividades 2 (Apêndice F) é formado por cinco atividades, cujos objetivos são:

a) interpretar geometricamente a solução geral de uma EDO, com o auxílio do *software* GeoGebra;

b) abordar o conceito de PVI e sua solução;

c) revisar a interpretação geométrica da derivada.

São previstos dois momentos de institucionalizações locais durante a aplicação do Guia 2 que devem ocorrer após a realização, pelas duplas, da Atividade 2, em que será feita a leitura do Texto 1 – Guia de Atividades 2 (Apêndice G), e ao final de sua aplicação..

Após a realização, pelas duplas, da Atividade 4, do Guia 2, é prevista a leitura do Texto 2 – Guia de Atividades 2 (Apêndice H) que aborda a interpretação geométrica da derivada de uma função, visando rever o conteúdo a ser aplicado na Atividade 5.

São objetivos do Guia de Atividades 3 (Apêndice I):

a) introduzir o estudo qualitativo de EDO;

b) construir campos de direções com o auxílio do *software* GeoGebra.

O Guia 3 apresenta um texto introdutório sobre o estudo qualitativo de EDO e, em seguida, propõe seis atividades relacionadas a esse estudo. Durante a aplicação desse guia, prevemos três momentos de institucionalizações locais que devem ocorrer após a realização, pelas duplas, de cada uma das atividades seguintes: Atividade 2 e Atividade 3, e ao final de sua aplicação.

O Guia de Atividades 4 (Apêndice J) tem os seguintes objetivos:

a) definir EDO de primeira ordem de variáveis separáveis;

b) resolver EDO de primeira ordem de variáveis separáveis;

c) abordar PVI de forma algébrica e geométrica.

Três atividades constam no Guia 4, o qual é introduzido por um texto sobre EDO de primeira ordem de variáveis separáveis para subsidiar a resolução das atividades propostas nesse guia. Contamos com três momentos de institucionalizações locais, durante aplicação desse guia, previstos para ocorrer após a realização, pelas duplas, de cada atividade.

Ressaltamos que a descrição apresentada corresponde à sequência de ensino que efetivamente foi aplicada no experimento, pois houve alteração, em relação ao que estava planejado, durante a experimentação, em função das análises *a posteriori* após cada sessão de ensino, além do fato de que alguns momentos de institucionalização excederam o tempo previsto. Por exemplo, planejamos, inicialmente, abordar a resolução numérica de um PVI de primeira ordem via o método de Euler, que ocorreria no Guia 4. Porém, devido à necessidade de ajustes na sequência, esse tópico não foi contemplado.

3.2 Análise *a priori* das Atividades

A seguir, são apresentados, para cada atividade dos guias, os objetivos, as escolhas didáticas, as respostas e as expectativas quanto às soluções das duplas.

3.2.1 Análise *a priori* referente ao Guia 1

Na Figura 21, são indicadas as atividades do Guia 1, cujas análises *a priori* são descritas a seguir.

FIGURA 21. Enunciados das atividades do Guia 1

Atividade 1

Os itens seguintes expressam fenômenos que envolvem taxa instantânea de variação:

a) Uma das primeiras tentativas de modelagem do **crescimento populacional** humano por meio da Matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente, a ideia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população total do país cresce em um determinado instante é proporcional à população total de um país naquele instante. Se $P = P(t)$ for a população total no instante t, expresse essa hipótese em termos matemáticos.

Lembre-se: Se duas quantidades u e v são proporcionais, então uma quantidade é um múltiplo constante da outra: $u = kv$, em que k é uma constante.

b) O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e nêutrons. Muitas dessas combinações são instáveis – isto é, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outra substância. Por exemplo, ao longo do tempo, o elemento altamente radioativo elemento rádio, Ra-226, transmuta-se no gás radônio radioativo, Rn-222. Para modelar o fenômeno de **decaimento radioativo,** supõe-se que a taxa de $\frac{dA}{dt}$ segundo a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade (mais precisamente, o número de núcleos) $A = A(t)$ de substância remanescente no instante t. Escreva uma equação que modela esse fenômeno.

Atividade 2:

Observando os contextos dos respectivos itens (a) e (b) da Atividade 1, o que você pode afirmar sobre o sinal das constantes de proporcionalidade que aparecem nas equações desses itens? Justifique a sua resposta.

Atividade 3:

Identifique a variável dependente e a variável independente em cada uma das seguintes EDO:

a) $\frac{dx}{dt} = \alpha x$, em que α é uma constante.

b) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2y = x$

c) $x' = 4tx$

d) $y'' - 3y' + 2y = x$

e) $\frac{dT}{dt} = k(A - T)$, em que k e A são constantes.

f) $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$, em que g é uma constante.

Atividade 4

A **ordem** de uma Equação Diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da derivada de maior ordem na equação. Sabendo disso, identifique a ordem da EDO de cada item da Atividade 3.

Atividade 5:

De acordo com a **lei empírica de Newton do resfriamento** – ou aquecimento – a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente. Se $T = T(t)$ representar a temperatura de um corpo no instante t, T_m a temperatura do meio que o rodeia e $\frac{dT}{dt}$ a taxa segundo a qual a temperatura do corpo varia, escreva a equação diferencial que modela a lei de Newton do resfriamento/aquecimento e indique a ordem dessa equação.

Atividade 6

Verifique, algebricamente, se a função $P(t) = ce^{0,5t}$, em que c é uma constante arbitrária, satisfaz a EDO $\frac{dP}{dt} = 0,5P$ para todo t no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

Lembre-se: (da regra da cadeia) Sendo $u = u(x)$, então $(e^u)' = u'e^u$.

Fonte: Guia de Atividades 1

Atividade 1

Esta atividade foi elaborada com o intuito de abordar inicialmente o conceito de Equações Diferencias a partir da interpretação da derivada de uma função como taxa de variação instantânea, de modo que os alunos observem aplicações dessas equações em outros contextos, além do matemático.

Quando da aplicação do questionário da fase preliminar, observamos indícios de dificuldades de alguns alunos para relacionar grandezas proporcionais, em questão semelhante ao item (a) dessa atividade. Isso nos orientou a fazer a escolha didática de apresentar um breve lembrete sobre grandezas proporcionais visando esclarecer possíveis dúvidas quanto a relacionar essas grandezas.

Supomos que algumas duplas escrevam corretamente a EDO correspondente em cada item. Considerando a possibilidade de que haja duplas que apresentem dificuldades na interpretação dos itens, esperamos que a institucionalização local prevista para ocorrer após a realização dessa atividade, acompanhada da leitura do Texto 1 – Guia de Atividades 1 (Apêndice D), contribua com a aprendizagem dos alunos.

Atividade 2

Esta atividade tem a intenção de investigar se as duplas interpretam corretamente o sinal de constantes de proporcionalidade.

Pretendemos anteceder a resolução dessa questão provocando uma discussão sobre as constantes de proporcionalidade envolvidas nos modelos dos itens (a) e (b) da Atividade 1, na ocasião da institucionalização referente a tal atividade. Ao frisar que uma mesma ED pode servir como modelo matemático para vários fenômenos diferentes, podemos citar, por exemplo, que nos itens da Atividade 1, a diferença reside apenas na interpretação dos símbolos e nas constantes de proporcionalidade e, em seguida, lançar questionamentos sobre essas constantes para que os alunos expressem suas opiniões.

Com isso, a expectativa é que a maioria das duplas responda corretamente, expressando em suas respostas que, no item (a), a constante é positiva, pois o modelo é para crescimento, enquanto no item (b), a constante é negativa, uma vez que o modelo é para decaimento.

Atividade 3

O objetivo desta atividade é verificar se as duplas identificam corretamente a variável dependente e a variável independente por meio da notação de EDO dada em cada item.

As respostas de alunos ao questionário da fase preliminar revelaram indícios de dificuldades na identificação da variável dependente e da variável independente por meio da notação de EDO. Então, escolhemos comentar esses termos no texto de introdução do guia dessa atividade, bem como citar notações usadas para denotá-los.

Esperamos que leitura do texto introdutório contribua para que a maioria das duplas consiga identificar corretamente as variáveis nos itens dessa questão.

Atividade 4

O enunciado desta atividade define a “ordem” de uma ED e visa à identificação da ordem de EDO pelas duplas.

Esperamos que as duplas identifiquem corretamente a ordem da EDO em cada item.

Atividade 5

Esta atividade, além de apresentar outro fenômeno que pode ser modelado por uma EDO, tem o objetivo de investigar se as duplas interpretam corretamente o enunciado dado, escrevendo uma EDO correspondente, bem como, se identificam a ordem da EDO em questão.

Acreditamos que a institucionalização local, referente à Atividade 1, contribua para esclarecer dúvidas, de forma que a maioria das duplas expresse corretamente uma EDO correspondente e identifique sua ordem. No entanto, algumas duplas podem apresentar dificuldades de interpretação, devido ao modelo dessa Atividade apresentar alteração em relação aos modelos da Atividade 1; nos itens (a) e (b) da Atividade 1, “... a taxa é proporcional à quantidade...”, enquanto que na Atividade 5, “... a taxa é proporcional à diferença entre...”.

Atividade 6

Esta atividade tem a intenção de introduzir a noção de solução de uma EDO.

As análises das respostas ao questionário da fase preliminar revelaram indícios de dificuldades na aplicação da regra da cadeia para derivação de função composta. Como, nesta investigação, o foco de estudo está nos conceitos, escolhemos lembrar as duplas da regra da cadeia para a derivada da função exponencial envolvida nessa atividade.

Esperamos que a maioria das duplas verifique que a função satisfaz a EDO, desenvolvendo cada membro da equação, separadamente, para a função dada e conclua a igualdade.

É possível que algumas duplas resolvam a EDO em questão para verificar se obtêm a função dada. Esse procedimento foi identificado nas respostas de alunos a questões semelhantes do questionário da fase preliminar. Cabe ressaltar que isso gerou confusão na conclusão dos alunos quando se tratou de solução particular, pois os alunos ao resolverem a EDO encontraram a solução geral a um parâmetro c e responderam de forma não como a esperada que a função dada não era solução, talvez por não observarem que a constante c assume um valor particular na função dada.

Após a resolução dessa atividade, pelas duplas, prevemos um momento de institucionalização para discutir as soluções das Atividades 2 até 6, esclarecendo possíveis questionamentos, e formalizar conceitos referentes ao estudo de EDO, como solução, solução geral e curvas integrais, a partir da leitura do Texto 2 – Guia de Atividades 1 (Apêndice E).

3.2.2 Análise *a priori* referente ao Guia 2

A Figura 22 apresenta os enunciados das atividades do Guia 2, cujas análises *a priori* são descritas em seguida.

FIGURA 22. Enunciados das atividades do Guia 2

Atividade 1

Verifique, algebricamente, que a família de funções $x(t) = \frac{\text{sen}\,(2t)}{2} + c$, em que c é uma constante arbitrária, é solução geral da EDO de primeira ordem $x' - \cos(2t) = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Lembre-se: (da regra da cadeia) Sendo $u = u(x)$, então (sen u)$' = u'$cos u.

Atividade 2

De acordo com a Atividade 1, as curvas $x(t) = \frac{\text{sen}\,(2t)}{2} + c$ são as **curvas integrais** da EDO dada por $x' - \cos(2t) = 0$. Determine o valor da constante c_1 de modo que a curva integral $x(t) = \frac{\text{sen}\,(2t)}{2} + c_1$ passe pelo ponto $(0,1)$, ou seja, satisfaça a condição $x(0) = 1$.

Lembre-se: $\text{sen}\, 0 = 0$.

Atividade 3

Use o comando ResolverEDO[<f’(x, y)>,<Ponto de f>] do *software* GeoGebra para encontrar a solução do PVI $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \\ y(4) = 3 \end{cases}$. Acompanhe as instruções que serão encaminhadas por meio do *data show*.

Atividade 4

Use o comando ResolverEDO[<f’(x, y)>,<Ponto de f>] do *software* GeoGebra para encontrar a solução do PVI $\begin{cases} x' = 2tx^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. Acompanhe as instruções que serão encaminhadas por meio do *data show*.

Atividade 5

a) Escreva uma equação matemática que expresse que a inclinação da reta tangente a uma curva $y = y(x)$ em um ponto qualquer (x, y) é igual ao quadrado da abscissa do mesmo ponto.

b) Analisando a equação do item (a), a referida reta tangente tem inclinação positiva ou negativa no ponto $(2, 1)$? E no ponto $(-1,3)$? Justifique suas respostas.

c) Escreva o PVI cuja solução é a curva $y = y(x)$ que satisfaz a equação do item (a) e que passa pelo ponto $(2,1)$. Use o *software* GeoGebra para encontrar essa curva e observe o gráfico para confirmar ou refutar a resposta que foi dada a primeira indagação do item (b). Comente sua conclusão.

d) Escreva o PVI cuja solução é a curva $y = y(x)$ que satisfaz a equação do item (a) e que passa pelo ponto $(-1,3)$. Use o *software* GeoGebra para encontrar essa curva e observe o gráfico para confirmar ou refutar a resposta que foi dada a primeira indagação do item (b). Comente sua conclusão.

Fonte: Guia de Atividades 2

Atividade 1

Esta atividade tem o propósito de retomar o conceito de solução geral institucionalizada no encontro anterior.

Assim como no Guia 1, decidimos lembrar as duplas da regra da cadeia para a derivação da função envolvida na atividade.

Esperamos que a maioria das duplas desenvolva o primeiro membro da equação em questão para a função dada e conclua que a igualdade é verdadeira para cada t no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Se na Atividade 6, do Guia 1, algumas duplas resolverem a EDO para verificar se obtêm a função dada, acreditamos que um número menor de duplas usem esse procedimento nessa atividade do Guia 2, devido à institucionalização local prevista ao final do Guia 1.

Prevemos, ainda, durante a aplicação dessa atividade, reforçar o que é intervalo de definição de solução de EDO que será discutido na citada institucionalização local do Guia 1, pois talvez algumas duplas tenham dúvidas em relação ao intervalo dado na questão.

Atividade 2

O objetivo desta atividade é introduzir a noção de solução particular.

Com o intuito de focar a atenção dos alunos para o objetivo da atividade, escolhemos acrescentar a informação de que sen $0 = 0$.

Esperamos que a maioria das duplas substitua corretamente as coordenadas do ponto indicado na lei da família de curvas dada e encontre $c_1 = 1$. Algumas duplas também podem escrever a expressão da curva integral em questão, substituído c_1, pelo valor encontrado, na lei dada.

Após a resolução dessa atividade, pelas duplas, prevemos uma institucionalização local para discutir as resoluções das Atividades 1 e 2, esclarecendo possíveis dúvidas, e formalizar o conceito de solução particular, bem como o de PVI, a partir da leitura do Texto 1 – Guia de Atividades 2 (Apêndice G).

Atividade 3

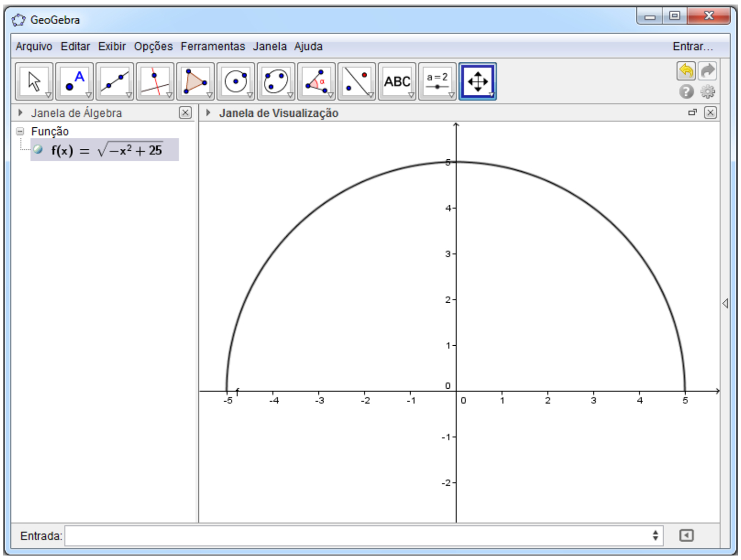
Esta atividade introduz o uso do *software* GeoGebra na aplicação da sequência. Tem o objetivo de instruir as duplas sobre a resolução de um PVI por meio do GeoGebra de forma a obter a representação algébrica e geométrica da solução.

Escolhemos apresentar as instruções de uso do *software* no início da atividade, e não em momento anterior, devido considerarmos simples os comandos a serem utilizados e que isso não comprometerá o andamento da atividade.

Não esperamos que as duplas sintam dificuldades no uso do GeoGebra, uma vez que, além dos alunos estarem cada vez mais familiarizados com mídias informatizadas, esse *software* possui interface amigável. Mas é possível que algumas duplas solicitem alguma orientação para manipulá-lo durante a atividade, que prevemos atender.

Esperamos que todas as duplas obtenham a solução algébrica do PVI dado na Janela de Álgebra e a correspondente solução geométrica na Janela de Visualização, como na Figura 23.

FIGURA 23. Solução algébrica e solução geométrica do PVI da Atividade 3, Guia 2, geradas no GeoGebra



Fonte: Autora (2014).

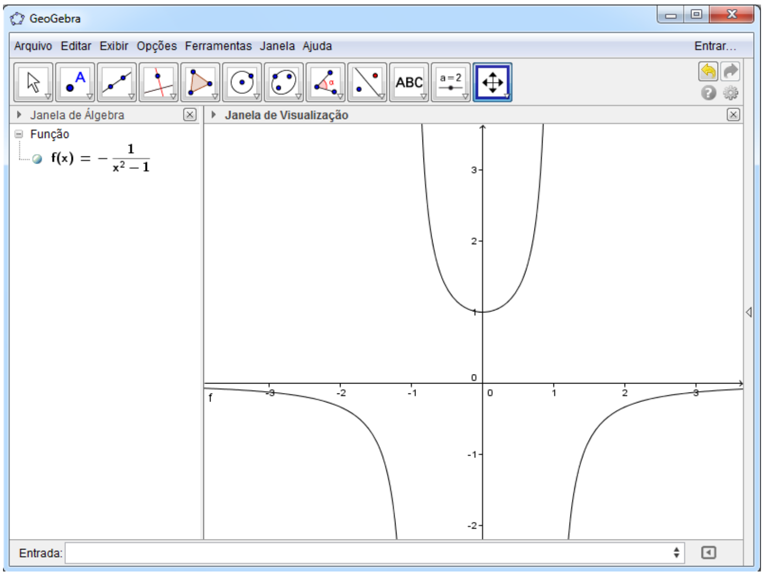
Atividade 4

Esta atividade tem o intuito de verificar se as duplas usam corretamente o *software* GeoGebra para resolver um PVI de forma a obter a representação algébrica e geométrica da solução.

Temos para essa atividade expectativas semelhantes às mencionadas para a Atividade 3 quanto a utilização do *software*.

Esperamos que todas as duplas obtenham a solução algébrica do PVI dado na Janela de Álgebra e a correspondente solução geométrica na Janela de Visualização, como na Figura 24.

FIGURA 24. Solução algébrica e solução geométrica do PVI da Atividade 4, Guia 2, geradas no GeoGebra



Fonte: Autora (2014).

Atividade 5

Esta atividade consta de quatro itens que envolvem a interpretação geométrica da derivada de uma função. Tem o intuito de subsidiar o estudo qualitativo de EDO que será discutido no Guia 3.

Considerando que os alunos não revisaram tal interpretação no semestre da aplicação da sequência, que deve ter sido estudada na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, supomos, com base nos estudos preliminares, que as duplas sintam a necessidade de uma revisão sobre esse conteúdo para desenvolver a atividade. Por isso, decidimos fazer, antes da atividade, a discussão do Texto 2 – Guia de Atividades 2 (Apêndice H) que aborda a interpretação geométrica da derivada de uma função, em que é comentada, inicialmente de forma intuitiva, sua consequência para o estudo de crescimento e decrescimento da função e, em seguida, é apresentado um teorema que estabelece formalmente a ligação entre o valor da primeira derivada de uma função num intervalo e o crescimento ou decrescimento da função nesse intervalo.

Esperamos que a maioria das duplas escreva corretamente a EDO correspondente ao item (a). Talvez alguma dupla manifeste dúvida em relação ao termo abscissa, o que será esclarecido na ocasião.

Quanto ao item (b), esperamos que a maioria das duplas responda que a reta tangente, em ambos os casos, tem inclinação positiva, exprimindo justificativas que indiquem que a expressão do coeficiente angular da reta tangente, em qualquer um dos casos, é dado pelo quadrado de um número real que, para números não-nulos, é sempre positivo.

Para os itens (c) e (d), temos a expectativa de que a maioria das duplas escreva corretamente, em cada caso, o PVI correspondente e que use corretamente o *software* para encontrar a curva solução. Quanto à observação da solução gráfica, supomos que algumas duplas tenham dúvidas na interpretação, visto que os estudos preliminares apontam indícios de dificuldades em interpretação gráfica, Nesse caso, esperamos que a institucionalização local prevista para ocorrer após essa questão contribua para esclarecer as dúvidas.

3.2.3 Análise *a priori* referente ao Guia 3

As atividades do Guia 3 são indicadas na Figura 25, cujas análises *a priori* são descritas a seguir.

FIGURA 25. Enunciados das atividades do Guia 3

Atividade 1

Use o comando CampoDeDireções[<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>] do *software* GeoGebra para representar o campo de direções da EDO $\frac{dy}{dx} = 4 - 2y$ para $-8 \leq x \leq 8$ e $-6 \leq y \leq 8$. Acompanhe as instruções que serão encaminhadas por meio de *data show*.

Atividade 2

Observando o campo de direções da Atividade 1, o que você pode dizer sobre o comportamento assintótico de y? Por exemplo, quando $x \to \infty$, temos $y \to \infty$ ou $y \to c$, em que c é uma constante? Justifique sua resposta.

Atividade 3

Use o comando CampoDeDireções[<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>] do *software* GeoGebra para representar o campo de direções da EDO $y' = \frac{x}{y}$ para $-4 \leq x \leq 4$ e $-4 \leq y \leq 4$. Em seguida, use o comando ResolverEDO[<f”(x, y)>,<Ponto de f>] para visualizar a curva solução que satisfaz a condição inicial em cada item:

(a) $y(0) = 1$
(b) $y(1) = 0$
(c) $y(0) = -1$
(d) $y(2) = 0$
(e) $y(2) = -1$

Atividade 4

Observando o campo de direções da Atividade 3, o que você pode dizer sobre o comportamento assintótico de y quando $x \to \infty$? Argumente sua resposta.

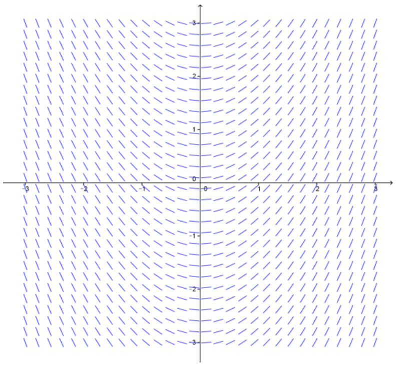
Atividade 5

Relacione cada EDO ao seu respectivo campo de direções da Figura 3. Justifique sua resposta.

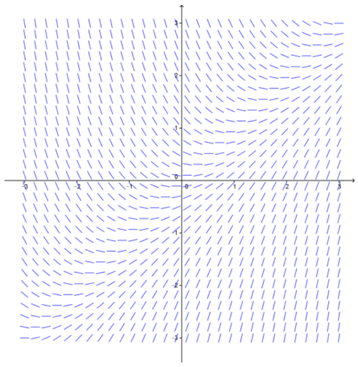
(A) $y' = 1 + y^2$ (B) $y' = x - y$ (C) $y' = x$ (D) $y' = y$

FIGURA 3. Campos de direções representados para $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$, construídos no *software* GeoGeba

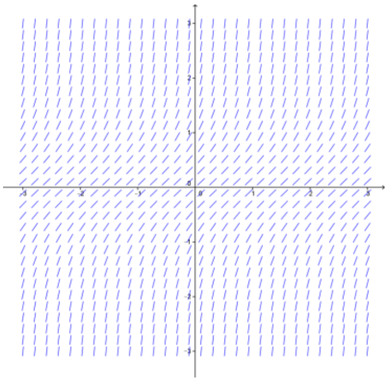
(I)



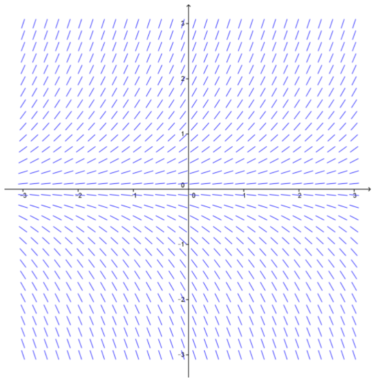
(II)



(III)



(IV)

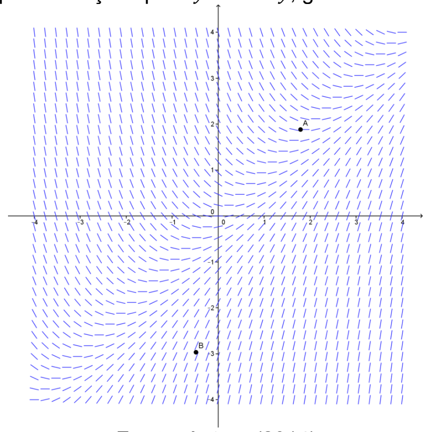


Fonte: Autora (2014)

Atividade 6

A Figura 4 apresenta o campo de direções da EDO $y' = x - y$, representado para $-4 \leq x \leq 4$ e $-4 \leq y \leq 4$,. Esboce, na figura, a curva integral que passa pelo ponto A e a curva integral que passa por B.

FIGURA 4. Campo de direções para $y' = x - y$, gerado no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

Fonte: Guia de Atividades 3

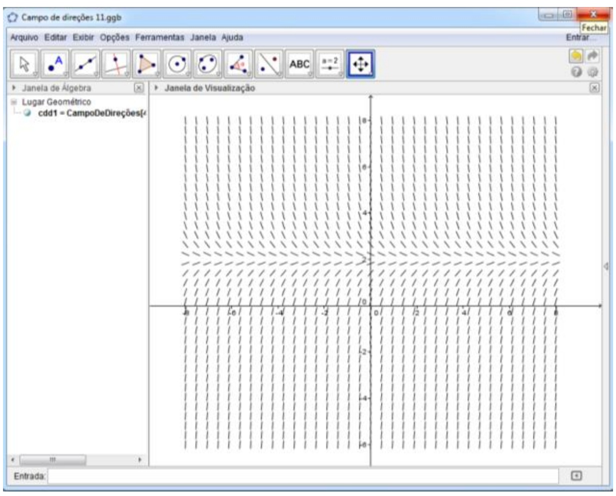
Atividade 1

Nesta atividade, o propósito é fazer com que as duplas esbocem o campo de direções de uma EDO de primeira ordem com o auxílio do *software* GeoGebra.

As instruções a respeito do comando a ser utilizado são apresentadas aos alunos no início da atividade. Assim como em questões anteriores, também não esperamos que as duplas sintam dificuldades no uso do recurso computacional, contudo prevemos atender algumas duplas que solicitem orientação durante sua utilização.

As duplas deverão obter o campo de direções ilustrado na Figura 26.

FIGURA 26. Campo de direções da EDO da Atividade 1, Guia 3, gerado no GeoGebra



Fonte: Autora (2014).

Atividade 2

Esta atividade tem o intuito de propor uma situação para que as duplas façam conjecturas sobre o comportamento assintótico das soluções de uma EDO de primeira ordem por meio de seu campo de direções.

Escolhemos compor a questão com uma EDO que tem comportamento semelhante à EDO exemplificada no texto de introdução do guia dessa atividade, objetivando verificar se as duplas apresentam dúvidas no que foi explanado e discutido sobre o assunto do texto.

Supomos que a maioria das duplas presuma que, quando $x \to \infty$, todas as soluções têm $y = 2$ como assíntota horizontal. Podem mencionar em suas respostas que todas as soluções parecem se aproximar do valor 2 quando $x \to \infty$. Ou ainda, que todas as soluções tendem a reta $y = 2$ quando $x \to \infty$.

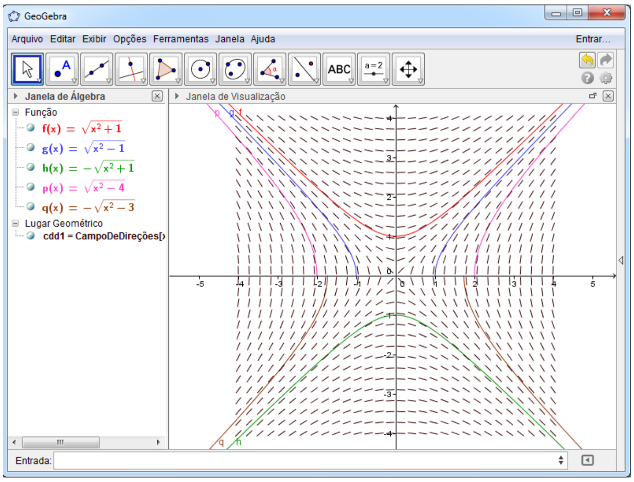
Prevemos uma institucionalização local após as duplas concluírem essa atividade, para discutir a solução da questão e esclarecer possíveis questionamentos.

Atividade 3

Nesta atividade, as duplas devem esboçar o campo de direções e algumas curvas integrais de uma EDO de primeira ordem, no mesmo plano cartesiano, com o uso do GeoGebra.

Considerando que os comandos envolvidos nessa atividade foram executados em atividades anteriores, com devidas orientações, contamos com um bom desempenho das duplas nas construções demandas pela atividade que geram o resultado indicado na Figura 27. Porém, contamos com a possiblidade de atender alguma dupla que solicitem auxílio.

FIGURA 27. Campo de direções e algumas curvas integrais da EDO da Atividade 3, Guia 3, gerados no GeoGebra



Fonte: Autora (2014).

Após as duplas realizarem essa atividade, a intenção é fazer outra institucionalização local, visando ressaltar que uma curva integral que passa pelo campo de direções é tangente a cada segmento que intercepta. Nesse momento, será observado que o esboço do campo de direção de uma EDO de primeira ordem pode ser útil na visualização das soluções. Apesar de tal esboço não ser suficiente para permitir que tracemos, sem ambiguidade, a curva solução que satisfaz determinada condição inicial.

Atividade 4

Esta atividade visa avaliar as análises e interpretações das duplas a respeito do comportamento assintótico das soluções de uma EDO de primeira ordem por meio de seu campo de direções.

Supomos que a maioria das duplas, com base nas explicações e nas discussões sobre o comportamento assintótico, realizadas na introdução ao guia dessa atividade e ao final da Atividade 2, do mesmo guia, faça conjecturas coerentes com a situação, presumindo que as soluções da EDO dada, quando $x \to \infty$, tendem ou para a reta $y = x$ ou para a reta $y = -x$. No entanto, algumas duplas podem ter dúvidas devido a EDO envolvida não possuir comportamento assintótico semelhante aos discutidos anteriormente.

Pretendemos discutir a resolução dessa questão na institucionalização prevista para ocorrer após a resolução do guia dessa atividade.

Atividade 5

Esta atividade objetiva verificar se as duplas relacionam corretamente cada EDO dada ao seu respectivo campo de direções, bem como avaliar os argumentos usados nas justificativas dadas. As duplas não devem usar o GeoGebra durante essa atividade para conferirem suas respostas.

Para relacionarem corretamente, as duplas podem analisar, por exemplo, em cada quadrante, o sinal da derivada da função envolvida em alguns pontos, por meio da expressão que a define em termos de x e y, uma vez que esse sinal corresponde ao sinal da inclinação do segmento do campo de direções que tem origem no ponto tomado.

É esperado que essa questão traga dificuldades, devido envolver análise e interpretação gráfica. É possível que façam confusão, relacionando, por exemplo, de forma incorreta, a equação (A), cuja derivada da solução da EDO é igual a uma expressão polinomial do 2ª grau, ao campo (I) que sugere gráficos de parábolas. Nesse caso, esperamos que a institucionalização prevista para ocorrer após a resolução do guia dessa atividade contribua para esclarecer as dúvidas.

Atividade 6

Esta atividade tem o propósito de fazer com que as duplas observem o fluxo do campo de direções de uma EDO de primeira ordem de forma a esboçar, à mão, curvas integrais aproximadas que passam por pontos dados.

A escolha da EDO e a dos pontos envolvidos na questão foram feitas com a intenção de diminuir a possibilidade de ambiguidade nos esboços das curvas integrais aproximadas que são solicitados.

Esperamos que a maioria das duplas realize essa atividade sem dificuldades. Entretanto, algumas duplas podem expressar dúvidas que prevemos tratar na institucionalização, após a resolução dessa questão.

3.2.4 Análise *a priori* referente ao Guia 4

A Figura 28 apresenta os enunciados das atividades do Guia 4, cujas análises *a priori* são descritas a seguir.

FIGURA 28. Enunciados das atividades do Guia 4

Atividade 1

Encontre, algebricamente, a solução geral das seguintes EDO de primeira ordem de variáveis separáveis:

a) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

Lembre-se: $\int c\, dx = cx + k$, em que c e k são constantes.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$, com $n \neq -1$, em que k é uma constante.

b) $\frac{dP}{dt} = 0{,}5P$

Lembre-se: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$, em que k é uma constante.

c) $dy - 3x^2y^2dx = 0$

d) $\frac{dx}{dt} = e^{2t+x}$

Lembre-se: (Produto de potências de mesma base) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\int e^{nx}dx = \frac{e^{nx}}{n} + k$, $n \neq 0$, em que k é uma constante.

Atividade 2

Encontre a lei da função que é solução da EDO do item (c) da Atividade 1 e que satisfaz a condição inicial $y(2) = 1$. Em seguida, use o software GeoGebra para conferir sua resposta.

Atividade 3

Encontre, algebricamente, a solução explícita do PVI

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y}, \\ y(4) = -3 \end{cases}$$

Em seguida, use o software GeoGebra para conferir sua resposta.

Fonte: Guia de Atividades 4

Atividade 1

Esta atividade é composta de quatro itens e visa verificar se as duplas resolvem corretamente EDO de primeira ordem de variáveis separáveis.

Nossos estudos preliminares revelam indícios de dificuldades de alunos em cálculos de integrais. Então, escolhemos fornecer algumas primitivas para subsidiar cálculos de integrais envolvidas na resolução das equações dadas pelo método de variáveis separáveis.

Optamos, também, indicar a regra do produto de potências de mesma base, no item (d), sugerindo uma forma de manipular a equação dada de modo a identifica-la como uma EDO de variáveis separáveis.

Esperamos que a maioria das duplas manipule corretamente as equações dadas de modo a isolar as variáveis. Entretanto, prevemos que algumas duplas errem cálculos na aplicação do método de variáveis separáveis. Por exemplo, na resolução do item (c), a integral $\int \frac{dy}{y^2}$ pode trazer dúvida às duplas que não identificarem que essa integral pode ser expressa na forma $\int y^{-2}dy$, cuja primitiva pode ser determinada pela segunda regra fornecida no item (a) dessa atividade. Do mesmo modo, na resolução do item (d), as duplas deverão identificar que a integral $\int \frac{dx}{e^x}$ apresenta a forma $\int e^{-x}dx$ para aplicar a segunda regra dada nesse item. Em ambos os casos, a identificação depende do reconhecimento de propriedade de potências, conteúdo de Matemática básica, para manipular a função integranda.

Prevemos, ainda, que algumas duplas não escrevam, em suas soluções, a constante de integração, e, portanto, não obtenham, em cada item, a solução geral da EDO de primeira ordem dada.

Contamos com uma institucionalização local após a resolução dessa atividade, em que prevemos discutir as resoluções e esclarecer prováveis questionamentos, além de abordar os conceitos de solução explícita e implícita.

Atividade 2

Essa atividade trata algebricamente de conceitos que foram abordados geometricamente no Guia 2.. Visa verificar se as duplas:

a) determinam corretamente a solução particular de uma EDO, conhecendo a expressão algébrica de sua solução geral e uma condição inicial dada;

b) reconhecem o problema em questão como um PVI e usam corretamente o GeoGebra para encontrar a solução na forma algébrica.

Esperamos que a maioria das duplas substitua corretamente a condição dada na lei da solução geral da EDO em questão e encontre o valor -9 para a constante envolvida. Entretanto, é possível que muitas duplas não escrevam a expressão da solução particular desejada, deixando de substituir o valor encontrado da constante na expressão da solução geral.

Talvez algumas duplas não identifiquem o problema como um PVI e, por isso, sintam dificuldades em preencher o comando do *software* a ser executado para obter a solução desejada.

É esperado que sejam cometidos erros na medida em que se possa não encontrar a mesma expressão algébrica na conferência das respostas. Ou, ainda, que não seja reconhecida a igualdade de expressões que estejam escritas de formas diferentes. Nesses casos, esperamos que a discussão em dupla contribua para analisar as soluções encontradas.

Prevemos uma institucionalização local ao final da realização dessa atividade para discutir sua resolução e esclarecer possíveis dúvidas.

Atividade 3

Esta questão usa o conceito de solução explícita abordada na institucionalização local que deve ocorrer para após a realização da Atividade 1. Pretende avaliar se as duplas resolvem algebricamente um PVI de forma correta e se usam corretamente o GeoGebra para conferir suas respostas, analisando semelhanças e diferenças em relação a solução obtida via *software*.

Esperamos que a maioria das duplas resolva corretamente o PVI. Mas, pode haver casos em que não seja escrita a solução explícita $y = \sqrt{25 - x^2}$ ou que seja escrita de forma incorreta $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. No momento de institucionalização local após essa atividade, prevemos discutir sua resolução e esclarecer possíveis dúvidas.

CAPÍTULO 4

O EXPERIMENTO

Neste capítulo é relatada a parte empírica da investigação que ocorreu no período de 24 de novembro a 12 de dezembro de 2014 em seis encontros. Primeiramente, os sujeitos envolvidos na pesquisa são apresentados e, a seguir, são descritas as sessões que foram desenvolvidas com os alunos.

4.1 Os sujeitos da Pesquisa

A fase experimental teve como público alvo dezesseis alunos do segundo ano de graduação da Universidade do Estado do Pará (UEPA), sendo treze alunos do curso de Engenharia Ambiental e três de Engenharia de Produção. A participação deles foi voluntária.

No período letivo anterior, referente ao primeiro semestre de 2014, todos os participantes cursaram a disciplina Complemento de Cálculo Diferencial Integral, na qual é abordado o assunto EDO, mas não foram nossos alunos nessa disciplina.

Essa fase foi desenvolvida com uma amostra que possui características semelhantes à amostra que respondeu ao questionário da fase preliminar, em termos do número de alunos, ano e curso, mas não os mesmos sujeitos, devido considerarmos que as análises relacionadas ao questionário, que embasou a construção da sequência didática, são bem representativas para esse público.

4.2 Os Encontros

O experimento ocorreu em sala de aula e no Laboratório de Engenharia de Produção (LEP) no Centro de Ciências Naturais e Tecnologia (CCNT) da UEPA.

Foram realizados seis encontros. A coleta de dados ocorreu por meio de instrumentos elaborados para esse propósito, a saber: guias de atividades, testes inicial e final de conhecimentos e diário de classe.

A aplicação do teste pré-sequência, que chamamos de Teste Inicial, ocorreu no primeiro encontro e do teste pós-sequência, que denominamos de Teste Final, no sexto encontro. As sessões de ensino ocorreram do segundo ao início do sexto encontro.

O primeiro encontro teve duração de uma hora e trinta minutos e cada um dos demais foi realizado em duas horas. A duração dos encontros foi estimada levando-se em consideração a disponibilidade dos sujeitos para participação na pesquisa, bem como o tempo que alunos levam, em geral, para desenvolver tarefas semelhantes em sala de aula.

Os sujeitos se organizaram em duplas para realizarem as atividades da sequência de ensino. Todas as resoluções foram escritas a caneta, tanto nos teste como nos guias. Ao final de cada encontro, os materiais entregues aos alunos foram recolhidos, a fim de que pudéssemos analisa-los, antes da sessão seguinte, além de evitar que algum aluno esquecesse de trazê-lo ou o alterasse.

Cada sessão de ensino foi avaliada pelas atividades desenvolvidas durante o encontro, além de considerarmos as anotações sobre as manifestações das duplas.

Nas primeiras sessões de ensino, muitas duplas solicitaram orientação e avaliação de respostas durante a realização de atividades, talvez pela dependência em relação à figura do professor, e muitas vezes tivemos que dizer que naqueles momentos não poderíamos intervir. Mas isso diminuiu ao longo dos encontros.

Encontramos dificuldade refere ao controle de acesso de alunos às redes sociais por meio de computadores do LEP ou de aparelhos celulares durante a aplicação dos guias. Tivemos que enfatizar muitas vezes que a atenção dos alunos durante a realização das atividades seria de fundamental importância para que os objetivos da pesquisa fossem alcançados.

A seguir, relatamos o desenvolvimento de nossas ações, assim como dos sujeitos, durante a realização das atividades.

4.2.1 O Primeiro Encontro

Na semana anterior ao início do desenvolvimento do projeto foram inscritos dezenove voluntários, porém, apenas dezessete alunos compareceram no primeiro dia.

Este encontro ocorreu no dia 24 de novembro de 2014, em uma sala de aula. Inicialmente, os alunos leram e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Apêndice L) relacionado a presente pesquisa.

Após assinados, os TCLE foram recolhidos. Foi solicitado aos participantes que usassem o número de sua inscrição voluntária como código para se identificarem nas atividades da pesquisa, visando resguardar o anonimato dos sujeitos.

Em seguida, foi aplicado um Teste Inicial (Apêndice B) sobre conteúdos relacionados às EDO que os sujeitos realizaram individualmente e sem consulta, visando avaliar o conhecimento dos alunos acerca de conteúdos matemáticos a serem explorados nas atividades da sequência de ensino.

Esse encontro teve duração de aproximadamente uma hora e trinta minutos, encerrando-se quando o último sujeito concluiu o Teste.

4.2.2 O Segundo Encontro

Neste encontro, ocorrido em 25 de novembro de 2014, em uma sala de aula, apenas dezesseis alunos compareceram. Inicialmente, solicitamos aos participantes que se organizassem em oito duplas para a realização das atividades. Foram formadas oito duplas identificadas da seguinte forma: 1-2, 3-7, 4-18, 5-6, 8-16, 9-11, 13-14, e 15-17.

Em seguida, as duplas receberam vias do Guia 1. Fizemos, em conjunto, a leitura dos objetivos desse guia, e solicitamos que as duplas lessem o texto de introdução e, a partir dessa leitura, desenvolvessem a Atividade 1 desse guia.

Após a resolução, expusemos, no quadro branco, as respostas das duplas referentes aos itens (a) e (b) da Atividade 1 para discussão e institucionalização local a partir da leitura do Texto 1 – Guia de Atividades 1. Esse momento se estendeu, além do previsto, em razão de questionamentos que emergiram.

Na sequência, solicitamos que os alunos fizessem as Atividades 2 até 6, indicando a releitura do texto introdutório. Encerramos o encontro com a realização das seis atividades, porém a discussão de soluções e a institucionalização prevista para ocorrer ao final da resolução do Guia 1 ficaram para o próximo encontro.

4.2.3 O Terceiro Encontro

Este encontro ocorreu em 02 de dezembro de 2014, no LEP. Compareceram os dezesseis alunos que estiveram presentes no segundo encontro.

Iniciamos esse encontro devolvendo as vias do Guia 1 às respectivas duplas e realizando a institucionalização referente ao encontro anterior. Em seguida, entregamos vias do Guia 2, comentamos seus objetivos e solicitamos que as duplas realizassem as Atividades 1 e 2 desse guia.

Após as duplas concluírem as atividades indicadas, houve uma institucionalização local em que discutimos as resoluções, esclarecendo dúvidas, e formalizamos o conceito de solução particular, bem como o de PVI, a partir da leitura do Texto 1 – Guia de Atividades 2.

Na sequência, apresentamos o *software* GeoGebra aos alunos que tiveram acesso aos menus de configuração das janelas de álgebra e de visualização, e receberam instruções sobre o comando do *software* a ser utilizado na Atividades 3. Durante a realização dessa atividade, fizemos orientações até que todas as duplas encontrassem a solução desejada.

Depois disso, propomos a Atividade 4 às duplas. Da mesma forma, fizemos orientações até que todas as duplas obtivessem a solução procurada.

Em seguida, fizemos uma discussão sobre a interpretação geométrica da derivada de uma função a partir da leitura do Texto 2 – Guia de Atividades 2, com o objetivo de subsidiar a resolução da Atividade 5.

O tempo previsto para o encontro não foi suficiente para a realização da Atividade 5 que ficou para o encontro seguinte.

4.2.4 O Quarto Encontro

Neste encontro, realizado em 05 de dezembro de 2014, no LEP, apenas doze alunos compareceram. Devido à falta de quatro alunos, a Dupla 4-18 não foi formada, e os Alunos 6 e 11 ficaram sem par. Então, para favorecer as discussões entre alunos, organizamos uma nova dupla com esses alunos.

No início desse encontro, as vias do Guia 2 e do Texto 2 – Guia de Atividades 2 foram devolvidas às respectivas duplas a fim de que realizassem a Atividade 5 do guia citado.

Na sequência, foi realizada institucionalização local, após a qual os materiais referentes ao Guia 2 foram recolhidos e entregamos vias do Guia 3. Fizemos a leitura dos objetivos desse guia e, em seguida, introduzimos o estudo qualitativo de EDO, explanando sobre campo de direções de uma EDO de primeira ordem e suas implicações em deduções qualitativas acerca das soluções da EDO correspondente.

Em seguida, fornecemos instruções sobre o comando do GeoGebra a ser utilizado na Atividades 1 do Guia 3. Durante a realização dessa atividade, fizemos orientações até que todas as duplas encontrassem o campo de direções em questão.

Na sequência, as duplas realizaram as Atividades 2 e 3. Após a conclusão de cada uma dessas atividades, ocorreu uma institucionalização local, como previsto.

As duplas realizaram as Atividades 4, 5 e 6 do Guia 3 nesse encontro, porém a institucionalização prevista para ocorrer ao final desse guia não foi realizada e ficou adiada para o próximo.

4.2.5 O Quinto Encontro

Neste encontro, realizado em 09 de dezembro de 2014, no LEP, estiveram presentes quatorze alunos. Os dois estudantes faltosos compunham a Dupla 4-18 que também não esteve presente no encontro anterior. Os alunos presentes formaram duplas de acordo com a organização feita no segundo encontro.

No início desse encontro, devolvemos as vias do Guia 3 às respectivas duplas e realizamos a institucionalização referente as Atividades 4, 5 e 6 do guia citado.

Em seguida, entregamos vias do Guia 4 e comentamos seus objetivos. Discutimos o texto de introdução e solicitamos às duplas que realizassem a Atividade 1 desse guia. Logo depois, houve uma institucionalização local em que discutimos as resoluções dos itens dessa atividade.

Na sequência, as duplas realizaram a Atividade 2 e, em seguida, houve uma institucionalização local.

A Atividade 3 e a referente institucionalização local ficaram para o próximo encontro.

4.2.6 O Sexto Encontro

Este encontro foi realizado em 12 de dezembro de 2014, no LEP. Compareceram os quatorze alunos que estiveram presentes no quinto encontro.

No início desse encontro, devolvemos as vias do Guia 4 às respectivas duplas para realizarem a Atividade 3 do guia citado. Logo depois, houve uma institucionalização local.

Em seguida, recolhemos as vias do Guia 4 e aplicamos o Teste Final (Apêndice K) sobre conteúdos relacionados às EDO que os alunos realizaram individualmente e sem consulta

Esse encontro teve duração de duas horas.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Neste capítulo é apresenta a análise *a posteriori* que se efetivou mediante a articulação de três elementos principais: as anotações do diário de campo, as resoluções escritas das duplas e os resultados dos testes inicial e final de conhecimentos. Essa análise *a posteriori* é descrita estabelecendo-se sua comparação à análise *a priori* de modo a validar ou refutar as hipóteses levantadas no início da engenharia.

Para a realização da análise *a posteriori* foram examinados os materiais de sete duplas. As produções escritas dos alunos 4 e 18, que formaram a Dupla 4-18, não foram analisadas em razão de que esses alunos frequentaram somente os três primeiros encontros.

A seguir é apresentada a análise *a posteriori* de cada atividade dos guias.

5.1 Análise *a posteriori* referente ao Guia 1

Atividade 1

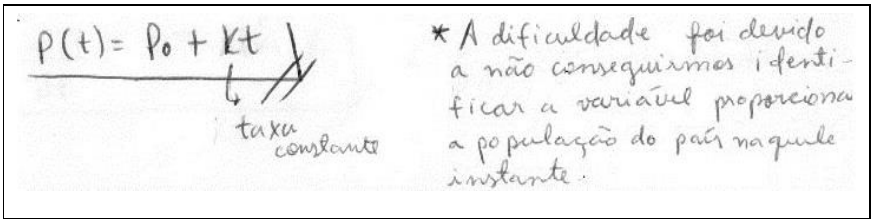
Diferente do que foi previsto, dupla alguma escreveu corretamente as EDO correspondentes aos itens desta atividade.

Três duplas escreveram, nos dois itens, o limite correspondente à definição da derivada de uma função. É possível que as respostas dessas duplas sejam resultado de um contrato didático que leva o aluno a pensar que se um texto é proposto, a resposta deve ser extraída desse texto. Nesse caso o aluno não avalia a função do texto, que no caso em estudo tinha a função de um apoio para se chegar à solução desejada.

Outras três duplas, que responderam somente ao item (a), escreveram uma equação expressando a função $P = P(t)$, mas não envolveram a derivada dessa função. Essas duplas interpretaram a expressão “taxa” como uma taxa percentual, talvez por associarem o contexto dado a aplicações de funções que estudaram no ensino médio, que em muitos casos são soluções de Equações Diferenciais.

A Dupla 1-2, durante o desenvolvimento da atividade, nos expôs dificuldade de interpretação, então, solicitamos que redigissem sobre ela, pois naquele momento não poderíamos intervir. A Figura 29 apresenta a resolução dessa dupla ao item (a).

FIGURA 29. Resposta da Dupla 1-2 ao item (a) da Atividade 1 do Guia 1



Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

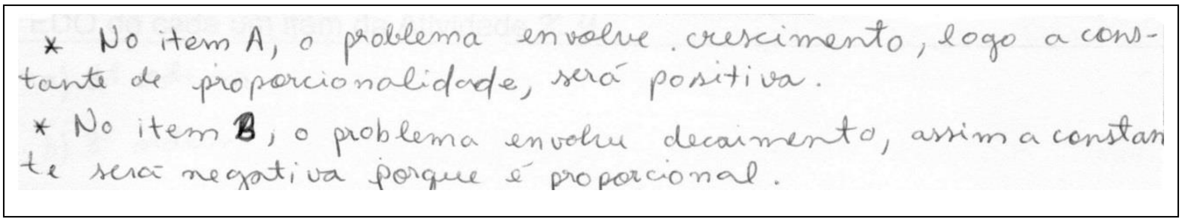
O comentário, escrito pela dupla, expressa a dificuldade de identificar a taxa de variação instantânea envolvida no contexto à derivada da função $P = P(t)$.

Ao final da resolução, pelas duplas, ocorreu a institucionalização local que foi prevista, em que foram discutidas as soluções dos itens dessa atividade.

Atividade 2

Como foi suposto, a discussão sobre as constantes de proporcionalidade envolvidas nos modelos dos itens (a) e (b) da Atividade 1, favoreceu o desenvolvimento da Atividade 2, de sorte que seis duplas responderam e justificaram corretamente a questão. A Figura 30 mostra a resposta da Dupla 1-2.

FIGURA 30. Resposta da Dupla 1-2 à Atividade 2 do Guia 1

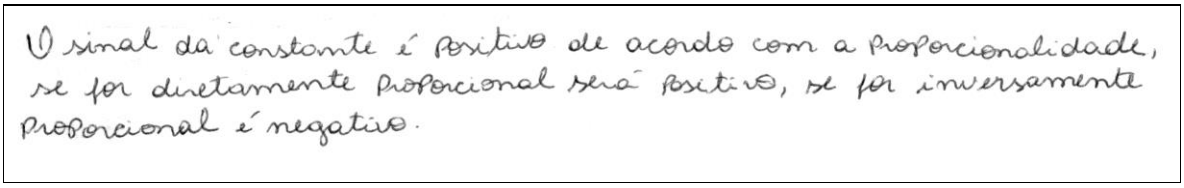


* No item A, o problema envolve crescimento, logo a cons-
tante de proporcionalidade, será positiva.
* No item B, o problema envolve decaimento, assim a constan
te será negativa porque é proporcional.

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

Porém, uma Dupla 8-16 respondeu de forma incorreta, como indica a Figura 31.

FIGURA 31. Resposta da Dupla 8-16 à Atividade 2 do Guia 1



O sinal da constante é positivo de acordo com a proporcionalidade,
se for diretamente proporcional será positivo, se for inversamente
proporcional é negativo.

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

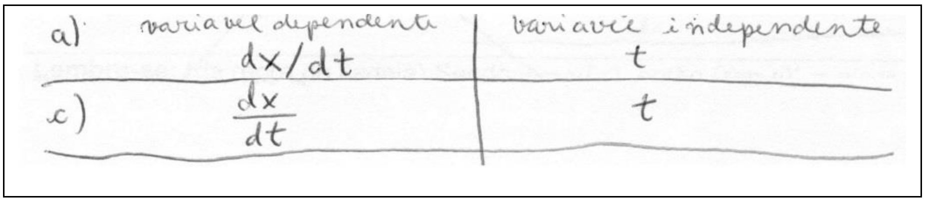
Atividade 3

Os resultados sugerem que o texto de introdução do Guia 1 pode ter contribuído para que quatro duplas identificassem corretamente as variáveis nos itens desta atividade, como havíamos suposto.

Entretanto, as duplas 15-17 e 5-6 erraram o item (f) dessa questão, pois responderam "*Não há variáveis*" e "*Não existe*", respectivamente. Isso talvez tenha ocorrido devido à notação "h" usada para indicar a variável dependente, que não é tão usual e que não foi citada no texto introdutório.

A Dupla 1-2 errou os itens (a) e (c) dessa questão, relacionando, em cada item, a derivada da função envolvida à variável dependente, como é apresentado na Figura 32.

FIGURA 32. Resposta da Dupla 1-2 à Atividade 3 do Guia 1



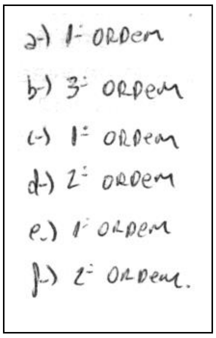
	variavel dependente	variavel independente
a)	dx/dt	t
c)	$\frac{dx}{dt}$	t

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

Atividade 4

Como foi previsto, todas as duplas identificaram corretamente a ordem da EDO dada em cada item. A resposta da dupla 15-17 é mostrada na Figura 33.

FIGURA 33. Resposta da Dupla 15-17 à Atividade 4 do Guia 1



a-) 1ª ORDEM
b-) 3ª ORDEM
c-) 1ª ORDEM
d-) 2ª ORDEM
e-) 1ª ORDEM
f-) 2ª ORDEM.

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

Atividade 5

Nesta atividade, cinco duplas escreveram uma EDO adequada ao problema e identificaram corretamente a ordem dessa equação. O que sugere que a institucionalização após a realização da Atividade 1, desse guia, contribuiu para que a maioria das duplas realizasse com sucesso a Atividade 5, como foi previsto.

Mas, duas duplas erraram. A dupla 15-17 escreveu a resposta errada apresentada na Figura 34. Talvez porque essa dupla não tenha interpretado o problema em questão e tenha copiado o modelo da Atividade 1.

FIGURA 34. Resposta da Dupla 15-17 à Atividade5 do Guia1

TAXA: $\underbrace{\frac{dT}{dt}}_{\text{DIFERENÇA}} = K \cdot \underbrace{T(t)}_{\text{TEMPERATURA DO CORPO}} \dots$

1ª ORDEM

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

A Dupla 13-14 também não interpretou corretamente o problema e não indicou a ordem da EDO encontrada, como mostra a Figura 35.

FIGURA 35. Resposta da Dupla 13-14 à Atividade 5 do Guia 1

$\frac{dT}{dt} = K \circ (T(t) - Tm) \circ t$; K - const. de prop.

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

Atividade 6

Nesta atividade, quatro duplas concluíram que a função dada satisfaz a EDO em questão. Três dessas duplas calcularam corretamente a derivada da função dada e observaram que a partir da expressão encontrada poderiam obter a EDO em questão, como mostra a solução da Dupla 9-11, indicada na Figura 36.

FIGURA 36. Resposta da Dupla 9-11 à Atividade 6 do Guia 1

Satisfaz, $\frac{dP}{dt} = 0,5\, Ce^{0,5t}$ $\to P(t)$ $\Rightarrow$ Logo, $\frac{dP}{dt} = 0,5P$

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

A Dupla 1-2, fez a verificação por meio da resolução da EDO e conclui que a função dada satisfaz a EDO em questão. A Dupla 5-6 não fez essa atividade.

Apesar da indicação da regra da cadeia adequada para a questão, duas duplas aplicaram uma regra errada. Talvez essas duplas tenham confundida a função exponencial dada com uma função potência. A Figura 37 mostra a resolução da Dupla 3-7 que, além de errar a regra, chegou à conclusão de que a função dada satisfaz a EDO de forma incoerente com o que obteve em sua resolução.

FIGURA 37. Resposta da Dupla 3-7 à Atividade 6 do Guia 1

$P(t) = ce^{0,5t}$

$P'(t) = c(0,5t)e^{(0,5t-1)}$

Satisfaz

Fonte: Caderno (Guia 1) da dupla

Como foi previsto, após a resolução dessa atividade, pelas duplas, ocorreu uma institucionalização em que foram discutidas as soluções das Atividades 2 até 6, e conceitos referentes ao estudo de EDO, como solução, solução geral e curvas integrais, foram formalizados.

5.2 Análise *a posteriori* referente ao Guia 2

Atividade 1

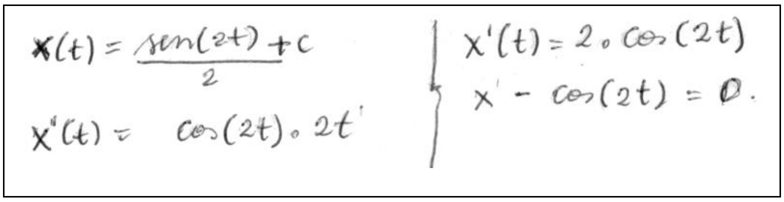
Durante esta atividade, como previmos, algumas duplas manifestaram dúvidas sobre o intervalo dado. Então, reforçamos a explicação sobre intervalo de definição de solução de EDO.

Quatro duplas desenvolveram corretamente o primeiro membro da equação em questão para a função dada e concluíram que a igualdade é verdadeira para cada t no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Como foi suposto, dupla alguma resolveu a EDO em questão para obter a solução geral e compará-la com a função dada, procedimento que foi efetuado pela Dupla 1-2 no Guia 1. O que sugere que a institucionalização, ocorrida no final da resolução de tal guia, contribuiu para que essa dupla apresentasse, nessa atividade, o conceito de solução de uma EDO, de modo informal, como uma função que satisfaz a equação.

Três duplas tentaram desenvolver a questão calculando a derivada da função dada, porém cometeram erros de cálculos e não verificaram o que era solicitado na questão, como mostra a resolução da Dupla 13-14, na Figura 38.

FIGURA 38. Resposta da Dupla 13-14 à Atividade 1 do Guia 2



$x(t) = \frac{sen(2t)}{2} + c$

$x'(t) = cos(2t) \cdot 2t'$

$x'(t) = 2 \cdot cos(2t)$

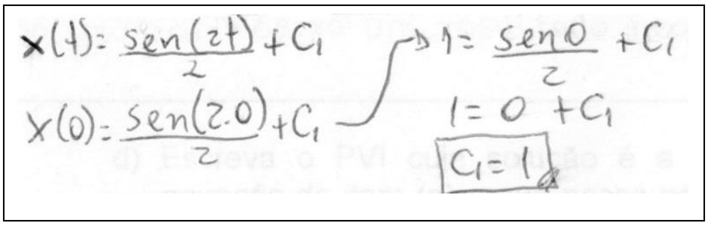
$x' - cos(2t) = 0.$

Fonte: Caderno (Guia 2) da dupla

Atividade 2

Nesta atividade, como previmos, as sete duplas substituíram corretamente as coordenadas do ponto indicado na lei da família de curvas dada e encontraram $c_1 = 1$. A Figura 39 apresenta a resolução da Dupla 3-7 a essa questão.

FIGURA 39. Resposta da Dupla 3-7 à Atividade 2 do Guia 2



$x(t) = \frac{sen(2t)}{2} + C_1$

$x(0) = \frac{sen(2.0)}{2} + C_1 \rightarrow 1 = \frac{sen 0}{2} + C_1$

$1 = 0 + C_1$

$\boxed{C_1 = 1}$

Fonte: Caderno (Guia 2) da dupla

Como previmos, após a resolução dessa atividade, pelas duplas, houve uma institucionalização local em que foram discutidas as resoluções das Atividades 1 e 2, e os conceitos de solução particular e de PVI foram formalizados.

Atividade 3

Como foi previsto, os alunos se adaptaram rapidamente ao uso do GeoGebra. Porém, durante a realização desta atividade, algumas duplas expuseram algumas dúvidas que ocorreram, em geral, na ocasião do preenchimento do comando a ser executado, devido digitarem de forma errada ou deixarem de digitar algum caractere.

Orientamos as duplas durante a atividade e todas as duplas resolveram o PVI em questão por meio do *software*, como previmos.

Atividade 4

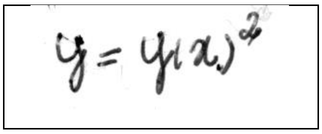
Nesta atividade, algumas duplas manifestaram dúvidas na adequação da notação das variáveis dadas no preenchimento do comando a ser efetuado, a saber: ResolverEDO[<f’(x, y)>,<Ponto de f>]. Foi preciso reforçar, durante a realização da atividade, que nesse comando, x indica a variável independente e y denota a variável dependente. Dessa forma, a EDO dada deve ser expressa no comando em termos de x e y, de maneira que x corresponde a variável independente t e y corresponde a variável dependente x.

Orientamos as duplas durante a atividade e todas as duplas resolveram o PVI em questão por meio do *software*, como previmos.

Atividade 5

Como foi previsto, a maioria das duplas escreveram corretamente a EDO correspondente ao item (a) desta atividade, exceto a Dupla 6-11 que cometeu erro de notação, mostrado na Figura 40. Durante a realização da atividade, esclarecemos o termo abscissa para todos os alunos, após uma dupla questionar se a palavra abscissa se referia à variável x no problema em questão.

FIGURA 40. Resposta da Dupla 6-11 ao item (a) da Atividade 5 do Guia 2



Fonte: Caderno (Guia 2) da dupla

Uma dupla não conseguiu realizar os tens (b), (c) e (d), devido chegar atrasada no encontro que iniciou com a resolução dessa atividade.

As respostas das duplas ao item (b) sugerem que a discussão do Texto 2 – Guia de Atividades 2, realizada antes da atividade, contribui para a realização desse item. Cinco duplas responderam que a reta tangente, em ambos os casos, tem inclinação positiva, com base na expressão do coeficiente angular obtida no item (a). Algumas duplas justificaram por meio de cálculos e outras tentaram expressar uma justificativa em palavras. A Figura 41 mostra a resposta da Dupla 13-14.

FIGURA 41. Resposta da Dupla 13-14 ao item (b) da Atividade 5 do Guia 2

Em ambos os casos a inclinação é positiva, pois ao elevar um valor, seja positivo ou negativo, ao quadrado, ele fica positivo.

Fonte: Caderno (Guia 2) da dupla

Quanto aos itens (c) e (d) dessa atividade, quatro duplas escreveram corretamente o PVI, em cada item, e confirmaram as respostas dadas ao item (b), observando a curva gerada no GeoGebra*.* No entanto, apenas uma dupla fez comentários sobre suas conclusões, expressando que confirmou a inclinação positiva da reta tangente, em cada ponto dado, ao observar o comportamento crescente da solução do PVI em intervalos que contém os pontos em questão. A Dupla 3-7, apesar de escrever corretamente, em cada item, o PVI, afirmou não ter confirmado, no item (c), a resposta dada ao item (b), e não comentou sobre essa conclusão. Isso pode representar um indício de dificuldade de interpretação gráfica.

Após a resolução, pelas duplas, ocorreu a institucionalização local que foi prevista, em que foram discutidas as soluções dos itens dessa atividade.

5.3 Análise *a posteriori* referente ao Guia 3

Atividade 1

Durante a realização desta atividade, algumas duplas solicitaram ajuda para manipular o GeoGebra, por exemplo, na ocasião do preenchimento do comando a ser executado, e também questionaram sobre recursos da barra de ferramentas do *software .*

Orientamos as duplas durante a atividade e todas as duplas obtiveram o campo de direções desejado, como foi previsto.

Atividade 2

Nesta atividade, como foi suposto, as seis duplas que estiveram presentes no encontro fizeram conjecturas coerentes sobre o comportamento assintótico das soluções da EDO dada. De modo geral, presumiram que, quando $x \to \infty$, todas as soluções da EDO em questão parecem se aproximar do valor 2. A resposta da Dupla 8-16 é indiada na Figura 42.

FIGURA 42. Resposta da Dupla 8-16 à Atividade 2 do Guia 3

R: Quando $x \to \infty$, y tende a um valor fixo, que no caso seria o valor 2.

Fonte: Caderno (Guia 3) da dupla

Ao final da resolução, ocorreu a institucionalização local que foi prevista, em que foi discutida a solução dessa atividade.

Atividade 3

As duplas tiveram um bom desempenho nas construções demandas por esta atividade. Apenas duas duplas solicitaram orientação na manipulação do *software,* as quais foram atendidas. Todas as duplas obtiveram, no mesmo plano cartesiano, os esboços do campo de direções e das curvas integrais da EDO em questão.

Como foi previsto, após as duplas realizarem essa atividade, houve uma institucionalização local, em que ressaltamos que uma curva integral que passa pelo campo de direções é tangente a cada segmento que intercepta. Observamos que o esboço do campo de direção de uma EDO de primeira ordem pode ser útil na visualização das soluções, apesar de tal esboço não ser suficiente para permitir que tracemos, sem ambiguidade, a curva solução que satisfaz determinada condição inicial.

Atividade 4

Nesta atividade, as duplas expressaram conjecturas sobre o comportamento assintótico das soluções da EDO em questão, porém somente duas presumiram que as soluções, quando $x \to \infty$, tendem ou para a reta $y = x$ ou para a reta $y = -x$. A Figura 43 apresenta a resposta da Dupla 8-16.

FIGURA 43. Resposta da Dupla 8-16 à Atividade 4 do Guia 3

A medida que $x \to \infty$, as imagens tende para as retas $y = x$ ou $y = -x$

Fonte: Caderno (Guia 3) da dupla

Atividade 5

Esta atividade, como foi previsto, trouxe dificuldades às duplas. Apenas uma dupla relacionou corretamente cada EDO dada ao seu respectivo campo de direções e expressou justificativas coerentes.

Os argumentos usados nas justificativas das outras duplas indicaram confusão na identificação do campo de direções relacionado a cada EDO. Por exemplo, três duplas relacionaram, de forma incorreta, a equação (A), cuja derivada da solução da EDO é igual a uma expressão polinomial do 2ª grau, ao campo (I) que sugere gráficos de parábolas. Na Figura 44 é indicada a resposta da Dupla 6-11 que expressa essa relação.

FIGURA 44. Resposta da Dupla 6-11 à Atividade 5 do Guia 3

I - A → comportamento de parábola

Fonte: Caderno (Guia 3) da dupla

Atividade 6

Nesta atividade, as duplas observaram o fluxo do campo de direções da EDO de primeira ordem em questão e todas as duplas esboçaram uma curva integral aproximada para cada ponto indicado.

Após a resolução dessa atividade, pelas duplas, ocorreu uma institucionalização em que foram discutidas as solução das Atividades 4, 5 e 6 do Guia 3.

5.4 Análise *a posteriori* referente ao Guia 4

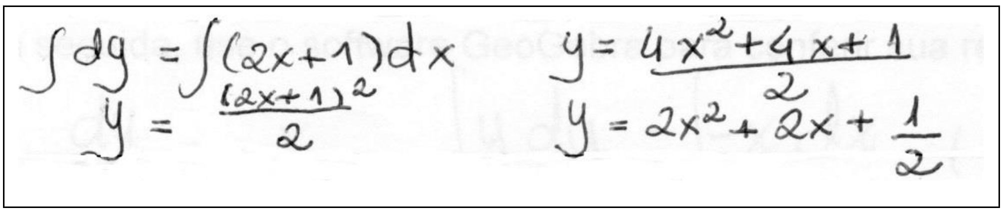
Atividade 1

Nesta atividade, a maioria das duplas manipulou corretamente as EDO dadas de modo a isolar as variáveis. Apesar da indicação de algumas primitivas feita na questão, observamos erros em cálculos de integrais envolvidas na resolução das EDO dadas.

Como foi previsto, duas duplas não expressaram, em suas soluções, a constante de integração e, portanto, não obtiveram, em cada item, a solução geral da EDO de primeira ordem dada.

No item (a), após escrever a EDO dada na forma $dy = (2x + 1)dx$, a Dupla 9-11 integrou ambos os membros, porém integrou de forma errada o segundo membro da equação, como mostra a Figura 45. Parece que a dupla não observou que se tratava de uma integral de soma de funções e aplicou a segunda regra que foi fornecida na questão, e também não expressou a constante de integração.

FIGURA 45. Resposta da Dupla 9-11 ao item (a) da Atividade 1 do Guia 4



Fonte: Caderno (Guia 4) da dupla

Duas duplas manifestaram dúvidas para resolver o item (b), a Dupla 1-2 resolveu de forma incorreta, como mostra a Figura 46, e a outra dupla não resolveu, mesmo sendo feita a indicação de regra para ser usada na questão.

FIGURA 46. Resposta da Dupla 1-2 ao item (b) da Atividade 1 do Guia 4

$$t=\int \frac{dP}{0,5P} \rightarrow t = \frac{1}{\ln(0,5)} + C$$

Fonte: Caderno (Guia 4) da dupla

Como foi suposto, uma dupla, no item (c), calculou a integral $\int \frac{dy}{y^2}$ de forma incorreta, como é indicado na Figura 47.

FIGURA 47. Resposta da Dupla 9-11 ao item (c) da Atividade 1 do Guia 4

$$dy - 3x^2y^2dx = 0$$
$$dy = 3x^2y^2dx$$
$$\frac{dy}{y^2} = 3x^2dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 3x^2dx$$
$$\boxed{\ln|y^2| = x^3}$$

Fonte: Caderno (Guia 4) da dupla

Embora tenha sido fornecida a regra do produto de potências de mesma base, no item (d), duas duplas manipularam de forma errada a EDO dada. A Figura 48 mostra a resolução da Dupla 13-14.

FIGURA 48. Resposta da Dupla 13-14 ao item (d) da Atividade 1 do Guia 4

d) $\frac{dx}{dt} = e^{2t+x} \rightarrow = e^{2t} + e^{x}$

$$-\int e^x\,dx = \int e^{2t}.dt \rightarrow -e^x = \frac{e^{2t}}{2} + C$$

Fonte: Caderno (Guia 4) da dupla

Ao final da resolução, pelas duplas, ocorreu a institucionalização local que foi prevista, em que foram discutidas as soluções dos itens dessa atividade, e os conceitos de solução explícita e implícita foram abordados.

Atividade 2

Todas as duplas substituíram corretamente a condição dada na lei da solução geral da EDO em questão, que foi corrigida na institucionalização local anterior, e encontraram o valor -9 para a constante envolvida. Porém, duas duplas não escrevam a expressão da solução particular desejada, deixando de substituir o valor encontrado da constante na expressão da solução geral, o que pode ter provocado dúvida na conferência das respostas.

Como foi suposto, três duplas não identificaram o problema como um PVI, e solicitaram orientação para encontrar a solução particular por meio do *software.*

Houve também o caso em que uma dupla identificou o PVI, mas teve dúvida para preencher o comando a ser executado, talvez devido não representar a EDO dada na forma $\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2$ para fazer o preenchimento.

Ao final da resolução, ocorreu a institucionalização local que foi prevista, em que foi discutida a solução dessa atividade.

Atividade 3

Nesta questão, três duplas resolveram corretamente o PVI, expressando a solução explícita $= -\sqrt{25 - x^2}$, e conferiram, sem dificuldade, a solução dada por meio *software*. Mas, como previmos, três duplas escreveram de forma incorreta a solução $y = \sqrt{25 - x^2}$, e outra escreveu $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, as quais, ao conferirem suas respostas por meio do *software,* verificaram a diferença, mas não identificaram o erro a ponto de corrigi-lo.

Ao final da resolução, ocorreu a institucionalização local que foi prevista, em que foi discutida a solução dessa atividade.

Quanto aos testes de conhecimentos, de modo geral, os resultados do Teste Final, comparados aos do Teste Inicial, mostraram que os alunos, além de desenvolverem mais questões, tiveram mais acertos, principalmente em questões relacionadas ao estudo qualitativo de EDO de primeira ordem, abordagem que os estudantes afirmaram estudar pela primeira vez.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo investigar estratégias de ensino com vistas a favorecer a aprendizagem de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia.

O estudo direcionou-se para a elaboração de uma engenharia didática, e centrou-se na definição do elenco de componentes dessa engenharia, tendo por alvo abordagens gráfica, algébrica e numérica, que envolvessem situações-problema, por meio da utilização de recursos computacionais.

Os sujeitos da pesquisa foram dezesseis alunos do segundo ano de cursos de graduação em Engenharia Ambiental e em Engenharia de Produção da Universidade do Estado do Pará.

A engenharia didática realizada constou de uma sequência de ensino que envolveu abordagens geométrica e algébrica de EDO, de modo a buscar um tratamento, desse conteúdo matemático, que levasse em conta dados colhidos em pesquisas e experiência profissional, relativos ao ensino e à aprendizagem, em especial em cursos de Engenharia, frente ao desenvolvimento atual em Matemática, Ciências, Engenharias e Tecnologia.

Tanto a elaboração e experimentação dessa sequência de ensino como a análise dos resultados, fundamentaram-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), que valoriza os conhecimentos mobilizados pelos alunos e seu envolvimento na construção do saber matemático, bem como valoriza o trabalho do professor, que consiste fundamentalmente em criar condições para que o aluno construa conceitos matemáticos específicos.

A sequência de ensino foi composta de atividades, envolvendo situações-problema, que tiveram o propósito ou de introduzir um conceito, ou de exercitar um conceito ou de avaliar as produções de alunos, com a previsão de momentos de institucionalização local ao longo de sua aplicação, para serem realizadas por alunos trabalhando em dupla, com o auxílio do *software* GeoGebra.

Não foram abordados métodos numéricos nas atividades desenvolvidas no experimento, devido à necessidade de ajustes na sequência de ensino planejada inicialmente. No entanto, as atividades viabilizaram a articulação das abordagens gráfica e algébrica, de modo que possibilitaram aos alunos estudarem EDO não só algebricamente, mas, a partir da abordagem geométrica, realizarem um estudo introdutório de aspectos qualitativos de EDO de primeira ordem por meio de campo de direções.

As atividades da sequência, que envolveram situações-problema, favoreceram as fases propostas pela Teoria das Situações Didáticas, de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

O trabalho em dupla favoreceu a discussão entre os alunos e possibilitou que os alunos argumentassem sobre suas resoluções, contribuindo para que as duplas realizassem as atividades.

O uso do *software* GeoGebra facilitou o processo, pois favoreceu a realização de atividades envolvendo, por exemplo, campos de direções que poderiam ser menos atrativas sem o uso de *software*. Além, de estimular a motivação dos alunos em realizar as atividades.

A questão norteadora da pesquisa foi a seguinte: Quais componentes devem estar presentes em estratégias de ensino com vistas a favorecer a aprendizagem de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia?

A essa questão, nossa investigação permite dizer que a articulação entre as abordagens gráfica e algébrica, a partir de atividades que envolvam situações-problema, com a utilização de recursos computacionais é importante em estratégias de ensino que visam favorecer a construção de conceitos, contribuindo com a aprendizagem de alunos a acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em Engenharia.

Cabe ressaltar que as estratégias de ensino elaboradas e implementadas com o propósito de desenvolvimento desta tese de doutorado direcionam uma prática pedagógica em que os alunos trabalham realizando atividades propostas e, no final, o professor, em uma sessão coletiva procura institucionalizar os conceitos trabalhados e propõe questões de fixação ou verificação do aprendizado. O que estabelece um contrato didático diferente daquele que rege a prática pedagógica mais comum em Matemática, em que o professor dá aulas expositivas, em que predominam as definições, os exemplos e as listas de exercícios para os estudantes resolverem. E por essa razão houve necessidade de adaptação tanto para os alunos como para a pesquisadora.

A realização desta pesquisa vislumbrou perspectivas para novas investigações e para a nossa atuação docente, indica alternativas que podem ser úteis tanto para a concepção do plano de disciplina referente ao conteúdo de EDO, como para o planejamento e execução de atividades em sala de aula.

O aperfeiçoamento da engenharia didática elaborada e a ampliação do estudo sobre o objeto matemático, as EDO, nessa engenharia, são possibilidades para futuras pesquisas. Por exemplo, a reelaboração da engenharia didática de forma a contemplar também a abordagem numérica e a extensão do estudo às EDO lineares de primeira ordem, sugerem novas investigações.

O trabalho realizado abordou estratégias de ensino no estudo de EDO, fundamentado em teorias que implicam na ampliação de possibilidade de aprendizagem de alunos. Ainda que o uso dessas estratégias não garanta necessariamente a aprendizagem, entendemos que elas podem contribuir com o processo de aprendizagem à medida que favorece a construção de conceitos pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALVES, M. B. **Equações diferenciais ordinárias em cursos de licenciatura de matemática:** formulação, resolução de problemas e introdução à modelagem matemática. 2008. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008. Disponível em: http://www.sistemas.pucminas.br/BDP/SilverStream/Pages/pg_ConsItem.html. Acesso em: 5 jul. 2012.

ANTON, H. **Cálculo:** um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000, v. 1.

ARAÚJO, A. M. R. de. **Modelagem matemática nas aulas de cálculo:** uma estratégia que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de engenharia. 2008. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008. Disponível em: http://ufpa.br/ppgecm/media/Dissertacoes_Alyne%20Maria%20Rosa%20de%20Araujo.pdf. Acesso em: 16 jun. 2011.

ARSLAN, S. **L’approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S:** Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences? 2005. 288f. Ecole doctorale des Mathématiques, Sciences et Technologies de l’Information et Informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. Disponível em http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/81/81/PDF/tel-00009594.pdf. Acesso em 03 de abril de 2012.

ARSLAN, S.; LABORDE, C. **Un outil favorisant le jeu de cadres: cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des equations différentielles**. In Actes du Colloque Européen ITEM, 2003, Reims France. Disponível em http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/41/73/PDF/co26th1.pdf. Acesso em 03 de abril de 2012.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Souvage-Éditions, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

______. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄSSER, R; WINKLEMANN, B. **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 27-39.

______. **Didactical design in mathematics education**. Proceedings of NORMA08 -Nordic Research in Mathematics Education, 2009. Disponível em https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=212293. Acesso: 27 ago. 2014.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BORSSOI, A. H. **A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino**. 2004. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-122, 2004.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução de Horacio Macedo. 6. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

BRAGA, R. M. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias.** 2009. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2009. Disponível em: http://ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao_roberta_modesto_braga.pdf. Acesso em: 16 jun. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação – Conselho Nacional de Educação – Câmera de Ensino Superior. *Resolução CNE/CES, de 11 de março de 2002, que institui Diretrizes Curriculares para os cursos de graduação em Engenharia*. Brasília: Ministério da Educação. 2002. Disponível em http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES112002.pdf. Acesso em: 18 dez. 2009.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Souvage-Éditions, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

DAREZZO FILHO, A.; ARENALES, S. H. V.; SALVADOR, J. A. **Mapas conceituais e ferramentas computacionais: uma experiência no ensino de equações diferenciais.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 32, 2004, Brasília.

DILLUIS, M. M. **Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico.** 2009, 502 f. Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias – Universidade de Burgos, Burgos, 2009.

DULLIUS, M. M.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Ensino e aprendizagem de equações diferenciais com abordagem gráfica, numérica e analítica: uma experiência em cursos de Engenharia. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 17 a 42, Abr, 2011.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno**. 3 ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.

FECCHIO, R. **A modelagem matemática e interdisciplinaridade na introdução do conceito de equação diferencial em cursos de engenharia**. 2011. 208f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/roberto_fecchio.pdf. Acesso em: 05 jan. 2012.

FERREIRA, V. D. T. **A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia**. 2010. 111f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/vagner_donizeti_ferreira.pdf. Acesso em: 27 jun. 2012.

GALLEGOS, R. R. **Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en terminale S**. 2007. 500f. Ecole doctorale des Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information et Informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. Disponível em http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf. Acesso em: 20 out. 2011.

HUGHES-HALLETT, D. et al **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1997. v. 2.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo e aplicações**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1999.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica**: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 2007. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2007. Disponível em http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/javaroni_tese.pdf. Acesso em: 12 ago. 2011.

LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F. Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 103-120, 2007.

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. **Equações diferenciais.** 8 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil**,** 2012.

SOUZA, G. M. de. **Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de equações diferenciais ordinárias**. 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas, Belo Horizonte, 2011. Disponível em http://www.sistemas.pucminas.br/BDP/SilverStream/Pages/pg_ConsItem.html. Acesso em: 27 jun. 2012.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R**. Matemática avançada para engenharia 1**: equações diferenciais elementares e transformada de Laplace. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
ORIENTADORA: SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI
DOUTORANDA: ELIANE ALVES DE OLIVEIRA

Caro discente, solicitamos sua colaboração no sentido de responder este questionário que tem por objetivo coletar informações referentes aos seus conhecimentos acerca de conceitos do Cálculo Diferencial Integral, especialmente, relacionados às Equações Diferenciais Ordinárias, assunto que é abordado na disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral da grade curricular de seu Curso, com vistas a realizar pesquisa, no âmbito da Educação Matemática, sobre o ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias.

Perfil do discente:
Você ficou reprovado em alguma das seguintes disciplinas em algum semestre? _____ Em caso afirmativo, marque com X a(s) disciplina(s).
( ) Cálculo Diferencial e Integral I
( ) Cálculo Diferencial e Integral II
( ) Complemento de Cálculo Diferencial e Integral.

Você já creditou a Disciplina Complemento de Cálculo Diferencial e Integral? _____

Questionário

1) Sabendo que a reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto x_0 tem inclinação positiva, você diz que o valor $f'(x_0)$ tem sinal positivo ou negativo? Por quê?

2) Considerando que a função velocidade $v = v(t)$ de uma partícula que se move em linha reta a partir de um ponto fixo O é dada pela derivada da função de posição $s = s(t)$, isto é $v(t) = s'(t)$ para cada t, como você encontra a função de posição $s = s(t)$ conhecendo a função velocidade $v = v(t)$ da partícula?

3) Como você resolve as seguintes integrais:

a) $\int \frac{1}{x} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx$

c) $\int \frac{1}{1-x} dx$

d) $\int \mathrm{e}^x \, dx$

e) $\int \mathrm{e}^{2x} \, dx$

f) $\int x \, \mathrm{e}^{x^2} dx$

g) $\int \cos x \, dx$

h) $\int \cos 2x \, dx$

4) Como você identifica a variável dependente e a variável independente em cada uma das seguintes equações diferenciais?

a) $\frac{dy}{dx} + 2y = x$

b) $x' = 2tx$

5) A função $y = \frac{\text{sen}\,(2x)}{2} + c$, em que c é uma constante arbitrária, é solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} - \cos(2x) = 0$? Por quê?

6) A função $y = -\frac{1}{x} + 1$ é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{x^2}$? Por quê?.

7) Uma das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional humano por meio da Matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente, a ideia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população total do país cresce em um determinado instante é proporcional à população total de um país naquele instante. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população total no instante t, como você expressa essa hipótese?

8) Como você resolve as seguintes equações diferenciais:

a) $x \, dx + (1 + x^2)dy = 0$

b) $y' - y = \mathrm{e}^t$

9) Como você esboça a curva integral que representa o gráfico da solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ que satisfaz a condição $y(0) = 1$?

Agradecemos sua colaboração!

APÊNDICE B

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOTORANDA: ELIANE ALVES DE OLIVEIRA

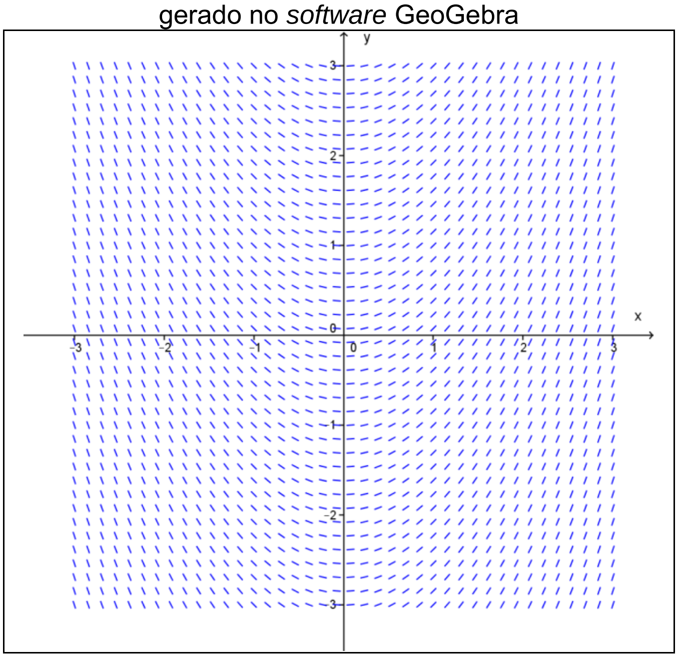
Teste Inicial

(Código do Aluno) ______

1) Sabendo que a reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto x_0 tem inclinação positiva, você diz que o valor $f'(x_0)$ tem sinal positivo ou negativo? Por quê?

2) O campo de direções, na Figura 1, é referente a qual EDO (Equação Diferencial Ordinária) seguinte? Justifique sua resposta.
(A) $y' = 1 + y^2$ (B) $y' = x - y$ (C) $y' = x$

FIGURA 1. Campo de direções, representado para $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$, gerado no *software* GeoGebra

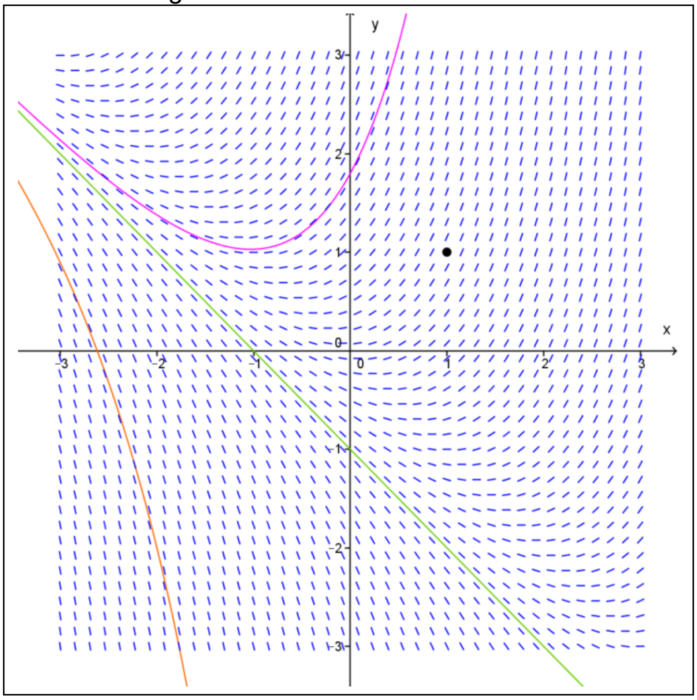


Fonte: Autora (2014)

3) A Figura 2 apresenta o campo de direções da EDO $y' = x + y$, representado para $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$, e indica três curvas integrais dessa equação. Esboce

uma curva integral para a equação dada que passa pelo ponto destacado na figura.

FIGURA 2. Campo de direções juntamente com três curvas integrais da EDO $y' = x + y$, gerado no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

4) Uma das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional humano por meio da matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente, a ideia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população total do país cresce em um determinado instante é proporcional à população total de um país naquele instante. Se $P = P(t)$ for a população total no instante t, expresse essa hipótese em termos matemáticos.

5) A função $y = \frac{\text{sen}\,(2x)}{2} + c$, em que c é uma constante arbitrária, é solução da EDO $\frac{dy}{dx} - \cos(2x) = 0$? Por quê?

6) A função $y = -\frac{1}{x} + 1$ é uma solução da EDO $y' = \frac{1}{x^2}$? Por quê?.

8) Resolva a equação diferencial $x\,dx + (1 + x^2)dy = 0$.

7) Considerando que a função velocidade $v = v(t)$ de uma partícula que se move em linha reta a partir de um ponto fixo O é dada pela derivada da função de posição $s = s(t)$, isto é, $v(t) = s'(t)$ para cada t, encontre a função de posição $s = s(t)$, sabendo que a função velocidade da partícula é $v(t) = 2t + 3$ e que $s(0) = 2$.

9) Esboce a curva integral que representa o gráfico da solução da EDO $\frac{dy}{dx} = 2x$ que satisfaz a condição $y(0) = 1$?

10) Escreva sobre o que consiste o método de Euler no estudo de Equações Diferenciais.

Guia de Atividades 1

(Código da Dupla) ____ e _____

1. Objetivos

a) Revisar o conceito de derivada de função de uma variável real a partir de sua interpretação como taxa de variação instantânea, focalizando suas notações mais usuais;

b) Abordar o conceito de Equação Diferencial Ordinária (EDO) a partir de problemas que envolvam taxa de variação instantânea, modelados classicamente por EDO;

c) Abordar termos e conceitos do estudo de EDO, tais como ordem, solução e solução geral.

2. Introdução

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0 dada por $y = f(x)$. A **taxa média de variação** de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ é dada pela expressão

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

O limite da taxa média de variação y em relação a x quando $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

é **taxa instantânea de variação** de y em relação a x em x_0, desde que o limite exista.

Esse limite que aparece em muitas situações recebe um nome próprio, a **derivada** de f em $x = x_0$.

Agora se fizermos variar no intervalo de definição da função f o ponto em que calculamos a derivada, obteremos uma nova função que será chamada a função derivada. Ou seja: A **derivada** de uma função f é a função f' (lê-se "f linha"), tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se esse limite existir.

O uso do símbolo f' para a derivada da função f foi introduzido pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), no século dezoito. Considerando $y = f(x)$, pode-se denotar a derivada de f em x por f', por y'.

Outra notação utilizada para indicar a derivada de uma função é o símbolo $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}f(x)$, introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), para indicar a derivada da função f dada por $y = f(x)$.

O valor da derivada de $y = f(x)$ em um número particular $x = x_0$ de seu domínio é normalmente escrito por $f'(x_0)$ ou $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Muitos fenômenos naturais são traduzidos para a linguagem matemática por meio de equações que envolvem taxas instantâneas de variação, isto é, derivadas de funções.

Tratando-se de fenômenos em que uma determinada quantidade (variável dependente) varia em relação ao tempo (variável independente), é comum simbolizarmos a variável independente por t e a variável dependente por x. Nesse caso, a função f é simbolicamente expressa pela relação funcional $x = f(t)$ e sua derivada por $f'(t)$ ou $\frac{dx}{dt}$.

As atividades que seguem abordam taxas instantâneas de variação.

3. Atividades

Atividade 1

Os itens seguintes expressam fenômenos que envolvem taxa instantânea de variação:

c) Uma das primeiras tentativas de modelagem do **crescimento populacional** humano por meio da Matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente, a ideia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população total do país cresce em um determinado instante é proporcional à população total de um país naquele instante. Se $P = P(t)$ for a população total no instante t, expresse essa hipótese em termos matemáticos.

Lembre-se: Se duas quantidades u e v são proporcionais, então uma quantidade é um múltiplo constante da outra: $u = kv$, em que k é uma constante.

d) O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e nêutrons. Muitas dessas combinações são instáveis – isto é, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outra substância. Por exemplo, ao longo do tempo, o elemento altamente radioativo elemento rádio, Ra-226, transmuta-se no gás radônio radioativo, Rn-222. Para modelar o fenômeno de **decaimento radioativo,** supõe-se que a taxa de $\dfrac{dA}{dt}$ segundo a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade (mais precisamente, o número de núcleos) $A = A(t)$ de substância remanescente no instante t. Escreva uma equação que modela esse fenômeno.

Institucionalização e Leitura do Texto 1 - Guia de Atividades 1

Atividade 2:

Observando os contextos dos respectivos itens (a) e (b) da Atividade 1, o que você pode afirmar sobre o sinal das constantes de proporcionalidade que aparecem nas equações desses itens? Justifique a sua resposta.

Atividade 3:

Identifique a variável dependente e a variável independente em cada uma das seguintes EDO:

a) $\frac{dx}{dt} = \alpha x$, em que α é uma constante.

b) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2y = x$

c) $x' = 4tx$

d) $y'' - 3y' + 2y = x$

e) $\frac{dT}{dt} = k(A - T)$, em que k e A são constantes.

f) $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$, em que g é uma constante.

Atividade 4

A **ordem** de uma Equação Diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da derivada de maior ordem na equação. Sabendo disso, identifique a ordem da EDO de cada item da Atividade 3.

Atividade 5

De acordo com a **lei empírica de Newton do resfriamento** – ou aquecimento – a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente. Se $T = T(t)$ representar a temperatura de um corpo no instante t, T_m a temperatura do meio que o rodeia e $\frac{dT}{dt}$ a taxa segundo a qual a temperatura do corpo varia, escreva a equação diferencial que modela a lei de Newton do resfriamento/aquecimento e indique a ordem dessa equação.

Atividade 6

Verifique, algebricamente, se a função $P(t) = ce^{0,5t}$, em que c é uma constante arbitrária, satisfaz a EDO $\frac{dP}{dt} = 0,5P$ para todo t no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

Lembre-se: (da regra da cadeia) Sendo $u = u(x)$, então $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

Institucionalização e Leitura do Texto 2 - Guia de Atividades 1

Texto 1 - Guia de Atividades 1

Equação Diferencial

A expressão $\frac{dP}{dt} = kP$ (k constante) é uma **Equação Diferencial.** Tal expressão é equivalente a $\frac{dP}{dt} - kP = 0$ ou $dP - kPdt = 0$ ou $dP = kPdt$ ou $P' = kP$ ou $P' - kP = 0$.

Uma **Equação Diferencial (ED)** é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas.

Cabe ressaltar que uma mesma ED pode servir como modelo matemático para vários fenômenos diferentes.

Quando a função incógnita (variável dependente) depende de uma única variável independente a equação é dita **Equação Diferencial Ordinária (EDO).** A equação $\frac{dP}{dt} = kP$ (k constante) é um exemplo de EDO, uma vez que a função incógnita $P = P(t)$ dependente de uma única variável independente t.

No caso em que a função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes a equação é chamada de **Equação Diferencial Parcial** (**EDP).**

Neste trabalho, nosso interesse é o estudo das EDO.

Texto 2 - Guia de Atividades 1

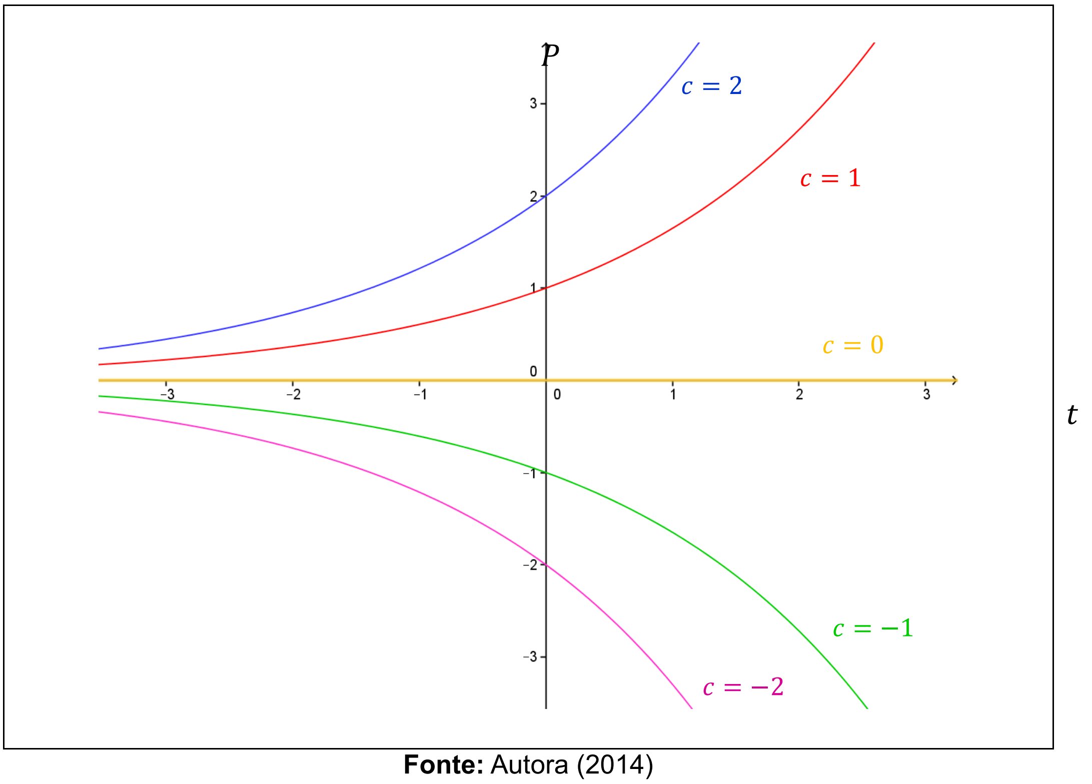
Solução de uma EDO

Uma função, definida e derivável até a ordem n em um intervalo I, que satisfaz uma EDO de ordem n, é dita **solução** da equação no intervalo.

A **solução geral** de uma EDO de ordem n é a solução em que figuram n constantes arbitrárias. Por exemplo, na Atividade 6, $P(t) = ce^{0,5t}$ é a solução geral da EDO de primeira ordem $\frac{dP}{dt} = 0,5P$, em que aparece uma constante arbitrária c.

A interpretação geométrica da solução geral de uma EDO é a de uma família infinita de curvas. Essas curvas são chamadas **curvas integrais** da EDO. Por exemplo, para cada valor da constante c da solução geral $P(t) = ce^{0,5t}$ da EDO $\frac{dP}{dt} = 0,5P$, tem-se uma curva associada. A Figura 1 ilustra algumas curvas integrais dessa equação, para $c = -2$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ e $c = 2$.

FIGURA 1. Algumas curvas integrais da EDO da Atividade 6, construídas *no software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

APÊNDICE F

Guia de Atividades 2

(Código da Dupla) ____ e _____

1. Objetivos

a) Interpretar geometricamente a solução geral de uma EDO, com o auxílio do *software* GeoGebra;
b) Abordar o conceito de Problema de Valor Inicial (PVI) e sua solução;
c) Revisar a interpretação geométrica da derivada.

2. Atividades

Atividade 1

Verifique, algebricamente, que a família de funções $x(t) = \frac{\text{sen }(2t)}{2} + c$, em que c é uma constante arbitrária, é solução geral da EDO de primeira ordem $x' - \cos(2t) = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Lembre-se: (da regra da cadeia) Sendo $u = u(x)$, então $(\text{sen } u)' = u' \cos u$.

Atividade 2

De acordo com a Atividade 1, as curvas $x(t) = \frac{\text{sen }(2t)}{2} + c$ são as **curvas integrais** da EDO dada por $x' - \cos(2t) = 0$. Determine o valor da constante c_1 de modo que a curva integral $x(t) = \frac{\text{sen }(2t)}{2} + c_1$ passe pelo ponto $(0,1)$, ou seja, satisfaça a condição $x(0) = 1$.

Lembre-se: $\text{sen } 0 = 0$.

Institucionalização e Leitura do Texto 1- Guia de Atividades 2

Atividade 3

Use o comando ResolverEDO[<f’(x, y)>,<Ponto de f>] do *software* GeoGebra para encontrar a solução do PVI $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \\ y(4) = 3 \end{cases}$. Acompanhe as instruções que serão encaminhadas por meio do *data show*.

Atividade 4

Use o comando ResolverEDO[<f'(x, y)>,<Ponto de f>] do *software* GeoGebra para encontrar a solução do PVI $\begin{cases} x' = 2tx^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. Acompanhe as instruções que serão encaminhadas por meio do *data show*.

Leitura do Texto 2- Guia de Atividades 2

Atividade 5

e) Escreva uma equação matemática que expresse que a inclinação da reta tangente a uma curva $y = y(x)$ em um ponto qualquer (x, y) é igual ao quadrado da abscissa do mesmo ponto.

f) Analisando a equação do item (a), a referida reta tangente tem inclinação positiva ou negativa no ponto $(2, 1)$? E no ponto $(-1,3)$? Justifique suas respostas.

g) Escreva o PVI cuja solução é a curva $y = y(x)$ que satisfaz a equação do item (a) e que passa pelo ponto $(2,1)$. Use o *software* GeoGebra para encontrar essa curva e observe o gráfico para confirmar ou refutar a resposta que foi dada a primeira indagação do item (b). Comente sua conclusão.

h) Escreva o PVI cuja solução é a curva $y = y(x)$ que satisfaz a equação do item (a) e que passa pelo ponto $(-1,3)$. Use o *software* GeoGebra para encontrar essa curva e observe o gráfico para confirmar ou refutar a resposta que foi dada a primeira indagação do item (b). Comente sua conclusão.

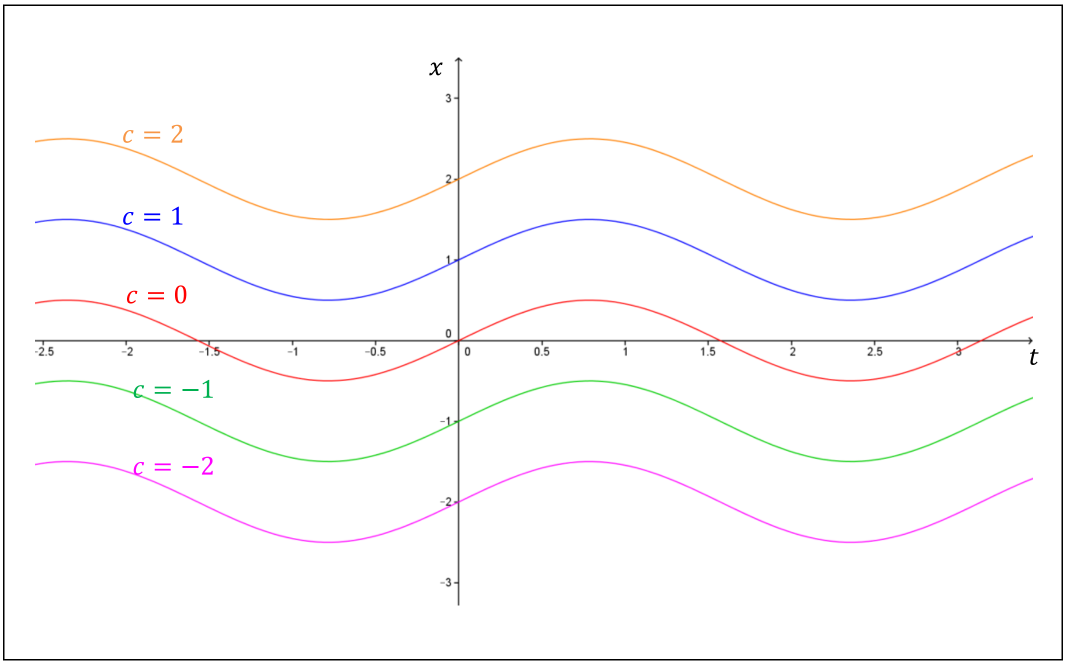
Institucionalização

Texto 1 - Guia de Atividades 2

Solução particular – Problema de Valor Inicial (PVI)

Para cada valor da constante c da solução geral $x(t) = \frac{\text{sen}\,(2t)}{2} + c$ da EDO de primeira ordem Atividade 1, tem-se uma curva associada. A Figura 1 ilustra algumas **curvas integrais** dessa equação, para $c = -2$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ e $c = 2$.

FIGURA 1. Algumas curvas integrais da EDO da Atividade 1, construídas no *software* GeoGebra



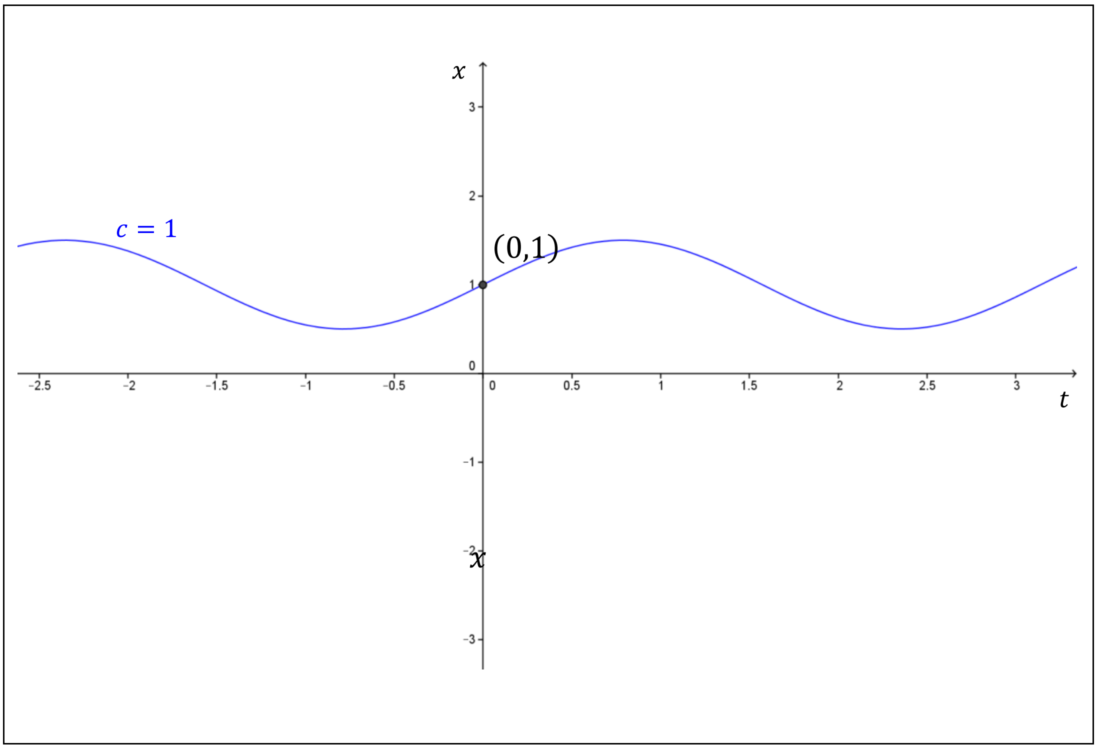
Fonte: Autora (2014)

Uma **solução particular** de uma EDO de primeira ordem expressa na forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

é a solução que além de satisfazer a EDO, também satisfaz uma condição $x(t_0) = x_0$, chamada **condição inicial**. Por exemplo, na Atividade 2, a solução da EDO que também satisfaz a condição inicial $x(0) = 1$ é a solução particular $x(t) = \frac{\text{sen}\,(2t)}{2} + 1$, ilustrada na Figura 2.

FIGURA 2. Solução particular da EDO dada na Atividade 2, construída no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

O problema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é chamado **problema de valor inicial** (**PVI**)**.** A solução de um PVI deve satisfazer a EDO em questão e também a condição dada. Essa solução é uma solução particular da EDO.

Texto 2 - Guia de Atividades 2

Interpretação geométrica da derivada - Coeficiente angular (inclinação) de reta tangente

Seja f uma função contínua em um intervalo aberto que contém x_0, dada por $y = f(x)$, e suponhamos que exista $f'(x_0)$.

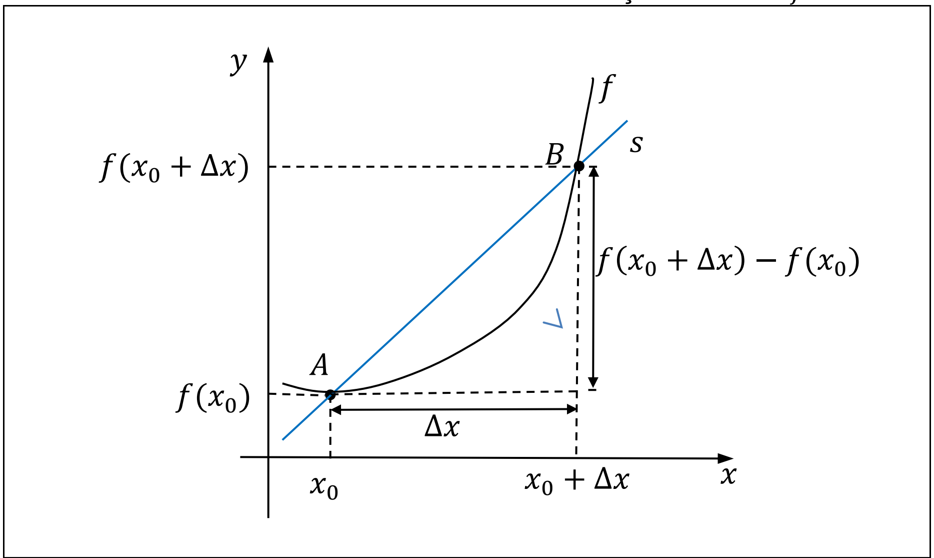
Consideremos a **taxa de variação média** de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ dada pela expressão

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

O numerador, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, é a distância vertical indicada na Figura 1 e Δx é a distância horizontal, assim

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Taxa de variação média}\\ \text{de } f\end{array} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{array}{c}\text{Inclinação da reta secante s ao}\\ \text{gráfico de } f \text{ nos pontos } A \text{ e } B\end{array}}$$

FIGURA 1. Visualizando da taxa de variação média de f

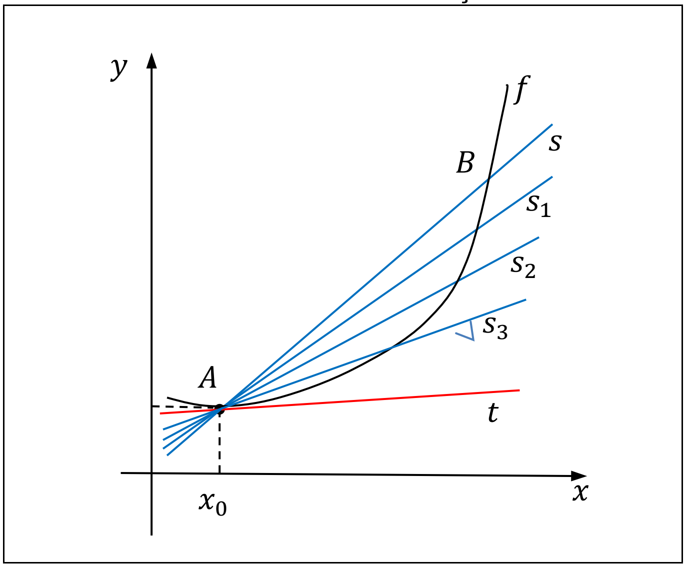


Fonte: Adaptada de Hughes-Hallett (1999)

À medida que $\Delta x \to 0$, a reta secante tende para a reta tangente à curva em A. (Veja a Figura 2). Assim,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Taxa de variação instantânea}\\ \text{de } f \text{ em } x_0\end{array} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{array}{c}\text{Inclinação da reta tangente } t\\ \text{ao gráfico de } f \text{ em } A\end{array}}$$

FIGURA 2. Visualizando a taxa de variação instantânea de f



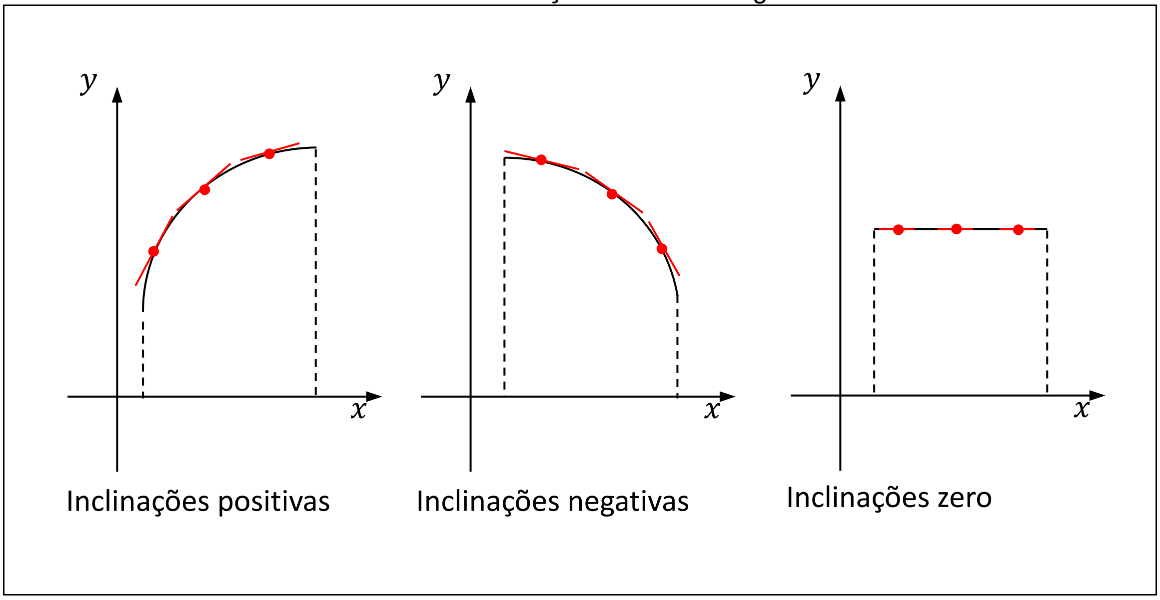
Fonte: Adaptada de Hughes-Hallett (1999)

Assim, a **derivada de f em x_0** pode ser vista como **a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x_0.**

$$\boxed{f'(x_0) = \begin{array}{c}\text{Inclinação da reta tangente } t \\ \text{ao gráfico de } f \text{ em } A\end{array}}$$

A Figura 3 sugere que uma função diferenciável f é crescente em qualquer intervalo em que o seu gráfico tem retas tangentes com inclinações positivas, decrescente em qualquer intervalo em que as retas tangentes ao gráfico tiverem inclinações negativas e, constante em qualquer intervalo em que o seu gráfico tiver retas tangentes com inclinações zero.

FIGURA 3. Inclinações de retas tangentes



Fonte: Adaptada de Anton (2000)

Essa observação intuitiva sugere o teorema enunciado a seguir, cuja demonstração pode ser consultada em Anton (2000):

Teorema: Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b).

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é crescente em $[a,b]$.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é decrescente em $[a,b]$.

(iii) Se $f'(x) = 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é constante em $[a,b]$.

Referência

ANTON, H. **Cálculo:** um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000, v.1.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo e aplicações**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1999.

Guia de Atividades 3

(Código da Dupla) ____ e _____

1. Objetivo

a) Introduzir o estudo qualitativo de EDO;

b) Construir campos de direções com o auxílio do *software* GeoGebra.

2. Introdução

Campos de direções (Campos de inclinações)

Seja a EDO de primeira ordem da forma

$$y' = f(x, y).$$

Uma solução $y = y(x)$ dessa equação (caso exista) é uma função diferenciável cujo gráfico tem reta tangente de inclinação $y' = f(x, y)$ em cada ponto (x, y).

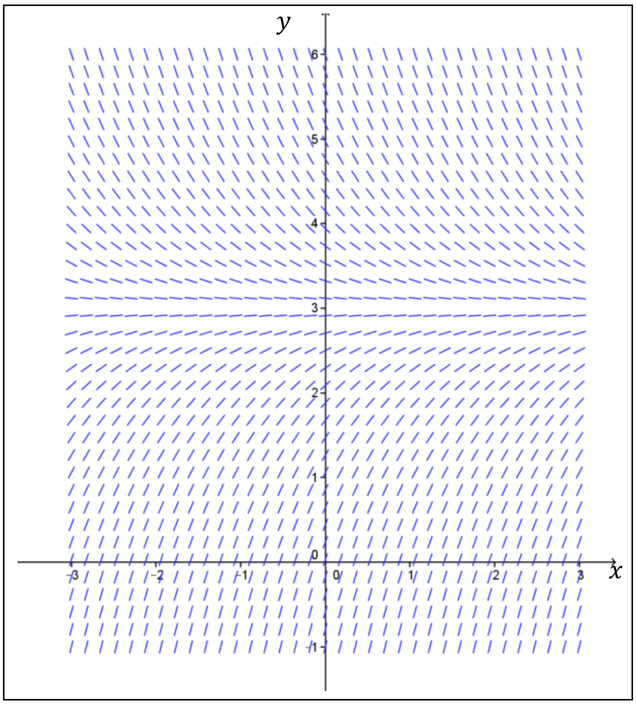
Podemos representar graficamente essa situação traçando um pequeno segmento de reta, cuja origem é o ponto (x, y), com inclinação $f(x, y)$. O conjunto desses segmentos de reta é o **campo de direções** da equação $y' = f(x, y)$ que pode ser visualizado a partir de uma coleção representativa de pontos do plano xy.

Consideremos, por exemplo, a EDO

$$y' = 3 - y.$$

A Figura 1 ilustra o campo de direções para essa EDO.

FIGURA 1. Campo de direções para $y' = 3 - y$, representado para $-3 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 6$, construído no *software* GeoGebra

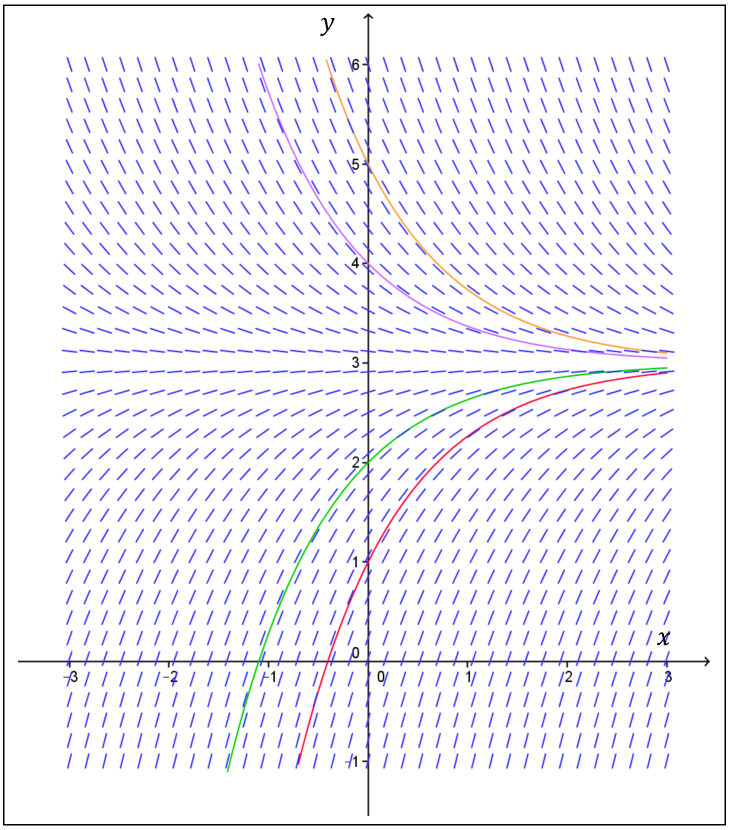


Fonte: Autora (2014)

O campo de direções de uma EDO nos permite fazer deduções de **informações qualitativas** acerca de suas soluções. Por exemplo, observando a Figura 1, parece evidente que as soluções da EDO em questão são funções decrescentes quando $y > 3$, que são funções crescentes quando $y < 3$ e que todas as soluções parecem se aproximar do valor 3 quando $x \to \infty$ (todas as soluções têm $y = 3$ como assíntota horizontal).

O esboço de uma curva solução que passa pelo campo de direções pode ser feito de modo a ser tangente a cada pequeno segmento que intercepta. A Figura 2 apresenta o campo de direções juntamente com algumas curvas integrais dessa EDO.

FIGURA 2. Campo de direções juntamente com algumas curvas integrais da EDO $y' = 3 - y$, construídos no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

2. Atividades

Atividade 1

Use o comando CampoDeDireções[<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>] do *software* GeoGebra para representar o campo de direções da EDO $\frac{dy}{dx} = 4 - 2y$ para $-8 \leq x \leq 8$ e $-6 \leq y \leq 8$. Acompanhe as instruções que serão encaminhadas por meio de *data show*.

Atividade 2

Observando o campo de direções da Atividade 1, o que você pode dizer sobre o comportamento assintótico de y? Por exemplo, quando $x \to \infty$, temos $y \to \infty$ ou $y \to c$, em que c é uma constante? Justifique sua resposta.

Institucionalização

Atividade 3

Use o comando CampoDeDireções[<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>] do *software* GeoGebra para representar o campo de direções da EDO $y' = \frac{x}{y}$ para $-4 \leq x \leq 4$ e $-4 \leq y \leq 4$. Em seguida, use o comando ResolverEDO[<f”(x, y)>,<Ponto de f>] para visualizar a curva solução que satisfaz a condição inicial em cada item:

(f) $y(0) = 1$
(g) $y(1) = 0$
(h) $y(0) = -1$
(i) $y(2) = 0$
(j) $y(2) = -1$

Institucionalização

Atividade 4

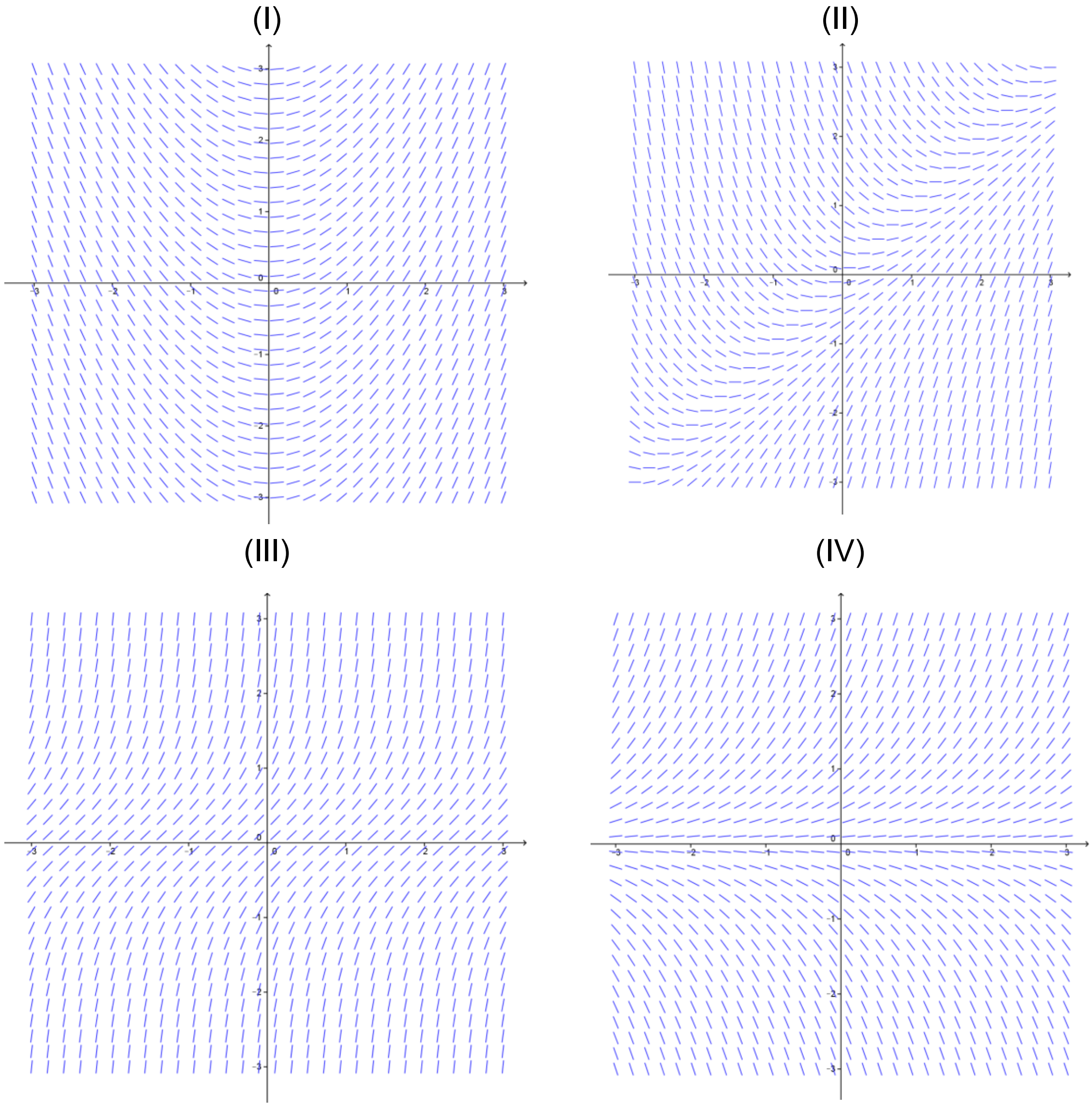
Observando o campo de direções da Atividade 3, o que você pode dizer sobre o comportamento assintótico de y quando $x \to \infty$? Argumente sua resposta.

Atividade 5

Relacione cada EDO ao seu respectivo campo de direções da Figura 3. Justifique sua resposta.

(A) $y' = 1 + y^2$ (B) $y' = x - y$ (C) $y' = x$ (D) $y' = y$

FIGURA 3. Campos de direções representados para $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$, construídos no *software* GeoGebra

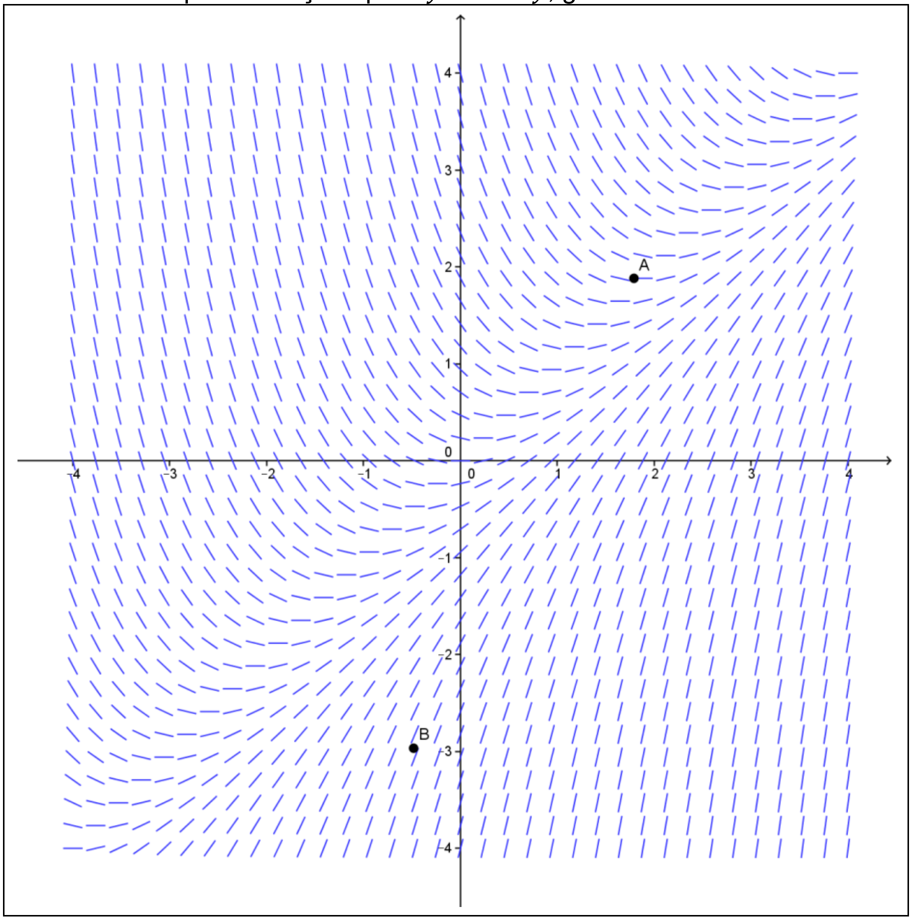


Fonte: Autora (2014)

Atividade 6

A Figura 4 apresenta o campo de direções da EDO $y' = x - y$, representado para $-4 \leq x \leq 4$ e $-4 \leq y \leq 4$,. Esboce, na figura, a curva integral que passa pelo ponto A e a curva integral que passa por B.

FIGURA 4. Campo de direções para $y' = x - y$, gerado no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

Institucionalização

APÊNDICE J

Guia de Atividades 4

(Código da Dupla) ____ e _____

1. Objetivo

a) Definir EDO de primeira ordem de variáveis separáveis;
b) Resolver EDO de primeira ordem de variáveis separáveis;
c) Abordar PVI de forma algébrica e geométrica.

2. Introdução

Uma EDO de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad (1)$$

é chamada de **separável** ou de **variáveis separáveis**.

O termo **separável** está associado ao fato de que a expressão do lado direito da equação (1) pode ser expressa como um produto de uma função de x por uma função de y.

Observe que, dividindo (1) pela função $h(y)$, com $h(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x). \qquad (2)$$

Denotando $\frac{1}{h(y)}$ por $p(y)$ em (2), obtemos

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \qquad (3)$$

Agora, se $y = \varphi(x)$ representa uma solução de (3), devemos ter $p\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = g(x)$ e, integrando ambos os membros em relação a x, temos:

$$\int p(\varphi(x)\,) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \qquad (4)$$

Como $dy = \varphi'(x)dx$, logo, (4) é o mesmo que

$$\int p(y)dy = \int \mathrm{g}(\mathrm{x})\ dx. \qquad (5)$$

Se as antiderivadas de p e g podem ser determinadas, então, por meio da expressão (5), encontramos, em geral dada implicitamente, a solução geral da EDO em (1).

2. Atividades

Atividade 1

Encontre, algebricamente, a solução geral das seguintes EDO de primeira ordem de variáveis separáveis:

e) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

Lembre-se: $\int c\,dx = cx + k$, em que c e k são constantes.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$, com $n \neq -1$, em que k é uma constante.

f) $\frac{dP}{dt} = 0{,}5P$

Lembre-se: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$, em que k é uma constante.

g) $dy - 3x^2y^2dx = 0$

h) $\frac{dx}{dt} = e^{2t+x}$

Lembre-se: (Produto de potências de mesma base) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\int e^{nx} dx = \frac{e^{nx}}{n} + k$, $n \neq 0$, em que k é uma constante.

Institucionalização

Atividade 2

Encontre a lei da função que é solução da EDO do item (c) da Atividade 1 e que satisfaz a condição inicial $y(2) = 1$. Em seguida, use o software GeoGebra para conferir sua resposta.

Atividade 3

Encontre, algebricamente, a solução explícita do PVI

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y}, \\ y(4) = -3 \end{cases}$$

Em seguida, use o software GeoGebra para conferir sua resposta.

Institucionalização

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DOTORANDA: ELIANE ALVES DE OLIVEIRA

Teste Final

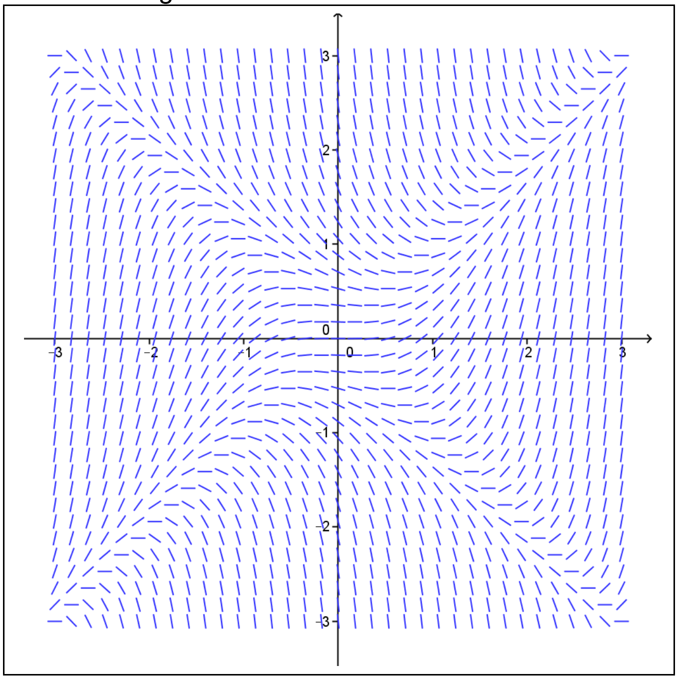
(Código do Aluno) ______

1) Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$, k uma constante, em que situações a curva que representa a solução será crescente? E decrescente? Justifique.

2) O campo de direções, na Figura 1, é referente a qual EDO seguinte? Justifique sua resposta.

(A) $y' = x - y + 1$ (B) $y' = x^2 - y^2$ (C) $y' = 3 - 2x$

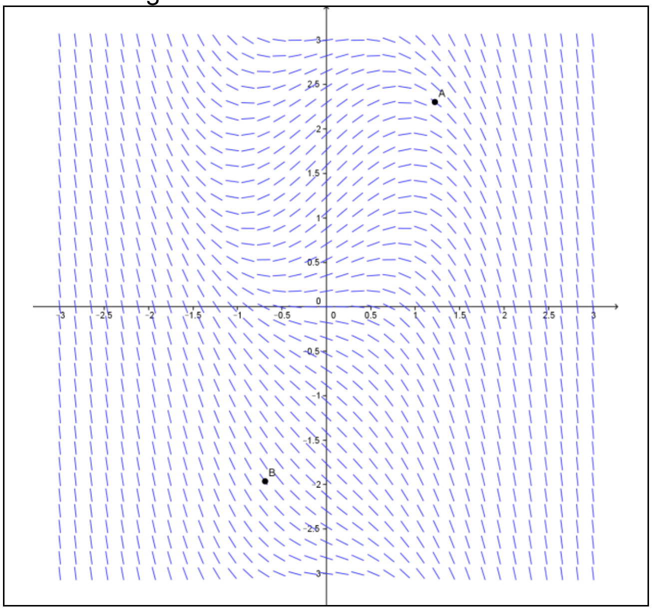
FIGURA 1. Campo de direções, representado para $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$, gerado no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

3) A Figura 2 apresenta o campo de direções da EDO $y' = -x^2 + \operatorname{sen} y$, representado para $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$, e dois pontos, A e B, traçados nesse campo. Esboce uma curva integral da equação dada que passa pelo ponto A e outra que passa pelo ponto B.

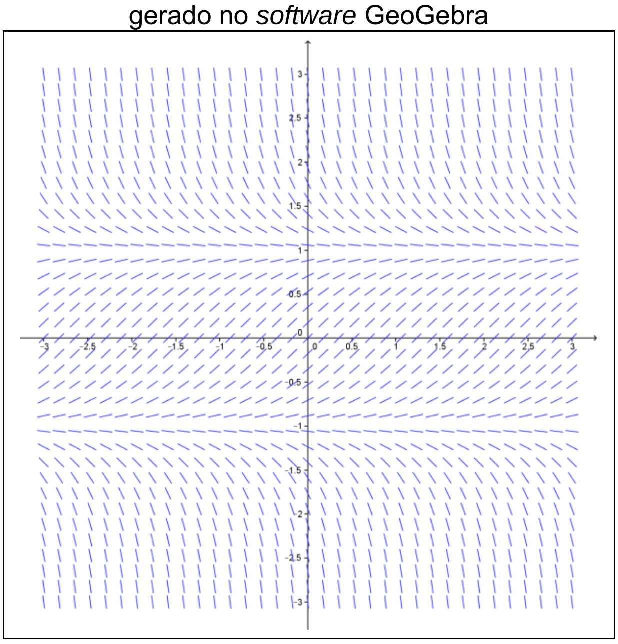
FIGURA 2. Campos de direções da EDO da $y' = -x^2 + \operatorname{sen} y$, gerado no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

4) Observando, na Figura 3, o campo de direções da EDO $y' = 1 - y^2$, representado para $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$, o que você pode dizer sobre o comportamento assintótico de y?

FIGURA 3. Campos de direções da EDO da $y' = 1 - y^2$, gerado no *software* GeoGebra



Fonte: Autora (2014)

5) Sabendo que $x(t) = -\frac{1}{t^2+c}$, em que c é uma constante arbitrária, é solução geral da EDO de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = 2tx^2$, encontre a solução particular dessa equação que satisfaz a condição inicial $x(0) = 1$.

6) Resolva a equação diferencial $(1 + x^2)dx + 3x^2dy = 0$.

7) Considerando que a função velocidade $v = v(t)$ de uma partícula que se move em linha reta a partir de um ponto fixo O é dada pela derivada da função de posição $s = s(t)$**,** isto é, $v(t) = s'(t)$ para cada t, encontre a função de posição $s = s(t)$, sabendo que a função velocidade da partícula é $v(t) = 2t + 3$ e que $s(0) = 2$.

8) Esboce a curva integral que representa o gráfico da solução da EDO $\frac{dy}{dx} = 2x$ que satisfaz a condição $y(0) = 1$?

APÊNDICE L

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado como voluntário a participar da pesquisa: E**quações Diferenciais: estratégias e metodologias de ensino em um Curso de Engenharia**, que tem como obtivo central "investigar quais componentes devem estar presentes em estratégias e metodologias de ensino que viabilizem uma melhor compreensão acerca das Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em Curso de Engenharia".

Pesquisas no âmbito da Educação Matemática apontam para a necessidade de investigar possibilidades ou alternativas para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias de modo a amenizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos nesse estudo, favorecendo a compreensão dos conceitos, o que justifica tal investigação.

Sua participação na referida pesquisa será no sentido de possibilitar aos pesquisadores a observação e a análise de como uma Engenharia Didática pode viabilizar uma melhor compreensão acerca das Equações Diferenciais Ordinárias. O experimento ocorrerá em 06 (seis) sessões que poderão envolver atividades escritas e via *software*, gravação de voz, testes, questionários e entrevistas. Sua participação é totalmente voluntária, podendo recusar-se a participar ou mesmo desistir a qualquer momento e retirar seu consentimento sem que isso acarrete qualquer prejuízo em sua relação com as pesquisadoras ou com a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP.

Esclarecemos que você poderá sentir algum tipo de desconforto devido estar em situação que visa a avaliação. No entanto, você poderá obter como benefício uma melhor compreensão acerca dos conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações, além de auxiliar em possíveis contribuições para o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações de modo a favorecer a aprendizagem dos alunos em Cursos de Graduação em Engenharia. É importante ter conhecimento do dato de que sua ausência, mesmo que sua participação seja voluntária, em quaisquer das sessões relativas à experiência, poderá dificultar o alcance da aprendizagem do conteúdo investigado. Por isso ressaltamos a importância de sua participação em todas as sessões.

A presente pesquisa terá seus resultados publicados em relatório de pesquisa, revistas científicas, anais de congressos, etc. Seus dados serão mantidos sob nossa guarda e responsabilidade e, além disso, garantimos que seu anonimato será respeitado, ou seja, será mantido em sigilo seu nome ou qualquer outro dado que possa levar à sua efetiva identificação por parte daqueles que vierem a ter conhecimento da pesquisa.

As pesquisadoras envolvidas com o referido projeto são: Profa. Ma. Eliane Alves de Oliveira (orientanda / aluna do curso de Doutorado em Educação Matemática – PUC/SP) e Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori (orientadora – PUC/SP).

Salientamos que estaremos disponíveis para quaisquer esclarecimentos, antes, durante e após a conclusão da pesquisa, sobre a metodologia e outros assuntos a ela relacionados, podendo nos contatar por meio dos dados que seguem:

Pesquisadora Responsável: Eliane Alves de Oliveira. e-mail: ane.oli@hotmail.com

Comitê de Ética em Pesquisa da PUC/SP: Edif. Reitor Bandeira de Mello, andar térreo, sala 63-C, R. Ministro Godói, 969 – Perdizes – São Paulo – SP – CEP: 05015-001 – e-mail:cometica@pucsp.br – Tel./FAX: (11) 3670-8466.

____ Belém (PA), ___/ ___/ ___.

Eliane Alves de Oliveira
Pesquisadora Responsável

Tendo sido orientado quanto ao teor de tudo aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do referido estudo, ricos e benefícios de minha participação, manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por conta de minha participação ou desistência.

____ Belém (PA), ___/ ___/ ___.

Participante da Pesquisa

ANEXO

ANEXO A

Parecer do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP - PUC/SP)[3]

PUC-SP

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO- PUC/SP

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Equações Diferenciais: estratégias e metodologias de ensino em um Curso de Engenharia.
Pesquisador: Eliane Alves de Oliveira
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 39285314.7.0000.5482
Instituição Proponente: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 930.748
Data da Relatoria: 30/11/2014

Apresentação do Projeto:
Trata-se de protocolo de pesquisa para elaboração de Tese de Doutorado no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPG em EDM), vinculado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (FCET) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).
Projeto de pesquisa de autoria de Eliane Alves de Oliveira, sob a orientação da Profa. Dra. Sonia Igliori.

Objetivo da Pesquisa:
Investigar quais componentes devem estar presentes em estratégias e metodologias de ensino que viabilizem uma melhor compreensão acerca das Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em Cursos de Graduação em Engenharia Ambiental e em Engenharia de Produção da Universidade do Pará.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
Riscos: poucos
Benefícios: os resultados da pesquisa podem indicar encaminhamentos para a melhor aprendizagem sobre assunto dos alunos .

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes **CEP:** 05.015-001
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br

Página 01 de 02

[3] Após a submissão para a análise do CEP – PUC/SP, o projeto passou por alguns ajustes e o título da pesquisa foi modificado para “Uma Engenharia Didática para abordar o conceito de Equação Diferencial em cursos de Engenharia”.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O projeto é relevante pois inúmeras pesquisas tem alertado pelos inúmeros problemas de compreensão dos alunos ao tratarem com Calculo Diferencial e Integral, causa maior da grande evasão que ocorre nos primeiros anos universitários.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

O termo de consentimento livre e esclarecido está de acordo com as normas.

Recomendações:

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

A analise apresentada sugere que recomendemos a aprovação do presente projeto de pesquisa.

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

Considerações Finais a critério do CEP:

SAO PAULO, 09 de Janeiro de 2015

Assinado por:
Edgard de Assis Carvalho
(Coordenador)

Endereço: Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C
Bairro: Perdizes **CEP:** 05.015-001
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br